44
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO BINOMIAL PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JOSÉ LUIS GUERRA SOLORIO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

EL MODELO BINOMIAL PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES FINANCIERAS

realizado por JOSE LUIS GUERRA SOLORIO.

con número de cuenta 9007915-5 **, pasante de la carrera de** ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. BEATRIZ EUGENIA RODRIGUEZ FERNANDEZ. Beatriz Rodríguez F.
Propietario	M. EN I.O. MARIA DEL CARMEN HERNANDEZ AYUSO. Ma. del Carmen Hdz Ayuso
Propietario	M. EN I.O. VICTOR RAFAEL PEREZ PEREZ
Suplente	ACT. AURORA VALDES MICHEL.
Suplente	ACT. HORTENSIA CANO GRANADOS.

Consejo Departamental de Matemáticas
MTRA. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES.

DE
MATEMATICAS

Dedico esta Tesis a mis padres :

José Luis Guerra por su ejemplo y apoyo en todo momento.

Ramona Solorio por su apoyo y comprensión.

A mis hermanos Alejandra y Juan Ramón.

Agradezco a mi directora de tesis M. en C. Beatriz Rodriguez F. por el tiempo y los consejos brindados para la elaboración de este trabajo.

Agradezco también a mis maestros :

M. en I. O. Ma. del Carmen Hernández A.
M. en I. O. Víctor Pérez P.
Act. Aurora Valdez
Act. Hortensia Cano

por sus enseñanzas y por el tiempo brindado a la lectura de este trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, con el constante crecimiento de los mercados financieros y la globalización de la economía, han proliferado un gran número de "nuevos" productos y servicios financieros cuyo objetivo fundamental es el de controlar los diferentes tipos de riesgos que se corren al celebrar las operaciones financieras.

Uno de los productos financieros de cobertura más difundidos son las Opciones. Actualmente estos instrumentos permiten a los inversionistas, entre otras cosas, sobrellevar cambios imprevistos en los precios de las acciones, en las tasas de interés, en el tipo de cambio de alguna moneda, etc.

Sin embargo, aunque no es hasta en los últimos 20 años en que los mercados de Opciones han cobrado mayor auge, se presume que un tipo de contratos muy parecidos a las Opciones eran ya utilizados en la época de los fenicios y los romanos. Originalmente los contratos de Opción surgen por la necesidad que tenían los agricultores y mercaderes de eliminar el riesgo a que estaban expuestos por la variación en los precios de sus cosechas y mercancías fijando el precio al que se haría la compra o la venta de alguna cosecha o mercancía determinada .

Debido a la falta de organización con que se operaban estos instrumentos el mercado de Opciones no tuvo el éxito que se esperaba. En un principio el adquirir este tipo de instrumentos resultaba demasiado caro debido a los altos costos de transacción y a las comisiones que era necesario pagar por la compra y la venta de Opciones, además no existía una regulación legal en el mercado por lo que los participantes corrían un gran riesgo derivado de el posible incumplimiento por parte de alguna de las partes involucradas.

Todo lo anterior comenzó a cambiar cuando en el año de 1973 se establece en los E.U.A. el primer mercado organizado de Opciones (Chicago Board Options Exchange). Este hecho significó que los mercados de Opciones tomarán mayor fuerza y presencia en la gran mayoría de los mercados internacionales.

El propósito de esta tesis es la de estudiar a las Opciones sobre acciones comunes, algunas de sus características, sus aplicaciones y objetivos y en particular se analiza y desarrolla uno de los modelos matemáticos utilizados para la valuación de Opciones, el Modelo Binomial ; para ello el presente trabajo se dividió en 5 capítulos.

En el primer capítulo se definen los tipos de Opciones que existen, se ilustra de manera general la operación de las mismas y se analizan algunas de las características principales de las Opciones. Además se ilustra mediante diagramas de pagos algunas de las estrategias que se pueden formar con el uso de las Opciones. Finalmente se mencionan algunas de las aplicaciones que pueden darse a las Opciones.

En el segundo capítulo se introducen las bases y los fundamentos en la valuación de Opciones ; para ello se analizan los factores que determinan el valor de las mismas, se desarrolla una relación importante entre el valor de las Opciones Europeas de Compra y de Venta conocida como paridad Put-Call, por último se obtienen una serie de cotas en los precios de las Opciones a partir de razonamientos que involucran el concepto de arbitraje.

La finalidad de el capitulo tercero es la de establecer explicitamente el valor para los casos más sencillos en donde se supone que el precio de las acciones solo tienen dos posibilidades (a la alta y a la baja), a este modelo en los precios de las acciones se le conoce como el modelo Binomial, también se definen y analizan los parámetros delta y gama para la cobertura de Opciones.

Dada la importancia que tiene el modelo de Black-Sholes para la valuación de Opciones en el capítulo cuarto se muestra de manera muy general los resultados y los supuestos bajo los cuales fue desarrollado el mismo ; además se presentan algunas variantes al modelo para valuar Opciones sobre acciones que pagan dividendos.

Finalmente en el capitulo quinto se complementa el análisis para el caso general del modelo Binomial. Además se considera la manera en que el modelo binomial puede ser usado para el caso en que las acciones pagan dividendos durante la vida de la Opción así como las Opciones Americanas de Venta ; en la parte final de este capitulo se muestra como es posible mediante la simulación de los precios de las acciones obtener el valor justo de las Opciones Europeas de Compra y de Venta, lo anterior se ilustra por medio de un ejemplo numérico . El método que se siguió para la simulación de los precios de las acciones fué el método Monte Carlo el cual se describe brevemente.

Capítulo 1

Opciones.

1.1.DEFINICIÓN.

Una **OPCIÓN** es un contrato que le da al comprador el derecho, pero no la obligación de comprar o de vender un monto determinado de un bien o subyacente (acciones, valores, futuros, tasas de interés, tipo de cambio, etc.) en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido. Como se ve, en esta definición se presentan algunas ambigüedades que se aclaran cuando se clasifican los tipos de Opciones. De esta forma por el derecho que otorga la Opción al comprador de la misma, existen dos tipos :

- **Opciones de Compra ("Call Options").**
- **Opciones de Venta ("Put Options").**

Una **Opción de Compra ("Call")** le da al tenedor el derecho, pero no la obligación, de comprar un bien o subyacente en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido.

Por su parte, una **Opción de Venta ("Put")** le da al tenedor el derecho, pero no la obligación, de vender un bien o subyacente en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido.

Al momento de realizarse el contrato, la persona que compra una Opción, paga al que vende la misma una cierta cantidad de dinero a la que se le denomina prima. Esta cantidad cubre la oportunidad de ejercer la Opción siempre que sea económicamente favorable al comprador.

1.2.TERMINOLOGÍA.

En esta sección se establecerá la terminología relacionada con la operación de las Opciones la cual será empleada a lo largo de todo el trabajo, además se ilustrarán mediante algunos ejemplos algunas de las características de las Opciones de Compra y de Venta.

-PRECIO DE EJERCICIO.

Es el precio que es estipulado en el contrato, al cual se hará la compra o la venta del bien subyacente en caso de que la Opción sea ejercida, en este trabajo se identificará como (K).

-BIEN OPERADO O SUBYACENTE.

Es el bien o el valor sobre el cual es realizado el contrato de Opción, pudiendo ser acciones, divisas, tasas de interés, tipos de cambio, mercancias, etc.

-FECHA DE VENCIMIENTO O EXPIRACIÓN.

Es la fecha límite especificada en el contrato en que una Opción puede ser ejercida, en este trabajo se identificará como (T)

-FECHA DE EJERCICIO.

Es la fecha en que se hace válido el contrato de Opción.

Las Opciones se pueden clasificar también de acuerdo al tiempo en que puede ser ejercido el derecho que ellas otorgan en :

- **Opciones Americanas.**
- **Opciones Europeas.**

Las **Opciones Americanas** son aquéllas que pueden ser ejercidas durante la vida de la Opción, es decir, en cualquier momento desde el inicio del contrato y hasta la fecha de vencimiento del mismo.

Las **Opciones Europeas** son aquéllas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Evidentemente, una Opción Americana tiene los beneficios de una Opción Europea pero no al revés.

El siguiente ejemplo ilustra la manera en la que puede ser utilizada una Opción Europea de Compra.

Ejemplo 1.1. "Una Opción Europea de Compra".

Considérese una Opción Europea de Compra ("CALL") sobre 100 acciones de Telmex con un precio de ejercicio de $30 por cada acción. El precio actual de cada una de las acciones es de $28, la fecha de expiración de la Opción se establece dentro de cuatro meses y el precio de la Opción (que le da al tenedor el derecho para comprar una acción de Telmex) se establece en $3.

Por lo tanto para poder tener el derecho de comprar 100 acciones dentro de cuatro meses a un precio de $30 cada una, se requiere de una inversión inicial de :

$$100 \times 3 = \$300.$$

Como se vio en este ejemplo la Opción de Compra le da a su tenedor el derecho de comprar cada acción de Telmex a $30 dentro de cuatro meses. En esa fecha el comprador de la Opción puede seguir cualquiera de las dos siguientes acciones :

a) Ejercer el derecho de compra de las acciones de Telmex a $30 cada una.
b) No ejercer el derecho de compra sobre las acciones de Telmex.

La realización de cualquiera de las dos acciones anteriores dependerá de el valor en el mercado de cada acción de Telmex en la fecha de expiración de la Opción. Si el valor de cada acción de Telmex dentro de cuatro meses es mayor a $30, evidentemente el tenedor de la Opción ejercerá su derecho de compra sobre estas acciones y el vendedor de la Opción tendrá la obligación de vender cada una de las acciones a $30 aún cuando su valor en el mercado sea mayor, si por el contrario dentro de cuatro meses el precio de cada una de las acciones de Telmex es menor a \$30, no será ejercida la Opción* , en esas circunstancias se perderá la inversión inicial de \$300. Desde luego, después de la fecha de expiración, la Opción de Compra carecerá de valor.

Como ejemplo, supóngase que al término de cuatro meses el precio de las acciones subió y para entonces se cotizan en \$35 . Al ser ejercida la Opción, el tenedor de la misma tiene el derecho de comprar 100 acciones de Telmex a \$30 cada una.
Ahora bien, si las acciones son vendidas inmediatamente se tendrá una ganancia de \$5 por acción, es decir, una ganancia de \$500 por las 100 acciones, si se considera la inversión inicial se obtiene una ganancia neta de \$200.

Es importante mencionar que para efectos de este ejemplo no se está considerando el costo financiero de la prima como es : considerar el costo de el dinero a través de el tiempo.

En la tabla 1.1 se resume el ejemplo anterior.

TABLA 1.1

Se compran 100 Opciones

Precio de Ejercicio.	\$30.
Fecha de Ejercicio.	Dentro de cuatro meses.
Precio actual de las acciones.	\$28.
Precio de una Opción para comprar una acción .	\$ 3.
Inversión Inicial .	100 x 3= \$300.

Si dentro de cuatro meses el precio de las acciones de Telmex es de \$35 entonces la Opción se ejerce obteniéndose una ganancia de :

(\$35 - \$30) x 100 = \$500.

Cuando la inversión inicial es tomada en cuenta, la ganancia neta será de :

\$500 - \$300 = \$200.

Para representar de una manera más general las implicaciones contractuales de ejercer la Opción de Compra en la fecha de expiración, se definen las siguientes variables :

Sean K= El precio de ejercicio pactado
S_T= El precio en el mercado de la acción en la fecha de expiración.
C_T= El valor de la Opción de Compra en la fecha de expiración.

Entonces, el valor de la Opción en la fecha de expiración es :

$$C_T = S_T - K \quad \text{si } S_T > K \quad \text{o bien}$$
$$C_T = 0 \quad \text{si } S_T \leq K$$

* *No tiene ningún sentido comprar acciones a \$30, cuando el precio en el mercado de esas mismas acciones es menor.*

Lo anterior puede reescribirse de la siguiente forma $C_T = \max [0, S_T-K]$, a la expresión anterior se le conoce como el valor intrinseco de una Opción. En el mercado de Opciones existe una terminologia que relaciona a el precio de ejercicio pactadb en la Opción con el precio en el mercado de el bien operado.

Para Opciones de Compra :

a) Si el Precio de Ejercicio (K) es menor que el precio en el mercado (S_T) del bien operado ($K < S_T$), se dice que la Opción esta " DENTRO DEL DINERO", esto implica, que el comprador de la Opción pueda adquirir el bien operado a un precio menor que el precio en el mercado de dicho bien, al momento en que el comprador ejerza la Opción.

b) Si el Precio de Ejercicio (K) es igual que el precio en el mercado (S_T) del bien operado (si $K = S_T$), se dice que la Opción esta " EXACTAMENTE EN EL DINERO", en este caso, si no es considerada la prima que se pagó por adquirir las Opciones, el ejercer las mismas no reditúa ninguna pérdida ni tampoco ninguna ganancia.

c) Si el Precio de Ejercicio (K) es mayor que el precio en el mercado (S_T) del bien operado, ($K > S_T$), se dice que la Opción esta " FUERA DEL DINERO", por lo que ejercer la Opción representaria una pérdida para su comprador.

La siguiente tabla resume lo anterior.

Para Opciones de Compra :

Si Precio de Ejercicio	<	Precio de Mercado	Opción Dentro del Dinero.
Si Precio de Ejercicio	>	Precio de Mercado	Opción Fuera del Dinero.
Si Precio de Ejercicio	=	Precio de Mercado	Opción Exactamente en el Dinero.

Hay que hacer notar que no siempre se obtendrá una ganancia siempre que una Opción sea ejercida, para ver lo anterior considérese el ejemplo 1.1 y supóngase que el precio de mercado de las acciones de Telmex al término de cuatro meses es de \$32 , evidentemente la Opción se ejercerá ya que el precio de ejercicio pactado (\$30) es menor que el precio en el mercado de cada acción. Al ser ejercida la Opción se obtiene la siguiente ganancia* :

$$[\$32 - \$30] \times 100 = \$200.$$

Sin embargo al ser considerada la inversión inicial se tiene:

$$\$200 - \$300 = -\$100.$$

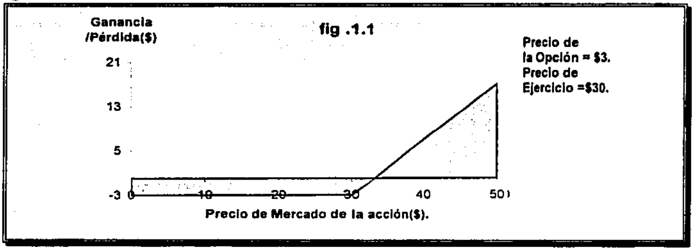
Como se pudo observar el ejercer la Opción se obtuvo una pérdida de \$100, sin embargo de no haberlo hecho se hubiera obtenido una pérdida de \$300.

En general una Opción de Compra deberá ejercerse siempre que el precio de mercado del bien sea mayor que el precio de ejercicio pactado en la Opción.

** Esta ganancia se tendría en el supuesto de que se vendieran inmediatamente las 100 acciones en el mercado.*

La fig.1.1 muestra el perfil de pérdidas y ganancias para el comprador de la Opción Europea de Compra para el ejemplo anterior.

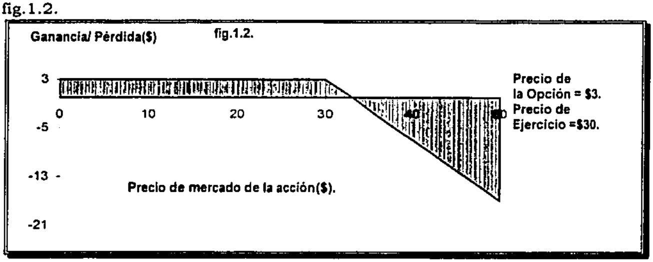
fig.1.1.



Mientras que el comprador de una Opción de Compra sobre algún bien desea que el precio en el mercado de éste se incremente, el vendedor de una Opción de Compra desea lo contrario, es decir, que el precio de mercado de dicho bien disminuya, para que de esta manera cada uno de ellos se pueda beneficiar con el movimiento de los precios.

La fig.1.2. muestra el perfil de pérdidas y ganancias para el vendedor de la Opción Europea de Compra del ejemplo 1.1.

fig.1.2.



La fig.1.1 y la fig. 1.2 muestran muy claramente una de las características importantes de las Opciones, el comprador de una Opción conoce su pérdida máxima, como se ve en la fig. 1.1 corresponde a la prima pagada por la Opción, mientras que el vendedor de una Opción conoce su ganancia máxima que es equivalente a la prima pagada por el comprador de la Opción.

De la misma forma el siguiente ejemplo ilustra la manera en que funciona una Opción Europea de Venta.

