

01173

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ingeniería

**MODELACIÓN Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL
DE TRAYECTORIAS TRIDIMENSIONALES**

ROBERTO MARTÍNEZ MARTÍNEZ

TESIS

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COMO UN REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

(MECÁNICA)

Director de Tesis: Dr. Luis Reyes Ávila

CD. UNIVERSITARIA, OCTUBRE DE 1997.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres por todo su apoyo y su confianza depositada en mí durante esta etapa de mi formación profesional. A ellos también les agradezco el haberme dado en mi vida su ejemplo de fe, trabajo y buena voluntad.

A mis hermanos que siempre han creído en mí y que me han estimulado a seguir adelante en la culminación de esta etapa de mis estudios. Particularmente a mi abuela Guadalupe y mi tío Rogelio que me apoyaron determinadamente mi decisión de realizar estudios de posgrado y, por su apoyo inconmensurable a mi tía Niní.

Al Dr. Luis Reyes Ávila por su ejemplo de trabajo y todo su apoyo como ser humano.

A mis compañeros con los cuales he crecido como profesionista y como ser humano.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme su apoyo económico sin el cual esta etapa de mis estudios hubiera sido casi imposible de realizar.

Contenido

		pag.
	Prólogo	III
	Simbología	IV
Capítulo 1	Introducción	1
Capítulo 2	Biterniones	3
2.1	<i>Estructura algebraica</i>	3
2.2	<i>El plano euclidiano ρ</i>	10
Capítulo 3	Quaterniones	14
3.1	<i>Estructura algebraica</i>	14
3.2	<i>El espacio euclidiano ξ</i>	21
Capítulo 4	Movimiento Rígido	22
4.1	<i>Definiciones básicas</i>	22
4.2	<i>Rotaciones en el plano euclidiano</i>	23
4.3	<i>Rotaciones en el espacio euclidiano</i>	28
4.4	<i>Descripción de rotaciones en ρ</i>	29
4.5	<i>Descripción de rotaciones en ξ</i>	30
Capítulo 5	Intersección de Trayectorias	31
5.1	<i>Definición general del problema</i>	31
5.2	<i>El caso bi-dimensional</i>	31
5.3	<i>El caso tri-dimensional</i>	36
Capítulo 6	El Movimiento de los Manipuladores	39
6.1	<i>Definición del problema en ρ</i>	39
6.2	<i>El movimiento en ρ</i>	40
6.3	<i>El manipulador de dos grados de libertad</i>	44
6.3.1	<i>Cinemática directa</i>	45
6.3.2	<i>Cinemática inversa</i>	52

	6.4	<i>Definición del problema en ξ</i>	55
	6.5	<i>El movimiento en ξ</i>	57
	6.6	<i>El manipulador de tres grados de libertad</i>	60
	6.6.1	<i>Cinemática directa</i>	60
	6.6.2	<i>Cinemática inversa</i>	70
Capítulo	7	<i>Simulación</i>	75
	7.1	<i>El caso bi-dimensional</i>	75
	7.2	<i>El caso tri-</i>	80
		<i>Conclusiones</i>	94
		<i>Bibliografía</i>	95

Prólogo

Imagínese que un objeto describe una trayectoria determinada. Se desea que este objeto sea interceptado por algún punto de una cadena cinemática (abierta o cerrada), la cual inicia su movimiento después de un intervalo de tiempo respecto al instante en que se genera la trayectoria del objeto. Además, se requiere que el punto de la cadena cinemática, describa una trayectoria específica.

En este trabajo son presentados estos eventos. Se utilizan manipuladores rotacionales de dos y tres grados de libertad para interceptar el objeto. En el capítulo 2 se presenta la estructura algebraica de los Bitemiones (Cuenca [2]) para aplicarla al manipulador de dos grados de libertad. La modelación matemática para el movimiento del manipulador de tres grados de libertad, se realiza aplicando el álgebra de Cuaterniones introducida en el capítulo 3, basándose en el trabajo de Reyes[1]. En el capítulo 4 se presentan dos transformaciones con ciertas características desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos, utilizando el álgebra de Bitemiones y el álgebra de Cuaterniones para representar rotaciones de cuerpos "rígidos". La modelación matemática de la intersección de trayectorias, una del objeto y otra del extremo de los manipuladores, es presentada en el capítulo 5. En el capítulo 6 se modela matemáticamente el movimiento de los manipuladores, utilizando el álgebra de Bitemiones para el manipulador de dos grados de libertad, y el álgebra de Cuaterniones para el manipulador de tres grados de libertad (Márquez [7], Méndez [8]) . Finalmente, la simulación de los dos casos analizados es presentada en el capítulo 7 utilizando el software MATHEMATICA®[3].

SIMBOLOGÍA

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{R}^2	Conjunto de duplas ordenadas de números reales.
\mathbb{R}^4	Conjunto de 4-uplas ordenadas de números reales.
\mathbb{R}	Campo de los números reales.
\mathbb{R}^2	Campo de pares ordenados de números reales.
\mathbb{B}	Álgebra de Biterniones.
ε	Espacio físico de puntos.
\mathcal{E}	Plano euclidiano.
e_i	Base ortonormal.
Ω_i	Sistema de coordenadas cartesianas.
\mathfrak{R}^2	Espacio vectorial real de dimensión 2.
\mathfrak{R}^4	Espacio vectorial real de dimensión 4.
\mathbb{Q}	Álgebra de Cuaterniones.
$\mathbb{Q}_R, \mathbb{Q}_V$	Subespacios vectoriales de \mathbb{Q} .
ξ	Espacio Euclidiano.
ζ	Espacio vectorial asociado a ξ .
β	Cuerpo material.
f	Función de deformación de β
R	Rotación de β .
$\mathfrak{R}(\zeta, \zeta)$	Espacio vectorial de rotaciones sobre R .
$\mathcal{O}(\zeta, \zeta)$	Espacio vectorial sobre R , de tensores ortogonales.
$\mathcal{L}(\zeta, \zeta)$	Espacio vectorial sobre R , de tensores lineales.
I	Tensor identidad.
T_p	Trayectoria de la partícula 'p'.
\oplus	Operación binaria de adición para \mathbb{R}^2 .
$*$	Operación binaria de multiplicación para \mathbb{R}^2 .
\oplus	Operación binaria de adición para \mathbb{R}^4 .
\star	Operación binaria de multiplicación para \mathbb{R}^4 .
$\langle \bullet, \bullet \rangle$	Función producto interno.
$\ \bullet\ $	Función norma.
\bullet	Operación de multiplicación por escalar.
\oplus	Operación binaria de adición entre subespacios vectoriales.
\spadesuit	Prueba de propiedades.
\square	Prueba de teoremas.

Capítulo 1

Introducción

La principal función de un ingeniero es, al margen del campo de su formación, conocer las nuevas tecnologías para mejorarlas, con el fin de ofrecer soluciones a problemas reales (de tecnología) que brinden un mejor nivel de vida para la sociedad. Sin embargo para mejorar las tecnologías no es suficiente el conocimiento de éstas, se debe tener un panorama correcto de los mecanismos que generan los fenómenos físicos, además de poseer las herramientas matemáticas necesarias para representar tales fenómenos y entonces poder controlarlos. En la mecánica de los cuerpos "rígidos" el fenómeno de interés es el *movimiento* de éstos así como las "*fuerzas*" que lo producen, es decir, *la cinemática y la dinámica*. En el campo de la cinemática el movimiento es determinado por funciones de *traslación* y *rotación* que tienen como dominio a las puntos de algún cuerpo y como rango a un espacio vectorial que se asocia con el espacio físico de puntos en donde se realiza el movimiento. Este espacio vectorial puede ser de dimensión 1, 2 o 3 dependiendo si el movimiento de los puntos del cuerpo describen trayectorias rectas, en un plano o en el espacio. Una vez que se conocen las características esenciales del movimiento, es posible, si se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias, representar este movimiento definiendo funciones de *traslación* y *rotación*.

En el marco teórico de la mecánica de los medios continuos existe toda una metodología que nos permite considerar a ciertas funciones, como *traslaciones* o *rotaciones* una vez que se ha cumplido con algunas restricciones de tipo físico-matemático.

El álgebra de Bitermiones y el álgebra de Cuaterniones que se presentan aquí y en algunas de las referencias utilizadas, son la base matemática para definir las funciones de rotación de cuerpos "rígidos" que se mueven en el plano o espacio euclidianos.

Por otra parte, la intersección de trayectorias que son descritas por algún punto de dos cuerpo en movimiento es un problema interesante, sobre todo en el campo industrial. Siendo un fenómeno espacio-tiempo, la intersección de trayectorias puede tener una gran cantidad de restricciones que deben cumplirse como por ejemplo:

Características de movimiento.

- a) Instante de la generación de las trayectorias.
- b) Instante de intersección.
- c) velocidad inicial
- d) velocidad en el instante de la intersección
- e) ángulo relativo de intersección entre las trayectorias

Con algunas de las restricciones anteriores como el instante de la generación de las trayectorias e instante de intersección, una vez que se conocen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que será intersectada, se forma un sistema de ecuaciones algebraicas que deberán resolverse para determinar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que va a hacer la intersección. Al tener esta ecuación, se resuelve la *cinemática inversa* para que el extremo de los manipuladores de dos y tres grados de libertad realice esa trayectoria.

Como los sistemas de ecuaciones que resultan para resolver la cinemática inversa de los dos casos son extensos, se utiliza el método numérico de Newton. Este método está integrado en el software MATHEMATICA® el cual se utiliza en este trabajo.

Capítulo 2

Biterniones.

2.1.- Estructura Algebraica.

A partir de el álgebra de los números complejos se establece una transformación con la cual se pueden modelar rotaciones de cuerpos "rígidos". Cuando utilizamos esta álgebra para tal fin, la llamaremos álgebra de *Biterniones*. Por lo tanto se definen las operaciones binarias de adición " \oplus " y multiplicación "*" para \mathbb{R}^2 de modo que las duplas (\mathbb{R}^2, \oplus) y $(\mathbb{R}^2, *)$ son grupos aditivo conmutativo y grupo multiplicativo conmutativo. También se definen la operación multiplicación por escalar " \odot ", la función producto interno " $\langle \odot, \odot \rangle$ " y la función norma " $\|\odot\|$ " para formar la estructura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot, \langle \odot, \odot \rangle)$, la cual es un espacio vectorial con producto interno. Por lo tanto se tiene que, la estructura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot, \langle \odot, \odot \rangle, \|\odot\|)$ es un espacio vectorial normado.

Definimos el conjunto \mathbb{R}^2 como aquel que está integrado por todos los pares ordenados $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

Definición 2.1.1.- Sean $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 ,la operación binaria de adición $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define como

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) ; \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^2$$

Definición 2.1.2.- Sean $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 ,la operación binaria de multiplicación se define como la operación $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2$$

Teorema 2.1.1.- La terna $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ es un cuerpo conmutativo (campo).

Demostración:

Propiedades de la adición:

i).- $\{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} \oplus (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \oplus \{ (y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2) \}$
 para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} \oplus (z_1, z_2) &= \{ x_1 + y_1, x_2 + y_2 \} \oplus (z_1, z_2) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\
 &= (x_1, x_2) \oplus \{ (y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2) \}
 \end{aligned}$$

asociatividad ♣

ii).- $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
 &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\
 &= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

conmutatividad ♣

iii).- Para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe un elemento (j, k) tal que
 $(x_1, x_2) \oplus (j, k) = (x_1, x_2)$

Esto es

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) \oplus (j, k) &= (x_1 + j, x_2 + k) \\
 x_1 + j &= x_1 & (1) \\
 x_2 + k &= x_2 & (2)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2) se tiene que $(j, k) = (0, 0)$

existencia de elemento neutro ♣

iv).- Para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe un elemento (m, n) tal que
 $(x_1, x_2) \oplus (m, n) = (0, 0)$

Esto es

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) \oplus (m, n) &= (x_1 + m, x_2 + n) \\
 x_1 + m &= 0 & (3) \\
 x_2 + n &= 0 & (4)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (3) y (4) se tiene que : $(m, n) = (-x_1, -x_2)$

existencia de elemento simétrico ♣

Propiedades de la multiplicación:

i).- $\{ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \} * (z_1, z_2) = (x_1, x_2) * \{ (y_1, y_2) * (z_1, z_2) \}$
 para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 \{ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \} * (z_1, z_2) &= \{ x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1 \} * (z_1, z_2) \\
 &= \{ (x_1 y_1 - x_2 y_2) z_1 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) z_2, (x_1 y_1 - x_2 y_2) z_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) z_1 \} \\
 &= \{ x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_1 - x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_2, x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 \} \\
 &= \{ x_1 y_1 z_1 - x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1, x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2 \} \\
 &= \{ x_1 (y_1 z_1 - y_2 z_2) - x_2 (y_1 z_2 + y_2 z_1), x_1 (y_1 z_2 + y_2 z_1) + x_2 (y_1 z_1 - y_2 z_2) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ (x_1, x_2) * \{ y_1 z_1 - y_2 z_2, y_1 z_2 + y_2 z_1 \} \\
 &= (x_1, x_2) * \{ (y_1, y_2) * (z_1, z_2) \}
 \end{aligned}$$

asociatividad ♣

ii).- $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$ para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
 &= (y_1 x_1 - y_2 x_2, y_1 x_2 + y_2 x_1) \\
 &= (y_1, y_2) * (x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

conmutatividad ♣

iii).- Para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe un elemento (p, q) tal que $(x_1, x_2) * (p, q) = (x_1, x_2)$

Esto es

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) * (p, q) &= (x_1 p - x_2 q, x_1 q + x_2 p) \\
 x_1 p - x_2 q &= x_1 & (5) \\
 x_1 q + x_2 p &= x_2 & (6)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (5) y (6) se tiene que $(p, q) = (1, 0)$

existencia de elemento neutro ♣

iv).- Para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ existe un elemento (r, s) tal que $(x_1, x_2) * (r, s) = (1, 0)$

Esto es

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) * (r, s) &= (x_1 r - x_2 s, x_1 s + x_2 r) \\
 x_1 r - x_2 s &= 1 & (7) \\
 x_1 s + x_2 r &= 0 & (8)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (7) y (8) se tiene que $(r, s) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$

existencia de elemento inverso ♣

Propiedades de distributividad:

i).- $(x_1, x_2) * \{ (y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2) \} = (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) * (z_1, z_2)$
para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) * \{ (y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2) \} &= (x_1, x_2) * (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\
 &= \{ x_1(y_1 + z_1) - x_2(y_2 + z_2), x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_1 + z_1) \} \\
 &= \{ x_1 y_1 + x_1 z_1 - x_2 y_2 - x_2 z_2, x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1 \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ x_1 y_1 - y_2 x_2 + x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 \} \\
 &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \oplus (x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1) \\
 &= (x_1, x_2) * (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) * (z_1, z_2)
 \end{aligned}$$

♠

ii).- $\{(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)\} * (z_1, z_2) = (x_1, x_2) * (z_1, z_2) \oplus (y_1, y_2) * (z_1, z_2)$
 para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in R^2$.

$$\begin{aligned}
 \{(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)\} * (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) * (z_1, z_2) \\
 &= \{(x_1 + y_1) z_1 - (x_2 + y_2) z_2, (x_1 + y_1) z_2 + (x_2 + y_2) z_1\} \\
 &= \{x_1 z_1 + y_1 z_1 - x_2 z_2 - y_2 z_2, x_1 z_2 + y_1 z_2 + x_2 z_1 + y_2 z_1\} \\
 &= \{x_1 z_1 - x_2 z_2 + y_1 z_1 - y_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1\} \\
 &= \{(x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1) \oplus (y_1 z_1 - y_2 z_2, y_1 z_2 + y_2 z_1)\} \\
 &= (x_1, x_2) * (z_1, z_2) \oplus (y_1, y_2) * (z_1, z_2)
 \end{aligned}$$

♠

□

Así, la estructura $(R^2, \oplus, *)$ es un cuerpo conmutativo (campo) que la denotaremos como R^2 , y las duplas (R^2, \oplus) , $(R^2, *)$ son grupos aditivo y multiplicativo conmutativos.

Definición 2.1.3.- Sea $\alpha \in R$ (el campo de los números reales). La operación $\bullet : R \times R^2 \rightarrow R^2$ definida como

$$\alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha \bullet x_1, \alpha \bullet x_2) \text{ para todo } (x_1, x_2) \in R^2 \text{ y } \alpha \in R.$$

el llamada *multiplicación por escalar*.

Teorema 2.1.2.- La terna (R^2, \oplus, \bullet) es un espacio vectorial sobre el campo R .

Demostración:

En el teorema 2.1.1 se demostró que la dupla (R^2, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo, de modo que sólo queda demostrar que la multiplicación por escalar (\bullet) cumple con las condiciones necesarias para que (R^2, \oplus, \bullet) sea un espacio vectorial sobre el campo R .

Propiedades de la multiplicación por escalar:

i).- Para todo $(x_1, x_2) \in R^2$ existe un $\alpha \in R$, tal que
 $\alpha \bullet (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

Esto es

$$\alpha \circ x_1 = x_1$$

$$\alpha \circ x_2 = x_2$$

Por lo tanto $\alpha = 1$

existencia de elemento neutro \spadesuit

ii).- Sean $\alpha, \beta \in R$ y $(x_1, x_2) \in R^2$, entonces

$$(\alpha\beta) \circ (x_1, x_2) = \alpha \circ (\beta x_1, \beta x_2)$$

Esto es

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \circ (x_1, x_2) &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) \\ &= \alpha \circ (\beta x_1, \beta x_2) \end{aligned}$$

asociatividad \spadesuit

Propiedades de distributividad:

i).- Se tiene que $\alpha \circ \{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} = \alpha \circ (x_1, x_2) \oplus \alpha \circ (y_1, y_2)$ para todo $\alpha \in R$ y $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$.

Esto es

$$\begin{aligned} \alpha \circ \{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} &= \alpha \circ (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= \{ \alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2) \} \\ &= \{ (\alpha x_1 + \alpha y_1), (\alpha x_2 + \alpha y_2) \} \\ &= \{ (\alpha x_1, \alpha x_2) \oplus (\alpha y_1, \alpha y_2) \} \\ &= \alpha \circ (x_1, x_2) \oplus \alpha \circ (y_1, y_2) \end{aligned}$$

\spadesuit

ii).- Por otro lado $\{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} \circ \alpha = (x_1, x_2) \circ \alpha \oplus (y_1, y_2) \circ \alpha$ para todo $\alpha \in R$ y $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$.

Esto es

$$\begin{aligned} \{ (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) \} \circ \alpha &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \circ \alpha \\ &= \{ (x_1 + y_1)\alpha, (x_2 + y_2)\alpha \} \\ &= \{ (x_1\alpha + y_1\alpha), (x_2\alpha + y_2\alpha) \} \\ &= \{ (x_1\alpha, x_2\alpha) \oplus (y_1\alpha, y_2\alpha) \} \\ &= (x_1, x_2) \circ \alpha \oplus (y_1, y_2) \circ \alpha \end{aligned}$$

\spadesuit

\square

Así, la estructura (R^2, \oplus, \circ) forma un espacio vectorial sobre el campo R y lo denotaremos como \mathfrak{R}^2 .

Definición 2.1.4.- La función $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^2$$

es llamada *producto interno*¹.

Teorema 2.1.3.- La función dada en la definición 2.1.4, es un producto interno para \mathbb{R}^2 .

Demostración:

Sean $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $z=(z_1, z_2)$ elementos de \mathbb{R}^2 , entonces

i).- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Para demostrar (i), se tiene que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 \\ &= y_1 x_1 \\ &= \langle y, x \rangle, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

conmutatividad \blacktriangle

ii).- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y \rangle &= (\alpha x_i) y_i \\ &= \alpha(x_i y_i) = \alpha \langle x, y \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \\ &= x_i (\alpha y_i) \\ &= \langle x, \alpha y \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

asociatividad \blacktriangle

iii).- $\langle x \oplus y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

Esto es

$$\begin{aligned} \langle x \oplus y, z \rangle &= (x_i + y_i) z_i \\ &= (x_i z_i) + (y_i z_i) \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ para todo } x, y, z \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

distributividad \blacktriangle

iv).- $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y $x \neq 0$.

Esto es

¹ Para el resto de este trabajo denotaremos $\sum_{i=1}^k x_i y_i$ simplemente como xy_i .

$$\langle x, x \rangle = x_i^2 > 0 \text{ para todo } x_i \neq 0.$$

▲

v).- $\langle x, x \rangle = 0$, si y sólo si $x = 0 \in \mathbb{R}^2$

Esto es $\langle x, x \rangle = x_i^2 = 0$ si y sólo si $x_i = 0$.

▲

□

Definición 2.1.5.- La función $|\cdot|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2$$

es llamada, la *norma euclidiana* de x .

Teorema 2.1.4.- La función dada en la definición 2.1.5 es una norma para \mathbb{R}^2 .

Demostración:

Sea $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

i).- $|\alpha \cdot x| = |\alpha| |x|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot x| &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{1/2} \\ &= [\alpha^2 x_i^2]^{1/2} \\ &= (\alpha^2)^{1/2} (x_i^2)^{1/2} \\ &= (\alpha^2)^{1/2} \langle x, x \rangle^{1/2} \\ &= |\alpha| |x|, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

▲

ii).- $|x \oplus y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |x \oplus y| &= \langle (x \oplus y), (x \oplus y) \rangle^{1/2} \\ &= [(x \oplus y)_i^2]^{1/2} \\ &= [x_i^2 + y_i^2 + 2 x_i y_i]^{1/2} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$|x| + |y| = [x_i^2]^{1/2} + [y_i^2]^{1/2}$$

La restricción que estamos tratando se puede presentar como

$$|x \oplus y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

donde $|x \oplus y|^2 = x_i^2 + y_i^2 + 2 x_i y_i$
 $= |x|^2 + |y|^2 + 2 x_i y_i$ (a)

y $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$ (b)

de (a) , (b) se deduce que para cumplir esta condición , se deberá satisfacer lo siguiente.

$$x_i y_i \leq |x| |y|$$

$$\leq (x_i^2)^{1/2} (y_i^2)^{1/2}$$

lo cual resulta cierto para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

iii).- $|x| > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y $x \neq 0$.

Sea $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$, entonces

$$|x| = (x_i^2)^{1/2} > 0$$

para todo $x_i \neq 0$.

iv).- $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0 \in \mathbb{R}^2$.

Sea $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$, entonces

$$|x| = (x_i^2)^{1/2} = 0$$

para todo $x_i = 0$.

Para capítulos posteriores, llamaremos *Bitemiones* a la los elementos de la estructura algebraica $(\mathbb{R}^2, \oplus, *, \cdot)$ la cual denotaremos por B .

2.2.- El plano euclidiano.

Las estructuras algebraicas formadas en la sección anterior serian de poca utilidad para el propósito de este trabajo de tesis si no se relacionaran con eventos físicos. Por tal motivo, el objetivo de esta sección es formar una estructura algebraica que llamaremos espacio afin que será una especie de 'interfase' entre elementos algebraicos y puntos físicos. De esta forma los puntos del espacio físico y los vectores de \mathbb{R}^2 , estarán en correspondencia biyectiva (uno a uno) y se podrán

representar matemáticamente eventos físicos como las rotaciones de un cuerpo rígido por medio de una estructura mas completa que llamaremos plano euclidiano [5].

Definición 2.2.1.- Sea ε un conjunto (el espacio físico) cuyos elementos llamamos puntos. La estructura $(\mathfrak{R}^2, \varepsilon, \Psi)$ es un espacio afín que denotamos como A^2 , si la transformación Ψ que a todo par de puntos de ε les asocia uno y sólo un vector de \mathfrak{R}^2 , posee las siguientes propiedades:

Siendo $\Psi: \varepsilon \times \varepsilon \rightarrow \mathfrak{R}^2$; $\Psi(A,B)=b$ para todo $(A,B) \in \varepsilon \times \varepsilon$ y $b \in \mathfrak{R}^2$

- a).- Para todo $P \in \varepsilon$ y $b \in \mathfrak{R}^2$ existe un $Q \in \varepsilon$ y sólo uno, tal que $\Psi(P,Q) = b$.
- b).- Para todo $A,B,C \in \varepsilon$ se tiene que $\Psi(A,B) \oplus \Psi(B,C) = \Psi(A,C)$.

Para formar nuestro plano euclidiano es necesario que el espacio vectorial \mathfrak{R}^2 sea normado. En este contexto la imagen de $|\cdot|$ aplicada a cualquier vector $b \in \mathfrak{R}^2$ significa la longitud de éste o, la distancia entre los dos puntos que lo definen bajo la transformación ' Ψ '.

Definición 2.2.2.- El ángulo $\theta_{\Psi(A,B),\Psi(C,D)}$ entre dos vectores $\Psi(A,B), \Psi(C,D) \in \mathfrak{R}^2$ cumple con la siguiente relación:

$$\text{Cos}\theta_{\Psi(A,B),\Psi(C,D)} = \frac{\langle \Psi(A,B), \Psi(C,D) \rangle}{\|\Psi(A,B)\| \|\Psi(C,D)\|}$$

Es evidente que si la distancia entre dos puntos es igual a cero ($|\Psi(A,B)|=0$) esto implica que $A=B$. De esta forma se puede asignar el elemento $0 \in \mathfrak{R}^2$ a cualquier punto de ε . Elegimos entonces el punto $O \in \varepsilon$, que llamaremos origen de coordenadas de nuestro espacio físico, al cual asignamos el vector $0 \in \mathfrak{R}^2$ de modo que a todo punto $X \in \varepsilon$ le corresponde el vector $x \in \mathfrak{R}^2$. Así al vector $x \in \mathfrak{R}^2$ lo llamaremos, vector de posición de $X \in \varepsilon$ con respecto a $O \in \varepsilon$. Así entonces, se establece una correspondencia biyectiva entre los elementos de ε y \mathfrak{R}^2 .

Definición 2.2.3.- Definimos a la transformación Ψ^2 como $\Psi(O,X) = x - 0 = x$ para todo $X \in \varepsilon$ y todo $x \in \mathfrak{R}^2$ con 'O' como el origen de coordenadas.

Teorema 2.2.1.- La estructura $A^2=(\mathfrak{R}^2,\varepsilon,\Psi)$ con Ψ dada como en la definición 2.2.1, es un espacio afín.

² Por simplicidad también se usa indistintamente $\Psi(O,X)$ como $\Psi(X)$ cuando el punto O es el origen.

Demostración:

a).- Para todo $A \in \varepsilon$ y $b \in \mathfrak{R}^2$, existe un único $B \in \varepsilon$ tal que $\Psi(A, B) = b$.

De la definición 2.2.3 se establece que si

$\Psi(A, B) = b$ y $\Psi(A, C) = b$ entonces

$$b - a = c - a \quad (a, b, c \in \mathfrak{R}^2)$$

lo que implica que $b = c$ y por lo tanto B y C es el mismo punto.

♠

b).- $\Psi(A, B) \oplus \Psi(B, C) = \Psi(A, C)$ para todo $(A, B), (B, C), (A, C) \in \varepsilon \times \varepsilon$.

Asígnese a los puntos A, B y C , los vectores a, b y $c \in \mathfrak{R}^2$ respectivamente.

Entonces

$$\Psi(A, B) = b - a; \quad \Psi(A, C) = c - a; \quad \Psi(B, C) = c - b \quad \text{y}$$

$$b - a \oplus c - b = c - a \quad \text{por la existencia del inverso aditivo}$$

$$c - a = c - a \quad \text{lo cual demuestra esta propiedad.}$$

♠

Así, la estructura $(\mathfrak{R}^2, \varepsilon, \Psi)$ es un espacio afín.

