

80  
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
CAMPUS ARAGON**

**ILUSTRACION DE CONCEPTOS BASICOS DE CONTROL  
MODERNO POR MEDIO DE LA REGULACION DE  
POSICION DE UN PENDULO INVERTIDO**

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**

P r e s e n t a:

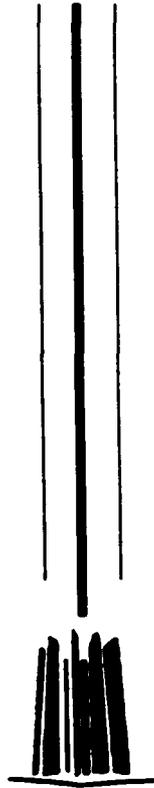
**JAIME / PACHECO MARTINEZ**

Asesores: Ing. Benito Zuñiga Villegas (interno)

Dr. Juan Carlos Martínez García (Externo)

San Juan de Aragón Edo. de México, 1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
ARAGÓN DE  
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGÓN  
DIRECCION

JAIME PACHECO MARTINEZ  
PRESENTE.

En contestación a su solicitud de fecha 26 de enero del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. BENITO ZUÑIGA VILLEGAS pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "ILUSTRACION DE CONCEPTOS BASICOS DE CONTROL MODERNO POR MEDIO DE LA REGULACION DE POSICION DE UN PENDULO INVERTIDO", con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
San Juan de Aragón, México., 29 de enero de 1996.  
EL DIRECTOR

México, CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

c c p Jefe de la Unidad Académica.  
c c p Jefatura de Carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica.  
c c p Asesor de Tesis.

CCMC/AIR/vr



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
CAMPUS ARAGÓN

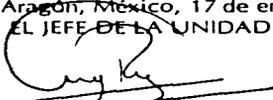
UNIDAD ACADÉMICA

Ing. RAÚL BARRÓN VERA  
Jefe de la Carrera de Ingeniería  
Mecánica Eléctrica,  
Presente .

En atención a la solicitud de fecha 16 de enero del año en curso, por la que se comunica que el alumno JAIME PACHECO MARTÍNEZ, de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista, ha concluido su trabajo de investigación intitulado "ILUSTRACIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTROL MODERNO POR MEDIO DE LA REGULACIÓN DE POSICIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO", y como el mismo ha sido revisado y aprobado por usted, se autoriza su impresión; así como la iniciación de los trámites correspondientes para la celebración del examen profesional.

Sin otro particular, le reitero las seguridades de mi atenta consideración.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"  
San Juan de Aragón, México, 17 de enero de 1997  
EL JEFE DE LA UNIDAD

  
~~LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS~~

c c p Asesor de Tesis.  
c c p Interesado.  
AIR'lla.





UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO CAMPUS "ARAGON"

JEFATURA DE CARRERA DE INGENIERIA MECANICA ELECTRICA

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

OF. No. JCIME/15/96.

LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS  
JEFE DE LA UNIDAD ACADÉMICA  
PRESENTE

Por este medio me permito relacionar los nombres de los Profesores que sugiero integren el Síncodo del Examen Profesional del alumno (a): **JAIMÉ PACHECO MARTÍNEZ**, con el tema de tesis : **"ILUSTRACION DE CONCEPTOS BASICOS DE CONTROL MODERNO POR MEDIO DE LA REGULACION DE POSICION DE UN PENDULO INVERTIDO"**.

<b>PRESIDENTE:</b>	<b>ING. BENITO ZUÑIGA VILLEGAS</b>	<b>OCTUBRE, 81</b>
<b>VOCAL:</b>	<b>ING. OSCAR E. ALVAREZ MELENDEZ</b>	<b>ABRIL, 82</b>
<b>SECRETARIO:</b>	<b>ING. FORTUNATO CERECEDO HERNANDEZ</b>	<b>JUNIO, 85</b>
<b>SUPLENTE:</b>	<b>ING. SANDRA TERESA ROMERO AVILA</b>	<b>MARZO, 89</b>
<b>SUPLENTE:</b>	<b>ING. ANGEL MAZZA ARIAS</b>	<b>ABRIL, 92</b>

Quiero subrayar que el Director de la Tesis es el **ING. BENITO ZUÑIGA VILLEGAS**, el cual es incluido en base a lo que reza el Reglamento de Exámenes Profesionales de esta Escuela.

**A T E N T A M E N T E**  
**"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"**  
San Juan de Aragón, Edo. de México, Enero 23 de 1997

**EL JEFE DE LA CARRERA**

**ING. RAUL BARRÓN VERA**



c.c.p. Ing. Manuel Martínez Ortiz.- Jefe del Depto. de Servicios Escolares  
Ing. Miguel Ángel Maldonado Muñoz.- Secretario Técnico de IME  
**ING. BENITO ZUÑIGA VILLEGAS.- Asesor de Tesis**  
ALUMNO

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis **PADRES** por el esfuerzo que hicieron para darme la oportunidad de adquirir una herramienta que me permitiera enfrentar el futuro con mayor preparación: la educación.

A mis **HERMANOS** por confiar plenamente en mí. A mis **CUÑADOS** por los consejos que me brindaron. A mis **SOBRINOS** por todo el cariño que de ellos he recibido.

A la Escuela Primaria Gregorio Torres Quintero. A la Secundaria Técnica No.26. A la Universidad Nacional Autónoma de México (**UNAM**) por darme la oportunidad de prepararme en sus instalaciones a través del C.C.H. Azcapotzalco y de la E.N.E.P. Aragón.

A mis **ASESORES**: el ingeniero Benito Zuñiga Villegas y el Dr. Juan Carlos Martínez García (egresado de la E.N.E.P. Aragón, graduado como Maestro en Ciencias en la Sección de Control Automático del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del I.P.N. y Doctorado en la Escuela Central de NANTES, Francia) por todo el apoyo, comentarios y sugerencias.

## **DEDICATORIAS**

Este trabajo está dedicado a mis PADRES y a toda mi familia en general. A mis compañeros y amigos que estuvieron conmigo durante mi trayectoria académica.

*Ilustración de Conceptos Básicos de Control Moderno  
por Medio de la Regulación de Posición de un  
Péndulo Invertido*

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1 EL CONTROL MODERNO</b>	<b>11</b>
1.1 Introducción	11
1.2 Breve Historia del Control	11
1.3 Clasificación de Sistemas	13
1.4 Terminología Básica	14
1.5 Modelos Matemáticos de los Elementos Electromecánicos Básicos	15
1.6 Ecuaciones de Equilibrio	15
1.6.1 Sistemas Mecánicos	16
1.6.2 Motor de Corriente Directa (CD)	16
<b>2 MODELADO DEL PÉNDULO INVERTIDO</b>	<b>19</b>
2.1 Introducción	19
2.2 Modelo en Ecuaciones Diferenciales	20
2.2.1 Modelo No Lineal	20
2.2.2 Linealización	24
2.3 Modelo en Espacio de Estados	26
2.3.1 Definiciones	26
2.3.2 Análisis	27
<b>3 PROPIEDADES ESTRUCTURALES</b>	<b>29</b>
3.1 Introducción	29
3.2 Estabilidad	30
3.2.1 Introducción	30
3.2.2 Análisis en el Plano Complejo $S$	30
3.2.3 Análisis del Péndulo Invertido	31
3.3 Controlabilidad	32
3.3.1 Introducción	32
3.3.2 Análisis del Péndulo Invertido	33
3.4 Observabilidad	34
3.4.1 Introducción	34
3.4.2 Análisis del Péndulo Invertido	34

<b>4</b>	<b>DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL</b>	<b>37</b>
4.1	Introducción . . . . .	37
4.2	Diseño mediante Ubicación de Polos . . . . .	37
4.3	Síntesis del Controlador . . . . .	38
4.3.1	Método Analítico . . . . .	38
<b>5</b>	<b>DISEÑO DE UN OBSERVADOR</b>	<b>45</b>
5.1	Introducción . . . . .	45
5.2	Observador de Estado . . . . .	46
5.3	Observador Completo . . . . .	46
5.4	Síntesis del Observador . . . . .	47
5.4.1	Método Analítico . . . . .	49
<b>6</b>	<b>SIMULACIÓN DEL ESQUEMA DE CONTROL</b>	<b>55</b>
6.1	Introducción . . . . .	55
6.2	Diagrama de Bloques . . . . .	56
6.2.1	Sistema Lineal con Controlador . . . . .	58
6.2.2	Sistema Lineal con Controlador y Observador . . . . .	59
6.2.3	Sistema No Lineal con Controlador . . . . .	60
6.2.4	Sistema No Lineal con Controlador y Observador . . . . .	61
6.3	Simulación . . . . .	61
6.3.1	Sistema Lineal con Controlador . . . . .	62
6.3.2	Sistema Lineal con Controlador y Observador . . . . .	63
6.3.3	Sistema No Lineal con Controlador . . . . .	64
6.3.4	Sistema No Lineal con Controlador y Observador . . . . .	64
	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>PARÁMETROS</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>MATLAB</b>	<b>75</b>
B.1	Introducción . . . . .	75
B.2	Sistema Requerido . . . . .	76
B.3	Instalación . . . . .	76
B.4	Consideraciones . . . . .	77
B.5	Aplicaciones . . . . .	77
<b>C</b>	<b>Simulink</b>	<b>81</b>
<b>D</b>	<b>RUTINAS DE CÓMPUTO</b>	<b>85</b>
D.1	Programa <i>param</i> . . . . .	85
D.2	Programa <i>sistema</i> . . . . .	86
D.3	Programa <i>control</i> . . . . .	86
D.4	Programa <i>observa</i> . . . . .	86

ÍNDICE GENERAL

5

D.5 Programa *busca* . . . . . 87

# Introducción

El ingeniero de Sistemas de Control está interesado en el conocimiento y control de una parte de su medio ambiente, frecuentemente conocido como sistema, a fin de proporcionar un producto económico y útil para la sociedad. Quizás la cualidad más característica de la ingeniería de control es la oportunidad de controlar máquinas y procesos industriales económicos para beneficio de la sociedad.

La ingeniería de control no está limitada a ninguna disciplina de la ingeniería, sino que es igualmente aplicable a la aeronáutica, química, mecánica, medio ambiente, civil, eléctrica y otras. Además al aumentar el conocimiento de la dinámica de los sistemas comerciales, sociales y políticos, también se incrementará la habilidad para controlarlos.

En años recientes, las computadoras digitales han sido de gran importancia en el análisis, diseño y operación de sistemas de control. La computadora puede utilizarse para efectuar los cálculos, para simular los componentes de un sistema o una planta, o para controlar al sistema.

Dada una planta industrial (en la mayoría de los casos sus dinámicas son inalterables), primeramente se deben elegir sensores y actuadores apropiados. Luego hay que construir modelos matemáticos adecuados. Después, utilizando los modelos matemáticos, se diseña un controlador de tal modo que el sistema de lazo cerrado satisfaga las especificaciones dadas. El controlador diseñado es la solución a la versión matemática del problema de diseño.

Después de terminar el modelo matemático, el ingeniero de control debe simularlo en una computadora para verificar el comportamiento del sistema resultante bajo diversas condiciones. Generalmente la configuración del sistema inicial no resulta satisfactoria, por lo tanto se debe rediseñar y completar el análisis correspondiente. Este proceso de diseño y análisis se repite hasta obtener un sistema satisfactorio.

Tanto el Control Clásico como el Control Moderno tienen sus herramientas específicas de análisis, pero en ambos, es indispensable obtener primero el modelo matemático del sistema.

*El presente trabajo pretende ilustrar cómo se aplican las herramientas de **Control Moderno** en el análisis y solución de un problema de control (Péndulo Invertido). De igual manera se busca ilustrar el manejo de técnicas computacionales actuales para el diseño y la simulación de un esquema de control.*

La Figura (0.1) muestra un *PÉNDULO INVERTIDO* montado sobre un carro impulsado por un motor de corriente directa. Lo que se pretende es mantener el péndulo en posición vertical. El sistema es inestable ya que el péndulo puede caer en cualquier momento y en cualquier dirección si no se le aplica una fuerza de control  $u$  adecuada al carro.

Generalmente en los problemas de control, el sistema no se puede modificar, por lo tanto su solución consiste en *diseñar el controlador* que cumpla con las condiciones y requisitos establecidos.

Para nuestro sistema las condiciones son que el péndulo se mantenga en posición vertical

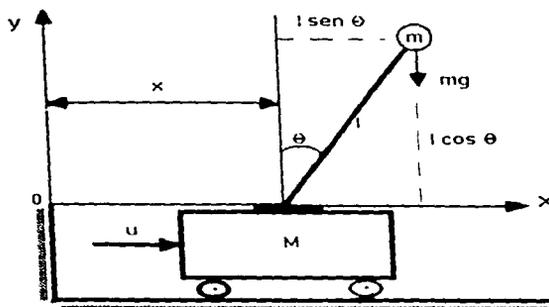


Figura 0.1: Péndulo Invertido

( $\theta(t) = 0$ ) y que el carro regrese a su posición original ( $x(t) = 0$ ).

Para simplificar los cálculos se supone que la masa  $m$  del péndulo está concentrada en el extremo de la varilla. El valor físico de todos los parámetros que intervienen en el sistema se encuentran en el APÉNDICE.

En general, lo que se pretende es obtener un sistema de control como el que se presenta en el diagrama a bloques de la Figura (0.2).

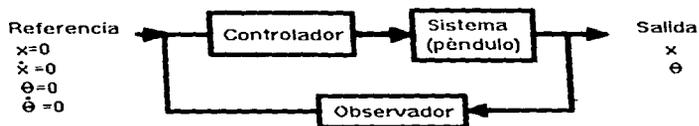


Figura 0.2: Diagrama a Bloques del Péndulo Invertido

Debido a que la fuerza  $u$  aplicada al carro está directamente relacionada con el voltaje  $v$  aplicado al motor, entonces nuestra finalidad es conocer este último en base a la información enviada por los sensores.

Los sensores son potenciómetros que miden la posición angular y lineal del péndulo y del carro respectivamente.

El *Observador* toma la señal de la salida a partir de los sensores y estima las restantes.

Después esta información es enviada al controlador el cual genera el voltaje que deberá aplicarse al motor.

En resumen, el presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

**CAPITULO 1:** Aquí se menciona como ha evolucionado el *Control* y se dan los conceptos fundamentales de control moderno, para analizar el sistema considerado.

**CAPITULO 2:** Este es uno de los capítulos más importantes debido a que los restantes se desarrollan en base a este. Se aplican las Leyes de la Mecánica Clásica como las Leyes de Newton y el Principio de Alembert. También son aplicables los conceptos eléctricos para obtener el modelo del motor. Primero se obtendrá el Modelo en Ecuaciones Diferenciales empleado en Control Clásico, pero para nuestro caso (Control Moderno) es necesario expresarlo en el Espacio de Estados.

**CAPITULO 3:** Aquí se presentan las *características* del sistema como Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad. Se demuestra a través de un proceso matemático que el sistema efectivamente es inestable. También se analiza si el sistema es controlable y observable. Estos conceptos son fundamentales en el diseño del controlador y el observador respectivamente.

**CAPITULO 4:** El *Controlador* es el dispositivo que permite estabilizar el sistema. Si el sistema es controlable entonces se puede aplicar una técnica matemática sistemática para obtener la matriz de ganancia del controlador. En nuestro caso se utiliza el controlador por retroalimentación estática de estados, por el método de Ubicación de Polos.

**CAPITULO 5:** El *Observador* estima las señales que no se pueden medir directamente y que son indispensables para el controlador. Si el sistema cumple con la condición de observabilidad establecida en el Capítulo 3, entonces es posible el diseño del observador. Las técnicas de análisis y de síntesis son similares a las consideradas para la obtención del controlador.

**CAPITULO 6:** La *Simulación* se realiza con software comercial sofisticado (SIMULINK) en una computadora digital utilizando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Es importante mencionar el uso de software (MATLAB para SIMULINK) en el análisis y síntesis del esquema de control. Las referencias bibliográficas utilizadas se mencionan al final de este trabajo.

Cabe mencionar que en los Apéndices de esta tesis se incluyen el material correspondiente a los parámetros físicos del sistema bajo estudio, las características principales del software utilizado, así como algunas rutinas de cómputo empleadas en algunos de los capítulos arriba mencionados.

Se espera que este trabajo facilite al lector interesado el conocimiento de los conceptos básicos de control moderno y de la manera como estos intervienen en un proceso de síntesis de controladores.

# Capítulo 1

## EL CONTROL MODERNO

### 1.1 Introducción

El control automático ha jugado un papel vital en el desarrollo de la alta tecnología actual. Además de su extrema importancia en vehículos espaciales, sistemas de guía de proyectiles, sistema de pilotaje automático de aeronaves, sistemas robóticos y otros, el control automático se ha vuelto parte integral e importante de los procesos industriales y de manufactura modernos. Resulta esencial en operaciones como el control de presión, de temperatura, de humedad, de viscosidad, y de flujo en las industrias de transformación.

El presente capítulo tiene como finalidad mostrar el marco teórico indispensable para realizar el análisis del Péndulo Invertido. Primero se presenta una breve *Historia del Control* desde sus inicios hasta nuestros días. Después aparece la *Clasificación de Sistemas*, donde observaremos a cual pertenece el Péndulo Invertido y el tipo de ecuaciones matemáticas que lo modelan. En la sección *Terminología Básica* se incluyen los conceptos y definiciones más importantes para los Sistemas de Control. La sección *Modelos Matemáticos de los Elementos Electromecánicos Básicos* incluye las primeras ecuaciones (modelos) que definen el comportamiento físico de la MASA y la INERCIA. La última sección titulada *Ecuaciones de Equilibrio* muestra las Leyes Fundamentales en base a las cuales se obtendrá el Modelo Matemático del Péndulo Invertido en el Capítulo 2.

### 1.2 Breve Historia del Control

A continuación se expone la historia del control, extraída de los textos clásicos [1, Ogata] y [4, Dorf] que aparecen en la bibliografía.

El uso de la retroalimentación con el objeto de controlar un sistema ha tenido una historia fascinante. Las primeras aplicaciones del Control con Retroalimentación se basan en los mecanismos regulados con flotador, desarrollados en Grecia durante el periodo 0 a 300 a.C.