Ejemplo 1.2."Una Opción Europea de Venta."

Considérese a un inversionista que desea adquirir una Opción Europea de Venta ("PUT") para 50 acciones de TV- Azteca con un precio de ejercicio de $50 por cada acción. El precio actual de cada una de las acciones es de $45, la fecha de expiración de la Opción se establece dentro de dos meses y el precio de la Opción (que le da al tenedor el derecho para vender una acción de TV- Azteca) se establece en $7.

Por lo tanto para poder tener el derecho de vender 50 acciones dentro de dos meses, se requiere de una inversión inicial de :

$$50 \times 7 = \$350.$$

Si dentro de dos meses el precio de cada una de las acciones de TV- Azteca es mayor a $50, evidentemente no se ejercerá la Opción* , en esas circunstancias se perderá la inversión inicial de $350. Si por el contrario, dentro de dos meses el precio de las acciones esta por abajo de $50, la Opción será ejercida y el vendedor de la Opción tendrá la obligación de comprar las acciones a $50 aún cuando su valor en el mercado sea menor.

Por poner un ejemplo, supóngase que al término de dos meses el precio de las acciones esta por debajo de $50 y para entonces se cotizan en $40 . Al ser ejercida la Opción, el tenedor de la misma tiene el derecho de vender 50 acciones de TV- Azteca a $50 cada una, lo que llevaría a una ganancia de $10 por acción, es decir, una ganancia de $500 por las 50 acciones ; si es considerada la inversión inicial se obtiene una ganancia neta de :

$$\$500 - \$350 = \$150.$$

Nuevamente para efectos de este ejemplo no es considerado el costo financiero de la prima.
En la tabla 1.2 se resume el ejemplo anterior.

TABLA 1.2

Se compran 50 Opciones de Venta. ("Puts").

Precio de Ejercicio.	$50.
Fecha de Ejercicio.	Dentro de dos meses.
Precio actual de las acciones.	$45.
Precio de una Opción para vender una acción .	$ 7.
Inversión Inicial .	50 x 7= $350.

Si dentro de dos meses el precio de las acciones de TV-Azteca es de $40 entonces la Opción se ejerce obteniéndose una ganancia de :

$$(\$50 - \$40) \times 50 = \$500.$$

Cuando la inversión inicial es tomada en cuenta, la ganancia neta es de :

$$\$500 - \$350 = \$150.$$

* *No tiene ningún sentido vender acciones de TV- Azteca a $50, cuando el precio en el mercado de esas mismas acciones es mayor.*

Nuevamente para representar de una manera más general las implicaciones contractuales de ejercer la Opción de Venta en la fecha de expiración, se define la siguiente variable :

Sea P_T = El valor de la Opción de Venta en la fecha de expiración.

Entonces, el valor de la Opción en la fecha de expiración es :

$$P_T = K - S_T \quad \text{si } S_T < K \quad \text{o bien}$$
$$P_T = 0 \quad \text{si } S_T \geq K$$

Lo anterior puede reescribirse de la siguiente forma $P_T = \max[0, K-S_T]$, a la expresión anterior se le conoce también como valor intrínseco de una Opción de Venta. En este caso la terminología que se utiliza para relacionar el precio de ejercicio con el precio en el mercado del bien es la siguiente :

Para Opciones de Venta :

a) Si el precio de ejercicio (K) es mayor que el precio en el mercado (S_T) del bien operado ($K > S_T$), se dice que la Opción esta " DENTRO DEL DINERO", esto implica, que el comprador de la Opción pueda vender el bien operado a un precio mayor que el precio en el mercado de dicho bien, al momento en que el comprador ejerza la Opción.

b) Si el precio de ejercicio (K) es igual que el precio en el mercado (S_T) del bien operado (si $K = S_T$), se dice que la Opción esta " EXACTAMENTE EN EL DINERO", en este caso, si no es considerada la prima que se pagó por adquirir las Opciones, el ejercer las mismas no reditúa ninguna pérdida ni tampoco ninguna ganancia.

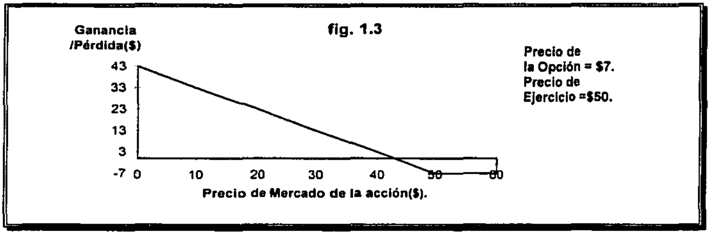
c) Si el precio de ejercicio (K) es menor que el precio en el mercado (S_T) del bien operado, $K < S_T$, se dice que la Opción esta " FUERA DEL DINERO", por lo que ejercer la Opción representaría una pérdida para su comprador.

En la siguiente tabla se resume lo anterior.

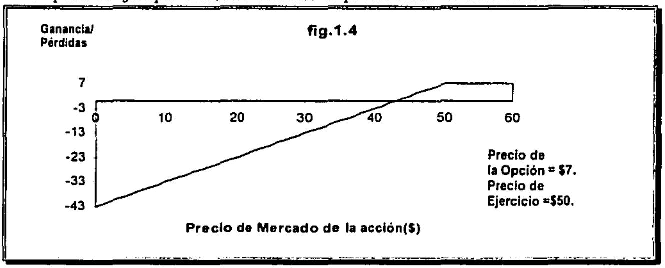
Para Opciones de Venta :

Si Precio de Ejercicio	>	Precio de Mercado	Opción Dentro del Dinero.
Si Precio de Ejercicio	<	Precio de Mercado	Opción Fuera del Dinero.
Si Precio de Ejercicio	=	Precio de Mercado	Opción Exactamente en el Dinero.

La fig.1.3 muestra el perfil de pérdidas y ganancias del comprador de la Opción de venta para el ejemplo anterior cuando el precio final de la acción varia.



La fig.1.4 muestra el perfil de pérdidas y ganancias del vendedor de la Opción de venta para el ejemplo anterior cuando el precio final de la acción varia.



Nuevamente es posible observar que la pérdida máxima posible para el comprador de una Opción es equivalente a la prima pagada por la misma, mientras que para el vendedor de la Opción la ganancia máxima corresponde a la prima pagada por la Opción.

1.3. ESTRATEGIAS DE INVERSIÓN Y CONTROL DE RIESGOS.

Las Opciones pueden ser utilizadas para cubrirse y controlar los riesgos, esto requiere del desarrollo de estrategias mediante las cuales los inversionistas puedan lograr, además de reducir riesgos, limitar las pérdidas y expandir los beneficios de sus inversiones.

Se entiende por estrategia a la acción de cubrir el riesgo inherente a un bien con otro instrumento, de tal manera que la pérdida de valor de uno de ellos se compense con la ganancia en el otro. Con base en lo anterior se distinguen cuatro tipo de posiciones que los inversionistas pueden tomar :

1.-Posición descubierta o sin cobertura.
2.-Posición cubierta o de cobertura.
3.-Posición Spread.
4.-Posición combinada.

1.-*POSICIÓN DESCUBIERTA.*

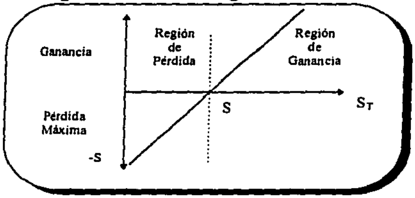
Este tipo de estrategia implica generalmente un riesgo mayor que el de los otros tipos ya que no se encuentra cubierta con otro instrumento. Existen seis posiciones descubiertas :

1. *Posición Larga (comprar) en acciones.*
2. *Posición Corta (vender) en acciones.*
3. *Posición Larga (comprar) una Opción de Compra.*
4. *Posición Corta (vender) una Opción de Compra.*
5. *Posición Larga (comprar) una Opción de Venta.*
6. *Posición Corta (vender) una Opción de Venta.*

Las implicaciones de pérdidas y ganancias obtenidas con estas estrategias son en un principio poco claras. Para poder entender mejor estas implicaciones se utilizan lo que se conocen como diagramas de ganancias o gráficas de pagos.

El diagrama de ganancias más elemental (fig.1.5) ilustra una posición larga en una acción x. Este relaciona la ganancia neta obtenida en una fecha futura determinada con el precio de la acción en esa misma fecha.

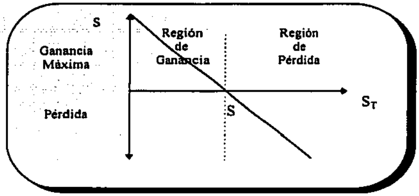
fig. 1.5 Posición Larga en una acción.



En esta figura S_T representa el precio de la acción x en una fecha futura determinada. Si el precio de la acción en esa fecha es de cero (es decir, $S_T=0$), entonces con la posición larga en la acción se experimentaría una pérdida de S, donde S es el precio al cual se adquirió la acción. Si $S_T=S$ con la posición tomada no se experimentaría ninguna pérdida ni tampoco ninguna ganancia. En general, la ganancia neta será igual a S_T-S. Un incremento de $1 en S_T se verá reflejado con un incremento de $1 en la ganancia neta.

Análogamente se presenta el diagrama de ganancias (fig. 1.6) para un inversionista con una Posición Corta en una acción x. Con una posición larga en la acción, la pérdida posible esta limitada a S, mientras que las ganancias pueden ser ilimitadas. Con una posición corta en una acción ocurre lo contrario, la ganancia está limitada a S mientras que la pérdida puede ser ilimitada.

fig. 1.6 Posición Corta.



Los diagramas de ganancias (figuras 1.7,1.8,1.9,1.10, 1.11, 1.12 y 1.13) muestran las implicaciones de pérdidas y ganancias de las cuatro posiciones que se pueden tomar en Opciones. Como lo muestra el diagrama de ganancia (fig. 1.8) la compra de una Opción de Compra es equivalente a tener una posición larga en una acción, excepto que tiene la ventaja de que proporciona un seguro contra la eventualidad de que el precio de la acción baje demasiado reduciendo la pérdida máxima a la prima pagada por adquirir dicha Opción (C). Análogamente tener una posición larga en una Opción de Venta (fig.1.9), es equivalente a tener una posición corta en una acción con la diferencia que la Opción brinda un seguro en contra de movimientos a la alza en el precio de la acción reduciendo la pérdida máxima a el valor de la prima pagada por adquirir dicha Opción (P) tal como lo muestra el diagrama de ganancias (fig. 1.10.)

Sin embargo, aunque en ciertas circunstancias es preferible mantener posiciones en Opciones en lugar de mantener posiciones en los bienes, tanto las Opciones de Compra como las Opciones de Venta tienen una desventaja, es necesario pagar una prima por el seguro que estas proporcionan en contra de movimientos adversos en los precios de los bienes. Para esquematizar esta desventaja supóngase que el precio en el mercado de un bien x es de (S) y esta cantidad es igual al precio del ejercicio K pactado en la Opción. Si en la fecha de vencimiento el valor de el bien permanece sin cambio, es decir, $S_T = S = K$, mientras que en una posición larga o corta sobre el bien no se tendría ninguna pérdida, en la compra de una Opción de Compra o una Opción de Venta se tendría una pérdida equivalente a la prima pagada.

fig.1.7. Posición Larga en una Opción de Compra.

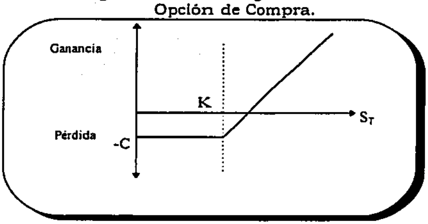


fig. 1.8 Posición Larga en el bien- Posición Larga Opción de Compra.

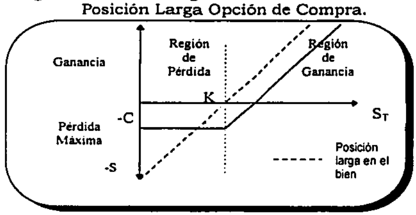


fig.1.9. Posición Larga en una Opción de Venta.

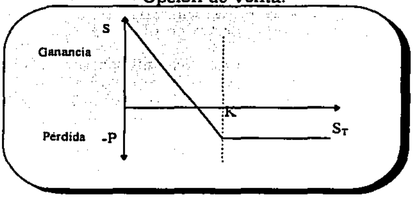


fig. 1.10.Posición Corta en el bien-Posición Larga en Opción de Venta

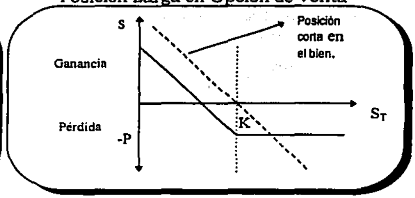


fig. 1.11. Posición Corta en una Opción de Compra.

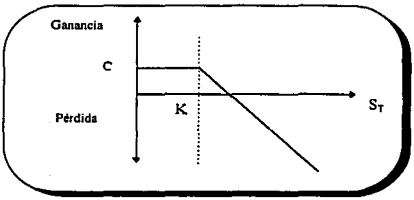
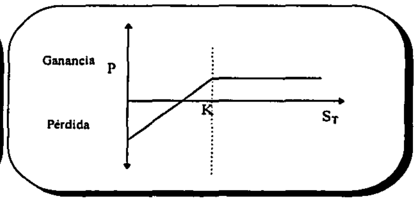
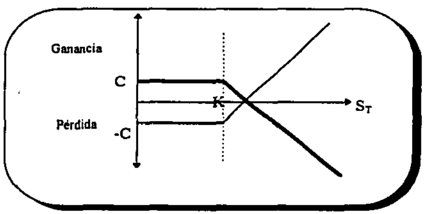


fig. 1.12. Posición Corta en una Opción de Venta.



Los diagramas de ganancias para el comprador y el vendedor de una Opción de Compra (fig.1.7 y 1.11) ilustran muy claramente una de las características importantes de las Opciones y es que las ganancias que obtiene el comprador de la Opción serán las pérdidas obtenidas por el vendedor de la misma Opción y viceversa ver fig.1.13.

fig. 1.13



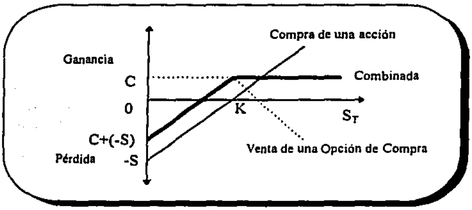
2.-*POSICION DE COBERTURA.*

Una cobertura combina una Opción con su acción subyacente de tal manera que la acción proteja a la Opción o ésta proteja a la primera contra una posible pérdida.

Una cobertura combina una posición larga (posición de compra) en una acción, con la venta de una Opción de Compra o con una compra de una Opción de Venta. La cobertura más popular consiste en tomar una posición corta sobre una Opción de Compra por cada acción subyacente comprada. Para analizar esto y todas las posiciones de cobertura se sobreponen en una sola gráfica las implicaciones de pérdida o de ganancia de cada posición. *La línea resultante para la posición combinada se determina sumando verticalmente las distancias de las dos posiciones con respecto a el eje de las abscisas.*

Al considerar el diagrama de ganancias de cada una de estas posiciones (figs. 1.11 y 1.5), es decir el diagrama de una posición corta en una Opción de Compra y el diagrama de una posición larga en una acción se puede observar que la línea resultante de esta posición de cobertura combinada, tiene la misma forma que el diagrama que representa una posición corta en una Opción de Venta (fig. 1.14). Lo anterior sugiere que es posible establecer una relación entre las Opciones de Compra y de Venta la cual será tratada más adelante en este trabajo.

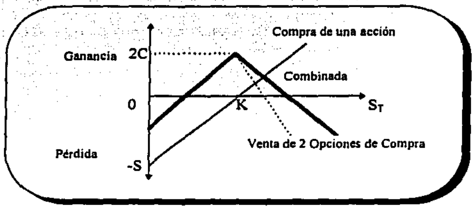
fig. 1.14 Posición combinada de la venta de una Opción de compra y la compra de una acción.



La línea más gruesa de la figura anterior es el resultado de la suma vertical.de las otras dos líneas. De la misma manera en que se obtuvo esta última relación se pueden obtener un buen número de estrategias dependiendo de las expectativas que el inversionista tenga sobre el movimiento en los precios de las acciones.

Por poner un ejemplo, supóngase que un inversionista tiene el presentimiento de que el precio de una acción tendrá pequeñas variaciones a la alza o a la baja. Al inversionista le molestan por supuesto las bajas, aunque sean pequeñas, por lo que la estrategia ideal sería vender 2 opciones de compra por cada acción comprada. Lo anterior producirá un triángulo (ver fig. 1.15) que producirá ganancias si es que el precio de la acción tiene cambios muy pequeños ya sean a la alza o a la baja.

fig. 1.15 Posición combinada de la venta de una Opción de compra y la compra de una acción.