□

Definición 2.2.4.- La estructura $(A^2, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|, \text{Cos}\theta_{\{\Psi(A, B), \Psi(C, D)\}})$ la llamamos **Plano euclidiano** y lo denotaremos como \wp .

Ahora si $\Psi(X) = x$, es natural identificar el punto X con las coordenadas del vector x respecto a una base de \mathfrak{R}^2 .

Definición 2.2.5.- Sea $e_i = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de \mathfrak{R}^2 . Definimos las coordenadas x_i del vector $x \in \mathfrak{R}^2$ con respecto a la base e_i como

$$x_i = \langle x, e_i \rangle$$

Definición 2.2.6.- Las coordenadas cartesianas X_i de cualquier punto $X \in \varepsilon$ respecto de un sistema de coordenadas definido por una base ortonormal e_i y un origen 'O', son

$$X_i = \langle \Psi(X), e_i \rangle$$

Frecuentemente en el estudio del movimiento de los cuerpos, es necesario representar las coordenadas de un punto, en diferentes sistemas de coordenadas. Para llevar a cabo esto, a continuación analizamos la forma de hacer un cambio de sistema de coordenadas, lo cual implica cambiar el origen, cambiar de base ó ambas cosas.

Supongamos primero que se tiene un sistema de coordenadas Ω_1 definido por el origen O y la base e_i . Se desea cambiar de un origen O , a un origen O' cuyas coordenadas en el sistema Ω_1 son α_i , sin cambiar la base e_i . Entonces para todo punto $X \in A^2$ tenemos que

$$\Psi(O') \oplus \Psi(O'X) = \Psi(X)$$

Las coordenadas de $\Psi(X)$ son las coordenadas del punto X en el sistema Ω_1 . Las coordenadas del vector $\Psi(O'X)$ son las coordenadas del punto X en el sistema Ω_2 formado por el nuevo origen O' y la misma base e_i . Las coordenadas del vector $\Psi(O')$, son las coordenadas α_i del nuevo origen con respecto al sistema Ω_1 . Entonces

$$X'_i = X_i - \alpha_i \text{ son las coordenadas del punto } X \text{ en el sistema } \Omega_2.$$

Supongamos ahora que el origen O de coordenadas no varía, pero la base e_i sí se cambia a otra base e_k . Denotamos la matriz de cambio de base como $[a_{ik}]$, entonces

$$e_k = [a_{ki}] e_i$$

Puesto que las coordenadas del punto X son las coordenadas del vector x , resulta que

$$X_k = [a_{ki}] X_i \text{ son las coordenadas del punto } X \text{ en la base } e_k.$$

Por último, si se cambia el origen y la base, tendremos lo siguiente:

$$X_i = \alpha_i + [a_{ik}] X'_k \text{ son las coordenadas de un punto } X \text{ en el sistema } \Omega_1.$$

α_i : Coordenadas de un nuevo origen O' respecto al sistema Ω_1 .

$[a_{ik}]$: Matriz de cambio de base de e_k a e_i .

X'_k : Coordenadas del punto X en sistema de coordenadas Ω_2 formado por el origen O' y la base e_k .

Capítulo 3

Quaterniones

3.1.-Estructura algebraica.

En este capítulo se presenta una estructura extendida y generalizada en \mathbb{R}^4 del álgebra de bitemiones que se formuló en el capítulo precedente. Dicha estructura será el álgebra de *Quaterniones* la cual se utilizará para representar rotaciones de cuerpos "rígidos", por ejemplo, en el espacio euclidiano. Se procede a formar la estructura algebraica de los llamados Quaterniones. Al principio se define el conjunto \mathbb{R}^4 y después se define la operación binaria de adición " \oplus ", la operación multiplicación por escalar " \odot ", el producto interno " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " y la norma " $|\cdot|$ " para formar diferentes estructuras algebraicas que serán útiles. Después de formar estas estructuras, se define la operación binaria de multiplicación " \star " entre Quaterniones como una extensión en \mathbb{R}^4 de la multiplicación de Bitemiones para formar la estructura $(\mathbb{R}^4, \oplus, \star, \odot)$.

Definición 3.1.1.- El conjunto \mathbb{R}^4 de 4-uplas ordenadas $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como

$$\mathbb{R}^4 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

Definición 3.1.2.- Se define la operación binaria de adición $\oplus : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

Definición 3.1.3.- Se define la función multiplicación por escalar $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como

$$\alpha \odot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \text{ para todo } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.1.1.- La terna $(\mathbb{R}^4, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Demostración:

Propiedades de la adición:

Sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ elementos de \mathbb{R}^4 , entonces

i).- $\{ x \oplus y \} \oplus z = x \oplus \{ y \oplus z \}$ para todo x, y, z .

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4)) \oplus (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \oplus (z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3, x_4 + y_4 + z_4) \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3, y_4 + z_4) \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus ((y_1, y_2, y_3, y_4) \oplus (z_1, z_2, z_3, z_4)) \\ &= x \oplus \{ y \oplus z \} \end{aligned}$$

para todo x, y, z .

asociatividad ♣

ii).- $x \oplus y = y \oplus x$, para todo x, y .

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, y_4 + x_4) \\ &= (y_1, y_2, y_3, y_4) \oplus (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

para todo x, y .

conmutatividad ♣

iii).- Para todo elemento x existe un elemento "0" llamado elemento neutro de la adición, tal que

$$0 \oplus x = x \oplus 0 = x$$

de la definición es evidente que este elemento es $0 = (0, 0, 0, 0)$.

existencia de elemento neutro ♣

iv).- Para todo elemento x existe un elemento " $-x$ " llamado elemento simétrico de la adición, tal que

$$x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = 0$$

también aquí es evidente, de la definición, que $-x = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$.

existencia del elemento simétrico ♣

Propiedades de la multiplicación por escalar.

i).- Para todo elemento x existe uno y sólo un elemento $\alpha \in R$ tal que

$$\alpha \cdot x = x$$

de la definición 3.1.3 es claro que este elemento es $\alpha = 1$.

existencia de elemento neutro ♣

ii).- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ con $\beta \in R$. Para demostrar esto se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b, c, d)) &= \alpha \cdot (\beta a, \beta b, \beta c, \beta d) \\ &= (\alpha\beta a, \alpha\beta b, \alpha\beta c, \alpha\beta d) \\ &= \alpha\beta \cdot (a, b, c, d) \\ &= (\alpha\beta) \cdot x \end{aligned}$$

asociatividad ♣

iii).- $(\alpha+\beta) \bullet x = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$ con $\beta \in R$. Aquí se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta) \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, (\alpha+\beta)x_3, (\alpha+\beta)x_4) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3, \alpha x_4 + \beta x_4) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \oplus (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3, \beta x_4) \\ &= \alpha \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus \beta \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x \end{aligned}$$

distributividad ♣

iv).- $\alpha \bullet (x \oplus y) = \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y$ para todo $\alpha \in R$. De la misma forma

$$\begin{aligned} \alpha \bullet \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (y_1, y_2, y_3, y_4) \} &= \alpha \bullet (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \alpha(x_3 + y_3), \alpha(x_4 + y_4)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3, \alpha x_4 + \alpha y_4) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \oplus (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3, \alpha y_4) \\ &= \alpha \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus \alpha \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &= \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y \end{aligned}$$

distributividad ♣

□

Por lo tanto, la estructura así presentada (R^4, \oplus, \bullet) es un espacio vectorial sobre R y la denotaremos como \mathfrak{R}^4 .

Definición 3.1.4.- La función $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$ que se define por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{R}^4$$

es llamada *producto interno* de \mathfrak{R}^4 .

Teorema 3.1.2.- La función dada en la definición 3.1.4, es un producto interno para \mathfrak{R}^4 .

Demostración:

Sean $x, y, z \in \mathfrak{R}^4$ y $\alpha \in R$. Entonces

i).- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo x, y . Esto es

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_i y_i \\ &= y_i x_i \\ &= \langle y, x \rangle \quad \text{para todo } x, y. \end{aligned}$$

conmutatividad ♣

ii).- $\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo α . Esto es

$$\begin{aligned} \langle \alpha \cdot x, y \rangle &= \alpha x_i y_i \\ &= \alpha (x_i y_i) \\ &= \alpha \langle x, y \rangle \text{ para todo } \alpha. \end{aligned}$$

asociatividad \blacktriangle

iii).- $\langle (x \oplus y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo x, y, z . Esto es

$$\begin{aligned} \langle (x \oplus y), z \rangle &= (x+y)_i z_i \\ &= x_i z_i + y_i z_i \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \text{ para todo } x, y, z. \end{aligned}$$

distributividad \blacktriangle

iv).- $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \neq 0$. Esto es

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_i x_i \\ &= (x_i)^2 > 0, \text{ para todo } x \neq 0 \end{aligned}$$

propiedad positiva \blacktriangle

v).- $\langle x, x \rangle = 0$, si y sólo si $x=0$. Esto es

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_i x_i \\ \langle x, x \rangle &= x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

si y sólo si $x_i = 0$ para toda i . Además si $x_i = 0$ para toda i , entonces $x=0$.

propiedad positiva \blacktriangle

□

Así la función dada en la definición 3.1.4, es un producto interno para \mathfrak{R}^4 .

Definición 3.1.5.- La función $|\cdot| : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

para todo x , es llamada la *norma euclidiana* de x .

Teorema 3.1.3.- La función dada en la definición 3.1.5, es una norma para \mathfrak{R}^4 .

Demostración:

Sean $x, y \in \mathfrak{R}^4$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

i).- La norma es positiva definida, esto es

$$\begin{aligned} |x| &> 0 \text{ para todo } x. \\ |x| &= 0 \text{ si y sólo si } x=0. \end{aligned}$$

De la definición de norma y de la demostración (iv) y (v) de producto interno se demuestra esto.

positividad definida ♣

ii).- La norma es lineal homogénea, esto es
 $|\alpha \cdot x| = |\alpha| |x|$ para todo x y α .

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot x| &= [(\alpha \cdot x)^2]^{1/2} \\ &= [\alpha^2 x_i^2]^{1/2} \\ &= (\alpha^2)^{1/2} (x_i^2)^{1/2} \\ &= |\alpha| |x| \text{ para todo } x \text{ y } \alpha. \end{aligned}$$

homogeneidad lineal ♣

iii).- La norma satisface la desigualdad triangular
 $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo x, y .

Por un lado tenemos que
 $|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

donde

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle (x + y), (x + y) \rangle \\ &= (x + y)_i^2 \\ &= x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\ &= |x|^2 + 2x_i y_i + |y|^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} |x|^2 + 2x_i y_i + |y|^2 &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ x_i y_i &\leq |x||y| \\ x_i y_i &\leq (x_i^2)^{1/2} (y_i^2)^{1/2} \end{aligned}$$

lo cual se cumple para todo para todo x, y .

desigualdad triangular ♣

□

De esta forma queda demostrado que la función en cuestión, es una norma para \mathbb{R}^4 .

Definición 3.1.7.- Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se define al conjugado \bar{x} de x como

$$\bar{x} = (x_1, -x_2) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Definición 3.1.8.- Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, se define al conjugado \bar{x} de x como

$$\bar{x} = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^4.$$

En seguida se procede a definir la operación binaria de multiplicación en \mathfrak{R}^4 para lo cual se considera lo siguiente.

El espacio vectorial \mathfrak{R}^4 contiene dos subespacios vectoriales que nos interesan, los cuales están formados por los siguientes conjuntos y las operaciones de espacio vectorial

$$Q_1 = \{ (x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathfrak{R}^4 \quad \text{y} \quad Q_2 = \{ (0, 0, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \subset \mathfrak{R}^4$$

Además, $\dim Q_1 = \dim Q_2 = 2$ de modo que Q_1 , Q_2 y \mathfrak{R}^2 pueden ser isomorfos. Y también es claro que $Q_1 \cap Q_2 = \{ 0 \}$ por lo tanto \mathfrak{R}^4 es la suma directa de Q_1 y Q_2 , esto quiere decir que $\mathfrak{R}^4 = Q_1 \oplus Q_2$ como se ilustra a continuación.

Sea $x = (x_1, x_2, 0, 0) \in Q_1$, $y = (0, 0, x_3, x_4) \in Q_2$ entonces todo vector de \mathfrak{R}^4 se puede representar de modo único en la forma

$$x \oplus y \in \mathfrak{R}^4 \text{ para todo } x, y [5].$$

Definición 3.1.9.- Puesto que Q_1 , Q_2 y \mathfrak{R}^2 pueden ser isomorfos, entonces, existen dos transformaciones lineales $T_{1c} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow Q_1$ y $T_{2c} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow Q_2$ definidas como se indica a continuación.

$$T_{1c}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0, 0) \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$$

$$T_{2c}(x_3, x_4) = (0, 0, x_3, x_4) \text{ para todo } (x_3, x_4) \in \mathfrak{R}^2$$

las cuales son dos isomorfismos.

Por lo anterior se puede hacer lo siguiente. Sean $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ elementos de \mathfrak{R}^4 . Entonces

$$u = (x_1, x_2, 0, 0) \oplus (0, 0, x_3, x_4) \text{ y } v = (y_1, y_2, 0, 0) \oplus (0, 0, y_3, y_4)$$

Considerando las siguientes relaciones

$$u_1 = T_{1c}^{-1}(x_1, x_2, 0, 0) = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad \text{y} \quad u_2 = T_{2c}^{-1}(0, 0, x_3, x_4) = (x_3, x_4) \in \mathfrak{R}^2.$$

$$v_1 = T_{1c}^{-1}(y_1, y_2, 0, 0) = (y_1, y_2) \in \mathfrak{R}^2 \quad \text{y} \quad v_2 = T_{2c}^{-1}(0, 0, y_3, y_4) = (y_3, y_4) \in \mathfrak{R}^2.$$

se definirá la multiplicación entre Quaterniones.

Definición 3.1.10.- Sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathfrak{R}^4$ y también sean $u_1 = (x_1, x_2)$, $u_2 = (x_3, x_4)$, $v_1 = (y_1, y_2)$ y $v_2 = (y_3, y_4)$ elementos de \mathfrak{R}^2 . Definimos la operación binaria de multiplicación " \star " entre Quaterniones como

$$x \star y = T_{1c} [u_1 \star v_1 - u_2 \star \bar{v}_2] \oplus T_{2c} [u_1 \star v_2 \oplus u_2 \star \bar{v}_1] \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{R}^4.$$

Desarrollando las operaciones se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 u_1 * v_1 &= (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
 u_2 * v_2 &= (x_3, x_4) * (y_3, y_4) = (x_3 y_3 - x_4 y_4, -x_3 y_4 + x_4 y_3) \\
 u_1 * v_2 &= (x_1, x_2) * (y_3, y_4) = (x_1 y_3 - x_2 y_4, x_1 y_4 + x_2 y_3) \\
 u_2 * v_1 &= (x_3, x_4) * (y_1, y_2) = (x_3 y_1 + x_4 y_2, -x_3 y_2 + x_4 y_1) \\
 \\
 u_1 * v_1 - u_2 * v_2 &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) - (x_3 y_3 - x_4 y_4, -x_3 y_4 + x_4 y_3) \\
 &= (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) \\
 u_1 * v_2 \oplus u_2 * v_1 &= (x_1 y_3 - x_2 y_4, x_1 y_4 + x_2 y_3) \oplus (x_3 y_1 + x_4 y_2, -x_3 y_2 + x_4 y_1) \\
 &= (x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2, x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1) \\
 \\
 x \star y &= T_{1c} [(x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3)] \oplus \\
 &\quad T_{2c} [(x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2, x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1)] \\
 \\
 x \star y &= (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4, x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3, 0, 0) \oplus \\
 &\quad (0, 0, x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2, x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1) \\
 \\
 x \star y &= (x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4, \\
 &\quad x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3, \\
 &\quad x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2, \\
 &\quad x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1)
 \end{aligned}$$

Teorema 3.1.4.- La tema $(\mathbb{R}^4, \oplus, \star)$ es un cuerpo¹.

Este cuerpo, en donde la operación ' \star ' es *no conmutativa*, tiene como elemento identidad e inverso multiplicativos lo siguiente.

$1 = (1, 0, 0, 0)$ como elemento identidad.

$$x^{-1} = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{-x_2}{\|x\|}, \frac{-x_3}{\|x\|}, \frac{-x_4}{\|x\|} \right) = \frac{\bar{x}}{\|x\|} \text{ para } x \in \mathbb{R}^4 \text{ como elemento inverso.}$$

En adelante trabajaremos con la estructura $(\mathbb{R}^4, \oplus, \star, \cdot)$ la cual llamaremos **álgebra de Quaterniones** y que denotaremos por Q . Ahora consideremos los siguientes *subespacios vectoriales*

$$Q_R = \{ (x_1, 0, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} \subset Q$$

$$Q_V = \{ (0, x_2, x_3, x_4) \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} \subset Q$$

¹Para la demostración de este teorema, ver [1].

los cuales son isomorfos a \mathfrak{R} y \mathfrak{R}^3 . Entonces existen dos transformaciones $T_R: \mathfrak{R} \rightarrow Q_R$ y $T_V: \mathfrak{R}^3 \rightarrow Q_V$ definidas por

$$T_R(x_1) = (x_1, 0, 0, 0) \text{ para todo } x_1 \in \mathfrak{R}, \text{ y}$$

$$T_R(x_2, x_3, x_4) = (0, x_2, x_3, x_4) \text{ para todo } (x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{R}^3$$

que son dos isomorfismos.

Por lo tanto, del argumento presentado antes de la definición 3.1.9 se tiene que, siendo $x \in Q$, éste se puede expresar como la suma de dos elementos, x_R y x_V tal que

$$x = x_R \oplus x_V \text{ donde } x_R \in Q_R \text{ y } x_V \in Q_V \text{ para todo } x \in Q.$$

Llamamos a x_R la *parte real* y a x_V la *parte vectorial*, de x . Desde este punto de vista, los Quaterniones cumplen con las siguientes propiedades, como se demuestra en [1].

$$\text{Si } z = x \oplus y \text{ con } x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Q$$

$$\text{entonces } z = z_R \oplus z_V \text{ donde } z_R = x_R y_R - \langle x_V, y_V \rangle, z_V = x_R y_V \oplus y_R x_V \oplus x_V \times y_V$$

donde ' $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' y ' \times ' son el producto interno euclidiano y el producto vectorial conocidos para \mathfrak{R}^3 .

También en [1] se demuestra que para todo $x, y \in Q$.

$$\text{i). } \overline{x \oplus y} = \bar{x} \oplus \bar{y}$$

$$\text{ii). } \overline{x \star y} = \bar{y} \star \bar{x}$$

$$\text{iv). } x \star \bar{x} = \bar{x} \star x \in Q_R$$

$$\text{v). } x \star \bar{x} = \bar{x} \star x = 1 \text{ (para quaterniones de norma unitaria)}$$

3.2 El espacio euclidiano.

Al igual como se desarrolló el concepto de *plano euclidiano* \wp en la sección 2.2, también así se puede proceder para formar una estructura que llamaremos *espacio euclidiano* ξ obviamente cambiando \mathfrak{R}^2 por \mathfrak{R}^3 y donde las funciones, norma, producto interno y coseno son extendidas a \mathfrak{R}^3 . Además siendo la tema $(\mathfrak{R}^3, +, \cdot)$ un espacio vectorial real, la estructura $(A^3, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|, \text{Cos}\theta)$ es la que llamamos *espacio euclidiano* ξ . También aquí, A^3 es la tema $(\mathfrak{R}^3, \varepsilon, \Psi)$ que llamamos espacio afín.

Capítulo 4

Movimiento Rígido.

En este capítulo se define la transformación lineal que se utilizará para modelar las rotaciones de cuerpo rígido en el plano euclidiano (\wp) haciendo uso de el álgebra de bitemiones. También, de forma similar se presenta la transformación que utilizaremos para modelar las rotaciones de cuerpo rígido, en el espacio euclidiano (ξ) donde utilizaremos el álgebra de quatemiones.

4.1.- Definiciones básicas.

En los dos capítulos anteriores se sentaron las bases matemáticas para identificar los puntos del espacio físico con elementos de las estructuras algebraicas formadas. Lo mismo se puede hacer con los puntos de cualquier cuerpo que ocupa regiones del espacio físico (ϵ). Por tal motivo, cuando se habla de un cuerpo β , significa que es un cuerpo el cual ocupa la región $\beta \subset \xi$.

Definición 4.1.1.- Sea β un cuerpo¹. Un movimiento de β , es una función continua

$$m : \beta \times R \rightarrow \xi$$

donde, para cada $t \in R$, $m(\cdot, t)$ es una deformación de β . Por lo tanto, un movimiento es una familia uniparamétrica (con el tiempo $t \in R$ como parámetro) de deformaciones continuas.

Definición 4.1.2.- Sea β un cuerpo. Una deformación de β es una función

$$f : \beta \rightarrow f(\beta) \text{ con } \beta, f(\beta) \subset \xi, \text{ tal que}$$

i).- $f \in E'(\beta, f(\beta))$ es uno a uno y sobre (isomorfismo). Siendo

$$E_v = \{ f : \xi \rightarrow \zeta \mid f \text{ es un campo vectorial.} \}$$

$$E'_v = \{ f : \xi \rightarrow \zeta \mid \text{los } f_i = \langle f, e_i \rangle \text{ son diferenciables y las derivadas } Df_i, \text{ continuos} \}$$

donde ζ es el espacio vectorial asociado a ξ .

ii).- $\det \nabla f > 0$ para todo $x \in \beta$.

Llamamos a β la configuración de referencia y a sus elementos, puntos materiales, además, para cualquier punto $P \in \beta$, $f(P)$ es el lugar ocupado por 'P' en la región $f(\beta) \subset \xi$.

¹ Se maneja el concepto de cuerpo como en [4]

Definición 4.1.3.- El tensor $G(P) = \nabla f(P)$ es llamado el gradiente de 'f' y es una transformación lineal donde $\det G > 0$. Además si G es constante, se dice que la deformación 'f' es homogénea y puede ser representada como²

$$f(P) = f(Q) + G(P-Q) \text{ para todo } P, Q \in B.$$

Un ejemplo importante de éste tipo de deformaciones en donde existe un punto $Q \in B$ tal que $f(Q) = Q$, son las rotaciones de B con respecto a Q. Por lo anterior se tiene que

$$f(P) = Q + R(P-Q) \text{ para todo } P \in B$$

Con R como una rotación. Esto es, $R \in \mathcal{R}(\zeta, \zeta)$ donde

$\mathcal{R}(\zeta, \zeta) = \{ T \in \mathcal{O}(\zeta, \zeta) : \det T > 0 \}$, el espacio vectorial de rotaciones sobre R.

$\mathcal{O}(\zeta, \zeta) = \{ T \in \mathcal{L}(\zeta, \zeta) : T \circ T^T = T^T \circ T = I \}$, es el espacio vectorial sobre R, de tensores ortogonales.

$\mathcal{L}(\zeta, \zeta) = \{ T : \zeta \rightarrow \zeta : T \text{ es lineal} \}$, el espacio vectorial sobre R, de tensores lineales.

Del concepto de distancia entre dos puntos introducido en los dos capítulos anteriores, se da la siguiente definición.

Definición 4.1.4.- Una deformación f de un cuerpo B se dice que es rígida ($|f(P) - f(Q)| = |P - Q|$ para todo $P, Q \in B$) si y sólo si

- i).- f es homogénea, y
- ii).- ∇f es una rotación.

4.2.- Rotaciones en el plano euclidiano (ρ).

Teorema 4.2.1.- La transformación $\rho(x, \bullet) : B \rightarrow B$ con $x \in B$ fijo, definida por

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\|x\|} (x * y) \text{ para todo } y \in B$$

es lineal y ortogonal.

Demostración:

- i)- Si $\rho(x, \bullet)$ es lineal, entonces $\rho(x, y \oplus \alpha * z) = \rho(x, y) \oplus \alpha * \rho(x, z)$ para todo $y, z \in B$ y $\alpha \in R$.

² ver [4], pp. 38-42

Tenemos que $\rho(x, (y \oplus \alpha \cdot z)) = \frac{1}{\|x\|} (x * (y \oplus \alpha \cdot z))$
 $= \frac{1}{\|x\|} (x * y \oplus x * \alpha \cdot z)$
 $= \frac{1}{\|x\|} (x * y) \oplus \frac{1}{\|x\|} \alpha \cdot (x * z)$
 $= \rho(x, y) \oplus \alpha \cdot \rho(x, z)$ para todo $y, z \in B$.

ii).- $\rho(x, \cdot)$ es ortogonal si
 $\langle \rho(x, y), \rho(x, z) \rangle = \langle y, z \rangle$ para todo $y, z \in B$.
 Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \rho(x, y), \rho(x, z) \rangle &= \rho(x, y)_i \rho(x, z)_i \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} (x * y)_i (x * z)_i \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} [\|x\|^2 yz] \\ &= \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

desarrollando las multiplicaciones

Teorema 4.2.2.- La matriz $M_{\rho(x, \cdot)} \in M_{2 \times 2}$ asociada a la transformación $\rho(x, \cdot) \in \mathcal{L}(B, B)$ con respecto a la base ortonormal $\{e_i\}$ es

$$M_{\rho(x, \cdot)} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

Puesto que $\rho(x, y)$ para todo $y \in B$ se puede determinar si se conoce $\rho(x, e_i)$ entonces, es suficiente saber cual es la imagen de cada e_i , bajo $\rho(x, \cdot)$, expresada como una combinación lineal de la misma base e_i . ([6], teorema 2.2). Esto es

$$\rho(x, e_1) = \frac{1}{\|x\|} x * e_1 = \frac{1}{\|x\|} (x_1, x_2) * (1, 0) = \frac{1}{\|x\|} (x_1, x_2)$$

$$\rho(x, e_2) = \frac{1}{\|x\|} x * e_2 = \frac{1}{\|x\|} (x_1, x_2) * (0, 1) = \frac{1}{\|x\|} (-x_2, x_1)$$

y expresado como combinación lineal de e_i se tiene que

$$\rho(x, e_1) = \frac{1}{\|x\|} (x_1 e_1 \oplus x_2 e_2) = \frac{1}{\|x\|} (x_1, x_2)$$

$$\rho(x, e_2) = \frac{1}{\|x\|} (-x_2 e_1 \oplus x_1 e_2) = \frac{1}{\|x\|} (-x_2, x_1)$$

formando la matriz $M_{\rho(x, e_i)}$ con las coordenadas de $\rho(x, e_i)$ respecto a e_i

$$M_{\rho(x, e_i)} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2.3.- La transformación $\rho(x, \bullet) \in \mathcal{L}(B, B)$ es tal que

$$\rho(x, \bullet) \in \{ T \in \mathcal{L}(B, B) \mid T \text{ es una rotación} \}$$

Demostración:

i).- Si $\rho(x, \bullet)$ es una rotación, entonces

La transformación $\rho(x, \bullet)$, como ya se demostró en el teorema 4.2.1, es ortogonal. También se puede demostrar esto con la matriz del teorema 4.2.2

ii).- Además como $\rho(x, \bullet)$ es ortogonal, entonces $\det \rho(x, \bullet) = \pm 1$ ya que la ortogonalidad establece que $\det \{ \rho(x, \bullet) \circ \rho^T(x, \bullet) \} = \det \{ \rho^T(x, \bullet) \circ \rho(x, \bullet) \} = \det I$. Por lo tanto, para demostrar este teorema resta probar que $\det \rho(x, \bullet) > 0$.

$$\begin{aligned} \det \rho(x, \bullet) &= \det M_{\rho(x, e_i)} \\ &= \det \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} (x_1^2 + x_2^2) > 0 \text{ para todo } x \neq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.4.- La transformación $\rho(x, \bullet)$ con $x \in B$ fijo definida en el teorema 4.2.1, es una deformación de $B \subset \xi$.