El primer sistema con retroalimentación inventado en la Europa Moderna fue el regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633) de Holanda. Dennis Papin (1647-1712) inventó el primer regulador de presión para calderas de vapor en 1681. El regulador de presión de Papin fue una especie de regulador de seguridad semejante a la válvula de las ollas de presión.

El primero en procesos industriales fue el regulador centrifugo de James Watt para el control

de la velocidad de una máquina de vapor en el siglo XVIII. Otros avances relevantes en las primeras etapas del desarrollo de la Teoría de Control se deben a Monorsky, Hazen y Nyquist, entre muchos otros. En 1892 Minorsky trabajó en Controladores Automáticos de dirección en barcos y mostró cómo se podría determinar la estabilidad a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932 Nyquist desarrolló un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado sobre la base de la respuesta a lazo abierto con excitación sinusoidal en régimen permanente. En 1934 Hazen, quien introdujo el término Servomecanismos, para los sistemas de control de posición, desarrolló la síntesis de servomecanismos repetidores capaces de seguir con exactitud una entrada cambiante.

Antes de la II Guerra Mundial, la Práctica y la Teoría del Control Automático se desarrollaron en USA y en Europa Occidental de diferente forma que en la URSS y en Europa Oriental. Un impulso importante para el uso de la retroalimentación en el dominio de la frecuencia en USA fué el desarrollo del sistema telefónico y los amplificadores electrónicos con retroalimentación realizados por Bode, Nyquist y Black en los laboratorios de la Bell Telephone. Los matemáticos y mecánicos prácticos de Rusia dominaron el campo de la Teoría de Control en el dominio del tiempo usando Ecuaciones Diferenciales.

Durante la II Guerra Mundial se presentó un impulso muy grande para la Práctica y la Teoría del Control Automático, ya que fue necesario diseñar y construir pilotos automáticos para aeroplanos, sistemas automáticos de ajuste de tiro en cañones, sistemas de control por antenas de radar, y otros sistemas militares. Antes de 1940 generalmente el diseño de Sistemas de Control comprendía aproximaciones por ensayo y error. Durante la década de 1940 se incrementó en número y utilidad los métodos matemáticos y analíticos, entonces, la ingeniería de control llegó a ser una disciplina completa. De fines de los cuarenta a principios de los cincuenta, Evans desarrolló por completo el célebre Método del Lugar de las Raíces.

Después de la II Guerra Mundial continuaron dominando las técnicas en el Dominio de la Frecuencia. Durante la década de 1950 se trabajó en el plano complejo aplicando el enfoque del lugar geométrico de las raíces. Además, durante esa época fué posible la utilización de las computadoras analógicas y digitales como componentes de control. Estos nuevos elementos proporcionaron ingeniero de control nuevas capacidades para calcular con rapidez y exactitud.

Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces, que son el corazón de la Teoría de Control Clásico, llevan a sistemas que son estables y que satisfacen un conjunto de requerimientos de funcionamientos más o menos arbitrarios. Tales sistemas son, en general, aceptables pero no óptimos en ningún sentido significativo. Desde fines de la década de los cincuenta, el énfasis en problemas de diseño de control se desplazó del diseño de uno de los muchos sistemas, al diseño de un sistema óptimo en algún sentido determinado.

Como las plantas modernas con muchas entradas y salidas, se van haciendo más y más complejas, la descripción de un sistema moderno de control requiere una gran cantidad de ecuaciones. La Teoría de Control Clásico, que trata básicamente con sistemas de una entrada y una salida, se vuelve impotente ante sistemas de múltiples entradas y salidas. Hacia 1960, gracias a la disponibilidad de las computadoras digitales, se hizo posible el análisis de sistemas complejos en el dominio del tiempo; desde entonces se ha desarrollado la Teoría de Control Moderno, basada en el análisis y síntesis en el dominio del tiempo, utilizando variables de estado, con lo que se posibilita afrontar la complejidad creciente de las plantas y los estrictos requisitos de exactitud, peso y costo en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

Las aplicaciones recientes de la Teoría de Control Moderno incluyen sistemas no ingenieriles

como los de biología, biomedicina, economía y socioeconomía.

### 1.3 Clasificación de Sistemas

La información de esta sección se obtuvo del texto [2, Rodríguez].

Para clasificar los sistemas en forma general primero se debe seleccionar un criterio que permita distinguir de una manera precisa las propiedades y/o características que debe poseer a fin de poderlo ubicar dentro de la clasificación. En este caso, el criterio que se propone es tomar en cuenta las características que poseen los *Modelos Matemáticos* empleados para describir el comportamiento del sistema.

Una clasificación que resulta útil se obtiene al establecer niveles de distinta jerarquía, en los cuales se vayan incluyendo más y más restricciones, con el objeto de señalar el tipo de sistemas que son importantes en los estudios de control, especialmente para el Péndulo Invertido.

Considerando que existe un universo de sistemas en el que se incluyen todos los tipos de sistemas posibles, es decir, los que están representados por Modelos Matemáticos que no tienen restricción alguna, una primera división se puede establecer en base al *Principio de Causalidad* el cual establece que todo efecto es siempre el resultado de una causa. En otras palabras, para que la salida de un sistema cambie es necesario que la entrada aplicada lo haga con anterioridad. Por lo tanto, el sistema puede ser *Causal* o *No Causal*.

De acuerdo a sus características dinámicas, los sistemas causales pueden ser *dinámicos* o *estáticos*. Los *Dinámicos* son aquellos en los que la salida en un tiempo  $t$  depende de la entrada aplicada en ese mismo tiempo y tiempos anteriores, y se representan por medio de ecuaciones diferenciales o en diferencias. Un sistema *Estático* es aquel en el que la salida en un tiempo determinado depende únicamente de la entrada aplicada en ese mismo tiempo.

Los sistemas dinámicos se clasifican en determinísticos y no determinísticos, de acuerdo a sus características de correspondencia entre las entradas y las salidas del sistema. Los *Determinísticos* son aquellos en los que la salida producida por el sistema depende solo de una entrada, es decir para dos entradas diferentes habrá dos salidas, y se representan por medio de ecuaciones diferenciales. Los *No Determinísticos*, *Estocásticos* o *Aléatorios* son aquellos en los que la salida producida depende de una o más entradas, esto es, al aplicar dos o más entradas distintas la salida será la misma. Se representan por ecuaciones diferenciales que incluyen funciones aleatorias y/o probabilísticas.

Los sistemas determinísticos se clasifican en parámetros concentrados y parámetros distribuidos. Los sistemas de *Parámetros Concentrados* son aquellos en los que el número de variables que intervienen en el modelo es finito y se representa mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en diferencias. En los sistemas de *Parámetros Distribuidos* interviene un número infinito de variables en el modelo y se representa por medio de ecuaciones diferenciales parciales.

En base al principio de superposición<sup>1</sup> los sistemas de parámetros concentrados se clasifican en lineales y no lineales. Los sistemas *Lineales* cumplen con el principio de superposición y

<sup>1</sup>El principio de superposición establece que la salida producida por un sistema que ha sido excitado por varias entradas simultáneas es igual a la suma de las salidas que produce el sistema cuando se aplican las entradas en forma individual.

se describen con ecuaciones diferenciales ordinarias. Obviamente los sistemas *No Lineales* no cumplen con este principio.

Los sistemas lineales se clasifican en continuos y discretos. En los sistemas *Continuos* las variables que intervienen en el modelo son funciones del tiempo continuo, es decir, la variable  $t$  puede tomar todos los valores del conjunto de los números reales positivos y se representa por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En los sistemas *Discretos*, las variables son funciones de tiempo discreto, es decir, solo puede tomar valores del conjunto de los números naturales y se representa por medio de ecuaciones en diferencias lineales.

Los sistemas continuos se clasifican en invariantes en el tiempo y variantes en el tiempo. En los sistemas *Invariantes en el Tiempo* los parámetros que intervienen en el modelo presentan características estáticas o fijas, es decir, no dependen del tiempo y se representan por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. En los sistemas *Variantes en el Tiempo*, los parámetros que intervienen en el modelo presentan características dinámicas, es decir, son funciones del tiempo. Dichos sistemas se representan por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables.

En conclusión, los sistemas que son de interés para nuestro estudio son aquellos que tienen las siguientes características: *causales, dinámicos, determinísticos, de parámetros concentrados, lineales, continuos e invariantes en el tiempo.*

## 1.4 Terminología Básica

Los términos que se mencionan a continuación fueron recopilados del texto [1. Ogata]:

1. **PLANTA:** Es un conjunto interrelacionado que realiza una operación determinada. A su Modelo Matemático se le llama usualmente SISTEMA.
2. **CONTROLADOR:** Es el dispositivo que tiende a estabilizar el sistema usando retroalimentación de la salida medida. La respuesta es sensible a perturbaciones externas y a variaciones internas de los parámetros del sistema. Esto permite utilizar componentes relativamente imprecisos y económicos para lograr la exactitud de control requerida en determinada planta, cosa que sería imposible en un control de lazo abierto.
3. **VARIABLE CONTROLADA:** Es la cantidad que se controla para obtener un desempeño deseado.
4. **VARIABLE MANIPULADA:** Es la cantidad o condición modificada por el controlador a fin de afectar la variable controlada.
5. **PERTURBACIÓN:** Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema, se le denomina incertidumbre, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y constituye una entrada indeseable.

## 1.5 Modelos Matemáticos de los Elementos Electromecánicos Básicos

Esta sección se obtuvo del texto [2, Rodríguez]:

**MASA:** Es la cantidad de materia que tiene un cuerpo. Las variables asociadas con este elemento son fuerza y aceleración. Su comportamiento físico está definido por:

$$f_m = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.1)$$

donde:

$f_m$  : es la fuerza, que producida por la masa, se opone al movimiento de esta y es igual a la fuerza externa aplicada  $f$  en base a la Tercera Ley de Newton [ $N$ ]

$\frac{d^2x}{dt^2}$  : es la aceleración de la masa [ $m/s^2$ ]

$m$  : es el valor que tiene la masa [ $Kg$ ]

**INERCIA:** Es la propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en su estado de reposo o de movimiento a menos que se aplique una fuerza que modifique tal estado. Las variables asociadas con este elemento son par y aceleración angular y su comportamiento físico está definido por:

$$T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.2)$$

donde:

$T_J$  : es el par, que producido por la inercia, se opone al movimiento de esta y es igual al par externo aplicado  $T$  con base en la Tercera Ley de Newton [ $N \cdot m$ ]

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$  : es la aceleración angular a la cual gira la inercia [ $rad/s^2$ ]

$J$  : es el valor de la inercia [ $Kg \cdot m^2/rad$ ]

## 1.6 Ecuaciones de Equilibrio

La presente sección tiene la finalidad de ilustrar las leyes y principios físicos básicos que permiten establecer las expresiones matemáticas que relacionan los elementos de un sistema, en nuestro caso, del Péndulo Invertido.

Primero se presentarán las ecuaciones para sistemas mecánicos en general (traslacionales y rotacionales) y posteriormente para el motor de CD.

### 1.6.1 Sistemas Mecánicos

La información aquí presentada se obtuvo también de [2, Rodríguez].

Estas ecuaciones se plantean con base en la Tercera Ley de Newton y el Principio D'Alembert.

La Tercera Ley de Newton establece que: *a toda acción le corresponde una reacción de igual magnitud pero de sentido contrario.*

El principio D'Alembert establece que: *las fuerzas aplicadas a un elemento, junto con las fuerzas de inercia, forman un sistema en equilibrio.*

Basándose en esta ley y en este principio se pueden plantear las ecuaciones de equilibrio para Sistemas Mecánicos Traslacionales y Rotacionales.

#### Sistemas Mecánicos Traslacionales

La Tercera Ley de Newton aplicada a este tipo de sistemas puede expresarse como sigue:

"Si un elemento A ejerce una fuerza sobre otro elemento B, este ejercerá una fuerza de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento A".

El principio D'Alembert se puede expresar simplemente como:

$$\sum_{i=1}^n f_{m_i} = 0$$

#### Sistemas Mecánicos Rotacionales

La tercera ley de Newton aplicada a estos sistemas se puede expresar de la siguiente manera:

"Si un elemento A ejerce un par sobre otro elemento B, este ejercerá un par de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento A".

El principio D'Alembert se puede expresar de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n T_i = 0$$

### 1.6.2 Motor de Corriente Directa (CD)

Debido a que el carro que sostiene el péndulo se mueve a través de un motor eléctrico de CD, se tienen las siguientes ecuaciones:

1) Parte eléctrica:

$$v = IR_m + K_m W_m \quad (1.3)$$

2) Parte mecánica:

$$T_m = K_m I$$

$$T = T_m K_q$$

sabiendo que :  $F = T/r$   
 entonces :  $F = T_m K_q / r$  ,  
 por lo tanto :  $F = K_m I K_q / r$

donde:

$R_m$ : es la Resistencia de Armadura [ $\Omega$ ]

$K_m$ : es la Constante de Torque [ $N \cdot m/A$ ]

$K_q$ : es la Constante de Transformación de Engranajes

$r$ : es el Radio del Engrane de Salida [ $m$ ]

$F$ : es la Fuerza aplicada al carro por el motor [ $N$ ]

$v$ : es el Voltaje aplicado al motor [*volts*]

$I$ : es la Corriente de Armadura [*Amp*]

$W_m$ : es la Velocidad Angular del motor [*RPM*]

$T_m$ : es el Torque del motor [ $N \cdot m$ ]

$T$ : Torque de Salida [ $N \cdot m$ ]

despejando  $I$  de (1.3) y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$F = \frac{K_m K_q}{r R_m} v - \frac{K_m^2 K_q W_m}{r R_m}$$

además se sabe que  $W_m = \frac{K_d}{r} \cdot x$ , entonces, sustituyendo en la última ecuación y simplificando:

$$F = \frac{K_m K_q}{r R_m} \cdot v - \frac{K_m^2 K_q^2}{r^2 R_m} \cdot x \quad (1.4)$$

## Capítulo 2

# MODELADO DEL PÉNDULO INVERTIDO

### 2.1 Introducción

En este Capítulo se obtendrá el *Modelo Matemático* del Péndulo Invertido tanto en Ecuaciones Diferenciales como en el Espacio de Estados. En esta *Introducción* se menciona la definición de Modelo Matemático y su importancia en el análisis de Sistemas de Control. El capítulo continúa con el *Modelo en Ecuaciones Diferenciales* donde se aplican los conceptos teóricos y analíticos mencionados en el capítulo precedente. El Modelo obtenido es No Lineal pero se linealiza en base a las condiciones establecidas para hacer posible la síntesis de un controlador lineal. Tanto el Modelo Lineal como el No Lineal se reorganizan para usarlos en la Simulación. El análisis efectuado hasta este punto es aplicable tanto al Control Clásico como al Control Moderno, sin embargo, en este último se requiere que las ecuaciones obtenidas para el Modelo Lineal se expresen en el Espacio de Estados. El proceso para realizar dicho cambio se ilustra en la sección *Modelo en Espacio de Estados* con el cual concluye el presente capítulo.

La información que se presenta a continuación se obtuvo de las obras [1. Ogata] y [2. Rodríguez].

El *MODELO MATEMÁTICO* de un Sistema Dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representa la dinámica del sistema con exactitud, o al menos, razonablemente bien.

Los componentes que abarcan los Sistemas de Control son muy diversos. Pueden ser electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, electrónicos, etc. En ingeniería de control, en lugar de operar con dispositivos o componentes físicos, se les reemplaza por sus Modelos Matemáticos.

Un sistema se puede representar de muchos modos diferentes, y por lo tanto puede tener muchos Modelos Matemáticos, dependiendo del tipo de información que se desee conocer.

Obtener un Modelo Matemático razonablemente exacto de un componente físico es uno de los problemas más importantes en ingeniería de control. Para ser útil no debe ser ni muy complicado ni excesivamente simple.

Un Modelo Matemático debe representar los aspectos esenciales de un componente físico. Las predicciones sobre el comportamiento de un sistema, basadas en su modelo, deben ser bastante precisas. Muchos sistemas que parecen ser diferentes se pueden representar por el mismo Modelo Matemático.

La dinámica de muchos sistemas se puede describir en términos de ecuaciones diferenciales. Esas ecuaciones pueden obtenerse utilizando las leyes físicas que rigen un sistema en particular. Pueden ser las Leyes de Newton para sistemas mecánicos y las Leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Otra técnica de modelado para sistemas electromecánicos es la de flujos de energía o Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Siempre hay que tener en cuenta que deducir un Modelo Matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis. Una vez obtenido dicho modelo del sistema, se pueden utilizar diversas herramientas analíticas y de computación para lograr el análisis y la síntesis para modificar el comportamiento del mismo de una manera deseada.

Aunque las relaciones de entrada-salida de muchos componentes son no-lineales, normalmente esas relaciones se linealizan en la vecindad de los puntos de operación, limitando el rango de las variables a valores pequeños. Obviamente, tales modelos lineales son mucho más fáciles de manejar, tanto analíticamente como por computadora.

## 2.2 Modelo en Ecuaciones Diferenciales

Parte de esta sección se obtuvo de la obra [1, Ogata].

Como cualquier sistema consta de componentes, el análisis debe comenzar con una descripción matemática de cada componente. Una vez que se ha elaborado un Modelo Matemático del sistema completo, la forma en que el análisis se lleva a cabo es independiente de si el sistema físico es neumático, eléctrico, mecánico, etc.

### 2.2.1 Modelo No Lineal

#### Centro de gravedad del péndulo

Se define  $\theta(t)$  como el ángulo que forma la varilla respecto a la vertical (ver el diagrama de la Figura 2.1). Como se desea mantener el péndulo en posición vertical, se supone que el ángulo  $\theta(t)$  es pequeño.