Este es tan sólo un ejemplo de una de las muchas estrategias que pueden formarse, cada inversionista formara la suya dependiendo de las circunstancias y las expectativas que se tengan sobre la evolución de los precios.

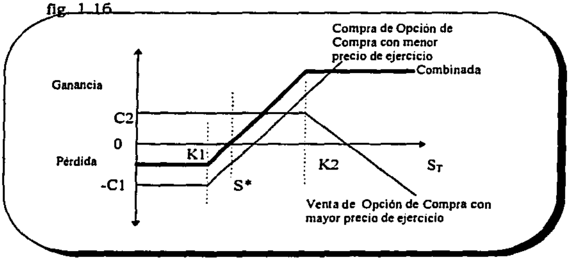
3.- *SPREADS.*

El Spread es otro tipo de estrategia que usa solamente opciones. El Spread combina opciones de la misma clase donde algunas son vendidas y otras son compradas. Se dice que dos opciones son de la misma clase si fueron emitidas sobre el mismo bien subyacente. Existen principalmente tres clases de Spread :

3.1- Spread Vertical
3.2- Spread Horizontal
3.3- Spread Diagonal

3.1 Spread Vertical
Un Spread Vertical es aquel formado con dos opciones, una en posición larga y la otra en posición corta, ambas sobre el mismo bien subyacente y con la misma fecha de vencimiento, lo único diferente son los precios de ejercicio. En la fig. 1.16 se ilustra el diagrama de pérdidas y ganancias que resulta de la estrategia anterior.

fig. 1.16



3.2- Spread Horizontal.

El Spread horizontal es aquél formado por dos opciones de la misma clase, una comprada y otra vendida, emitidas sobre el mismo subyacente y con los mismos precios de ejercicio pero con diferentes fechas de vencimiento. Hay que notar que el Spread horizontal no es posible graficarlo debido a que la diferencia entre las dos opciones es la fecha de vencimiento.

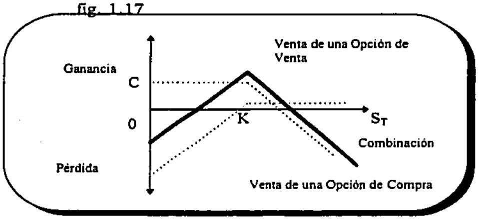
3.3- Spread Diagonal

Como en los otros spreads, en el diagonal una opción es comprada y la otra vendida, siempre y cuando sean de la misma clase ; la diferencia ahora es que tanto los precios de ejercicio como las fechas de vencimiento difieren, por lo cual no es posible esquematizar a este tipo de estrategia.

4.- *COMBINACIONES*

Una combinación es una estrategia formada por opciones de diferentes tipos (es decir, con opciones de compra y opciones de venta simultáneamente) sobre el mismo bien subyacente de tal manera que ambas son compradas o ambas son vendidas. La combinación más popular es aquella que esta formada por una Opción de Compra y una Opción de Venta sobre un mismo subyacente, con el mismo precio de ejercicio y fecha de expiración. El diagrama de ganancias para esta estrategia se ilustra en la fig.1.17

fig. 1.17



Como ya se mencionó se pueden elaborar un buen número de estrategias usando diagramas de ganancias, los ejemplos que se presentaron son sólo unos cuantos y de ninguna manera agotan todas las posibilidades. Sin embargo es importante hacer notar que estos diagramas son válidos sólo si todas las posiciones de las estrategias se conservan hasta la fecha de vencimiento, es decir estos diagramas valen sólo para las Opciones Europeas mas no para las Opciones Americanas. Así mismo se debe notar que la ganancia o la pérdida mostrada en los diagramas no consideran el valor de le dinero invertido en el tiempo.

1.4. OBJETIVOS Y APLICACIONES DE LAS OPCIONES.

- Las Opciones son instrumentos financieros que pueden ser utilizados a manera de protección ante el riesgo de posibles cambios en los precios futuros de los bienes subyacentes.

Ejemplo 1.4. "Uso de una Opción con el propósito de protección."

Considérese a una empresa importadora de partes de automóviles, la cual ha adquirido una deuda denominada en dólares. La deuda deberá pagarse en dos meses, la empresa desea cubrirse contra una posible alza en el tipo de cambio para comprar dólares. La empresa importadora puede resolver su problema de cobertura comprando una Opción con vencimiento a dos meses que permita comprar dólares por un monto equivalente a la deuda adquirida, de esta manera se asegura el precio de los dólares, si la cotización del dólar se eleva en los próximos dos meses, la empresa no tendrá que pagar más de lo que puede pagar para comprar los dólares necesarios para liquidar su deuda.

Si por el contrario, dentro de dos meses la cotización del dólar se establece a un precio menor que el pactado en la Opción, permitiría a la compañía adquirir dólares en el mercado más baratos que por medio de la Opción, por lo cual no se ejercerían los derechos otorgados por la Opción.

- Las Opciones permiten rendimientos controlables.

Ejemplo 1.5.

Considérese a una persona que decide que al vender una acción a un precio X en un plazo de un mes esta recibiendo un rendimiento aceptable, esta persona puede cambiar su estrategia de vender la acción misma por la de vender una Opción de Compra sobre su acción esperando que sucedan cualquiera de las dos siguientes situaciones :

Si la o las personas que compran su Opción deciden ejercerla, el vendedor de la Opción se sentirá satisfecho de haber vendido su acción a el precio deseado (precio de ejercicio), asegurando así el rendimiento deseado.

Si por el contrario la o las personas que compran su Opción deciden no ejercerla, entonces el vendedor de la Opción habrá obtenido una ganancia equivalente a la prima pagada por la Opción.

- Las Opciones pueden ser usadas a manera de inversión.

Ejemplo 1.6. "Uso de una Opción con el propósito de invertir".

Considérese el caso en el que un inversionista desea especular tomando una posición donde ganará si el precio de las acciones de Bimbo se incrementa . En este momento tiene para desembolsar $4000.
Supóngase que el precio de mercado de cada acción de Bimbo es de $40 ; existe en el mercado una Opción de Compra con vencimiento a 20 días y con precio de ejercicio de $42, dicha Opción se esta vendiendo a $2.

Con la información anterior el inversionista podría tener dos alternativas para realizar su inversión :

1.-Comprar 100 acciones.
2.-Comprar 2000 opciones.

Si se supone que sólo existen dos escenarios dentro de 20 días :
a) El precio de las acciones de Bimbo se incrementa a \$45.

⇒ Bajo la alternativa 1 se obtendrá una ganancia equivalente a la diferencia de los precios multiplicada por el número de acciones que adquirió.

(\$45 - \$40) x 100 =\$500.

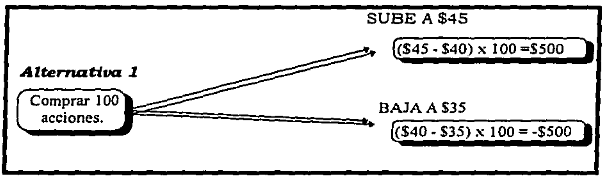
b)El precio de las acciones de Bimbo baja a \$35.

⇒ Bajo la alternativa 1 tiene una pérdida de \$5 por acción, es decir :

\$(40- \$35) x 100 = \$500.

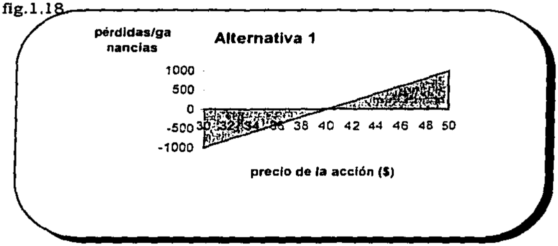
La tabla 1.4 resume lo anterior.

Tabla 1.4.



La gráfica siguiente ilustra el perfil de pagos para el inversionista bajo la alternativa 1

fig.1.18



Bajo la alternativa 2

a) Si el precio de las acciones de Bimbo se incrementa a $45.

⇒ El inversionista podría ejercer sus Opciones en ese momento lo que le daría una ganancia equivalente a la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio, multiplicado por el número de Opciones.

($45 - $42) x 2000 =$6000.

Menos el costo de las Opciones se tiene :

$6000 - $4000 = $2000.

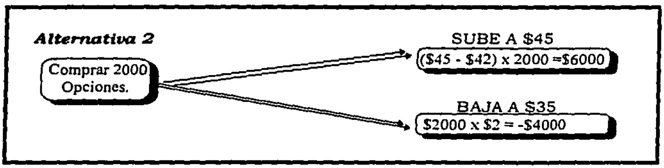
b)Si el precio de las acciones de Bimbo baja a $35.

⇒ Las Opciones no serán ejercidas y por tanto carecen de valor*, en estas circunstancias la pérdida se traduce en el monto pagado por las opciones, es decir :

$4000.

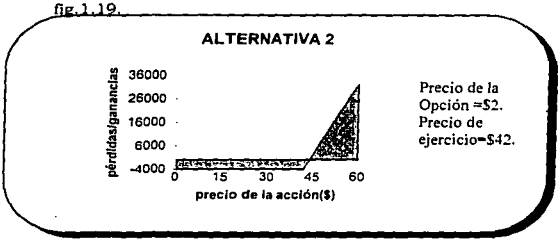
En la siguiente tabla se resume lo anterior.

Tabla 1.5



En la fig. 1.19 se presenta una gráfica de las pérdidas/ganancias de el inversionista bajo la alternativa dos.

fig.1.19.



* *Se dice que una Opción de Compra carece de valor, si en el día de expiración el precio de ejercicio es mayor que el precio de mercado del bien operado ese mismo día.*

Como se puede apreciar en las gráficas anteriores, la alternativa de usar las Opciones para invertir en lugar de las acciones, hace que las ganancias sean mucho mayores, pero también hay que notar que en caso de que el precio de las acciones baje, las pérdidas también se incrementen, sin embargo en el supuesto de que el precio de la acción bajara demasiado con el uso de las opciones limita la pérdida potencial a el precio de las mismas.

Las Opciones son negociadas en cualquiera de los dos mercados siguientes :

- Mercados OTC (" Over the Counter".)
- Mercados Organizados.

Los *Mercados OTC* tienen como principal característica que los contratos de Opciones son negociados de forma directa entre los vendedores y los compradores de los mismos, el volumen de intercambio depende del mercado y el riesgo de incumplimiento de el contrato es adquirido por cada una de las partes, no existe una estandarización en cuanto a la fecha de ejercicio, los bienes operados, el precio de ejercicio etc. Los contratos son creados a la medida del cliente.

Los *Mercados Organizados* a diferencia de los Mercados OTC, tienen los contratos estandarizados en cuanto a la fecha de ejercicio, los bienes que son operados, el precio de ejercicio además se tiene a una *Cámara de Compensación** que es la institución que se interpone entre las partes adquiriendo el riesgo de incumplimiento de las partes.

* *Es la institución encargada de realizar los cargos y los abonos en las cuentas de los compradores y los vendedores de Opciones.*

Capítulo 2

Fundamentos en la valuación de Opciones.

En el capítulo 1, se mostraron los valores de diferentes posiciones en opciones en la fecha de vencimiento. En ese momento, el valor de la Opción dependía únicamente de dos variables, el precio de el bien subyacente y el precio de ejercicio pactado en la Opción. Sin embargo en cualquier tiempo previo a la fecha de vencimiento otras variables afectarán el valor de una Opción.

Para poder comprender el funcionamiento de las Opciones, es necesario conocer los factores que determinan y afectan los precios en y antes de la fecha de vencimiento de las mismas, es por ello que en las siguientes secciones se analiza la relación que guardan dichos factores con los precios de las Opciones.

Las Opciones pueden ser emitidas sobre un buen número de valores, siendo los más comunes las acciones, las divisas, los futuros y los certificados de la tesorería. Los mercados más antiguos y más amplios en el mundo son los de Opciones sobre acciones comunes. Por este motivo, en este trabajo cuando se hable de bienes y de Opciones se estará refiriéndose a acciones y a Opciones sobre acciones.

2.1.FACTORES QUE AFECTAN EL PRECIO DE LAS OPCIONES.

Para observar el efecto que tiene cada variable en el valor de una Opción, en esta sección se considerará a cada una de ellas por separado. Las variables afectarán tanto el valor de las Opciones de Compra como las de Venta, sin embargo no siempre lo harán de la misma manera.

Los factores que afectan el valor de una Opción de Compra o de Venta son los siguientes :

1. El precio en el mercado del bien operado (S).
2. El precio de ejercicio (K).
3. El tiempo de vida de la Opción (T).
4. La volatilidad esperada en el precio del bien operado.
5. La tasa de interés (r).
6. Los dividendos que otorgue el bien.

Para observar el efecto de estos factores sobre el valor de las Opciones se hará la siguiente comparación : si dos Opciones sin idénticas en todos sentidos excepto por una variable ¿ como diferirán sus valores ?.

1.- El precio en el mercado del bien operado (S) y el precio de ejercicio pactado (K).

Si una Opción de Compra es ejercida en algún momento en el futuro, la ganancia que se obtendrá será la diferencia entre el precio en el mercado de el bien y el precio de ejercicio pactado en la Opción, es por ello que las Opciones de Compra valdrán más cuando el precio de el bien se incremente y valdrán menos cuando el precio de ejercicio se incremente. Para una Opción de Venta la ganancia que se obtendrá el momento de ejercer la misma será la diferencia que resulte entre el precio de ejercicio pactado y el precio en el mercado de el bien, es por ello que las Opciones de Venta valdrán mas cuando el precio de ejercicio pactado se incremente y valdrán menos cuando el precio en el mercado de el bien se incremente.

2.- El tiempo de vida de la Opción.

Tanto las Opciones Americanas de Compra como las de Venta valdrán más mientras más se incremente el tiempo de vida de las Opciones. Para ver lo anterior, considérense a dos Opciones idénticas excepto en el tiempo de expiración, una de ellas con tiempo de expiración mayor. El poseedor de la Opción cuyo tiempo de vida es mayor tiene las mismas oportunidades de que las condiciones en el mercado sean propicias para ejercer su Opción que el poseedor de la Opción que tiene un tiempo de vida menor, y más. Es por ello que la Opción que tiene mayor vigencia valdrá al menos el valor de la Opción con vigencia menor.

3.- Volatilidad.

La Volatilidad es una medida de la incertidumbre que se tiene sobre los precios futuros de los bienes. Indica que tan variables son los precios del bien operado, mientras la volatilidad se incrementa la posibilidad de que el precio de el bien termine muy bien o muy mal también se incrementa. Para el poseedor de el bien estos dos posibles resultados tienden a compensarse uno con otro, sin embargo este no es el caso para el tenedor de una Opción de Compra o una Opción de Venta. El poseedor de una Opción de Compra se beneficia cuando el precio de el bien se incrementa, pero tiene un riesgo limitado en caso de que el precio de el bien disminuya debido a que la pérdida máxima para el poseedor de la Opción es el precio que pagó por adquirir la misma. De manera similar, el propietario de una Opción de Venta se beneficia por la disminución en el precio de el bien pero tiene un riesgo limitado a el precio pagado por la Opción en caso de que el precio de el bien aumente. Debido a lo anterior el valor de las Opciones de Compra y de Venta se incrementarán mientras más se incremente la volatilidad.

4.- Tasa de Interés (r).

Mientras más alta sea la tasa de interés, más bajo será el valor presente de el precio de ejercicio pactado que el comprador de una Opción de Compra ha convenido pagar en caso de ejercer la misma. De este efecto mayores tasas de interés tendrán la misma influencia que precios de ejercicios más bajos, por lo cual las Opciones de compra tendrán un mayor valor.

El valor presente de el precio de ejercicio disminuirá mientras mayor sea el tiempo de vencimiento de la Opción, por lo tanto el tiempo de expiración tiene un segundo efecto sobre el valor de las Opciones de Compra : primero, por dar la oportunidad de que ocurran cambios en los precios de los bienes y segundo por el efecto que tiene sobre el valor presente de el precio de ejercicio.

Para el caso de las Opciones de Venta ocurre lo contrario, su valor aumentará mientras más pequeña sea la tasa de interés.

5.- Dividendos.

En un mercado de acciones los dividendos suponen una reducción de las cotizaciones en la medida en que los inversionistas descuentan del precio de cada acción los dividendos repartidos ; como consecuencia de el impacto desfavorable que los dividendos tienen sobre el precio de el bien operado (acciones), los dividendos afectarán negativamente el valor de las Opciones de Compra y de manera positiva el valor de las Opciones de Venta.