Demostración:

i).-Evidentemente $\rho(x, \bullet)$ es un isomorfismo para B y por lo tanto es uno a uno y sobre³. Entonces, para probar que $\rho(x, \bullet) \in E'$, tenemos lo siguiente.

a).- Si los $\rho_i(x, \bullet)$ son diferenciables en cualquier punto $y \in B$, entonces existe una transformación lineal $D\rho_i(x, y): B \rightarrow B$ que es única para cada $u \in B$ y que se define por

$$D\rho_i(x, y)[u] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\rho(x, y \oplus \alpha \bullet u) - \rho(x, y)] = \frac{d}{d\alpha} [\rho(x, y \oplus \alpha \bullet u)] |_{\alpha=0}$$

y que es llamada la derivada de $\rho(x, \bullet)$ en 'y' ($D\rho_i(x, y)$). Además, $D\rho(x, \bullet)$ es un mapeo que asocia a cada $y \in B$ el tensor $D\rho_i(x, y) \in \mathcal{L}(B, B)$. También se tiene la equivalencia siguiente⁴.

$$D\rho(x, y)[e_i] = \frac{\partial}{\partial y_i} \rho(x, y), \text{ siendo } \rho(x, \bullet) \text{ un campo vectorial.}$$

Por otro lado, como 'u' puede ser representado como una combinación lineal de una base de B y como esta representación es única⁵, basta con demostrar que los $\rho_i(x, \bullet)$ son diferenciables en los elementos de la base de B . Por lo tanto, sea e_i una base ortonormal de B , entonces

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\|x\|} (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$D\rho_1(x, y)[e_1] = \frac{\partial}{\partial y_1} \rho_1(x, y) = \frac{1}{\|x\|} x_1$$

$$D\rho_1(x, y)[e_2] = \frac{\partial}{\partial y_2} \rho_1(x, y) = -\frac{1}{\|x\|} x_2$$

$$D\rho_2(x, y)[e_1] = \frac{\partial}{\partial y_1} \rho_2(x, y) = \frac{1}{\|x\|} x_2$$

$$D\rho_2(x, y)[e_2] = \frac{\partial}{\partial y_2} \rho_2(x, y) = \frac{1}{\|x\|} x_1$$

Así entonces, los ρ_i son diferenciables en todo $y \in B$.

³ ver [5], capítulo 2.

⁴ ver [4], capítulo 2.

⁵ ver [8], teorema 1.10



b).- Para completar la demostración de este punto, del inciso anterior obsérvese que $D\rho(x, \bullet)$ es continuo en todo punto $y \in B$.

ii).- Para terminar de demostrar el teorema, se tiene que

$$[\nabla\rho(x, \bullet)]_{ik} = \frac{\partial}{\partial y_k} \rho(x, \bullet)$$

por lo tanto $\det [\nabla\rho(x, y)] = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho_1(x, y)}{\partial y_1} & \frac{\partial\rho_1(x, y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\rho_2(x, y)}{\partial y_1} & \frac{\partial\rho_2(x, y)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$

para todo $y \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho_1(x, y)}{\partial y_1} & \frac{\partial\rho_1(x, y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\rho_2(x, y)}{\partial y_1} & \frac{\partial\rho_2(x, y)}{\partial y_2} \end{pmatrix} &= \det \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} (x_1^2 + x_2^2) > 0 \text{ para todo } x \neq 0 \end{aligned}$$

lo cual demuestra el teorema. □

Puede observarse que la matriz $M_{\nabla\rho(x, \bullet)}$ asociada al tensor $\nabla\rho(x, \bullet)$, es la misma que se presentó en el teorema 4.2.2, por lo tanto se puede adelantar que el tal tensor es una rotación de β .

Teorema 4.2.5.- La deformación $\rho(x, \bullet)$ es rígida.

La demostración de este teorema se deduce de los teoremas anteriores ya que $\nabla\rho(x, \bullet)$ es constante y $\nabla\rho(x, \bullet)$ es una rotación.

Finalmente se puede decir que la función $m(\beta, t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, es una deformación $\rho(x, \bullet)$ con $x \in \beta$ fijo.

4.3.- Rotaciones en el espacio euclidiano (ξ).

En esta sección se define la transformación $\rho(x, \bullet)$ que será utilizada para representar rotaciones de cuerpos "rígidos" en ξ en donde la dirección del eje de rotación puede ser, a diferencia del caso en ρ , definida por tres cosenos directores con respecto a un sistema inercial. Se utiliza para tal motivo, el álgebra de quaterniones.

Definición 4.3.1.- La transformación $\rho(x, \bullet): \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, para cualquier $x \in \mathbb{Q}$ fijo, se define como

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\|x\|^2} \bullet (x \star y \star \bar{x}) \text{ , para todo } y \in \mathbb{Q}.$$

Teorema 4.3.1.- La transformación de la definición anterior es lineal, ortogonal y $\rho(x, y) \in \mathbb{Q}_v$ para todo $y \in \mathbb{Q}_v$.

En [1] se demuestra que este teorema es válido y por lo tanto se puede aplicar indistintamente a vectores de \mathfrak{R}^3 o puntos de ε que se relacionan por la función ψ del espacio afin A^3 . También se puede demostrar, al igual que el teorema 4.2.2, que la matriz $M_{\rho(x, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$ asociada a la transformación $\rho(x, \bullet) \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ con respecto a la base $B = \{e_i\}_{i=1}^4$ es

$$M_{\rho(x, \bullet)} = \frac{1}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} \|x\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) & 2(x_0 x_2 + x_1 x_3) \\ 0 & 2(x_0 x_3 + x_1 x_2) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2(x_2 x_3 - x_0 x_1) \\ 0 & 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2(x_0 x_1 + x_2 x_3) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

para todo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}$.

También se puede demostrar, como en el caso de rotaciones con dirección de eje de rotación constante, que

$$\rho(x, \bullet) \in \{ T \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) : T \circ T^T = T^T \circ T = I, \det T = 1 \}$$

y que $\rho(x, \bullet)$ es una *deformación rígida* para un cuerpo⁶ β .

Además cuando se incluye el parámetro t (tiempo), $\rho(x, \bullet)$ es una familia de deformaciones que producen un movimiento rígido de β .

⁶ Cuando se aplica $\rho(x, \bullet)$ a cualquier $y \in \mathbb{Q}_v$.

4.4.-Descripción de rotaciones en \wp .

El teorema de Euler relacionado con la rotación de un cuerpo establece que el desplazamiento general de un cuerpo que tiene un punto fijo se puede representar por medio del ángulo θ y la dirección del eje de la rotación.

En esta sección se presenta la rotación $\rho(x,y)$ para cualquier $y \in B$ en términos del ángulo de desplazamiento θ .

Sea B un cuerpo que posee un movimiento de rotación y cuyo eje pasa, en el plano euclidiano \wp , por un punto al que asociamos el vector $0 \in B$.

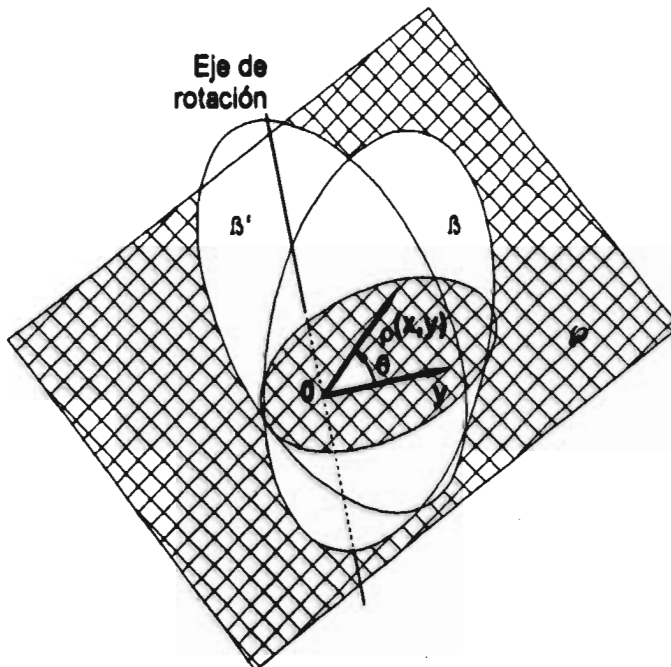


Fig.4.1: Rotación en de B en \wp .

Denotamos a e_3 como el vector unitario que define la dirección del eje de la rotación y el cual es elemento de una base ortonormal en \mathfrak{R}^3 además e_1 y e_2 forman una base ortonormal para \mathfrak{R}^2 . Así entonces tenemos que

$$\text{Cos}\theta = \frac{\langle y, \rho(x, y) \rangle}{\|y\| \|\rho(x, y)\|}$$

donde $\|y\| = \|\rho(x,y)\|$, y desarrollando el producto interno se tiene que

$$x_1 = \|x\| \cos \theta$$

Y como $\|x\|^2 \cos^2 \theta + \|x\|^2 \sin^2 \theta = \|x\|^2$ entonces

$$x_2 = \pm \|x\| \sin \theta. \text{ Por lo tanto } x = \|x\|(\cos \theta, \pm \sin \theta). \text{ Entonces, para todo } y \in B,$$

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\|x\|} \|x\|(\cos \theta, \pm \sin \theta) \cdot (y_1, y_2)$$

entonces

$$\rho(x,y) = (y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta, y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \text{ para todo } y \in B^7 \quad \textcircled{1}$$

4.5.-Descripción de rotaciones en ξ .

Las rotaciones para cuerpo 'rígido' cuyo eje tiene dirección variable, pueden ser caracterizadas utilizando el álgebra de cuaterniones cuando la transformación $\rho(x,\cdot)$, que se definió en Q , se aplica a cualquier elemento $y \in Q_v$ el cual se puede asociar con los puntos de un cuerpo B . Así entonces se tiene la siguiente caracterización

$$x_R = T_R \left(\|x\| \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{y} \quad x_v = T_v \left(\pm \|x\| \sin \frac{\theta}{2} \hat{u} \right)$$

además, si $\|x\| = 1$ entonces se obtienen los parámetros de Euler⁸

$$x_R = T_R \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{y} \quad x_v = T_v \left(\pm \sin \frac{\theta}{2} \hat{u} \right)$$

$$x = x_R \oplus x_v$$

donde \hat{u} es el vector unitario que define al eje de la rotación y θ el ángulo de la misma. Si el vector $\hat{u} = u_j \hat{e}_j$ donde \hat{e}_j es una base ortonormal de \mathfrak{R}^3 , entonces

$$x_R = \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right); \quad x_v = \left(0, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_1, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_2, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_3 \right);$$

$$x = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_1, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_2, \pm \sin \frac{\theta}{2} u_3 \right) \quad \textcircled{1}$$

⁷ De aquí en adelante se tomará $\|x\| = 1$ para todo $x \in B$. Siendo x un bitemion de rotación

⁸ También a partir de aquí, se tomará $\|x\| = 1$ para todo $x \in Q$. Siendo x un cuaternión de rotación

Capítulo 5

Intersección de Trayectorias.

5.1.- Definición general del problema.

Para explicar el objetivo de este capítulo, consideremos lo siguiente. Sean a y b dos partículas que describen trayectorias T_a y T_b respectivamente, las cuales son eventos en el espacio-tiempo. Para un intervalo determinado de tiempo $[0, T]$, T_a se inicia en t_0 (donde la velocidad de la partícula es $V_0 \in \mathcal{R}^3$). T_b se inicia en el instante t_1 con $t_0 < t_1 < T$. El problema que se pretende resolver es, determinar matemáticamente a T_b la cual tendrá que intersectar a T_a en un instante t_2 que se caracteriza por $t_1 < t_2 < T$.

Además para una partícula p , la imagen de la función $x_p: \mathcal{R} \rightarrow \xi$,

$$x = x_p(t)$$

es llamada el *lugar* ocupado por la partícula p en el instante t . Así, definimos al conjunto

$$T_p = \{(x, t): t \in \mathcal{R}\}$$

como la trayectoria descrita por la partícula p .

Desde este punto de vista, nuestro problema consiste en determinar la trayectoria T_b que inicia con un retardo t_1 de modo que

$$x_a(t_2) = x_b(t_2)$$

Cabe mencionar que las trayectorias T_a y T_b pueden ser de cualquier tipo, sin embargo, se eligen de tipo parabólico porque representan un buen ejemplo que puede extenderse a trayectorias definidas por funciones respecto al tiempo, lineales o de un grado mayor que 2.

5.2.- El caso bi-dimensional.

Ahora consideremos que T_a tiene la forma siguiente.

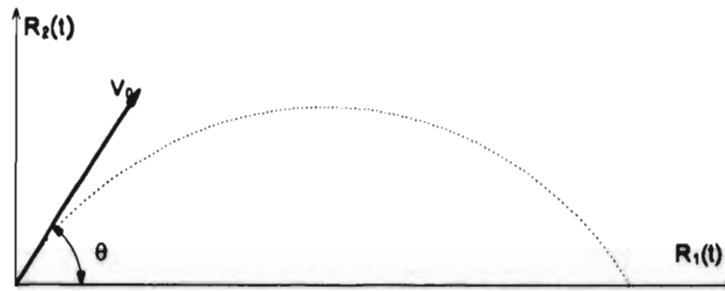


Fig.5.1: Trayectoria T_a de la partícula "a".

Donde, en el instante $t=0$ la partícula posee una velocidad $V_0 \in \mathbb{R}^2$ y un ángulo θ con respecto al eje $R_1(t)$. Además, como se trata de un evento en el espacio-tiempo, las ecuaciones paramétricas de las funciones R_1 y R_2 son definidas como

$$R_1(t) = \|V_0\| \cos \theta t$$

$$R_2(t) = \|V_0\| \sin \theta t - \frac{gt^2}{2}$$

Estas ecuaciones son las que caracterizan el movimiento llamado *tiro parabólico* para una partícula, siendo $R_1(t)$ un movimiento rectilíneo uniforme y $R_2(t)$ un movimiento uniformemente acelerado. Así se tiene que las funciones $R_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $R_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ son representadas por las siguientes gráficas en el espacio-tiempo.

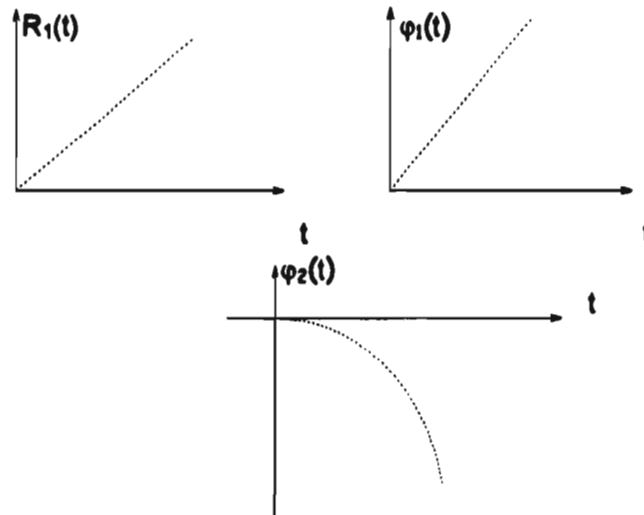


Fig.5.2: Gráfica de las ecuaciones paramétricas de T_a .

Se puede observar que $R_2(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ donde $\varphi_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^-$. Nuestro objetivo es determinar las ecuaciones dadas por las funciones $R_1: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi_1: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $\varphi_2: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^-$ con $T \geq T$ de tal manera que con un retardo $t_1 \in \mathbb{R}$ en el tiempo, intercepte a las funciones $R_1, \varphi_1, \varphi_2$ en el tiempo t_2 . Para tal fin, pensemos que las funciones que definen a la trayectoria T_b tienen un comportamiento como el indicado en las figuras siguientes

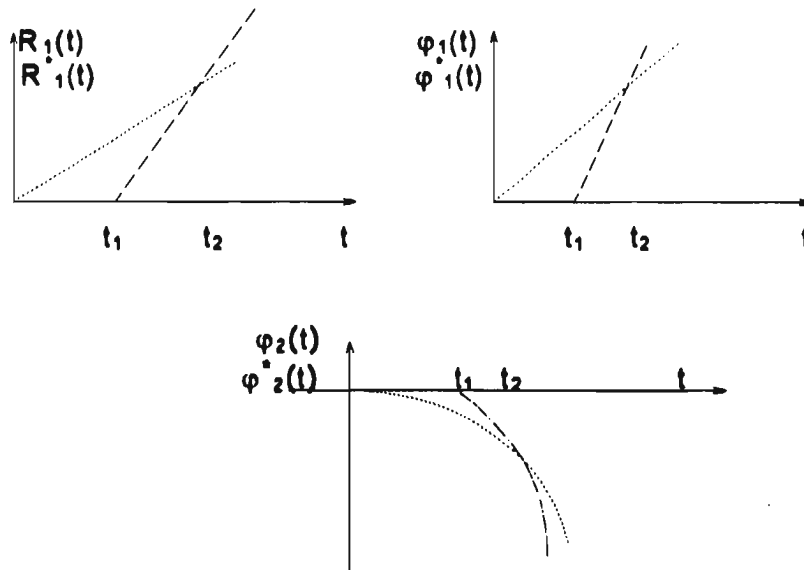


Fig.5.3: Comportamiento de las funciones seguidoras que definen a T_b .

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, la construcción de las funciones R_1, φ_1 y φ_2 a las que llamaremos funciones seguidoras, se hará de acuerdo a la siguiente metodología:

i).- De acuerdo a la figura 5.3 se observan las siguientes restricciones

$$R_1^*(t) = \varphi_1^*(t) = \varphi_2^*(t) = 0, 0 \leq t \leq t_1$$

ii).- Las funciones $R_1: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $\varphi_1: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ son lineales mientras que $\varphi_2: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}^-$ es una función cuadrática. Además,

$$R_1^*(t_2) = R_1(t_2); \varphi_1^*(t_2) = \varphi_1(t_2); \varphi_2^*(t_2) = \varphi_2(t_2)$$

iii).- De acuerdo a (i)-(ii), podemos proponer entonces la forma de las funciones buscadas según se indica a continuación.

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 t \\ \varphi_1'(t) &= \beta_0 + \beta_1 t \\ \varphi_2'(t) &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 \end{aligned} \quad t \in [t_1, T']$$

iv).- Con las restricciones (i),(ii) y con (iii) podemos determinar los coeficientes de los polinomios, en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad R_1'(t_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 t_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_1 t_1 \\ R_1'(t_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 t_2 = -\alpha_1 (t_1 - t_2) = \|V_0\| \text{Cos} \theta t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha_1 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Cos} \theta t_2 \\ \alpha_0 &= -\frac{t_1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Cos} \theta t_2 \end{aligned}$$

de donde al sustituir se obtiene

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ R_1'(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Cos} \theta t_2 (t - t_1) & t \geq t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \varphi_1'(t_1) &= \beta_0 + \beta_1 t_1 = 0 \Leftrightarrow \beta_0 = -\beta_1 t_1 \\ \varphi_1'(t_2) &= \beta_0 + \beta_1 t_2 = \beta_1 (-t_1 + t_2) = \|V_0\| \text{Sen} \theta t_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta_1 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen} \theta t_2, \\ \beta_0 &= -\frac{t_1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen} \theta t_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi_1'(t) &= 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \varphi_1'(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen} \theta t_2 (t - t_1) & t \geq t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \varphi_2'(t_1) &= \gamma_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_1^2 = 0 \\ \varphi_2'(t_2) &= \gamma_0 + \gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_2^2 = -\frac{gt_2^2}{2} \end{aligned}$$

de la restricción (i) se tiene que

$$\frac{\partial \varphi_2'}{\partial t} = \gamma_1 + 2\gamma_2 t = 0$$

y tomando los límites de 't', se presentan los dos casos siguientes:

Caso 1 ($t=0$): $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(0) = \gamma_1 = 0$

al resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones de (c) y la ecuación de este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \varphi_2'(t) &= -\frac{gt_2^2}{2(t_2^2 - t_1^2)}(t^2 - t_1^2) & t \geq t_1 \end{aligned}$$

Caso 2 ($t=t_1$): $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t_1) = 0 = \gamma_1 + 2\gamma_2 t_1 \Leftrightarrow \gamma_1 = -2\gamma_2 t_1$

resolviendo el sistema formado, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \varphi_2'(t) &= -\frac{gt_2^2}{2(t_2 - t_1)^2}(t - t_1)^2 & t \geq t_1 \end{aligned}$$

En resumen tenemos que las funciones buscadas son:

Caso 1:

$$\begin{aligned} &\text{Cuando } 0 \leq t \leq t_1 \\ R_1'(t) &= 0 \\ \varphi_1'(t) &= 0 \\ \varphi_2'(t) &= 0 \\ R_2'(t) &= \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) = 0 \\ &\text{Cuando } t \geq t_1 \\ R_1'(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Cos}\theta t_2 (t - t_1) \\ \varphi_1'(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen}\theta t_2 (t - t_1) \\ \varphi_2'(t) &= -\frac{gt_2^2}{2(t_2^2 - t_1^2)}(t^2 - t_1^2) \\ R_2'(t) &= \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) \\ R_2'(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen}\theta t_2 (t - t_1) - \frac{gt_2^2}{2(t_2^2 - t_1^2)}(t^2 - t_1^2) \end{aligned}$$

Caso 2:

Cuando $0 \leq t \leq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = 0$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = 0$$

$$\varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

$$R_2 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

Cuando $t \geq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Cos}\theta \, t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen}\theta \, t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_2 \dot{}(t) = -\frac{gt_2^2}{2(t_2 - t_1)^2} (t - t_1)^2$$

$$R_2 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t)$$

$$R_2 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \text{Sen}\theta \, t_2 (t - t_1) - \frac{gt_2^2}{2(t_2 - t_1)^2} (t - t_1)^2$$

5.3.- El caso tri-dimensional.

Ahora se considera que la trayectoria T_a está definida en un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, como se ilustra a continuación.

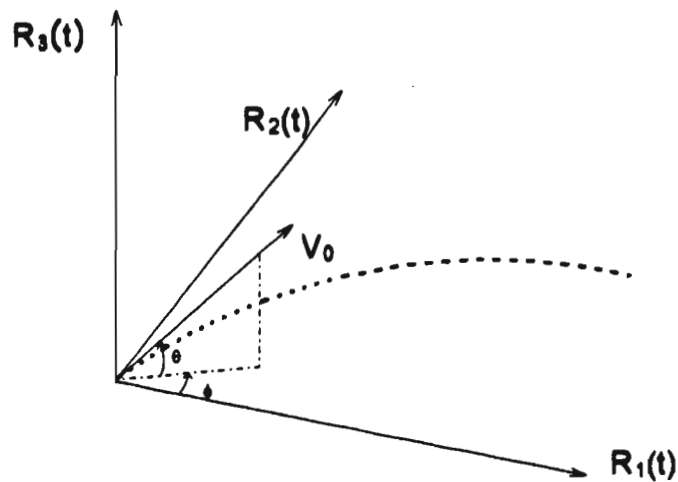


Fig.5.4: Representación de T_a en un sistema de coordenadas tridimensional.

El vector de velocidad de la partícula en el instante $t=0$ es $V_0 \in \mathbb{R}^3$ el cual tiene un ángulo θ con respecto al plano definido por $R_1(t)$ y $R_2(t)$ y su componente en este plano tiene un ángulo ϕ respecto al eje $R_1(t)$. Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de este evento son:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \|V_0\| \cos\theta \cos\phi t \\ R_2(t) &= \|V_0\| \cos\theta \sin\phi t \\ R_3(t) &= \|V_0\| \sin\theta t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

donde $R_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $R_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $R_3: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Siendo $R_1(t)$ y $R_2(t)$ movimientos rectilíneo uniforme, y $R_3(t)$ un movimiento uniformemente acelerado. Por otro lado se tiene que $R_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $R_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $R_3: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ se representan por la siguiente figura.

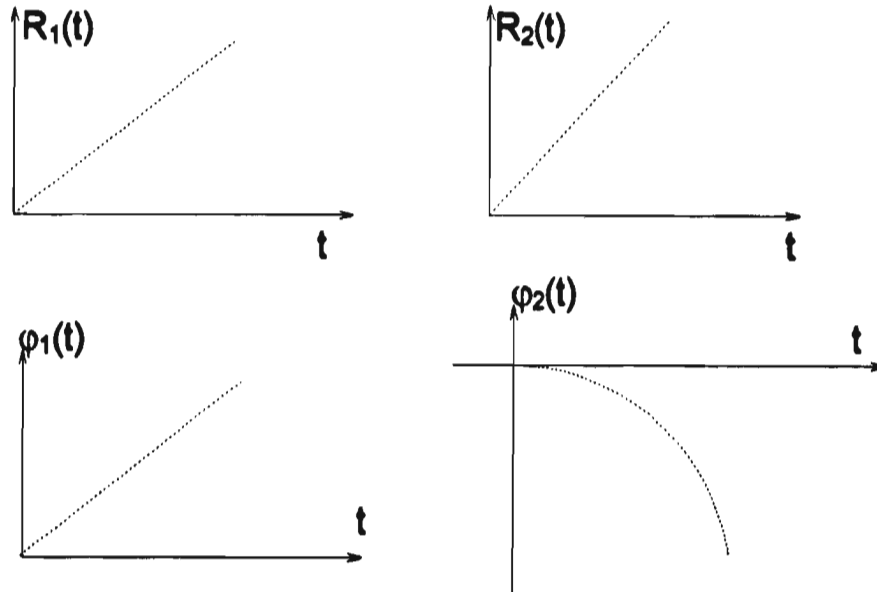


Fig.5.5: Gráfica de las ecuaciones paramétricas de T_a .

Como en el caso anterior, se puede observar que $R_3(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$, donde $\phi_1: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $\phi_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^-$. Las condiciones para determinar las funciones seguidoras es el mismo que en el caso anterior, además de usar la misma metodología para conseguirlo. Así entonces se llega a los siguientes resultados para los dos casos presentados.