Las coordenadas del centro de gravedad de la masa  $m$  del péndulo se obtienen de la siguiente manera:

$$X_G(t) = r(t) + l \sin(\theta(t)) \quad (2.1)$$

$$Y_G(t) = l \cos(\theta(t)) \quad (2.2)$$

#### Movimiento horizontal

1) Ecuaciones de los elementos:

$$f_M(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad (2.3)$$

$$f_{mx}(t) = m \frac{d^2 X_G(t)}{dt^2} \quad (2.4)$$

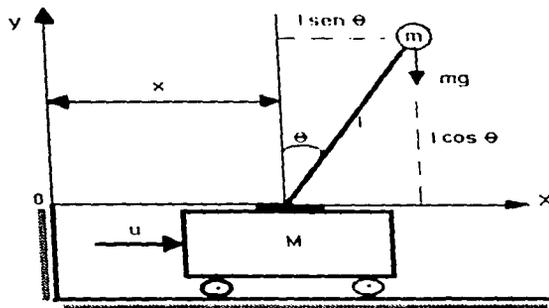


Figura 2.1: Centro de Gravedad del Péndulo

2) Ecuaciones de equilibrio:

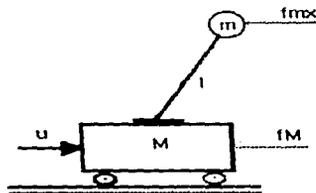


Figura 2.2: Movimiento Horizontal

$$\sum_{i=1}^n f_{x_i}(t) = 0$$

$$u(t) - f_M(t) - f_{mx}(t) = 0$$

$$f_M(t) + f_{mx}(t) = u(t)$$

sustituyendo (2.3) y (2.4) en la ecuación anterior:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + m \frac{d^2 X_G(t)}{dt^2} = u(t)$$

sustituyendo (2.1) en esta última ecuación:

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} [x(t) + l \sin(\theta(t))] = u(t)$$

Realizando operaciones y simplificando ( $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ;  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ ;  $\dot{\theta}(t) = \frac{d(\theta(t))}{dt}$ ;  $\ddot{\theta}(t) = \frac{d^2(\theta(t))}{dt^2}$ ):

$$(M + m) \ddot{x}(t) + ml \cos(\theta(t)) \ddot{\theta}(t) - ml \sin(\theta(t)) (\dot{\theta}(t))^2 = u(t) \quad (2.5)$$

En el capítulo precedente se obtuvo la siguiente ecuación para un motor de CD:

$$F(t) = \frac{K_m K_g}{r R_m} \cdot v(t) - \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 R_m} \cdot x(t)$$

Haciendo  $u(t) = F(t)$  en la ecuación (2.5) y organizando términos se obtiene:

$$\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 R_m} \cdot x(t) + (M + m) \cdot \ddot{x}(t) + ml \cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - ml \sin(\theta(t)) (\dot{\theta}(t))^2 = \frac{K_m K_g}{r R_m} \cdot v(t) \quad (2.6)$$

### Movimiento Rotacional

La ecuación de movimiento de la masa  $m$  en la dirección  $y$  no se puede escribir sin tener en consideración el movimiento de esa masa en la dirección  $x$ , por lo tanto, en lugar de considerar el movimiento en la dirección  $y$ , se puede considerar el movimiento rotacional alrededor del punto  $P$ .

Al aplicar una fuerza  $u(t)$  al carro, este la transmite a la masa  $m$  del péndulo a través de la varilla. La masa del péndulo reacciona con una fuerza igual pero de sentido contrario  $f_m(t)$ , la cual se puede descomponer en dos:  $f_{mx}(t)$  y  $f_{my}(t)$ . Además la masa  $m$  también se ve influenciada por otra fuerza  $P$  que es su peso. Cada una de estas fuerzas ( $f_{mx}(t)$ ,  $f_{my}(t)$  y  $P$ ) produce un PAR en el punto  $P$ .

1) Ecuaciones de los elementos:

$$f_{my}(t) = m \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} \quad (2.7)$$

$$P = mg \quad (2.8)$$

$$T_{mx}(t) = f_{mx}(t) \cdot dy \quad (2.9)$$

$$T_{my}(t) = f_{my}(t) \cdot dx \quad (2.10)$$

$$T_p(t) = P \cdot dx \quad (2.11)$$

$$dx = l \sin(\theta(t)) \quad (2.12)$$

$$dy = l \cos(\theta(t)) \quad (2.13)$$

2) Ecuaciones de equilibrio:

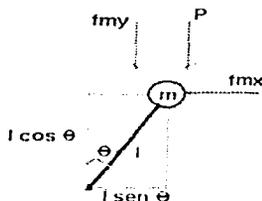


Figura 2.3: Movimiento Rotacional

$$\sum_{i=1}^n T_i = 0$$

$$T_{mx}(t) - T_{my}(t) - T_p(t) = 0$$

$$T_{mx}(t) - T_{my}(t) = T_p(t)$$

sustituyendo (2.9), (2.10) y (2.11) en la ecuación anterior:

$$f_{mx}(t) \cdot dy - f_{my}(t) \cdot dx = P \cdot dx$$

sustituyendo ahora (2.4), (2.7), (2.8), (2.12) y (2.13) se obtiene:

$$m \frac{d^2 X_G(t)}{dt^2} l \cos(\theta(t)) - m \frac{d^2 Y_G(t)}{dt^2} l \sin(\theta(t)) = mgl \sin(\theta(t))$$

sustituyendo (2.1) y (2.2) en esta última ecuación:

$$m \frac{d^2}{dt^2} [x(t) + l \sin(\theta(t))] l \cos(\theta(t)) - m \frac{d^2}{dt^2} [l \cos(\theta(t))] l \sin(\theta(t)) = mgl \sin(\theta(t))$$

realizando operaciones y simplificando:

$$ml \cos(\theta(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ml^2 [\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))] \frac{d^2(\theta(t))}{dt^2} = mgl \sin(\theta(t))$$

dividiendo entre  $ml$  ambos miembros y sabiendo que:

$$\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t)) = 1$$

se obtiene:

$$\cos(\theta(t)) \cdot x(t) + l \cdot \theta(t) = g \sin(\theta(t)) \quad (2.14)$$

De lo anterior se concluye que el *MODELO NO LINEAL* está formado por las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K_m^2 K_f^2}{r^2 H_m} \cdot x(t) + (M + m) \cdot \ddot{x}(t) + ml \cos(\theta(t)) \cdot \ddot{\theta}(t) - ml \sin(\theta(t)) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 = \frac{K_m K_f}{r H_m} \cdot v(t) \\ \cos(\theta(t)) \cdot x(t) + l \cdot \theta(t) = g \sin(\theta(t)) \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

Es importante que cada ecuación solo incluya a una de las máximas derivadas de una sola variable ya sea  $x(t)$  ó  $\theta(t)$  para su posterior utilización en la simulación; por lo tanto, multiplicando la segunda ecuación de (2.15) por  $m \cos(\theta(t))$  y restando el resultado con la primera ecuación se elimina  $\theta(t)$ . Después, despejando  $x(t)$  se obtiene:

$$x(t) = -\frac{K_m^2 K_f^2}{r^2 H_m (M + m - m \cos^2(\theta(t)))} \cdot x(t) - \frac{ml \sin(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{K_m K_f}{r H_m (M + m - m \cos^2(\theta(t)))} \cdot v(t) - \frac{mg \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))}$$

Multiplicando la primera ecuación de (2.15) por  $\cos(\theta(t))$  y la segunda por  $(M + m)$  y restando ambos resultados se elimina  $x(t)$ . Después de simplificar se obtiene:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{K_m^2 K_f^2 \cos(\theta(t))}{r^2 H_m (m \cos^2(\theta(t)) - M - m)} \cdot x(t) + \frac{m \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{K_m K_f \cos(\theta(t))}{r H_m (m \cos^2(\theta(t)) - M - m)} \cdot v(t) - \frac{g(M + m) \sin(\theta(t))}{(m \cos^2(\theta(t)) - M - m)}$$

En resumen se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = -\frac{K_m^2 K_f^2}{r^2 H_m (M + m - m \cos^2(\theta(t)))} \cdot x(t) - \frac{ml \sin(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{K_m K_f}{r H_m (M + m - m \cos^2(\theta(t)))} \cdot v(t) - \frac{mg \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \\ \ddot{\theta}(t) = -\frac{K_m^2 K_f^2 \cos(\theta(t))}{r^2 H_m (m \cos^2(\theta(t)) - M - m)} \cdot x(t) + \frac{m \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{K_m K_f \cos(\theta(t))}{r H_m (m \cos^2(\theta(t)) - M - m)} \cdot v(t) - \frac{g(M + m) \sin(\theta(t))}{(m \cos^2(\theta(t)) - M - m)} \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

## 2.2.2 Linealización

Un sistema es *NO LINEAL* si no se le puede aplicar el principio de superposición. Aunque muchas relaciones físicas se representan frecuentemente por ecuaciones lineales, en la mayoría de los casos, las relaciones reales no son lineales.

De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos indica que aún los denominados *Sistemas Lineales* son realmente lineales en rangos de operación restringidos. En la práctica, muchos sistemas electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, etc. establecen relaciones no lineales entre sus variables.

En general, los procedimientos para encontrar soluciones a problemas de sistemas no lineales, son en extremo complicados. Debido a esta dificultad matemática inherente a los sistemas no lineales, a menudo se encuentra necesario introducir sistemas lineales *equivalentes* para reemplazar a los no lineales. Estos sistemas lineales equivalentes son válidos solamente en un rango restringido de operación. Una vez conseguida la aproximación de un sistema no lineal por medio de un Modelo Matemático lineal, se pueden aplicar herramientas lineales para su análisis y para el diseño de leyes de control realistas.

### Análisis

Si hacemos que nuestro sistema funcione en las proximidades del punto de equilibrio ( $\theta(t) \approx 0$ ), y si las señales introducidas son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal por un sistema lineal usando las siguientes consideraciones:

$$\theta(t) \approx 0$$

$$\dot{\theta}(t) \approx 0$$

$$\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$$

$$\cos(\theta(t)) \approx 1$$

$$\theta(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 \approx 0$$

Para LINEALIZAR el sistema se sustituyen estas consideraciones en (2.15) obteniéndose entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K_m^2 K_d^2}{r^2 R_m} \cdot \ddot{x}(t) + (M + m) \cdot \dot{x}(t) + ml \cdot \theta(t) = \frac{K_m K_d}{r R_m} \cdot v(t) \\ \ddot{x}(t) + l \cdot \theta(t) = g\theta(t) \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

Así como se hizo en el sistema no lineal, aquí también es importante que cada ecuación sólo contenga a una de las máximas derivadas para facilitar la simulación. Realizando un proceso similar se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = -\frac{K_m^2 K_d^2}{r^2 M R_m} \cdot x(t) - \frac{mg}{M} \cdot \theta(t) + \frac{K_m K_d}{r M R_m} \cdot v(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{K_m^2 K_d^2}{r^2 M l R_m} \cdot x(t) + \frac{g(M+m)}{M l} \cdot \theta(t) - \frac{K_m K_d}{r M l R_m} \cdot v(t) \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

## 2.3 Modelo en Espacio de Estados

La tendencia actual en la ingeniería de sistemas es hacia una mayor complejidad, debido principalmente a los requerimientos de tareas complejas y de una buena precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y ser variables en el tiempo. Debido a la necesidad de afrontar los cada vez más severos requisitos del comportamiento de sistemas de control, al aumento en su complejidad, y al fácil acceso a computadoras, la *Teoría de Control Moderno* se ha erigido como una opción adecuada para el control de sistemas complejos.

La Teoría de Control Moderno contrasta con la Teoría de *Control Clásico* en que la primera se aplica a sistemas de múltiples entradas y salidas, que pueden ser lineales o no lineales, variables o invariantes en el tiempo, mientras que la segunda se aplica básicamente a sistemas lineales, invariantes en el tiempo y de una sola entrada y una sola salida. Además la Teoría de Control Moderno es un procedimiento en el dominio del tiempo esencialmente, mientras la teoría convencional opera en el dominio frecuencial.

### 2.3.1 Definiciones

A continuación se darán algunas definiciones que fueron tomadas del texto [1. Ogata] y que son importantes para el análisis de nuestro sistema en el Espacio de Estados.

1. **ESTADO:** Es el conjunto más pequeño de variables, tales que el conocimiento de estas en  $t = t_0$ , conjuntamente con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier tiempo  $t \geq t_0$ . Al tratar sistemas lineales invariantes en el tiempo, generalmente se escoge un tiempo de referencia  $t_0 = 0$ .
2. **VARIABLES DE ESTADO:** Son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico. Si se requieren al menos  $n$  variables  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico, entonces esas  $n$  variables son un conjunto de variables de estado. Se pueden elegir como variables de estado variables que no representen magnitudes físicas o que no sean medibles ni observables.
3. **VECTOR DE ESTADO:** Si se requieren  $n$  variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, se puede considerar a esas  $n$  variables como  $n$  componentes de un vector  $x$ . Tal vector recibe el nombre de vector de estado.
4. **ECUACIONES DEL ESPACIO DE ESTADO:** En el análisis de espacio de estado se manejan tres tipos de variables comprendidas en el modelo de sistemas dinámicos: las variables de *entrada*, las variables de *salida* y las variables de *estado*. La representación en el espacio de estado de un sistema dado no es única, sólo que la cantidad de variables de estado es la misma para cualquier otra representación diferente en el espacio de estado del mismo sistema. Las ecuaciones generales linealizadas en torno al punto de operación se definen de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right\}, \text{ para } t \geq 0 \quad (2.19)$$

donde:

$x(t)$  es el vector de estado del sistema y es de dimensión  $n$

$u(t)$  es el vector de entradas aplicadas al sistema de dimensión  $r$

$y(t)$  es el vector de salidas producidas por el sistema de dimensión  $m$

$A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de coeficientes constantes de orden  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$  y  $m \times r$  respectivamente.

### 2.3.2 Análisis

Las técnicas de análisis que se aplican a continuación fueron tomadas de [2, Rodríguez] y sólo son válidas para el sistema lineal, por lo tanto partimos de las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} x(t) - \frac{mg}{M} \theta(t) + \frac{K_m K_g}{r M R_m} v(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} x(t) + \frac{g(M-m)}{MI} \theta(t) - \frac{K_m K_g}{r M R_m} v(t) \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

Lo que se pretende es llevar el sistema a la forma indicada por (2.19).

Para expresar este nuevo sistema en el *ESPACIO DE ESTADO* se realiza lo siguiente:

Se define el estado:

$$\begin{bmatrix} x_1 = x(t) \\ x_2 = \dot{x}(t) \\ x_3 = \theta(t) \\ x_4 = \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Derivando las nuevas variables se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

y sustituyendo (2.21) en (2.20) y estos resultados obtenidos en (2.22) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} x_2 - \frac{mg}{MI} x_3 + \frac{K_m K_g}{r M R_m} v(t) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} x_2 + \frac{g(M-m)}{MI} x_3 - \frac{K_m K_g}{r M R_m} v(t) \end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones forman el sistema en el espacio de estado donde:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2}{r^2 M l m} & -\frac{m g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_1 K_2}{r^2 M l m} & \frac{g(M+m)}{l M} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1 K_2}{r^2 M l m} \\ 0 \\ -\frac{K_1 K_2}{r^2 M l m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = v(t)$$

En base a lo anterior, el Sistema Lineal se puede expresar de la siguiente manera:

$$\ddot{x}(t) = a_{22} \cdot x(t) + a_{23} \cdot \theta(t) + b_{21} \cdot v(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = a_{42} \cdot x(t) + a_{43} \cdot \theta(t) + b_{41} \cdot v(t)$$

y el sistema No Lineal como sigue:

$$\ddot{x}(t) = \frac{a_{22} \cdot M}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot x(t) + \frac{m l \sin(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{b_{21} \cdot M}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot v(t) + \frac{a_{23} \cdot M \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{a_{42} \cdot M \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot x(t) + \frac{m \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - \frac{b_{41} \cdot M \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot v(t) - \frac{a_{43} \cdot M \sin(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m}$$

## Capítulo 3

# PROPIEDADES ESTRUCTURALES

### 3.1 Introducción

El presente capítulo ilustra las *Propiedades Estructurales* del Péndulo Invertido tales como la Estabilidad, la Controlabilidad y la Observabilidad.

Las *Propiedades Estructurales* definen las características del sistema, es decir si este es Estable, Controlable y Observable. Por simple observación se sabe que nuestro sistema es inestable, sin embargo se demostrará este hecho en la siguiente sección (*Estabilidad*) usando un Método Analítico y un Método de Cómputo. También se darán los requisitos para estabilizarlo.

Para diseñar el Controlador es indispensable que el sistema cumpla con las características de controlabilidad. Este aspecto se analiza en la tercera sección (*Controlabilidad*). Si el sistema es controlable entonces se puede continuar con el diseño del sistema de control, en caso contrario será necesario reorganizar nuevamente el modelo matemático.

Al igual que el Controlador, el Observador se podrá diseñar después de demostrar analíticamente que el sistema cumple con las características de observabilidad. Esto se discute en la cuarta sección (*Observabilidad*) del presente capítulo.

La Estabilidad, la Controlabilidad y la Observabilidad juegan un papel muy importante en los sistemas de control, ya que indican el camino adecuado en el diseño de la *LEY DE CONTROL*.

Tal como se ha venido realizando durante todo el desarrollo del presente trabajo, únicamente se indicarán las operaciones a realizar y se darán los resultados finales eliminando los procesos intermedios. Todos los cálculos son verificados usando la rutina correspondiente, puesta a punto en *MATLAB*.

Las técnicas de análisis de las propiedades estructurales del sistema, mostradas a continuación son material estándar en la literatura de Control Automático (ver por ejemplo las obras [1, Ogata] y [2, Rodríguez]).

## 3.2 Estabilidad

### 3.2.1 Introducción

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la *Estabilidad Absoluta*, es decir si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si la salida permanece en el mismo estado en ausencia de cualquier perturbación o entrada y además es estable si la salida regresa eventualmente a su estado de equilibrio cuando el sistema se somete a alguna perturbación. Si la salida del sistema oscila indefinidamente, se dice que el sistema es marginalmente estable. Si la salida diverge sin límite, de su estado de equilibrio cuando el sistema sufre alguna perturbación, se dice que el sistema es inestable.

Todo sistema de control debe ser estable. Esto es un requisito básico para cualquier fin práctico. Además de la estabilidad absoluta, un sistema de control debe tener una estabilidad relativa razonable, es decir, la respuesta debe mostrar un amortiguamiento adecuado. Asimismo, la velocidad de respuesta debe ser rápida y el sistema de control debe ser capaz de reducir los errores a cero o a un valor pequeño tolerable. Cualquier sistema de control para ser útil debe satisfacer estos requisitos.