El comprador de una Opción de Compra adquiere los dividendos de la acción si la ejerce antes de la fecha de ex-dividendos o como se le conoce en inglés "ex-dividend day" (fecha de corte en la cual se reconoce a los tenedores de las acciones de una empresa). Debido a que los tenedores de este tipo de Opciones pueden buscar "atrapar" los dividendos de la acción al ejercerla, la probabilidad de que la Opción sea ejercida al acercarse la fecha de ex-dividendos aumenta considerablemente.

En la siguiente tabla se resume el efecto de los cambios en los factores que afectan a el precio de las Opciones.

Tabla 2.1

SI :	El precio de una Opción de Compra.	El precio de una Opción de Venta.
El precio del bien operado aumenta	+	-
Transcurre el tiempo.	-	-
La volatilidad aumenta	+	+
Suben las tasas de interés.	+	-
Suben los dividendos.	-	+

Donde + significa que el precio de la Opción aumenta, y - el precio de la Opción disminuye.

2.2. RELACIÓN ENTRE UNA OPCIÓN DE COMPRA Y UNA OPCIÓN EUROPEA DE VENTA (PARIDAD PUT-CALL).

En esta parte se deriva una relación importante entre el valor de una Opción Europea de Compra y el valor de una Opción Europea de Venta con el mismo precio de ejercicio y con la misma fecha de vencimiento.

Al comparar las figuras 1.9 y 1.14 de el capítulo 1 es posible observar que la estrategia de comprar una acción, vender una Opción de Compra y comprar una Opción de Venta producirá una ganancia (o pérdida) constante sin importar cual sea el precio en el mercado de la acción en la fecha de vencimiento. Lo anterior relaciona de alguna manera el precio de una Opción de Compra y el precio de una Opción de Venta. Para obtener esta relación se usará una herramienta conocida como tabla de arbitraje. Esta tabla describe los rendimientos obtenidos a través de la elaboración de un cierto portafolio de inversión con valores asociados a las acciones. Se calcula entonces el valor futuro de el portafolio para cada posible precio de las acciones en la fecha de vencimiento. Es posible derivar la relación entre el valor de una Opción Europea de Compra y una Opción Europea de Venta aplicando el principio de que aquel portafolio con el cual se obtienen rendimientos futuros nulos para cada posible situación deberá tener un valor nulo el día de hoy para evitar oportunidades de arbitraje. Para poder comprender lo anterior es necesario entender lo que significa el término arbitraje.

En términos generales el *Arbitraje* se puede definir como la compra o la venta simultánea del mismo instrumento en diferentes mercados realizada para obtener pequeñas ganancias sin riesgo alguno. En el mercado de Opciones y otros productos derivados, éste término se aplica cuando se crea una estrategia que implica comprar un contrato que se considera está subvaluado, y vender otro considerado sobrevaluado de dos bienes subyacentes relacionados esperando obtener un beneficio positivo libre de riesgo sin que se medie inversión alguna.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el concepto de arbitraje.

Considérese una acción la cual es negociada en dos bolsas de valores, la bolsa de valores de Nueva York y la bolsa de valores de Londres. Supóngase que el precio de la acción es de \$172 dólares en Nueva York y \$100 libras en Londres en el momento en que el tipo de cambio dólar-libra esta en \$1.75 dólares por libra. Se podría hacer arbitraje comprando 100 acciones en Nueva York y vendiendo las mismas 100 acciones en Londres obteniéndose asi una ganancia libre de riesgo de :

$$100 * (\$1.75 * 100 - \$172) = \$300$$

La ganancia anterior no considera los costos de transacción, los cuales probablemente eliminarían las ganancias para pequeños inversionistas. Sin embargo, grandes inversionistas enfrentarían costos de transacción muy pequeños en los mercados de acciones y en los mercados de divisas. Este tipo de inversionistas encontrarían muy atractivo este tipo de oportunidades y tomarían todas las ventajas que pudieran de ellas.

Oportunidades de arbitraje como la mencionada en el ejemplo anterior no pueden durar por mucho tiempo. Los inversionistas que compran las acciones en Nueva York estarían elevando la demanda por los dólares lo que originaría que el precio de los mismos se incrementara, algo similar ocurriría al vender las acciones en Londres sólo que esta vez las libras bajarían de precio. Por lo anterior las oportunidades de arbitraje desaparecerían muy rápidamente, de hecho en este trabajo uno de los supuestos más importantes que se hacen es la no existencia de oportunidades de arbitraje.

En esta y en las siguientes secciones se harán, además de el supuesto de no arbitraje, las siguientes suposiciones :

1.- No existen costos de transacción.
2.- Todas las pérdidas o ganancias están sujetas a la misma tasa de interés.
3.- Es posible prestar y pedir prestado con una tasa de interés libre de riesgo.

Para obtener la relación que existe entre el precio de una Opción de Compra y el precio de una Opción de Venta considérese que se forma un portafolio de inversión de la siguiente manera : se vende una Opción de Compra, se compra una Opción de Venta (ambas sobre la misma acción, con la misma fecha de vencimiento (T), y con el mismo precio de ejercicio K), se pide un préstamo de $\$K(1+r)^{-T}$ pagaderos al tiempo T y se compra una acción, como se muestra en la tabla 2.2, el día de hoy el portafolio anterior vale $C-P+ K(1+r)^{-T}-S$ donde :

C= El valor en el mercado de una Opción Europea de Compra.
P= El valor en el mercado de una Opción Europea de Venta.
S = Valor de mercado del bien operado.
K = Precio de Ejercicio pactado.
r = Tasa de Interés libre de riesgo.
T = Fecha de vencimiento.

Ahora bien el término $(1+r)^{-T}$ no es otra cosa que la parte de un peso que se requiere pagar el día de hoy para poder obtener un peso en el tiempo T, es decir $(1+r)^{-T}$ es el valor presente de un peso pagadero en el tiempo T. De esta manera, si en el tiempo T será pagado el precio de ejercicio (K), el factor $K(1+r)^{-T}$ no es otra cosa que su valor presente.

Si se analiza el valor de el portafolio al tiempo T se tiene que si $S_T \leq K$ entonces la Opción de Venta comprada vale $K-S_T$ (donde S_T es el valor de la acción al tiempo T), y la Opción de Compra que se vendió expirará sin ningún valor. Por otro lado si $S_T>K$, entonces la Opción de Compra vendida valdrá S_T-K y la Opción de Venta expirará sin ningún valor, en ambos casos el valor de la acción comprada será de S_T y será necesario cubrir el préstamo que en esa fecha equivale a \$K por lo cual se tiene que al tiempo T no se tiene ninguna pérdida pero tampoco ninguna ganancia. En la tabla 2.2 se resume lo anterior.

Tabla 2.2

Fecha	actual	Fecha de	Vencimiento (T)
		$S_T \leq K$	$S_T>K$
Venta de Opción de Compra	C	------	$K-S_T$
Compra de Opción de Venta	-P	$K-S_T$	------
Compra de acción	-S	S_T	S_T
Préstamo	$K(1+r)^{-T}$	-K	-K
Total		------	------

Si se considera la posición contraria, es decir : comprar una Opción de Compra, vender una Opción de Venta, vender una acción y prestar $K(1+r)^{-T}$ se tiene que el valor de esta posición en el tiempo T es de cero. Como consecuencia de lo anterior y en ausencia de oportunidades de arbitraje, debería cumplirse que la inversión inicial requerida para establecer estas estrategias es de cero, por lo tanto :

$$C + K(1+r)^{-T} - P - S = 0$$

o equivalentemente :

$$C + K(1+r)^{-T} = P + S$$

La relación anterior es conocida como PARIDAD PUT-CALL, a través de esta relación el valor de una Opción Europea de Compra puede ser deducido a partir de el valor de una Opción Europea de Venta con el mismo precio de ejercicio y fecha de ejercicio que la Opción de Compra y viceversa.

El siguiente ejemplo ilustra una situación en la que se podría hacer arbitraje en caso de que la relación anterior no se cumpliera.

Ejemplo 2.4.
Supóngase que el precio de mercado de un bien x es de \$41, el precio de ejercicio se pacta en \$40, la tasa de interés que se maneja es de 10% al año, el precio de una Opción Europea de Compra que vence dentro de tres meses es de \$4, y el precio de una Opción Europea de Venta que vence dentro de tres meses de \$3.25.

En estas circunstancias se tendría :

$$C + K(1+r)^{-T} = 4 + 40(1+.10)^{-.25} = 43.05.$$
$$P + S = 3.25 + 41 = 44.25.$$

En este caso la Paridad Put-Call no se cumple por lo cual lo conveniente para lograr una ganancia libre de riesgo (es decir realizar arbitraje) sería comprar la Opción de Compra y vender la Opción de Venta y la acción.

Con la estrategia anterior se lograría la siguiente ganancia :

$$-4+3.25+41 = 40.25.$$

Si esta cantidad es invertida a la tasa de interés de 10% al término de tres meses se tendría 40.25(1.1)^.25= $41.22.

Si dentro de tres meses el precio en el mercado de la acción es mayor que el precio de ejercicio entonces la Opción de Compra será ejercida, en caso contrario, la Opción de Venta será ejercida. En cualquiera de los dos escenarios el inversionista comprará la acción en $40, lo cual origina una ganancia segura de :

$$\$41.22 - \$40 = \$1.22.$$

Nótese que al obtener esta relación se utilizó el hecho de que las Opciones negociadas eran de tipo Europeo por lo cual era posible conocer en la fecha de vencimiento (T) el valor de el portafolio y a partir de el supuesto de no arbitraje era posible obtener el valor de ese mismo portafolio en el tiempo 0, sin embargo cuando las Opciones de las que se hablan son de tipo Americano la Paridad Put-Call no necesariamente tiene por que cumplirse ya que este tipo de Opciones pueden ejercerse en cualquier momento previo a la fecha de vencimiento.

Pese a lo anterior es posible obtener una relación entre los precios de la Opciones Americanas de Compra y las Opciones Americanas de Venta, sin embargo para ello es necesario conocer algunas características más sobre las Opciones. En las siguientes secciones se tratarán algunas de estas características para después obtener esta relación.

2.3. RESTRICCIONES DE ARBITRAJE EN EL PRECIO DE UNA OPCIÓN DE COMPRA.

En esta sección se presentarán una serie de proposiciones acerca de el valor de las Opciones de Compra. Para la demostración de cada una de las proposiciones se mostrará como se podría hacer arbitraje en caso de que alguna de ellas no se cumpliera, lo cual estaría violando el supuesto de no arbitraje hecho en la sección anterior. Las siguientes proposiciones valen tanto para Opciones de tipo Europeo como para las de tipo Americano.

PROPOSICIÓN 1 *(Limites inferiores y superiores de una Opción de Compra para acciones que no pagan dividendos).*

El valor de una Opción de Compra es mayor o igual a el máximo de :

a) Cero.
b) La diferencia entre el precio de mercado de la acción y el precio de ejercicio.
c) El valor de la acción menos el valor presente de los dividendos a pagar por la misma, hasta el plazo de vencimiento de la Opción.

Y el valor de una Opción de Compra nunca será mayor que el precio de mercado de la acción, es decir :

$$S \geq C \geq \max[0, S - K, S - K(1+r)^{-T} - D]$$

Donde :
D=Valor Presente de los dividendos a pagar por la acción operada hasta el plazo de vencimiento de la Opción.

Demostración .

La demostración de esta proposición se hará en cuatro partes, primero se demostrará que $C \geq 0$, segundo que $C \geq S-K$, tercero que $C \geq S - K(1+r)^{-T} - D$ y por último que $S \geq C$.

a) Supóngase que $C < 0$. Con lo anterior se podría obtener una ganancia libre de riesgo comprando la Opción de Compra y manteniéndola hasta la fecha de expiración. Generando con ello una cantidad positiva en este momento y una cantidad no negativa en la fecha de expiración, lo cual no podría suceder en ausencia de arbitraje por lo cual debe cumplirse que $C>0$.

b) Supóngase que $C < S - K$. Esta situación podría generar una ganancia libre de riesgo realizando la siguiente estrategia: comprar la Opción y ejercerla inmediatamente, lo cual representaría una ganancia inmediata de $(S - K) - C > 0$.

Hay que notar que la posibilidad de ejercer inmediatamente no sería factible con una Opción de tipo Europeo, sin embargo existe una estrategia que se podría seguir para obtener una ganancia libre de riesgo en este caso : vender la acción, prestar $K y comprar la Opción de Compra. Esta estrategia produce en la fecha de vencimiento una ganancia positiva sin riesgo alguno.

Por lo tanto, bajo el supuesto de no arbitraje se debe cumplir que :

$$C \geq S - K.$$

c) Supóngase que $C < S - K(1+r)^{-T} - D$, se podría generar una ganancia formando el siguiente portafolio : vender la acción, comprar una Opción de Compra, comprar el valor presente de los dividendos máximos que se esperan serán devengados por la acción durante la vida de la Opción, e invertir una cantidad equivalente a el valor presente de el precio de ejercicio pactado en instrumentos libres de riesgo (como pudieran ser Bonos). De esta manera se tiene que el portafolio anterior tienen un valor actual de :

$$S - C - D - K(1+r)^{-T}.$$

Si se mantiene la estrategia de conservar el portafolio hasta la fecha de vencimiento, y una vez liquidados los dividendos otorgados por la acción se tendría la situación que se muestra en la tabla de arbitraje 2.3 la cual resume los posibles valores de el portafolio en la fecha de ejercicio.

Tabla 2.3

	Fecha Actual	Fecha de Vencimiento	
		$S_T \leq K$	$K < S_T$
VENTA DEL BIEN OP.	S	$-S_T$	$-S_T$
COMPRA DE OPCIÓN	$-C$	-	S^*-K
COMPRA DE BONOS	$-K(1+r)^{-T}$	K	K
TOTAL.	$S-C-K(1+r)^{-T}$	$K-S_T$	-

Como se puede observar, en la fecha de vencimiento se obtendrá siempre una ganancia no negativa bajo cualquier circunstancia por lo que, en ausencia de arbitraje debería ser cierto que:

$$C \geq S - K(1+r)^{-T} - D$$

d) Si $C > S$ para obtener una ganancia libre de riesgo se podría seguir la siguiente estrategia : comprar la acción y vender la Opción de Compra, con lo que se tendría una cantidad positiva ahora. Si la Opción de Compra es ejercida se vende la acción que se tiene y se recibe K, por otro lado si no es ejercida la Opción se tiene a la acción la cual tiene un valor en el mercado.

Además hay que recordar que una Opción de Compra da el derecho de comprar una acción, por lo tanto sería ilógico pagar un precio más elevado por adquirir dicha acción.

Por lo tanto : $C \leq S$.

Con esto se concluye la demostración de la proposición 1.

La tabla 2.3 muestra algunos precios de Opciones que podrían generar ganancias libres de riesgo para los inversionistas. Estos precios no cumplen con la proposición 1 ni tampoco con las proposiciones siguientes de esta sección. El ejemplo 2.5 muestra como es posible obtener alguna ganancia libre de riesgo con algunas de estas Opciones cuando la proposición 1 no se cumple.

Tabla 2.3

Precio de Ejercicio	Fecha	de	Expiración	Precio de la acción
	Enero	Abril	Julio	
	Precios	de	Opciones	
35	1	6	14	40
40	2	5	7	40
45	4	3	5	40

***Nota :** Supóngase que estamos en octubre, es decir enero esta a tres meses de hoy, la tasa de interés anualizada para todas las fechas de expiración es de 15%, y la acción no paga dividendos antes de julio.*

Ejemplo 2.5

Considérese la Opción de Compra con fecha de expiración de enero y con precio de ejercicio de \$35. Se podría hacer una ganancia comprando esta Opción por \$1 y ejerciéndola inmediatamente, lo cual implicaría un desembolso de \$36, sin embargo se puede vender la acción adquirida a el precio de mercado de \$40, lo cual origina una ganancia neta de \$4.

Supóngase que la acción no paga dividendos durante el tiempo de vida de las Opciones. La Opción con fecha de vencimiento en abril y con precio de ejercicio de 35 proporciona otra oportunidad para obtener una ganancia. Esta Opción no se vende a un precio menor que la diferencia entre el precio en el mercado y el precio de ejercicio (S-K), pero si es vendida a una precio menor que el valor en el mercado de la acción, \$40, menos el valor presente de el precio de ejercicio :

$$\$35(1.15)^{\wedge -1/2}=\$32.64.$$

Para tomar ventaja de lo anterior, un inversionista podría comprar esta Opción de Compra, vender una acción, y prestar \$32.64 a una tasa de interés anualizada del 15% pagaderos al final de seis meses.