Caso 1:

Cuando $0 \leq t \leq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = 0; \quad R_2 \dot{}(t) = 0$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = 0; \quad \varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

$$R_3 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

Cuando $t \geq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \cos\theta \cos\phi t_2 (t - t_1)$$

$$R_2 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \cos\theta \operatorname{Sen}\phi t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \operatorname{Sen}\theta t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_2 \dot{}(t) = -\frac{gt_2^2}{2(t_2^2 - t_1^2)} (t^2 - t_1^2)$$

$$R_3 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t)$$

$$R_3 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \operatorname{Sen}\theta t_2 (t - t_1) - \frac{gt_2^2}{2(t_2^2 - t_1^2)} (t^2 - t_1^2)$$

Caso 2:

Cuando $0 \leq t \leq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = 0; \quad R_2 \dot{}(t) = 0$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = 0; \quad \varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

$$R_3 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t) = 0$$

Cuando $t \geq t_1$

$$R_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \cos\theta \cos\phi t_2 (t - t_1)$$

$$R_2 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \cos\theta \operatorname{Sen}\phi t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_1 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \operatorname{Sen}\theta t_2 (t - t_1)$$

$$\varphi_2 \dot{}(t) = -\frac{gt_2^2}{2(t_2 - t_1)^2} (t - t_1)^2$$

$$R_3 \dot{}(t) = \varphi_1 \dot{}(t) + \varphi_2 \dot{}(t)$$

$$R_3 \dot{}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \|V_0\| \operatorname{Sen}\theta t_2 (t - t_1) - \frac{gt_2^2}{2(t_2 - t_1)^2} (t - t_1)^2$$

Capítulo 6

El Movimiento de los Manipuladores

Con las bases matemáticas expuestas en los capítulos 2,3 y 4 se procede ahora a la modelación matemática del movimiento para los manipuladores de dos y tres grados de libertad. Primero se analiza el manipulador de dos grados de libertad por medio del álgebra de Bitemiones para después analizar el de tres grados de libertad con el álgebra de Quatemiones. Al ser el álgebra de Quatemiones una extensión del álgebra de Bitemiones, el movimiento del manipulador de dos grados de libertad también se puede analizar con la primera de éstas. En este caso (cuando el eje de las rotaciones tiene la misma dirección) resulta, como era de esperarse, que la multiplicación entre Quatemiones, sea conmutativa. Sin embargo como la estructura de los bitemiones, tal como se utiliza aquí, está diseñada para el análisis del movimiento en φ , será ésta la que se utilice para dicho análisis.

6.1 Definición del problema en φ .

En el capítulo anterior se identificó el problema de intersectar la trayectoria T_a con la trayectoria T_b en el plano euclidiano φ . Como ejemplo tomamos los siguientes parámetros para la trayectoria T_a .

$$\|V_0\|=100; g=9.81; \theta=45^\circ.$$

Si queremos que la trayectoria T_b se inicie con un tiempo de retardo $t_1=3\text{seg.}$ y que intersecte a T_a en el tiempo $t_2=7\text{seg.}$, tenemos, al sustituir estos datos, que las ecuaciones paramétricas de T_a y T_b son las siguientes.

Trayectoria original T_a :

$$\begin{aligned} R_1(t) &= 70.7107t \\ R_2(t) &= 70.7107 - 4.905t^2 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 7 \end{aligned}$$

Trayectoria seguidora T_b :

Caso 1:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= 0 \\ R_2(t) &= 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 3 \quad \text{y} \\ R_1(t) &= 123.744t - 371.231 \\ R_2(t) &= -317.153 + 123.744t - 6.00863t^2 \quad \text{para } t \geq 3 \end{aligned} \quad \text{①}$$

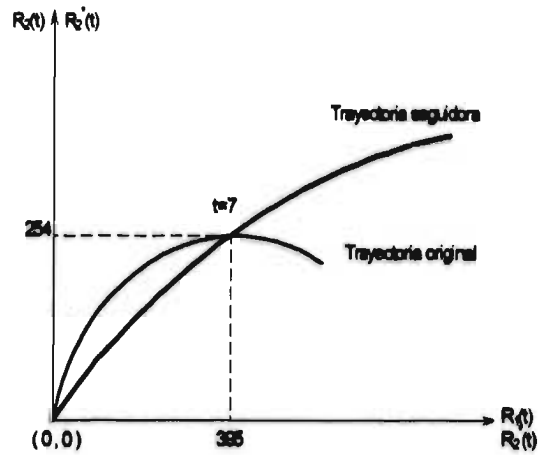


Fig. 6.1: Intersección de trayectorias para el caso 1 en \mathbb{R}^2 .

Caso 2: $R_1'(t) = 0$
 $R_2'(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 3$ y
 $R_1'(t) = 123.744 t - 371.231$
 $R_2'(t) = -506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2$ para $t \geq 3$ ●

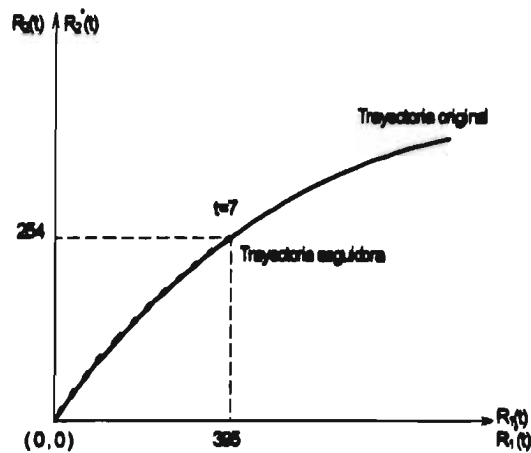


Fig.6.2: Intersección de trayectorias para el caso 2 en \mathbb{R}^2 .

6.2.- El movimiento en φ .

Del teorema de Chasles es bien sabido que el movimiento general de un cuerpo rígido, de un estado inicial a un estado final, se puede representar con un desplazamiento y una rotación equivalentes.

Por otra parte, antes de modelar cualquier fenómeno físico, es primordial definir un sistema de referencia en el cual las características del fenómeno estarán determinadas. En nuestro caso (movimiento de cuerpos rígidos) tal sistema está determinado por un punto del espacio físico (origen) y una base ortonormal de bitermines, definiendo así un sistema de coordenadas cartesianas para \mathcal{P} . Este sistema es llamado fijo, global o inercial si el origen y la base se mantienen sin cambios. Como ya se mencionó anteriormente, el movimiento rígido de un cuerpo se puede representar por un desplazamiento y una rotación equivalentes; para tal propósito es preciso definir un sistema de referencia móvil (con origen y base variables) el cual se coloca al cuerpo y se mueve como si fuera parte de éste.

Para iniciar el análisis e ir estableciendo la nomenclatura y los criterios que se utilizarán en adelante, consideremos la rotación de bases en relación a la siguiente figura.

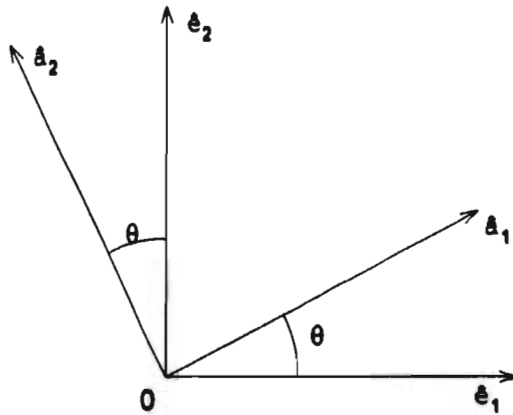


Fig. 6.3: Rotación de la base \hat{e}_i

En este caso la base móvil \hat{a}_i se debe representar, para efectos de nuestro análisis, en términos de la base inercial \hat{e}_j . Esto es

$$\hat{a}_j = p(p, \hat{e}_j) \quad \textcircled{1}$$

siendo $p=(\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta)$ el Bitermión que rota a la base \hat{e}_j (recordemos que utilizamos bitermines de rotación con norma unitaria). Así, cualquier vector definido en la base \hat{a}_i podrá ser expresado en la base \hat{e}_j .

Ahora considérese la siguiente figura.

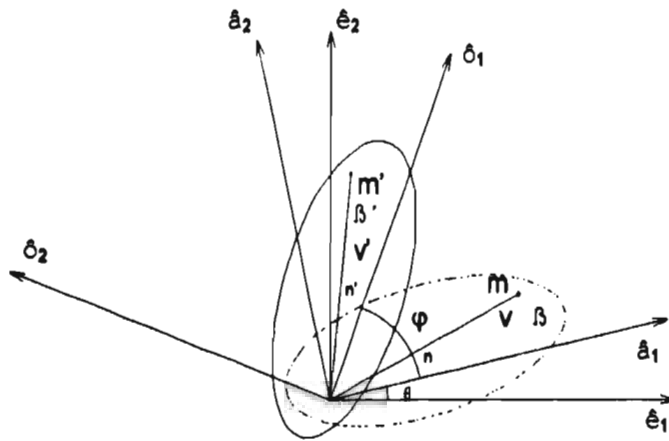


Fig 6.4. Rotación de un cuerpo rígido β .

Nomenclatura:

- \hat{e}_j : Sistema de coordenadas cartesianas fijo (base inercial).
- \hat{a}_j : Sistema de coordenadas cartesianas móvil en la configuración no deformada. (Base móvil).
- \hat{o}_j : Base móvil en la configuración deformada.
- β : Configuración de referencia del cuerpo β . Configuración no deformada de β .
- β' : Configuración deformada del cuerpo β .
- m : Punto material $m \in \beta$ en la configuración no deformada.
- m' : Punto material $m \in \beta$ en la configuración deformada.
- θ : Diferencia angular entre las bases \hat{e}_j y \hat{a}_j .
- φ : Diferencia angular entre las bases \hat{a}_j y \hat{o}_j .
- v : Vector asociado al punto m en la configuración inicial.
- v' : Vector asociado al punto m' en la configuración final.
- n : Vector unitario definido por v en la configuración inicial.
- n' : Vector unitario definido por v' en la configuración final.

Se requiere que el vector ' v ' sea expresado en la base inercial, entonces

$$v = \|v\|n \quad \text{donde} \quad n = \sum n_j \hat{a}_j^1$$

$$n_j = \langle n, \hat{a}_j \rangle$$

¹ Se adopta la notación siguiente: $\sum n_j \hat{a}_j = n_j \hat{a}_j$

$$v = \|v\| n_j \hat{a}_j \quad \text{expresado en la base } \hat{a}_j \quad \textcircled{2}$$

sustituyendo ① en ② se tiene lo siguiente.

$$v = \|v\| n_j \rho(p, \hat{e}_j) \quad \text{expresado en la base } \hat{e}_j.$$

Para el estado final, el vector v' tiene la siguiente representación en la base \hat{e}_j .

$$v' = \|v\| n' \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} n' &= n_j' \hat{o}_j \\ n_j' &= \langle n', \hat{o}_j \rangle \\ \hat{o}_j &= \rho(q, \hat{a}_j) \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} v' &= \|v\| n_j' \rho(q, \hat{a}_j) & \text{donde } q &= (\text{Cos}\varphi, \text{Sen}\varphi) \\ v' &= \|v\| n_j' \rho(q, \rho(p, \hat{e}_j)) & \text{expresado en la base inercial.} \end{aligned}$$

Nótese que por ser β un cuerpo rígido

$$n_j = n_j' \quad \text{entonces} \quad \langle n, \hat{a}_j \rangle = \langle n', \hat{o}_j \rangle$$

Nótese también que si ' v ' es paralelo a cualquiera de los ejes de la base \hat{a}_j , entonces

$$\begin{aligned} v &= \|v\| \rho(p, \hat{e}_j) & \text{estado inicial} \\ v' &= \|v\| \rho(q, \rho(p, \hat{e}_j)) & \text{estado final.} \end{aligned}$$

Este hecho permite reducir las operaciones al no tener que calcular n_j ; por lo tanto, para el análisis de los manipuladores se colocan bases móviles de modo que se evite el cálculo de n_j . Otro aspecto importante que cabe recordar es que los Bitemiones p y q están definidos en las bases \hat{e}_j y \hat{a}_j respectivamente. Este aspecto toma una importancia fundamental en el análisis del manipulador de tres grados de libertad, donde los ejes de rotación tienen direcciones variables.

Para el análisis del movimiento general de β , consideramos la figura 6.5. Del teorema de Chasles se tiene que el desplazamiento equivalente es determinado por el vector: $d = g - f$, donde f y g definen la posición del origen del sistema móvil en el estado inicial y el estado final. La rotación equivalente está determinada (en este caso de \mathcal{R}^2) por el ángulo φ . Entonces se tiene que para el estado inicial:

$$V = f + v \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} v &= \|v\| n_j \hat{a}_j; \hat{a}_j = \rho(p, \hat{e}_j); n_j = \langle n, \hat{a}_j \rangle \\ f &= f_j \hat{e}_j; f_j = \langle f_j, \hat{e}_j \rangle, \text{ entonces} \end{aligned}$$

$$V = f_j \hat{e}_j + \|v\| n_j \rho(p, \hat{e}_j).$$

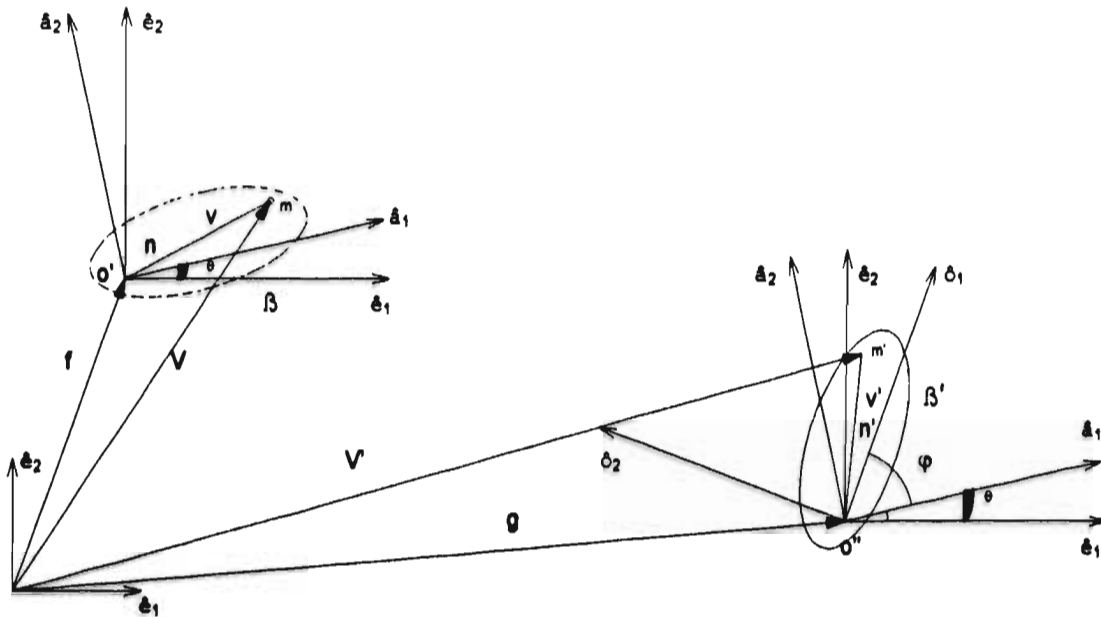


Fig. 6.5: Movimiento general de un cuerpo β .

Para el estado final:

$$\mathbf{V} = \mathbf{g} + \mathbf{v}' \quad \text{donde} \quad \mathbf{v}' = \|\mathbf{v}\| n_j' \delta_j; n_j' = \langle n', \delta_j \rangle; \delta_j = \rho(\mathbf{q}, \hat{a}_j);$$

$$\mathbf{g} = g_j \hat{e}_j; g_j = \langle \mathbf{g}, \hat{e}_j \rangle, \text{ entonces}$$

$$\mathbf{V} = g_j \hat{e}_j + \|\mathbf{v}\| \rho(\mathbf{q}, \rho(\mathbf{p}, \hat{e}_j))$$

6.3. El manipulador de dos grados de libertad.

Como se mencionó anteriormente, analizaremos un manipulador de dos grados de libertad Tipo RR donde colocamos bases móviles en cada eslabón, con origen en las articulaciones. Además, algún eje de los sistemas móviles (en este caso, los definidos por \hat{a}^1 , y \hat{a}^2 ,) se hace coincidir con el eslabón correspondiente. Para determinar el signo de la rotación, se toma como criterio el de las manecillas del reloj; siendo negativa si la rotación es el mismo sentido de las manecillas, y positiva si es en el sentido contrario.

6.3.1.-Cinemática Directa.

Como se sabe, la cinemática directa consiste en determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier punto material del mecanismo o cuerpo que se analice, a partir del conocimiento de las coordenadas generalizadas (en nuestro caso, los desplazamientos angulares). Sin embargo, en este trabajo nos enfocamos al análisis de la posición, quedando abierto el tema para el de velocidad y aceleración. Por otra parte y para quienes no estén familiarizados con el software MATHEMATICA[®] se ha estructurado el desarrollo de este tema, presentando la forma de plantearlo en el software.

Iniciamos analizando la posición no deformada para el manipulador de acuerdo a la siguiente figura.

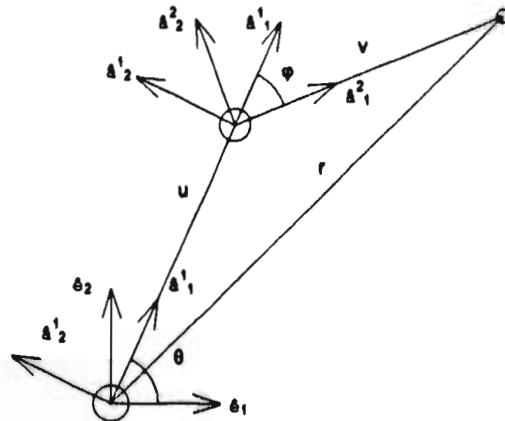


Fig. 6.6: Configuración inicial del manipulador de 2 gdl.

Nomenclatura:

- \hat{e}_j : Base inercial.
- \hat{a}_j^1 : Base móvil del eslabón 1.
- \hat{a}_j^2 : Base móvil del eslabón 2.
- u, v : Vectores asociados a los extremos de los eslabones.
- θ, φ : Ángulo entre las bases $\hat{e}_j - \hat{a}_j^1$ y $\hat{a}_j^1 - \hat{a}_j^2$ respectivamente.
- r : Vector que define la posición del órgano terminal del manipulador.

Para determinar la posición de cualquier punto del manipulador (en este caso, el órgano terminal) a partir del conocimiento de los ángulos θ y φ , resolvemos el problema de la cinemática directa.

Cinemática directa para la posición no deformada.

Desarrollo Normal	Desarrollo en MATHEMATICA®
<p>Recordemos que la operación de multiplicación entre Bitemiones, está definida como: $\ast(x,y) = x\ast y$. $x\ast y = (x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1)$</p> <p>La función de rotación quedó definida como $\rho(b,x) = (x_1\text{Cos}\theta - x_2\text{Sen}\theta, x_2\text{Cos}\theta + x_1\text{Sen}\theta)$</p> <p>Tomamos como ejemplo los valores angulares de $\theta=45^\circ$ y $\varphi=-30^\circ$.</p> <p>Los Bitemiones que determinan la rotación de los eslabones son definidos como $p = (\text{Cos}\theta, \text{Sen}\theta)$ y $q = (\text{Cos}\varphi, \text{Sen}\varphi)$ donde: $\ p\ =\ q\ =1$</p> <p>Los elementos de la base inercial son $\hat{e}_1=(1,0)$ y $\hat{e}_2=(0,1)$</p> <p>Las base móviles de los eslabones 1 y 2, representadas en la base inercial son $\hat{a}^1_1 = \rho(p, \hat{e}_1)$ y $\hat{a}^2_1 = \rho(q, \hat{a}^1_1)$ $\hat{a}^2_1 = \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))$</p> <p>Asignamos los siguientes valores a las normas de los eslabones. $\ u\ =300$ y $\ v\ =250$</p> <p>Los vectores que definen los eslabones 1 y 2, representados en la base inercial, son $u = \ u\ \hat{a}^1_1$ y $v = \ v\ \hat{a}^2_1$ $u = \ u\ \rho(p, \hat{e}_1)$ y $v = \ v\ \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))$</p> <p>El vector de posición es $r = u + v$ $r = \ u\ \rho(p, \hat{e}_1) + \ v\ \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))$</p>	<p>$Mpq=[x_y_]:=\{ x[[1]]\ast y[[1]]-x[[2]]\ast y[[2]], x[[1]]\ast y[[2]]+x[[2]]\ast y[[1]] \};$</p> <p>$Rpq[b_x_]:=Mpq[b,x];$</p> <p>$\theta=45\ast\text{Degree};$ $\phi=-30\ast\text{Degree};$</p> <p>$p=\{\text{Cos}[\theta], \text{Sin}[\theta]\};$ $q=\{\text{Cos}[\phi], \text{Sin}[\phi]\};$</p> <p>$\hat{e}_1=\{1,0\};$ $\hat{e}_2=\{0,1\};$</p> <p>$\hat{a}11=Rpq[p,\hat{e}_1];$ $\hat{a}21=Rpq[q,\hat{a}11];$</p> <p>$L1=300;$ $L2=250;$</p> <p>$u_i=L1\ast\hat{a}11;$ $v_i=L2\ast\hat{a}21;$</p> <p>$r_i = u_i+v_i;$</p>

Lo anterior, como se muestra en la figura 6.6, sirvió para definir la configuración no deformada. Para definir la configuración deformada a partir de la configuración inicial, se tiene la siguiente figura.

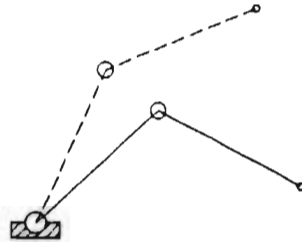


Fig.6.7 : Configuración deformada del manipulador de 2 gdl.

En la modelación matemática, para obtener la configuración deformada, existen esencialmente dos secuencias relacionadas con el movimiento de los eslabones.

- Secuencia 1: 1° mover el eslabón 1.
 2° mover el eslabón 2.
- Secuencia 2: 1° mover el eslabón 2.
 2° mover el eslabón 1.

A continuación, se presenta la modelación siguiendo estas dos secuencias.

Secuencia 1:

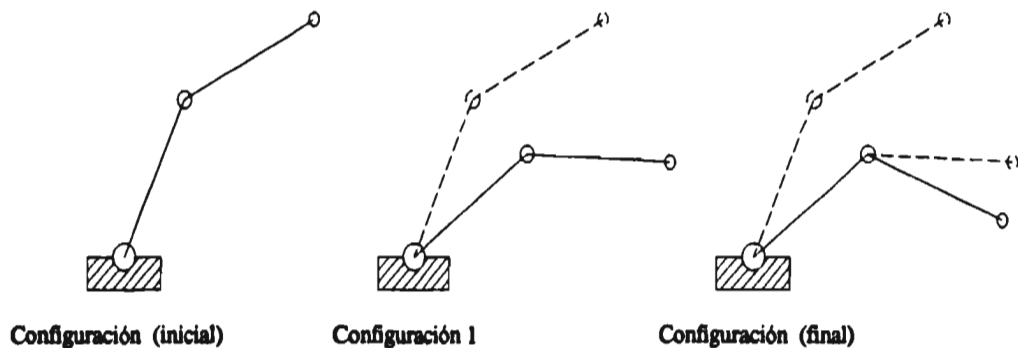


Fig. 6.8: Movimientos del manipulador de 2 gdl. en la secuencia 1.

De la figura 6.6 se tiene que el vector de posición 'r' para la configuración inicial es

$$r = u + v$$

donde $u = \|u\| \hat{a}^1$ y $v = \|v\| \hat{a}^2$
 $\hat{a}^1 = \rho(p, \hat{e}_1)$
 $\hat{a}^2 = \rho(q, \hat{a}^1) \Rightarrow \hat{a}^2 = \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))$ ③

Entonces

$$u = \|u\| \rho(p, \hat{e}_1) \quad \text{y} \quad v = \|v\| \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))$$

$$r = \|u\| \rho(p, \hat{e}_1) + \|v\| \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1)) \quad \text{Configuración inicial.}$$

Para la configuración 1 se tiene lo siguiente.

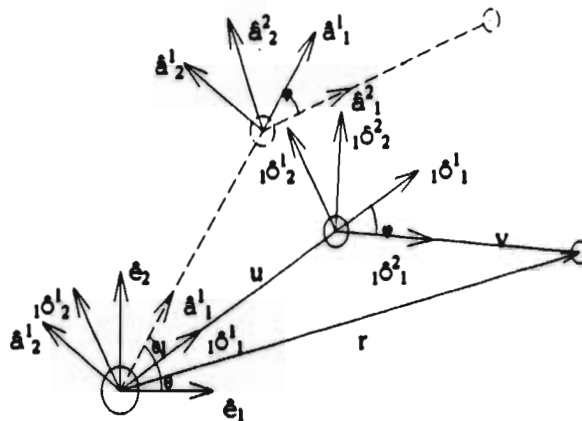


Fig. 6.9: Configuración 2 de la secuencia 1.

Donde \hat{a}^i es la base móvil en la configuración no deformada, pegada al i-ésimo eslabón; ${}^k\hat{o}^i$ es la base móvil en la k-ésima configuración deformada, del i-ésimo eslabón. Entonces

$$r = u + v$$

donde $u = \|u\| {}^1\hat{o}^1$ y $v = \|v\| {}^1\hat{o}^2$
 ${}^1\hat{o}^1 = \rho(f, \hat{a}^1)$ y ${}^1\hat{o}^2 = \rho(q, {}^1\hat{o}^1)$

Sustituyendo ③ de la configuración inicial.

$${}^1\hat{o}^1 = \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) \quad \text{y} \quad {}^1\hat{o}^2 = \rho(q, \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1))) \quad ④$$

donde $f = (\text{Cos}\theta_1, \text{Sen}\theta_1)$. Entonces

$$r = \|u\| \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) + \|v\| \rho(q, \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1))) \quad \text{Configuración 1.}$$

Configuración final. En esta configuración δ_j^i es la base móvil pegada al i-ésimo eslabón. Entonces

$$r = u + v$$

donde $u = \|u\| \delta^1$ y $v = \|v\| \delta^2$
 $\delta^1 = {}_1\delta^1$ y $\delta^2 = \rho(g, {}_1\delta^2)$

Sustituyendo ④ de la configuración 1.

$$\delta^1 = \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) \quad \text{y} \quad \delta^2 = \rho(g, \rho(q, \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)))) \quad \text{④}$$

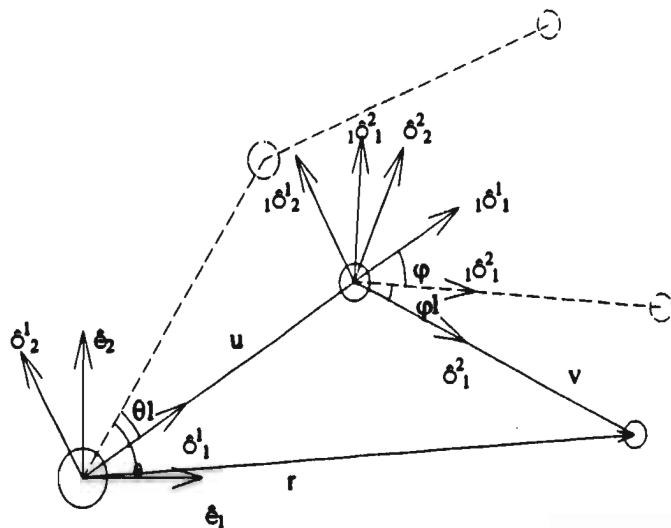


Fig.6.10: Configuración final de la secuencia 1.

donde $g = (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1)$.

Entonces

$$r = \|u\| \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) + \|v\| \rho(g, \rho(q, \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)))) \dots \dots \dots \text{Configuración final.}$$

Secuencia 2.

Configuración inicial: La ecuación para la posición del extremo final del manipulador, es la misma del caso anterior.