### 3.2.2 Análisis en el Plano Complejo

La *Estabilidad* de un sistema lineal de lazo cerrado se puede determinar por la *Ubicación de los Polos* de lazo cerrado en el plano  $S$ . Si cualquiera de esos polos queda en el semiplano derecho cerrado del plano  $S$ , al transcurrir el tiempo, la respuesta transitoria aumenta en forma monótona u oscila con amplitud creciente. Esto representa un sistema inestable o marginalmente estable, por lo cual no se admiten polos en el semiplano derecho cerrado de  $S$ . Si todos los polos de lazo cerrado quedan a la izquierda del eje  $j\omega$  cualquier respuesta transitoria alcanza el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Que un sistema lineal sea estable o inestable es una propiedad del sistema en sí y no depende de la entrada o función excitadora del sistema. Los polos de la entrada, o función excitadora, no afectan la propiedad de estabilidad del sistema y sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estacionario de la solución. Así, el problema de estabilidad absoluta puede resolverse fácilmente si no se colocan polos de lazo cerrado en el semiplano derecho, ni sobre el eje  $j\omega$ <sup>1</sup>.

El sólo hecho de que todos los polos de lazo cerrado queden en el semiplano izquierdo de  $S$  no garantiza características de respuesta transitoria satisfactorias. Si hay polos de lazo cerrado dominantes<sup>2</sup> complejos conjugados cerca del eje  $j\omega$ , la respuesta transitoria puede presentar oscilaciones excesivas o puede ser muy lenta. Por lo tanto, para garantizar características de respuesta transitoria rápida, aunque bien amortiguada, es necesario que los polos de lazo cerrado del sistema queden en una zona determinada del plano complejo.

No siempre es posible tener el patrón de polos y ceros del sistema, por lo que es necesario contar con alguna técnica mediante la cual se pueda analizar en forma rápida y sencilla la

<sup>1</sup>Matemáticamente los polos de lazo cerrado sobre el eje  $j\omega$  producen oscilaciones cuya amplitud no aumenta ni disminuye con el tiempo. En los casos prácticos donde hay ruido, la amplitud de las oscilaciones puede aumentar a una velocidad determinada por el nivel de potencia del ruido. Por lo tanto, un sistema de control no debería tener polos de lazo cerrado sobre el eje  $j\omega$ .

<sup>2</sup>Los polos de lazo cerrado dominantes, como su nombre lo indica, dominan el comportamiento de la respuesta transitoria del sistema.

estabilidad de un sistema. Por otro lado, si se conocen las raíces que satisfacen al polinomio característico del sistema, se puede determinar si este es o no estable. Este método puede ser complicado si el orden del polinomio es grande (mayor de 3) debido a que es necesario emplear alguna técnica muy compleja para el cálculo de las raíces, pero afortunadamente actualmente la computadora nos ahorra este trabajo.

En nuestro caso, el sistema será Estable si y solamente si los Valores Propios de la matriz A son números complejos con parte real negativa.

### 3.2.3 Análisis del Péndulo Invertido

#### Método Analítico

Para simplificar las operaciones se supone que el Sistema tiene como entrada a  $u(t)$  y como salida a  $\theta(t)$  (posición del péndulo) y está definido por las ecuaciones siguientes<sup>3</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + M) \ddot{x}(t) - m l \ddot{\theta}(t) = u(t) \\ \ddot{x}(t) - l \ddot{\theta}(t) = q\theta(t) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Multiplicando la segunda ecuación del sistema (3.1) por  $m$  y restando el resultado con la primera se obtiene:

$$M \ddot{x}(t) = u(t) - m q \theta(t) \quad (3.2)$$

Para eliminar  $\ddot{x}(t)$  se multiplica la primera ecuación de (3.1) por  $M$  y la ecuación (3.2) por  $M + m$  y se restan ambas obteniéndose:

$$M l \ddot{\theta}(t) - (M + m) q \theta(t) = -u(t)$$

Aplicando la *Transformada de Laplace* a esta última ecuación y factorizando  $\theta(s)$  se tiene:

$$\theta(s) [M l s^2 - (M + m) q] = -u(s)$$

Por lo tanto la Función de Transferencia es:

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{(M + m) q - M l s^2}$$

Para encontrar los polos se iguala el denominador a cero:

$$(M + m) q - M l s^2 = 0$$

Resolviendo para  $s$  se tiene:

$$s = \pm \sqrt{\frac{(M + m) q}{M l}}$$

De aquí se observa que los polos son:

$$s = + \sqrt{\frac{(M + m) q}{M l}}$$

$$s = - \sqrt{\frac{(M + m) q}{M l}}$$

Como el primer polo es siempre no negativo, se concluye que el sistema es *INESTABLE*.

<sup>3</sup>Estas ecuaciones corresponden al Sistema Linealizado donde no se ha reemplazado  $u(t)$  por  $F(t)$ .

### Método de Cómputo (MATLAB)

Apartir de estos momentos, trabajaremos con nuestro sistema utilizando el Modelo en el Espacio de Estados obtenido en el capítulo anterior, es decir usando las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Para saber dónde están los polos del sistema es necesario encontrar los valores propios de la matriz  $A$ , esto se puede realizar fácilmente usando *MATLAB* de la siguiente manera:

1) Introducir la matriz:

```
>> A=[0 1 0 0;0 a22 a23 0;0 0 0 1;0 a12 a13 0]
```

2) Obtener los valores propios de la matriz con la siguiente instrucción:

```
>> eig(A)
```

En nuestro caso primero ejecutamos el programa *param* que contiene todos los valores físicos de los parámetros del sistema, tales como  $m$ ,  $M$ ,  $I$ ,  $K_m$ , etc. Después se ejecuta el programa *sistema* que contiene las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Finalmente se obtienen los valores propios de la matriz  $A$ . Todos estos pasos se ejecutan como se muestra en la Figura (3.1):

```
MATLAB Command
File Edit Options
Windows Help
» param
» sistema
» eig(A)
ans =
      0
-17.3344
-3.7326
 4.1836
```

Figura 3.1: Ejecución de MATLAB para obtener los Valores Propios de la matriz  $A$ .

Observamos que las 4 raíces obtenidas son reales, siendo dos no negativas, por lo tanto concluimos que el sistema es *INESTABLE*.

## 3.3 Controlabilidad

### 3.3.1 Introducción

Se dice que un sistema es *Controlable* en el tiempo  $t_0$ , si por medio de un vector de control no restringido, es posible transferirlo desde cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, en un tiempo finito.

Considerando el sistema en Espacio de Estado descrito por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

se dice que es de estado controlable en  $t = t_0$  si es posible construir una señal de control no restringida que pueda transferir un estado inicial en cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito  $t_0 < t < t_1$ .

El sistema descrito por las Ecuaciones (3.3) es controlable si y solamente si los vectores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  son linealmente independientes, lo cual es equivalente a pedir que la matriz:  $M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  sea de rango  $n$ . La matriz  $M$  se denomina *Matriz de Controlabilidad*.

### 3.3.2 Análisis del Péndulo Invertido

Nuestro sistema será controlable si solamente si:

$$\text{rango}([B \ AB \ A^2B \ A^3B]) = 4$$

Sustituyendo los valores de los parámetros (están en el apéndice) se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.7778 \\ 0 \\ -6.1931 \end{bmatrix}$$

realizando operaciones :

$$AB = \begin{bmatrix} 3.7778 \\ -63.7824 \\ -6.1931 \\ 104.5612 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -63.78 \\ 1104.82 \\ 104.56 \\ -1910.48 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 1104.82 \\ -19125.23 \\ -1910.48 \\ 33029.25 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3.7778 & -63.78 & 1104.82 \\ 3.7778 & -63.7824 & 1104.82 & -19125.23 \\ 0 & -6.1931 & 104.56 & -1910.48 \\ -6.1931 & 104.5612 & -1910.48 & 33029.25 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz en *MATLAB* se obtiene con la siguiente instrucción:

```
>> rank(M)
```

Ejecutando *MATLAB* se tiene:

```
>> rank(M)
```

```
ans = 4
```

De aquí se concluye que el sistema es *CONTROLABLE*.

## 3.4 Observabilidad

### 3.4.1 Introducción

Se dice que el sistema descrito por las Ecuaciones (3.3) es completamente *Observable*, si cada estado  $x(t_0)$  se puede determinar a partir de la observación de  $y(t)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por lo tanto, el sistema es completamente observable si cada transición del estado afecta eventualmente a cada elemento del vector de salida.

El concepto de *Observabilidad* es útil al resolver problemas de reconstruir variables de estado no medibles a partir de otras medibles en el menor tiempo posible. Además, en la práctica, el problema que se tiene con el control de retroalimentación de estado es que algunas variables de estado no son accesibles a la medición directa, por lo que se requiere estimar esas variables de estado no medibles a fin de construir las señales de control.

El sistema descrito por las Ecuaciones (3.3) es completamente observable si y solamente si la matriz:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango  $n$ . Esta matriz se denomina comúnmente *Matriz de Observabilidad*.

### 3.4.2 Análisis del Péndulo Invertido

El sistema será observable si el rango de la matriz  $N$  es igual a 4. A partir de los parámetros del sistema se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y realizando operaciones:

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & 285.0519 & 76.2094 & -4.5138 \\ 0 & -467.2982 & -124.9335 & 23.4325 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \\ 0 & 285.0519 & 76.2094 & -4.5138 \\ 0 & -467.2982 & -124.9335 & 23.4325 \end{bmatrix}$$

usando MATLAB se obtiene:

```
>>rank(N)
```

```
ans=4
```

Por lo tanto, se concluye que el sistema es *OBSERVABLE*.

## Capítulo 4

# DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL

### 4.1 Introducción

En el presente capítulo se obtendrá el *Controlador* que estabiliza el sistema usando Retroalimentación de Estados. La segunda sección (*Diseño mediante Ubicación de Polos*) expone el marco teórico que se usará para obtener el controlador. La tercera y última sección (*Síntesis del Controlador*) usa un método puramente analítico para obtener la Matriz de Ganancia del Controlador. Estos resultados se pueden almacenar en un programa para calcular de manera directa el controlador con los polos deseados. El programa usado para los cálculos se explica en su apéndice respectivo.

### 4.2 Diseño mediante Ubicación de Polos

Basados en lo expuesto en [1. Ogata], podemos decir que los *reguladores* son sistemas de control retroalimentados que traen estados no nulos (producidos por perturbaciones externas), al origen con suficiente celeridad. Un método para diseñar sistemas reguladores es el de construir un sistema de control de lazo cerrado estable, especificando las *Ubicaciones deseadas de los Polos* de lazo cerrado. Esto se puede lograr utilizando retroalimentación estática de estado. Es decir, se supone un vector de control  $v(t) = Kx(t)$  (con  $v(t)$ <sup>1</sup> no restringido) y se determina la *Matriz de Ganancia* de retroalimentación  $K$  de manera tal que el polinomio característico de la matriz  $A + BK$  sea el deseado. La ubicación de polos no es posible si el sistema no tiene estado completo controlable. En nuestra caso se puede entonces estabilizar siempre al sistema.

Si el sistema considerado tiene estado completo controlable, como es nuestro caso, los polos del sistema de lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier lugar por medio de retroalimentación estática de estado a través de una correcta selección de  $K$ .

La colocación de todos los polos de lazo cerrado requiere mediciones sucesivas de todas las variables de estado, o bien, la inclusión de un observador de estado en el sistema.

Considerando el sistema de control:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Recordemos que  $v(t)$  denota el voltaje aplicado al motor de corriente directa, que desplaza al carro sobre el cual se encuentra el péndulo invertido.

donde:

$x(t)$ : es el vector de estado (de dimensión  $n$ )

$v(t)$ : es la señal de control (escalar)

$A$ : es la matriz de  $n \times n$  (constante)

$B$ : es la matriz de  $n \times 1$  (constante)

Se elige como señal de control:

$$v(t) = Kx(t) \quad (4.2)$$

Esto significa que la señal de control está determinada por el estado instantáneo. A este esquema se le llama Retroalimentación de Estado. La matriz  $K$  de  $1 \times n$  se denomina Matriz de Ganancia de Retroalimentación de Estado.

Al sustituir la ecuación (4.2) en (4.1) se obtiene:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

La solución de esta ecuación está dada por:

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x(0),$$

donde  $x(0)$  es el estado inicial del sistema. La Estabilidad y las características de Respuesta Transitoria son funciones de los valores propios de la matriz  $A + BK$ . Si se elige adecuadamente  $K$  se puede hacer que  $x(t)$  tienda a cero cuando  $t$  tiende a infinito, para cualquier condición inicial  $x(0)$ . Evidentemente se debe elegir  $K$  para que las raíces del polinomio característico de  $A + BK$  se encuentren en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

## 4.3 Síntesis del Controlador

### 4.3.1 Método Analítico

En el capítulo anterior se demostró que el sistema es *Controlable*, esto significa que para un tiempo dado  $t_f$  existe una Ley de Control  $v(t)$  en  $0 \leq t \leq t_f$  que lleva el sistema de la condición inicial  $x_0$  en  $t = 0$  a la condición final  $x_f$  en el tiempo  $t_f$ , es decir,  $x_f = x(t_f)$ .

En nuestro caso la condición final buscada es:

$$x_f = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¿Cómo elegimos  $v(t)$ ?

Ya que el sistema es controlable se puede encontrar una Ley de Control  $v(t) = Kx(t)$ , es decir, una retroalimentación estática del estado tal que:

$$|sI - (A + BK)| = \Delta_d(s)$$

donde  $\Delta_d(s)$  es un polinomio mónico<sup>2</sup> de grado igual al número de líneas (o de columnas) de la matriz  $A$ . Las raíces del polinomio característico  $|sI - (A + BK)|$  son los valores propios de  $(A + BK)$  y los polos del sistema retroalimentado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(A + BK)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

el cual va al origen (a partir de cualquier condición inicial) si todas las raíces de  $|sI - (A + BK)|$  tienen parte real negativa, es decir si el sistema es *Estable*.

Por lo tanto para llevar el sistema al estado  $x(t) = 0$  se tiene que encontrar una matriz  $K$  tal que las raíces de  $\Delta_d(s)$  tengan parte real negativa.

### DISEÑO

Si el sistema en lazo abierto es controlable, siempre se puede hallar una *Transformación de Similitud*  $T$ , tal que lleve al sistema a la así llamada *Forma Companion*, en la cual la tarea de síntesis del controlador se ve facilitada.

Ya que se tienen 4 estados,  $T$  tendrá la forma siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \end{bmatrix}$$

donde  $t_{11}$  es una matriz columna de  $4 \times 1$ .

Se obtiene ahora el polinomio característico del sistema en lazo abierto:

$$\alpha(s) = |sI - A|.$$

es decir:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= s^4 - (a_1 + a_2s + a_3s^2 + a_4s^3) \\ &= s^4 - a_4s^3 - a_3s^2 - a_2s - a_1. \end{aligned}$$

Para el Péndulo Invertido:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{gK_m^2 K_2^2}{r^2 M R_m}$$

$$a_3 = \frac{gM + gm}{MI}$$

$$a_4 = -\frac{K_m^2 K_2^2}{r^2 M R_m}$$

Se definen ahora los polinomios  $\alpha_i(s)$  como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0(s) = \alpha(s) \\ s\alpha_i(s) = \alpha_{i-1}(s) + a_i \end{array} \right\}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } 4.$$

<sup>2</sup>Un Polinomio Mónico es aquel cuyo coeficiente del término "s" de mayor grado es igual a 1.

Entonces:

$$\alpha_0(s) = s^4 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s^3 - \frac{gM + gm}{MI} \cdot s^2 - \frac{gK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s;$$

$$\alpha_1(s) = s^3 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s^2 - \frac{gM + gm}{MI} \cdot s - \frac{gK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m};$$

$$\alpha_2(s) = s^2 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s - \frac{gM + gm}{MI};$$

$$\alpha_3(s) = s + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m}$$

y:

$$\alpha_4(s) = 1$$

Definiendo las columnas de  $T$ ,  $t_{1i}$ , como:

$$t_{1i} = \alpha_i(A)B$$

se tiene:

$$t_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{gK_m K_g}{rMI R_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$t_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{gK_m K_g}{rMI R_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$t_{13} = \begin{bmatrix} \frac{K_m K_g}{rMI R_m} \\ 0 \\ -\frac{K_m K_g}{rMI R_m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$t_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m K_g}{rMI R_m} \\ 0 \\ -\frac{K_m K_g}{rMI R_m} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente:

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{qK_m K_g}{r^2 M R_m} & 0 & \frac{K_m K_g}{r^2 M R_m} & 0 \\ 0 & -\frac{qK_m K_g}{r^2 M R_m} & 0 & \frac{K_m K_g}{r^2 M R_m} \\ 0 & 0 & -\frac{K_m K_g}{r^2 M R_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_m K_g}{r^2 M R_m} \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces el sistema transformado:

$$\dot{x}'(t) = A'x'(t) + B'v(t)$$

donde:

$$\begin{cases} A' = T^{-1}AT \\ B' = T^{-1}B. \end{cases}$$

Sabiendo que:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{r^2 M R_m}{qK_m K_g} & 0 & -\frac{r^2 M R_m}{qK_m K_g} & 0 \\ 0 & -\frac{r^2 M R_m}{qK_m K_g} & 0 & -\frac{r^2 M R_m}{qK_m K_g} \\ 0 & 0 & -\frac{r^2 M R_m}{K_m K_g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r^2 M R_m}{K_m K_g} \end{bmatrix}$$

entonces, sustituyendo en  $A'$  y  $B'$  se tiene:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{qK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} & \frac{q(M \cdot m)}{r^2 M} & -\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, se desean colocar los polos del sistema transformado de lazo cerrado en  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  (todos con parte real negativa), es decir se busca  $K'$  tal que:

$$|sI - (A' + B'K')| = (s - P_1)(s - P_2)(s - P_3)(s - P_4).$$

Si se definen  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  y  $\hat{a}_4$  como los coeficientes del polinomio característico deseado, es decir:

$$\begin{aligned} |sI - (A' + B'K')| &= s^4 - (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 s + \hat{a}_3 s^2 + \hat{a}_4 s^3) \\ &= s^4 - \hat{a}_4 s^3 - \hat{a}_3 s^2 - \hat{a}_2 s - \hat{a}_1 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\bar{a}_1 = -P_1 P_2 P_3 P_4$$

$$\bar{a}_2 = P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4$$

$$\bar{a}_3 = -P_1 P_2 - P_1 P_3 - P_1 P_4 - P_2 P_3 - P_2 P_4 - P_3 P_4$$

$$\bar{a}_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Escogiendo entonces como matriz de ganancia para el sistema transformado:

$$K' = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 - a_1 & \bar{a}_2 - a_2 & \bar{a}_3 - a_3 & \bar{a}_4 - a_4 \\ -P_1 P_2 P_3 P_4 \\ P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4 - \frac{gK_2^2 K_1^2}{r^2 M R_m} \\ -P_1 P_2 - P_1 P_3 - P_1 P_4 - P_2 P_3 - P_2 P_4 - P_3 P_4 - \frac{gM + gm}{M} \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - \frac{K_2^2 K_1^2}{r^2 M R_m} \end{bmatrix}^T,$$

el sistema retroalimentado transformado tendrá como polos a  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$  y  $\bar{a}_4$ , los cuales serán también los polos del sistema retroalimentado no transformado al aplicar la ley de control  $v(t) = Kx(t)$ , donde:

$$K = K'^T = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \end{bmatrix}.$$

Así pues, realizando operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{P_1 P_2 P_3 P_4 r M R_m}{g K_m K_g}; \\ k_{12} &= \frac{g K_2^2 K_1^2 (P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4) r^2 M R_m}{r g K_m K_g}; \\ k_{13} &= \frac{(P_1 P_2 - P_1 P_3 - P_1 P_4 - P_2 P_3 - P_2 P_4 - P_3 P_4) r M R_m + r g^2 M R_m + r g^2 m R_m}{g K_m K_g}; \\ k_{14} &= -\frac{(P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4) r M R_m + r g^2 M R_m + r g^2 m R_m}{g K_m K_g}. \end{aligned}$$

En *MATLAB* todos estos pasos se realizan ejecutando el programa *control* (está en el apéndice). Por ejemplo, si se quieren colocar todos los polos en  $-4$ , se obtiene el resultado mostrado en la Figura (4.1).

