

01168



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

MODELADO DE PREFERENCIAS MULTICRITERIO
MEDIANTE UNA FUNCION DE VALOR CARDINAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)
P R E S E N T A
MARIA GABRIELA CANO GONZALEZ

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MAYRA STELLA TREJOS ALVARADO



CIUDAD UNIVERSITARIA

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Considero a cada hombre como un deudor a su profesión, y ya que de ella recibe sustento y provecho, así debe procurar mediante el estudio servirle de ayuda y ornato.

Francisco Bacon.

A mi mamá y abuelita, Margarita e Irene . . .

. . . por su inmenso apoyo, amor y confianza

A mis hermanos, Javier, Alex, Jorge, Julián y Lety . . .

. . . por su cariño, aliento y fe

Al resto de mi familia, Javier, Diana, Angélica, Andrea, Fabiola, Raúl, Elsa y Ana . . .

. . . por su cariño y brío

A mi novio, Edgar . . .

. . . por su amor, paciencia, entrega y confianza.

*A mis amigos, Ivone, Gaby, Adelia, Yolanda, Laura, Guadalupe, Luisa, Rosy, Mayra,
J. Antonio, Antonio y Paco . . .*

. . . por su apego y credibilidad.

RECONOCIMIENTO

A los comentarios y sugerencias de mi directora de tesis, Dra. Mayra Trejos, las valiosas observaciones de los profesores Servio Tulio, Arturo Fuentes, Ramón Espinosa e Idalia Flores, la colaboración del Lic. Pablo Medina, Coordinador de Proyectos Académicos de la Facultad de Ingeniería de esta institución, fueron de gran utilidad en la elaboración y conclusión de este trabajo.

El apoyo económico recibido por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y por el Instituto de Ingeniería de la UNAM fue un estímulo muy importante, ya que sin ello hubiera sido difícil mi permanencia en esta institución, y como consecuencia, concluir los estudios.

INTRODUCCION	1
CAPITULO I: TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO	
1.1 Conceptos básicos	3
1.1.1 Estructura de un problema de decisión	3
1.1.2 Decisiones multicriterio	5
1.1.3 Medición y escalas	6
1.1.4 Relaciones binarias	7
1.1.5 Funciones criterio	9
1.1.6 Estructura de preferencias	10
1.2 Etapas de un proceso de decisión	11
1.3 Enfoques en la Toma de Decisiones Multicriterio	12
1.3.1 Relaciones binarias de sobreclasificación	13
1.3.2 Teoría de utilidad multiatributo	20
1.3.3 Métodos Interactivos	27
CAPITULO II: METODO MACBETH	
2.1 Introducción	30
2.2 Desarrollo del método MACBETH	30
2.3 Beneficios del método	46
CAPITULO III: APLICACIONES	
3.1 Aplicación de MACBETH a algunos problemas	48
3.1.1 Problema de mejoramiento de producción y calidad en la industria textil	48
3.1.2 Caso del desempeño académico del profesor en la Facultad de Ingeniería	59
CONCLUSIONES	68
REFERENCIAS	70

INTRODUCCION

En las últimas cuatro décadas, los problemas de toma de decisiones se han conceptualizado, en la mayoría de los casos, siguiendo el enfoque llamado Toma de Decisiones Multicriterio. Este enfoque se basa en tres suposiciones: a) Se cuenta con un conjunto bien definido de alternativas factibles, b) es posible encontrar un modelo de preferencias suficientemente claro para el decisor y estructurado racionalmente respecto de un conjunto de atributos, y c) la mejor decisión se encuentra resolviendo un problema matemático bien definido.

Sin embargo, el enfoque de Toma de Decisiones Multicriterio tiene algunas limitaciones en objetividad, como el hecho de suponer que el decisor es experto y hábil para tomar decisiones, que las preferencias del decisor estén bien definidas, y en general, sea imposible decir que una decisión es buena o mala basándose sólo en el modelo matemático, siendo que en realidad son varios los aspectos los que influyen a la hora de tomar una decisión.

Debido a estas limitaciones y a algunos problemas teóricos como explicar las hipótesis y axiomas que justifican el uso de una fórmula de agregación estándar o verificar si la decisión que se tome inicialmente conduce a la decisión óptima mediante un número finito de pasos, la Toma de Decisiones Multicriterio se ha desarrollado un enfoque paralelo a éste, llamado de Ayuda a la Decisión Multicriterio.

La ayuda a la decisión multicriterio se interesa principalmente por crear métodos que apoyen a las personas involucradas en procesos de decisión a modelar, argumentar o transformar sus preferencias, y a tomar una decisión de acuerdo con sus objetivos y metas. Además, su preocupación radica en que los esfuerzos de los investigadores estén orientados hacia conceptos, propiedades y procedimientos que se puedan utilizar en la obtención de información significativa de los problemas.

Al considerar el punto de vista de la Ayuda a la Decisión y por la complejidad de los problemas, surge la necesidad de crear nuevos métodos de ayuda a la decisión que apoyen en la estructuración y solución de los problemas.

El método MACBETH es un método interactivo de ayuda a la decisión que se utiliza en la fase de evaluación de un proceso de decisión. Este método tiene la propiedad de facilitar una retroalimentación e interacción constante con el decisor, por lo que le proporciona confianza para que pueda hacer cambios en sus preferencias.

El objetivo de este documento es realizar un análisis completo del método MACBETH, resaltar sus cualidades, mencionar dificultades y mostrar algunas aplicaciones del mismo.

Este trabajo consta de tres capítulos. El primero trata de las definiciones, conceptos y resultados importantes que se emplean en los otros capítulos, en él se mencionan y explican las etapas de un proceso de decisión, y en la tercera parte del capítulo se presenta una clasificación de enfoques en la ayuda a la decisión: Teoría de Utilidad Multiatributo, Relaciones Binarias de Sobreclasificación y Métodos Interactivos. La clasificación que se consideró en esta parte es un punto de vista personal, por lo que no se puede pensar como una clasificación general.

El segundo capítulo explica con detalle, mediante un ejemplo, en qué consiste el método MACBETH. En el ejemplo se da a conocer la situación problemática, posteriormente se resaltan las características del método y se relacionan con algunas partes del desarrollo del problema.

En el tercer capítulo se muestra una aplicación, una realizada por Bana e Costa y Vansnick y la otra, que es una contribución de este trabajo, en la que se resalta la importancia del método y las dificultades a las que se enfrentaron. Finalmente, en el cuarto capítulo se encuentran las conclusiones del trabajo, que incluyen los aspectos más relevantes del método y describen, de manera breve, las experiencias recibidas al trabajar con el método.

CAPITULO I: TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

1.1 Conceptos básicos

En esta sección se mencionan definiciones, conceptos y resultados básicos de la toma de decisiones multicriterio que se utilizan en el presente trabajo, así como también algunas notaciones.

1.1.1 Estructura de un problema de decisión

Un actividad relevante a que todo individuo o grupo de individuos se debe enfrentar, en el trabajo, en el hogar, la escuela, negocios, institutos de investigación, etc., es la toma de decisiones. Así, en el campo de la Investigación de Operaciones la toma de decisiones se considera importante y crucial en la solución de problemas.

Se entiende por *toma de decisiones* el proceso mediante el cual se identifica un conjunto de cursos de acción o alternativas, se estiman sus consecuencias y los estimados se les compara preferencialmente para seleccionar el curso de acción que mejor convenga. La decisión en cualquier nivel se puede ejercer por un solo individuo o un grupo de ellos. A dicho individuo se le llama *decisor*.

En un problema de toma de decisiones las *alternativas* forman el conjunto donde el decisor debe elegir, el *estimado de consecuencias de una alternativa* es la información relevante para la elección y describe lo que se esperaría sobre el logro de los objetivos si ésta se llevara a cabo; incluye riesgos, costos y uso de recursos que podrían afectar la selección.

La estimación de consecuencias de una alternativa es *determinista* (bajo certeza), *probabilista* (bajo riesgo) o *indeterminista* (bajo incertidumbre), según que el estimado de consecuencias correspondiente sea un elemento del espacio de consecuencias, una distribución de probabilidades sobre dicho espacio o un subconjunto del mismo, respectivamente. Puede mencionarse también la toma de decisiones *borrosa* en la cual cada estimado de consecuencias es un subconjunto borroso del espacio de consecuencias.

En este documento se utilizarán términos tales como punto de vista, criterios, atributos y objetivos que son conceptos importantes en la estructuración de un

problema de toma de decisiones. Al evaluar las diferentes alternativas, el decisor puede tomar en cuenta uno o varios *puntos de vista fundamentales* a partir de los cuales justifica, transforma y argumenta sus preferencias.

El conjunto de puntos de vista debe ser *completo*, es decir, que cubra todos los aspectos de un problema; *operacional*, de modo que sea usado significativamente en el análisis; *no redundante*, para que no se tome en cuenta dos veces el mismo aspecto; y *minimal*, para que la dimensión del problema se mantenga tan pequeña como sea posible.

Para cada punto de vista se requiere de un conjunto X de *niveles de impacto* (llamado *atributo* por Keeney y Raiffa), que describe en forma operacional, cuantitativa y cualitativa los impactos de alternativas con respecto al punto de vista dado.

Un *criterio* es una función sobre el conjunto de las alternativas tal que es significativo comparar dos alternativas a y b de acuerdo con cada punto de vista particular a partir de los números $g(a)$ y $g(b)$.

Un *objetivo* representa direcciones de preferencia (maximizar o minimizar) a través de atributos individuales o complejos, las necesidades y deseos del decisor se reflejan en dichos atributos.

Ejemplo: La familia Soriano desea comprar una casa. De acuerdo con sus necesidades, requieren una casa de dos plantas, con tres recámaras, estancia mediana, cocina, uno y medio baños, cuarto de servicio, cochera y jardín pequeño.

Para ello, el Sr. Soriano (en este caso el decisor) ha pensado en los siguientes puntos de vista: costo de la casa, ubicación, disponibilidad de servicios públicos e infraestructura adecuada. Cada uno de estos puntos de vista tiene asociado un atributo o descriptor, por ejemplo en el costo será el intervalo $[250,300]$ medido en miles de pesos. La ubicación se describe, operacionalmente, por medio de la distancia (medida en kilómetros) que hay entre la casa y a cuatro centro de interés para la familia: escuela, trabajo, centro comercial, centros deportivos y culturales. Cada uno de estos aspectos tendrá asociado un intervalo de medición, por ejemplo, la distancia a la escuela oscilará entre 2 y 5 km.

Buscando en los periódicos y mediante algunas recomendaciones han encontrado cuatro casas que cumplen con los requisitos admisibles (alternativas) y lo que se ha resuelto es comprar aquella tal que minimice el costo, las distancias a los lugares de trabajo y escuela, y que tenga el mayor espacio posible (objetivos).

Lo anterior se puede ver en el siguiente esquema:

		Puntos de vista				
		θ_1	θ_2	\dots	θ_n	
acciones	a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1n}	consecuencias
	a_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2n}	
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mn}	

1.1.2 Decisiones multicriterio

Hasta fines de la década de 1960, los problemas en Investigación de Operaciones eran estructurados considerando: un conjunto bien definido de alternativas, un decisor cuyas preferencias se elegían mediante un criterio, y la comparación entre alternativas se realizaban con base en las evaluaciones de éstas en el criterio. Se consideraban dos casos: el determinístico y el probabilístico, además se contaba con un problema matemático bien definido. En este enfoque monocriterio, el problema de decisión era equivalente a un problema de optimización.

Posterior a este tipo de enfoque se considera la toma de decisiones multicriterio, como en el caso anterior, se tiene un conjunto bien definido de alternativas, un modelo de preferencias del decisor estructurado "racionalmente", en el cual se utiliza una función real sobre el conjunto de alternativas llamada función de valor o función de utilidad u tal que

$$\begin{aligned}
 &a \text{ se prefiere a } b \text{ sii } u(a) > u(b) \\
 &a \text{ es indiferente a } b \text{ sii } u(a) = u(b)
 \end{aligned}$$

El problema matemático consiste en encontrar una alternativa óptima tal que $u(a^*) \geq u(a) \quad \forall a \in A$. Con esta función se pueden modelar las preferencias cuyos estimados de consecuencias son deterministas o probabilistas.

En general, es difícil afirmar que una decisión es buena o mala refiriéndose únicamente a un modelo matemático: aspectos organizacionales, pedagógicos y culturales del proceso de decisión contribuyen a la calidad y éxito de esta decisión. Por tanto, se recomienda apoyarse en la ayuda a la decisión cuyo interés es proporcionar a una persona o a un grupo de ellas involucradas en un proceso de decisión, una propuesta concerniente al proceso de decisión, mediante un modelo matemático que permita argumentar y transformar sus preferencias, (Roy, B., 1989).

La *estructuración y evaluación* son fases esenciales en la ayuda a la decisión. La estructuración proporciona a las personas involucradas en una situación problemática, un lenguaje común para aprender y discernir, con una información

clara, acerca de los posibles impactos de las acciones potenciales respecto a cada punto de vista. Esta fase de la ayuda a la decisión ofrece una base para la identificación de oportunidades de decisión, para la construcción de nuevas alternativas y para la evaluación de acciones potenciales.

En la fase de evaluación, el analista o decisor se encamina hacia un desarrollo formal de un modelo de evaluación global, que puede ser dividido en:

- La construcción de un criterio para cada punto de vista, es decir, un modelo de evaluación que represente de una manera formal la preferencia local de acciones potenciales.
- La aplicación de un proceso de agregación multicriterio que tome en cuenta alguna información que se da entre los puntos de vista y agrupa a los criterios en un modelo de evaluación global.

1.1.3 Medición y escalas

Frecuentemente es útil expresar relaciones cualitativas en términos cuantitativos mediante un modelo matemático. La *teoría de medición* está involucrada con tal representación cuantitativa de las relaciones cualitativas y establece las circunstancias en las cuales tales representaciones son posibles y en cuales no. Por lo general, hay elecciones arbitrarias para ser hechas; por ejemplo, representando "más pesado que" tiene que elegirse una unidad de medición arbitraria: libras, gramos, quilates, etc.

Estas elecciones arbitrarias significan que ciertas operaciones matemáticas en los números son significativas en términos de relaciones de la creación de modelos. Sin embargo otras operaciones matemáticas son carentes de sentido. Ellas no reflejan ninguna relación cualitativa presente dentro del sistema, son simplemente artefactos de las elecciones arbitrarias que han sido hechas.

Dentro de la teoría de la medición se especifican ciertas propiedades de consistencia para una representación cuantitativa, conocidas como axiomas. Una vez que se tienen los axiomas se busca la forma de asignar números a los objetos dentro del sistema tal que el orden de los números reflejen las relaciones cualitativas de manera bien definida. Esta asignación es hecha mediante una *escala*, es decir, mediante una función sobre los objetos dentro del sistema la cual proporciona la información y representación numérica deseada.

El objetivo principal de la medición es transformar los números en la escala sin pérdida de información empírica, es decir, que haya invariancia entre una escala y otra, (Stevens, S., 1959).

Existen algunos teoremas llamados *teoremas de unicidad*, en los cuales se identifican un conjunto de transformaciones admisibles tales que, si $v(*)$ es una escala que asigna números a objetos de manera que representen las relaciones fundamentales y si $\varphi(*)$ es una transformación admisible, entonces $\varphi[v(*)]$ es también una escala que representa las mismas relaciones fundamentales. Por lo regular, los teoremas de unicidad dan una condición de "si y sólo si", es decir, afirman que si $v(*)$ y $w(*)$ son escalas que representan las mismas relaciones cualitativas, entonces existe una transformación admisible $v(*) = \varphi[w(*)]$, (French, S., 1988; Roberts, F., 1979).

Conociendo el conjunto de transformaciones admisibles asociado con una representación se hace la siguiente clasificación:

Una escala es una *escala ordinal* si el conjunto de transformaciones admisibles es el conjunto de todas las funciones monótonas crecientes, por ejemplo: la preferencia, la calidad del aire, pruebas de inteligencia, etc.

Una escala es una *escala de intervalo* si el conjunto de transformaciones admisibles es el conjunto de todas las transformaciones afines positivas. Las funciones de diferencia de valor, las funciones de utilidad, la temperatura, la energía potencial son escalas de este tipo. Una escala es una *escala de proporción* si el conjunto de transformaciones admisibles es el conjunto de transformaciones de semejanza, por ejemplo cuando se hace la conversión de centímetros a metros. Una escala es una *escala absoluta* si la única transformación admisible es la transformación identidad, por ejemplo, cuando se asignan números a jugadores de un equipo. (Vansnick, J. C., 1990)

Una afirmación que involucra escalas de medición es *significativa* si y solo si su valor de verdad permanece sin cambio cuando es reemplazada por cualquier otra escala admisible.

1.1.4 Relaciones binarias

Cuando un decisor dice que prefiere a a b , entonces establece una relación entre a y b . La noción matemática de relación es entonces apropiada para modelar las preferencias.

Una **relación binaria** en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$. Sea R una relación binaria en A . Para expresar que $(a, b) \in R$ se escribe aRb , y si $(a, b) \notin R$ entonces $\neg aRb$, (esto significa que a no está relacionado con b).

Se dice que:

R es transitiva si	$\forall a, b, c \in R, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
R es asimétrica si	$\forall a, b \in R, aRb \Rightarrow \neg bRa$
R es simétrica si	$\forall a, b \in R, aRb \Rightarrow bRa$
R es reflexiva si	$\forall a \in R, aRa$
R es completa si	$\forall a, b \in R, aRb \vee bRa$ o se tienen ambos
R es transitiva negativamente si	$\forall a, b, c \in R, \neg aRb \wedge \neg bRc \Rightarrow \neg aRc$
R es antisimétrica si	$\forall a, b \in R, aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Cualquier relación que es transitiva se conoce como un *orden*. Una relación transitiva y asimétrica es un *orden estricto*. Una relación completa y transitiva es un *orden débil*. Un orden débil antisimétrico se conoce como *orden simple* o *lineal*. Una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva se llama *relación de equivalencia*. (French, S., 1988).

Con base en estos conceptos se tiene el siguiente resultado:

Teorema. Suponga que A es un conjunto finito o numerable y P una relación binaria en A . Entonces existe una función real en A que satisface:

$$\forall a, b \in A, aPb \Leftrightarrow v(a) > v(b) \quad \wedge \quad a \neq b \Leftrightarrow v(a) \neq v(b)$$

si y sólo si P es un orden simple. (Ver demostración en Roberts, 1979; Vansnick, 1990).

Las relaciones binarias sirven de apoyo para el concepto de sobreclasificación y son de gran utilidad para que se pueda hablar de la comparación de dos alternativas así, se tienen las siguientes actitudes:

- Preferencia estricta por una alternativa (P)
- Preferencia débil por una alternativa (Q)
- Indiferencia entre ambas alternativas (I)
- Incomparabilidad entre ambas alternativas (H)

Se considera que las relaciones anteriores verifican las siguientes propiedades:

$aPb \Rightarrow \neg bPa$: P es asimétrica
aIa	: I es reflexiva
$aIb \Rightarrow bIa$: I es simétrica
$aQb \vee bQa$: Q es completa
$\neg aHa$: H es irreflexiva
$aHb \Rightarrow bHa$: H es simétrica

1.1.5 Funciones criterio

Anteriormente se definió lo que es un criterio. Considérese que para cada punto de vista j , se le asocia un conjunto de niveles de impacto X_j . Supóngase que en cada conjunto X_j está definido un orden débil estricto \succ_j que modela las preferencias del decisor con respecto a j . Para representar el impacto de cada alternativa, se define una función $\varepsilon_j: A \rightarrow X_j$, llamada *evaluador* respecto al punto de vista j . Y además se supone que existe una escala $v_j: X_j \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $x_j \succ_j y_j$ si y sólo si $v_j(x_j) > v_j(y_j)$. Entonces la función compuesta $g_j = v_j \circ \varepsilon_j$ se llama *criterio* respecto al punto de vista j .