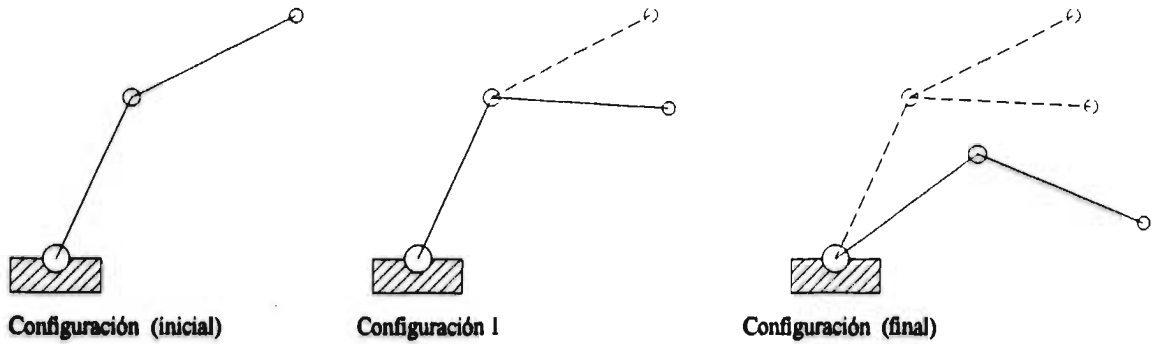


Fig. 6.11: Movimiento del manipulador de 2 gdl. en la secuencia 2.

Configuración 1:

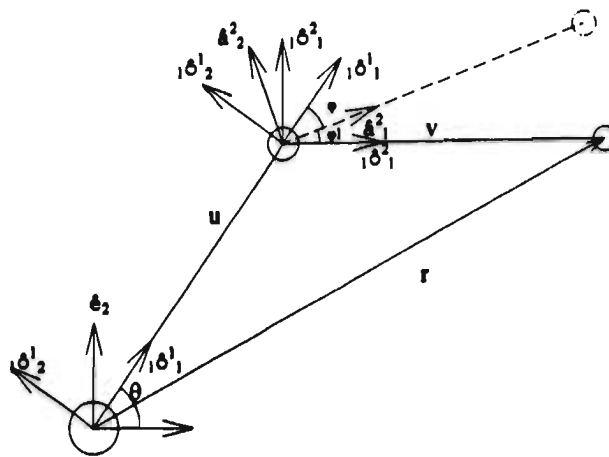


Fig. 6.12: Configuración 2 de la secuencia 2.

$$r = u + v$$

donde

$$u = \|u\| \delta_1^1 \quad \text{y} \quad v = \|v\| \delta_1^2$$

$$\delta_1^1 = \hat{a}_1 \quad \text{y} \quad \delta_1^2 = \rho(g, \hat{a}_2)$$

Sustituyendo ③ de la configuración inicial.

$$\delta_1^1 = \rho(p, \hat{e}_1) \quad \text{y} \quad \delta_1^2 = \rho(g, \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))) \quad \text{⑤}$$

donde $g = (\text{Cos}\phi, \text{Sen}\phi)$.

Entonces

$$r = \|u\| \rho(p, \hat{e}_1) + \|v\| \rho(g, \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1))) \quad \text{Configuración 1.}$$

Configuración final:

$$r = u + v$$

donde $u = \|u\| \delta^1_1$ y $v = \|v\| \delta^2_1$
 $\delta^1_1 = \rho(f, {}_1\delta^1_1)$ y $\delta^2_1 = \rho(f, {}_1\delta^2_1)$

Sustituyendo ⑥ de la configuración 1

$$\delta^1_1 = \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) \quad \text{y} \quad \delta^2_1 = \rho(f, \rho(g, \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1)))) \quad \text{⑥}$$

donde $f = (\text{Cos}\theta_1, \text{Sen}\theta_1)$.

Entonces

$$r = \|u\| \rho(f, \rho(p, \hat{e}_1)) + \|v\| \rho(f, \rho(g, \rho(q, \rho(p, \hat{e}_1)))) \dots \dots \dots \text{Configuración final.}$$

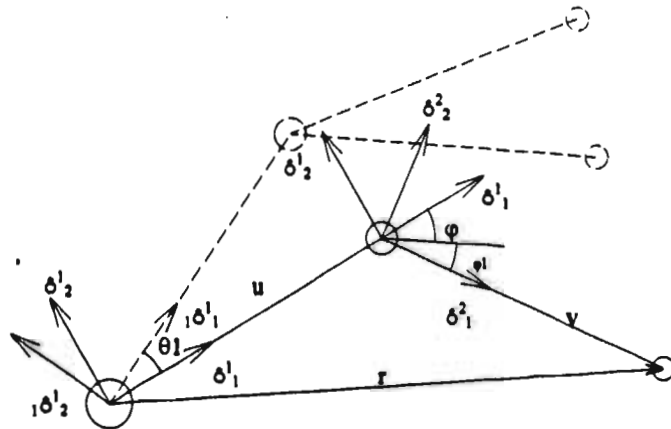


Fig. 6.11 Configuración final de la secuencia 2.

Como puede observarse de los modelos para las configuraciones finales, el orden de las rotaciones es "distinto". Sin embargo como la multiplicación entre bitemiones es conmutativa, la posición obtenida por los dos modelos es la misma.

A continuación se presenta la cinemática directa de la configuración deformada (final) del manipulador, a partir de la configuración inicial (no deformada).

Cinemática Directa de la configuración deformada (final)

<p>Ahora se tiene que $f=(\text{Cos}\theta_1, \text{Sen}\theta_1)$; $g=(\text{Cos}\varphi_1, \text{Sen}\varphi_1)$ donde $\ f\ = \ g\ = 1$; siendo θ_1 y φ_1 los ángulos que van a rotar los eslabones.</p> <p>La posición del extremo del manipulador como se vio anteriormente, está definida por cualquier modelo de la configuración final ya sea de la secuencia 1 o de la secuencia 2. Tomamos el modelo de la secuencia 1. $R = u+v$ donde $u = u \delta^1$, y $v = v \delta^2$, $\delta^1 = \rho(f, \rho(p, e_1))$ y $\delta^2 = \rho(g, \rho(q, \rho(f, \rho(p, e_1))))$ $r = u \rho(f, \rho(p, e_1)) + v \rho(g, \rho(q, \rho(f, \rho(p, e_1))))$</p>	<p>$f=\{f_0, f_1\}$; $g=\{g_0, g_1\}$;</p> <p>$\delta_{11}=\text{Rpq}[f, \text{Rpq}[p, e_1]]$; $\delta_{21}=\text{Rpq}[g, \text{Rpq}[q, \text{Rpq}[f, \text{Rpq}[p, e_1]]]]$; $u_f = L_1 * \delta_{11}$; $v_f = L_2 * \delta_{21}$; $r_f = u_f + v_f$;</p>
---	--

6.3.2.-Cinemática Inversa.

Para resolver el problema de la cinemática inversa es necesario, para no tener problemas en la solución del sistema de ecuaciones que resulta, determinar correctamente la longitud de los eslabones del manipulador de tal modo que la trayectoria T_b que deberá generar el órgano terminal de éste, se encuentre dentro del área de trabajo del mismo. Es por esto que la norma de los vectores 'u' y 'v', los cuales definen la longitud del primero y segundo eslabón, se tomaron como $L_1=300$ y $L_2=250$ respectivamente. Por otra parte, si las trayectorias T_a y T_b se originan en un punto cuyas coordenadas son (-100,0) respecto al sistema fijo y en cuyo origen (0,0) se encuentra en la base del manipulador (fig. 6.14), las ecuaciones paramétricas que definen las trayectorias son las siguientes.

Trayectoria original T_a :

$$\begin{aligned} R_1(t) &= 70.7107t - 100 \\ R_2(t) &= 70.7107t - 4.905t^2 \end{aligned} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 7.$$

Trayectoria seguidora T_b :

Caso 1:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= -100 \\ R_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 3.$$

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= 123.744 t - 371.231 - 100 \\ R_2'(t) &= -317.153 + 123.744 t - 6.00863 t^2 \quad \text{para } t \geq 3 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= -100 \\ R_2'(t) &= 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 3. \\ R_1'(t) &= 123.744 t - 371.231 - 100 \\ R_2'(t) &= -506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2 \quad \text{para } t \geq 3 \end{aligned} \quad \textcircled{4}$$

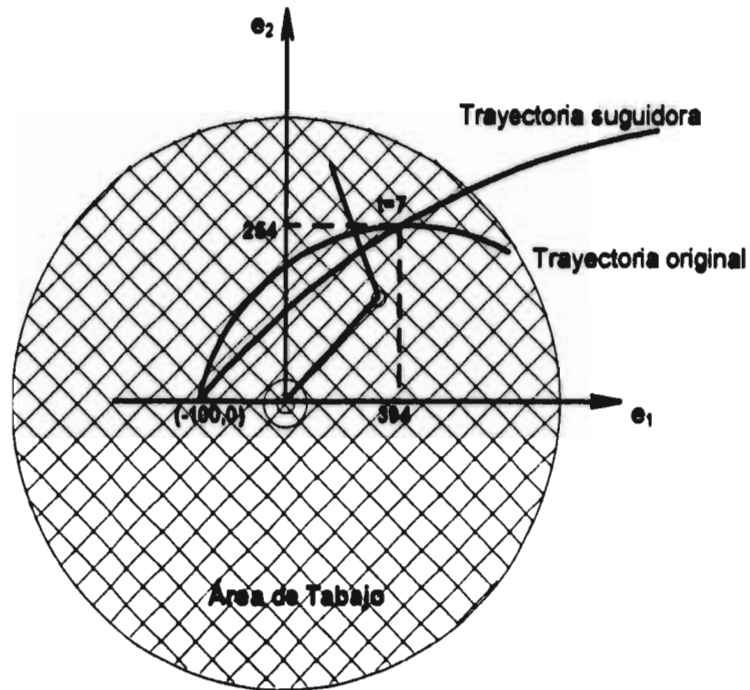


Fig.6.14: Área de trabajo del manipulador de 2 gdl.

Para obtener la cinemática inversa del manipulador, se deberá resolver $r_i = r_i(t_0, f_1, g_0, g_1)$ para los distintos puntos $(R_1'(t), R_2'(t))$ de la trayectoria seguidora en el intervalo $0 \leq t \leq 7$.

*Cinemática Inversa para la configuración deformada. *Caso 1**

Para $0 \leq t \leq 7$ ($0 \leq t \leq t_2$) con incrementos de 0.5 en t (desde luego, los incrementos	For $t=0, t \leq 7, t += 0.5,$
---	--------------------------------

<p>de t pueden ser más pequeños dependiendo de la capacidad del sistema de cómputo) resolver lo siguiente.</p> <p>Si $0 \leq t \leq 3$ ($0 \leq t \leq t_1$), de ① se tiene que</p> <p>$r_{ix} = -100$; $r_{iy} = 0$; $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$;</p> <p>Teniendo así un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas.</p> <p>Para resolver este sistema, se utiliza el método de Newton donde iniciamos con los siguientes valores:</p> <p>$f_0 = 0.8$; $f_1 = -0.1$; $g_0 = 0.1$; $g_1 = 0.8$;</p> <p>Si $t \geq 3$, de ② se tiene que</p> <p>$r_{ix} = -471.231 + 123.744 t$; $r_{iy} = -317.153 + 123.744 t - 6.00863 t^2$; $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$;</p> <p>Este sistema se resuelve con las siguientes condiciones iniciales.</p> <p>$f_0 = 0.9$; $f_1 = -0.1$; $g_0 = -0.1$; $g_1 = 0.8$;</p> <p>Al resolver para cada t, se obtienen los ángulos θ_1, φ_1 respecto a la configuración no deformada.</p>	<pre> If[t<=3, px=-100;py=0; sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px, rf[[2]]==py, f0^2+f1^2==1, g0^2+g1^2==1}, {f0,0.8},{f1,-0.1},{g0,0.1},{g1,0.8}], px=-471.231 + 123.744 t; py= -317.153 + 123.744 t - 6.00863 t^2 ; sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px, rf[[2]]==py, f0^2+f1^2==1, g0^2+g1^2==1}, {f0,0.9},{f1,-0.1},{g0,-0.1},{g1,0.8}]]] </pre>
--	---

*Cinemática Inversa para la configuración deformada. *Caso 2**

<p>Para $0 \leq t \leq 7$ ($0 \leq t \leq t_2$) con incrementos de 0.5 en t, resolver lo siguiente.</p> <p>Si $0 \leq t \leq 3$ ($0 \leq t \leq t_1$), de ① se tiene que</p> <p>$r_{ix} = -100$; $r_{iy} = 0$; $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$;</p> <p>Teniendo así un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas.</p> <p>Se resuelve este sistema con el método de Newton para los siguientes valores iniciales.</p> <p>$f_0 = 0.8$; $f_1 = -0.1$; $g_0 = 0.1$; $g_1 = 0.8$;</p>	<pre> For[t=0, t<=7,t+=0.5, If[t<=3, px=-100;py=0; sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px, rf[[2]]==py, f0^2+f1^2==1, g0^2+g1^2==1}, {f0,0.8},{f1,-0.1},{g0,0.1},{g1,0.8}], </pre>
---	---

<p>Si $t \geq 3$, de ④ se tiene que: $r_{tx} = 123.744 t - 371.231 - 100$ $r_{ty} = -506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2$ $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$; Este sistema se resuelve con las siguientes condiciones iniciales: $f_0=0.9$; $f_1=-0.1$; $g_0=-0.1$; $g_1=0.8$;</p> <p>Al resolver para cada t, se obtienen los siguientes ángulos θ_1, ϕ_1 respecto a la configuración no deformada.</p>	<pre> px = -471.231 + 123.744 t; py = -506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2; sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px, rf[[2]]==py, f0^2+f1^2==1, g0^2+g1^2==1}, {f0,0.9},{f1,-0.1},{g0,-0.1},{g1,0.8}]]] </pre>
--	--

6.4 Definición del problema en ξ .

Ahora trataremos el problema de intersección de trayectorias T_a y T_b en el espacio euclidiano ξ con las siguientes condiciones:

$\|Vo\|=100$; $g=9.81$; $\theta=50^\circ$; $\phi=60^\circ$; $t_1=3$; $t_2=8$;

Sustituyendo estos datos en las ecuaciones paramétricas obtenidas en el capítulo anterior para los casos 1 y 2, se tiene lo siguiente.

Trayectoria original T_a :

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= 25.7115 t \\
 R_2(t) &= 44.5336 t \\
 R_3(t) &= 61.2836 t - 4.905 t^2 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 8
 \end{aligned}$$

Trayectoria seguidora T_b :

Caso 1:

$$\begin{aligned}
 R_1^{\cdot}(t) &= 0 \\
 R_2^{\cdot}(t) &= 0 \\
 R_3^{\cdot}(t) &= 0 \text{ para } 0 \leq t \leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1^{\cdot}(t) &= -123.415 + 41.1384 t \\
 R_2^{\cdot}(t) &= -213.76 + 71.2538 t \\
 R_3^{\cdot}(t) &= -242.79 + 98.053 t - 5.70764 t^2 \quad \text{para } t \geq 3 \quad \text{④}
 \end{aligned}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned}
 R_1^{\cdot}(t) &= 0 \\
 R_2^{\cdot}(t) &= 0 \\
 R_3^{\cdot}(t) &= 0 \text{ para } 0 \leq t \leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1'(t) &= -123.415 + 41.1384 t \\
 R_2'(t) &= -213.76 + 71.2538 t \\
 R_3'(t) &= -407.17 + 173.39 t - 12.5568 t^2 \quad \text{para } t \geq 3 \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

En las siguientes figuras se muestran los gráficos de las trayectorias intersectadas para los casos 1 y 2.

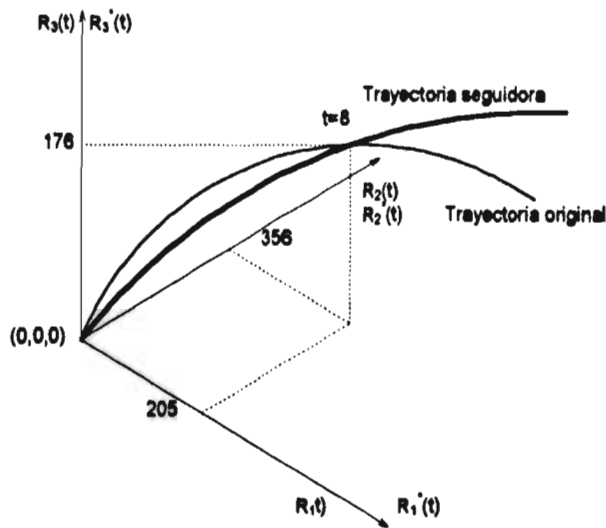


Fig.6.15: Intersección de trayectorias para el caso 1 en \mathcal{R}^3 .

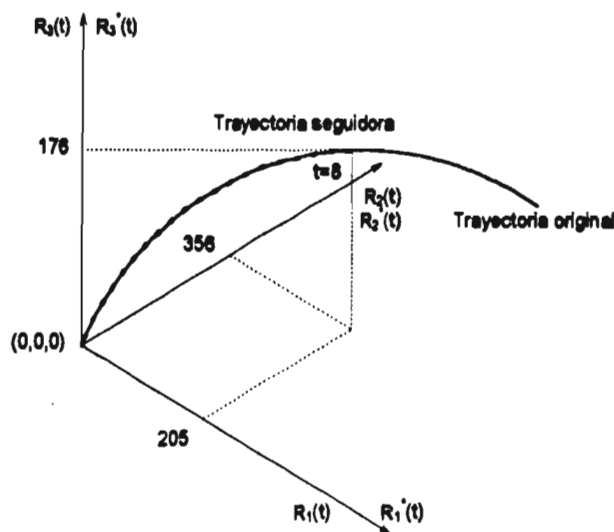


Fig.6.16: Intersección de trayectorias para el caso 2 en \mathcal{R}^3 .

6.5.- El movimiento en ξ .

Se inicia esta sección presentando la rotación de bases en \mathbb{R}^3 utilizando el álgebra de Quaterniones.

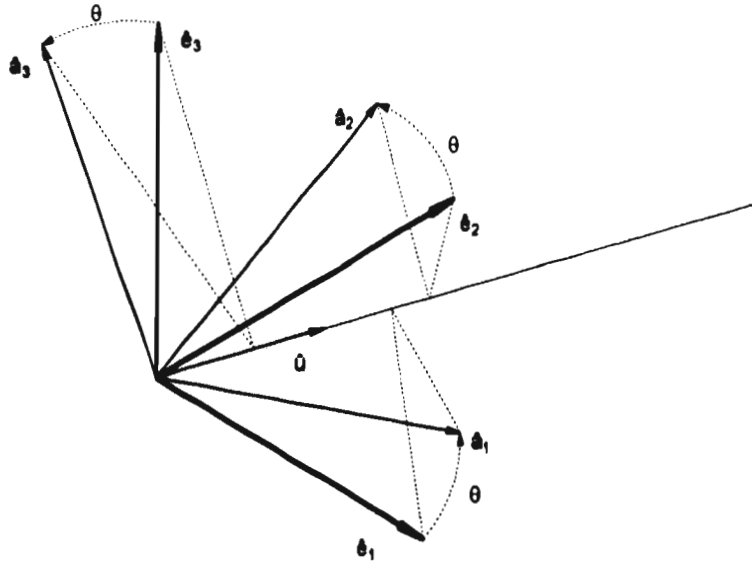


Fig. 6.17: Rotación general de la base \hat{e}_j .

Utilizando la misma nomenclatura de la sección 6.2 para las bases de \mathbb{R}^3 se tiene que

$$\hat{e}_1 = (1, 0, 0); \hat{e}_2 = (0, 1, 0); \hat{e}_3 = (0, 0, 1);$$

$$e_1 = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}; e_0 = (1, 0, 0, 0);$$

$$e_1 = (0, 1, 0, 0);$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0);$$

$$e_3 = (0, 0, 0, 1);$$

es una base ortonormal de Q .

Además aplicando el isomorfismo $T_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow Q_v$ a \hat{e}_j :

$$T_v(\hat{e}_1) = (0, 1, 0, 0) = e_1$$

$$T_v(\hat{e}_2) = (0, 0, 1, 0) = e_2$$

$$T_v(\hat{e}_3) = (0, 0, 0, 1) = e_3$$

Del teorema 4.3.1 se tiene que

$$\rho(q, x) \in Q_v \text{ para todo } x \in Q_v, \text{ siendo } q = q_R + q_v$$

donde

$$q_R = T_R \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{y} \quad q_v = T_v \left(\pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} \hat{u} \right)$$

y entonces $q = q_R \star q_v$

donde \hat{u} es el vector unitario de define al eje de la rotación y θ el ángulo de la misma. Si el vector $\hat{u} = u_i \hat{e}_i$, entonces de la sección 4.5 se tiene que

$$q_R = \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right); \quad q_v = \left(0, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_1, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_2, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_3 \right);$$

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_1, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_2, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} u_3 \right);$$

Por lo tanto $T_v(\hat{a}_i) = (\rho(q, T_v(\hat{e}_i))) = q \star T_v(\hat{e}_i) \star \bar{q}$

Esto es $a_j = \rho(q, e_i) = q \star e_i \star \bar{q}$ para $i=j$ de 1 a 3 ①

Si el eje de rotación \hat{u} es paralelo a cualquiera de los eje del sistema fijo (s.f.) \hat{e}_i , se tiene lo siguiente

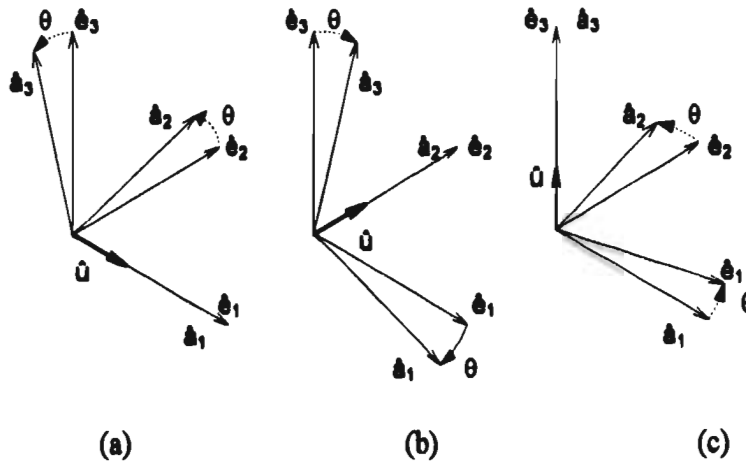


Fig. 6.18: Ejes de rotación paralelos a los ejes del s.f. \hat{e}_i

<p>a.-Eje de rotación paralelo a \hat{e}_1 :</p> <p>$\hat{u} = \hat{e}_1$;</p> <p>$q_R = (q_0, 0, 0, 0)$;</p> <p>$q_V = (0, q_1, 0, 0)$;</p> <p>$q = (q_0, q_1, 0, 0)$;</p> <p>$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right)$;</p>	<p>b.-Eje de rotación paralelo a \hat{e}_2 :</p> <p>$\hat{u} = \hat{e}_2$;</p> <p>$q_R = (q_0, 0, 0, 0)$;</p> <p>$q_V = (0, 0, q_2, 0)$;</p> <p>$q = (q_0, 0, q_2, 0)$;</p> <p>$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2}, 0 \right)$;</p>	<p>c.-Eje de rotación paralelo a \hat{e}_3 :</p> <p>$\hat{u} = \hat{e}_3$;</p> <p>$q_R = (q_0, 0, 0, 0)$;</p> <p>$q_V = (0, 0, 0, q_3)$;</p> <p>$q = (q_0, 0, 0, q_3)$;</p> <p>$q = \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, \pm \text{Sen} \frac{\theta}{2} \right)$;</p>
--	--	--

Así entonces, aplicando ① a cualquier vector definido en la base móvil \hat{a}_j , éste puede ser expresado en la base \hat{e}_j . Es importante no olvidar que \hat{u} deberá ser expresado en la base que se va a rotar.

Analicemos el siguiente caso de composición de rotaciones.

La base móvil \hat{a}_j en la configuración no deformada es expresada en la base fija \hat{e}_j aplicando la siguiente rotación.

$$a_j = \rho(F, e_j) \text{ representado en } e_j \quad \textcircled{2}$$

donde el Cuaternión 'F' tiene como eje de rotación a \hat{u} , el cual está expresado en \hat{e}_j .

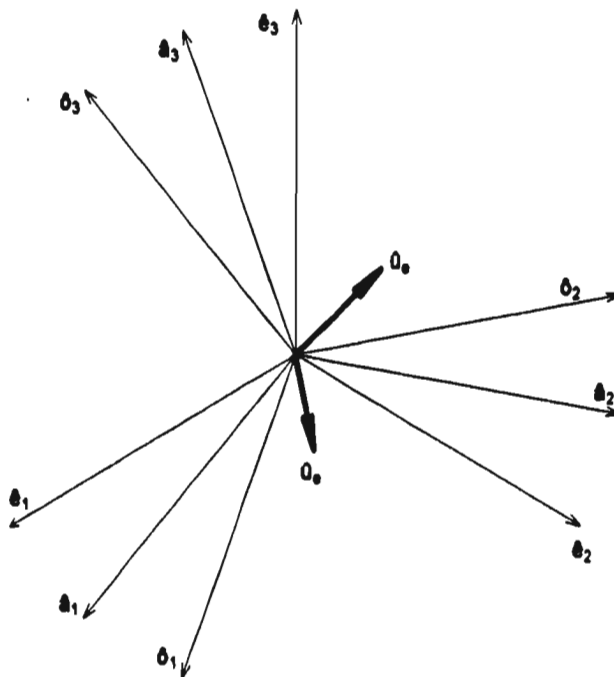


Fig.6.19: Composición de rotaciones

La base \hat{o}_j de la configuración deformada es expresada en la base \hat{a}_j de la siguiente manera.

$$o_j = \rho(f, a_j) \text{ representado en } a_j \quad (3)$$

donde el Cuaternión 'f' tiene como eje de rotación a \hat{u}_a el cual está expresado en \hat{a}_j . Por otra parte, se requiere que \hat{o}_j sea expresada en \hat{e}_j . Sustituyendo (2) en (3) y expresando 'f' en la base e_j .

$$o_j = \rho(f, \rho(F, e_j)) \text{ representado en } e_j \quad (4)$$

Por lo tanto
$$o_j = f \star F \star e_j \star \bar{F} \star \bar{f}$$
 donde
$$f = \rho(F, f) = F \star f \star \bar{F}.$$

De las propiedades sobre el conjugado de Cuaterniones (también ver la nota 8 de la pag. 30):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= F \star f \star \bar{F} \quad \text{y} \quad F \star \bar{F} = \bar{F} \star F = 1 \\ o_j &= F \star f \star \bar{F} \star F \star e_j \star \bar{F} \star F \star f \star \bar{F} \\ o_j &= F \star f \star e_j \star f \star \bar{F} \\ o_j &= \rho(F, \rho(f, e_j)) \quad \text{representado en } e_j \quad (5) \end{aligned}$$

6.6.- El manipulador de tres grados de libertad.

Para iniciar con esta sección se analiza primero, como en la sección 6.3, la *Cinemática Directa* de un manipulador de 3 gdl. tipo RRR que tiene *ejes de rotación en las direcciones k,i,l* respecto a las bases móviles colocadas en el primero, segundo y tercer eslabón respectivamente.

6.6.1.-Cinemática Directa.