Esta estrategia genera una ganancia inmediata de :

$$\$40- \$32.64-\$6=\$1.36.$$

Si se mantiene el portafolio hasta la fecha de expiración y la Opción termina dentro de el dinero, el portafolio no tendrá ninguna pérdida pero tampoco ninguna ganancia. Los $35 recibidos por el préstamo cubrirán el precio de ejercicio requerido por ejercer la Opción, la cual proporcionará la acción requerida para cubrir la venta de la misma. Si la Opción termina fuera del dinero, no sólo se tendrán los iniciales $1.36, sino además una ganancia extra. Por ejemplo, si el precio de la acción en la fecha de expiración es de $30, entonces se obtiene una ganancia adicional de :

$$\$35-\$30= \$5.$$

<u>PROPOSICIÓN 2</u> (El precio de ejercicio).

a) El valor de una Opción de Compra será mayor o igual que el valor de otra Opción de Compra idéntica excepto que esta última tiene un precio de ejercicio mayor.

$$C(K1) \geq C(K2) \quad \text{si } K1<K2.$$

b) La diferencia entre el valor de las Opciones de Compra será menor o igual que la diferencia entre sus precios de ejercicio.

$$K2-K1 \geq C(K1)- C(K2) \quad \text{si } K1<K2.$$

c) Si se tienen tres Opciones de Compra con precios de ejercicio K3 > K2 > K1, el valor de la Opción cuyo precio de ejercicio es K2 será menor o igual que el promedio ponderado de las otras dos Opciones de forma que :

$$C(K2) \leq \left(\frac{K3-K2}{K3-K1}\right) C(K1)+\left(\frac{K2-K1}{K3-K1}\right) C(K3)$$

Donde :

C(Ki) = El valor de la Opción de Compra con precio de ejercicio Ki con i= 1,2,3.

Demostración.

a) Supóngase que C(K2) > C(K1). En esta situación se podría generar una ganancia de la siguiente manera. Comprando C(K1) y vendiendo C(K2), esto generaría una cantidad de dinero positiva en ese momento(C(K2)- C(K1)>0). Si la persona a la cual se le vendió C(K2) ejerce la Opción antes de la fecha de expiración (es por que St>K2 donde St es el precio de la acción en el momento en que es ejercida la Opción), la estrategia sería entonces ejercer la Opción con precio de ejercicio K1[*] al mismo tiempo, produciendo así una cantidad positiva de K2-K1. Si C(K2) no es ejercida y se mantiene hasta la fecha de vencimiento, existen tres posibles resultados para entonces. En la tabla de arbitraje 2.4 se ilustra la situación anterior.

TABLA 2.4

Fecha	actual	Fecha de Ejercicio		
		$S_T \leq K1$	$K1<S_T<K2$	$K2 \leq S_T$
Compra de C(K1)	-C(K1)	-----------	S_T-K1	S_T-K1
Venta de C(K2)	C(K2)	-----------	-----------	-(S_T-K2)
TOTAL	C(K2)-C(K1)	-----------	S_T-K1	K2-K1

[*] Nótese que es factible ejercer C(K1) ya que K1<K2 y K2< St ∴ K1<St.

Como puede observarse en la fecha de ejercicio bajo cualquier circunstancia se obtiene una ganancia no negativa, por lo tanto para no tener posibilidades de arbitraje se tiene que cumplir:

$$C(K1) \geq C(K2) \quad \text{si } K1<K2.$$

b) Supóngase que $C(K1) - C(K2) > K2-K1$. Nuevamente en esta situación se podría hacer dinero sin riesgo de la siguiente manera : vendiendo C(K1), comprando C(K2) y colocando K2-K1 en instrumentos libres de riesgo. Si C(K1) no es ejercida antes de la fecha de vencimiento la estrategia a seguir es la de conservar las posiciones adquiridas lográndose con ello las ganancias que se muestran el la tabla 2.5.

Por otro lado si la Opción que fue vendida se ejerce antes de la fecha de vencimiento, por ejemplo en un tiempo t y en ese momento $C(St, t, K2) > St-K2$, entonces lo conveniente es vender esta Opción, si no lo conveniente es ejercer la misma.

Tabla 2.5

	FECHA ACTUAL	Fecha De Vencimiento		
		$S_T \leq K1$	$K1<S_T<K2$	$K2 \leq S_T$
VENTA DE LA OPCIÓN CON P.E.K1	C(K1)	-----	$K1-S_T= A$	$K1-S_T=C$
COMPRA DE LA OPCIÓN CON P.E.K2	-C(K2)	-----	-----	$S_T-K2=D$
INVERSIÓN DE K2-K1 EN INSTRUMENTOS LIBRES DE RIESGO.	-(K2-K1)	$(K2-K1)(1+r)^T$	$(K2-K1)(1+r)^T =B$	$(K2-K1)(1+r)^T$ =E
TOTAL.		$(K2-K1)(1+r)^T$	A+B	C+D+E

De cualquiera de las dos maneras se tomarían K2 - K1 para cubrir la posición tomada, obteniendo siempre los intereses acumulados mas, si se vendió la Opción, la cantidad de C(St, t, K2) - (S -K2).

Por lo tanto dado que no es posible el arbitraje es necesario que se cumpla la siguiente desigualdad :

$$K2-K1 \geq C(K1)- C(K2) \quad \text{si } K1<K2.$$

c) Considérese la siguiente Combinación lineal:

$$K2 = \lambda K1 + (1-\lambda)K3 \text{ con } \lambda \in (0, 1).$$

Si se despeja lambda se tiene :

$$\lambda =(K3-K2)/(K3-K1) \quad \text{y} \quad (1- \lambda) = (K2-K1)/(K3-K1).$$

Ahora bien, si se tiene que : $C(K2)> \lambda C(K1)+(1-\lambda)C(K3)$ nuevamente se puede hacer una ganancia vendiendo C(K2) y comprando $\lambda C(K1)+(1-\lambda)C(K3)$. De esta manera se tiene en este momento una cantidad de dinero positiva. Ahora bien si la Opción de Compra que fue vendida no es ejercida antes de la fecha de vencimiento, la estrategia es la de conservar la Opción que fue adquirida hasta la fecha de vencimiento, con lo cual se tendrán los beneficios que son presentados en la tabla 2.6.

Para verificar que $\lambda(S_T-K1)+(K2-S_T)>0$ cuando $K2<S_T<K3$, primero nótese que $K3>S_T$, por lo tanto $(1-\lambda)K3>(1-\lambda)S_T$, esto implica que $\lambda S_T > S_T-(1-\lambda)K3$. Entonces,

$$\lambda S^* - \lambda K1 > S_T - \lambda K1 - (1-\lambda)K3$$

lo que a su vez implica $\lambda(S_T-K1)+(K2-S_T)>0$. Por lo tanto, al final nunca se perderá y se tendrá la oportunidad de hacer dinero siempre que : $K1<S_T<K3$.

En el supuesto que se ejerciera la Opción que fue vendida en el tiempo t y el precio de la acción sea de St, entonces si $C(St, t, K1)>St-K1$ hay que vender la Opción de Compra con precio de ejercicio K1, recibiendo de esta manera una cantidad de dinero positiva.

Por lo tanto para que no haya oportunidades de arbitraje se debe cumplir que :

$$C(K2) \leq \left(\frac{K3-K2}{K3-K1}\right) C(K1) + \left(\frac{K2-K1}{K3-K1}\right) C(K3)$$

En la siguiente tabla se resume las ganancias que pueden obtenerse en la fecha de ejercicio.

Tabla 2.6.

	FECHA. ACTUAL	Fecha	De	Vencimiento	
		$S_T \leq K1$	$K1 < S_T \leq K2$	$K2 < S_T < K3$	$K3 \leq S_T$
VENDER UNA OPCIÓN DE COMPRA CON PRECIO DE EJERCICIO K2	C(K2)	-----	-----	$K2-S_T$	$K2-S_T$
COMPRAR λ OPCIONES DE COMPRA CON PRECIO DE EJERCICIO K1	$-\lambda C(K1)$	-----	$\lambda(S_T-K1)$	$\lambda(S_T-K1)$	$\lambda(S_T-K1)$
COMPRAR $1-\lambda$ OPCIONES DE COMPRA CON PRECIO DE EJERCICIO K3	$-(1-\lambda)C(K3)$	-----	-----	-----	$(1-\lambda)(S_T-K3)$
TOTAL		-----	$\lambda(S_T-K1)$	$\lambda(S_T-K1)+(K2-S_T)$	-----

Ejemplo 2.6.-

Nuevamente considerando a las Opciones listadas en la tabla 2.3. se tiene que todas las Opciones con fecha de vencimiento de enero violan la restricción a) de la proposición 2 : los precios de las Opciones de Compra aumentan mientras se incrementan los precios de ejercicio, una manera de obtener una ganancia es la siguiente : comprar la Opción con fecha de vencimiento de enero y con un precio de ejercicio de 40 por \$2 (para efectos de le ejemplo se le llamará (Opción 1) y vender la Opción de Compra con fecha de vencimiento de enero y con un precio de ejercicio de \$45 por \$4 (Opción 2). Las operaciones anteriores generarían una ganancia inmediata de \$2, además se asegura que no habrá pérdidas futuras ; si la Opción 2 es ejercida, entonces se ejerce la Opción 1 obteniéndose una ganancia extra de \$5.

La restricción b) es violada por las Opciones con fecha de vencimiento de julio y con precio de ejercicio de $35 y $40 ; La diferencia en los precios de las Opciones es mayor que la diferencia en los precios de ejercicio.

Se lograría una ganancia siguiendo la siguiente estrategia :

Vender la Opción con fecha de vencimiento de julio y con precio de ejercicio de $35 (Opción 3) y comprar la Opción con fecha de vencimiento de julio y con precio de ejercicio de $40 (Opción 4). La estrategia anterior genera una ganancia inmediata de :

$$\$14-\$7= \$7.$$

Si la Opción 3 se mantiene hasta la fecha de expiración , entonces el desembolso máximo se haría si el precio de la acción S es de $40 o más. En tal caso con la posición tomada se perdería $5, que es la diferencia entre el precio de ejercicio de la Opción 3 y el precio de ejercicio de la Opción 4. Sin embargo, esta cantidad es menor que la ganancia inicial de $7 (más los intereses ganados sobre ella), por lo que de cualquier forma se tendría una ganancia segura . Si por el contrario la Opción 3 fuera ejercida antes de la fecha de expiración, entonces se podría vender o ejercer la Opción 4 según lo que reditúe una mayor ganancia . El desembolso máximo que se tendría que hacer en este momento sería nuevamente de $5 que es la diferencia entre los precios de ejercicio de las Opciones 3 y 4. Sin embargo esta cantidad es menor a los $7 recibidos al momento de tomar las Posiciones por lo que se asegura una ganancia.

Las Opciones con fecha de Vencimiento en el mes de abril dan la oportunidad de obtener un beneficio considerando la estrategia descrita en la prueba de el inciso (c). En la estrategia siguiente se consideran a las Opciones con fecha de vencimiento del mes de abril.

La estrategia a seguir es la de vender dos Opciones con precio de ejercicio de $40, a un precio de $5 cada una, y comprar una Opción con precio de ejercicio de $35 a $6 y otra con precio de ejercicio de $45 a $3. El portafolio anterior proporciona una ganancia inmediata de $1. Si es posible mantener el portafolio hasta la fecha de expiración cuatro panoramas son posibles :

Primero, supóngase que el precio en el mercado de la acción en la fecha de expiración es menor de $35. Como ninguna Opción termina dentro del dinero, no se experimentan ninguna pérdida ni tampoco ninguna ganancia.

Segundo, supóngase que el precio en el mercado de la acción esta entre $35 y $40, de ser así sólo la Opción con precio de ejercicio de $35 termina dentro del dinero, lográndose así una ganancia con esta Opción.

Tercero, Supóngase que el precio en el mercado de la acción termina entre $40 y $45, en este caso tanto la Opción con precio de ejercicio de $35 como la Opción con precio de ejercicio de $40 terminan dentro de el dinero. Nuevamente se obtiene una ganancia dado que la ganancia en la Opción con precio de ejercicio de $35 es mayor que las pérdidas en las Opciones con precio de ejercicio de $40.

Finalmente, si el precio en el mercado de la acción es mayor de $45, no se experimentara ninguna pérdida ni tampoco ninguna ganancia. Un argumento similar muestra que no se perderá ni se ganará nada, si las Opciones vendidas son ejercidas antes de la fecha de expiración.

PROPOSICIÓN 3 (Fecha de vencimiento).

El valor de una Opción de Compra es mayor o igual que el valor de otra Opción de Compra, idéntica a la anterior, excepto que esta última tiene una fecha de vencimiento menor :

$$C(T2) \geq C(T1) \text{ siempre que } T2 > T1.$$

Demostración.

Supóngase que no se cumple la desigualdad, es decir :

$$C(T2) < C(T1) \quad \text{con } T2 > T1$$

en este caso es posible realizar arbitraje realizando la siguiente estrategia :

Comprar C(T2) y vender C(T1), con ello se logra una ganancia en este momento. Supóngase que la Opción con fecha de vencimiento menor expira o es ejercida en el tiempo t (con $t \leq T1$) , en ese momento el precio de la acción es de St, para entonces la posición tomada con la compra de la Opción C(T2) vale C(T2)-max(0,St-K). Si se tiene que esta diferencia es positiva, lo correcto sería vender la Opción, pagar max(0,St-K) y aún se tendría una ganancia. Ahora bien si esta diferencia es negativa lo correcto sería ejercer esta Opción inmediatamente obteniendo con ello, max(0,St-K) y con esta cantidad cubrir la posición tomada con la venta de la otra Opción.

Por lo tanto para no tener oportunidades de arbitraje se debe cumplir :

$$C(T2) \geq C(T1) \qquad \text{siempre que } T2 > T1.$$

Ejemplo 2.7

Considérense las Opciones listadas en la tabla 2.3. La Opción con fecha de vencimiento de abril y con precio de ejercicio de \$45 se esta vendiendo por un precio de \$3, mientras que la Opción con fecha de vencimiento de enero y con precio de ejercicio de \$45 se esta vendiendo a \$4. Claramente estas dos Opciones violan lo establecido en la Proposición 3, por lo cual es posible el arbitraje de la siguiente manera :

Comprar la Opción con vencimiento en abril y precio de ejercicio de \$45 y vender la Opción con vencimiento en enero y precio de ejercicio de \$45. Lo anterior genera una ganancia inmediata de \$4-\$3= \$1. Si la Opción que fue vendida se ejerce en o antes de la fecha de vencimiento siempre será posible ejercer la Opción comprada para de esta manera cerrar la posición adquirida sin ninguna pérdida ni tampoco sin ninguna ganancia adicional. Si por el contrario no es ejercida la Opción con vencimiento en enero, es posible que la Opción con vencimiento en abril sea vendida o ejercida, por lo que se podría obtener una ganancia extra.

PROPOSICIÓN 4.

El valor de una Opción de Compra siempre será mayor que S-K en cualquier tiempo que no sea la fecha de vencimiento (T).

Demostración.

De la proposición 1 de esta sección se desprende que $C \geq S\text{-}K$. Ahora bien, la proposición 4 de hecho afirma que $C_t > S_t - K \quad \forall \quad t<T$. Para demostrarlo supóngase que en el tiempo t^* (con $t^*<T$) se tiene la igualdad $C_t = S_t - K$. En este caso se lograría hacer arbitraje con la siguiente estrategia : comprar una Opción de Compra, vender

una acción y prestar una cantidad equivalente a el precio de ejercicio \$K. Esta posición implicaría un gasto nulo en este momento y sin embargo en el tiempo t1 (con $t^* < t1 < T$) se lograría una ganancia segura independientemente de los escenarios que se presentarán en el mercado. La tabla de arbitraje 2.7 ilustra lo anterior.

Tabla 2.7

tiempo	t^*	tiempo Si $S1 \leq K$	$t1$ Si $S1 > K$
Compra de Opción de Compra	$-C_t$	-----	S1-K
Venta de una acción	S_t	-S1	-S1
Préstamo	-K	$K(1+r)^{(t1-t^*)}$	$K(1+r)^{(t1-t^*)}$
Total	0	$K(1+r)^{(t1-t^*)} - S1$	$K(1+r)^{(t1-t^*)} - K$

Como se puede observar siempre se lograrán ganancias sin riesgo alguno si es que en algún momento dado previo a la fecha de vencimiento $C_t = S_t\text{-}K$ por lo que en ausencia de arbitraje debe cumplirse que $C_t > S_t\text{-}K$ para toda $t<T$.

A partir de la proposición anterior puede establecerse una característica importante en las Opciones de Compra y es que al poseedor de este tipo de Opción no le convendría ejercer la misma antes de la fecha de vencimiento dado que en la proposición anterior se demostró que el valor de la Opción es mayor que S-K por lo cual sería mejor vender la Opción que ejercerla, obteniéndose así una ganancia mayor. Lo anterior se ve reflejado en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5. (Fecha de Ejercicio Óptima para Opciones Americanas de Compra).