De acuerdo con la forma de comparar las alternativas se tienen distintos tipos de criterios:

Un *criterio verdadero* supone que para cualquier $a, b \in A$

$$aP_jb \Leftrightarrow g_j(a) > g_j(b)$$

$$aI_jb \Leftrightarrow g_j(a) = g_j(b)$$

este modelo se denomina *clásico*, y tiene la propiedad de que cualquier diferencia entre los dos miembros, por pequeña que sea, implica una preferencia estricta.

Un criterio se llama *cuasi-criterio*, si las preferencias del decisor satisfacen el siguiente modelo, para cualquier $a, b \in A$

$$aP_jb \Leftrightarrow g_j(a) - g_j(b) > q$$

$$aI_jb \Leftrightarrow |g_j(a) - g_j(b)| \leq q$$

donde q se denomina *umbral de indiferencia*. A este modelo se le llama *modelo de un umbral*. En este modelo una diferencia mayor que q implica una preferencia estricta, aún si es muy cercana a q .

Un criterio es un *pseudo-criterio* si las preferencias del decisor satisfacen que para cualquier $a, b \in A$

$$aP_jb \Leftrightarrow g_j(a) - g_j(b) > q$$

$$aQ_jb \Leftrightarrow q < g_j(a) - g_j(b) < p$$

$$aI_jb \Leftrightarrow |g_j(a) - g_j(b)| \leq q$$

el modelo se llama *modelo de dos umbrales*, (Bouyssou, D., 1990).

1.1.6 Estructura de preferencias

Una vez que se han identificado el conjunto de alternativas, los puntos de vista y los niveles de impacto, correspondientes a cada punto de vista, se intenta representar las preferencias del decisor (modelar) con una *estructura de preferencias*.

Una *estructura de preferencia parcial* E_j correspondiente al punto de vista j es una pareja $E_j = (X_j, \succ_j)$, donde X_j es el conjunto de niveles de impacto respecto al j -ésimo punto de vista, y \succ_j es una relación binaria asimétrica y no vacía en X_j . La relación \succ_j se llama *relación de preferencia parcial* correspondiente al punto de vista j . La relación \sim_j definida en X_j como $x_j \sim_j y_j$ si y sólo si $\neg(x_j \succ_j y_j)$ y $\neg(y_j \succ_j x_j)$ es llamada relación de *indiferencia parcial* correspondiente al criterio j . Esta relación es reflexiva y simétrica.

Para cada alternativa $a \in A$ sea $\varepsilon_j(a) \in X_j$ el impacto de la alternativa a con respecto al criterio j . La función ε_j induce una relación de preferencia parcial P_j y una relación de indiferencia parcial I_j en A como sigue:

$$a P_j b \Leftrightarrow \varepsilon_j(a) \succ_j \varepsilon_j(b)$$

$$a I_j b \Leftrightarrow \varepsilon_j(a) \sim_j \varepsilon_j(b)$$

Sea $F = \{1, 2, \dots, n\}$, ($n \geq 2$), el conjunto de puntos de vista fundamentales considerados, y supongamos que $\forall j \in F$ está definida una estructura de preferencia parcial E_j . Sea el conjunto $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ llamado *espacio de consecuencias*. Sea \succ una relación binaria en X asimétrica y transitiva, y sea \sim una relación binaria en X , reflexiva y simétrica, que modelan las preferencias y las indiferencias globales del decisor.

$(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ es una *estructura de preferencia multicriterio* si satisface las siguientes condiciones:

1) $\forall U \subset C, U \neq \emptyset$. Si $((x_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \in U}) \succ_j ((y_j)_{j \in U}, (a_j)_{j \in U})$ para algun $(a_j)_{j \in U}$, entonces $((x_j)_{j \in U}, (b_j)_{j \in U}) \succ_j ((y_j)_{j \in U}, (b_j)_{j \in U})$ para todo $(b_j)_{j \in U}$

2) $x_j \succ_j y_j$ sii existe $(a_i)_{i \neq j}$ tal que $((x_j), (a_i)_{i \neq j}) \succ_j ((y_j), (a_i)_{i \neq j})$

La primera condición se llama *independencia preferencial* y la segunda, *consistencia*.

Ahora considérese una estructura de preferencia multicriterio $(X, \succ, \sim, E_1, \dots, E_n)$ y sea la función $\varepsilon: A \rightarrow X$ definida por $\varepsilon(a) = (\varepsilon_1(a), \varepsilon_2(a), \dots, \varepsilon_n(a))$. Sean P e I las relaciones binarias definidas en A de la siguiente forma:

$$aPb \Leftrightarrow \varepsilon(a) \succ \varepsilon(b)$$

$$alb \Leftrightarrow \varepsilon(a) \approx \varepsilon(b)$$

Las relaciones P e I se llaman *relación de preferencia global e indiferencia global en A* respectivamente. De la definición de estructura de preferencia se sigue que P es asimétrica y transitiva, mientras que I es simétrica y reflexiva. (Espinosa R. y Trejos, M., 1996)

1.2 Etapas de un proceso de decisión

Una vez que se ha identificado el problema, el decisor requiere de cuatro etapas fundamentales en el proceso de decisión.

Etapas 1. Identificación o diseño de las alternativas que deben ser tomadas en consideración y la formulación del problema (escoger una alternativa, seleccionar un subconjunto de alternativas, u ordenar las alternativas).

En esta etapa es importante plantearse algunos cuestionamientos, tales como: ver bajo qué forma conviene modelar la decisión, cómo diferenciar e individualizar las alternativas que se ofrecen, dónde hay que poner los límites de lo posible, etc. Además se debe ubicar al problema en una de las siguientes clases:

- *Problema α* : seleccionar una y sólo una alternativa, considerada como la "mejor".
- *Problema β* : aceptar todas las alternativas que parecen "buenas", rechazar aquellas que parecen "malas" y efectuar un análisis complementario para las otras.
- *Problema γ* : agrupar las alternativas en una sucesión de clases de indiferencia, ordenarlas de "mejor" a "peor".

Etapas 2. Determinación de los puntos de vista que deben ser tomados en cuenta y modelado de las preferencias del decisor respecto a cada uno de estos puntos de vista.

En esta etapa del proceso es útil considerar aspectos tales como: bajo qué formas y qué condiciona la evolución del proceso de decisión; cuáles son las consecuencias susceptibles a interferir con los objetivos y con los sistemas de valores del decisor; considerando factores de indecisión e incertidumbre, hasta qué

punto cada una de las consecuencias es discriminante para aclarar la decisión; cómo construir los criterios capaces de tomar en cuenta las consecuencias.

Etapa 3. Síntesis de la información existente en un modelo global que represente una agregación de las preferencias.

Entre la variedad de los criterios posibles, el analista se cuestiona ¿cómo seleccionar aquellos que permita aprehender de la mejor manera la totalidad de las consecuencias?, ¿qué conviene exigir a tal familia de criterios para que constituya una base de diálogo entre los distintos interventores en el proceso de decisión?

De esta manera, los criterios deben medir y representar la información acerca de las consecuencias de una forma cuantitativa. Una vez que se tengan considerados los criterios pertinentes para el problema, se requiere realizar una evaluación global.

Etapa 4. Aplicación de un procedimiento con el propósito de resolver el problema de decisión.

En función de la problemática y las operaciones que el analista haya elegido, se pueden distinguir las formulaciones especificadas en la etapa 1. Es posible que antes de llegar a este nivel se cuenten con elementos de respuesta para que el problema tenga una solución evidente. Sin embargo, lo usual es que no sea así, y haya la necesidad de utilizar los procedimientos formalizados para adquirir información, con vista a obtener las soluciones precisas de acuerdo con la formulación escogida.

Por último, es importante especificar que son muchos los factores que afectan el proceso de decisión, desde la capacidad del analista para comprender, resolver y enfrentar los problemas, hasta las condiciones ambientales inherentes al problema, sin embargo, para obtener un buen resultado se necesita de la cooperación, interés y entusiasmo de todas las personas involucradas en la situación problemática. (Trejos, M., 1991).

1.3 Enfoques en la Toma de Decisiones Multicriterio

En este apartado se considera la siguiente clasificación de la toma de decisiones multicriterio: Toma de decisiones utilizando relaciones binarias de sobreclasificación, teoría de utilidad multiatributo y métodos interactivos.

1.3.1 Relaciones Binarias de Sobreclasificación

Las relaciones binarias de sobreclasificación se basan en construir una relación binaria a partir de la comparación de pares de alternativas conforme a las relaciones binarias (P , Q , R , o I) y a la explotación de éstas para construir un ordenamiento, en este enfoque las escalas de cada criterio se respetan, pudiendo no ser del mismo tipo, por ejemplo unas pueden ser ordinales y otras cardinales.

Sean A un conjunto de alternativas y F un conjunto de n criterios. A cada criterio g_j se le asocia una *relación de sobreclasificación parcial* S_j . Ésta es una relación binaria tal que aS_jb se verifica sí y sólo si "respecto al j -ésimo criterio, a es al menos tan buena como b ".

La relación de sobreclasificación S_j se escribe en términos de un umbral de indiferencia q_j asociado con g_j , es decir

$$aS_jb \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) - q_j$$

Una *relación de sobreclasificación* S es una relación binaria, tal que aSb se verifica si los valores $g(a)$ y $g(b)$ proporcionan argumentos suficientes para admitir la afirmación: " a es al menos tan bueno como b con respecto a los n criterios", y no existen razones importantes para refutar esta afirmación. (Roy, B., 1989)

Propiedades fundamentales de las relaciones de sobreclasificación.

Considérese las n relaciones de sobreclasificación parciales S_j asociadas a los n criterios del conjunto F y una relación binaria S que agregue a estos criterios. Se supone que S verifica las siguientes propiedades:

a) S es reflexiva. Observe que

- aSb y $\neg bSa$ no se puede interpretar como " a se prefiere estrictamente a b ".
- S no es necesariamente un relación transitiva.

b) Para cualesquiera alternativas a, b y c , S verifica que

$$aSb \wedge bD_Fc \Rightarrow aSc$$

$$aD_Fb \wedge bSc \Rightarrow aSc$$

Donde D_F es la relación de dominancia definida por

$$aD_Fb \Leftrightarrow g_j(a) \geq g_j(b) \quad \forall j \in F$$

Por lo tanto se tiene $aD_Fb \Rightarrow aSb$

c) Finalmente, si $g_j(a) = g_j(b) \quad \forall j \neq k$ entonces $aSb \Leftrightarrow aS_k b$
 Esta condición puede ser planteada como sigue

$$\begin{aligned} \text{si } aI_j b \quad \forall j \neq k, \text{ entonces } aSb \Leftrightarrow aS_k b \\ aS_j b \quad \forall j \in F \Rightarrow aSb \end{aligned}$$

La expresión formal y la naturaleza de las condiciones que deben ser satisfechas para validar la afirmación aSb son influenciadas por muchos factores, tales como:

- El grado de significancia de los criterios considerados en F .
- La naturaleza de conceptos básicos usados: concordancia, discordancia, tasa de sustitución, intensidad de preferencia, etc.
- La naturaleza de la información requerida entre criterios.
- La fuerza de los argumentos requeridos, por ejemplo: hablar de la alternativa más fuerte, digamos " a ", se puede imaginar que " a domina a b ", sin embargo, el concepto de sobreclasificación es más interesante porque argumentos débiles pueden ser suficientes para considerar la relación dada, esto es porque la relación binaria S es más rica que D .

Dependiendo del grado de fuerza de los argumentos que justifican la relación de sobreclasificación S , se tienen dos tipos de modelado: con relaciones de ordenamiento robustas y con relaciones de ordenamiento borrosas.

Modelado con relaciones de ordenamiento robustas. Se introduce un conjunto de r relaciones de sobreclasificación, $r \geq 1$, para modelar las preferencias del decisor:

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_r$$

el incremento del índice desde 1 hasta r corresponde al decrecimiento de la fuerza de los argumentos requeridos para hacer válido aSb . Se considera un conjunto finito de alternativas $A = \{a_i \mid i \in I\}$, evaluadas sobre un conjunto de criterios verdaderos g_i .

Índices de concordancia y discordancia.

Se dice que el j -ésimo criterio está en *concordancia* con la afirmación aSb si y sólo si $aS_j b$, es decir, si $g_j(a) \geq g_j(b) - q_j$.

El subconjunto de todos los criterios F que están en concordancia con la afirmación aSb se llama *coalición concordante*. Éste se denota por $C(aSb)$. (Roy, B., 1989).

Para cualquier par de alternativas $(a,b) \in A$, se determinan los criterios j para los cuales "a se prefiere estrictamente a b", $F^+(a,b)$; "a es indiferente a b", $F^-(a,b)$; y "b se prefiere estrictamente a a", $F^-(a,b)$. Si además se define p_j , $j \in F$ como el peso relativo al criterio j , dentro de la familia F , siendo $P = \{p_j | j \in F\}$ el conjunto de pesos, entonces se pueden cuantificar las relaciones de preferencia mediante:

$$p^+(a,b) = \sum_{j \in F^+} p_j$$

$$p^-(a,b) = \sum_{j \in F^-} p_j$$

$$p^-(a,b) = \sum_{j \in F^-} p_j$$

La prueba de concordancia evalúa las ventajas relativas de una alternativa frente a otra. Satisfacer las condiciones de esta prueba es aceptar la regla de la mayoría como más rica que la regla de la unanimidad. Así, se definen los *índices de concordancia* $c(a,b)$ y la *prueba de concordancia* como sigue:

$$\bullet c(a,b) = \frac{p^+(a,b) + p^-(a,b)}{p} \geq c^* \quad (1a)$$

$$\text{con } p = \sum_{j \in F} p_j, \quad 0 \leq c^* \leq 1, \quad C(aSb) = F^+ \cup F^-$$

$$\bullet c(a,b) = \frac{p^+(a,b)}{p^-(a,b)} \geq 1 \quad (1b)$$

c^* se llama *índice de concordancia crítico* o nivel mínimo de concordancia o mayoría.

Se dice que el j -ésimo criterio está en *discordancia* con la afirmación aSb si y sólo si bPa , es decir, $g_j(b) \geq g_j(a) + p_j$. Esto significa que la preferencia estricta restringida al j -ésimo criterio de b sobre a es establecida significativamente sólo cuando la diferencia $g_j(b) - g_j(a)$ es suficientemente grande, considerando la imprecisión, incertidumbre y determinación inexacta de las evaluaciones.

El subconjunto de todos los criterios de F que están en discordancia con la afirmación aSb se llama *coalición discordante* (con esta afirmación). Es denotado por $C(bPa)$ (Antún J. P., 1994).

Considérese el efecto de cualquier criterio discordante en la validación de aSb . Luego, este criterio está en contra de la afirmación en cuestión, pero la fuerza de esta oposición puede ser más o menos compatible con la aceptación de la afirmación. Para reflejar cuánto rechaza la afirmación aSb el j -ésimo criterio discordante, se define un *umbral de veto* v_j , de la siguiente manera:

$g_j(b) - g_j(a) > v_j$ es incompatible con la afirmación aSb sin importar el valor de las otras evaluaciones

La prueba de no discordancia consiste en inspeccionar los criterios por los cuales una alternativa no se prefiere frente a otras alternativas e introducir situaciones de veto, o niveles de tolerancia máximos.

Existen diferentes formulaciones de esta prueba; pueden distinguirse formas cardinales y ordinales, dependiendo de si las escalas asociadas a los criterios son comparables.

Formas cardinales (para escalas comparables). Sea $F^-(a,b)$ el conjunto de discordancia de que a sobreclasifica a b

• Veto uniforme $d(a,b) \leq d^*$
con $0 \leq d^* \leq 1$

d^* se denomina *índice de discordancia crítico* o nivel máximo de tolerancia o veto.

Se adopta:

Si $F^-(a,b) = \emptyset$ entonces $d(a,b) = 0$

Si $F^-(a,b) \neq \emptyset$ entonces $d(a,b) = \frac{1}{d} \max_{j \in F^-} |g_j(b) - g_j(a)|$

donde

$d = \max_{j \in F^-} |\bar{e}_j - \underline{e}_j|$, \bar{e}_j , \underline{e}_j estados superior e inferior de las evaluaciones de g_j

• Vetos diferenciales $d_j(a,b) \leq d_j^*$

$0 \leq d_j^* \leq 1$

d_j^* es el índice de discordancia crítico marginal del criterio j

Se adopta:

Si $F^-(a, b) = \emptyset$ entonces $d_j(a, b) = 0$

Si $F^-(a, b) \neq \emptyset$ entonces $d_j(a, b) = \frac{g_j(b) - g_j(a)}{\bar{e}_j - \underline{e}_j}$

donde $\bar{e}_j, \underline{e}_j$ se definen con antes.

(Antún, J. P., 1994).

Formas ordinales para escalas no comparables. Para modelar posibles situaciones de veto se introduce un conjunto de pares de valores $D_j \subset E_j \times E_j$ llamado *conjunto de discordancia* (E_j es el conjunto de consecuencias respecto al criterio j).

Dadas dos alternativas tales que la afirmación aSb no se cumple para el criterio j , entonces por definición, un par de elementos de $E_j, (e_a, e_b)$ es un elemento de D_j ; nótese que $e_a = g_j(a)$, $e_b = g_j(b)$ con $e_a < e_b$.

Un par de discordancia corresponde a una desviación negativa sobre el criterio j que no puede ser compensada por desviaciones positivas sobre los criterios en $F^+(a, b)$ en tanto que estos criterios satisfacen la prueba de discordancia. La prueba de no discordancia es positiva cuando

$$(g_j(a), g_j(b)) \in D_j, \quad \forall j \in F^-(a, b)$$

Obsérvese lo siguiente:

De las definiciones dadas anteriormente se tiene:

$$C(aSb) \cap C(bPa) = \emptyset \quad \text{y} \quad C(aSb) \cup C(bPa) \subset F$$

Se enfatiza en el hecho de que se pueda tener

$$C(aSb) \cup C(bPa) \neq F$$

Esta desigualdad se tiene si y sólo si existe al menos un criterio el cual no es ni concordante ni discordante en la afirmación aSb . Este caso aparece si y sólo si

$$g_j(b) - p_j \leq g_j(a) \leq g_j(b) - q_j, \quad (p_j > q_j)$$

El subconjunto de F definido por los criterios que satisfacen esta última condición será denotada por $C(bQa)$. Por consiguiente se tiene:

$$j \in C(bQa) \Leftrightarrow bQa$$

la relación binaria Q_j modela la situación de preferencia débil restringida al j -ésimo criterio. En la práctica, $C(bQa)$ es vacío para un gran número de pares ordenados de alternativas. A cada par ordenado (a,b) se le asocia con uno de los tres subconjuntos de la partición de F , $C(aSb)$, $C(bQa)$ o $C(bPa)$. (Roy, B., 1989).

Relaciones de ordenamiento borroso. Una relación de ordenamiento borroso de sobreclasificación aSb , se caracteriza definiendo un grado de sobreclasificación para cada par de alternativas $(a,b) \in A$, con un número $\delta(a,b)$, $0 \leq \delta(a,b) \leq 1$, el cual fija la mayor o menor verosimilitud de la sobreclasificación de a por b .

Nota: El ordenamiento derivado de un pseudo-criterio se denomina *pseudo-orden*, el derivado de un cuasi-criterio se le llama *cuasi-orden*, y cuando $q_j = 0$ en un pseudo-criterio se llama *pre-criterio* y el ordenamiento *preorden parcial*.