Para iniciar el análisis de la Cinemática Directa observemos la siguiente figura cuya nomenclatura es la siguiente:

- \hat{e}_j : Base inercial.
- \hat{a}_j^1 : Base móvil del eslabón 1.
- \hat{a}_j^2 : Base móvil del eslabón 2.
- \hat{a}_j^3 : Base móvil del eslabón 3.
- u,v,w : Vectores asociados a los extremos de los eslabones.
- α, β, γ : Ángulo entre las bases $\hat{e}_j - \hat{a}_j^1$, $\hat{a}_j^1 - \hat{a}_j^2$ y $\hat{a}_j^2 - \hat{a}_j^3$ respectivamente.
- r : Vector que define la posición del órgano terminal del manipulador.

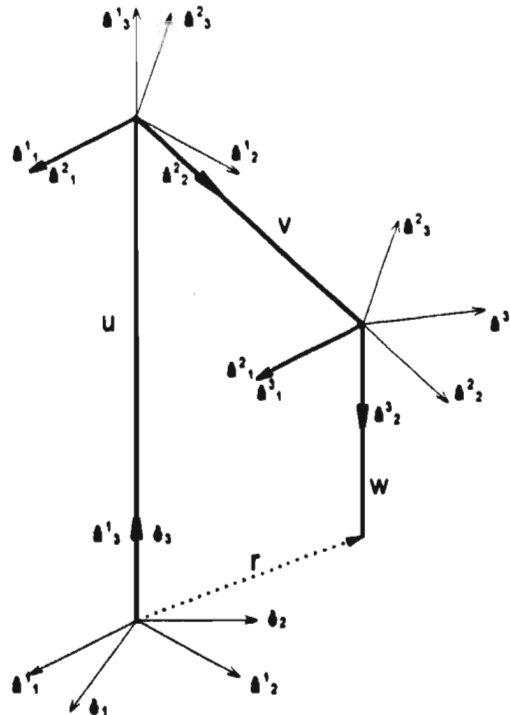


Fig.6.20: Configuración No deformada del manipulador de 3 gdl.

Cinemática Directa para la posición no deformada.

<p>Operación de multiplicación: $P \star Q = \{ P_1 Q_1 - P_2 Q_2 - P_3 Q_3 - P_4 Q_4, \\ P_1 Q_2 + P_2 Q_1 + P_3 Q_4 - P_4 Q_3, \\ P_1 Q_3 - P_2 Q_4 + P_3 Q_1 + P_4 Q_2, \\ P_1 Q_4 + P_2 Q_3 - P_3 Q_2 + P_4 Q_1 \}$</p> <p>Rotación: $\rho(P, x) = P \star x \star \bar{P}$</p> <p>Valores angulares iniciales: $\alpha = -35^\circ ; \beta = -20^\circ ; \gamma = -50^\circ ;$</p> <p>El Quaternión local que se aplica a la b.f. \hat{e}_j para obtener la b.m. \hat{e}_j^1 es: $F = \{ \cos \frac{\alpha}{2}, 0, 0, \sin \frac{\alpha}{2} \}$ cuyas componentes son dadas respecto a la b.f. \hat{e}_j.</p> <p>El Quaternión local que se aplica a la b.m. \hat{e}_j^1 para obtener la b.m. \hat{e}_j^2 es:</p>	<p>$Mpq[P_Q_] = \{ \\ P[[1]] \cdot Q[[1]] - P[[2]] \cdot Q[[2]] - P[[3]] \cdot Q[[3]] - P[[4]] \cdot Q[[4]], \\ P[[1]] \cdot Q[[2]] + P[[2]] \cdot Q[[1]] + P[[3]] \cdot Q[[4]] - P[[4]] \cdot Q[[3]], \\ P[[1]] \cdot Q[[3]] - P[[2]] \cdot Q[[4]] + P[[3]] \cdot Q[[1]] + P[[4]] \cdot Q[[2]], \\ P[[1]] \cdot Q[[4]] + P[[2]] \cdot Q[[3]] - P[[3]] \cdot Q[[2]] + P[[4]] \cdot Q[[1]] \};$</p> <p>$Conj[P_] = \{ P[[1]], -P[[2]], -P[[3]], -P[[4]] \};$ $Rpq[P_Q_] = Mpq[P, Mpq[Q, Conj[P]]];$</p> <p>alpha= -35*Degree; beta= -20*Degree; gamma= -50*Degree;</p> <p>$F = \{ \cos[\alpha/2], 0, 0, \sin[\alpha/2] \};$</p>
--	--

<p>$G = \left\{ \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2}, 0, 0 \right\};$ cuyas componentes son dados respecto a la b.m. \hat{a}^1; El Quaternión local que se aplica a la b.m. \hat{a}^2, para obtener la b.m. \hat{a}^3, es: $H = \left\{ \cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}, 0, 0 \right\};$ cuyas componentes son dados respecto a la b.m. \hat{a}^2;</p> <p>$\ u\ = \ v\ = 200; \ w\ = 150;$</p> <p>$a^1_3 = \rho(F, e_3);$ representado en e_3; $a^2_2 = \rho(G, a^1_2);$ representado en a^1_2; $a^3_2 = \rho(H, a^2_2);$ representado en a^2_2;</p> <p>Para representar estos tres elementos en la base inercial \hat{e}, también debemos rotar los Quaterniones de cada eslabón:</p> <p>$G' = \rho(F, G) = F \star G \star \bar{F}$ Quaternión Global. $\bar{G}' = F \star \bar{G} \star \bar{F}$ $H' = \rho(F, H) = F \star H \star \bar{F}$ $\bar{H}' = F \star \bar{H} \star \bar{F}$ $H'' = \rho(G', H') = G' \star H' \star \bar{G}'$ Sustituyendo: $H'' = F \star G \star \bar{F} \star F \star H \star \bar{F} \star F \star \bar{G} \star \bar{F}$ $H'' = F \star G \star H \star \bar{G} \star \bar{F}$ Quaternión Global. $\bar{H}'' = F \star G \star \bar{H} \star \bar{G} \star \bar{F}$</p> <p>Componentes de la base inercial: $e_1 = \{0, 1, 0, 0\};$ $e_2 = \{0, 0, 1, 0\};$ $e_3 = \{0, 0, 0, 1\};$</p> <p>Bases móviles: $a^1_3 = \rho(F, e_3) = F \star e_3 \star \bar{F};$ $a^1_2 = \rho(F, e_2) = F \star e_2 \star \bar{F};$</p> <p>$a^2_2 = \rho(G', a^1_2) = G' \star a^1_2 \star \bar{G}'$ $= F \star G \star \bar{F} \star F \star e_2 \star \bar{F} \star F \star \bar{G} \star \bar{F}$ $= F \star G \star e_2 \star \bar{G} \star \bar{F}$</p>	<p>$G = \{\cos[\beta/2], \sin[\beta/2], 0, 0\};$</p> <p>$H = \{\cos[\gamma/2], \sin[\gamma/2], 0, 0\};$</p> <p>$L1=200 ; L2=200; L3=150;$</p> <p>$e1=\{0,1,0,0\};$ $e2=\{0,0,1,0\};$ $e3=\{0,0,0,1\};$</p> <p>$a13=Rpq[F, e3];$ $a12=Rpq[F, e2];$</p>
---	--

$= \rho(F, \rho(G, e_2))$ $a^3_2 = \rho(H', a^2_2) = H' \star a^2_2 \star \bar{H}'$ $a^3_2 = G' \star H' \star \bar{G}' \star G' \star a^1_2 \star \bar{G}' \star G' \star H' \star \bar{G}'$ $= G' \star H' \star F \star e_2 \star \bar{F} \star H' \star \bar{G}'$ $= F \star G \star \bar{F} \star F \star H \star \bar{F} \star F \star e_2 \star \bar{F} \star F \star \bar{H} \star \bar{F} \star F \star \bar{G} \star \bar{F}$ $= F \star G \star H \star e_2 \star \bar{H} \star \bar{G} \star \bar{F}$ $a^3_2 = \rho(F, \rho(G, \rho(H, e_2)))$ $u = \ u\ a^1_3; \quad v = \ v\ a^2_2; \quad w = \ w\ a^3_2;$ $r = u + v + w;$ $r = \ u\ a^1_3 + \ v\ a^2_2 + \ w\ a^3_2;$ $r = \ u\ F \star e_3 \star \bar{F} +$ $\ v\ F \star G \star e_2 \star \bar{G} \star \bar{F} +$ $\ w\ F \star G \star H \star e_2 \star \bar{H} \star \bar{G} \star \bar{F};$	$a22 = Rpq[F, Rpq[G, e2]];$ $a32 = Rpq[F, Rpq[G, Rpq[F, e2]]];$ $u_i = L1 \cdot a13;$ $v_i = L2 \cdot a22;$ $w_i = L3 \cdot a32;$ $r_i = u_i + v_i + w_i;$
--	---

Para determinar la *Cinemática Directa* de alguna configuración deformada del manipulador, supongamos que las barras 1,2 y 3 rotan localmente un ángulo α_1, β_1 y γ_1 respectivamente. Después de estos movimientos se tendrá la configuración deformada siguiente.

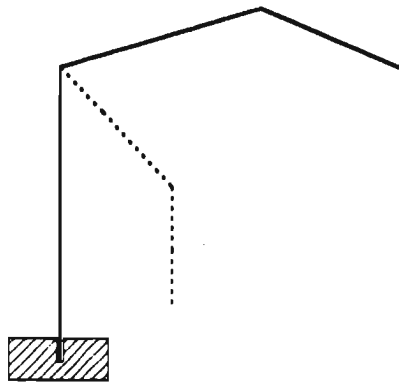


Fig.6.21: Configuración deformada del manipulador de 3 grados de libertad.

Para obtener esta configuración existen varias secuencias en los movimientos de las barras:

Secuencia #:	1 ^{er} Movimiento : barra #.	2 ^{do} Movimiento: barra #.	3 ^{er} Movimiento: barra #:
1	1	2	3
2	1	3	2
3	2	1	3
4	2	3	1
5	3	1	2
6	3	2	1

En este trabajo se analizan las secuencias 1 y 3.

Secuencia 1-0: Posición inicial (home):

Del análisis hecho de la figura 6.20, para la configuración inicial se tiene lo siguiente:

Quaterniones de rotación local:

Configuración inicial.

$$\begin{aligned}
 F &= \{F_0, 0, 0, F_3\} && \text{para } e_i \\
 G &= \{G_0, G_1, 0, 0\} && \text{para } a_j^1 \\
 H &= \{H_0, H_1, 0, 0\} && \text{para } a_j^2
 \end{aligned}$$

Configuración deformada (no se utilizan en esta parte)

$$\begin{aligned}
 f &= \{f_0, 0, 0, f_3\}; && \text{para } a_j^1 \\
 g &= \{g_0, g_1, 0, 0\}; && \text{para } a_j^2 \\
 h &= \{h_0, h_1, 0, 0\}; && \text{para } a_j^3
 \end{aligned}$$

Quaterniones de rotación global:

$$\begin{aligned}
 F &= \{F_0, 0, 0, F_3\}; \\
 G' &= \rho(F, G) = F \star G \star \bar{F}; && \bar{G}' = F \star \bar{G} \star \bar{F} \\
 H'' &= \rho(G', H') = F \star G \star H \star \bar{G} \star \bar{F}; && \bar{H}'' = F \star G \star \bar{H} \star \bar{G} \star \bar{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= \{f_0, 0, 0, f_3\}; \\
 g' &= \rho(F, g) = F \star g \star \bar{F}; && \bar{g}' = F \star \bar{g} \star \bar{F} \\
 h' &= \rho(F, h) = F \star h \star \bar{F}; && \bar{h}' = F \star \bar{h} \star \bar{F}; \\
 h'' &= \rho(g', h') = F \star G \star h \star \bar{G} \star \bar{F}; && \bar{h}'' = F \star G \star \bar{h} \star \bar{G} \star \bar{F};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3^1 &= \rho(F, e_3) = F \star e_3 \star \bar{F}; \\
 a_2^1 &= \rho(F, e_2) = F \star e_2 \star \bar{F}; \\
 a_2^2 &= \rho(G', a_2^1) \\
 &= \rho(F, \rho(G, e_2)) \\
 a_2^3 &= \rho(H'', a_2^2) \\
 &= \rho(F, \rho(G, \rho(H, e_2)));
 \end{aligned}$$

$$u = \|u\| a^1_3; \quad v = \|v\| a^2_2; \quad w = \|w\| a^3_2;$$

$$r = u + v + w;$$

$$r = \|u\| a^1_3 + \|v\| a^2_2 + \|w\| a^3_2;$$

Secuencia 1-1: Primera Posición deformada:

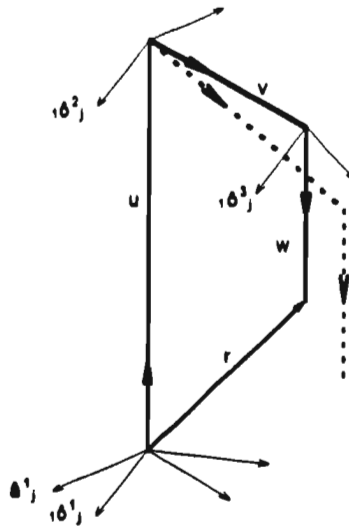


Fig. 6.21: Primera posición deformada de la secuencia 1 .

Quaternión de rotación global: $f^* = f$

Rotación de bases:

$$1o^1_j = \rho(f^*, a^1_j);$$

$$1o^2_j = \rho(f^*, a^2_j);$$

$$1o^3_j = \rho(f^*, a^3_j);$$

Rotación de Quaterniones en el primer movimiento:

$$g^* = \rho(f^*, g');$$

$$h^* = \rho(f^*, h'');$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| 1o^1_3 + \|v\| 1o^2_2 + \|w\| 1o^3_2;$$

Secuencia 1-2: Segunda Posición deformada:

Quaternión de rotación global: g^* .

Rotación de bases:

$$z^1_j = 1^1_j ; z^2_j = \rho(g^*, 1^2_j); z^3_j = \rho(g^*, 1^3_j);$$

Rotación de Quaterniones en el segundo movimiento:

$$h^{**} = \rho(g^*, h^*);$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| z^1_3 + \|v\| z^2_2 + \|w\| z^3_2 ;$$

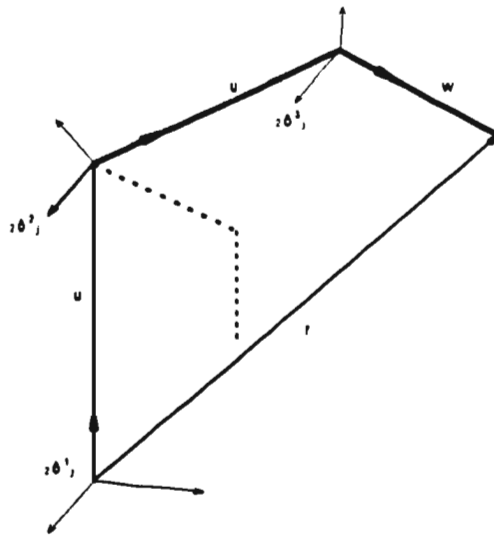


Fig. 6.23: Segunda posición deformada de la secuencia 1 .

Secuencia 1-3: Tercera Posición deformada (posición final):

Quaternión de rotación global: h^{**} .

Rotación de bases:

$$z^1_j = z^1_j$$

$$z^2_j = z^2_j$$

$$z^3_j = \rho(h^{**}, z^3_j);$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| z^1_3 + \|v\| z^2_2 + \|w\| z^3_2 ;$$

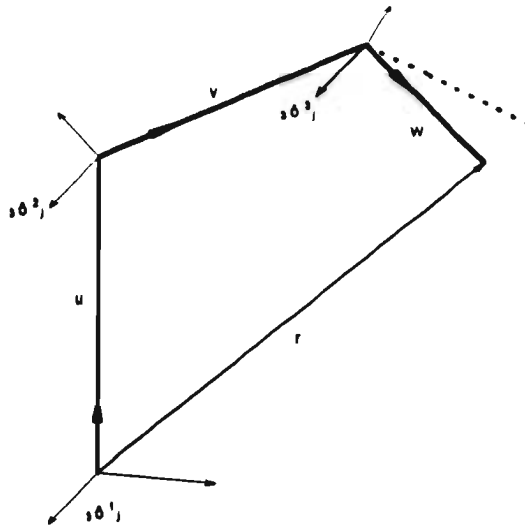


Fig. 6.24: Tercera posición deformada de la secuencia 1 .

Al expandir 'r' haciendo las sustituciones correspondientes y utilizando las propiedades de los Cuaterniones conjugados en la configuración final, se tiene que

$$r = \|u\| \rho(f, \rho(F, e_3)) + \|v\| \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, e_2)))) + \|w\| \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, \rho(h, \rho(H, e_2))))) ; \quad (A)$$

Ahora se analiza la secuencia 3:

Secuencia 3-0: Posición inicial (home):

Para esta posición se tiene exactamente lo mismo que en el caso de la secuencia 1 (también para cualquier caso).

Secuencia 3-2: Primera Posición deformada:

Quaternión de rotación global: $g^* = g'$

Rotación de bases:

$$\begin{aligned} 1o^1_j &= a^1_j \\ 1o^2_j &= \rho(g^*, a^2_j); \\ 1o^3_j &= \rho(g^*, a^3_j); \end{aligned}$$

Rotación de Cuaterniones en el primer movimiento:

$$\begin{aligned} f^* &= f \\ h^* &= \rho(g^*, h''); \end{aligned}$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| {}_1o^1_3 + \|v\| {}_1o^2_2 + \|w\| {}_1o^3_2;$$

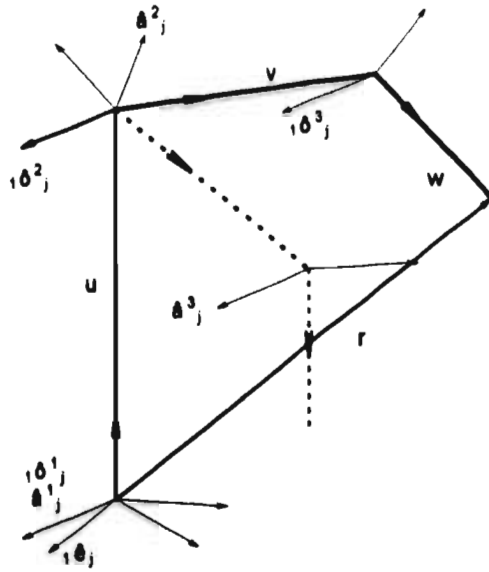


Fig. 6.25: Primera posición deformada de la secuencia 1 .

Secuencia 3-1: Segunda Posición deformada:

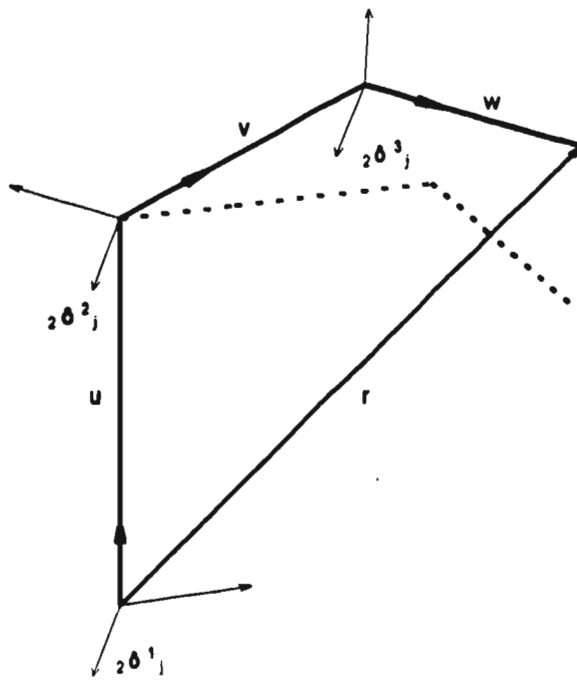


Fig. 6.26: Segunda posición deformada de la secuencia 1 .

Quaternión de rotación global: f^* .

Rotación de bases:

$$z_0^1 = \rho(f^*, 10^1_j)$$

$$z_0^2 = \rho(f^*, 10^2_j);$$

$$z_0^3 = \rho(f^*, 10^3_j);$$

Rotación de Quaterniones en el segundo movimiento:

$$h^{**} = \rho(f^*, h^*);$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| z_0^1 + \|v\| z_0^2 + \|w\| z_0^3;$$

Secuencia 3-3: Tercera Posición deformada (posición final):

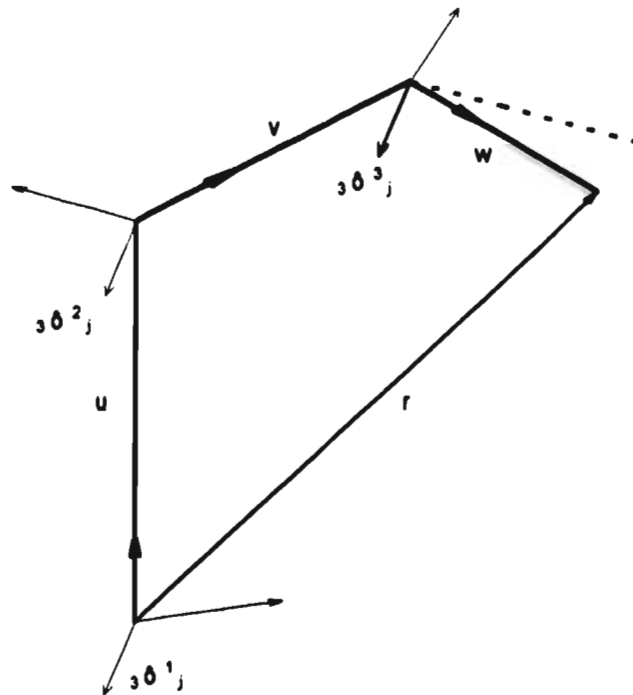


Fig. 6.27: Tercera posición deformada de la secuencia 1 .

Quaternión de rotación global: h^{**} .

Rotación de bases:

$$z_0^1 = z_0^1$$

$$z_0^2 = z_0^2$$

$$z_0^3 = \rho(h^{**}, z_0^3);$$

Posición del órgano terminal:

$$r = \|u\| 3o^1_3 + \|v\| 3o^2_2 + \|w\| 3o^3_2 ;$$

Al expandir 'r' haciendo los sustituciones correspondientes y utilizando las propiedades de los Cuaterniones conjugados en la configuración final, se tiene que

$$r = \|u\| \rho(f, \rho(F, e_3)) + \|v\| \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, e_2)))) + \|w\| \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, \rho(h, \rho(H, e_2)))))) ; \quad (B)$$

Como se puede observar de las ecuaciones A y B, *no importa la secuencia que se utilice para obtener la configuración deformada, ¡el modelo matemático es el mismo!*

Por lo tanto, la *Cinemática Directa* para la configuración deformada final queda de la siguiente manera:

Cinemática Directa para la Configuración Deformada

<p>Los Cuaterniones de rotación local son</p> $f = (f_0, 0, 0, f_3);$ $g = (g_0, g_1, 0, 0);$ $h = (h_0, h_1, 0, 0);$ <p>La representación de los vectores que definen los eslabones son</p> $3o^1_3 = \rho(f, \rho(F, e_3));$ $3o^2_2 = \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, e_2))));$ $3o^2_2 = \rho(f, \rho(F, \rho(g, \rho(G, \rho(h, \rho(H, e_2))))));$ $u = \ u\ 3o^1_3 ;$ $v = \ v\ 3o^2_2 ;$ $w = \ w\ 3o^2_2 ;$ $r_f = u+v+w ;$	$f = \{f_0, 0, 0, f_3\};$ $g = \{g_0, g_1, 0, 0\};$ $h = \{h_0, h_1, 0, 0\};$ $o13 = Rpq[f, Rpq[F, e_3]];$ $o22 = Rpq[f, Rpq[F, Rpq[g, Rpq[G, e_2]]]];$ $o32 = Rpq[f, Rpq[F, Rpq[g, Rpq[G, Rpq[h, Rpq[H, e_2]]]]]]];$ $u = L1 \cdot o13;$ $v = L2 \cdot o22;$ $w = L3 \cdot o32;$ $r_f = u+v+w;$
--	---

6.5.2.-Cinemática Inversa.

Asegurando que las dos trayectorias se encuentren dentro del área de trabajo del manipulador para cualquier $0 \leq t \leq 8$, colocamos el origen de las y trayectorias en el punto (-100,-100,0) respecto al origen del primer eslabón del manipulador en el cual se

coloca el sistema inercial. Considerando lo anterior, se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas.

Trayectoria original T_a :

$$\begin{aligned} R_1(t) &= 25.7115 t - 100 \\ R_2(t) &= 44.5336 t - 100 \\ R_3(t) &= 61.2836 t - 4.905 t^2 \\ &\text{para } 0 \leq t \leq 8 \end{aligned}$$

Trayectoria seguidora T_b :

Caso 1:

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= -100 \\ R_2'(t) &= -100 \\ R_3'(t) &= 0 \text{ para } 0 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= -223.415 + 41.1384 t \\ R_2'(t) &= -313.76 + 71.2538 t \\ R_3'(t) &= -242.79 + 98.053 t - 5.70764 t^2 \\ &\text{para } t \geq 3 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

Caso 2:

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= -100 \\ R_2'(t) &= -100 \\ R_3'(t) &= 0 \text{ para } 0 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1'(t) &= -223.415 + 41.1384 t \\ R_2'(t) &= -313.76 + 71.2538 t \\ R_3'(t) &= -407.17 + 173.39 t - 12.5568 t^2 \\ &\text{para } t \geq 3 \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

Como en el caso del manipulador de 2 gdl., se tiene que

Cinemática Inversa para la configuración deformada. *Caso 1*

<p>Para $0 \leq t \leq 8$, con incrementos de 0.5 en t: Resolver lo siguiente: Si $0 \leq t \leq 3$ ($0 \leq t \leq t_1$), de $\textcircled{1}$ se tiene que: $r_x = -100$; $r_y = -100$; $r_z = 0$; $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$; $\ h\ ^2 = 1$; Utilizamos el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones, con las siguientes condiciones iniciales:</p>	<p>For[$t=0$, $t \leq 8$, $t+=0.5$, If[$t \leq 3$, $px = -100$; $py = -100$; $pz = 0$; Sol[t]=FindRoot[{ $rf[[2]]==px, rf[[3]]==py, rf[[4]]==pz$, $f0^2 + f3^2==1$, $g0^2+g1^2==1$, $h0^2+h1^2==1$ }, {$f0$, 0.6}, {$f3$, 0.4}, {$g0$, 0.8}, {$g1$, 0.3}, {$h0$, 0.8}, {$h1$, 0.09}],</p>
---	--

<p>$f_0=0.6$; $f_3=0.4$; $g_0=0.8$; $g_1=0.3$; $h_0=0.8$; $h_1=0.09$;</p> <p>Si $3 \leq t \leq 8$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), de ⑦ se tiene que: $r_{fx} = -223.415 + 41.1384 t$ $r_{fy} = -313.76 + 71.2538 t$ $r_{fz} = -242.79 + 98.053 t - 5.70764 t^2$ $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$; $\ h\ ^2 = 1$;</p> <p>Al resolver este sistema para cada t con las mismas condiciones iniciales anteriores, se obtienen los resultados para α_1, β_1 y γ_1 respecto a la configuración no deformada.</p>	<pre> px = -223.415 + 41.1384*t; py = -313.76 + 71.2538*t; pz = -242.79 + 98.053*t - 5.70764*t^2; Sol[t]=FindRoot[{ rf[[2]]==px,rf[[3]]==py,rf[[4]]==pz, f0^2 + f3^2==1, g0^2+g1^2==1, h0^2+h1^2==1}, {f0, 0.6},{f1, 0.4},{g0, 0.8}, {g1,0.3},{h0, 0.8},{h1,0.09}}] </pre>
---	--

Cinemática Inversa para la configuración deformada. *Caso 2*

<p>Para $0 \leq t \leq 8$, con incrementos de 0.5 en t: Resolver lo siguiente: Si $0 \leq t \leq 3$ ($0 \leq t \leq t_1$), de ⑧ se tiene que: $r_{fx} = -100$; $r_{fy} = -100$; $r_{fz} = 0$; $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$; $\ h\ ^2 = 1$;</p> <p>Utilizamos el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones, con las siguientes condiciones iniciales: $f_0=0.6$; $f_3=0.4$; $g_0=0.8$; $g_1=0.3$; $h_0=0.8$; $h_1=0.09$;</p> <p>Si $3 \leq t \leq 8$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), de ⑨ se tiene que: $r_{fx} = -223.415 + 41.1384 t$ $r_{fy} = -313.76 + 71.2538 t$ $r_{fz} = -407.17 + 173.39 t - 12.5568 t^2$ $\ f\ ^2 = 1$; $\ g\ ^2 = 1$; $\ h\ ^2 = 1$;</p> <p>Al resolver este sistema para cada t con las mismas condiciones iniciales anteriores, se obtienen los resultados para α_1, β_1 y γ_1 respecto a la configuración no deformada.</p>	<pre> For[t=0 , t<=8 , t+=0.5 , If[t<=3, px = -100; py = -100; pz = 0; Sol[t]= [{ rf[[2]]==px,rf[[3]]==py,rf[[4]]==pz, f0^2 + f3^2==1, g0^2+g1^2==1, h0^2+h1^2==1}, {f0, 0.6},{f1, 0.4},{g0, 0.8}, {g1,0.3},{h0, 0.8},{h1,0.09}], px = -223.415 + 41.1384*t; py = -313.76 + 71.2538*t; pz = -407.17 + 173.39*t - 12.5568*t^2 Sol[t]=Findroot[{ rf[[2]]==px,rf[[3]]==py,rf[[4]]==pz, f0^2 + f3^2==1, g0^2+g1^2==1, h0^2+h1^2==1}, {f0, 0.6},{f1, 0.4},{g0, 0.8}, {g1,0.3},{h0, 0.8},{h1,0.09}}]] </pre>
---	--

Para terminar con este capítulo, se presentan los resultados de la Cinemática Inversa para los casos analizados:

Manipulador de 2 gdl.