Una Opción Americana de Compra sobre acciones que no pagan dividendos durante la vida de la Opción nunca deberá ser ejercida antes de la fecha de vencimiento.

Demostración.

La proposición 4 establece que el valor de una Opción de Compra en cualquier momento previo a la fecha de vencimiento deberá ser mayor que $S_t\text{-}K$, por lo cual siempre será mejor vender la Opción que ejercerla.

Además se pueden dar los siguientes argumentos que muestran que siempre será mejor esperar a la fecha de vencimiento para ejercer una Opción de Compra.

Considérese una Opción Americana de Compra sobre una acción cuya fecha de vencimiento se establece dentro de un mes, el precio de ejercicio se fija en \$40 y el precio en el mercado de la acción es de \$50. Bajo estas circunstancias se puede apreciar que la Opción se encuentra dentro de el dinero y el tenedor de la Opción estaría "tentado" a ejercer su Opción inmediatamente. Sin embargo, sería mejor conservar la Opción y ejercerla al final de el mes. Los \$40 correspondientes a el precio de ejercicio se pagarían un mes después y no inmediatamente ; lo cual permitiría ganar intereses sobre los \$40. Otra ventaja que se tiene al esperar a la fecha de vencimiento es que existe la posibilidad, aunque sea pequeña, de que el precio de la acción en el mercado dentro de un mes se establezca por debajo de \$40. En tal caso el tenedor de la Opción no la ejercerá y estará contento de no haber ejercido su Opción anteriormente.

2.4.RESTRICCIONES DE ARBITRAJE EN EL PRECIO DE UNA OPCIÓN DE VENTA.

Es esta sección se establecerán las condiciones de arbitraje para el valor de una Opción de Venta, para esta parte se omitirán las demostraciones dado que éstas pueden ser obtenidas de manera análoga a las demostraciones de la sección anterior.

PROPOSICIÓN 1 (Limites inferiores y superiores de una Opción de Venta).

El valor de una Opción de Venta es mayor o igual a el máximo de :

a) Cero.
b) La diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del bien operado.
c) El valor presente del precio de ejercicio, mas el valor presente de los dividendos que serán pagados durante el tiempo de vida de la Opción menos el precio del bien operado.

Y el valor de una Opción de Venta es menor o igual que su precio de ejercicio, es decir :

$$K \geq P \geq \max[\, 0, K-S, D^{*}+ K(1+r)^{-T} - S \,].$$

Donde :

P = Valor de una Opción de Venta.

PROPOSICIÓN 2 (El precio de ejercicio).

a) El valor de una Opción de Venta será mayor o igual que el valor de otra Opción de Compra idéntica excepto que esta última tiene un precio de ejercicio mayor.

$$P(K2) \geq P(K1) \quad \text{si } K1<K2.$$

b) La diferencia entre el valor de las Opciones de Venta será mayor o igual que la diferencia entre sus precios de ejercicio.

$$K2-K1 \geq P(K2)- P(K1) \quad \text{si } K1<K2.$$

c) Si se tienen tres Opciones de Venta con precios de ejercicio K3 > K2 > K1, el valor de la Opción cuyo precio de ejercicio es K2 será menor o igual que el promedio ponderado de las otras dos Opciones de forma que :

$$P(K2) \leq \left(\frac{K3-K2}{K3-K1}\right) P(K1)+\left(\frac{K2-K1}{K3-K1}\right) P(K3)$$

Donde :

P(Ki) = El valor de la Opción de Venta con precio de ejercicio Ki con i= 1,2,3.

PROPOSICIÓN 3 (Fecha de vencimiento).

El valor de una Opción de Venta es mayor o igual que el valor de otra Opción de Venta, idéntica a la anterior, excepto que esta última tiene una fecha de vencimiento menor :

$$P(T2) \geq P(T1) \text{ siempre que } T2>T1.$$

PROPOSICIÓN 4.(Fecha de Ejercicio Óptima para Opciones de Venta).

Una Opción de Venta sobre bienes que no pagan dividendos deberá ejercerse inmediatamente, siempre que su valor intrínseco sea mayor que el precio en el mercado de dicha Opción.

Demostración .

Puede ser óptimo ejercer una Opción Americana de Venta sobre bienes que no pagan dividendos antes de la fecha de vencimiento de la misma.

Para ver de manera intuitiva el argumento anterior, considérese la situación extrema, supóngase que el precio de ejercicio es de $10 y que el precio de una acción es prácticamente de cero. Al ejercer inmediatamente la Opción un inversionista podría obtener una ganancia de $10. Si el inversionista espera, la ganancia por ejercer la Opción podría ser menor a $10 pero por el contrario no puede ser mayor a $10, dado que precios negativos en las acciones son imposibles, además recibir $10 en este momento es preferible a recibir $10 en el futuro. Por lo que la Opción de Venta deberá se ejercida inmediatamente.

Para dar un argumento más formal considérense los portafolios siguientes .

Portafolio 1. Comprar una Opción Americana de Venta y comprar la acción sobre la cual se realiza la Opción.
Portafolio 2. Invertir una cantidad de dinero equivalente a $K(1+r)^{-T}$.

Si la Opción se ejerce antes de la fecha de vencimiento, digamos en un tiempo $t<T$. El valor del portafolio 1 en ese momento será de K, mientras que el valor de el portafolio 2 en el tiempo t es de $K(1+r)^{-(T-t)}$.

Por lo anterior, se puede ver que en el tiempo t el portafolio 1 vale más que el portafolio 2.

Ahora bien si la Opción se mantiene hasta la fecha de vencimiento el portafolio 1 valdrá $\max(K, S_T)$, mientras que el portafolio 2 valdrá K, en el supuesto de que las condiciones en el mercado hayan sido propicias para que la Opción se ejerza, entonces el portafolio 1 valdrá K, al igual que el portafolio 2, sin embargo en el supuesto de que *no se haya ejercido la Opción** el portafolio 1 tendrá un valor mayor que el portafolio 2.

En general ejercer previo a la fecha de vencimiento resulta mas atractivo mientras mas pequeño sea el valor en el mercado de la acción operada.

---

* *Es por que el precio de ejercicio fue menor que el precio de mercado del bien operado, es decir, $K<S_T$*

2.5.RELACIÓN ENTRE EL VALOR DE UNA OPCIÓN AMERICANA DE COMPRA Y EL VALOR DE UNA OPCIÓN AMERICANA DE VENTA.

Como se vio en la sección 2.2 de este capítulo, es posible relacionar el valor de una Opción Europea de Compra y el valor de una Opción Europea de Venta mediante la siguiente ecuación :

$$C+K(1+r)^{-T} = P+S.$$

Como se recordará esta relación se obtuvo a partir de el hecho de que las Opciones eran de tipo Europeo y por ello era posible conocer el valor de estas Opciones en la fecha de vencimiento, sin embargo con las proposiciones de las secciones anteriores es posible establecer una relación para las Opciones Americanas de Compra y de Venta. Para ello hay que recordar que nunca es óptimo ejercer una Opción Americana de Compra previo a la fecha de vencimiento, por lo cual una Opción Americana de Compra no representa ninguna ventaja sobre una Opción Europea de Compra con características semejantes, por lo que debe ser cierto que el precio de una Opción Americana de Compra será igual que el precio de una Opción Europea de Compra.
Es decir :

$$C^*=C$$

donde C^* representa el valor de una Opción Americana de Compra y C el valor de una Opción Europea de Compra.

Para las Opciones Americanas y Europeas de Venta resulta que hay ciertas circunstancias en las que si es óptimo ejercer una Opción Americana de Venta antes de la fecha de vencimiento por lo que debe ser cierto que una Opción Americana de Venta si proporciona ventajas sobre una Opción Europea de Venta es decir :

$$P^*>P$$

donde P^* representa el valor de una Opción Americana de Venta y P el valor de una Opción Europea de Venta.

Retomando la Paridad Put-Call se tiene entonces que :

$$P^*>P= C+K(1+r)^{-T}-S \quad \therefore \quad P^* > C+ K(1+r)^{-T}-S.$$

o lo que es lo mismo :

$$C-P^*<S- K(1+r)^{-T}.$$

Ahora bien, considérense los siguientes portafolios :

Portafolio A. Una Opción Europea de Compra más una cantidad de dinero equivalente a K.

Portafolio B. Una Opción Americana de Venta más una acción.

Ambas Opciones tienen el mismo precio y fecha de ejercicio además, el efectivo en el portafolio A se invierte a la tasa de interés libre de riesgo.

En el supuesto de que la Opción de Venta no sea ejercida antes de la fecha de ejercicio, el portafolio B valdrá, en ese mismo tiempo, el $\max(S_T, K)$, mientras que el portafolio A valdrá el $\max(S_T, K) + K(1+r)^T - K$.
Se tiene pues que el portafolio A vale mas que el portafolio B. Ahora ¿ Que pasaria si la Opción de Venta fuera ejercida antes de la fecha de vencimiento ?.

El portafolio B valdría K en el tiempo $t<T$. Sin embargo, aun si la Opción estuviera fuera del dinero, el portafolio A valdría $K(1+r)^t$ que evidentemente es mayor que K.

Por lo tanto, puede concluirse que el portafolio A vale más que el portafolio B en todas las circunstancias posibles, por lo cual :

$$C+K > P^*+S. \quad \text{y dado que } C^*=C.$$

se tiene que :

$$C^*-P^*> S-K.$$

Si se combina este resultado con el obtenido anteriormente se tendría la siguiente relación entre el valor de una Opción Americana de Compra y el valor de una Opción Americana de Venta :

$$S-K<C^*-P^*<S- K(1+r)^{-T}$$

Capítulo 3

El Modelo Binomial y la Valuación de Opciones.

Uno de los problemas más importantes en el estudio de las Opciones es el de su valuación, aunque en el capítulo anterior se mostraron algunas de las restricciones que deberían cumplir los precios de las Opciones esto no es suficiente para poder mostrar el precio exacto que un inversionista debería pagar por adquirir o vender una Opción. El propósito de este capítulo es precisamente el desarrollar un modelo matemático que permita dar respuesta a la siguiente pregunta : ¿Cuanto es lo que se debe pagar un inversionista por comprar o vender una Opción?

Uno de los modelos matemáticos más utilizados para dar respuesta a la pregunta anterior es el Modelo Binomial. Este modelo involucra la construcción de lo que se conoce como *árbol binomial ;* en este árbol se representan los diferentes caminos que el precio de una acción pudiera tomar a lo largo de la vida de una Opción.

En este capítulo se presentará primero el caso mas sencillo para valuar a una Opción. En este caso se considera que sólo existe un movimiento en el precio de la acción durante la vigencia de la Opción. Una de las estrategias que se utilizan como referencia para poder valuar a una Opción consiste en formar un portafolio con un cierto número de acciones y una cierta cantidad de dinero invertida en algún instrumento libre de riesgo como pudieran ser Certificados de la tesorería, Bonos, etc.

El siguiente paso será mostrar que la estrategia con la cual se forma el portafolio de referencia para la valuación de Opciones no es única, para ello se elaborará un ejemplo con un portafolio diferente y se demostrará como es posible con este nuevo portafolio valuar a la Opción a la que se haga referencia, mostrando además que el valor obtenido para la Opción es consistente independientemente de la estrategia que se forme.

Finalmente se analizará el caso para el cual se supone que existen solo dos movimientos en el precio de la acción durante la vigencia de la Opción, la generalización para el caso en el que existen más de dos movimientos en el precio de la acción durante la vigencia de la Opción se analizará con detalle en el capítulo V.

3.1 EL MODELO BINOMIAL, EN UN PERÍODO.

El modelo binomial para la valuación de Opciones consiste básicamente en suponer que el precio de una acción sigue un proceso binomial en períodos de tiempo pequeños, es decir , el precio de una acción puede sufrir variaciones en un período pequeño de tiempo.

Si se supone que las acciones no pagan dividendos* y si el precio actual en el mercado de una acción x es de S, el precio de una acción al final de un periodo de tiempo T será cualquiera de los siguientes valores :

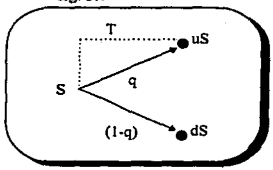
uS con probabilidad q

ó bien

dS con probabilidad (1-q).

En la siguiente figura se ilustra la idea anterior.

fig. 3.1



Los supuestos que se hacen cuando el modelo binomial es utilizado para valuar Opciones son los siguientes:

1.- Las tasas de interés se mantienen constantes durante la vida de la Opción.
2.- El precio de la acción no puede presentar cambios repentinos ni bruscos, sino de manera frecuente y pequeños.
3.- Los bienes son completamente divisibles ; es decir se pueden comprar o vender .45 acciones, o 1.69 bonos, etc.
4.-No hay costos de transacción, comisiones, ni impuestos.
5.-No existen oportunidades de arbitraje para los inversionistas.
6.- Si $w = (1+r)^T$ donde r es la tasa de interés pagada por algún instrumento libre de riesgo, los valores de u y d deben cumplir lo siguiente :

$$u > w > d.$$

Si esta desigualdad no se cumpliera, existirían oportunidades de arbitraje con el solo hecho de prestar y pedir prestado dinero. Por ejemplo, si $u > d > w$, un inversionista podría hacer una cierta ganancia pidiendo prestado $S a una tasa r y comprando la acción x, de esta manera se garantiza que aunque el precio de la acción x se establezca en un nivel dS se podrá pagar el préstamo con los respectivos intereses acumulados, además de obtener dS- wS como ganancia segura, si el precio de la acción x se establece en uS entonces se obtendría una ganancia todavía más grande.

Si $w > u > d$ ningún inversionista compraría esta acción y en vez de ello sería preferible invertir el dinero en el banco o en Bonos.

Para ver como valuar una Opción sobre una acción x, se comienza con la situación más simple en donde se supone que el precio de la acción sólo sufre un cambio durante la vida de la Opción* . Sea C el valor actual en el mercado de una Opción de

* *El caso para el cual las acciones pagan dividendos será tratado en el capítulo V.*

* *Aunque en este momento se hará el desarrollo para una Opción de Compra, este modelo funciona de igual manera para las Opciones de Venta.*

Compra sobre la acción x, sea Cu el valor de la Opción en la fecha de vencimiento T si es que el precio de la acción se establece en uS, y sea Cd el valor de la Opción en la fecha de vencimiento (T) si es que el precio de la acción se establece en dS.

Resumiendo lo anterior y recordando que en la fecha de vencimiento el valor de una Opción es su valor intrínseco, el valor de la Opción en la fecha de vencimiento (T) será :

$$Cu = \max[0, uS-K] \text{ si es que la acción vale } uS$$

o bien

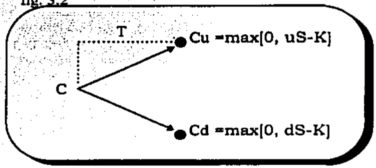
$$Cd = \max[0, dS-K] \text{ si es que la acción vale } dS.$$

donde

K = El precio de ejercicio pactado en la Opción.

En la siguiente figura se ilustra la idea anterior.

fig. 3.2



ESTRATEGIA 1.

Supóngase que se forma un portafolio que contenga Δ acciones y una cantidad de dinero de $B invertidos en instrumentos libres de riesgo como pudieran ser Bonos. El valor de este portafolio el día de hoy será de $S\Delta + B$.

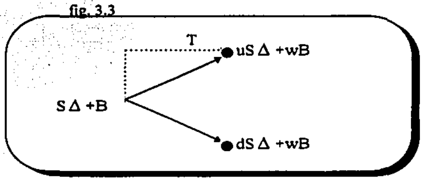
En el tiempo T, el valor de este portafolio será de :

$uS\Delta + wB$ si el precio de la acción es de uS.

o bien $dS\Delta + wB$ si el precio de la acción es de dS.

En la siguiente figura se esquematiza lo anterior.

fig. 3.3



Como es posible seleccionar a Δ y a B libremente, supóngase que se escogen de tal manera que el valor de el portafolio en el tiempo T sea equivalente a el valor de la Opción en el mismo tiempo para cada posible resultado, para que esto se logre se requiere que :

$$uS\Delta + wB = Cu$$
$$dS\Delta + wB = Cd$$

Si se resuelven estas dos ecuaciones para Δ y para B se obtiene :

$$\Delta = \frac{Cu - Cd}{(u-d)S}$$

$$B = \frac{uCd - dCu}{(u-d)w}$$

Regresando a el problema de conocer el valor de la Opción el día de hoy y tomando como referencia el valor de el portafolio si $C < S\Delta + B$ se podría hacer arbitraje vendiendo el portafolio y comprando la Opción, de esta manera se asegura una ganancia inmediata sin inversión alguna y además como el valor de la Opción en el tiempo T es igual a el valor de el portafolio esto garantiza el pago por la venta de el portafolio, por otro lado si $C > S\Delta + B$ la estrategia que se podría tomar es la de vender una Opción de Compra y comprar el portafolio asegurando nuevamente una ganancia inmediata además de asegurar el pago al comprador de la Opción si es que este decidiera ejercerla en el tiempo T.