En el caso de las relaciones de ordenamiento borroso, para cada (a,b) se define el *grado de verosimilitud marginal* $\delta_j(a,b)$ respecto al criterio j como una función g_j (es decir, un pseudo-criterio) tal como:

$$\begin{aligned} \bullet \delta_j(a,b) &= 1 && \text{si } g_j(b) - g_j(a) \geq 0 \\ \bullet \delta_j(a,b) &= 0 && \text{si } g_j(b) - g_j(a) \geq s_j(g_j(a)) \\ \bullet \delta_j(a,b) &= 1 && \text{si } g_j(b) - g_j(a) \leq t_j(g_j(a)) \\ \bullet \delta_j(a,b) &= \frac{s_j(g_j(a)) - |g_j(b) - g_j(a)|}{s_j(g_j(a)) - t_j(g_j(a))} \\ &&& \text{si } t_j(g_j(a)) \leq |g_j(b) - g_j(a)| < s_j(g_j(a)) \end{aligned}$$

Entonces como *Índice de concordancia* puede adoptarse:

$$c(a,b) = \sum_{j \in F} p_j \delta_j(a,b)$$

Nótese que en el caso borroso todos los criterios pertenecen al conjunto de concordancia.

Por otro lado, sobre cualquier criterio j puede definirse un umbral de veto $v_j(g_j(a))$, parámetro subjetivo que representa el límite más allá del cual existen argumentos para oponerse a la hipótesis aSb .

Cuando $g_j(b) - g_j(a) \geq s_j(g_j(a))$ (lo que implica que $\delta_j(a,b) = 0$) y se define un umbral de veto sobre g_j , $v_j \geq \delta_j$, entonces se define un *Índice de discordancia* $D_j(a,b)$ como:

$$D_j(a,b) \cdot \delta_j(a,b) = 0$$

$$D_j = 1 \text{ si } g_j(b) \geq g_j(a) + v_j(g_j(a))$$

Usando el índice de discordancia, puede determinarse alternativamente el grado de verosimilitud

Si $\forall j \in F: D_j(a,b) = 0 \Rightarrow \delta(a,b) = c(a,b)$

Si $\exists j \in F: D_j(a,b) \neq 0$

$D_j(a,b) \leq c(a,b), \forall j \in F \Rightarrow \delta(a,b) = c(a,b)$

$D_j(a,b) > c(a,b)$ para algún $j \in F^* \subset F \Rightarrow \delta(a,b) = c(a,b) \prod_{j \in F^*} \frac{1 - D_j(a,b)}{1 - c(a,b)}$

El enfoque ELECTRE nos lleva a obtener ordenamientos (robustos, fuerte/débil, borroso) de sobreclasificación de alternativas. Soluciona problemas del tipo γ , pero siempre es posible una traducción de estas soluciones a los tipos α y β .

El modelo de preferencia es del tipo de ordenamiento robusto en ELECTRE I, II y IV, pero de ordenamiento borroso en el ELECTRE III. En la práctica, estos dos tipos de modelado difieren significativamente desde un punto de vista teórico o son casi equivalentes: la única diferencia entre ellos viene del hecho que en el segundo tipo, el número r de la secuencia de las relaciones de sobreclasificación borrosas no es pre-determinado.

Los métodos ELECTRE I y II han sido mejorados por los métodos ELECTRE IS y III respectivamente. El método ELECTRE I fue el primer método de ayuda a la decisión que usa el concepto de relación de sobreclasificación. La idea de modular la credibilidad de la inserción de sobreclasificación se introdujo en el ELECTRE II donde dos modelos de preferencia son tomados en cuenta: el primero relativamente pobre pero fuertemente justificado, y el segundo más rico pero con menos posibilidad de ser defendido.

En el método ELECTRE IV no intervienen los pesos, que no significa que los criterios tengan el mismo peso. El ELECTRE IV es apropiado para casos en los cuales no se puede definir el papel específico de cada criterio en el procedimiento de agregación.

1.3.2 Teoría de Utilidad Multiatributo

El enfoque de toma de decisiones multiatributo tiene una base axiomática que se origina en la teoría de utilidad. Los modelos de utilidad multiatributo incorporan la incertidumbre de manera explícita para ordenar las preferencias del decisor.

En este enfoque se considera un conjunto de alternativas A , a cada una de las alternativas se le asocian n índices de valor $X_1(a), X_2(a), \dots, X_n(a)$, que miden el impacto de las alternativas en el espacio de consecuencias $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, donde cada X_i se considera un atributo. Se observa que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto en el espacio de consecuencias nunca se compararán las magnitudes de x_i y x_j pues los atributos X_i y X_j se pueden medir en unidades diferentes.

Para la selección de las alternativas se requiere evaluar y comparar sus consecuencias. Tal comparación se realiza mediante una función v , llamada *función de valor* que asocia un número real $v(x)$ a cada punto x en un espacio de evaluación y además representa la estructura de preferencias del decisor:

$$v(x) > v(y) \Leftrightarrow x P_x y$$

$$v(x) = v(y) \Leftrightarrow x I_x y$$

donde P_x y I_x son relaciones binarias definidas en X . Una vez que se ha encontrado v , el problema del decisor es seleccionar a en A tal que v sea maximizada. Sin embargo, cuando se tienen varios atributos para determinar la función v puede ser conveniente expresar ésta en términos de otra, por ejemplo f tal que

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(v_1(x_1), v_2(x_2), \dots, v_n(x_n))$$

donde v_i son funciones de valor sobre cada uno de los atributos X_i respectivamente, para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Se verán algunas formas típicas que toma la función f .

Considérese ahora el caso en que se tienen dos atributos. Supóngase que existe una función de valor multiatributo $v: X \times Y \rightarrow \mathfrak{R}$. Se define una *curva de indiferencia* como la curva de nivel c , $c \in \mathfrak{R}$, de la función v , es decir

$$L_c = \{(x, y) \mid v(x, y) = c\}$$

Note que dos elementos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ son indiferentes si y sólo si existe $c \in \mathfrak{R}$ tal que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L_c$.

Sean v_1 y v_2 funciones de valor; se dice que ellas son *estratégicamente equivalentes*, denotado por $v_1 \approx v_2$, si v_1 y v_2 tienen la misma curva de indiferencia y el orden preferencial inducido.

Supóngase que se le pregunta al decisor que si Y se incrementa por Δ unidades, cuánto tiene que decrecer X para que él sea indiferente. Si se tiene un par $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tal que $y_1 = y_0 + \Delta$ y $x_1 = x_0 - \lambda\Delta$ con $(x_0, y_0) I (x_1, y_1)$ entonces se dice que λ es la *tasa de sustitución marginal* del atributo X con respecto al atributo Y en (x_0, y_0) . O sea, λ es aproximadamente la cantidad de X que el decisor está dispuesto a pagar por una unidad de Y dado que $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Si se tiene que la curva de indiferencia que pasa por (x_0, y_0) , está dada por $v(x, y) = c$, entonces la tasa de sustitución marginal λ en (x_0, y_0) puede ser obtenida de la siguiente fórmula

$$\lambda = - \left. \frac{dx}{dy} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{v'_y(x_0, y_0)}{v'_x(x_0, y_0)}$$

donde v'_x y v'_y son las derivadas parciales de v con respecto al primer y segundo argumentos, respectivamente.

Recíprocamente, se puede ver que las tasas de sustitución ayudan a construir curvas de indiferencia.

Para ello, se considera la *condición de sustitución marginal consistente*: para cualesquiera $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ y $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$ tales que

- $(x_1, y_1) I_X (x_1 - a, y_1 + b)$
 - $(x_1, y_2) I_X (x_1 - a, y_2 + c)$
 - $(x_2, y_1) I_X (x_2 - d, y_1 + b)$
- entonces $(x_2, y_2) I_X (x_2 - d, y_2 + c)$

Esta afirmación proporciona condiciones necesarias y suficientes para el siguiente resultado.

Teorema. Una estructura de preferencias es aditiva y, por tanto, tiene una función de valor de la forma

$$v(x, y) = v_x(x) + v_y(y)$$

donde v_x y v_y son funciones de valor si y sólo si la correspondiente condición de sustitución marginal consistente es satisfecha.

Claramente, si existe tal función aditiva la condición de sustitución marginal consistente se cumple. Sin embargo, el recíproco probado por Luce y Tukey (1964) es más difícil de demostrar.

Ahora, considérese el caso con más de dos atributos, $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Sea $x = (y, z)$, donde y representa aquellos componentes en un subconjunto previamente especificado de los índices $\{1, 2, \dots, n\}$ y z representa aquellos componentes de x en el complemento del conjunto de índices. Sin pérdida de generalidad, se pueden permutar los índices de tal manera que y represente los primeros s índices en x y z represente los $n-s$ restantes, de esta forma, se tiene una partición natural de los atributos, es decir

$$Y = \{X_1, \dots, X_s\} \text{ y } Z = \{X_{s+1}, \dots, X_n\}$$

Se dice que Y es *preferencialmente independiente* de Z si y sólo si

$$(y', z') P_x (y'', z') \text{ para algun } z' \Rightarrow (y', z) P_x (y'', z) \quad \forall z, y', y''$$

Los atributos X_1, \dots, X_n son *mutuamente preferencialmente independientes* si para cualquier subconjunto Y de estos atributos es preferencialmente independientes de su complemento.

Teorema. Sean X_1, \dots, X_n , $n \geq 3$, una función de valor aditiva

$$v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i)$$

existe (donde v_i es una función de valor sobre X_i) si y sólo si los atributos son preferencialmente mutuamente independientes.

La prueba formal de este teorema se encuentra en Fishburn (1970). Además si v es una escala de intervalo, es decir, si w es cualquier otra función de valor multiatributo aditiva, entonces $w(x) = \alpha v(x) + \beta$, para algún $\alpha > 0$.

Una función de valor multiatributo $v: X \rightarrow \mathfrak{R}$ se dice que es *lineal* si es de la forma

$$v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

donde $w_i \in \mathfrak{R}, \forall i = 1, \dots, n$

La teoría de valor multiatributo sirve de apoyo para desarrollar la teoría de utilidad multiatributo donde se manejan escenarios de completa incertidumbre. Primero se hablará a grandes rasgos de la teoría de utilidad con un solo atributo, para después utilizarla como herramienta en el caso multiatributo.

Supóngase que el decisor puede ordenar las consecuencias $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de acuerdo con sus preferencias de tal manera que x_1 sea menos preferida que x_2 , la cual es menos preferida que x_3 , y así sucesivamente. Es decir

$$x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$$

Además suponga que al decisor se le cuestiona para expresar sus preferencias mediante distribuciones de probabilidad sobre estas consecuencias. Una *lotería* típica se representa por

$$l = \langle p_1, x_1; p_2, x_2; \dots; p_n, x_n \rangle$$

donde $p_i \geq 0$ es la probabilidad de ganar x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Puesto que la utilidad es relativa y no absoluta, se establece un origen o punto de referencia y una unidad de medida, arbitrariamente se asignan utilidades a dos de las consecuencias, y entonces las utilidades estimadas para las otras consecuencias dependen de las otras dos. Sean x^0 y x^* la peor y la mejor consecuencia, respectivamente, y la escala asignada es

$$u(x^0) = 0 \quad u(x^*) = 1$$

estimamos para cada una de las otras consecuencias x , una probabilidad p tal que x es indiferente a la lotería $\langle p, x^*; (1-p), x^0 \rangle$, denotada también por $\langle x^*, p, x^0 \rangle$, luego

$$u(x) = pu(x^*) + (1-p)u(x^0) = p$$

Si las utilidades fueron estimadas de esta forma para todas las x 's entonces se tiene que verificar su consistencia.

En lo sucesivo se supone que la función de utilidad estimada es monótonicamente creciente o decreciente, y también se exponen algunos resultados y definiciones básicos.

Sea $l = \langle p_1, x_1; p_2, x_2; \dots; p_n, x_n \rangle$ una lotería, se denotará por \bar{x} la *consecuencia esperada* de la lotería donde

$$\bar{x} = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Y la utilidad esperada para esta lotería es

$$E[u(\bar{x})] = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$$

Se define el *equivalente bajo certeza* de la lotería l como una cantidad \hat{x} tal que el decisor es indiferente entre la lotería l y la cantidad \hat{x} con certeza. Por tanto, \hat{x} es definido por

$$u(\hat{x}) = E[u(\bar{x})]$$

Dos funciones de utilidad u_1 y u_2 son *estratégicamente equivalentes*, si y sólo si implican la misma estructura de preferencias para cualesquiera dos loterías.

Una *lotería no degenerada* es aquella donde ninguna consecuencia tiene probabilidad uno de ocurrir.

Intuitivamente se piensa en una persona aversa al riesgo como aquella que es conservadora, es decir, prefiere lo seguro a lo aleatorio. Luego, un decisor es *averso al riesgo* si prefiere la consecuencia esperada de cualquier lotería no degenerada a la misma lotería. Análogamente, un decisor es *propenso al riesgo* si prefiere la lotería no degenerada a la consecuencia esperada de dicha lotería.

La *prima de riesgo PR* de una lotería l es su valor esperado menos su equivalente bajo certeza

$$PR(l) = \bar{x} - \hat{x}$$

La *función de aversión al riesgo local* en x , escrita como $r(x)$, está definida por

$$r(x) = \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Teorema. Un decisor es averso al riesgo si y sólo si su función de utilidad es cóncava (Ver prueba en Keeney y Raiffa, 1976)

Teorema. Un decisor es propenso al riesgo si y sólo si su función de utilidad es una función convexa.

Teorema. Dos funciones de utilidad son estratégicamente equivalentes si y sólo si tienen la misma función de aversión al riesgo.

Respecto a la teoría de utilidad multiatributo, muchos de los conceptos y resultados utilizados en la teoría con un solo atributo se repiten. Además la teoría de utilidad con un solo atributo sirve de apoyo al caso multiatributo, pues siempre se intentará que la función de utilidad en cuestión sea expresada en términos de funciones de

utilidad con un solo atributo. Así, algunos resultados como la independencia en utilidad y la independencia aditiva son condiciones para lograr lo anterior.

En el caso multicriterio se considera la siguiente terminología y notación. El conjunto de atributos X se denota por $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Si Y es un subconjunto de X , se refiere al conjunto de atributos Y simplemente como el atributo Y , y el complemento de este conjunto se denotará como \bar{Y} .

En vez de decir que Y_1 es independiente en utilidad de su complemento o que Y_2 es preferencialmente independiente de su complemento, se escribirá Y es *IU* y Y_2 es *PI* respectivamente. Cuando se considera al subconjunto Y de X y a su complemento \bar{Y} , se designará la consecuencia x por (y, \bar{y}) .

El símbolo $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (y^*, \bar{y}^*)$ denota la consecuencia más deseable y $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ) = (y^\circ, \bar{y}^\circ)$ denota a la menos preferible y se asigna $u(x^*) = 0$ y $u(x^\circ) = 1$.

Definición. El atributo Y , $Y \subset X$, es preferencialmente independiente de su complemento si el orden de preferencias de las consecuencias involucran cambios solo en los niveles de Y y no depende de los niveles en los cuales \bar{Y} se mantienen fijos.

Definición. El atributo Y es independiente en utilidad de su complemento, si el orden de preferencia condicional para las loterías involucran sólo cambios en los niveles de los atributos en Y , y no dependen de los niveles en los cuales \bar{Y} se mantienen fijos.

Por definición se tiene que si Y es *IU* entonces Y es *PI*, pero el recíproco no necesariamente es verdadero.

Definición. Los atributos X_1, X_2, \dots, X_n , son mutuamente independientes en utilidad si todo subconjunto de $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es independiente en utilidad de su complemento.

Teorema. Dado el conjunto de atributos $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ con $n \geq 2$, si X_i $i=1, 2, \dots, n$ es independiente en utilidad de su complemento, entonces

$$u(x) = \sum_{i=1}^n k_i u_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} k_{ij} u_j(x_j) u_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \sum_{l>j} k_{ijl} u_i(x_i) u_j(x_j) u_l(x_l) + \dots + k_{12\dots n} u_1(x_1) \dots u_n(x_n)$$

donde

1. u es normalizada por $u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ y $u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 1$
2. $u_i(x_i)$ es la función de utilidad condicional en X_i normalizada por $u_i(x_i^0) = 0$ y $u_i(x_i^*) = 1$
3. Las constantes pueden ser evaluadas por

$$k_i = u(x_i^*, \bar{x}_i^0)$$

$$k_{ij} = u(x_i^*, x_j^*, \bar{x}_{ij}^0) - k_i - k_j$$

$$k_{ijk} = u(x_i^*, x_j^*, x_k^*, \bar{x}_{ijk}^0) - k_{ij} - k_{jk} - k_{ki} - k_i - k_j - k_k$$

⋮

$$k_{12\dots n} = u(x^*) - \sum_i k_{1\dots(i-1)(i+1)\dots n} - \dots - \sum_{i,j>i} k_{ij} - \sum_i k_i$$

(La demostración se encuentra en Keeney y Raiffa, 1976)

Definición. Los atributos X_1, X_2, \dots, X_n son independientemente aditivos si las preferencias sobre las loterías en X_1, X_2, \dots, X_n dependen sólo de sus distribuciones de probabilidad marginal y no de su distribución de probabilidad conjunta.

Teorema. (Fishburn) La función de utilidad aditiva

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i, \bar{x}_i^0) = \sum_{i=1}^n k_i u_i(x_i)$$

es apropiada si y sólo si se tiene la condición de independencia aditiva entre los atributos X_1, X_2, \dots, X_n donde

1. u es normalizada por $u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ y $u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 1$
2. $u_i(x_i)$ es la función de utilidad condicional de X_i normalizada por $u_i(x_i^0) = 0$ y $u_i(x_i^*) = 1$
3. $k_i = u(x_i, \bar{x}_i^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$

(Keeney, R. S., Raiffa H., 1976)

La principal ventaja de la función de utilidad aditiva es su relativa simplicidad, aunque no siempre se cumplen todas las suposiciones necesarias.

Frecuentemente se espera que la utilidad de una lotería no dependa solamente de las distribuciones de probabilidad marginales de los respectivos atributos, pero

también de su distribución de probabilidad conjunta. Por tanto, es difícil determinar si las suposiciones requeridas podrían ser razonables en un problema real específico. Esta dificultad se presenta porque las suposiciones enunciadas en términos de las preferencias del decisor, sobre las distribuciones de probabilidad sobre las consecuencias con más de un atributo, variando simultáneamente.

1.3.3 Métodos Interactivos

En la programación matemática tradicional se trabaja con un solo objetivo, como minimizar costos o maximizar ganancias. Sin embargo, cualquier problema real involucra más de un objetivo. Para resolver este tipo de problemas se han creado diversos métodos tales como los interactivos.

Los *métodos interactivos* son procedimientos que consisten en fases alternadas de cálculo y discusión. En cada interacción se examina una alternativa (o grupo de alternativas) y el decisor incorpora esa información al proceso de solución. La discusión entre las etapas permite al decisor considerar las propuestas del analista y dar información adicional acerca de sus preferencias, que se introducen en el modelo en la siguiente fase de cálculo. (Steuer, R., 1985)

Esta estrategia facilita la intervención del ser humano, ya que permite correcciones intermedias en el proceso de búsqueda de una solución satisfactoria o cercana a la óptima. La mayoría de los métodos interactivos propuestos se refieren a programas lineales multiobjetivos. Antes de abordar algunos de estos procedimientos es importante conceptualizar ciertos términos que se utilizan en el transcurso de descripción de los procesos.

Un programa lineal multiobjetivo (PLMO) es escrito como

$$\begin{aligned} & \max\{c^1x = z_1\} \\ & \max\{c^2x = z_2\} \\ & \vdots \\ & \max\{c^kx = z_k\} \\ & \text{s.a } x \in S \end{aligned}$$

o también

$$\max\{Cx = z | x \in S\}$$

donde k es el número de objetivos.

c^i es el gradiente (vector de los coeficientes de la función objetivo (n -componentes) de la i -ésima función objetivo.

z_i es el vector criterio (valor de la función objetivo, z -valor) del i -ésimo objetivo.