CASO 1:

theta1[t] en grados:	phi1[t] en grados:
theta1[0] = 63.68218745348946	phi1[0] = -11.80512766123323
theta1[0.5] = 63.68218745348946	phi1[0.5] = -11.80512766123323
theta1[1.] = 63.68218745348946	phi1[1.] = -11.80512766123323
theta1[1.5] = 63.68218745348946	phi1[1.5] = -11.80512766123323
theta1[2.] = 63.68218745348946	phi1[2.] = -11.80512766123323
theta1[2.5] = 63.68218745348946	phi1[2.5] = -11.80512766123323
theta1[3.] = 63.68218745348946	phi1[3.] = -11.80512766123323
theta1[3.5] = 41.07011499490936	phi1[3.5] = -24.28031768277952
theta1[4.] = -38.32017072868788	phi1[4.] = -15.58360438999873
theta1[4.5] = -87.08566951972122	phi1[4.5] = -1.037837321340167
theta1[5.] = -74.57227545385094	phi1[5.] = 14.0336286618965
theta1[5.5] = -75.19511999489345	phi1[5.5] = 29.70798384867536
theta1[6.] = -72.59087105505119	phi1[6.] = 46.40777756162665
theta1[6.5] = -87.75763736508904	phi1[6.5] = 64.93215433081238
theta1[7.] = -60.45635817118264	phi1[7.] = 87.1054134260151

CASO 2:

theta1[t] en grados:	phi1[t] en grados:
theta1[0] = 63.68218745348946	phi1[0] = -11.80512766123323
theta1[0.5] = 63.68218745348946	phi1[0.5] = -11.80512766123323
theta1[1.] = 63.68218745348946	phi1[1.] = -11.80512766123323
theta1[1.5] = 63.68218745348946	phi1[1.5] = -11.80512766123323
theta1[2.] = 63.68218745348946	phi1[2.] = -11.80512766123323
theta1[2.5] = 63.68218745348946	phi1[2.5] = -11.80512766123323
theta1[3.] = 63.68218745348946	phi1[3.] = -11.80512766123323
theta1[3.5] = 19.09521225844936	phi1[3.5] = -19.88562800565204
theta1[4.] = -40.64100900519091	phi1[4.] = -9.08411713755
theta1[4.5] = -60.81650479239042	phi1[4.5] = 5.497189008370644
theta1[5.] = -67.07124135996492	phi1[5.] = 20.39274380770329
theta1[5.5] = -68.38633684430962	phi1[5.5] = 35.48516939887638
theta1[6.] = -67.35614162881352	phi1[6.] = 51.09482236686326
theta1[6.5] = -64.75384782538688	phi1[6.5] = 67.8562496463015
theta1[7.] = -60.45725569519202	phi1[7.] = 87.1044235195654

Manipulador de 3 gdl.

CASO 1:

alpha1[t] en grados:	beta1[t] en grados:	gemma1[t] en grados:
alpha1[0] = 170.	Bta1[0] = 2.987101609675267	gaMa1[0] = -42.38801546326876
alpha1[0.5] = 170.	Bta1[0.5] = 2.987101609675267	gaMa1[0.5] = -42.38801546326876
alpha1[1.] = 170.	Bta1[1.] = 2.987101609675267	gaMa1[1.] = -42.38801546326876
alpha1[1.5] = 170.	Bta1[1.5] = 2.987101609675267	gaMa1[1.5] = -42.38801546326876
alpha1[2.] = 170.	Bta1[2.] = 2.987101609675267	gaMa1[2.] = -42.38801546326876
alpha1[2.5] = 170.	Bta1[2.5] = 2.987101609675267	gaMa1[2.5] = -42.38801546326876
alpha1[3.] = 170.	Bta1[3.] = 2.987101609675267	gaMa1[3.] = -42.38801546326876
alpha1[3.5] = 164.0215586892329	Bta1[3.5] = 5.376285918286509	gaMa1[3.5] = -62.8602032348451
alpha1[4.] = 151.0281336210786	Bta1[4.] = 2.662222398348535	gaMa1[4.] = -79.38721159237775
alpha1[4.5] = 114.8114735181707	Bta1[4.5] = -3.158650356470767	gaMa1[4.5] = -91.978444440409
alpha1[5.] = 57.6335494530487	Bta1[5.] = 3.121073479909559	gaMa1[5.] = -98.7835845727899
alpha1[5.5] = 32.91465592140626	Bta1[5.5] = 23.40144968174454	gaMa1[5.5] = -97.471325063189
alpha1[6.] = 23.37001534623833	Bta1[6.] = 41.28769021281858	gaMa1[6.] = -89.1950639330871
alpha1[6.5] = 18.59452214851397	Bta1[6.5] = 50.848989969953	gaMa1[6.5] = -76.96235461495644
alpha1[7.] = 15.76609045124981	Bta1[7.] = 53.69923940514595	gaMa1[7.] = -62.33291480753993
alpha1[7.5] = 13.90400994520118	Bta1[7.5] = 51.95724791200686	gaMa1[7.5] = -45.51046940885203
alpha1[8.] = 12.58785352953788	Bta1[8.] = 46.80638517813808	gaMa1[8.] = -25.61869699406452

CASO 1:

alpha1[t] en grados:	beta1[t] en grados:	gamma1[t] en grados:
alpha1[0] = 170.	Bta1[0] = 2.987101609675267	gaMa1[0] = -42.38801546326876
alpha1[0.5] = 170.	Bta1[0.5] = 2.987101609675267	gaMa1[0.5] = -42.38801546326876
alpha1[1.] = 170.	Bta1[1.] = 2.987101609675267	gaMa1[1.] = -42.38801546326876
alpha1[1.5] = 170.	Bta1[1.5] = 2.987101609675267	gaMa1[1.5] = -42.38801546326876
alpha1[2.] = 170.	Bta1[2.] = 2.987101609675267	gaMa1[2.] = -42.38801546326876
alpha1[2.5] = 170.	Bta1[2.5] = 2.987101609675267	gaMa1[2.5] = -42.38801546326876
alpha1[3.] = 170.	Bta1[3.] = 2.987101609675267	gaMa1[3.] = -42.38801546326876
alpha1[3.5] = 164.0218056767764	Bta1[3.5] = 9.21720116383063	gaMa1[3.5] = -68.13420144125808
alpha1[4.] = 151.0284406759019	Bta1[4.] = 8.35990793928183	gaMa1[4.] = -88.727017946965
alpha1[4.5] = 114.8112390687952	Bta1[4.5] = 0.2852222611572178	gaMa1[4.5] = -105.0362414715761
alpha1[5.] = 57.63240120770715	Bta1[5.] = 7.900675409845371	gaMa1[5.] = -113.2283400031405
alpha1[5.5] = 32.91385037781083	Bta1[5.5] = 40.23905177350433	gaMa1[5.5] = -107.1052011120015
alpha1[6.] = 23.36943553733936	Bta1[6.] = 59.0124200497432	gaMa1[6.] = -94.1831190120622
alpha1[6.5] = 18.59406332950505	Bta1[6.5] = 63.97733885545596	gaMa1[6.5] = -79.4625714213989
alpha1[7.] = 15.76570395081321	Bta1[7.] = 61.93744872967567	gaMa1[7.] = -63.60482334482917
alpha1[7.5] = 13.90367089403271	Bta1[7.5] = 55.86494460583837	gaMa1[7.5] = -46.12303228696481
alpha1[8.] = 12.58754780917008	Bta1[8.] = 46.59894424954689	gaMa1[8.] = -25.6148328945435

Capítulo 7

Simulación

En este capítulo se presentan las rutinas completas, programadas en MATHEMATICA® las cuales incluyen las subrutinas que grafican las trayectorias y posiciones de los manipuladores de 2 y 3 grados de libertad. Las gráficas son presentadas al final de cada caso.

● Intersección de trayectoria con el Manipulador de 2 gdl.

■ Cinemática Directa

▲ Configuración No Deformada.

```
ClearAll[theta,phi,L1,L2,f0,f1,g0,g1,p,q,ui,vi,ri];
Mpq[x_,y_]:=({x[[1]]*y[[1]]-x[[2]]*y[[2]],x[[1]]*y[[2]]+x[[2]]*y[[1]]});
Ro[b_,x_]:=Mpq[b,x];
theta=65*Degree;
phi=-30*Degree;
p={Cos[theta],Sin[theta]};
q={Cos[phi],Sin[phi]};
a1={1,0};a2={0,1};
a11=Ro[p,a1];a21=Ro[q,a11];
L1=300;L2=250;
ui=L1*a11;vi=L2*a21;
ri=ui+vi;
```

▲ Configuración Deformada.

```
f={f0,f1};
g={g0,g1};
o11=Ro[f,a11];o21=Ro[g,Ro[f,a21]];
uf=L1*o11;vf=L2*o21;
rf=uf+vf;
```

■ Cinemática Inversa.

□ Caso 1:

```
ClearAll[t,px,py,sol,vec,theta1,phi1];
For[t=0,t<=7,t+=0.5,
If[t<=3,
px=-100;py=0;
sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px,rf[[2]]==py,f0^2+f1^2==1,g0^2+g1^2==1},
{f0,0.8},{f1,-0.1},{g0,0.1},{g1,0.8},MaxIterations->80];
```

(* Las siguientes tres líneas se incluyen para calcular los ángulos theta1 y phi1 para 't<=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
vec[t]={f0,f1,g0,g1}/.sol[t];
theta1[t]=ArcSin[vec[t][[2]]]/Degree//N;
phi1[t]=ArcSin[vec[t][[4]]]/Degree//N,
```

```
px=-471.231 + 123.744 t;
py=-317.153 + 123.744 t - 6.00863 t^2;
sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px,rf[[2]]==py,f0^2+f1^2==1,g0^2+g1^2==1},
{f0,0.9},{f1,-0.1},{g0,-0.1},{g1,0.8},MaxIterations->100];
```

(* Las siguientes tres líneas se incluyen para calcular los ángulos theta1 y phi1 para 't>=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
vec[t]={f0,f1,g0,g1}/.sol[t];
theta1[t]=ArcSin[vec[t][[2]]]/Degree//N;
phi1[t]=ArcSin[vec[t][[4]]]/Degree//N ]]
```

■ Gráficas de las Trayectorias.

```
ClearAll[t]
```

(* TRAYECTORIA ORIGINAL *)

```
A1=70.71 t-100;
A2=70.7107 t-4.905 t^2;
```

(* TRAYECTORIA SEGUIDORA. CASO 1 *)

```
B1=-471.231 + 123.744 t;
B2=-317.153 + 123.744 t - 6.00863 t^2;
```

```
R=ParametricPlot[{A1,A2},{t,0,7},PlotRange->{{-200,500},{-50,400}},
AxesLabel->{"X(t)","Y(t)"}];
```

"Trayectoria Original."

```
R1=ParametricPlot[{B1,B2},{t,3,7},PlotRange->{{-200,500},{-50,400}},
  AxesLabel->{"X(t)","Y(t)"}];
```

"Trayectoria Seguidora. Caso 1."

```
Show[R,R1]
```

"Intersección de Trayectorias. Caso 1"

Subrutina de Simulación.

Caso 1:

```
For[t=0,t<=7,t+=0.5,
f0=vec[t][[1]];f1=vec[t][[2]];
g0=vec[t][[3]];g1=vec[t][[4]];
G[t]=Graphics[{{PointSize[0.015],RGBColor[1,0,0],Point[{A1,A2}}],
{PointSize[0.02],RGBColor[0,1,0],Point[{rf[[1]],rf[[2]]}}],
{RGBColor[0,0,1],Line[{0,0},{uf[[1]],uf[[2]]},{rf[[1]],rf[[2]]}}},
{RGBColor[.9,.9,.9],Line[{0,0},{ui[[1]],ui[[2]]},{ri[[1]],ri[[2]]}}}}]]
Show[{R,R1,G[0],G[3.5],G[4.0],G[4.5],G[5.0],G[5.5],G[6.0],G[6.5],G[7.0]},
PlotRange->{{-200,400},{-200,400}},AspectRatio->1]
```

Aquí termina el programa para el caso 1 del manipulador de 2 gdl. Para el caso 2 la cinemática directa es la misma, de modo que sólo presentamos el resto del programa.

Cinemática Inversa.

Caso 2:

```
ClearAll[t,px,py,sol,vec,theta1,phi1];
```

```
For[t=0,t<=7,t+=0.5,
If[t<=3,
px=-100;py=0;
sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px,rf[[2]]==py,f0^2+f1^2==1,g0^2+g1^2==1},
{f0,0.8},{f1,-0.1},{g0,0.1},{g1,0.8},MaxIterations->80];
```

(* Las siguientes tres líneas se incluyen para calcular los ángulos theta1 y phi1 para t<=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
vec[t]={f0,f1,g0,g1}/.sol[t];
theta1[t]=ArcSin[vec[t][[2]]]/Degree//N;
```

```

phi1[t]=ArcSin[vec[t][[4]]/Degree//N,
px=-471.231 + 123.744 t;
py=-506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2;
sol[t]=FindRoot[{rf[[1]]==px,rf[[2]]==py,f0^2+f1^2==1,g0^2+g1^2==1},
                {f0,0.9},{f1,-0.1},{g0,-0.1},{g1,0.8},MaxIterations->100];

(* Las siguientes tres líneas se incluyen para calcular los ángulos
   theta1 y phi1 para 't'>=3. Estos ángulos fueron presentados en la
   sección 6.6.2 *)
vec[t]={f0,f1,g0,g1}/.sol[t];
theta1[t]=ArcSin[vec[t][[2]]/Degree//N;
phi1[t]=ArcSin[vec[t][[4]]/Degree//N ]

```

Gráficas de las Trayectorias.

```

ClearAll[t]

(* TRAYECTORIA ORIGINAL *)
A1=70.71 t-100;
A2=70.7107 t-4.905 t^2;

(* TRAYECTORIA SEGUIDORA. CASO 2 *)
D1=-471.231 + 123.744 t;
D2=-506.425 + 213.873 t - 15.0216 t^2;

R=ParametricPlot[{A1,A2},{t,0,7},PlotRange->{{-200,500},{-50,400}},
                 AxesLabel->{"X(t)","Y(t)"}];
"Trayectoria Original."

R2=ParametricPlot[{D1,D2},{t,3,7},PlotRange->{{-200,500},{-50,400}},
                 AxesLabel->{"X(t)","Y(t)"}];
"Trayectoria Seguidora. Caso 2."

Show[R,R2]
"Intersección de trayectorias . Caso 2"

```

Subrutina de Simulación:

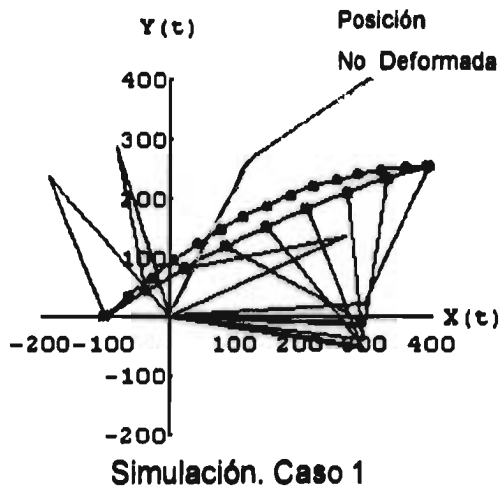
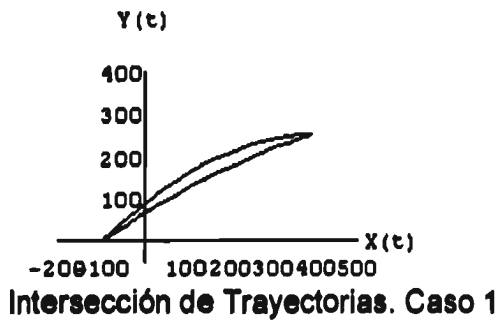
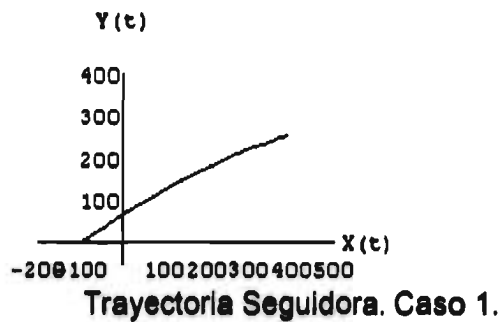
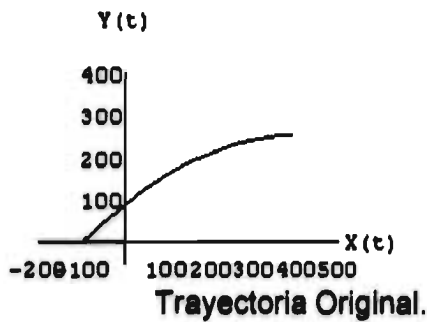
```

▣ Caso 2:
For[t=0,t<=7,t+=0.5,

```

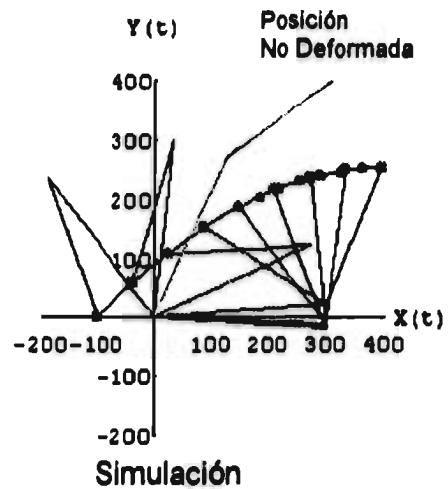
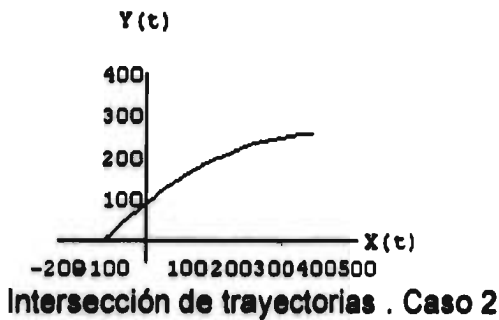
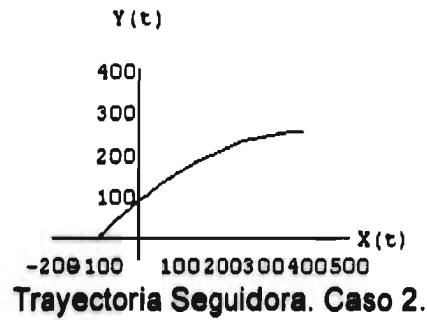
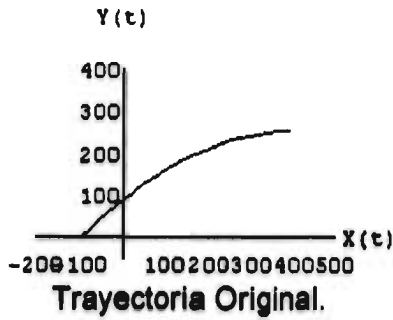
```
f0=vec[t][[1]];f1=vec[t][[2]];
g0=vec[t][[3]];g1=vec[t][[4]];
G[t]=Graphics[{{PointSize[0.015],RGBColor[1,0,0],Point[{A1,A2}}],
{PointSize[0.02],RGBColor[0,1,0],Point[{r[[1]],r[[2]]}},
{RGBColor[0,0,1],Line[{{0,0},{u[[1]],u[[2]]},{r[[1]],r[[2]]}},
{RGBColor[.9,.9,.9],Line[{{0,0},{ui[[1]],ui[[2]]},{ri[[1]],ri[[2]]}}}}]]
Show[{R,R2,G[0],G[3.5],G[4.0],G[4.5],G[5.0],G[5.5],G[6.0],G[6.5],G[7.0]},
PlotRange->{{-200,400},{-200,400}},AspectRatio->1]
```

Gráficos del manipulador de 2 gdl. caso 1



ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Gráficos del manipulador de 2 gdl. caso 2.



● Intersección de trayectoria con el Manipulador de 3 gdl.

■ Cinemática Directa:

▲ Configuración No Deformada:

ClearAll[alpha,Bta,gaMa,F,G,H,a13,a12,a22,a32,L1,L2,L3,ri,rf];

Mpq[P_,Q_]:= {P[[1]]*Q[[1]]-P[[2]]*Q[[2]]-P[[3]]*Q[[3]]-P[[4]]*Q[[4]],
 P[[1]]*Q[[2]]+P[[2]]*Q[[1]]+P[[3]]*Q[[4]]-P[[4]]*Q[[3]],
 P[[1]]*Q[[3]]-P[[2]]*Q[[4]]+P[[3]]*Q[[1]]+P[[4]]*Q[[2]],
 P[[1]]*Q[[4]]+P[[2]]*Q[[3]]-P[[3]]*Q[[2]]+P[[4]]*Q[[1]]};

```

Conj[P_]:=({P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]});
Rpq[P_,Q_]:=Mpq[P,Mpq[Q,Conj[P]]];

alpha=-35*Degree;Bta=-20*Degree;gaMa=-50*Degree;

F={Cos[alpha/2],0,0,Sin[alpha/2]};
G={Cos[Bta/2],Sin[Bta/2],0,0};
H={Cos[gaMa/2],Sin[gaMa/2],0,0};

L1=200;L2=200;L3=150;

e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};

a13=Rpq[F,e3];
a12=Rpq[F,e2];

a22=Rpq[F,Rpq[G,e2]];

a32=Rpq[F,Rpq[G,Rpq[H,e2]]];

ui=L1*a13;
vi=L2*a22;
wi=L3*a32;
r2i=ui+vi//N;
ri=ui+vi+wi//N;

```

▲ Configuración Deformada:

```

f={f0,0,0,f3};
g={g0,g1,0,0};
h={h0,h1,0,0};

K1=Mpq[f,F];K2=Mpq[g,G];K3=Mpq[h,H];
K4=Mpq[K1,K2];K5=Mpq[K4,K3];

o13=Rpq[K1,e3];
o22=Rpq[K4,e2];
o32=Rpq[K5,e2];

uf=L1*o13;
vf=L2*o22;
wf=L3*o32;

```


$r2f=uf+vf;$
 $rf=uf+vf+wf;$

■ Cinemática Inversa:

□ Caso 1:

```
ClearAll[t,px,py,pz,Sol,Vec,alpha1,Bta1,gaMa1];
For[t=0,t<=8,t+=0.5,
If[t<=3,
px=-100;
py=-100;
pz=0;
Sol[t]=FindRoot[{r[[2]]==px,r[[3]]==py,r[[4]]==pz,
f0^2+f3^2==1,g0^2+g1^2==1,h0^2+h1^2==1},
{f0,0.6},{g0,0.9},{h0,0.8},{f3,0.7},{g1,0.1},{h1,0.3},
MaxIterations->50];
```

(* Las siguientes cuatro líneas se incluyen para calcular los ángulos alpha1, beta1 y gamma1 para 't<=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.5.2 *)

```
Vec[t]={f0,g0,h0,f3,g1,h1}/.Sol[t];
alpha1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[4]])/Degree//N;
Bta1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[5]])/Degree//N;
gaMa1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[6]])/Degree//N,
```

```
px=-223.415+41.1382*t;
py=-313.76+71.2538*t;
pz=-242.79+98.053*t-5.7076*t^2;
Sol[t]=FindRoot[{r[[2]]==px,r[[3]]==py,r[[4]]==pz,
f0^2+f3^2==1,g0^2+g1^2==1,h0^2+h1^2==1},
{f0,0.6},{g0,0.8},{h0,0.8},{f3,0.4},{g1,0.3},{h1,0.09},
MaxIterations->100];
```

(* Las siguientes cuatro líneas se incluyen para calcular los ángulos alpha1, beta1 y gamma1 para 't>=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
Vec[t]={f0,g0,h0,f3,g1,h1}/.Sol[t];
alpha1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[4]])/Degree//N;
Bta1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[5]])/Degree//N;
gaMa1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[6]])/Degree//N]
```

Gráficas de las Trayectorias:

ClearAll[t,R,R1,A1,A2,A3,B1,B2,B3];

(* TRAYECTORIA ORIGINAL *)

A1=25.7115*t-100;
A2=44.553*t-100;
A3=-4.905*t^2+61.28*t;

(* TRAYECTORIA SEGUIDORA. CASO 1 *)

B1=-223.415+41.1382*t;
B2=-313.76+71.2538*t;
B3=-242.79+98.053*t-5.7076*t^2;

R=ParametricPlot3D[{A1,A2,A3},{t,0,8},PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},

AxesLabel->{"X(t)","Y(t)","Z(t)"}];

"Trayectoria Original."

R1=ParametricPlot3D[{B1,B2,B3},{t,3,8},PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},

AxesLabel->{"X(t)","Y(t)","Z(t)"}];

"Trayectoria Seguidora. Caso 1."