La explicación del programa "*control*" se encuentra en el apéndice respectivo.



The image shows a screenshot of the MATLAB Command Window. The window title is "MATLAB Command Window". The menu bar includes "File", "Edit", "Options", "Windows", and "Help". The command prompt shows the following text:

```
> control
introduce POLOS del CONTROLADOR

polo 1=-4
polo 2=-4
polo 3=-4
polo 4=-4
la matriz K del controlador es:
  -4.2266   -8.6957  -21.8630   -5.1617
```

Figura 4.1: Ejecución del Programa "control"

## Capítulo 5

# DISEÑO DE UN OBSERVADOR

### 5.1 Introducción

El presente Capítulo tiene como finalidad *Diseñar el Observador*, para la puesta a punto de una estrategia de control por retroalimentación de estados observados. El Capítulo inicia con la presente *Introducción* donde se menciona la importancia y la finalidad del observador, así como los requisitos estructurales que el sistema debe cumplir para su diseño. En la Segunda Sección (*Observador de Estado*) se presentan las ecuaciones generales (Modelo Matemático), que definen a los observadores. La Tercera Sección (*Observador Completo*), ilustra el tipo de observador que se diseñará en este capítulo y su Matriz de Ganancia. La última sección (*Síntesis del Observador*), establece las condiciones bajo las cuales es posible diseñar el observador usando el *Método Analítico*. Este método es muy similar al mencionado en el capítulo anterior y también se utiliza el mismo paquete de cómputo, pero con un programa un poco diferente, cuyo desarrollo se explica en el apéndice correspondiente.

La información que se presenta en este capítulo es estándar en la literatura de Control Automático (ver por ejemplo [1. Ogata]).

Generalmente es deseable medir y controlar directamente la variable que indica el estado del sistema o calidad del producto. Sin embargo, esto puede presentar un problema complicado, ya que no siempre las variables de interés están disponibles para medición directa.

El diseño de la *Ley de Control* a través de la ubicación de polos tratado con anterioridad requiere la retroalimentación estática de todas las variables de estado. Por lo tanto se requiere que todas ellas estén disponibles para retroalimentación. Sin embargo, algunas variables de estado pueden no ser medibles y no estar disponibles. En tal caso hay que estimarlas, a partir de mediciones de la entrada y de la salida del sistema, por medio de los así llamados Observadores de Estado.

El diseño de *Observadores* de estado no es posible si el sistema no es observable. Por lo tanto, la controlabilidad y la observabilidad juegan un papel importante en el diseño de sistemas de control.

Si el observador estima todas las variables de estado del sistema, independientemente de si algunas variables se encuentran disponibles para medición directa, se denomina *Observador Completo*. Hay ocasiones en que esto no es necesario, ya que sólo se requiere observar las variables no medibles, pero no las que son medibles en forma directa.

Por ejemplo, como las variables de salida son observables y están relacionadas con las

variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino sólo  $n - m$ , donde  $n$  es la dimensión del vector de estado y  $m$  es la dimensión del vector de salida. El observador que sólo estima las variables de estado de orden mínimo se denomina *Observador Reducido*.

## 5.2 Observador de Estado

De ahora en adelante se utilizará  $\bar{x}$  para designar el vector de estado observado. Considerando el sistema:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bv(t) \quad (5.1)$$

$$y(t) = C\bar{x}(t) \quad (5.2)$$

y suponiendo que el estado  $x(t)$  se debe aproximar por el estado  $\bar{x}$  del modelo dinámico:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bv(t) + K_s(y(t) - C\tilde{x}(t)) \quad (5.3)$$

representa al *Observador de Estado*. Nótese que el observador tiene a  $y(t)$  y a  $v(t)$  como entradas y a  $\tilde{x}$  como salida. El último término del miembro derecho de la ecuación anterior es un *Término de Corrección* que incluye la diferencia entre la salida medida  $y(t)$  y la salida estimada  $C\tilde{x}(t)$ . La matriz  $K_s$  se utiliza como matriz de ponderación. El término de corrección controla el estado  $\tilde{x}(t)$ . En presencia de discrepancias entre las matrices  $A$  y  $B$  usadas en el modelo y en el sistema real, la adición de términos correctivos ayuda a reducir los efectos debido a la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real.

## 5.3 Observador Completo

El orden del observador que se tratará aquí es el mismo que el del sistema.

Para obtener la ecuación de error del observador, se resta la ecuación (5.3) de la ecuación (5.1) y se obtiene:

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax(t) - A\tilde{x}(t) - K_s(Cx(t) - C\tilde{x}(t))$$

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (A - K_s C)(x(t) - \tilde{x}(t)). \quad (5.4)$$

El *Vector de Error e* se define como:

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t).$$

Entonces la ecuación (5.4) se transforma en:

$$\dot{e}(t) = (A - K_s C)e(t).$$

De la ecuación anterior se puede ver que el comportamiento dinámico del error está determinado por los valores propios de la matriz  $A - K_s C$ . Si esta matriz es estable, el error tiende a

cero, para cualquier error inicial  $e(0)$ . Es decir,  $\hat{x}(t)$  debe tender a  $x(t)$  independientemente de los valores de  $x(0)$  y  $\hat{x}(0)$ . Si los valores propios de la matriz  $A - K$ ,  $C$  se eligen adecuadamente, se logrará una evolución agradable del error.

Si el sistema es completamente observable, entonces es posible elegir la matriz  $K$ , para que  $A - K$ ,  $C$  tenga los valores propios deseados (en un conjunto simétrico de números complejos). Es decir, se puede determinar la *Matriz de Ganancia del Observador* para obtener la matriz deseada.

## 5.4 Síntesis del Observador

Para diseñar el *Observador de Orden Completo* es necesario transformar la matriz  $C$  de manera que sólo se tenga una salida y posteriormente comprobar, nuevamente, que el sistema es observable. Los únicos estados que son medibles directamente son la posición  $x(t)$  y el ángulo  $\theta(t)$ .

Si se elige como salida el ángulo  $\theta(t)$ , entonces la matriz  $C$  será:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta nueva matriz es necesario verificar que el sistema es observable. En el capítulo 3 se definió la matriz de observabilidad como:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \end{bmatrix}$$

pero ahora :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

realizando operaciones:

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \end{bmatrix};$$

$$CA^3 = \begin{bmatrix} 0 & -467.2982 & -124.9335 & 23.4325 \end{bmatrix},$$

se obtiene la nueva *Matriz de Observabilidad*:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 27.6778 & 23.4325 & 0 \\ 0 & -467.2982 & -124.9335 & 23.4325 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema sea observable es necesario que el rango de la matriz  $N$  sea 4. Usando *MATLAB* obtenemos:

```
>> rank(N)
ans = 3
```

Debido a que el rango de  $N$  es 3, el sistema *no es observable* cuando se elige como salida el ángulo  $\theta(t)$ , lo cual conlleva la imposibilidad de *diseñar el observador*.

La otra salida que podemos seleccionar es la posición, entonces la matriz  $C$  será:

$$C = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 ]$$

dando lugar a:

$$CA = [ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ]$$

$$CA^2 = [ 0 \ -16.8835 \ -4.5138 \ 0 ]$$

$$CA^3 = [ 0 \ 285.0519 \ 76.2094 \ -4.5138 ]$$

Así:

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5138 & 0 \\ 0 & 285.0519 & 76.2094 & -4.5138 \end{bmatrix}$$

y usando *MATLAB*:

```
>> rank(N)
ans=4
```

Por lo tanto, cuando seleccionamos como salida la posición, el sistema cumple con la propiedad de *Observabilidad*. Entonces usaremos esta última matriz  $C$  para calcular el observador.

El problema de diseñar un observador de orden completo se convierte en el de determinar la matriz de ganancia del observador  $K_e$ , de modo que la dinámica del error sea asintóticamente estable, con una velocidad de respuesta adecuada. Por lo tanto, el diseño del observador de orden completo consiste en determinar una matriz adecuada  $K_e$ , para que  $A - K_e C$  tenga los valores propios deseados. Dado que los valores propios de  $A - K_e C$  y de  $A^T - C^T K_e^T$  son los mismos, el problema de diseñar un observador no es otra cosa que un problema clásico de Ubicación de Polos, en el cual se busca una matriz  $K_e^T$  tal que los valores propios de  $A^T - C^T K_e^T$  sean los deseados. La observabilidad del par  $(A, C)$  implica la controlabilidad del par  $(A^T, C^T)$ .

### 5.4.1 Método Analítico

En el Capítulo 3 y al iniciar la sección se demostró que el sistema es *Observable*, esto significa que cada estado  $x(t_0)$  se puede determinar a partir de la observación de  $y(t)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

En nuestro caso lo que pretendemos es:

$$\bar{x}(t) \approx x(t),$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \\ \bar{\theta}(t) \\ \dot{\bar{\theta}}(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix},$$

donde:

$\bar{x}(t)$ : es el estado observado

$x(t)$ : es el estado real

Ya que el sistema es observable se puede encontrar un observador de estado tal que:

$$|sI - (A - K_e C)| = \Delta_d(s),$$

donde  $\Delta_d(s)$  es un polinomio mónico<sup>1</sup> de grado igual al número de líneas (o de columnas), de la matriz  $A$ . Las raíces del polinomio característico  $|sI - (A - K_e C)|$  son los valores propios de la matriz  $(A - K_e C)$ .

Además,  $|sI - (A - K_e C)|$  tiene como raíces a los polos del sistema observado:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Br(t) + K_e(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ &= (A - K_e C)\bar{x}(t) + Br(t) + K_e y(t), \end{aligned}$$

el cual tiende a  $\dot{x}(t)$  (a partir de cualquier condición inicial), si todas las raíces de  $|sI - (A - K_e C)|$  tienen parte real negativa, es decir si el sistema es *Estable*.

Por lo tanto para llevar el sistema al estado  $x(t)$  se tiene que encontrar una matriz  $K_e$  tal que las raíces de  $|sI - (A - K_e C)|$  tengan parte real negativa. Como se mencionó anteriormente, se busca entonces la matriz  $K_e^T$  tal que los valores propios de  $A^T - C^T K_e^T$  tengan todos parte real negativa

<sup>1</sup>Un Polinomio Mónico es aquel cuyo coeficiente del término "s" de mayor grado es igual a 1.

## DISEÑO

Si el sistema en lazo abierto es observable, siempre se puede hallar una *Transformación de Similitud*  $T$ , tal que lleve al sistema a la así llamada *Forma Compañera*, en la cual la tarea de síntesis del observador se ve facilitada.

Ya que se tienen 4 estados,  $T$  tendrá la forma siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix},$$

donde  $t_{11}$  es una matriz columna de  $4 \times 1$ .

Se obtiene ahora el polinomio característico del sistema en lazo abierto:

$$\alpha(s) = [sI - A],$$

es decir:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= s^4 - (a_1 + a_2s + a_3s^2 + a_4s^3) \\ &= s^4 - a_4s^3 - a_3s^2 - a_2s - a_1. \end{aligned}$$

Para el Péndulo Invertido:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{gK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m}$$

$$a_3 = \frac{gM + gm}{Ml}$$

$$a_4 = -\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m}$$

Se definen ahora los polinomios  $\alpha_i(s)$  como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_o(s) = \alpha(s) \\ s\alpha_i(s) = \alpha_{i-1}(s) + a_i \end{array} \right\}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } 4.$$

Entonces:

$$\alpha_o(s) = s^4 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s^3 - \frac{gM + gm}{Ml} \cdot s^2 - \frac{gK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s;$$

$$\alpha_1(s) = s^3 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s^2 - \frac{gM + gm}{Ml} \cdot s - \frac{gK_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m};$$

$$\alpha_2(s) = s^2 + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \cdot s - \frac{gM + gm}{Ml};$$

$$\alpha_3(s) = s + \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m}$$

y:

$$\alpha_4(s) = 1.$$

Definiendo las columnas de  $T$ ,  $t_{1i}$ , como:

$$t_{1i} = \alpha_i(A^T)C^T.$$

donde:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} & 0 & \frac{K_m^2 K_g^2}{r^2 M R_m} \\ 0 & \frac{mg}{M} & 0 & \frac{g(M+m)}{rM} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$t_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{gK_m K_g}{rM R_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$t_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{gK_m K_g}{rM R_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$t_{13} = \begin{bmatrix} \frac{K_m K_g}{rM R_m} \\ 0 \\ -\frac{K_m K_g}{rM R_m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y:

$$t_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m K_g}{rM R_m} \\ 0 \\ -\frac{K_m K_g}{rM R_m} \end{bmatrix}$$

Consecuentemente:

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{qK_m K_d}{rMI R_m} & 0 & \frac{K_m K_d}{rMI R_m} & 0 \\ 0 & -\frac{qK_m K_d}{rMI R_m} & 0 & \frac{K_m K_d}{rMI R_m} \\ 0 & 0 & -\frac{K_m K_d}{rMI R_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_m K_d}{rMI R_m} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces el par transformado:

$$\begin{cases} (A^T)' = T^{-1} A^T T \\ (C^T)' = T^{-1} C^T \end{cases}$$

Ahora bien, se desean colocar los polos de  $A^T - C^T K_e^T$  en  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  (todos con parte real negativa), es decir se busca  $K_e^T$  tal que:

$$\left| sI - ((A^T)' + (C^T)' K_e^T) \right| = (s - P_1)(s - P_2)(s - P_3)(s - P_4)$$

Si se definen  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  y  $\hat{a}_4$  como los coeficientes del polinomio característico deseado, es decir:

$$\begin{aligned} \left| sI - ((A^T)' + (C^T)' K_e^T) \right| &= s^4 - (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 s + \hat{a}_3 s^2 + \hat{a}_4 s^3) \\ &= s^4 - \hat{a}_1 s^3 - \hat{a}_3 s^2 - \hat{a}_2 s - \hat{a}_4 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\hat{a}_1 = -P_1 P_2 P_3 P_4$$

$$\hat{a}_2 = P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4$$

$$\hat{a}_3 = -P_1 P_2 - P_1 P_3 - P_1 P_4 - P_2 P_3 - P_2 P_4 - P_3 P_4$$

$$\hat{a}_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Escogiendo entonces como matriz de ganancia para el sistema transformado:

$$\begin{aligned} K_e^T &= \begin{bmatrix} \hat{a}_1 - a_1 & \hat{a}_2 - a_2 & \hat{a}_3 - a_3 & \hat{a}_4 - a_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -P_1 P_2 P_3 P_4 \\ P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4 - \frac{qK_m^2 K_d^2}{r^2 MI R_m} \\ -P_1 P_2 - P_1 P_3 - P_1 P_4 - P_2 P_3 - P_2 P_4 - P_3 P_4 - \frac{qMI + qm}{MI} \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \frac{K_m^2 K_d^2}{r^2 MI R_m} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

la matriz  $A^T - C^T K_e^T$  tendrá como polos a  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  y  $\hat{a}_4$ , los cuales serán también los polos de  $A - K_e C$ , donde:

$$K_e = (K_e^T T^{-1})^T = \begin{bmatrix} K_{e,11} \\ K_{e,21} \\ K_{e,31} \\ K_{e,41} \end{bmatrix}$$

Si los polos del sistema se colocan en  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  entonces la Matriz de Ganancia del Observador se obtiene a partir de la expresión precedente.