S la región factible.

C la matriz criterio de $k \times n$ (matriz de coeficientes de la función objetivo) cuyas filas son los gradientes c^i de las k funciones objetivo.

z es el valor criterio (vector de la función objetivo, z -vector).

En este tipo de procedimientos S denota la región factible en el espacio de decisión y Z denota la región factible en el espacio criterio, es decir, $Z = \{z \in \mathfrak{R}^k \mid z = Cx, x \in S\}$, es el conjunto de imágenes de todos los puntos en S . (Steuer, R. y Gardiner, L., 1990).

También se considera que dados dos vectores criterios $z^1, z^2 \in \mathfrak{R}^k$ se dice que z^1 *domina* a z^2 si y sólo si $z^1 \succeq z^2$ y $z^1 \neq z^2$.

Un vector criterio se define *no-dominado* si no es dominado por cualquier otro vector criterio factible y al conjunto de todos estos elementos se denota por N . Además se dice que un vector $x \in S$ es *eficiente* si su vector criterio es no dominado por el vector criterio de algún otro punto de S .

Con base en estos conceptos lo que se pretende en los métodos interactivos es encontrar una función de utilidad o de valor que resuelva el programa

$$\begin{aligned} & \max \{u(z_1, z_2, \dots, z_k)\} \\ & \text{s.a. } f_i(x) = z_i \\ & \quad x \in S, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

considerando un conjunto inicial de soluciones, es decir, un conjunto de puntos eficientes en la región factible. Por lo que, cualquier solución que resuelva este programa es una solución del programa lineal multiobjetivo. Sin embargo, este tipo de problemas no se resuelven de esta forma puesto que es difícil obtener una representación exacta de la función de utilidad para emplearla en el programa dada arriba. En consecuencia, se utilizan métodos principalmente interactivos que requieren un conocimiento implícito, más que explícito de la función de utilidad; además producen una solución final que es la óptima o la más cercana a la óptima para terminar satisfactoriamente el proceso de decisión.

Varios métodos interactivos han sido propuestos. Todos ellos se basan en una progresiva articulación de preferencias, intentan alcanzar la mejor solución, por lo regular, mediante la optimización de un solo objetivo relacionado al programa lineal

multiobjetivo original. Varios de estos métodos se distinguen por la clase de información requerida por el decisor, así como también por el tipo de programa de un solo objetivo usado para estimar una nueva solución en cada iteración.

La mayoría de estos métodos tienen algunas desventajas. Éstas pueden referirse a la convergencia, la simplicidad de la información requerida, la insensibilidad de las estimaciones erróneas y la eficiencia de las soluciones.

Algunos métodos, como el método de Benson de Metas Satisfactorias, requieren del decisor para determinar su nivel de aspiración para cada objetivo en una forma interactiva durante el proceso. Aunque este enfoque parece interesante, la determinación de metas factibles iniciales es difícil y consume mucho tiempo, además carece de racionalismo para las soluciones obtenidas.

Otros métodos exploran directamente la función de utilidad y buscan la mejor solución a través de maximizaciones sucesivas de las funciones de utilidad estimadas localmente en cada iteración, además también suponen la linealidad de la función de utilidad.

En este documento se analiza un nuevo método interactivo que supera algunas de estas limitaciones, empleando la idea de diferencia de preferencia y de escala de intervalo.

CAPITULO II: METODO MACBETH

2.1 Introducción

En la actualidad, existen muchos métodos utilizados en la ayuda a la decisión multicriterio, que apoyan en las fases de estructuración y evaluación. Estos métodos se han creado con la finalidad de ofrecer al decisor una propuesta concerniente a la solución del problema considerado. Sin embargo, ellos difieren en la manera de llegar a tal propuesta, por ejemplo, en la forma de dialogar e interactuar con el decisor, el algoritmo, el enfoque, agregación de los criterios, asignación de pesos (si es que se requiere y se puede), modelo de evaluación, etc.

El método MACBETH ofrece una alternativa para abordar ciertos problemas de decisión, en la cual la participación del factor humano es determinante para llegar a una solución satisfactoria.

El método MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) es un método interactivo que mide el grado de preferencia de un decisor sobre un conjunto de alternativas además de indicar qué tanto se prefiere una sobre otra.

Este método lo crearon Carlos Bana e Costa, de la Universidad de Lisboa, Portugal y Jean Claude Vansnick de la Universidad de Mons-Hainaut, Bélgica, en 1994. Lo propusieron para usarse en la fase de evaluación de un proceso de ayuda a la decisión para construir una función criterio de un punto de vista fundamental y para determinar los parámetros relacionados con la información entre criterios (pesos) en un procedimiento de agregación.

Para la construcción de la función criterio de cada punto de vista, la preferencia es local, es decir, que los juicios del decisor D conciernen únicamente a un solo punto de vista fundamental, mientras que, para determinar los pesos, los juicios del decisor acerca de la preferencia total de las alternativas permiten a MACBETH representar la información de manera cuantitativa mediante la relación de todos los criterios dentro de un modelo de evaluación global.

2.2 Desarrollo del método MACBETH

Para explicar en qué consiste y cómo funciona MACBETH se presenta una aplicación realizada por Bana e Costa en la ciudad de Lisboa, Portugal, (Bana e Costa C., Nunes da Silva, F., 1994) en la cual el método se utiliza en la evaluación

de la proyectos alternativos propuestos por tres grupos de contratistas, mediante la construcción de funciones criterios y al mismo tiempo la asignación de pesos para la evaluación global.

Problema de construcción de una línea ferroviaria

La construcción de una nueva línea ferroviaria que se enlace al puerto de Lisboa se ha postergado en varias ocasiones, debido a que varias empresas contratistas tienen diferentes intereses, estas empresas son la Cámara Municipal de Lisboa (CML), el Gabinete de Nodos Ferroviarios de Lisboa (GNFL) y la Compañía Ferroviaria Portuguesa (CP). El desarrollo del plan de urbanización de Alcántara (la zona de la ciudad donde se pretende unir la línea ferroviaria al puerto) presentó una alternativa para disolver el conflicto, es decir, consideró una solución que tome en cuenta los diferentes sistemas de valores de los contratistas.

La problemática radicaba en que el enlace ferroviario del puerto de Lisboa, en la zona de Alcántara, se desarrollaba en un lugar que atraviesa a tres avenidas importantes de la ciudad de Lisboa, siendo éstas la Av. 24 de Julio y el sistema formado por la Av. de la India y la Av. de Brasilia, esta zona forma un centro principal de vialidad, donde circulan mas de 3000 vehículos en horas pico. Este hecho impedía que se tuviera una eficaz exploración y estudio del transporte ferroviario en el servicio a el puerto, ya que se realizaba en un horario nocturno o en horas sin mucho tránsito del fin de semana para no perturbar el tránsito vehicular.

Se propusieron nueve soluciones técnicamente viables para resolver el problema del acceso ferroviario del puerto de Lisboa en la zona de Alcántara. Dos propuestas provinieron del GNFL y otras tres de la CML. Cada uno de estos dos grupos de alternativas reflejaron las principales preocupaciones de los proponentes, dejando en segundo término el resto de los puntos de vista. El GNFL se interesó por los aspectos técnicos asociados a la complejidad de las obras a realizar y el costo de la construcción de la nueva infraestructura, y CML se preocupó por los aspectos de impacto urbanístico y ambiental de la nueva línea ferroviaria sin importarle demasiado los costos de la construcción. Antes de la creación de GNFL, la compañía portuguesa CP contempló otras cuatro alternativas que buscaban, en niveles diferentes, un cierto acuerdo con la CML.

El ambiente en el que se desarrolló este problema se caracterizó por la defensa intransigente del sistema de valores de cada interventor. En este contexto, se formó un equipo de planeación que asesorara a estas empresas para encontrar una "buena" solución aceptada por los interventores, mediante un marco metodológico de ayuda a la decisión desarrollado en dos fases: la estructuración de la situación problemática y el modelo de evaluación. (Bana e Costa, C. y Nunes F., 1994. Bana e Costa C. y Vansnick, J., 1997).

Fase de estructuración

En esta etapa se determinaron los puntos de vista, o sea, todos aquellos aspectos que un actor (al menos) considere relevantes para la evaluación. Para la determinación de los puntos de vista se tomaron en cuenta a objetivos e intereses específicos, características actuales de las empresas y posibles consecuencias de acciones potenciales. Esto llevó a los actores involucrados en el proceso de decisión a identificar puntos de vista fundamentales (*PVF*), o sea, aquellos puntos de vista en los que el decisor puede transformar, argumentar o justificar sus preferencias. Frecuentemente, los puntos de vista fundamentales son un grupo de varios puntos de vista interrelacionados y se pueden agrupar en áreas de interés.

Después de establecer una primera etapa de negociación y discusión, el equipo de estudio definió nueve *PVF* que se agruparon en cuatro áreas de interés: *Impacto Ambiental y Urbanístico*, *Integración en el Sistema de Transportes*, *Complejidad de Construcción y Cargos en la Construcción*.

En el área de *Impacto Ambiental y Urbanístico* están los puntos de vista fundamentales: *Integración visual o paisajística (PV₁)* y *Efecto del Corte en la Estructura Urbana (PV₂)*.

El área de *Integración en el Sistema de Transportes* contiene a los puntos de vista fundamentales: *Conexión con otros nodos de transporte (PV₃)*, *Centralización Urbana de las Estaciones (PV₄)* y *Enlace a la Terminal del Puerto (PV₅)*.

El área de *Complejidad de Construcción* contempla a los *PVF* de *Complejidad de las Obras por realizar (PV₆)*, *Conflictos con otras Infraestructuras (PV₇)* y *Posibilidad de Dividir la Construcción (PV₈)*.

Finalmente, el área de *Cargos en la Construcción* tiene al punto de vista de *Costos de Construcción (PV₉)*.

El equipo de planeación propuso a la segunda área de interés, debido a que se preocupó por la calidad global de servicio de transporte prestado. De esta manera, el equipo de planeación consideró el punto de vista fundamental *posibilidad de división de la construcción*, que atendiera a la necesidad de mantener el complejo de Alcántara en exploración durante la construcción de la nueva línea.

Para describir operacional, cuantitativa o cualitativamente, las consecuencias estimadas para cada punto de vista fundamental de las compañías, se requirió de un conjunto ordenado de niveles de impacto recomendables o admisibles, que se llama *descriptor*.

Una actividad importante en el proceso de decisión es definir cuidadosamente los niveles de impacto, pues varios descriptores de alternativas pueden ser definidos

eventualmente por un mismo punto de vista fundamental (PVF), pero es esencial escoger sólo uno para evitar problemas redundantes.

Un descriptor puede ser *natural*, si sus niveles reflejan directamente efectos; *indirecto*, si es un indicador de causas más que de efectos; *construido*, si es un conjunto finito de niveles de referencia, definido frecuentemente por ordenaciones de combinaciones de estados respecto de varios puntos de vista. Además, un descriptor puede ser *cuantitativo* o *cualitativo* (o aún gráfico), y *continuo* o *discreto*.

También se definen dos niveles de impacto de referencia para cada PVF: uno *bueno*, que significa que la alternativa posee el mejor nivel de impacto respecto a un PVF particular; y otro *neutral*, significa que la alternativa tiene un nivel de impacto que ni es fuerte ni es débil respecto a un PVF.

Para este caso particular, se definieron los siguientes descriptores.

Puntos de vista	Descriptores de Impactos
PV_1	I_1 - Longitud en el viaducto, nivelación del terreno o zanja abierta en áreas expuestas (metros)
PV_2	I_2 - Longitud en metros de la línea o viaducto o zanja abierta en la cual la línea atraviesa áreas urbanas consolidadas (metros)
PV_3	I_3 - Número de interfases posibles con transportes colectivos
PV_4	I_4 - Cercanía de las estaciones a los principales generadores de tráfico existentes o futuros (escala cualitativa)
PV_5	I_5 - Facilidad de inserción al complejo de Alcántara en la zona del puerto (escala cualitativa)
PV_6	I_6 - Longitud del trazado en el túnel o en la zanja abierta en áreas geológicamente inestables (metros)
PV_7	I_7 - Sobreposición de el trazado con otras infraestructuras (escala cualitativa)
PV_8	I_8 - Posibilidad de dividir la construcción e implicaciones con el complejo de Alcántara (escala cualitativa)
PV_9	I_9 - Costo total de la construcción de la línea (miles de unidades monetarias)

Los descriptores o indicadores de impacto I_1 , I_2 , I_3 , I_6 y I_9 son descriptores cuantitativos, de los cuales los dos primeros son indirectos y el resto son directos, también I_3 es discreto y los otros cuatro son continuos. Por otro lado, los descriptores I_4 , I_5 , I_7 y I_8 son descriptores cualitativos y construidos, cada uno de ellos es un conjunto discreto de niveles de impacto admisibles. Un ejemplo de los niveles de impacto se puede contemplar para los puntos de vista *Centralización*

Urbana de las Estaciones (PV₄), Enlace con la terminal del puerto (PV₅), Conflictos con otras infraestructuras (PV₇) y División de la construcción (PV₈) fue:

Descriptor I ₄ del punto de vista PV ₄	
Niveles	Descripción
N5	<i>Todas las estaciones tienen buenos accesos viales y peatonales, situadas en áreas céntricas</i>
N4	<i>La mayoría de las estaciones tienen buenos accesos y se sitúan en áreas céntricas</i>
N3	<i>Los accesos son aceptables, pero la localización no siempre es central</i>
N2	<i>Los accesos son aceptables pero la localización no es céntrica</i>
N1	<i>Menos accesos y localización central</i>

Descriptor I ₅ del punto de vista PV ₅	
Niveles	Descripción
N6	<i>Acceso directo sin desviar las líneas actuales, y sin interferencia en el nodo de Alcántara</i>
N5	<i>Acceso directo modificando las líneas y sin interferencia en el nodo de Alcántara</i>
N4	<i>Acceso indirecto sin desviar las líneas y sin interferencia en el nodo de Alcántara</i>
N3	<i>Acceso indirecto modificando las líneas y sin interferencia en el nodo de Alcántara</i>
N2	<i>Acceso indirecto sin desviar las líneas y con interferencia en el nodo de Alcántara</i>
N1	<i>Acceso indirecto modificando las líneas y con interferencia en el nodo de Alcántara</i>

Descriptor I_7 del punto de vista PV_7	
Niveles	Descripción
N5	<i>Sin interferencia con alguna infraestructura</i>
N4	<i>Sin interferencia con la Av. de Ceuta, interferencia con sólo una de las otras dos infraestructuras</i>
N3	<i>Sin interferencia con la Av. de Ceuta e interferencia con las otra dos infraestructuras</i>
N2	<i>Interferencia con la Av. de Ceuta e interferencia con sólo una de las otras dos infraestructuras</i>
N1	<i>Interferencia con las tres infraestructuras</i>

Descriptor I_8 del punto de vista PV_8	
Niveles	Descripción
N5	<i>Es posible dividir la construcción de la nueva línea en todas sus secciones, mientras se mantiene en operación la línea vieja</i>
N4	<i>Es posible dividir la construcción en sólo dos secciones mientras se mantiene en operación la línea vieja</i>
N3	<i>Es imposible dividir la construcción de la línea, mientras se mantiene en operación la línea vieja</i>
N2	<i>Es posible dividir la construcción en sólo dos secciones, pero no se puede mantener en operación la línea vieja</i>
N1	<i>Es imposible dividir la construcción o mantener en operación la línea antigua</i>

Una vez definidos los descriptores, fue posible determinar para cada una de las alternativas propuestas por los diferentes actores (GNFL, CML y CP), los respectivos impactos de los nueve puntos de vista considerados. El resultado del análisis que se efectuó se presenta en la siguiente tabla.

	GNFL	GNFL	CML	CML	CML	CP	CP	CP	CP
	1	2	1	2	3	1	2	3	4
$i_1(.)$	1500	1440	495	0	215	450	450	1630	0
$i_2(.)$	1200	1020	400	260	300	580	700	1120	0
$i_3(.)$	2	2	1	1	1	1	2	2	1
$i_4(.)$	N4	N4	N3/N2	N3/N2	N3/N2	N3	N4	N5	N3
$i_5(.)$	N3	N3	N4	N6	N6	N1	N1	N1	N5
$i_6(.)$	156	156	750	1505	975	566	0	0	1170
$i_7(.)$	N5	N4	N5	N4	N5	N4	N2	N2	N5
$i_8(.)$	N3	N1	N3	N3	N3	N3	N3	N2	N3
$i_9(.)$	2.29	2.37	3.96	5.47	4.76	6.53	6.79	3.22	5.70

La definición de descriptores de impactos recomendables o admisibles fue esencial para aclarar el significado de los PVFs y evitar la ambigüedad. En general, este paso en la estructuración contribuye a mejorar la comunicación entre los actores del proceso de decisión y al diseño de acciones estratégicas.

Modelo de evaluación

Si bien la fase de estructuración es una parte importante en el proceso de decisión, la fase de evaluación también es de gran relevancia, pues permite incorporar todos los aspectos que se involucran en la problemática y proporcionar una representación de toda la información cualitativa o cuantitativa mediante un modelo.

Para la construcción de un modelo de evaluación se consideraron varias actividades interactivas: medir la preferencia (parcial) de los proyectos en cada PVF mediante la construcción de funciones de valor; armonizar (homogeneizar) los valores parciales a través de los PVFs mediante la asignación de escalas a los rangos de los niveles de impactos; sugerir a los actores una revisión eventual de sus juicios originales y de los resultados del modelo para establecer una retroalimentación en el proceso de decisión.

En esta fase de evaluación se requirió construir funciones de valor para cada punto de vista, por lo que se utilizó el método MACBETH, el cual parte de las siguientes bases.

Primero se considera un conjunto de alternativas A para el cual un decisor desea cuantificar sus juicios de preferencias sobre este conjunto. Para este fin, el enfoque MACBETH ayuda a construir una escala numérica $v:A \rightarrow \mathcal{R}^+$ tal que:

(1) $\forall a, b \in A, v(a) > v(b)$ si y sólo si D prefiere a a que a b (aPb)

(2) $\forall a, b, c \in A$ con aPb y cPd , $v(a)-v(b) > v(c)-v(d)$ si y sólo si la diferencia de preferencia entre a y b es más grande que la diferencia de preferencia entre c y d .

Esto significa que para esta escala, la idea de *diferencia de preferencia* es significativa, en el sentido de que a parte de cuantificar las preferencias, se encuentra qué tan intensa es esa preferencia entre dos alternativas. Existen varias técnicas para construir una función de valor, sin embargo, la dificultad de las preguntas que el decisor debe responder hace que la noción de función de valor sea difícil de operar en la práctica (Bana e Costa C., Vansnick J., 1994) Este método consta de dos etapas para encontrar tal función :

- *Primera etapa:* Usa un proceso de preguntas muy simple que involucra a sólo dos alternativas en cada pregunta, y asigna un número $v(a)$ a cada alternativa a de A para la cuantificación de la información de preferencias proporcionada por el decisor D .
- *Segunda etapa:* Se realiza una discusión con el decisor D acerca de la cardinalidad de la escala v construida en la primera etapa. (Bana e Costa, C y Vansnick, J., 1995).

En este ejemplo, no se evalúan directamente las alternativas, sino que se contemplan a los niveles de impacto, a saber un conjunto S de niveles de impacto, que se hayan encontrado para cada PVF , que se basó en los juicios de preferencia que el decisor siente sobre S . O sea, que se construye una escala numérica sobre S . Esto se debe a que es más fácil cuantificar los niveles de impacto de cada PVF , y significa que las evaluaciones de las alternativas (en este caso los proyectos) se realizarán vía las evaluaciones de los niveles de impacto.