Show[R,R1]

"Intersección de Trayectorias. Caso 1"

Subrutina de Simulación:

Caso 1:

```
For[t=0,t<=8,t+=2.0,
f0=Vec[t][[1]];f3=Vec[t][[4]];
g0=Vec[t][[2]];g1=Vec[t][[5]];
h0=Vec[t][[3]];h1=Vec[t][[6]];
Show[{R,R1,Graphics3D[
{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,0],Point[{A1,A2,A3}]},
{PointSize[0.01],RGBColor[0,0,0],Point[{0,0,0}]},
{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,1],Point[{rf[[2]],rf[[3]],rf[[4]]}]},

{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{u[[2]],u[[3]],u[[4]]}}]}],
```

```
{RGBColor[0.9,0.9,0.9],Line[{{ui[[2]],ui[[3]],ui[[4]]},{r2i[[2]],r2i[[3]],r2i[[4]]}}},
{RGBColor[0.9,0.9,0.9],Line[{{r2i[[2]],r2i[[3]],r2i[[4]]},{ri[[2]],ri[[3]],ri[[4]]}}},

{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{uf[[2]],uf[[3]],uf[[4]]}}},
{RGBColor[0,1,0],Line[{{uf[[2]],uf[[3]],uf[[4]]},{r2f[[2]],r2f[[3]],r2f[[4]]}}},
{RGBColor[0,0,1],Line[{{r2f[[2]],r2f[[3]],r2f[[4]]},{rf[[2]],rf[[3]],rf[[4]]}}}}},
Axes->True,PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},
ViewPoint->{1.300,2.400,2.000}]}
```

También aquí, el planteamiento de la cinemática directa es la misma para los casos 1 y 2. Por lo tanto se presenta el resto del programa para el caso 2.

Cinemática Inversa:

Caso 2:

```
ClearAll[t,px,py,pz,Sol,Vec,alpha1,beta1,gamma1];
For[t=0,t<=8,t+=0.5,
If[t<=3,
px=-100;
py=-100;
pz=0;
Sol[t]=FindRoot[{rf[[2]]==px,rf[[3]]==py,rf[[4]]==pz,
f0^2+f3^2==1,g0^2+g1^2==1,h0^2+h1^2==1},
{f0,0.6},{g0,0.9},{h0,0.8},{f3,0.7},{g1,0.1},{h1,0.3},
MaxIterations->50];
```

(* Las siguientes cuatro líneas se incluyen para calcular los ángulos alpha1, beta1 y gamma1 para 't'<=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
Vec[t]={f0,g0,h0,f3,g1,h1}/.Sol[t];
alpha1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[4]])/Degree//N;
Bta1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[5]])/Degree//N;
gaMa1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[6]])/Degree//N,

px=-223.415+41.1384*t;
py=-313.76+71.2538*t;
pz=-407.17+173.39*t-12.5568*t^2;
Sol[t]=FindRoot[{rf[[2]]==px,rf[[3]]==py,rf[[4]]==pz,
f0^2+f3^2==1,g0^2+g1^2==1,h0^2+h1^2==1},
{f0,0.6},{g0,0.8},{h0,0.8},{f3,0.4},{g1,0.3},{h1,0.09},
```

MaxIterations->100];

(* Las siguientes cuatro líneas se incluyen para calcular los ángulos alpha1, beta1 y gamma1 para t>=3. Estos ángulos fueron presentados en la sección 6.6.2 *)

```
Vec[t]={f0,g0,h0,f3,g1,h1}/.Sol[t];
alpha1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[4]])/Degree//N;
Bta1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[5]])/Degree//N;
gaMa1[t]=2*(ArcSin[Vec[t][[6]])/Degree//N]
```

■ Gráficas de las Trayectorias:

ClearAll[t]

(* TRAYECTORIA ORIGINAL *)

```
A1=25.7115*t-100;
A2=44.553*t-100;
A3=-4.905*t^2+61.28*t;
```

(* TRAYECTORIA SEGUIDORA. CASO 1 *)

```
D1=-223.415+41.1384*t;
D2=-313.76+71.2538*t;
D3=-407.17+173.39*t-12.5568*t^2;
```

```
R=ParametricPlot3D[{A1,A2,A3},{t,0,8},PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},
```

```
AxisLabel->{"X(t)","Y(t)","Z(t)"}];
```

"Trayectoria Original."

```
R2=ParametricPlot3D[{D1,D2,D3},{t,3,8},PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},
```

```
AxisLabel->{"X(t)","Y(t)","Z(t)"}];
```

"Trayectoria Seguidora. Caso 1."

Show[R,R2]

"Intersección de Trayectorias. Caso 2"

■ Subrutina de Simulación:

□ Caso 2:

```

For[t=0,t<=8,t+=2.0,

f0=Vec[t][[1]];f3=Vec[t][[4]];
g0=Vec[t][[2]];g1=Vec[t][[5]];
h0=Vec[t][[3]];h1=Vec[t][[6]];

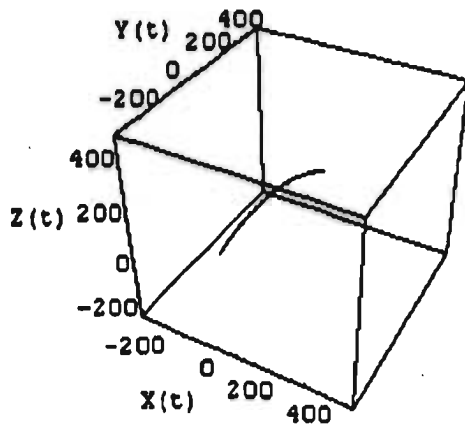
Show[{R,R2,Graphics3D[{
{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,0],Point[{A1,A2,A3}]},
{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,1],Point[{rf[[2]],rf[[3]],rf[[4]]}]},

{RGBColor[1,0,0],Line[{{(0,0,0},{uf[[2]],uf[[3]],uf[[4]]})}],
{RGBColor[0,1,0],Line[{{ui[[2]],ui[[3]],ui[[4]]},{r2i[[2]],r2i[[3]],r2i[[4]]})}],
{RGBColor[0,1,0],Line[{{r2i[[2]],r2i[[3]],r2i[[4]]},{ri[[2]],ri[[3]],ri[[4]]})}],

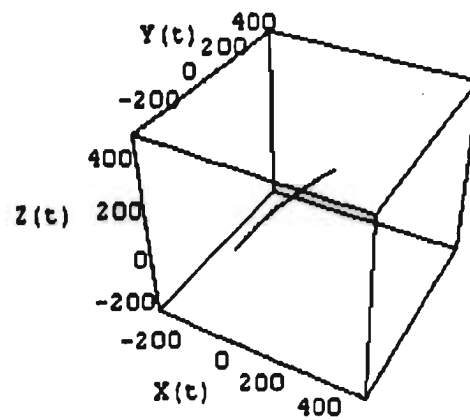
{RGBColor[1,0,0],Line[{{(0,0,0},{uf[[2]],uf[[3]],uf[[4]]})}],
{RGBColor[0,1,0],Line[{{uf[[2]],uf[[3]],uf[[4]]},{r2f[[2]],r2f[[3]],r2f[[4]]})}],
{RGBColor[0,0,1],Line[{{r2f[[2]],r2f[[3]],r2f[[4]]},{rf[[2]],rf[[3]],rf[[4]]})}]}],
Axes->True,PlotRange->{{-300,500},{-300,500},{-200,500}},
ViewPoint->{1.300,-2.400,2.000}]

```

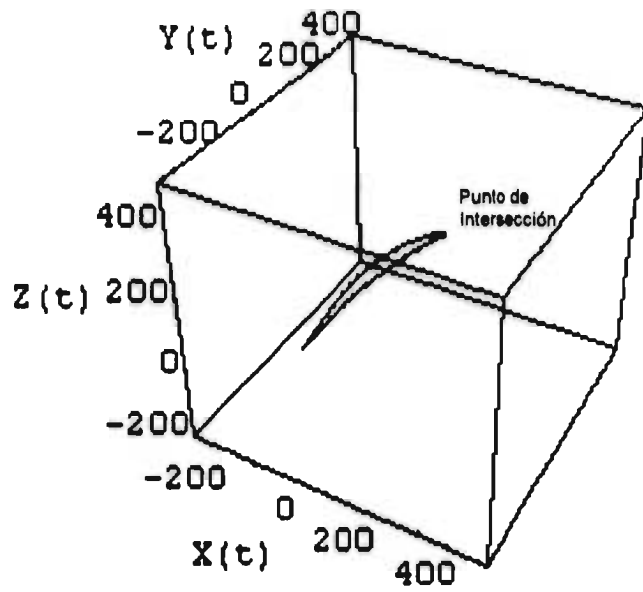
Gráficos del manipulador de 3 gdl. Caso 1.



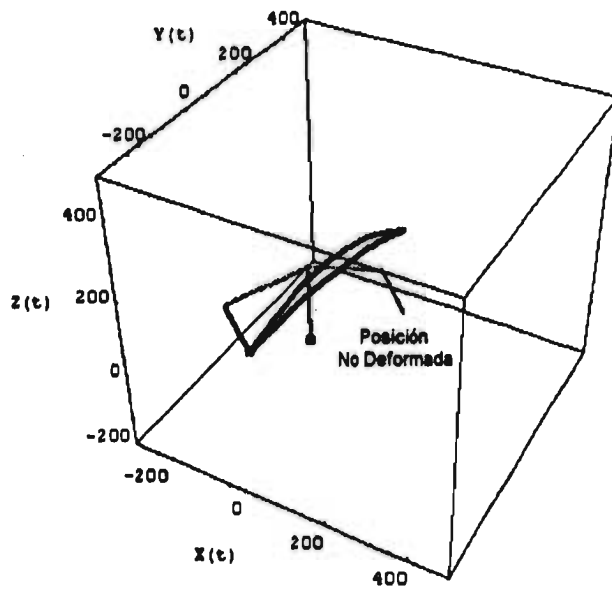
Trayectoria Original.



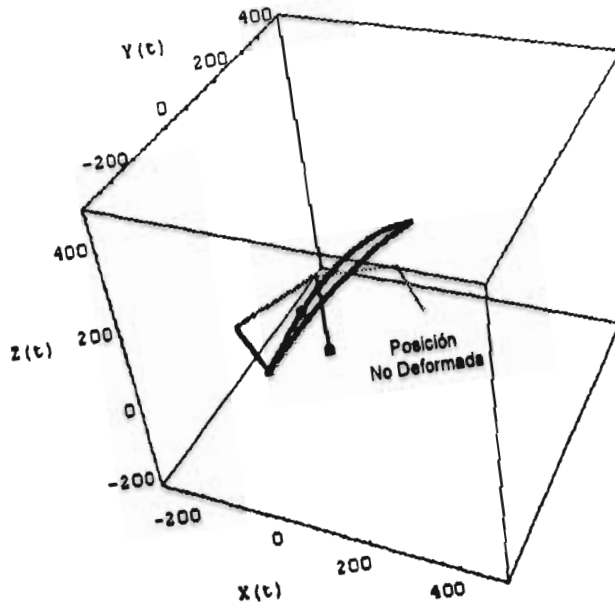
Trayectoria Seguidora. Caso 1.



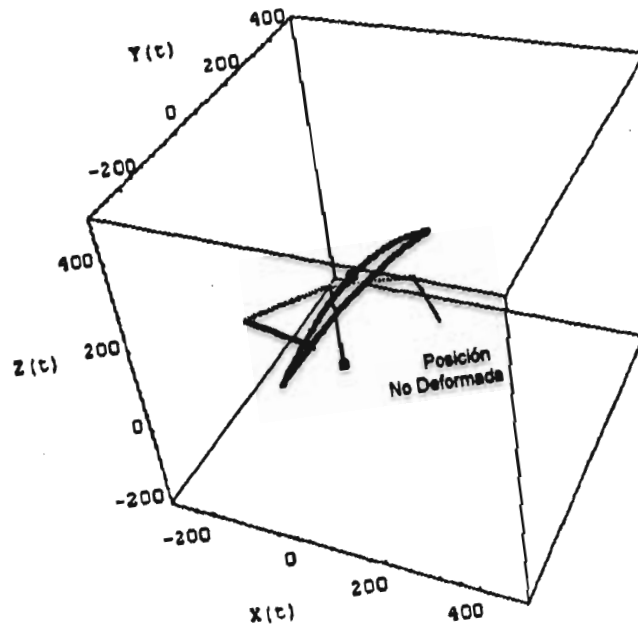
Intersección de Trayectorias. Caso 1.



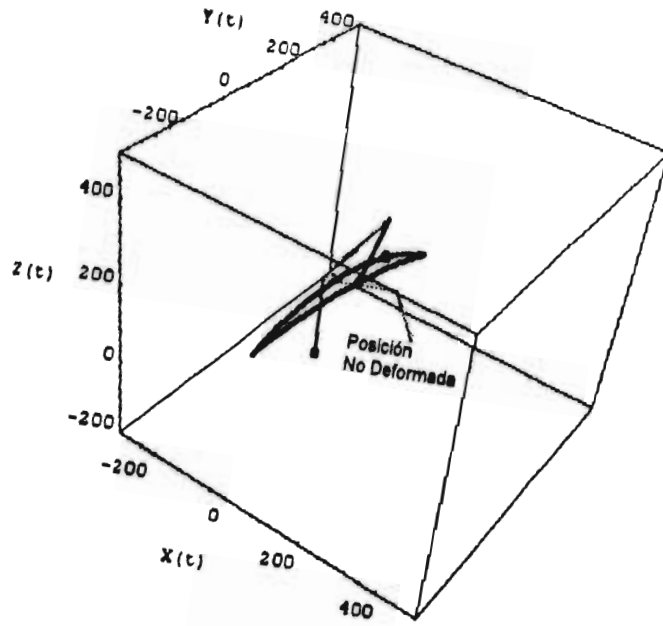
Simulación (0 seg.)



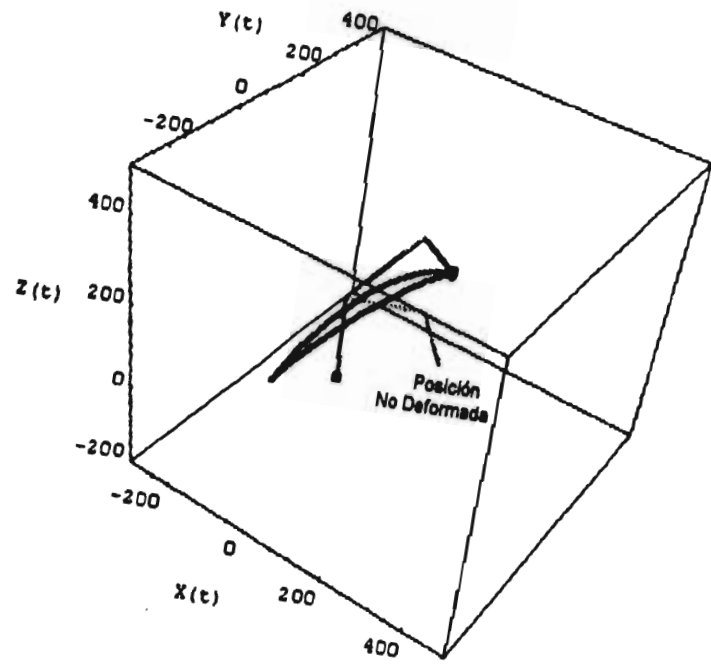
Simulación (2 seg.)



Simulación (4 seg.)

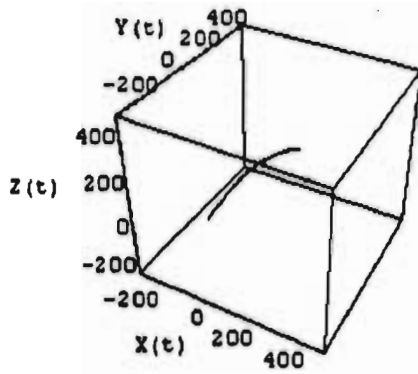


Simulación (6 seg.)

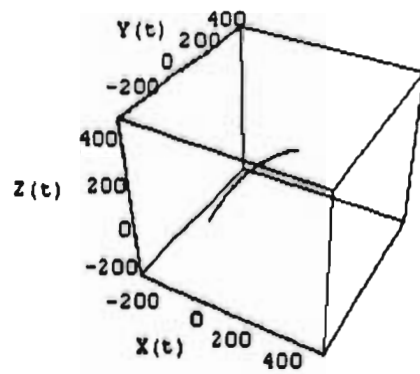


Simulación (8 seg.)

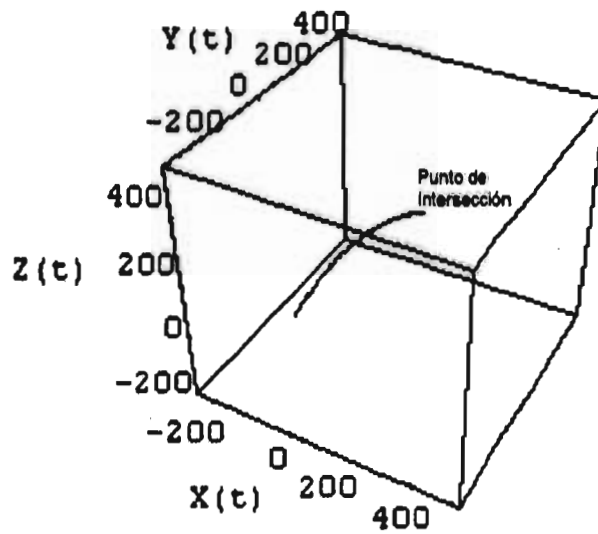
Gráficos del manipulador de 3 gdl. Caso 2.



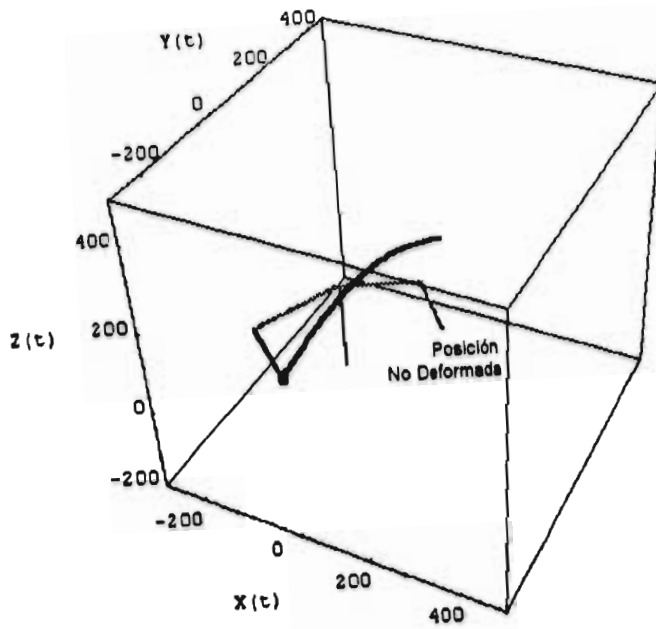
Trayectoria Original.



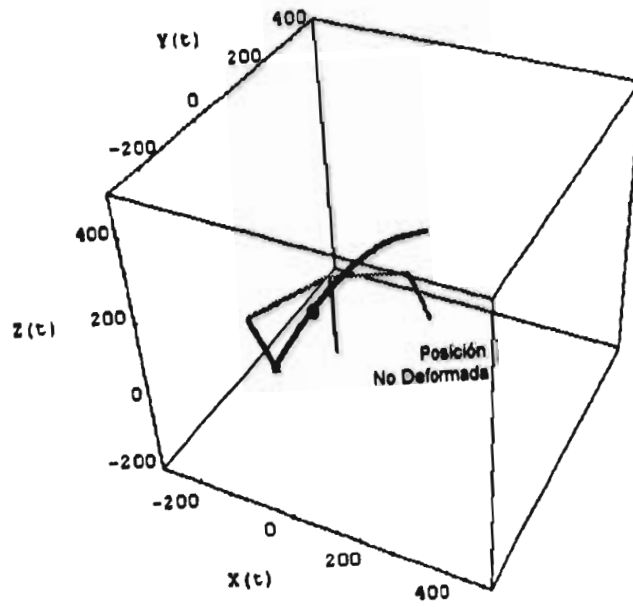
Trayectoria Seguidora. Caso 2.



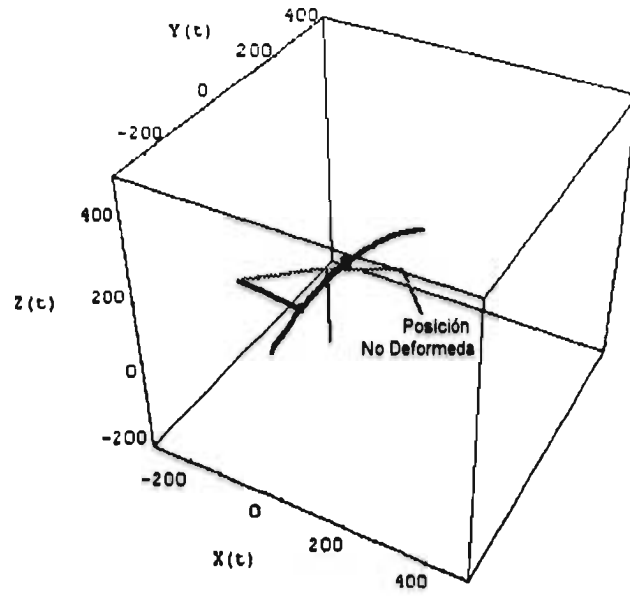
Intersección de Trayectorias. Caso 2



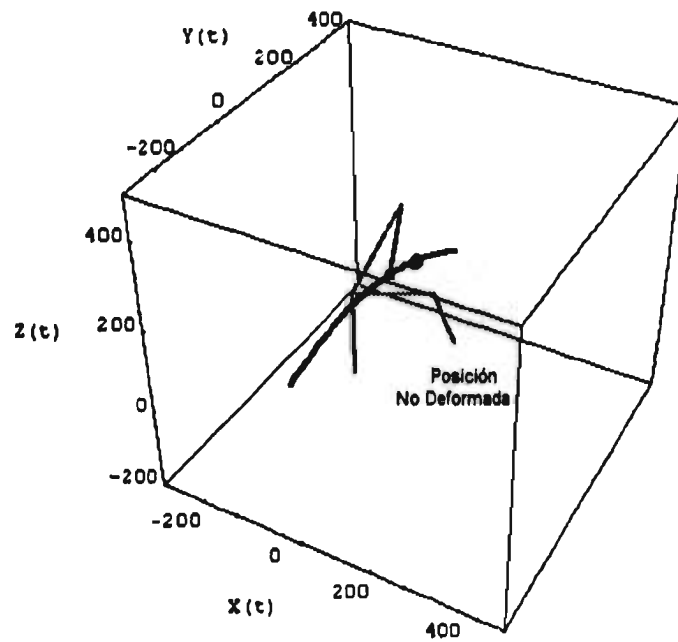
Simulación (0 seg.)



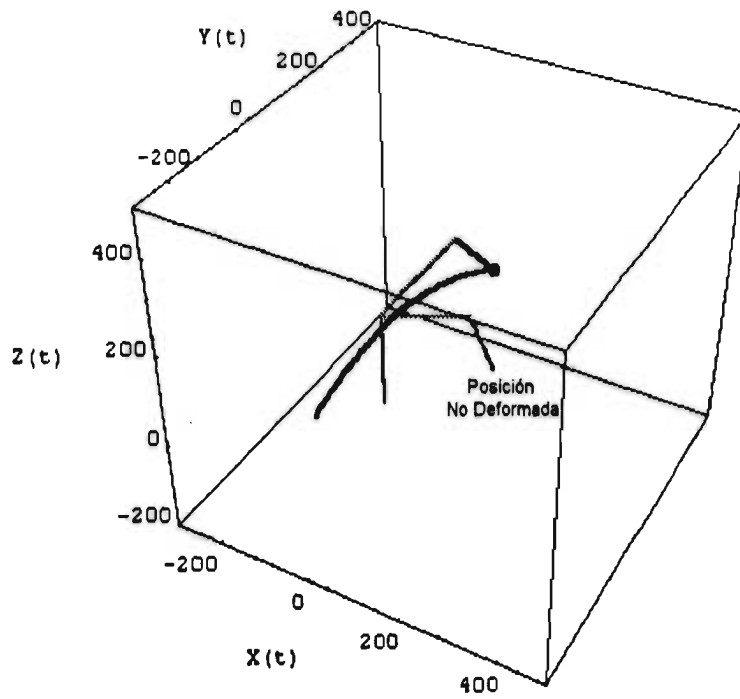
Simulación (2 seg.)



Simulación (4 seg.)



Simulación (6 seg.)



Simulación (8 seg.)

Conclusiones

En la industria, en especial la de tipo manufacturera, hoy en día existen sistemas de producción que emplean manipuladores para realizar algunas tareas. Cuando se tiene una línea de ensamble en donde las tareas se realizan con manipuladores, generalmente el flujo de la línea es discreto. Esto es, cuando el manipulador debe realizar su tarea, la línea tiene que detenerse un momento, esto desde el punto de vista productivo genera entre otras cosas, costos que incrementan el precio del artículo en el mercado y por lo tanto un decremento en la competitividad de la empresa. Aunque desde el punto de vista de la calidad del producto, esto es en el presente, lo mejor para controlar las operaciones. Aunque sería óptimo que la línea de producción fuera en realidad continua y así evitar los costos de parar el flujo. Es decir, el control ^{de} la calidad de un producto que implica operaciones realizadas con manipuladores, es más fácil si el producto se encuentra estático que si se encuentra en movimiento, ya que es más difícil controlar un manipulador que deberá realizar operaciones en un objeto que se encuentra moviéndose. Entonces si se puede aplicar un control lo suficientemente eficiente como para determinar los movimientos del producto y el manipulador, y además coordinarlos para que se efectúe la tarea, se estará dando un gran paso para conseguir sistemas verdaderamente continuos lo cual implicaría un incremento en el nivel de producción importante. Por lo tanto este trabajo puede representar en su justa dimensión, un primer paso hacia ese tipo de sistemas. Por último es necesario mencionar que el estudio del movimiento de manipuladores para la intersección de trayectorias no termina aquí ya que aún falta por determinar características de velocidad y aceleración. Por lo tanto queda abierto el tema para futuras propuestas que sean paralelas o complementarias y que enriquezcan el presente trabajo para lograr el objetivo antes mencionado que se relaciona con los sistemas de producción continua.

Bibliografía.

- [1] Reyes Ávila Luis, 1990: *Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies. Partie 1: Le Cadre Theorique.*
Rapport de Recherche IRIA No. 1303 - Rocquencourt, Francia.
- [2] Cuenca Jiménez Francisco, 1996: *Modelado del análisis cinemático de una plataforma paralela plana: Una aplicación del Álgebra de Cuaterniones.*
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería . DEPFI - UNAM.
- [3] Wolfram Stephen, 1992: *Mathematica: A system for doing Mathematics by computer.*
Adison - Wesley.
- [4] Gurtin M.E., 1981: *An intrduction to continuum mechanics.*
Academic Press - New York.
- [5] L.I. Golovina, 1974: *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones.*
Editorial MIR.
- [6] Peter V. O'neil, 1979: *Introduction to linear algebra. Theory and applications.*
Wadsworth Publishing Company, Inc.
- [7] Márquez Miranda Mario, 1995: *Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena abierta.*
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería. DEPFI - UNAM.
- [8] Méndez Canseco Mauricio Cirilo, 1995: *Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena cerrada.*
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería. DEPFI - UNAM.