Definiendo ahora:

$$P_{1331} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$P_{130r} = P_1P_2 + P_1P_3 + P_1P_4 + P_2P_3 + P_2P_4 + P_3P_4$$

y realizando operaciones se obtiene:

$$k_{r11} = \frac{P_{1211} \epsilon^2 MR_m + K_2^2 K_1^2}{\epsilon^2 MR_m}$$

$$k_{r21} = \frac{P_{130r} \epsilon^2 MR_m - P_{1211} \epsilon^2 MR_m K_2^2 K_1^2 - \epsilon r^3 M^2 R_m^2 - \epsilon m g r^3 MR_m^2 - \epsilon K_2^2 K_1^2}{\epsilon^2 MR_m}$$

$$k_{r31} = \frac{(P_1 P_2 P_3 + P_1 P_2 P_4 + P_1 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_4) \epsilon^2 MR_m - P_{1211} \epsilon r^2 M^2 R_m - P_{1211} \epsilon m g r^2 MR_m - \epsilon m g K_2^2 K_1^2}{\epsilon^2 MR_m}$$

$$k_{r41} = \frac{P_1 P_2 P_3 P_4 \epsilon^2 MR_m + P_{130r} \epsilon r^3 M^2 R_m^2 - \epsilon m g r^3 M^2 R_m^2 + P_{1211} \epsilon m g r^2 MR_m K_2^2 K_1^2 + \epsilon r^2 \epsilon^3 M^3 R_m^2 + 2 \epsilon m g^2 \epsilon^3 M^2 R_m^2 - \epsilon m^2 g^2 \epsilon^3 MR_m^2 - \epsilon m g K_2^2 K_1^2}{\epsilon m g r^3 M^2 R_m^2}$$

En *MATLAB* este proceso se realiza con el programa *observa* que se encuentra en el apéndice. Por ejemplo, si se quieren colocar todos los polos del observador en -5, se obtienen los resultados mostrados en la figura (5.1).

```

MATLAB Command Window
File Edit Options Windows Help
» observa
introduce POLOS del OBSERVADOR

polo 1=-5

polo 2=-5

polo 3=-5

polo 4=-5
la matriz Ke del observador es:
    3.1165
   120.8148
  -186.9176
 -952.5372
  
```

Figura 5.1: Ejecución del Programa "observa"

## Capítulo 6

# SIMULACIÓN DEL ESQUEMA DE CONTROL

### 6.1 Introducción

En este capítulo se simula el esquema de control tratado a lo largo del presente trabajo. Se iniciará con una *Introducción* donde se discentirá brevemente el surgimiento de la simulación y la importancia de la misma. En la *Segunda Sección (Diagrama de Bloques)* se definen los diagramas a bloques usados en los sistemas de control, así como el paquete de cómputo (SIMULINK) utilizado aquí para simular el Péndulo Invertido y el controlador. En dicha sección también se muestran y se definen los bloques que se usaran en los diagramas y en sus subsecciones se presentan todos los diagramas de bloques considerados, sus características y las ecuaciones que los definen. La última sección (*Simulación*) está dedicada exclusivamente a un caso particular de la simulación, es decir, se simula un sólo diagrama, pero este proceso se puede usar para simular cualquier otro.

La información presentada a continuación está basada en lo expuesto en [3, Cross].

Con el advenimiento de la computadora digital a principios de la década de los 50's, se han desarrollado una gran cantidad de herramientas analíticas que han tenido un profundo impacto en el campo científico. Una de estas herramientas es precisamente la *SIMULACIÓN*, cuyos usos y aplicaciones se han extendido significativamente en los últimos años. Así pues, es muy común encontrar en la actualidad aplicaciones de simulación en áreas tales como la biología, la química, la ingeniería, la economía, los sistemas de inventarios, análisis y evaluación de inversiones, etc.

Aunque la construcción de modelos arranca desde el Renacimiento, el uso moderno de la palabra *Simulación* data de 1940, cuando los científicos Von Neuman y Ulam que trabajaron en el proyecto Monte Carlo durante la II Guerra Mundial, resolvieron problemas de reacciones nucleares cuya solución experimental sería muy cara y el análisis matemático demasiado complicado.

H. Maisel y G. Gnagnoli definen Simulación como:

*Simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos periodos de tiempo.*

## 6.2 Diagrama de Bloques

Lo que sigue se basa en lo expuesto en [1, Ogata, y [6, Simulink].

Un Sistema de Control está constituido de diversos componentes, cuya función, en ingeniería de control, se acostumbra representar por medio de los así llamados *Diagramas de Bloques*.

El *Diagrama de Bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de las señales. Tal diagrama indica las interrelaciones que existen entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática paramétrica abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de señales del sistema real.

En un diagrama de bloques, todas las variables del sistema se enlazan entre sí a través de bloques funcionales. El bloque funcional, o simplemente *bloque*, es un símbolo de la operación matemática que el bloque produce a la salida, sobre la señal que tiene a la entrada. Sobre los bloques correspondientes se colocan generalmente las *funciones de transferencia* de los componentes. Los bloques están conectados por flechas para indicar la dirección del flujo de señales. La señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas. De este modo, un Diagrama de Bloques de un sistema de control presenta explícitamente una propiedad o característica unilateral.

Las ventajas de la representación del diagrama de bloques de un sistema consiste en que es fácil formar el diagrama global de todo el sistema colocando simplemente los bloques de sus componentes, de acuerdo con el flujo de señales, y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al comportamiento general de todo el sistema.

En general, el funcionamiento de un sistema se puede ver más fácilmente examinando el diagrama de bloques que analizando el sistema físico en sí. Un diagrama de bloques contiene información respecto al comportamiento dinámico, pero no contiene ninguna información acerca de la constitución física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes sin relación alguna entre sí, pueden estar representados por el mismo diagrama de bloques.

Debe notarse que en un diagrama de bloques no aparece representada la fuente principal de energía y, por lo tanto, el diagrama de bloques de un sistema no es único. Se pueden dibujar diversos diagramas de bloques diferentes de un sistema, según el punto de vista del análisis.

La simulación de nuestro sistema Péndulo Invertido se realiza en SIMULINK. La biblioteca principal se muestra en la Figura (6.1).

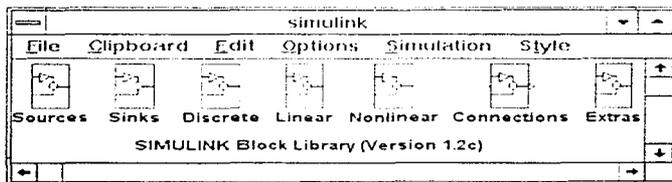


Figura 6.1: Biblioteca Principal de "Simulink".

Los bloques utilizados en nuestro diagrama se obtienen de las bibliotecas secundarias, mostradas a continuación, donde la etiqueta superior indica su nombre. Únicamente se explican los bloques que se utilizan en el esquema de control aquí tratado.

### Connections Library



Figura 6.2: Multiplexor

*Multiplexor:* Las entradas se identifican como  $u[1]$ ,  $u[2]$  y  $u[3]$  en orden descendente respectivamente para ser usadas en un bloque de función. El número de entradas se puede variar de acuerdo al número deseado (Ver Figura (6.2)).

### Nonlinear Library

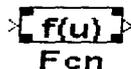


Figura 6.3: Función

*Función:* Este bloque, generalmente se coloca a la salida de los multiplexores para indicar como son afectadas las señales de entrada de los mismos (Ver Figura (6.3)).

*Integrador:* En la salida de este bloque se obtiene la señal de entrada integrada. Debe introducirse la condición inicial (por default igual a cero) requerida (Ver Figura (6.4)).

*Workspace:* Es utilizado para graficar los resultados en MATLAB (Ver Figura (6.5)).

A continuación se muestran los diagramas usados para la simulación. Todos están formados por los bloques explicados anteriormente.



Figura 6.4: Integrador



Figura 6.5: Workspace

### 6.2.1 Sistema Lineal con Controlador

El Sistema Lineal está formado por las funciones:

- 1) f\*X" cuya expresión es:

$$\dot{x}(t) = a_{22} \cdot x(t) + a_{23} \cdot \theta(t) + b_{21} \cdot v(t)$$

- 2) f\*O" que tiene la expresión:

$$\dot{\theta}(t) = a_{42} \cdot x(t) + a_{43} \cdot \theta(t) + b_{41} \cdot v(t)$$

Esta expresiones corresponden a las ecuaciones obtenidas en el capítulo II.

Donde  $\dot{x}(t)$  pasa por dos integradores (Ver Figura (6.6)). Después de pasar por el primer integrador se obtiene  $x(t)$ . Si esta señal se introduce nuevamente en otro integrador se obtiene finalmente la posición  $x(t)$ . El bloque *workspace* (posición) grafica en MATLAB los datos, es decir, cómo varía la posición para ciertas condiciones iniciales. Al igual que el bloque  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$  pasa por dos integradores para obtener la posición angular  $\theta(t)$  y entra al *Workspace*.

Todos los estados son retroalimentados de manera directa por medio del controlador que está formado por la función *Fcn*. Como  $v(t) = -Kx(t)$ , entonces:

$$Fcn = v(t) = -K_{11} \cdot x(t) - K_{12} \cdot \dot{x}(t) - K_{13} \cdot \theta(t) - K_{14} \cdot \dot{\theta}(t)$$

donde  $K_{1j}$  son los elementos de la matriz de control  $K_1$ .

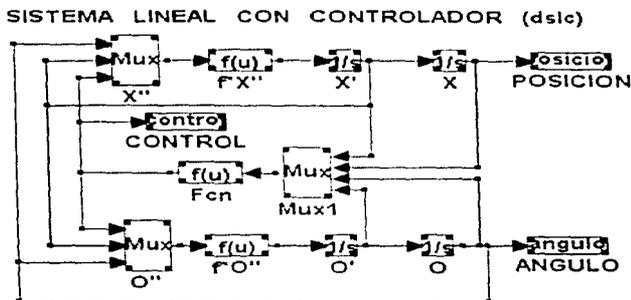


Figura 6.6: Diagrama del Sistema Lineal con Controlador

### 6.2.2 Sistema Lineal con Controlador y Observador

Este diagrama es el mismo que el sistema lineal con controlador (Ver Figura (6.7)). Sólo se agregó el observador debido a que no todos los estados en la realidad están disponibles para retroalimentación directa. En el Capítulo V se dió la ecuación para el observador:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bv(t) + K_o(y(t) - C\bar{x}(t)) \quad (6.1)$$

Sabemos que la salida que se está midiendo directamente del sistema es  $x(t)$ , por lo cual  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$  Entonces:

$$y(t) = Cx(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = x(t)$$

$$C\bar{x}(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \\ \bar{\theta}(t) \\ \dot{\bar{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \bar{x}(t)$$

Sustituyendo estas expresiones en (6.1) se obtiene:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bv(t) + K_o(x(t) - \bar{x}(t))$$

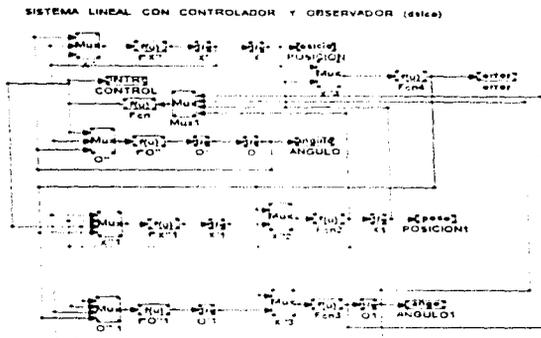


Figura 6.7: Diagrama del Sistema Lineal con Controlador y Observador

El error se definió como  $e(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$ , entonces sustituyendo en la expresión anterior se obtiene finalmente:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bv(t) + K_e \cdot e(t)$$

Sustituyendo  $A$ ,  $B$  y  $K_e$  en esta última expresión se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) \\ \hat{\theta}(t) \\ \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} K_{e11} \\ K_{e21} \\ K_{e31} \\ K_{e41} \end{bmatrix} \cdot e(t)$$

en forma desarrollada y en base al diagrama a bloques se tiene:

$$Fcn2 = \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + K_{e11} \cdot e(t)$$

$$f^*X''1 = \dot{\hat{x}}(t) = a_{22} \cdot \hat{x}(t) + a_{23} \cdot \hat{\theta}(t) + b_{21} \cdot v(t) + K_{e21} \cdot e(t)$$

$$Fcn3 = \dot{\hat{\theta}}(t) = \hat{\theta}(t) + K_{e31} \cdot e(t)$$

$$f^*O''1 = \dot{\hat{\theta}}(t) = a_{42} \cdot \hat{x}(t) + a_{43} \cdot \hat{\theta} + b_{41} \cdot v(t) + K_{e41} \cdot e(t)$$

### 6.2.3 Sistema No Lineal con Controlador

Este sistema es el mismo que el sistema lineal con controlador, unicamente cambian las funciones  $f^*X''$  y  $f^*O''$  (Ver Figura (6.8)).

Para el Sistema No Lineal se tienen las siguientes funciones :

1) f°X":

$$\ddot{x}(t) = \frac{a_{12} \cdot M}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot x(t) + \frac{m l \sin(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot (\theta(t))^2 + \frac{b_{21} \cdot M}{M + m - m \cos^2(\theta(t))} \cdot v(t) + \frac{a_{21} \cdot M \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{M + m - m \cos^2(\theta(t))}$$

2) f°O":

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{a_{12} \cdot M \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot x(t) + \frac{m \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot (\theta(t))^2 - \frac{b_{11} \cdot M \cos(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m} \cdot v(t) - \frac{a_{11} \cdot M \sin(\theta(t))}{m \cos^2(\theta(t)) - M - m}$$

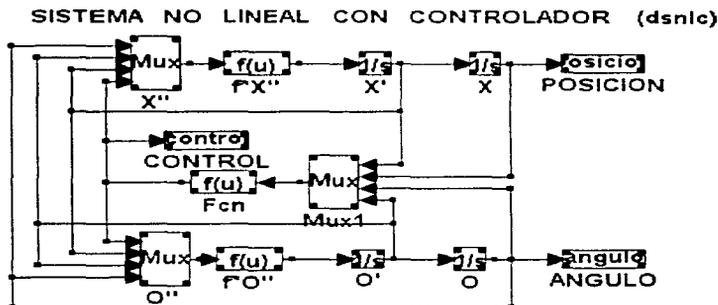


Figura 6.8: Diagrama del Sistema No Lineal con Controlador

### 6.2.4 Sistema No Lineal con Controlador y Observador

El diagrama a bloques se presenta en la Figura (6.9).

Este sistema es similar al sistema lineal con controlador y observador, únicamente cambian las funciones  $f^{\circ}X''$  y  $f^{\circ}O''$ .

## 6.3 Simulación

A continuación se muestra un ejemplo para realizar la simulación. Si se quiere simular el sistema lineal con controlador se realizan los siguientes pasos:

- 1) Entrar a *MATLAB* y ejecutar los programas *control* que se indicaron en los Capítulos 4 y 5, respectivamente. Posteriormente entrar a *SIMULINK*.

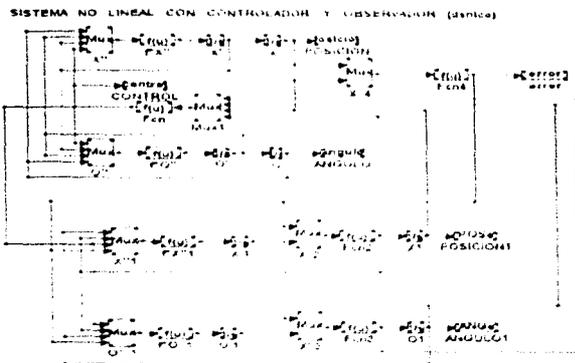


Figura 6.9: Diagrama del Sistema No Lineal con Controlador y Observador.

- 3) Entrar en la ventana del diagrama a bloques (Figura (6.10)).
- 4) Establecer las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades con doble click en el integrador correspondiente (Ver Figura (6.11)).
- 5) Seleccionar la opción *Simulation* del menú principal. En este momento se genera un menú secundario donde se puede seleccionar *start* o *parameters*. Generalmente no es necesario modificar los parámetros. Por lo tanto al seleccionar *start* se iniciará la simulación. Un sonido beep indicará el momento en que el sistema ha terminado de simular. También se puede seleccionar previamente la opción *simulation* del menú principal y aparece *start*, entonces la simulación ha terminado.
- 4) Después de realizar la simulación se debe regresar a MATLAB para trazar las gráficas. Si se desea graficar la posición se sigue el siguiente proceso (Ver Figura (6.12)).

```
>> plot(position)
```

El proceso precedente fue aplicado a los diferentes esquemas de control descritos anteriormente. Los diagramas siguientes muestran los resultados de la simulación de cada uno de ellos.

### 6.3.1 Sistema Lineal con Controlador

Posición de los polos del controlador:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = -0.5$$

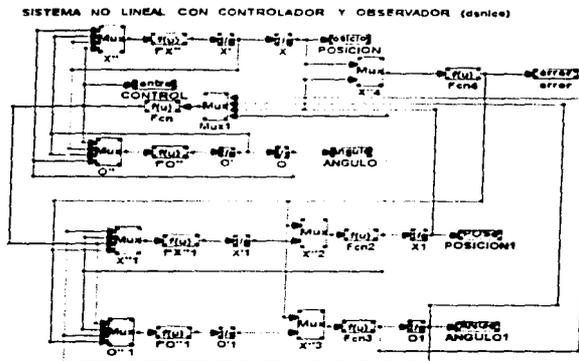


Figura 6.9: Diagrama del Sistema No Lineal con Controlador y Observador.

- 3) Entrar en la ventana del diagrama a bloques (Figura (6.10)).
- 4) Establecer las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades con doble click en el integrador correspondiente (Ver Figura (6.11)).
- 5) Seleccionar la opción *Simulation* del menú principal. En este momento se genera un menú secundario donde se puede seleccionar *start* o *parameters*. Generalmente no es necesario modificar los parámetros. Por lo tanto al seleccionar *start* se iniciará la simulación. Un sonido (beep) indicará el momento en que el sistema ha terminado de simular. También se puede seleccionar nuevamente la opción *simulation* del menú principal, si aparece *start*, entonces la simulación ha terminado.
- 4) Después de realizar la simulación se debe regresar a MATLAB para trazar las gráficas. Si se desea graficar la posición se sigue el siguiente proceso (Ver Figura (6.12)):

```
>>plot(posicion)
```

El proceso precedente fue aplicado a los diferentes esquemas de control descritos anteriormente. Los diagramas siguientes muestran los resultados de la simulación de cada uno de ellos.

### 6.3.1 Sistema Lineal con Controlador

Posición de los polos del controlador

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = -0.5$$

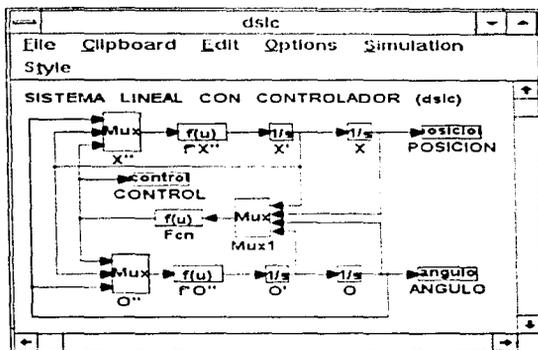


Figura 6.10: Ventana del Diagrama a Bloques para el "dslc"

Condiciones iniciales

$$x(0) = 0.1; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{30}$$

Las gráficas para la posición lineal y angular se muestran en la Figura (6.13).