El proceso de preguntas consiste en cuestionar al decisor D , de manera verbal, acerca de la diferencia de preferencia que siente entre dos alternativas a, b con aPb (el decisor prefiere a la alternativa a que a b) mediante la selección de una de las siguientes categorías semánticas: (Bana e Costa, C. y Vansnick, J., 1994)

- C_2 diferencia de preferencia **débil**
- C_4 diferencia de preferencia **fuerte**
- C_6 diferencia de preferencia **extrema**

o, en caso de titubeo, una de las tres categorías intermedias:

- C_1 diferencia de preferencia **muy débil**
- C_3 diferencia de preferencia **moderada**
- C_5 diferencia de preferencia **muy fuerte**

Para cada punto de vista fundamental, las categorías (que son relaciones binarias asimétricas) C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 constituyen una partición de $P = \{(a, b) \in A \times A \mid D \text{ prefiere a } a \text{ que a } b\}$, o sea

$$P = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$$

Por lo tanto, la idea general de MACBETH es determinar simultáneamente:

- una aplicación $v: A \rightarrow \mathfrak{R}$ que asocia a cada elemento a de A un número real $v(a)$

- seis números reales $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ tales que

$$(3) \quad 0 = s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5 < s_6$$

$\forall a, b \in A:$

$$(4) \quad \begin{cases} \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}: s_k < v(a) - v(b) \leq s_{k+1} \Leftrightarrow (a, b) \in C_k, k \neq 6 \\ s_6 < v(a) - v(b) \Leftrightarrow (a, b) \in C_6 \end{cases}$$

Es decir, lo que pretende el método MACBETH es encontrar aquella función que permita evaluar los juicios de preferencias del decisor y determinar simultáneamente los escalares que delimiten los intervalos asociados a las categorías semánticas.

Para lograr este propósito se suponen las siguientes hipótesis:

- La relación binaria P que modela los juicios de preferencias de D acerca de los elementos de A , es un orden débil estricto.
- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ tal que $\forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i P a_j \Leftrightarrow i > j$ es decir, el ordenamiento completo de los elementos de A por orden de preferencia decreciente es $a_n P a_{n-1} P \dots P a_2 P a_1$. En este paso el decisor proporciona una ordenación inicial de sus preferencias

Considerando estas condiciones, durante el proceso de preguntas se llena una matriz con los juicios categóricos de D , llamada *matriz de juicios*

	a_n	a_{n-1}	\dots	a_2	a_1
a_n		$a_{n,n-1}$	\dots	$a_{n,2}$	$a_{n,1}$
a_{n-1}			\dots	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,1}$
\vdots			\ddots	\vdots	\vdots
a_2				\vdots	$a_{2,1}$
a_1					

donde $\forall i > j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: $a_{i,j} = k \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in C_k$

Para el caso que se contempla, si se toma al descriptor del PV_7 *Conflictos con otras infraestructuras*, por ejemplo, se tiene la siguiente matriz de juicios:

	N5	N4	N3	N2	N1
N5	0	5	5	5	6
N4		0	4	5	6
N3			0	4	5
N2				0	4
N1					0

Se puede ver que el "5" en la intersección de la línea de N4 con la columna de N2 significa que $(N4, N2) \in C_5$, es decir, la diferencia de preferencia entre estos dos niveles de impactos se juzga "muy fuerte". De manera análoga se determinan las matrices de juicios para cada uno de los conjuntos descriptores.

Una vez que se formó la matriz de juicios inicial del decisor, se procedió a buscar la funciones criterios para cada PVF.

Al mismo tiempo que se desea cumplir con los objetivos de MACBETH para representar numéricamente la información cualitativa que proporciona el decisor D , se requieren también algunas reglas de medición. Para estimar la escala numérica se usan dos reglas básicas:

Regla 1

$$\forall a, b \in A: aPb \Leftrightarrow v(a) > v(b)$$

Regla II

$$\forall k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ con } k \neq k' \text{ y } \forall a, b, c, d \in A \text{ con } (a, b) \in C_k \text{ y } (c, d) \in C_{k'}$$
$$k > k' \Leftrightarrow v(a) - v(b) > v(c) - v(d)$$

esto significa que, cuando los pares de alternativas (a, b) y (c, d) no pertenecen a la misma categoría, la diferencia entre los números asociados a a y b es estrictamente más grande que la diferencia entre los números asociados a c y d si y sólo si la diferencia de preferencia entre a y b se considera más grande que la diferencia de preferencia entre c y d .

La justificación para incluir la restricción $k \neq k'$ en la regla II es que, cuando (a, b) y (c, d) son asignados a la misma categoría, no existe información acerca de la relación entre las diferencias numéricas $v(a) - v(b)$ y $v(c) - v(d)$. En particular, no hay razón para suponer que $v(a) - v(b) = v(c) - v(d)$, como algunos métodos que abusan al asociar cada categoría con un solo número. (Bana e Costa, C., Vansnick, J.; 1995, Bana e Costa, C., Vansnick, J., 1997)

Consistencia y coherencia semántica

Para determinar los números reales $v(a)$ y s_2, s_3, s_4, s_5 y s_6 que satisfacen (3) y (4) se tienen que verificar algunas condiciones lógicas.

Una de estas condiciones que se tienen que verificar es que $\forall a, b, c \in A$ con aPb y bPc y $\forall k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si $(a, b) \in C_k$ y $(b, c) \in C_{k'}$, de la condición (4) se sigue inmediatamente que $(a, c) \in C_{k''}$ con $k'' \geq \max\{k, k'\}$, esta condición se llama *condición de consistencia*. Esto significa que si se tienen a dos pares de alternativas, con una alternativa en común, al considerar el par de alternativas formada por las dos no comunes, la diferencia de preferencia de este par es al menos tan fuerte como la mayor de una de las dos dadas originalmente. En el método MACBETH la condición de consistencia se prueba verificando que:

En cada fila de la matriz de los juicios de diferencia de preferencia del decisor D, los valores $a_{i,j}$ no decrecen de izquierda a derecha, y en cada uno de sus columnas los valores $a_{i,j}$ no se incrementan de arriba hacia abajo.

Ésta es una prueba fácil de practicar, la cual identifica inmediatamente cuáles serían los juicios que causan perturbación, en un ambiente de retroalimentación en el proceso, si el decisor lo desea, modifica los juicios iniciales que proporcionó. Se puede ver que la matriz de juicios del descriptor de *Conflictos con otras Infraestructuras* satisface esta condición.

Otra condición que también verifica este método es la *condición de coherencia semántica*:

$$\forall a, b \in A \text{ y } \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \left. \begin{array}{l} (a, b) \in C_1 \wedge (b, c) \in C_k \\ \vee \\ (a, b) \in C_k \wedge (b, c) \in C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, c) \in C_k \cup C_{k+1}$$

Nota: esta condición no es estrictamente necesaria para garantizar la existencia de los números reales $v(a)$ y s_2, s_3, s_4, s_5 y s_6 tales que satisfacen (3) y (4).

La inclusión de esta hipótesis impide que cuando se considere una diferencia de preferencia *muy débil* se tenga un salto a más de una categoría. Es decir, que cuando se tienen a dos pares de alternativas, con una en común, donde un par pertenece a la categoría C_1 , no es posible que el par de alternativas formado por las dos no comunes, tengan una diferencia de preferencia que rebase en más de una unidad a la más fuerte de estas categorías.

Desde el punto de vista matemático, la coherencia semántica corresponde a considerar la hipótesis de que los umbrales s_2, s_3, s_4, s_5 y s_6 verifican la siguiente condición suplementaria

$$\forall k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}: s_k - s_{k-1} \geq s_1 \quad (5)$$

En la práctica, la prueba de coherencia semántica es fácil de realizar en la matriz de los juicios absolutos de D , donde los valores $a_{i,j}$ deben verificar:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tal que } a_{i,i} = 1: \begin{cases} 1) \forall p > i: a_{p,i} - a_{p,i} \leq 1 \\ 2) \forall q < j: a_{i,q} - a_{j,q} \leq 1 \end{cases}$$

Para el ejemplo considerado, este tipo de coherencia no se verifica en el sentido de que ningún par de alternativas pertenece a la categoría C_1 . Cuando la coherencia semántica no se cumple se inicia una discusión interactiva con D y un proceso de revisión de sus juicios iniciales.

Coherencia teórica

Aún si las condiciones de consistencia y coherencia semántica se cumplen, para asegurar la existencia de los números reales $v(a)$ y s_2, s_3, s_4, s_5 y s_6 tales que satisfacen (3), (4) y, además, (5), se debe satisfacer una última condición.

Para facilitar la introducción de esta nueva condición, se afirma que (3) y (4) son equivalentes a (3') y

$$(4') \quad \forall a, b \in A: \begin{cases} v(a) > v(b) \Leftrightarrow (a, b) \in P_1 \\ v(a) > v(b) + s_2 \Leftrightarrow (a, b) \in P_2 \equiv C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \\ v(a) > v(b) + s_3 \Leftrightarrow (a, b) \in P_3 \equiv C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \\ v(a) > v(b) + s_4 \Leftrightarrow (a, b) \in P_4 \equiv C_4 \cup C_5 \cup C_6 \\ v(a) > v(b) + s_5 \Leftrightarrow (a, b) \in P_5 \equiv C_5 \cup C_6 \\ v(a) > v(b) + s_6 \Leftrightarrow (a, b) \in P_6 \equiv C_6 \end{cases}$$

En realidad, pedir que se cumpla las condiciones anteriores es lo mismo que ver que se satisfaga la siguiente proposición:

Proposición. Existe una escala numérica $v: A \rightarrow \mathcal{R}$ que satisface las reglas de medición I y II si y sólo si existen seis números reales s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 y s_6 que verifican las siguientes condiciones:

$$0 = s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5 < s_6 \text{ y } \forall a, b \in A, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, v(a) > v(b) + s_k \Leftrightarrow aP_k b \\ \text{donde } \forall a, b \in A, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}: aP_k b \Leftrightarrow (a, b) \in C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \cup C_6$$

Esto muestra que una representación mediante umbrales constantes de las relaciones binarias P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 puede ser posible. A esta condición se le llama *condición de coherencia teórica*.

El problema de la representación numérica de semiórdenes múltiples mediante umbrales constantes de una *m-ada* de relaciones binarias, definidas en un conjunto dado, ha sido estudiado y resuelto por Doignon en forma general. (Doignon, J. P., 1987; Bana e Costa, C., Vansnick, J., 1995)

En la práctica, las condiciones teóricas mencionadas anteriormente no son fáciles de verificar, por lo que se desarrolla un camino alternativo para la comprobación de la coherencia teórica. Esta opción consiste en resolver el siguiente problema de optimización, con variables $v(a), s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ y c

Programa *MC1*

Min c

s.a

r0) todas las variables son mayores o iguales que cero

r1) $s_2 = 1$ ($\Leftrightarrow s_2 - s_1 = 1$)

(la longitud del intervalo correspondiente a la categoría C_1 se fija como la unidad de diferencia de preferencia)

$$r2) s_{k+1} - s_k \geq 1, \quad \forall k \in \{2,3,4,5\} \quad (\text{condición 5})$$

$$r3) v(a_1) = 0 \quad \text{donde } \forall a \in A, \quad aPa_1$$

(el valor de la alternativa menos preferida a_1 se fija arbitrariamente igual a 0; esto no es restrictivo)

$$r4) v(a) - v(b) \geq \theta, \quad \forall a, b \in A: aPb \quad (\theta \text{ es un número real arbitrariamente pequeño o estrictamente positivo})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r5) \quad \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, \quad \forall (a,b) \in C_k: s_k + \theta - c \leq v(a) - v(b) \leq s_{k+1} + c \\ r6) \quad \forall (a,b) \in C_6: s_6 + \theta - c < v(a) - v(b) \end{array} \right.$$

La solución óptima del programa $MC1$, c_{min} , se considera como un **índice de incoherencia (teórica)**. Así, si $c_{min} = 0$ significa que la condición de la coherencia teórica se satisface y, por tanto, existen los números reales $v(a)$, s_2 , s_3 , s_4 , s_5 y s_6 que verifican (3), (4) y (5). Por otro lado, si $c_{min} > 0$ existe alguna incoherencia en los juicios verbales de D , en el sentido de que la representación numérica deseada no es posible. En este caso, MACBETH intenta identificar los juicios que producen la perturbación en una discusión con D acerca del problema de incoherencia detectado por $MC1$. Esto se realiza mediante otro programa lineal llamado $MC3$.

En este nuevo programa $MC3$, se introducen algunas variables auxiliares, además de las ya contempladas, y se expresa en la siguiente forma:

Programa $MC3$

$$\text{Min} \left[\sum_{(a,b) \in C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_6} \alpha(a,b) + \sum_{(a,b) \in C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_5} \beta(a,b) \right]$$

s.a.

$$r0), r1), r2), r3), r4)$$

$$r5') \quad \forall k \in \{1,2,3,4,5\} \quad \text{y} \quad \forall (a,b) \in C_k: s_k + \theta - c_{min} \leq v(a) - v(b) \leq s_{k+1} + c_{min}$$

$$r6') \quad \forall (a,b) \in C_6: s_6 + \theta - c_{min} \leq v(a) - v(b)$$

$$r7) \quad \forall k \in \{1,2,3,4,5\} \quad \text{y} \quad \forall (a,b) \in C_k: v(a) - v(b) = s_{k+1} + \beta(a,b) - \gamma(a,b)$$

$$r8) \quad \forall k \in \{1,2,3,4,5\} \quad \text{y} \quad \forall (a,b) \in C_k: v(a) - v(b) = s_k + \theta - \alpha(a,b) + \delta(a,b)$$

Las variables $\alpha(a,b)$ y $\beta(a,b)$ facilitan la identificación de los pares ordenados (a,b) que pueden ser la causa del problema de la incoherencia. Sin embargo, puede suceder que el número de pares identificados por $MC3$ sea grande.

Para superar este problema se desarrolla el programa *MC4*, que sugiere un número restringido de modificaciones de las categorías necesario para alcanzar la coherencia directamente.

Si el decisor ha asignado el par ordenado (a,b) a la categoría C_k y el programa no determinó los números $v(a)$ y $v(b)$ tales que la diferencia $v(a) - v(b)$ está en la categoría C_k :

- $\alpha(a,b)$ es estrictamente positivo si y sólo si $v(a) - v(b)$ es estrictamente menor a la cota inferior $s_k + \theta$ del intervalo correspondiente a la categoría C_k (en realidad $\alpha(a,b)$ es igual a la distancia entre $s_k + \theta$ y el punto que representa la diferencia de preferencia $v(a) - v(b)$)
- $\beta(a,b)$ es estrictamente positiva si y sólo si $v(a) - v(b)$ es estrictamente más grande que la cota superior s_{k+1} del intervalo correspondiente C_k (de hecho, $\beta(a,b)$ es igual a la distancia entre el punto que representa la diferencia de preferencia $v(a) - v(b)$ y s_k)

Las variables $\delta(a,b)$ y $\gamma(a,b)$ son sólo de interés técnico, se introducen para trabajar con variables positivas y facilitar la formulación de la función objetivo de los programas *MC3* y *MC4*.

La única diferencia entre los programas *MC3* y *MC4* es que las restricciones $r5'$ y $r6'$ no entran en *MC4*.

Si en el curso de su proceso cognoscitivo el decisor decide revisar algunos de sus juicios haciendo algunas modificaciones de categoría, la nueva matriz de juicios revisada se somete a la secuencia de pruebas de consistencia y coherencia presentadas anteriormente, y así, se inicia el ciclo interactivo de *MACBETH* de elaboración, modificación o aprobación de los juicios de la diferencia de preferencia del decisor. (Bana e Costa, C. y Vansnick, J., 1994)

Construcción de una escala de valor en *MACBETH*

Anteriormente se mencionó que cuando el índice de incoherencia c_{min} es igual a cero, uno puede asegurar que existen los números reales $v(a)$, s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 y s_6 que satisfacen (3), (4) y (5). El problema ahora es cómo determinar tales números. Obsérvese que cuando $c_{min} > 0$ podría ser interesante determinar los valores que "mejor reconcilian" los juicios incoherentes iniciales. Por lo que se apoya en otro programa llamado *MC2* que está ligado con el programa *MC1* que satisface las mismas restricciones de *MC1*, pero sustituye el valor c_{min} en las restricciones $r5)$ y $r6)$ de tal manera que:

- $\forall (a,b) \in C_k, k \in \{1,2,3,4,5\}$ la diferencia de preferencia $v(a) - v(b)$ esté tan cercana como sea posible al centro del intervalo correspondiente a C_k
- $\forall (a,b) \in C_6$ la diferencia de preferencia $v(a) - v(b)$ sea tan mínima como sea posible en el exterior del intervalo correspondiente a C_6

Para dar una respuesta a estos dos puntos se tiene el siguiente programa lineal, *MC2*:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{\substack{(a,b) \in C_k \\ k \in \{1,2,3,4,5\}}} [\varepsilon(a,b) + \eta(a,b)] + \sum_{(a,b) \in C_6} \alpha(a,b) \right\}$$

s.a.

$r0), r1), r2), r3), r4) r5') r6'), r7), r8)$

$$r9) \forall k \in \{1,2,3,4,5\}, \forall (a,b) \in C_k: v(a) - v(b) = \frac{s_k + s_{k+1}}{2} + \varepsilon(a,b) - \eta(a,b)$$

Con la formulación de la función objetivo de *MC2* se llegan a valores numéricos para la diferencia de preferencia de pares asignados a la misma categoría tales que, si es posible, estos pares están más cercanos entre ellos que los pares asignados a diferentes categorías. (Bana e Costa C.; Vansnick, J., 1994)

En algunas ocasiones, no existe una función compatible con la matriz de juicios resultante, en tal caso, MACBETH ofrece sugerencias mediante *MC3*, que da al decisor las perturbaciones. MACBETH siempre sugiere una escala numérica, en caso de inconsistencia, obviamente la escala viola algunas restricciones impuestas por las reglas de medición, pero se puede utilizar, si se desea, como una base para la discusión directa de valores asignados.

Para el problema considerado, con excepción de los puntos de vista *PV3* (cuyo descriptor solo tiene dos niveles) y los dos puntos de vista *PV6* y *PV9* (cuyas funciones fueron tomadas lineales sobre los descriptores respectivos), se aplicó MACBETH. En la siguiente tabla se tienen las escalas v_j propuestas por MACBETH, que fueron transformadas de tal manera que los niveles neutros tengan siempre el valor 0 y los niveles mejores o buenos tengan valor 100. Así, el nivel de impacto preferible (respectivamente, repulsivo) corresponden siempre a valores positivos (respectivamente negativos), según cada función criterio v_j .

	GNFL	GNFL	CML	CML	CML	CP	CP	CP	CP
	1	2	1	2	3	1	2	3	4
$v_1(.)$	-100	-89	-10	100	44	0	0	-122	100
$v_2(.)$	-89	-78	0	33	22	-22	-44	-88	100
$v_3(.)$	100	100	0	0	0	0	100	100	0
$v_4(.)$	68	68	0	0	0	23	68	100	23
$v_5(.)$	0	0	33	100	100	-67	-67	-67	67
$v_6(.)$	0	0	-481	-965	-625	-363	100	100	-750
$v_7(.)$	100	47	100	47	100	47	-47	-47	100
$v_8(.)$	0	-155	0	0	0	0	0	-55	0
$v_9(.)$	100	91	-80	-242	-166	-356	-384	0	-267

El valor local de cada propuesta a respecto a cada punto de vista PV_j es el valor $v_j(i_j(a))$ de los impactos $i_j(a)$. Nótese que $v_j(i_j(a))$ es una medida de valor intrínseca de a , una vez que se hace referencia al valor de nivel neutro y de mejor nivel.