Los argumentos anteriores muestran que en ausencia de arbitraje debería ser cierto que :

$$C = S\Delta + B$$

es decir el valor de la Opción el día de hoy debería ser igual a el valor de el portafolio con las características anteriores, ahora bien si se sustituye el valor de Δ y de B en la ecuación anterior se tiene :

$$C = \frac{Cu - Cd}{(u-d)} + \frac{uCd - dCu}{(u-d)w}$$

que a su vez es igual a :

$$C = \left[\left(\frac{w-d}{u-d}\right)Cu + \left(\frac{u-w}{u-d}\right)Cd\right] / w \quad \text{.........................(3.1)}$$

La ecuación 3.1 puede simplificarse si se define a $p=(w-d)/(u-d)$, por lo tanto $(1-p)=(u-w)/(u-d)$ y entonces la ecuación 3.1 se transforma en :

$$C = [pCu + (1-p)Cd]/w \quad \text{.........................(3.2)}$$

Es de alguna manera sencillo ver que la ecuación 3.2 es siempre mayor que S-K.

Para verificar lo anterior nótese que si $uS \leq K$, entonces $S < K$ ya que $u > (1+r)^T$ y como $r > 0$ y $T > 0$ se tiene entonces que $u > 1$ por lo cual $uS > S$. Por lo tanto C=0.

Ahora bien, si $dS \geq K$, entonces $C = S-(K/w) > S-K$ ya que $w > 1$.

El único caso que falta por considerar es $uS > K > dS$, en estas circunstancias la ecuación 3.2 vale $C = p(uS-K)/w$. Esta cantidad siempre es mayor que S-K si $(1-p)dS < (w-p)K$, lo que siempre se cumple si $w > 1$.

La ecuación 3.2 es la formula exacta para el valor de una Opción cuya fecha de vencimiento se establece en el tiempo T, considerando que sólo existe un movimiento en el precio de la acción durante la vigencia de la misma.

La fórmula 3.2 obtenida para la valuación de Opciones no involucra la probabilidad q (ver fig. 3.1)de movimientos hacia arriba o hacia abajo en el precio de la acción, es decir, se obtendría el mismo valor para la Opción cuando la probabilidad de que hubiera un movimiento de S a uS fuera de $q=.8$ o bien de $q=.2$.

De alguna manera sería natural suponer que si la probabilidad de que existiera un movimiento hacia uS aumentara, entonces el valor de la Opción también aumentaría, sin embargo este no es el caso, la razón por la cual no ocurre lo anterior es que se esta valuando a la Opción en términos de el precio de la acción. Las probabilidades de posibles movimientos futuros en los precios de las acciones de S hacia uS o hacia dS se contemplan en los precios de la acciones, es por ello que no es necesario contemplar nuevamente estas probabilidades en la valuación de las Opciones.

ESTRATEGIA 2.

En esta parte se mostrará que la estrategia para formar el portafolio de referencia para la valuación de Opciones no es única, para ello se presenta un ejemplo y su generalización con otro tipo de portafolio, mostrando que aunque el portafolio que se considera es diferente a el portafolio de la primera parte, el valor de la Opción obtenido con la fórmula 3.2. es consistente independientemente de la estrategia que se forme.

Se iniciará considerando la situación en donde se supone que el precio en el mercado de una acción x es de $25, y se conoce que al final de tres meses el precio en el mercado de dicha acción será de :

$27 o bien de $23.

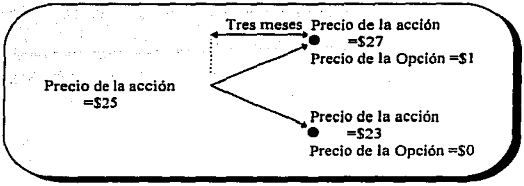
Se desea valuar el precio de una Opción Europea de Compra sobre la acción x, esta Opción tiene un precio de ejercicio de $26 y su fecha de vencimiento se establece dentro de tres meses (T). Como se vio en el capítulo anterior y dado que se conoce el valor de la acción dentro de tres meses, el valor de la Opción al final de los tres meses es conocido :

Si el valor de la acción x es de $27 entonces el valor de la Opción en ese momento será de $27-$26 = $1.

Por otro lado si el valor de la acción baja a $23 la Opción en ese momento tendrá un valor de $0.

La situación anterior se ilustra en la figura 3.4

fig.3.4



Para establecer el precio de la Opción al tiempo cero, es decir en este momento, es posible formar un portafolio que contenga a la acción y a la Opción de tal manera que no haya incertidumbre sobre el valor de dicho portafolio al final de tres meses, de esta manera se puede argumentar lo siguiente :

Dado que el portafolio no tiene ningún riesgo, las ganancias que se obtengan deberán ser equivalentes a las que se hubieran obtenido con una inversión en un instrumento libre de riesgo. Lo anterior permite deducir el costo de formar dicho portafolio y por lo tanto permite establecer el costo de la Opción.

Considérese entonces un portafolio que conste de una Posición Larga sobre Δ acciones y una Posición Corta en una Opción de Compra, se calcula entonces el valor de Δ que hace a el portafolio libre de riesgo.

Si dentro de tres meses el precio de la acción se mueve de $25 a $27, el valor de las acciones será de 27Δ y el valor de la Opción de $1 por lo tanto el valor total de el portafolio será de $27\Delta - 1$.

Si por el contrario el precio de la acción se moviera de $25 a $23, el valor de las acciones será de 23Δ y el valor de la Opción de $0, por lo tanto el valor de el portafolio será de 23Δ.

El portafolio será libre de riesgo si se escoge a Δ de tal manera que el valor final de el portafolio sea el mismo para las dos alternativas posibles, para ello se requiere que:

$$27\Delta - 1 = 23\Delta .$$

Despejando Δ

$$\Delta = .25$$

Por lo tanto para establecer un portafolio libre de riego se tiene que comprar .25 acciones y vender una Opción, de esta manera :

Si el precio de la acción se mueve a 27, el valor de el portafolio será de $5.75.
Si el precio de la acción se mueve a 23, el valor de el portafolio será de $5.75.

Hay que observar que aunque el precio de la acción suba o baje, el valor de el portafolio será siempre de 5.75 en la fecha de vencimiento de la Opción.

Los portafolios libres de riesgo deberán, en ausencia de oportunidades de arbitraje, ganar la tasa de interés libre de riesgo, para efectos de este ejemplo supóngase que la tasa de interés libre de riesgo es de 11% anual. De lo anterior se deduce que el valor de el portafolio el día de hoy deberá ser el valor presente de 5.75, es decir :

$$5.75(1.11)^{-.25} = 5.60.$$

Por otro lado el día de hoy el precio de la acción es de $25, si se denota a C como el valor de la Opción el día de hoy, el valor de el portafolio será de :

$$25(.25)-C = 5.60.$$

Despejando a C se obtiene :

$$C = 25(.25)-5.60 = .65.$$

Si el valor de la Opción fuera mayor que .65 el portafolio valdría menos que 5.60 y se ganaría más que la tasa libre de riesgo, por otro lado si el valor de la Opción fuera menor que .65, vendiendo el portafolio sería una manera de pedir dinero prestado a una tasa de interés menor que la tasa libre de riesgo. Los argumentos anteriores muestran que en ausencia de oportunidades de arbitraje el valor actual de la Opción deberá ser de $.65.

UNA GENERALIZACIÓN.

Para generalizar el ejemplo anterior sea S el valor en el mercado de una acción X y considérese a C como el valor actual de una Opción Europea de Compra sobre dicha acción, si se establece que la fecha de vencimiento de la Opción sea en el tiempo T y si se supone que en esta fecha el precio de la acción es de uS con probabilidad q o bien de dS con probabilidad (1-q), entonces el valor de la Opción en la fecha de vencimiento será de :

$C_u = \max[0, uS-K]$, si es que el precio de la acción es de uS,

o bien $C_d = \max[0, dS-K]$, si es que el precio de la acción es de dS.

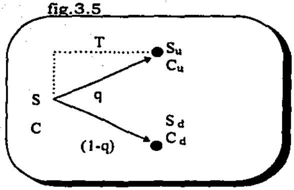
donde :
K es el precio de ejercicio pactado en el contrato de Opción y
u y d son dos números tales que en ausencia de oportunidades de arbitraje deben cumplir que :

$$u > (1+r)^T > d$$

Donde $(1+r)^T$ es el rendimiento que se pudiera obtener en algún instrumento libre de riesgo en el mismo periodo en que es considerado el cambio en el precio de la acción.

En la fig. 3.5 se resume el comportamiento de el precio de el bien y de la Opción.

fig.3.5



Antes de imaginar un portafolio que conste de una posición larga en Δ bienes y en una posición corta en una Opción, se calcula el valor de Δ que hace al portafolio libre de riesgo. Si el valor de la acción se establece en uS entonces el valor de el portafolio al final de la vida de la Opción será de :

$$uS\Delta - C_u$$

Si por el contrario el valor de la acción se establece en dS el valor de el portafolio será de :

$$dS\Delta - C_d$$

Como el portafolio es libre de riesgo entonces se tiene que cumplir lo siguiente:

$$uS\Delta - C_u = dS\Delta - C_d$$

o equivalentemente :

$$\Delta = \frac{Cu - Cd}{(u-d)S} \text{.......................} (3.3)$$

En estas circunstancias el portafolio es libre de riesgo y deberá ganar la tasa de interés libre de riesgo. La ecuación 3.3 muestra que Δ es la proporción de cambio en el precio de la Opción, con respecto a el cambio en el precio de la acción.

Denotando como r a la tasa de interés libre de riesgo, el valor presente de el portafolio será de :

$$[uS\Delta - C_u](1+r)^{-T}$$

El costo para establecer dicho portafolio el día de hoy es de :

$$S\Delta - C$$

En ausencia de arbitraje debe cumplirse que :

$$S\Delta - C = [uS\Delta - C_u](1+r)^{-T}$$

Sustituyendo el valor de Δ de la ecuación 3.3 y simplificando se tiene que :

$$C = (1+r)^{-T}[pC_u + (1-p)C_d] \text{..................} (3.4)$$

donde

$$p = \frac{(1+r)^T - d}{u-d} \text{.............................} (3.5)$$

Hay que notar que con la estrategia 2 se obtuvo exactamente la misma fórmula de valuación que fue obtenida con la estrategia 1 (ver fórmulas 3.2 y 3.4), son simplemente dos maneras distintas de formar los portafolios de referencia para la valuación de Opciones.

3.2. LA VALUACIÓN NEUTRAL AL RIESGO.

Aunque no es necesario suponer de antemano nada sobre las probabilidades de movimientos futuros en los precios de las acciones para obtener la ecuación 3.2 o la ecuación 3.4, es de alguna manera natural interpretar a la variable p como la probabilidad de un movimiento de S a uS en el precio de la acción y a la variable (1-p) como la probabilidad de un movimiento de S a dS en el precio de dicha acción.

Hay que notar que $p=(w-d)/(u-d) > 0$ y $p=(w-d)/(u-d) < 1$, dado que debe cumplirse que $u > w > d$ para que no existan oportunidades de arbitraje, además de entre todos los posibles valores que pudiera tomar q, es precisamente el valor de p que hace que los inversionistas sean neutrales al riesgo. Para entender mejor lo anterior, considérese el rendimiento que se espera obtener con la acción al tiempo T, es decir $E(S_T)$; entonces :

$$E(S_T) = quS + (1-q)dS$$

o lo que es lo mismo

$$E(S_T) = qS(u-d) + dS$$

Ahora bien, si se hace $q = p = (w-d)/(u-d)$ se tiene que la ecuación anterior se convertiría en :

$$E(S_T) = [(w-d)/(u-d)]\, S(u-d) + dS$$

que a su vez es igual a :

$$E(S_T) = Sw = S(1+r)^T \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.6)$$

Lo anterior muestra que el valor esperado en el precio de la acción es el rendimiento que pudiera obtenerse en un instrumento libre de riesgo ($S(1+r)^T$)

Un concepto muy importante para la valuación de Opciones es el principio de la *valuación neutral al riesgo.* Este principio establece que para el propósito de valuar Opciones, se puede suponer lo siguiente :

1. El rendimiento esperado de todos los valores negociados es la tasa libre de riesgo.
2. Los flujos de efectivo futuros pueden ser valuados descontando sus valores esperados con la tasa libre de riesgo.

Con lo anterior las ecuaciones 3.2 y 3.4 muestran que el valor de una Opción puede ser interpretado como su valor futuro esperado descontado en un mundo neutral al riesgo. En este mundo los inversionistas no requieren de compensación alguna por el riesgo, y lo que se espera se recibirá por los valores será la tasa de interés libre de riesgo.

La ecuación 3.6 muestra que se está suponiendo un mundo neutral al riesgo cuando se establece a p como la probabilidad de un movimiento en el precio de la acción de S a uS.

3.3. EL MODELO BINOMIAL, EN DOS PERÍODOS.

Se puede extender el análisis realizado anteriormente para el caso en que se supone que el precio de la acción sufre dos cambios durante la vida de la Opción.

Al igual que en la sección 3.1, primero se mostrará la idea básica con un ejemplo muy particular para después hacer una generalización de esta idea.

Al igual que en el ejemplo de la sección 3.1, se supone que el precio de la acción en el tiempo 0 es de S25 y en cada período de tiempo t esta cantidad aumentará o disminuirá 8%. Se tiene además el supuesto que cada periodo de tiempo t representa un lapso de dos meses, por lo que T=2t o lo que es lo mismo T= cuatro meses, la tasa libre de riesgo es de 11% anual, para este ejemplo se considerará una Opción de Compra con un precio de ejercicio de $26 y con fecha de vencimiento de cuatro meses.

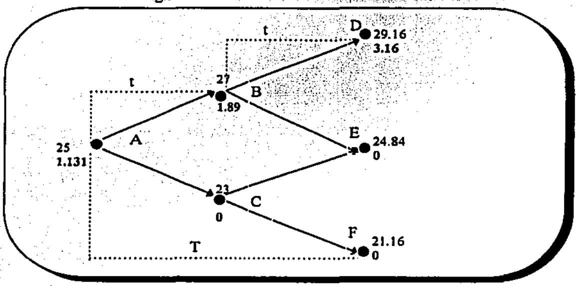
El objetivo de el siguiente análisis será el de determinar el precio de la Opción en el nodo inicial de el árbol. La fig. 3.6 muestra el precio de la acción y el precio de la Opción en cada nodo (El precio de la acción en cada nodo es el número superior, y el precio de la Opción es el número inferior).

Los posibles precios de la Opción son fácilmente calculados en los nodos finales de el árbol, por ejemplo en el nodo D el precio de la acción es de $29.16 y el precio de la Opción es de :

29.16-26= $3.16.

en los dos nodos finales restantes, E y F el valor de la Opción es de cero ya que la Opción en este par de nodos se encuentra fuera de el dinero.

fig.3.6.



En el nodo C el precio de la Opción es cero, dado que ambos caminos que parten desde el nodo C conducen hacia el nodo E o al nodo F y en estos dos nodos el precio de la Opción es cero.

Para calcular el valor de la Opción en el nodo B se analizará la parte de el árbol que se muestra en la fig. 3.7.

Siguiendo con la notación introducida anteriormente se tiene :

u= 1.08, d=.92 r=11% anual t=.166 y T=.3333

en el caso en que se tenia que el precio de la acción sólo sufria un cambio en su valor durante la vida de la Opción se tenia que $w=(1+r)^T$ ya que coincidía el cambio de el precio de la acción con la fecha de vencimiento de la Opción, para el caso que se esta tratando en este momento los cambios en los precios no coinciden con la fecha de vencimiento de la Opción, sino que coinciden con cada periodo de tiempo t por lo que se debe cumplir que $u > (1+r)^t > d$ por lo tanto :

$$p= \frac{(1+r)^t - d}{u-d} \qquad \text{..........(3.7)}$$

Al sustituir el valor de u, d, r y t en la ecuación anterior se tiene entonces que :

$$p=.609$$

usando la ecuación 3.2 para obtener el valor de la Opción en el nodo B sólo que cambiando el tiempo en que se descuenta el valor esperado de la Opción de T por t se tiene :

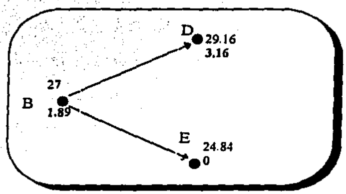
$$C= 1.11^{(-.166)}[((.609)(3.16))+((.391)(0))] = \$1.89$$

se tiene ya el valor de la Opción en el nodo B, pero falta aún el valor de la Opción en el nodo A, para hacer esto se analiza la primera parte del árbol, se conoce ya el valor de la Opción en el nodo B y también en el nodo C, por lo tanto es posible, aplicando nuevamente la ecuación 3.2 calcular el valor de la Opción en el tiempo 0 obteniéndose :

$$C=1.11^{(-.166)}[((.609)(1.89))+((.391)(0))] = \$1.131$$

por lo tanto el precio de la Opción el día de hoy es de \$1.131.

fig.3.7



GENERALIZACIÓN.