### 6.3.2 Sistema Lineal con Controlador y Observador

Posición de los polos del controlador

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = -0.5$$

Posición de los polos del observador

$$P_1 = -5 + 5i; P_2 = -5 - 5i; P_3 = -4 + 5i; P_4 = -4 - 5i$$

Condiciones iniciales

Para el sistema:

$$x(0) = 0.1; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{30}$$

Para el observador:

$$\bar{x}(0) = 0.1; \quad \bar{\theta}(0) = 0$$

Las gráficas para las posiciones lineal y angular se muestran en la Figura (6.14).

Para este esquema de control se obtuvieron la Acción de Control y el Error de Observación (diferencia entre la salida del sistema y la salida del observador), que se muestran en Figura (6.15).

Integrator	
Block name: X	<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>
Block type: Integrator	
Integrates input starting with initial value.	
Initial value:	
<input type="text" value="0.25"/>	

Figura 6.11: Condiciones iniciales para el Integrador

### 6.3.3 Sistema No Lineal con Controlador

Posición de los polos del controlador

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = -0.5$$

Condiciones iniciales

$$x(0) = 0.1; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{30}$$

Las gráficas para las posiciones lineal y angular se muestran en la Fig (6.16).

### 6.3.4 Sistema No Lineal con Controlador y Observador

Posición de los polos del controlador

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = -0.5$$

Posición de los polos del observador

$$P_1 = -5 + 5i; P_2 = -5 - 5i; P_3 = -4 + 5i; P_4 = -4 - 5i$$

Condiciones iniciales

Para el sistema:

$$x(0) = 0; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{180}$$

Para el observador:

$$\bar{x}(0) = 0; \quad \bar{\theta}(0) = 0$$

Las gráficas correspondientes a las posiciones lineal y angular se muestran en la Figura (6.17).

Para este esquema de control se obtuvieron la Acción de Control y el Error de Observación que se muestran en la figura (6.18).

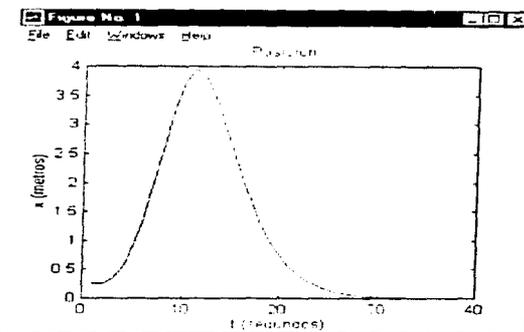


Figura 6.12: Evolucion de la Posicion del carro

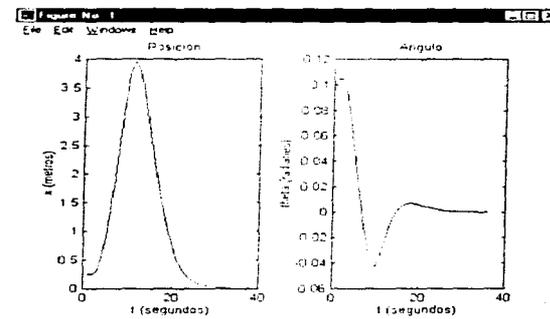


Figura 6.13: Posiciones lineal y angular del Pendulo Invertido (Sistema Lineal con Controlador)

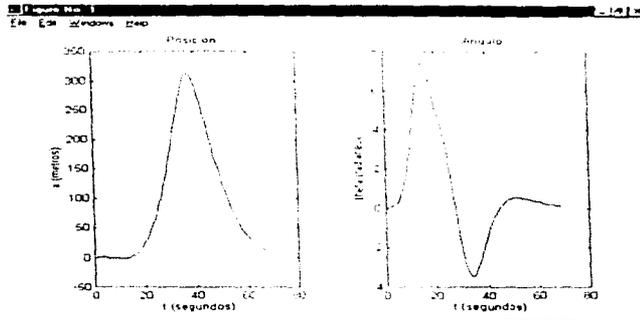


Figura 6.14: Posiciones lineal y angular del Pendulo Invertido (Sistema Lineal con Controlador y Observador)

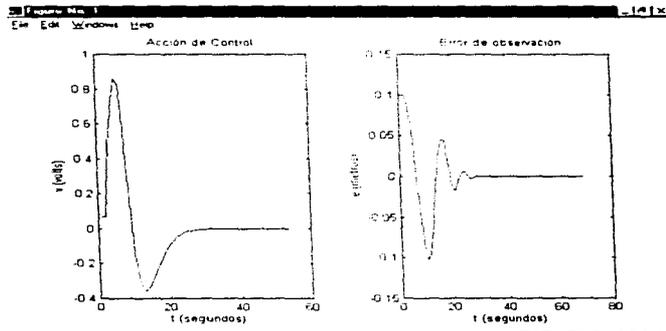


Figura 6.15: Acción de Control y Error de Observación (Sistema Lineal con Controlador y Observador)

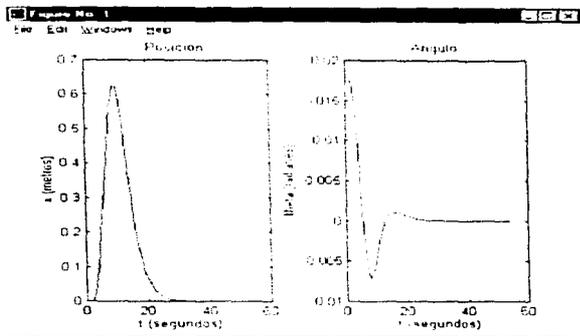


Figura 6.16: Posiciones lineal y angular del Pendulo Invertido (Sistema No Lineal con Controlador)

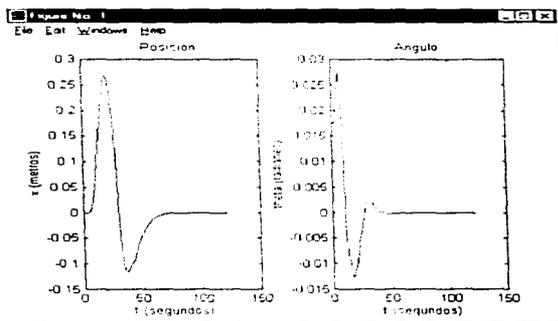


Figura 6.17: Posiciones lineal y angular del Pendulo Invertido (Sistema No Lineal con Controlador y Observador)

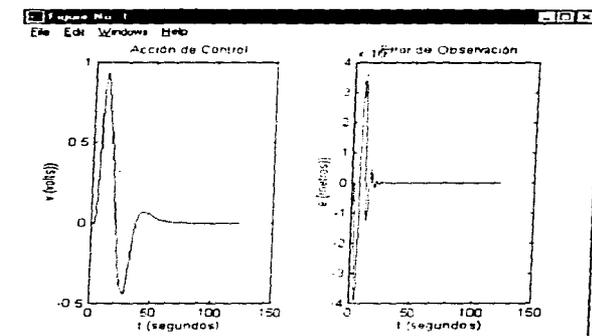


Figura 6.18: Acción de Control y Error de Observación (Sistema No Lineal con Controlador y Observador)

# Conclusiones

En esta tesis se ha ilustrado el manejo de los conceptos básicos de la Teoría de Control Moderno en la síntesis de un esquema de control para un péndulo invertido. El esquema obtenido realiza la retroalimentación de estados observados, para la estabilización del sistema, manteniendo de esta manera al péndulo invertido en posición vertical. El análisis de las propiedades estructurales del sistema (controlabilidad, observabilidad y estabilizabilidad), permitió llegar a la conclusión de que el controlador era realizable. Dado que no todos los estados del sistema son medibles, en particular sólo se tiene acceso a las posiciones angular y lineal del péndulo, se procedió al diseño de un observador de estado completo, que haciendo uso de la información proporcionada por la medición de la posición horizontal del péndulo (desplazamiento del carro), reconstruye todo el estado, a saber las posiciones y velocidades angulares y lineales del péndulo invertido. Los estados observados son entonces proporcionados a un controlador que los retroalimenta a la entrada del sistema, siendo ésta el voltaje de alimentación al motor que desplaza el carro. El controlador obtenido, basado en la clásica técnica de asignación de polos del sistema retroalimentado, se probó exitosamente en el sistema no lineal que constituye el péndulo invertido. Cabe mencionar que el controlador se diseñó a partir de un modelo linealizado del sistema en torno al punto de equilibrio inestable.

Para el análisis y la síntesis del esquema de control se utilizaron herramientas computacionales modernas. En particular, Matlab mostró su gran utilidad para el análisis y la síntesis de controladores basados en la Teoría de Control Moderno. El esquema de control fue evaluado por medio de simulaciones soportadas en Simulink. Se concluye de esta manera que la Teoría de Control Moderno constituye un soporte teórico esencial para la concepción de controladores, permitiendo un diseño eficiente basado en el conocimiento profundo de las características estructurales del sistema bajo estudio. Como puede apreciarse en este trabajo, la Teoría de Control Moderno permite el desarrollo de técnicas sistemáticas de diseño, que se contraponen a los antiguos métodos de prueba y error.

# Bibliografía

- [1] Ogata Katsuhiko, INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA. Prentice Hall, México 1993
- [2] Rodríguez Ramírez Francisco J., DINÁMICA DE SISTEMAS FÍSICOS. Trillas, México 1989
- [3] Coss Bú Raúl, SIMULACION. Limusa, México 1986
- [4] Dorf Richard C., SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL. Fondo Educativo Interamericano
- [5] The MATH WORKS Inc., MATLAB 4.0. User's Guide. USA 1993
- [6] The MATH WORKS Inc., SIMULINK, User's Guide. USA

# Apéndice A

## PARÁMETROS

Los valores físicos de los parámetros que intervienen en el modelado y análisis del Péndulo Invertido se muestran a continuación:

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	VALOR	UNIDADES
$m$	Masa del péndulo	0.21	$Kg$
$M$	Masa del carro	0.455	$Kg$
$l$	Longitud del péndulo	0.61	$m$
$R_m$	Resistencia de Armadura	2.6	$\Omega$
$K_m$	Cte. de torque del motor	0.00767	$N \cdot m/A$
$K_g$	Cte. de transformación de engranes	3.7	
$r$	radio del engrane de salida	0.0127/2	$m$
$g$	Cte. de gravedad (Cd.de México)	9.78	$m/s^2$

Es importante mencionar que dichos valores corresponden únicamente a un Péndulo Invertido en particular<sup>1</sup>, pero esto no impide que el presente trabajo esté limitado. Toda la teoría es la misma para analizar cualquier sistema de control, en particular para un Péndulo Invertido, donde únicamente se pueden cambiar los valores físicos de los parámetros que están en el programa *param*. El análisis y diseño restante se efectúa igual.

La nomenclatura adicional que interviene en todo el análisis (especialmente en el Capítulo 2) se muestra en la siguiente tabla.

---

<sup>1</sup>El Péndulo Invertido que estamos analizando se encuentra en el Laboratorio de la Sección de Control Automático del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).

SIMBOLO	SIGNIFICADO	UNIDADES
$F$	Fuerza aplicada al carro	$N$
$x$	Posición del carro	$m$
$\dot{x}$	Velocidad del carro	$m/s$
$\ddot{x}$	Aceleración del carro	$m/s^2$
$\theta$	Posición (ángulo) del péndulo	$rad$
$\dot{\theta}$	Velocidad angular del péndulo	$rad/s$
$\ddot{\theta}$	Aceleración angular del péndulo	$rad/s^2$
$v$	Voltaje aplicado al motor	$vols$
$I$	Corriente de armadura	$Amp$
$\omega_m$	Velocidad angular del motor	$RPM$
$T_m$	Torque del motor	$N \cdot m$
$T$	Torque de salida (del carro)	$N \cdot m$

# Apéndice B

## MATLAB

Este apéndice se obtuvo del texto [5, Matlab]. Si se requiere mayor información acudir a dicha obra.

### B.1 Introducción

MATLAB es un paquete de cómputo desarrollado para realizar cálculos numéricos y visualizarlos. Incluye análisis numérico, operaciones con matrices, procesamiento de señales, gráficas y programación.

Su nombre proviene de *MATRIX LABORATORY*. Fue originalmente escrito para facilitar la manipulación de matrices en proyectos representados en el Espacio de Estados.

Es un sistema interactivo donde no se requiere especificar la dimensión de la matriz para introducir los datos. Cualquier problema se puede resolver realizando diagramas en un lenguaje que es tan común como Fortran, Basic o C.

MATLAB fue desarrollado durante un largo período de años para darle muchos usos. Se puede trabajar con álgebra lineal y otras áreas. Es muy usado para realizar prácticas de ingeniería y resolver problemas matemáticos. Los usos típicos incluyen cálculos numéricos de propósito general, desarrollo de prototipo de algoritmos y problemas de propósitos especiales que incluyen matrices tal como la teoría de *Control Automático*, estática y procesamiento digital de señales.

MATLAB también permite familiarizarse con aplicaciones específicas a través de *TOOLBOXES* que son un conjunto de herramientas que amplían las aplicaciones a casos muy particulares. Las áreas donde actualmente se aplican incluyen procesamiento de señales, diseño de sistemas de control, simulación de sistemas dinámicos, identificación de sistemas, redes neurales y otros.

Probablemente lo más importante de MATLAB es su generalidad y adaptabilidad. Esto ha permitido la inclusión de aplicaciones desarrolladas por otras personas. En los primeros años de MATLAB muchos científicos, matemáticos e ingenieros desarrollaron nuevas e interesantes aplicaciones que se pueden ejecutar en una sola línea a través de una instrucción apropiada.

## B.2 Sistema Requerido

MATLAB requiere para su instalación de 386 extendido en cualquier IBM o 100 % compatible con Intel 386 (386SX, 386DX), 486 o Pentium con procesador, Microsoft Windows 3.1

En adición a Microsoft Windows 3.1, esta versión requiere como mínimo:

1. Coprocesador matemático
2. Disco de alta densidad 3 1/2"
3. Mouse
4. Monitor
5. 8 MB de espacio libre en el disco duro (10 MB para MATLAB for SIMULINK)
6. 4 MB de memoria extendida (8 MB o más para graficar en 3 dimensiones). Además se recomienda:
  - a) Memoria adicional (8 MB)
  - b) Adaptador gráfico de 8 bits
  - c) Tarjeta de acelerador gráfico
  - d) Impresora
  - e) Tarjeta de sonido

## B.3 Instalación

Primero se debe estar seguro de que Windows está instalado. La instalación de MATLAB se realiza con el siguiente proceso:

- 1) Entrar a Windows
- 2) Introducir el primer disco de MATLAB en el drive
- 3) Visualizar el disco en el Administrador de Archivos. Seleccionar setup con doble click
- 4) En el prompt directorio, introducir el nombre del directorio donde se quiere instalar MATLAB. Por default es C:\MATLAB.
- 5) El programa setup preguntará si requieres instalación completa o especificada. Si no hay suficiente memoria para la instalación completa deberás indicar instalación específica.
- 6) A partir de este momento, la instalación se realiza de manera automática descomprimiendo el disco. Durante la instalación, la información es mostrada por una línea que indica el porcentaje instalado en el disco duro. Deberán introducirse los discos cuando el sistema los requiera y en el orden indicado.
- 7) Después de terminar la instalación, el programa pregunta si deseas instalar *TOOLBOXES* opcionales. Si este es el caso, has click sobre el botón SI. Entonces inserta el primer disco de *TOOLBOX* en el drive y has click en OK. Repite este proceso para cada *TOOLBOX* que quieras instalar.
- 8) Cuando termines de instalar los *TOOLBOXES* opcionales has click sobre NO para terminar el proceso. El programa setup crea un nuevo grupo de programas en el Administrador de Programas Windows que contiene los iconos de MATLAB.

## B.4 Consideraciones

MATLAB es un medio rico y poderoso, pero depende de la capacidad del hardware. Como resultado de esto, la presentación cuando se ejecuta MATLAB depende de la configuración del software usado. Los siguientes factores son una regla significativa que determina la velocidad de ejecución de MATLAB:

- \* Tipo de procesador
- \* Memoria disponible
- \* Velocidad de acceso en el intercambio de información
- \* Tarjeta de acelerador gráfico

En particular es importante que la computadora cuente con suficiente memoria para resolver cualquier problema usando MATLAB. Como mínimo, MATLAB requiere 4 MB de memoria extendida. Esta cantidad de memoria es suficiente para ejecutar todas las funciones matemáticas y gráficas.

Para uso de nuevas gráficas y funciones, se debe contar con memoria extendida adicional. Generalmente se requiere mucha memoria (8 MB o más) para lo siguiente:

- \* Mapas de imagen y color
- \* Movimiento
- \* Interpolación
- \* Modelos rápidos

Por ejemplo, para mostrar una imagen en color de 640x480x256 usando el workspace MATLAB requiere 2.5 MB de memoria. Cualquier proceso de copiado de imágenes y matrices duplica la memoria requerida.

## B.5 Aplicaciones

Cuando entras a MATLAB se abre una ventana. En ella aparece el prompt `>>` que interpreta las instrucciones escritas.