2.3 Beneficios del método

Como se podrá ver, el enfoque MACBETH es una herramienta de gran utilidad en la ayuda a la decisión multicriterio, pues varios procedimientos de agregación requieren de la construcción de una escala cardinal que mida la preferencia para cada punto de vista fundamental, esta función de valor no es tan fácil de hallar, o en su defecto, se requiere cubrir varias condiciones para determinarla.

MACBETH ofrece una forma alternativa, para el decisor, de abordar el problema y le permite interactuar y participar en el proceso de decisión, además de que no sólo el decisor participa, sino que también colaboran, en la fase de estructuración, las personas inmersas en la problemática que proporcionan información, formando un equipo de trabajo completamente participativo.

Asimismo, muchos procedimientos requieren de la estimación de los pesos asociados a los criterios, siendo éstos, en muchas ocasiones, determinados a priori o en una forma arbitraria, sin tener la seguridad de que exista consistencia entre

ellos. Como es el caso de Saaty, que utiliza una escala en la cual los juicios los relaciona con radios (de prioridad o de importancia), esta asociación la realiza a priori, asignando un sólo valor numérico fijo de manera arbitraria para cada una de las categorías de radios, mientras que MACBETH asocia un intervalo real a cada una de las categorías y este intervalo no es arbitrario. Por lo tanto, el procedimiento de exploración de la información de los juicios del decisor de Saaty y MACBETH no se comparan. Además, ambos métodos tienen bases matemáticas muy diferentes.

CAPITULO III: APLICACIONES

3.1 Aplicación de MACBETH a algunos problemas

Una vez analizado el método MACBETH, en este capítulo se muestran dos problemas en los que se aplica este método. Ambas aplicaciones proporcionan una solución alternativa a la situación problemática considerada y resaltan las principales cualidades, así como algunas limitantes de MACBETH.

3.1.1 Problema de mejoramiento de producción y calidad en la industria textil

Se presenta una aplicación que dirigió Bana e Costa en la Ciudad de Santa Catarina, Brasil, (Bana e Costa C., Vansnick J., Ensslin L., 1997) con el propósito de evaluar la *Capacidad Competitiva* de algunas empresas textiles.

Dadas las condiciones económicas por las que atraviesa Brasil, las empresas pasan por desajustes y desequilibrios económicos. Tal es el caso de algunas empresas textiles en la ciudad de Santa Catarina. En particular, las medianas y pequeñas empresas son más sensibles a la crisis, en el sentido de que tienen estructuras de dirección, tecnológica y financiera menos preparadas para reaccionar o responder a los cambios en la economía. Se puede considerar que la pérdida de competitividad de las empresas es una consecuencia de tener equipo inadecuado, administración rígida y pasada de moda y carencia de un equipo de planeación, entre otras causas.

En este contexto, se asesoró a estas empresas para crear estrategias que les permitan producir artículos de calidad a precios competitivos, mediante un marco metodológico de ayuda a la decisión desarrollado en tres fases: la estructuración de la situación problemática, modelación de evaluación y evaluación de las empresas.

Fase de estructuración

Para iniciar esta fase, se contemplaron todos aquellos aspectos que las personas involucradas en la problemática y el equipo de ayuda a la decisión supusieron relevantes, en el sentido de que afectan la situación de las empresas. Se empezó por identificar los puntos de vista fundamentales, para lo cual se empleó la técnica

de mapas cognoscitivos, que son una especie de esquemas que contemplan todos los puntos de vista posibles y las relaciones existentes entre ellos.

Después de una discusión respecto a todos los puntos de vista propuestos, y con el empleo de un Sistema de Soporte a la Decisión, llamado Graphics COPE, se identificaron once puntos de vista fundamentales los cuales se agruparon en tres áreas de interés.

Los puntos de vista fundamentales *Administración, Nivel de Ventas, Reputación, Costos y Dinamismo* corresponden al área de *Análisis Interno*; los de *Precio, Diferenciación, Calidad y Servicio a Domicilio* se agruparon en el área de *Producto*; y los de *Sistema de Distribución e Información* se clasificaron en *Análisis Externo*.

A cada uno de estos *PVFs* se les asoció descriptores, es decir, los niveles de impacto recomendables o admisibles.

Los *PVFs Costos y Precio* tienen asociados descriptores naturales, expresado en pesos, y *Nivel de Ventas* se puede describir de manera indirecta por un índice de mercado medido en términos de porcentajes. A los otros *PVFs* se les asociaron con descriptores contruidos. Como ejemplo se ilustra cómo se hizo operacional el *PVF Reputación*.

La construcción del *PVF Reputación* se inició preguntando a los actores involucrados en la problemática sobre cuáles serían las principales características que determinan la reputación de una empresa. Apoyándose en los mapas cognoscitivos, se dedujeron tres puntos de vista: 1) Buena imagen de mercado, 2) Seriedad y 3) Confiabilidad (por los proveedores). Luego, sólo dos aspectos se consideraron: SÍ, "se reconoce indudablemente que la empresa posee esta característica"; NO, en caso contrario.

La ordenación de combinaciones factibles de estos aspectos, para los tres puntos de vista, condujo a obtener el descriptor construido *Reputación* que se considera en la tabla 1.

Nótese que, por ejemplo, el patrón $NO_1-SI_2-SI_3$ no se considera real, ya que no es posible que una empresa que no tenga una buena imagen de mercado se considere a la vez seria y confiable.

Los expertos identificaron un *buen* nivel de impacto a la afirmación $SI_1-SI_2-SI_3$, (significa que la empresa tiene una fuerte reputación) y un nivel *neutral* a la afirmación $SI_1-NO_2-SI_3$ (que significa que la empresa tiene una reputación ni fuerte ni débil). Niveles de referencia con significados similares se propusieron para el resto de los *PVFs*.

Tabla 1

Nivel	Descripción	Referencias
++	La compañía indudablemente tiene una buena imagen de mercado, se considera como seria por sus clientes y confiable para los proveedores	Buena
+	La compañía sin duda tiene una buena imagen de mercado, se considera seria por sus clientes pero no es confiable para los proveedores	
°	La compañía sin duda tiene una buena imagen de mercado, se considera confiable para los proveedores pero no se considera seria por el cliente	Neutral
-	La compañía sin duda tiene buena imagen de mercado pero no se considera seria por el cliente ni confiable por los proveedores	
--	La compañía indudablemente no tiene buena imagen de mercado	

Modelo de evaluación

Dado el ambiente de crisis descrito anteriormente, los actores se interesaron principalmente por una evaluación individual de la situación intrínseca de cada compañía, más que en la comparación de unas con otras.

En esta fase de evaluación se requirió construir funciones de valor para comparar los impactos de cada punto de vista. Tales funciones facilitaron la medición de intensidad de fuerza o debilidad de las compañías respecto de un punto de vista fundamental determinado, para lo cual se utilizó el método MACBETH.

Al iniciar el proceso de preguntas de MACBETH para cada punto de vista fundamental, se creó una matriz de juicios iniciales. A continuación se muestra la matriz de juicios asociada al punto de vista *Reputación*:

	++	+	°	-	--
++	0	3	4	5	6
+	0	0	3	5	6
°	0	0	0	4	5
-	0	0	0	0	5
--	0	0	0	0	0

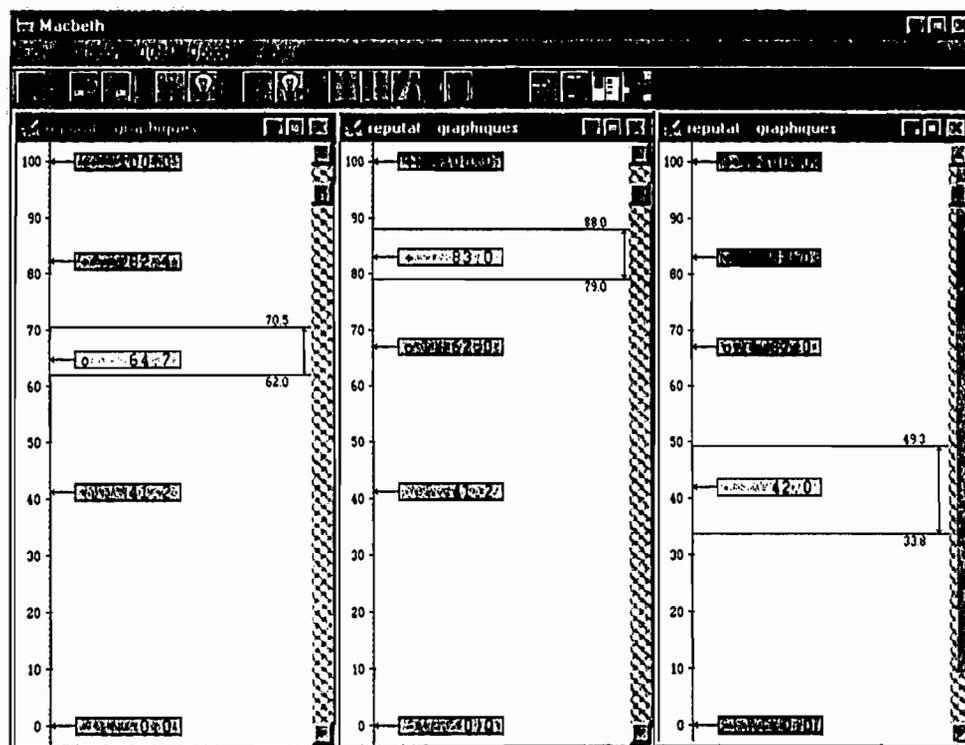
Recuérdese que el "3" en la intersección de la línea ++ con la columna de + significa $(++,+) \in C_3$, esto es, que la diferencia de preferencia entre los dos niveles de impacto se consideró "moderada", y así para cada número que aparece en la matriz. De manera análoga se determinan las matrices de juicios para cada uno de los conjuntos descriptores correspondientes a cada *PVF*. Se puede ver que esta matriz de juicios satisface la condición de consistencia descrita en el capítulo

anterior, o sea, que los valores en la matriz no decrecen de izquierda a derecha y no se incrementan de arriba hacia abajo.

Una vez que se formó la matriz de juicios inicial del decisor, se procedió a buscar la funciones criterios para cada PVF. La ventana de la figura 1 muestra la escala propuesta por MACBETH para los juicios iniciales que se consideran en la tabla 1. Además, la secuencia de las ventanas en esta figura simula el proceso interactivo de discusión entre los analistas y los expertos sobre la cardinalidad de la escala para el PVF *Reputación*.

Para cada valor, es posible visualizar un intervalo de variación de los valores del parámetro que no violan alguna restricción que establecen las reglas de medición. Por ejemplo, si se altera $v^{(0)}$ se afectará cualquier diferencia de preferencia que involucra al nivel 0: si el evaluador decide reducir $v^{(0)}$, la diferencia $v^{(+)}-v^{(0)}$, precisamente se incrementará la misma cantidad que $v^{(0)}-v^{(-)}$ decrece. Pero $(+,0) \in C_3$ (moderada) y $(0,-) \in C_4$ (fuerte) implica que $v^{(+)}-v^{(0)} < v^{(0)}-v^{(-)}$ esto lleva a considerar un límite inferior para $v^{(0)}$ de tal forma que no se violen las reglas de medición. Nótese que el análisis de sensibilidad toma en cuenta a todas las categorías incluso algunas vacías.

Figura 1

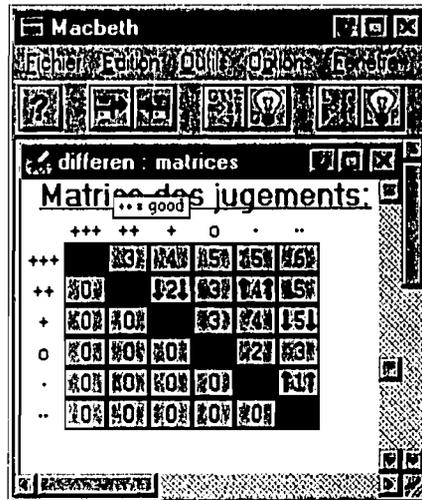


El proceso de retroalimentación se realizó de la siguiente forma: primero los expertos observaron que la diferencia de preferencia entre ++ y -- es casi 1.5 más grande que la diferencia de preferencia entre ° y --. Por tanto, con $v(++)$ = 100 y $v(--)$ = 0, se fijó $v(°)$ = 67 (note en la figura 1 que este valor se encuentra dentro del intervalo factible de variación). Después, los expertos tomaron la diferencia de preferencia entre ++ y + como casi igual a la diferencia de preferencia entre + y °, entonces se hizo la modificación $v(+)$ = 83, $v(-)$ = 42, lo cual significa que la diferencia de preferencia entre + y - se considera casi como la diferencia de preferencia entre - y --. Finalmente, la ventana del lado derecho de la figura 1 se consideró como la escala de intervalo adecuada para el *PVF Reputación*.

En ocasiones, no existe una función de valor compatible con un matriz de juicios dada. Un ejemplo de esta situación se presentó cuando se analizó el *PVF de Diferenciación* (vea la figura 2). Como se muestra en esta figura, MACBETH ofrece sugerencias alternativas para ayudar al facilitador a eludir el problema.

MACBETH siempre sugiere una escala numérica. Se le preguntó al evaluador si él sentía inseguridad acerca de algunos los juicios señalados por MACBETH como posibles fuentes de perturbación, (las intersecciones que tienen flechas). Sólo hubo cambios en la diferencia de preferencia entre los niveles de impacto - y -- de *Diferenciación*, que se pasó de *muy débil* a *débil*. En caso de inconsistencia, obviamente la escala viola una o más condiciones impuestas por las reglas de medición, las cuales se pueden usar, si se desea, como base para la discusión directa de valores.

Figura 2



Mediante a un procedimiento similar al anterior, con la ayuda de MACBETH fue posible construir funciones criterio para cada PVF, que permitieron cuantificar las preferencias parciales de los respectivos niveles de impacto admisibles.

Asignación de pesos

Para realizar una evaluación de la preferencia global de cada compañía, en términos de su *Capacidad Competitiva*, se necesitan homogeneizar de alguna forma los valores parciales obtenidos, en escalas de 0 a 100 los valores parciales. Para ello, los pesos se pueden determinar con la ayuda de el método MACBETH mediante un modelo de agregación global aditivo:

$$V(c) = \sum_{j=1}^n k_j \cdot v_j(g_j(c))$$

$$\text{con } \sum_{j=1}^n k_j = 1 \text{ y } k_j > 0 \text{ (} j = 1, 2, \dots, n \text{) y } \begin{cases} v_j(\text{mejor}_j) = 100 \\ v_j(\text{peor}_j) = 0 \end{cases}$$

donde:

$V(c)$ el valor global de la compañía c , que mide su preferencia en términos de *Capacidad Competitiva*

$g_j(c)$ es el impacto de c en el PVF j

$v_j(g_j(c))$ es el valor parcial (de preferencia) de c en el j -ésimo PVF, y

mejor_j y peor_j son el mejor y el peor niveles de impacto admisibles, respectivamente, en el descriptor de el PVF $_j$.

Sea $A^F = \{a^0, a^1, \dots, a^n\}$ un conjunto de referencia de empresas ficticias, donde a^0 es la empresa ficticia con los peores impactos admisibles en todos los PVFs, y a^j ($j=1, 2, \dots, 11$) es una empresa de referencia ficticia con el mejor impacto admisible en el PVF j y los peores impactos en el resto de los PVFs. Por las condiciones anteriores, $V(a^0) = 0$ y $V(a^j) = 100k_j$.

Para ponderar los PVF, el proceso de preguntas de MACBETH consistió en preguntar al decisor:

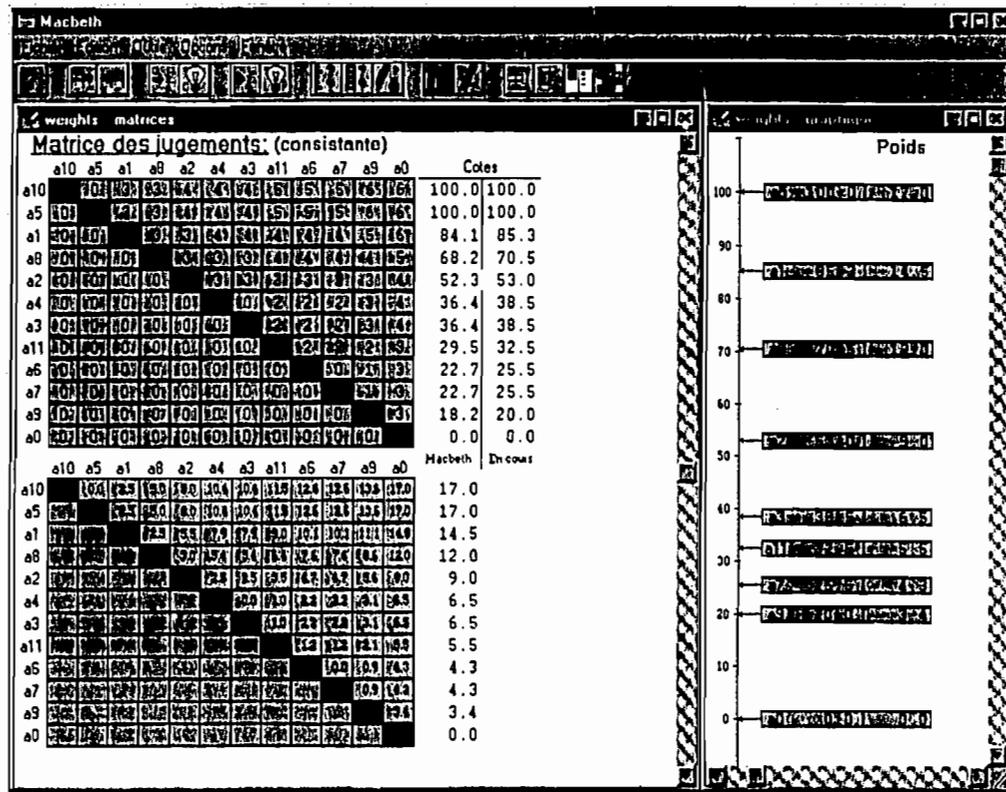
- primero, que compare cada par de empresas ficticias a^j y a^l en términos de preferencia global;

- segundo, que juzgue la diferencia de preferencia global entre dos empresas ficticias cualesquiera donde una empresa ficticia se prefiere mas que otra.

Los preferencias que el decisor expresa, se muestran en la ventana izquierda de la figura 3, donde las empresas ficticias se ordenaron en forma decreciente de preferencia global. Como se puede ver, en la matriz de la figura 3, las empresas ficticias a^{10} y a^5 fueron preferidas igualmente. De esta manera, $V(a_{10})$ y $V(a_5)$ implicando que $k_{10} = k_5$. Lo mismo se aplica para a_4 y a_3 , y para a_6 y a_7 .

Después de una discusión acerca de la escala propuesta por MACBETH, se consideró la escala que se muestra en porcentajes en la ventana izquierda de la figura 3.

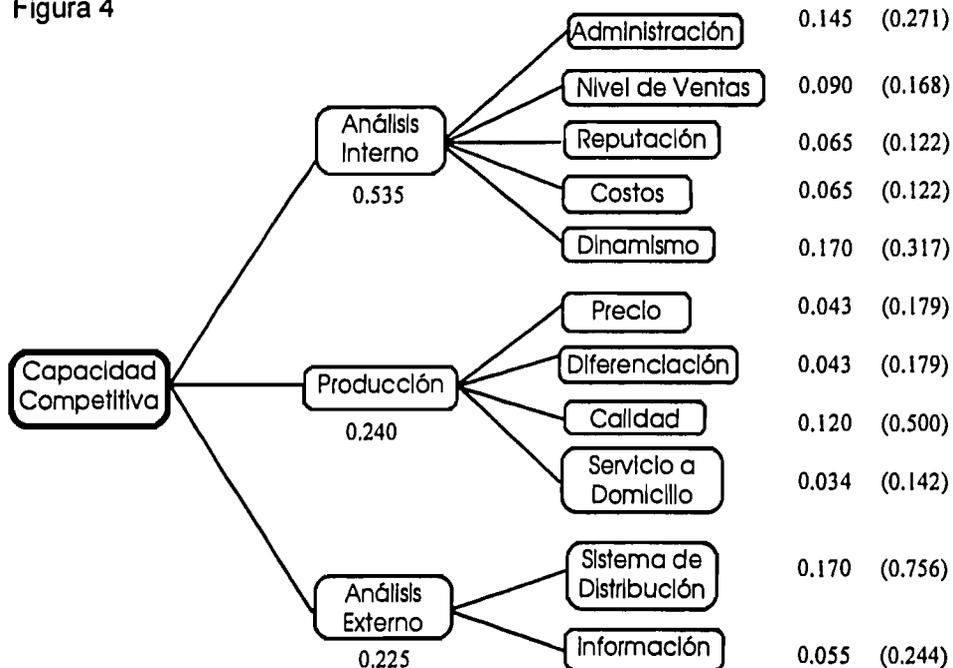
Figura 3



También se calcularon los pesos asociados a cada área de interés: *Análisis Interno*, *Producción* y *Análisis Externo*, (figura 4). Además, para apreciar la importancia de cada PVF dentro de cada área de interés, se encontraron otros pesos que suman 1 en cada área.

La figura 4 muestra los pesos de cada PVF en términos de su relevancia como una componente de la *Capacidad Competitiva* y entre paréntesis los pesos para la respectiva área de interés.

Figura 4



Evaluación de las Compañías

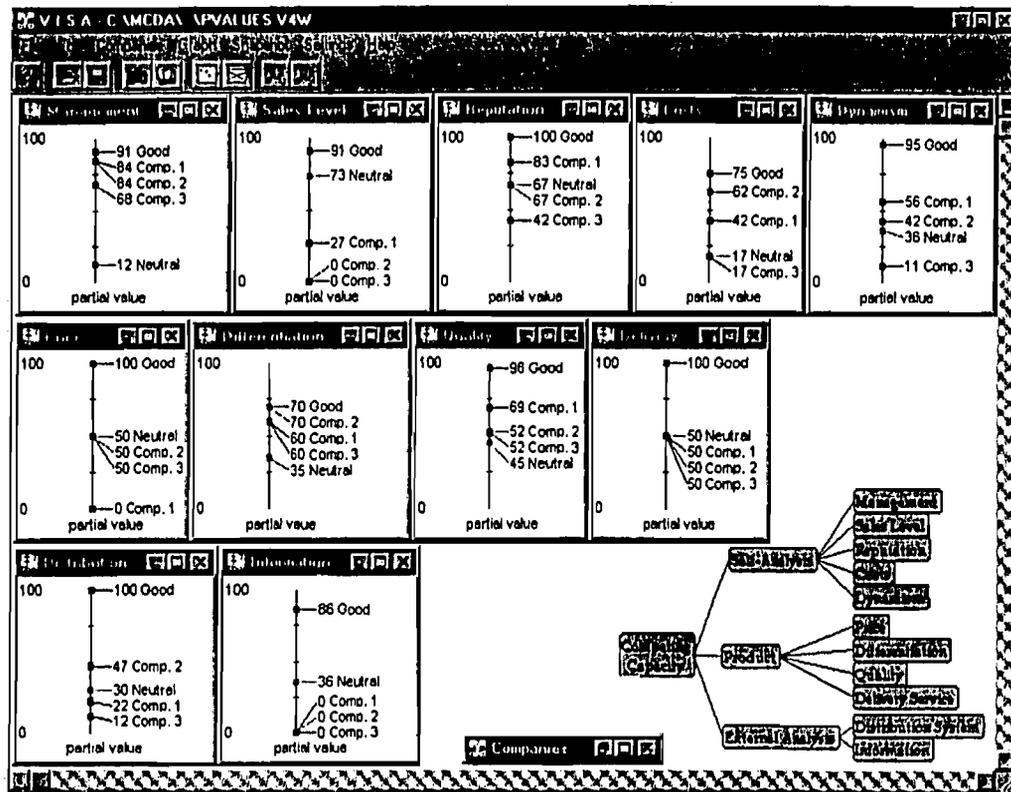
Una vez que se construyó el modelo de evaluación, se utilizó un sistema de soporte a la decisión, denominado V.I.S.A (Belton y Vickers, 1990), para ayudar a los actores en la evaluación de la *Capacidad Competitiva* de las empresas de Santa Catarina.

Se ilustra el proceso para tres compañías. La *Compañía 1* y *2* produjeron 100 y 600 miles de camisas por mes, respectivamente, y la *Compañía 3* produjo 40 mil pantalones.

Sea $g_j(c)$ el impacto de la compañía c en el PVF j , entonces el valor parcial de c en j es $v_j(g_j(c))$. La ventana de V.I.S.A en la figura 5 muestra los valores parciales de las tres empresas y las empresas de referencia ficticias "buena (sobre todas)" y "neutral (sobre todas)". De esta manera, los actores que se involucran en la problemática pudieron apreciar cuán débil o fuerte fue cada compañía en cada PVF individualmente.

En la figura 6 se ilustra la evaluación global de preferencia de las empresas en términos de *Capacidad Competitiva*, así como la apreciación de su capacidad en cada área de interés, siempre en comparación con las referencias "buena" y "neutral". Este análisis fue esencial para proporcionar información a los actores en donde las empresas requerían una intervención más urgente y en cuáles áreas podrían ser más efectivas.

Figura 5

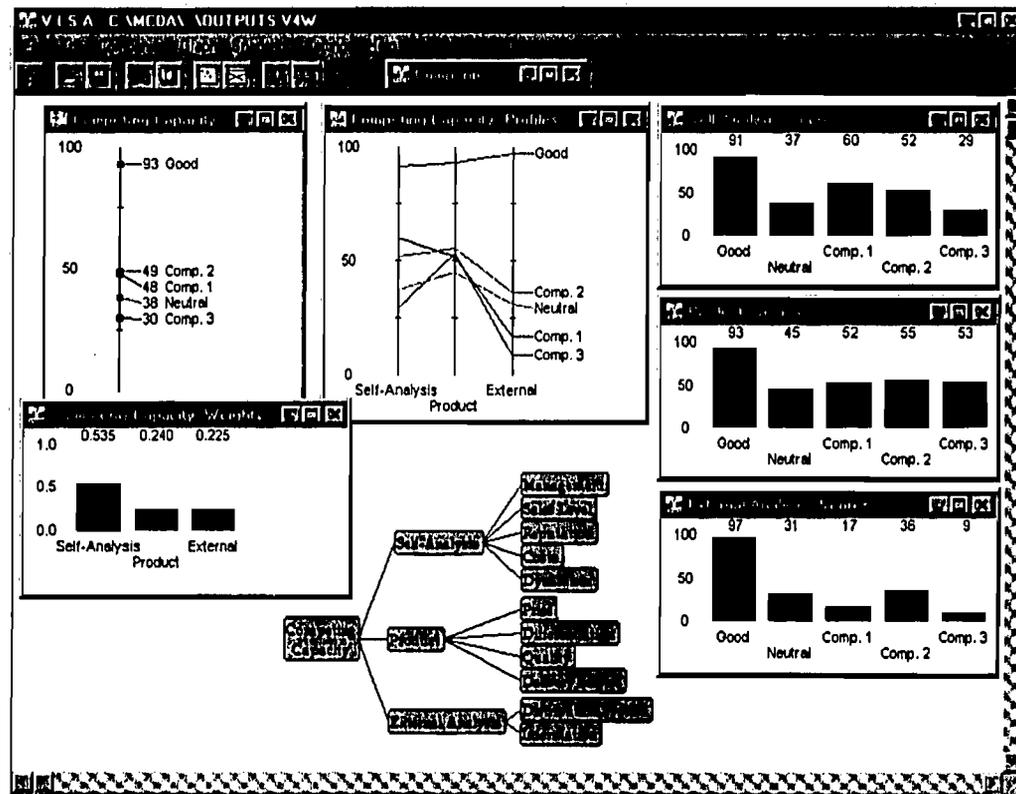


V.I.S.A. también proporciona un soporte visual para discusiones de grupo acerca de la sensibilidad de los resultados cuando se varían algunos parámetros en el modelo que se construyó.

La figura 7 muestra una pantalla de V.I.S.A. durante una sesión de análisis de sensibilidad dedicado al PVF *Reputación*. Para este punto de vista, supóngase que los expertos se interesaron en estudiar los efectos de una disminución del nivel de impacto "-" (preferencia parcial), debido a que a alguien sugirió que la diferencia de preferencia entre ° y - se podría considerar casi igual a la diferencia de preferencia entre - y --.

Los demás valores permanecen sin cambio, lo cual implica que sólo afectará la preferencia parcial del nivel "-", y el respectivo valor parcial podría decrecer de 42 a 34.

Figura 6



Obsérvese en la ventana derecha de la figura 1, que 34 se encuentra dentro del intervalo factible del valor parcial del nivel "-", lo cual indica que no existe efecto en la matriz de juicios inicial. Además, el impacto de la *Compañía 3* en términos de *Reputación* es precisamente "-", entonces, cuando se cambia el valor parcial de la *Compañía 3* en *Reputación* de 42 a 34.

Se aprecia en la figura 7 que sólo hubo un decremento de una unidad en la marca de preferencia de la *Compañía 3* en términos de *Análisis Interno*, insuficiente para alterar su preferencia global, debido al peso bajo de *Reputación*. Por tanto, se puede preguntar qué pasa si se incrementa el peso de *Reputación* dentro del *Análisis Interno*.

La figura 7 muestra que la preferencia global de la *Compañía 3* es al menos insensible a variaciones de el peso de *Reputación* (aún si se asigna a este punto de vista todo el peso de *Análisis Interno*).

Los pesos de las áreas de interés también se sometieron a discusión. De común acuerdo se cambió el peso de *Análisis Interno* de 0.535 a 0.5 y los pesos de *Producción* y *Análisis Externo* se cambiaron por 0.25 (no obstante, no hubo cambios en las proporciones entre los pesos de los *PVFs* dentro de la misma área y de todos los valores parciales).

La figura 8 muestra que las consecuencias en la preferencia global de las empresas son insignificantes. Y si se decrementa el peso de *Análisis Interno*, se puede ver en la figura 9 cómo afecta a la preferencia global.

Figura 7

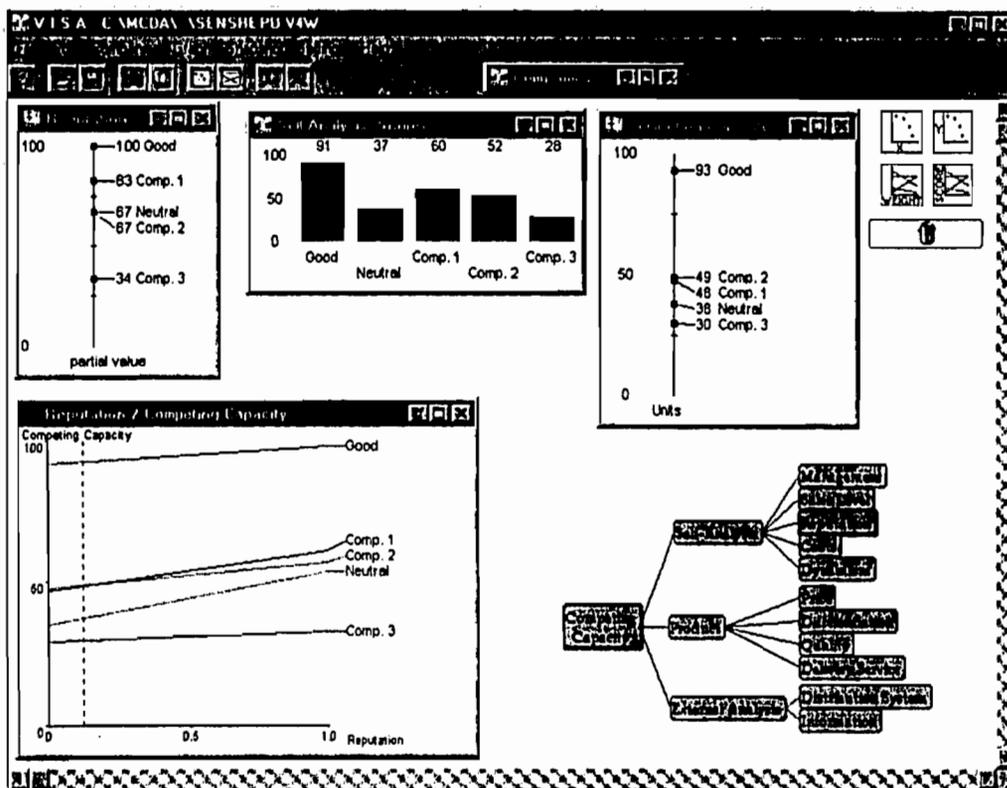


Figura 8

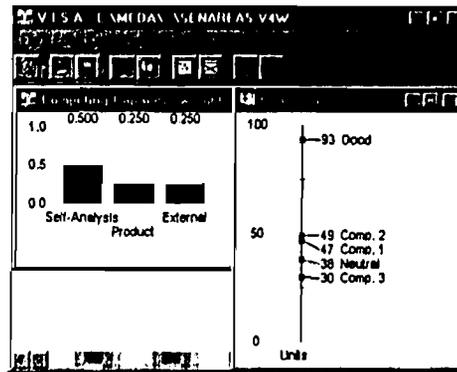
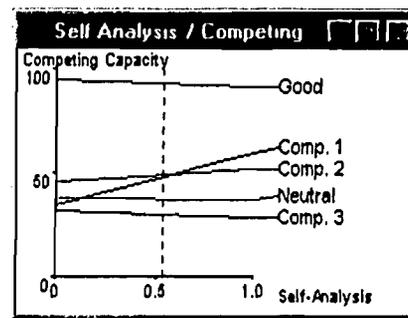


Figura 9



3.1.2 Caso del Desempeño Académico del Profesor en la Facultad de Ingeniería

Desde hace 15 años, se aplica a los alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, un cuestionario que pretende medir el desempeño académico de los profesores de esta institución.

Este cuestionario se aplica tres semanas antes de la terminación del semestre. La versión actual consta de veinte preguntas sobre el profesor y diez sobre el alumno. La codificación, procesamiento y reporte de la información, se realiza en la propia Facultad de Ingeniería, a cargo del Centro de Cálculo, mediante un programa de cómputo diseñado para ello.

De las veinte preguntas sobre el profesor, dieciséis están agrupadas y clasificadas en cuatro factores o conceptos, que son aprendizaje, motivación, evaluación y responsabilidad. El resto de las preguntas no se pudieron agrupar en un factor específico que representara alguna característica del proceso de evaluación del profesor.

En el primer concepto, que es el de *Aprendizaje*, se consideran las siguientes preguntas y sus posibles respuestas:

- (5) Los conocimientos del profesor sobre la asignatura son: (desde excelentes hasta deficientes)
- (7) El profesor propicia que los alumnos razonen sobre los temas que expone: (desde siempre hasta nunca)
- (8) El profesor promueve un ambiente de respeto en clase: (desde siempre hasta nunca)
- (9) Las tareas o ejercicios que deja el profesor, contribuyen al aprendizaje: (desde siempre hasta nunca)
- (10) Al exponer los temas, el profesor fomenta la habilidad de plantear y resolver el problema: (desde siempre hasta nunca)

El segundo concepto está representado por las preguntas:

- (1) El interés del profesor para que los alumnos aprendan es: (desde muy grande hasta nulo)
- (2) La confianza que el profesor inspira en los alumnos para intervenir en clase es: (desde muy grande hasta nulo)
- (3) Las clases se desarrollan de manera: (desde muy interesante hasta muy aburrida)
- (4) El profesor expone la clase en forma clara: (desde siempre hasta nunca)
- (6) El profesor propicia que los alumnos amplíen por su cuenta sus conocimientos sobre la asignatura: (desde siempre hasta nunca)

Una respuesta afirmativa a estos reactivos significa que el alumno considera que el profesor "impulsa a estudiar". Así, la noción que mejor representa a esta serie de reactivos es *Motivación*.

El tercer concepto está representado por las preguntas:

- (12) El profesor regresa los exámenes, tareas, trabajos y proyectos corregidos: (desde siempre hasta nunca)
- (13) Los exámenes o evaluaciones tienen un grado de dificultad adecuado: (desde siempre hasta nunca)
- (15) El profesor entrega oportunamente las calificaciones: (desde siempre hasta nunca)

Estos reactivos claramente expresan la dimensión de *Evaluación*.

El cuarto concepto, que es el de *Responsabilidad*, considera a los siguientes reactivos:

- (11) El profesor llega generalmente al salón de clase: (desde la hora señalada hasta con retraso de 30 minutos)
- (14) El profesor termina su clase: (desde la hora señalada hasta más de 10 minutos antes)
- (16) El profesor faltó a clase durante el semestre: (desde nunca hasta más de 6 veces)

La versión actual del cuestionario incluye cuatro preguntas adicionales, que están a prueba, por lo que no se ha determinado todavía en qué factor o concepto se agrupan. Tales preguntas son:

- (17) La clase se da sin perder de vista los puntos a donde se quiere llegar: (desde siempre hasta nunca)
- (18) Al definir los principios o conceptos, se presentan ejemplos que facilitan su comprensión: (desde siempre hasta nunca)
- (19) En caso de tener oportunidad, ¿volverías a tomar clases con el profesor? (desde definitivamente sí, hasta definitivamente no)
- (20) Al inicio del curso se dieron a conocer sus objetivos: (sí o no)

Procedimiento de Evaluación

Se tienen tres tipos de evaluaciones: por pregunta, por concepto y una global. En seguida se describen cada una de estas evaluaciones.

1. Evaluación por pregunta.

Cada pregunta representa cuatro opciones de respuesta, se suponen cuatro niveles de la propiedad o rasgo que se evalúa. Para determinar el peso que cada alumno asigna a cada pregunta, se establece:

A la opción de nivel	Se le acreditan
Máximo	100 puntos
Medio superior	66.6 puntos
Medio inferior	33.3 puntos
Mínimo	0 puntos

De ahí se obtiene el promedio por cada grupo de alumnos y esa es la calificación que se asigna al profesor en esa pregunta en particular. De la misma manera se obtiene la calificación para todas las preguntas.

En el reporte que se entrega al profesor, se presenta su calificación por pregunta, asociada a las calificaciones mínima, media y máxima de todos los grupos de la asignatura, así como a la calificación media de todos los grupos del departamento, división y facultad, para esa misma pregunta.

El peso específico de cada pregunta para determinar las calificaciones por concepto y de cada concepto para determinar la calificación total, se funda en la técnica de análisis factorial.

El análisis factorial es una rama de la estadística. Esta técnica se introdujo específicamente para proporcionar modelos matemáticos para la explicación de teorías psicológicas de habilidades y comportamiento humanos. Varias personas se han dedicado al desarrollo de esas teorías como Spearman, Burt, Kelley, Thurstone, Holzinger y Thomson.

El nacimiento del análisis factorial se atribuye a Charles Spearman. El principal objetivo del análisis factorial es lograr una descripción moderada o considerable de datos observados. Intenta descubrir las categorías fundamentales o básicas en un campo de investigación como la psicología. Sin embargo, las técnicas matemáticas inherentes en el análisis factorial no se limitan a aplicaciones psicológicas, se han hecho aplicaciones en sociología, meteorología, medicina, geografía y negocios.