La introducción de datos se realiza de la siguiente manera:

a) Constantes

```
>>a=6.28
```

```
>>z=3+2*i
```

b) Matrices

Si se desea introducir las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

se realiza lo siguiente:

```
>>A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

```
>>B=[2;4;6]
```

Algunas operaciones que se pueden realizar en MATLAB se muestran a continuación:

1) Matrices

<b>EXPRESIÓN</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
A+B	Suma
A-B	Resta
A*B	Multipliación
A/B	División
A <sup>n</sup>	Potencia
expm(A)	Matriz exponencial
logm(A)	Matriz Logarítmica
sqrtm(A)	Raíz cuadrada
poly(A)	Polinomio característico
det(A)	Determinante
diag(A)	Diagonal
eig(A)	Valores Propios de A
real(A)	Parte real
imag(A)	Parte imaginaria
rank(A)	Rango
eye(n)	Matriz Identidad de nxn
magic(n)	Cuadro mágico de nxn

donde A y B son matrices y n es una constante entera.

## 2) Funciones Trigonométricas

<b>FUNCIÓN</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
sin(a)	Seno
cos(a)	Coseno
tan(a)	Tangente
asin(a)	Arco seno
acos(a)	Arco coseno
atan(a)	Arco tangente
sinh(a)	Seno hiperbólico
cosh(a)	Coseno hiperbólico
tanh(a)	Tangente hiperbólico
asinh(a)	Arco seno hiperbólico
acosh(a)	Arco coseno hiperbólico
atanh(a)	Arco tangente hiperbólico

## 3) Funciones elementales

<b>FUNCIÓN</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
abs(a)	Valor absoluto o magnitud compleja
angle(a)	Angulo de fase
sqrt(a)	Raíz cuadrada
conj(a)	Conjugado complejo
gcd(a)	Máximo común divisor
lcm(a)	Mínimo común múltiplo
exp(a)	Base exponencial e
log(a)	Logaritmo natural
log10(a)	Logaritmo en base 10
fix	Redondea a enteros

## 4) Análisis de datos

<b>EXPRESIÓN</b>	<b>SIGNIFICADO</b>
max	Valor máximo
min	Valor mínimo
mean	Valor promedio
median	Valor medio
std	Desviación estandar
sum	Suma de elementos
prod	Producto de elementos
hist	histograma

## 5) Formato de salida

<b>FORMATO</b>	<b>SALIDA</b>
format short	Hasta 4 decimales
format short e	Hasta 4 decimales con exponente
format long	Hasta 14 decimales
format lon e	Hasta 14 decimales con exponente
format bank	Hasta 2 decimales
format hex	Hexadecimal

## 6) Gráficas

<b>EXPRESIÓN</b>	<b>PRESENTACIÓN</b>
plot	Ambos ejes lineales
loglog	Ambos ejes logarítmicos
semilogx	Escala logarítmica para el eje x
semilogy	Escala logarítmica para el eje y
title	Agrega título a la gráfica
xlabel	Agrega rotulación al eje x
ylabel	Agrega rotulación al eje y
text	Coloca texto en lugar específico
gtext	Coloca texto usando el mouse

## 7) Colores para las gráficas

<b>SIMBOLO</b>	<b>COLOR</b>
y	Amarillo
m	Magenta
c	Azul cielo
r	Rojo
g	Verde
b	Azul
w	Blanco
k	Negro

# Apéndice C

## Simulink

Este apéndice se obtuvo del texto bibliográfico [6]. Para mayor información acudir a dicha obra.

*SIMULINK* es un software especial para simular sistemas dinámicos. Es una extensión de *MATLAB* que incluye muchas características específicas de simulación. Se aplica en dos etapas:

- 1) Definición del modelo
- 2) Análisis del modelo

Una sesión típica se inicia estableciendo un modelo o llamando un modelo previamente definido para, posteriormente, iniciar el análisis. En la práctica, estos dos pasos son frecuentemente realizados iterativamente.

Para facilitar la creación del modelo, *SIMULINK* cuenta con ventanas donde se encuentran los diagramas de bloque. Con estas ventanas, los modelos son creados y editados principalmente con el mouse para facilitar la manipulación de los mismos.

Después de crear el modelo, se puede analizar seleccionando las opciones del menú o a través de comandos en *MATLAB*. Se cuenta con varios algoritmos de simulación para analizar los sistemas y encontrar sus puntos de equilibrio.

La simulación puede ser analizada gráficamente a través de *MATLAB* para observar el desempeño del sistema.

Para trabajar con *SIMULINK* se realiza el siguiente procedimiento:

- 1) Entrar a WINDOW (escribiendo *win*).
- 2) Estando en Window, entrar a *MATLAB* (doble click en el icono correspondiente).
- 3) Estando en *MATLAB*, entrar a *SIMULINK* escribiendo *simulink* para abrir la biblioteca principal de bloques (Ver figura (C.1)).
- 4) Estando en la ventana de *SIMULINK*, seleccionar, dentro del menú principal, la opción *file*.
- 5) Estando en *file* seleccionar *new* si se va a crear un nuevo modelo u *open* si se pretende trabajar con un modelo ya establecido.

Al seleccionar *new* se activa una ventana vacía en la que se puede construir el modelo del sistema. La nueva ventana estará rotulada con *untitled*. Este nombre deberá cambiarse cuando se guarde el programa. Después de que esta ventana ha sido activada se realiza lo siguiente:

- 5.1) Abrir una o más bibliotecas y pasar los bloques que se necesiten a nuestra ventana (manteniendo presionado el botón izquierdo del mouse).
- 5.2) Después de haber colocado los bloques, trazar las líneas para conectarlos entre sí (manteniendo presionado el botón izquierdo del mouse durante el trayecto)(Ver figura (C.2)).

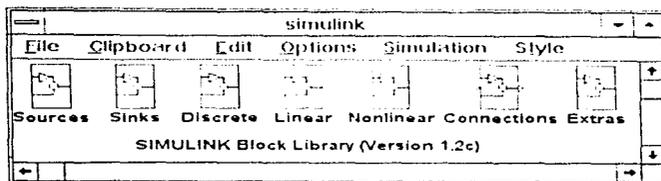


Figura C.1: Simulink (Biblioteca Principal).

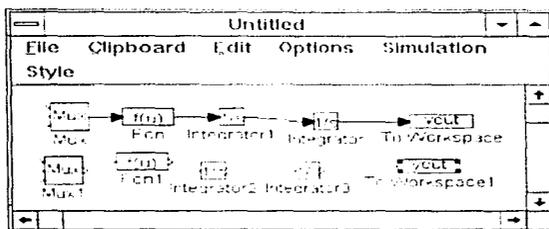


Figura C.2: Ejemplo para trazar el Diagrama a Bloques.

- 5.3) Abrir los bloques (doble click sobre él) y cambiar los parámetros internos.
- 5.4) Guardar la información seleccionando *save* o *save as* desde *file* según sea el caso.
- 6) Realizar la simulación seleccionando *start* desde el menú *simulation*. Cuando la simulación se está realizando, se puede suspender usando *stop*. Para reiniciar se presiona nuevamente *start*.
- 7) Se pueden ajustar los parámetros de simulación seleccionando *parameters* desde el menú *simulation*.

8) Es posible, también, monitorear el comportamiento del sistema con un bloque *scope* (osciloscopio) o usando un *workspace*. Los errores se pueden corregir cambiando las conexiones, agregando o quitando bloques, o cambiando los parámetros de simulación.

Con *SIMULINK* se puede simular cualquier modelo de manera muy sencilla. La presentación del software permite familiarizarse con los bloques disponibles y las herramientas de análisis.

*SIMULINK* utiliza la técnica de diagramas a bloques para representar los sistemas dinámicos. Crear un sistema es semejante a trazar un diagrama a bloques. El trazo de bloques individuales se realiza trasladándolos de una biblioteca donde estos se encuentran.

La biblioteca estandar está organizada en subsistemas y grupos de bloques de acuerdo a su comportamiento. Los bloques pueden ser copiados de cualquier biblioteca y se pueden incluir los de una en otra.

# Apéndice D

## RUTINAS DE CÓMPUTO

A continuación se presentan los programas elaborados en *MATLAB* indispensables para realizar cualquier simulación de nuestro sistema.

El programa *param* es el único que incluye valores numéricos específicos. Por lo tanto, si se pretende analizar un Péndulo con características diferentes, únicamente se modificarán los valores en este programa para adaptarlo a los nuevos requerimientos.

### D.1 Programa *param*

Aquí se incluyen todos los valores físicos de los parámetros del Péndulo Invertido mencionados en el apéndice A y usados en la *INTRODUCCION* y el capítulo 2, tal como se muestra en la Figura (D.1).

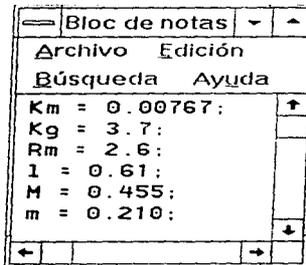


Figura D.1: Programa "Param"

## D.2 Programa *sistema*

En este programa se introducen las matrices  $A$  y  $B$  obtenidas en el capítulo 2 para el sistema linealizado en el Espacio de Estados. La matriz  $C$  se obtuvo en el Capítulo 5. El programa se muestra en la Figura (D.2).

```

Bloc de notas - SISTEMA.M
Archivo Edición Búsqueda Ayuda
a22 = -Km^2*Kg^2/(M*Rm*r^2);
a23 = -m*g/M;
a42 = Km^2*Kg^2/(M*I+Rm*r^2);
a43 = g*(M+m)/(M*I);

b21 = Km*Kg/(M*Rm*r);
b41 = -Km*Kg/(M*I+Rm*r);

A=[0 1 0 0;0 a22 a23 0;0 0 1;0 a42 a43 0];
B=[0;b21;0;b41];
C=[1 0 0 0];
  
```

Figura D.2: Programa "sistema"

## D.3 Programa *control*

Este programa calcula la Matriz de Ganancia del Controlador del Péndulo Invertido de acuerdo al análisis realizado en el capítulo 4. Los datos a introducir son los polos deseados (Ver figura (D.3)).

La primera instrucción ejecuta el programa *param* para obtener los valores físicos de los parámetros. La segunda instrucción indica que deberán introducirse los polos del Controlador. Las siguientes 4 instrucciones se usan para introducir los polos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  respectivamente.

Las instrucciones posteriores calculan los elementos de la Matriz de Control. Las dos últimas instrucciones se usan para mostrar el resultado.

## D.4 Programa *observa*

Aquí se calcula la Matriz de Ganancia del Observador en base al análisis efectuado en el capítulo 5. Al igual que en el Controlador, el diseñador especifica la Ubicación de los Polos (Ver Figura (D.4)).

Si observamos detenidamente el programa *observa* de la Figura (D.4) notaremos que es idéntico al programa *control*. Esto se debe a que los métodos de análisis usados en ambos son similares.

```

param;
disp('introduce POLOS del CONTROLADOR');
P1=input('polo 1-');
P2=input('polo 2-');
P3=input('polo 3-');
P4=input('polo 4-');

K11 = P1*P2*P3*P4/g/Kn/Ky*M+1*Rnr;

K12 = (-P2*P3*P4*Mr^2*Rn+1-P1*P3*P4*Mr^2*Rn+1-...
P1*P2*P4*Mr^2*Rn+1-P1*P2*P3*Mr^2*Rn+1-...
Kn^2*Kg^2*wg)/r/g/Kn/Kg;

K13 = Rnr*(P1*P2*P3*P4*H+1^2+q*P3*P4*H+1-...
g*P2*P4*H+1+q*P2*P3*H+1+q*P1*P4*H+1-...
q*P1*P3*H+1+g*P1*P2*H+1+q^2*M+g^2*M)/g/Kn/Kg;

K14 = -H+1*Rnr*(P2*P3*P4+1*P1*P3*P4+1-...
P1*P2*P4+1*P1*P2*P3+1+q*P4+g*P3-...
g*P2+q*P1)/g/Kn/Kg;
K=[K11 K12 K13 K14];
disp('la matriz K del controlador es:');
disp(K)

```

Figura D.3: Programa "control"

## D.5 Programa busca

Generalmente el cálculo del Controlador y del Observador son independientes entre sí. Sin embargo, al agregarlos en el Diagrama a Bloques, uno de ellos puede provocar la inestabilidad de todo nuestro sistema.

Tratando de evitar este problema se diseñó este programa (Ver Figura (D.6)). Para ejecutarlo es requisito indispensable que primero se ejecute el programa control.

Este programa indica la Ubicación de todos los Polos de acuerdo a los intervalos especificados en el mismo.

La primera instrucción indica la finalidad del programa. La segunda ejecuta el programa *param*. La tercera instrucción permite introducir el incremento. Este deberá ser un número negativo (polos). La cuarta instrucción se usa para introducir el valor final del intervalo (polos). A partir de la quinta instrucción se realizan iteraciones en ciclos anidados iniciando todos con el valor -0.1. Por lo tanto, el intervalo que se usa es:

$$\left[ -0.1 \quad \text{incremento} \quad \text{fin} \right]$$

En las iteraciones se van asignando valores a los polos. En las siguientes instrucciones se calcula el Observador tal como se indicó en el programa *observa*. La instrucción 14 obtiene las matrices *a*, *b*, *c* y *d* para el Diagrama del Sistema No Lineal con Controlador y Observador.

La siguiente instrucción asigna a *pr* la parte real de los valores propios de la matriz *a*. Si todos son números negativos se cumple la instrucción condicional siguiente, mostrando, entonces, los polos P1, P2, P3 y P4. Si uno de los números de *pr* es no negativo entonces

```

Observa Notepad
File Edit Search Help
par=0;
disp('introduce POLUS del QUESIRUADRR');
P1=input('polo 1-');
P2=input('polo 2-');
P3=input('polo 3-');
P4=input('polo 4-');

Ke11 = (P4*r^2+Rn*H+P3*r^2+Rn*H+P2*r^2+Rn*H+...
P1*r^2+Rn*H+Km^2*Kg^2)/r^2/Rn/H;

Ke21 = -(P3+P4*r^4+Rn^2+H^2+1+P2+P4*r^4+Rn^2+H^2+1+...
P2+P3*r^4+Rn^2+H^2+1+P1+P4*r^4+Rn^2+H^2+1+...
P1+P3*r^4+Rn^2+H^2+1+P1+P2*r^4+Rn^2+H^2+1+...
q=r^4+Rn^2+H^2+1+Rn*H+Km^2+Kg^2+1+P4*r^2+Rn*H+...
Kn^2+Kg^2+1+P3*r^2+Rn*H+Km^2+Kg^2+1+P2*r^2+Rn*H+...
Kn^2+Kg^2+1+P1*r^2+Rn*H+Km^2+Kg^2+1)/r^4/Rn^2/H^2/1;

```

Figura D.4: Programa "observa"

no se cumple la instrucción condicional y se ejecuta la instrucción que aparece en la siguiente línea incrementándose el valor de los polos e iniciando nuevamente todo el proceso descrito anteriormente hasta que se cumpla la condición establecida o se terminen las iteraciones.

El número de iteraciones depende del *incremento* y del valor *fin* establecidos. Debe recordarse que ambos deben ser negativos.

```

Matlab - Minitool
File Edit Search Help
Ke31 = -(P2*P3*P4*H^2*r^2*Rn1+P1*P3*P4*H^2*r^2*Rn1+...
P1*P2*P4*H^2*r^2*Rn1+P1*P2*P3*H^2*r^2*Rn1+g*P4*r^2+Rn*H^2+...
g*P4*r^2+Rn*H*g+P3*r^2+Rn*H^2+g*P3*r^2+Rn*H*g+...
g*P2*r^2+Rn*H^2+g*P2*r^2+Rn*H*g+P1*r^2+Rn*H^2+...
g*P1*r^2+Rn*H*g+g*Km^2*Kq^2)/N/r^2/Rn/1/n/g;

Ke41 = (P1*P2*P3*P4*H^3*1^2*r^4*Hn^2+...
q*r^4*Hn^2*H^3*P3*P4*1+q*r^4*Hn^2*H^2*P3*P4*1+...
q*r^4*Hn^2*H^3*P2*P4*1+q*r^4*Hn^2*H^2*P2*P4*1+...
q*r^4*Hn^2*H^3*P2*P3*1+...
q*r^4*Hn^2*H^2*P2*P3*1+q*r^4*Hn^2*H^3*P1*P4*1+...
q*r^4*Hn^2*H^2*P1*P4*1+q*r^4*Hn^2*H^3*P1*P3*1+...
q*r^4*Hn^2*H^2*P1*P3*1+q*r^4*Hn^2*H^3*P1*P2*1+...
2*g^2*r^4*Hn^2*H^2*n*g^2*r^4*Hn^2*H*Hn^2+...
Km^2*Kq^2*g*n*1*P4*r^2+Rn*H*Kn^2*Kq^2*g*n*1*P3*r^2+Rn*H*...
Kn^2*Kq^2*g*n*1*P2*r^2+Rn*H*...
Kn^2*Kq^2*g*n*1*P1*r^2+Rn*H*n*g*Kn^4*Kq^4*1)/g/N/1^2/H^2/r^4/Rn^2;

Ke=[Ke11;Ke21;Ke31;Ke41];
disp('la matriz Ke del observador es:');disp(Ke)

```

Figura D.5: Programa "observa" (continuación).

```

Matlab - Minitool
File Edit Search Help
disp('obtiene los polos del observador')
param
incremento=input('incremento=');
fin=input('fin=');
for u=-8:1:incremento;in,P1=0;
for u=-8:1:incremento;in,P2=0;
for t=-8:1:incremento;in,P3=0;
for s=-8:1:incremento;in,P4=0;
Ke11 = (P4*r^2+Rn*H*P3*r^2+Rn*H*P2*r^2+Rn*H*...
P1*r^2+Rn*H*Km^2*Kq^2)/r^2/Rn/H;
Ke21 = -(P3*P4*r^4*Hn^2*H^2+1*P2*P4*r^4*Hn^2*H^2+1+...
P2*P3*r^4*Hn^2*H^2+1*P1*P4*r^4*Hn^2*H^2+1+...
P1*P3*r^4*Hn^2*H^2+1*P1*P2*r^4*Hn^2*H^2+1+...
q*r^4*Hn^2*H^2*n*g*r^4*Hn^2*H*Km^2*Kq^2+1*P4*r^2+Rn*H*...
Km^2*Kq^2+1*P3*r^2+Rn*H*Km^2*Kq^2+1*P2*r^2+Rn*H*...
Km^2*Kq^2+1*P1*r^2+Rn*H*Km^4*Kq^4*1)/r^4/Rn^2/H^2/1;
Ke31 = -(P2*P3*P4*H^2*r^2*Rn1+P1*P3*P4*H^2*r^2*Rn1+...
P1*P2*P4*H^2*r^2*Rn1+P1*P2*P3*H^2*r^2*Rn1+g*P4*r^2+Rn*H^2+...
g*P4*r^2+Rn*H*g+P3*r^2+Rn*H^2+g*P3*r^2+Rn*H*g+...
g*P2*r^2+Rn*H^2+g*P2*r^2+Rn*H*g+P1*r^2+Rn*H^2+...
g*P1*r^2+Rn*H*g+g*Km^2*Kq^2)/N/r^2/Rn/1/n/g;

```

Figura D.6: Programa "busca"