El interés principal del análisis factorial es la resolución de un conjunto de variables en términos de un número pequeño de categorías o factores. Esta resolución se puede realizar mediante el análisis de las correlaciones entre las variables. Una solución satisfactoria producirá factores que lleven toda la información esencial del conjunto original de variables, de esta manera se logra una descripción parsimoniosa de los datos. (Harman, H., 1967).

Tomando en cuenta que el análisis factorial sólo ayuda a agrupar en categorías a un conjunto de variables o datos, los pesos que estima para cada categoría y para cada pregunta no se pueden considerar auténticos o genuinos, debido a que esa no es la función del análisis factorial. Surgió la inquietud de proponer una asignación de pesos asociados a cada pregunta para realizar una evaluación global, mediante la aplicación del método MACBETH.

Así, se propone una forma alternativa para la evaluación del desempeño académico de los profesores de la Facultad de Ingeniería. Para ello se retoman algunas características del proceso de evaluación tradicional.

Para la realización de esta propuesta se contó con una persona de la Coordinación de Proyectos Académicos de esta facultad, involucrada en el proceso de evaluación y que está íntimamente relacionada con alumnos y profesores, esta persona fue el decisor en la propuesta.

Se consideraron 14 preguntas referidas al profesor, que en este caso son los puntos de vista, debido a que no es muy recomendable trabajar con muchos puntos de vista fundamentales, y a que la interacción con el decisor se dificulta.

Por esta razón se acudió al decisor para que hiciera una revisión de las preguntas referidas al profesor y eliminara algunas. El decisor optó por quitar las preguntas 17, 18, 19 y 20, que son aquellas que no se han agrupado en alguna categoría especial, además las preguntas 14 y 15, puesto que el decisor no consideró un aspecto relevante que el profesor termine la clase a un determinado tiempo, y que el profesor entregue oportunamente las calificaciones este último aspecto de alguna forma se toma en cuenta en la pregunta 12. De esta manera, se obtuvieron un total de 14 preguntas o puntos de vista fundamentales.

Para esta aplicación no se encontró una función de valor para cada punto de vista fundamental, debido a que cada una de las preguntas la contesta un gran número de alumnos y no es recomendable interaccionar con tantas personas a la vez, ya que cada alumno sería un decisor.

Por la razón anterior, se consideraran los mismos valores individuales de cada pregunta, es decir, cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta que se representa por cuatro niveles (de impacto), las cuales se muestran en la Tabla 2.

La calificación que se asigna a cada profesor en una pregunta en particular es el promedio que se obtiene con los valores de los niveles anteriores aplicados a cada grupo de alumnos.

También se consideraron las agrupaciones de preguntas: *Aprendizaje* (5, 7, 8, 9, 10), *Motivación* (1, 2, 3, 4, 6), *Evaluación* (12, 13), *Responsabilidad* (11, 14).

Para la asignación de pesos se considera un conjunto de 15 profesores ficticios $A^i = \{a^0, a^1, \dots, a^{15}\}$, donde a^0 es el profesor ficticio con el peor nivel de impacto en todos los puntos de vista fundamentales o preguntas y a^j ($j=1, 2, \dots, 15$) es el profesor ficticio con el mejor nivel de impacto en la j -ésima pregunta y los peores niveles de impacto en el resto de las preguntas. Así, por ejemplo, a^1 es el profesor imaginario que tiene un interés *muy grande* para que los alumnos aprendan, pero en el resto de los puntos de vista tiene el peor nivel, o sea que no inspira confianza para que los alumnos intervengan en clase, que las clases se desarrollan de manera muy aburrida, que no expone en forma clara, que los conocimientos del profesor sobre la asignatura son deficientes, que nunca promueve un ambiente de respeto, etc.

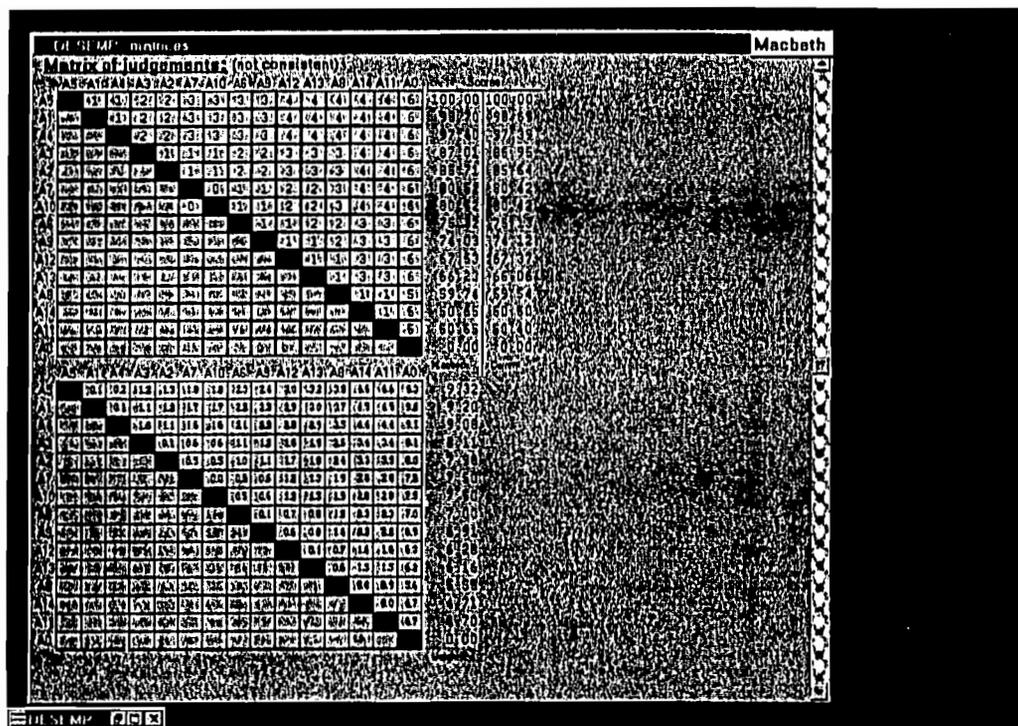
Cabe aclarar que debido a la reducción de preguntas, se consideró al profesor ficticio a^{14} como aquel que tiene el mejor nivel de impacto en la pregunta número 16 y el peor en el resto de las preguntas, ya que la preguntas 14 y 15 fueron eliminadas.

Se le pidió al decisor que ordenara de manera decreciente de preferencias estos profesores ficticios. Esta tarea fue difícil para el decisor, debido a que no podía concebir a este tipo de profesores, los consideró realmente ficticios, además de que con muchas alternativas ficticias la ordenación se torna complicada, si un decisor no tiene completamente claras sus preferencias esta primera etapa es más lenta y difícil.

Una vez hecha la ordenación de los profesores, se prosiguió a cuestionar al decisor acerca de la intensidad de esas preferencias, es decir, se construyó la matriz de juicios inicial.

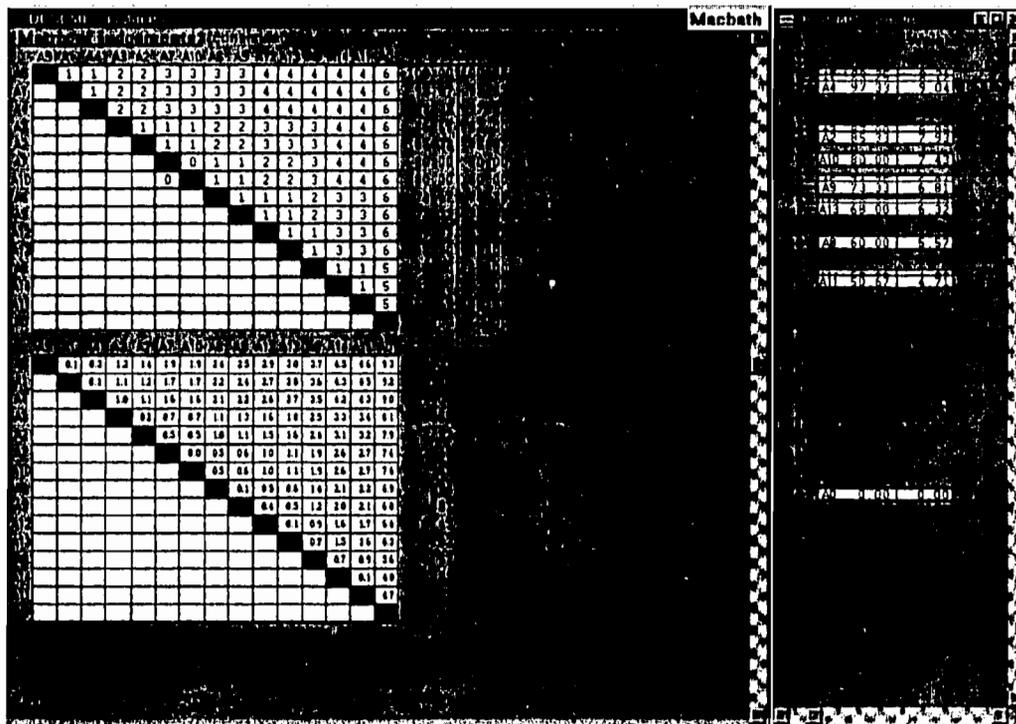
Cabe mencionar que hubo dos intentos de construcción de la matriz de juicios inicial, debido a que la primera no fue coherente a simple vista, por lo que se tuvo que hacer una revisión de la ordenación inicial, corregirla e iniciar el proceso de preguntas al decisor nuevamente. En esta etapa también hubo complicaciones, ya que no fue fácil para el decisor proporcionar respuestas coherentes, según lo requerido por MACBETH.

La matriz de juicios que corresponde a este problema quedó como sigue



Al realizar las pruebas de consistencia y coherencia de la matriz de juicios inicial se encontró que ella no es consistente, y se sugieren dos cambios: uno es que se revise la intensidad de preferencia entre los profesores ficticios a^6 y a^{13} , disminuyendo de débil a muy débil, es decir, que el decisor disminuya la intensidad de preferencia entre el profesor que siempre propicia que los alumnos amplíen por su cuenta sus conocimientos sobre la asignatura y el profesor que siempre realiza los exámenes con un grado de dificultad adecuado. La otra sugerencia es que haya un aumento de la diferencia de preferencia entre el profesor ficticio a^6 y a^8 , de débil a moderada.

Obsérvese que a pesar de la no consistencia de esta matriz de juicios, MACBETH propone pesos asociados a cada profesor ficticio. Respecto a las sugerencias, el decisor aceptó la primera, entonces la nueva matriz modificada fue consistente y coherente, mostrando los pesos asignados a cada profesor ficticio, que a su vez son los pesos de cada pregunta. Estos pesos se muestran en la siguiente pantalla.



El decisor estuvo de acuerdo con los pesos propuestos por MACBETH debido a que sintió que estuvieron de acuerdo con las preferencias que estableció inicialmente. Estos pesos se pueden aplicar a todos los profesores en encuestas que se reduzcan a los puntos de vista considerados. Sería conveniente que realmente se reduzcan las preguntas referidas a los profesores porque no es tan recomendable evaluar tantos aspectos a la vez, algunos de los cuales se pueden contemplar en un solo punto de vista sin perder la dirección de lo que se pretende evaluar.

Al agrupar los pesos según las categorías ya establecidas, se obtuvieron los pesos para las categorías, luego *Motivación* tiene un peso de 41.14, *Aprendizaje* 36.55, *Evaluación* 12.76 y *Responsabilidad* 9.54, lo cual indica, según las preferencias del decisor, que la motivación que el profesor propicia en el alumno es importante en el proceso de enseñanza aprendizaje, seguido de éste se tiene el aprendizaje de los alumnos, la evaluación adecuada a los alumnos, y la responsabilidad por parte de los profesores.

También se hizo una evaluación global para un profesor de la facultad escogido al azar. Esta evaluación se realizó mediante la multiplicación de las calificaciones parciales de cada pregunta por el respectivo peso encontrado por MACBETH, y se obtuvo como resultado una calificación global de 80.51, con el método tradicional se obtuvo una calificación general de 73.

La diferencia entre las dos evaluaciones obtenidas de ambas formas no implica que la forma tradicional de considerar los pesos sea buena o mala, sino que establece una opción para considerar otra ponderación en la evaluación global. Sin embargo, se podrá recordar que los pesos que se ocupan en la Evaluación del Desempeño Académico de los profesores de esta facultad, están determinados mediante el análisis factorial, cuya principal función no es precisamente la de asignación de pesos.

El análisis factorial puede complementar la labor de MACBETH, en el sentido de que si algún problema contiene muchas alternativas, se puede emplear el análisis factorial para agrupar algunas de ellas y entonces trabajar en MACBETH con las categorías obtenidas con dicho análisis.

De esta manera se concluyen estas dos aplicaciones de método MACBETH, cuya intención fue dar un panorama más amplio de lo que se puede hacer con este método, e indudablemente causará inquietud por conocerlo más a fondo y obtener más provecho de él.

CONCLUSIONES

En este documento se ha analizado al método MACBETH. Se pueden resaltar los siguientes aspectos del método MACBETH:

- El método MACBETH se emplea en la fase de evaluación del proceso de ayuda a la decisión. Facilita la intervención del decisor en el proceso de decisión, desde el principio hasta el fin. Esto es debido a que el método cuenta con un proceso de preguntas al decisor original y espontáneo. Las respuestas del decisor se pueden revisar al término de la segunda etapa del método, lo cual implica que se tenga una retroalimentación de la información.
- La originalidad del proceso de preguntas marca la pauta para construir una medida cardinal de las preferencias del decisor sobre alternativas o aspectos que pueden ser cualitativos o cuantitativos, que evita problemas operacionales que se detectan en otros procedimientos. Aunque el proceso de cuestionamiento no es muy complicado, si el decisor no tiene lo suficientemente claras sus preferencias sobre las alternativas, y aún más, las intensidades de preferencias, entonces el proceso puede complicarse. En este caso se recomienda realizar una revisión de los juicios iniciales.
- La escala determinada por MACBETH tiene la propiedad de que mide la intensidad de preferencia que el decisor siente respecto a un par de alternativas, es decir, que dadas dos alternativas que han sido ordenadas previamente por el decisor se puede determinar la diferencia de preferencia entre ambas alternativas.
- Se pueden verificar pruebas de consistencia y coherencia ejecutando algunos programas lineales.
- Este método guía la construcción de funciones criterio para cada punto de vista fundamental que se considere en el problema, con los diferentes niveles de impacto que se contemplan en cada punto de vista.
- El método MACBETH es útil en la asignación de los pesos asociados a funciones criterios, siendo éstos determinados por el método y no proporcionados de manera inicial. Los pesos que se encuentran se usan en un modelo aditivo, que permite la evaluación global del problema. Esta cualidad es importante debido a que en muchas ocasiones la determinación de pesos es totalmente arbitraria, se guía por el sentido común, no se toma en cuenta al decisor o se proporciona una escala subjetiva, mientras que MACBETH

determina al mismo tiempo la escala y el intervalo en el cual decisor puede modificar sus preferencias y en dónde pueden variar los pesos.

Las características anteriores del método reafirman la importancia que tiene conocerlo y difundirlo. Se puede investigar aún más al respecto, probablemente también se puedan hacer algunas modificaciones para incrementar las virtudes del método.

Los problemas que se pueden resolver con este método son aquellos en los que se quiere evaluar situaciones en donde existen discrepancias para seleccionar algún curso de acción, pero que de alguna manera se pueda contemplar una ordenación inicial de preferencias. También en aquellos problemas que interesen solamente en construir una función criterio, o que requieran determinar pesos, o ambas cosas.

La recomendación pertinente para estos problemas es cuidar que no se tengan demasiadas alternativas o cursos de acción debido a que es difícil para el decisor realizar la ordenación inicial. En caso de que el número de alternativas más de doce o catorce, por ejemplo, se sugiere dividir en bloques o grupos de alternativas. Una vez dividido en bloques, se trabaja con cada uno de ellos, ya sea para encontrar funciones criterios o para asignarles pesos. Posteriormente, se trabaja con cada uno de los bloques como si fueran alternativas individuales, y con ello se realiza una evaluación global.

Finalmente, considero que el método MACBETH es una buena opción para intentar abordar algunos problemas de toma de decisiones multicriterio, comparar los resultados con otros métodos y reafirmar su facilidad de interacción con el decisor.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

REFERENCIAS

- Antún, J. P., (1994) "Toma de decisiones multicriterio: el enfoque ELECTRE", *Series del Instituto de Ingeniería, UNAM. D-38.*
- Bana e Costa, C. Nunes da Silva F., (1994) "Concepción de una buena alternativa para la construcción de una línea ferroviaria en el Puerto de Lisboa: una aplicación metodológica de apoyo a la decisión y negociación", *Investigação Operational, Vol. 4, N° 2.*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J., (1994) "The MACBETH approach: General overview and applications", presentado en *The Fifth International Summer School on MCDA, Chania, Grecia, Julio 4-16.*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J. (1994) "MACBETH - An interactive path towards the construction of a cardinal value function", *International Transactions in Operational Research, Vol 1, No.4.*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J. (1995) "A theoretical framework for Masuring Atractiveness by Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH)", *Advances Multicriteria PM. Pardalos Y. Siskos,*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J. (1997) "Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model", *Journal of Multicriteria Decision Aid, Vol. 6.*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J., Ensslin L (1997) "Decisión Support Systems in action: integrated application in a multicriteria decision aid process" *European Journal of Operation Research (próximo)*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J. (1997) "Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model", *Journal of Multicriteria Decision Aid, Vol. 6.*
- Bana e Costa, C. y Vansnick, J., Ensslin, L. (1997) "Decisión Support Systems in action: integrated application in a multicriteria decision aid process" *European Journal of Operation Research (próximo).*

- Belton V., Ackerman, F. Shepherd, I. (1997), "COPE-ing whit V.I.S.A. -Integrated support from problem structuring through to alternative evaluation" *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis* (próximo)
- Belton, V. y Vickers, S., (1990), "Use of a simple multi-attribute value function incorporating visual interactive sensitivity analysis for multiple criteria decision making", *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*. Springer Verlag, pag. 319
- Bouyssou, D., (1990) "Building criteria: a prerequisite for MCDA", *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, pag. 58
- Doignon, J. P. (1987) "Threshold representations of multiple semiorders", *SIAM Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, Vol. 8, N° 1.
- Espinosa, R. y Trejos, M. (1996) "Un Método Cualitativo de Ayuda a la Decisión Multicriterio", *Memoria del XXI Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, Cholula, Pue.*, pag. 32-37.
- Fishburn, P. C. (1970), *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York.
- French, S. (1988) *Decision Theory*, Halsted Press-Wiley, New York.
- Harman, H., (1967) *Modern Factor Analysis*, The University of Chicago Press, Chicago.
- Keeny, R. S., Raiffa H., (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley, New York.
- Keeney, R. y Raiffa, H. (1976) *Decision Making*, Wiley, New York.
- Luce, R. y Tukey, J. (1964) "Simultaneous conjoint measurement a new type of fundamental measurement", *Journal of Mathematical Psychology*, 1.
- Roberts, F. (1979) *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility and Social Sciences*, Addison Wesley, London.
- Roy, B. (1989) "Decision aid and decision making", *Document Du Lamsade*, N° 51.
- Roy, B. (1989) "The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods", *Document du Lamsade*, N° 53
- Steuer, R. (1985) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons.

Steuer R., (1990) "Interactive Multiple Objective Programming: Concepts, Current Status and Future Directions", *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, pag. 413

Stevens, S., (1959) "La medición y el hombre", *Suplementos del seminario de problemas científicos y filosóficos*, UNAM, No. 19.

Trejos, M. (1991) *Método de Relaciones Binarias de Sobreclasificación que usa una Familia de Funciones de Utilidad*, Tesis Doctoral, Fac. de Ing. UNAM

Vansnick, J. C., (1990), "Measurement theory and decision aid", *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, pag. 81