Se puede generalizar el caso de dos períodos considerando la situación que se muestra en la fig. 3.8. Se supone el precio inicial de la acción es de S, durante cada periodo de tiempo este valor se mueve u veces o bien d veces su valor inicial en cada nodo. La notación para el valor de la Opción se muestra en el árbol. Por ejemplo, después de dos movimientos de S a uS y a uuS en el precio de la acción el valor de la Opción es de C_{uu}. Se supone que la tasa libre de riesgo es r y el tiempo entre cada nodo es de t.

Siguiendo el procedimiento mostrado tanto para el caso de uno y dos periodos se obtiene :

$$C_u = (1+r)^{-t} [pC_{uu}+(1-p)C_{ud}] \ldots\ldots(3.8)$$
$$C_d= (1+r)^{-t} [pC_{ud}+(1-p)C_{dd}] \ldots\ldots(3.9)$$
$$C = (1+r)^{-t} [pC_u+(1-p)C_d] \ldots\ldots(3,10)$$

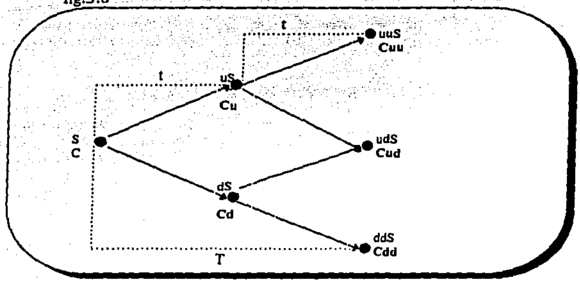
Sustituyendo las ecuaciones 3.8 y 3.9 en la ecuación 3.10 se obtiene :

$$C = (1+r)^{-T} [p^2C_{uu}+ 2p(1-p)C_{ud} +(1-p)^2 C_{dd}] \ldots\ldots(3.11)$$

Las variables p^2, $p(1-p)$ y $(1-p)^2$ son las probabilidades que los nodos finales superior, medio e inferior sean alcanzados.

El precio de una Opción es siempre igual a el valor futuro esperado de la Opción descontado en un mundo neutral al riesgo.

fig.3.8



EJEMPLO DE UNA OPCIÓN EUROPEA DE VENTA.

El procedimiento descrito anteriormente puede ser usado para valuar tanto Opciones de Compra como Opciones de Venta. Considérese por ejemplo una Opción Europea de Venta sobre una acción cuyo precio de actual en el mercado es de $50 la fecha de ejercicio de la Opción es dentro de dos años, y su precio de ejercicio de $52.

Supóngase que existen dos periodos de una año cada uno en donde el precio de el bien sube o baja una cantidad proporcional de 20%, supóngase también que la tasa de interés libre de riesgo es de 5% anual.

El árbol para este ejemplo se muestra en la figura 3.9. Como se vio anteriormente el valor de la probabilidad de que exista un movimiento de S a uS en un periodo de tiempo t* un movimiento hacia arriba en el precio de el bien está dado por la ecuación 3.7

$$p= \frac{(1+r)^t - d}{u-d} \text{..................(3.7)}$$

sustituyendo los valores específicos de el ejemplo se tiene :

$$p=((1.05)^1-.8)/(1.2-.8)=.625$$

Los posibles precios finales de la acción son :

72, 48 y 32.

En este caso, Puu=0, Pud=4 y Pdd=20.

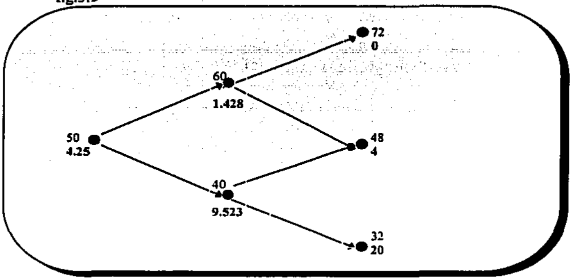
Usando la ecuación (3.11) se tiene que :

$$P=(1+.05)^{(-2)}\,[((.625^2)(0))+((2)(.625)(1-.625)(4))+((1-.625)^2\,(20))\,]= 4.25$$

Por lo tanto el valor de la Opción de Venta es de $4.25.

* En este caso t=1 año y T= 2 años

fig.3.9



3.4. OPCIONES AMERICANAS DE VENTA.

Hasta el momento únicamente se han considerado en la valuación Opciones de tipo Europeo, sin embargo mediante el uso de árboles binomiales es posible valuar Opciones de tipo Americanas. Como se demostró en el capítulo II no tiene ninguna ventaja ejercer Opciones Americanas de Compra antes de la fecha de vencimiento si la acción no paga dividendos por lo cual su valor deberá ser el mismo que para las Opciones Europeas de Compra, sin embargo este no es el caso para las Opciones Americanas de Venta. El modelo binomial presentado en este capítulo puede ser utilizado de manera muy semejante para valuar a este tipo de Opciones. El procedimiento es trabajar desde el final de el árbol hasta el inicio, probando en cada nodo intermedio si ejercer antes de la fecha de vencimiento es óptimo.

En la fecha de vencimiento el valor de una Opción Americana de Venta es el mismo que el de una Opción Europea de Venta ambas valen su valor intrínseco. En los nodos intermedios de el árbol el valor de la Opción Americana de Venta será el máximo de los siguientes valores :

1. El valor que arroja la ecuación 3.2. y
2. La ganancia por un ejercicio anticipado.

Por ejemplo, si se considera como se vería afectada la fig. 3.9. si la Opción que se esta valuando fuera de tipo Americana en vez de tipo Europea, se tendría que los posibles precios de la acción así como sus probabilidades no cambiarían, el valor de la Opción en los nodos finales tampoco cambiaría. En la fig. 3.10. se presentan los nuevos valores de la Opción.

En el nodo B la ecuación 3.2 arroja el valor de $1.428, mientras que la ganancia que se lograría si se ejerciera la opción en ese momento sería de una cantidad negativa (-8), claramente ejercer la Opción en ese momento no es óptimo, por lo que el valor de la Opción en el nodo B será de $1.428.

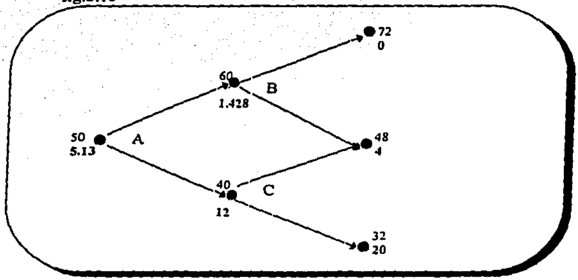
En el nodo C la ecuación 3.2 arroja el valor de $9.523, mientras la ganancia que se lograría hacer si se ejerciera la Opción sería de $12, en este caso ejercer antes de la fecha de expiración de la Opción resulta óptimo por lo que el valor de la Opción en el nodo C será de $12.

En el nodo inicial A la ecuación 3.2 arroja el valor de :

$$(1.05)^{(-1)}[((.625)(1.428))+((1-.625)(12))] = \$5.13$$

mientras la ganancia por ejercer anticipadamente es de $2. En este caso ejercer anticipadamente no es óptimo y por lo tanto el valor de la Opción al inicio de el árbol será de $5.13.

fig.3.10



En el capítulo V se tratará con mas detalle el uso de árboles binomiales para la valuación de Opciones Americanas de Venta y de Compra para el caso en el que la acción paga dividendos durante la vida de la Opción, además de tratar el caso general en el cual se supone que el precio de la acción cambia más de dos veces durante la vida de la Opción.

3.5 LA SENSIBILIDAD DE LAS OPCIONES.

Como se vio en el capitulo II la prima de una Opción se ve influida constantemente por distintos factores. Esto hace interesante medir a través de un coeficiente o parámetro los efectos que tiene sobre una determinada Opción los cambios de un factor específico sobre su prima. Estos factores incluyen el precio del valor subyacente, la tasa de interés, el tiempo y la volatilidad en el precio de el valor subyacente.

En esta sección se analizará al parámetro que relaciona el cambio en el precio de la acción con respecto a el cambio en el precio de la Opción.

DELTA

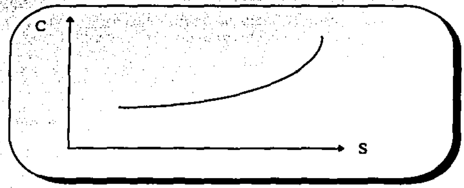
En este momento es apropiado mencionar un parámetro importante en la valuación y cobertura de Opciones, DELTA.

La delta δ de una Opción, se define como la tasa de cambio del precio de una Opción con respecto al precio de la acción subyacente, generalmente se le da dos interpretaciones :

1) Es la sensibilidad de la prima a las variaciones del precio de la acción subyacente.

2) Es la probabilidad de que la Opción sea ejercida o acabe dentro de el dinero.

Dicho de otra manera es la pendiente de la siguiente curva :



En términos algebraicos, la delta es la razón de cambio del precio de una Opción entre el cambio en el precio de la acción operada :

$$\delta_C = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

$$\delta_P = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

En este caso Δ representa cambio. La delta es utilizada como un indicador de la cobertura que debe llevar a cabo un inversionista que mantiene una posición corta sobre la Opción, ya que representa el porcentaje de bienes subyacentes que el inversionista debe mantener en su posición para eliminar las pérdidas potenciales que tendría en caso de que le ejercieran la Opción.

De la figura 3.4 se puede calcular el valor de delta de la Opción considerando lo siguiente :

$$\frac{1-0}{27-23} = .25$$

lo anterior debido a que cuando el precio de la acción cambia de 23 a 27 el precio de la Opción cambia de 0 a 1.

En la figura 3.6. la delta correspondiente a el movimiento en el precio de la acción en el primer periodo es :

$$\frac{1.89-0}{27-23} = .4725$$

La delta para el movimiento de el precio de la acción en el segundo periodo es de :

$$\frac{3.16-0}{29.16-24.84} = .7314$$

si es que el precio tiene un movimiento hacia arriba y delta es igual a cero en el caso de que el precio tenga un movimiento hacia abajo.

En el ejemplo anterior se muestra una característica importante del parámetro delta y es que la delta cambia con el transcurso de el tiempo, en el ejemplo anterior la delta cambio de .4725 a .7314 si es que el precio tiene un movimiento hacia arriba ó de .4725 a 0 si es que el precio tuvo un movimiento hacia abajo, lo anterior significa que para poder mantener una cobertura libre de riesgo usando una Opción y la acción, es necesario ajustar periódicamente la cantidad de acciones que se mantienen en el portafolio.

Ejemplo 3.1.-

Para poder interpretar el significado de el parámetro delta considérese el siguiente ejemplo. Supóngase que la delta es de .6 para una Opción de Compra ; esto significa que cuando el precio de la acción cambia 1 %, el precio de la Opción cambiará en .6 %.

Considérese que el precio de una acción es de S=$100 y que el precio de una Opción de Compra sobre esta acción es de C=$10. Si un inversionista vendió 20 contratos* de Opciones de compra, es decir Opciones para comprar 2000 acciones. La posición que el inversionista debe tomar para cubrirse es comprar 1200 acciones (δ * número de opciones = (.6)(2000)). La ganancia (o pérdida) sobre la posición de Opción de Compra tendería a ser neutralizada por la pérdida (o ganancia) sobre la posición de la acción.

Por ejemplo, si el precio de la acción subiera $1 (produciendo una ganancia de $1200 sobre las acciones compradas), el precio de la Opción de Compra se iría por arriba en (.6)(1) =$.60 (produciendo una pérdida de $1200 sobre las Opciones vendidas).

Por otra parte, si el precio de la acción bajara por $1 (produciendo una pérdida de $1200 sobre las acciones adquiridas) el precio de la Opción compra bajaria por $.60 (produciendo una ganancia de $1200 sobre las Opciones vendidas).

En este ejemplo, la delta de la posición en Opciones de Compra para el inversionista es de :

$$(.6)(-2000)=-1200$$

en otras palabras el inversionista pierde 1200 multiplicado por el cambio de la acción subyacente, es decir, 1200 * Δ S. donde Δ quiere decir cambio.

La delta de una acción es por definición de 1 y una posición larga de 1200 acciones tiene una delta de 1200. La delta total de la posición total de el inversionista (que ha vendido 2000 opciones y adquirido 1200 acciones) es de cero (δ=0). Esto es, la delta de la posición de Opciones neutraliza la delta de la posición de acciones. A esta posición se le conoce como DELTA NEUTRAL .

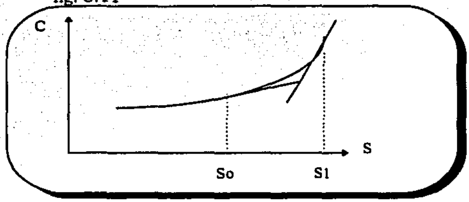
Es importante darse cuenta que la posición de el inversionista solo es delta-neutral por un período corto de tiempo. Esto se debe a que la delta cambia con el tiempo, el proceso de cubrirse tiene que ajustarse periódicamente.

En el ejemplo anterior, al final de el tercer día, el precio de la acción puede incrementarse a $110. Como se observa en la figura 3.11, un incremento

* *Cada contrato contempla 100 acciones*

considerable en el precio de la acción de So a S1, conduce a un incremento en la delta (o lo que es lo mismo, a un aumento en la pendiente)

fig. 3.11



Supóngase que la delta se incrementó de .60 a .65. Esto significa que se tendría que comprar (.65-.60)(2000)= 100 acciones más para mantenerse cubierto en la forma delta neutral. Esto es, además de las 1200 acciones iniciales , se necesitan 100 acciones más, es decir, un total de 1300 acciones para poder cubrirse. Este número puede obtenerse multiplicando a la nueva delta por el número de Opciones vendidas, para el caso de el ejemplo se tiene :

((.65)(2000)=1300).

GAMA

La gama, γ , a veces se define como la delta de la delta. Es decir, es la sensibilidad de la delta a los cambios en los precios de las acciones subyacentes. En términos algebraicos es la razón de cambio de la delta entre el cambio en el precio de la acción subyacente :

$$\gamma = \frac{\Delta \delta}{\Delta S}$$

Gama indica el riesgo inherente en la delta o la velocidad de los ajustes para las posiciones de delta-neutral. Dicho de otra manera , el valor de la gama indica lo que aumenta o disminuye la delta de la Opción si el precio de la acción subyacente cambia. Si la γ es pequeña, entonces la delta cambia muy poco y los ajustes necesarios para rebalancear una estrategia de delta-neutral será muy poco frecuente. Sin embargo, si γ es muy alta entonces la delta es muy sensible a el precio de la acción por lo que es muy riesgoso dejar un portafolio delta-neutral sin cambios por un período de tiempo largo. Por consiguiente, la gama sirve para medir la frecuencia con la que deberá ajustarse una cobertura delta-neutral.

Por ejemplo, si una Opción de Compra tiene una delta de .42 y una gama de .03, un aumento en el precio de la acción por un punto porcentual incrementará la delta a .45 y una reducción la disminuirá a .39.

Capítulo 4

El modelo de Black-Scholes para la valuación de Opciones.

En este capítulo se introducirá de manera muy general los supuestos y los resultados de uno de los modelos matemáticos más utilizados en la actualidad para la valuación de Opciones, el modelo de Black-Scholes.

Además se analizará de una manera más completa el concepto de la volatilidad, introducido en el capítulo II de este trabajo, se explicará como la volatilidad puede ser estimada a partir del registro histórico de los precios de una acción x o bien como puede ser deducida a partir de los precios de las Opciones. Finalmente se mostrará como los resultados del modelo de Black-Scholes pueden ser extendidos para valuar Opciones de Compra sobre acciones que pagan dividendos durante la vida de la Opción.

4.1. EL SUPUESTO DE LOGNORMALIDAD.

El modelo para la valuación de Opciones debe hacer algunos supuestos acerca de como los precios de las acciones evolucionan a través de el tiempo. Por ejemplo, si el precio de una acción x es de $100 el día de hoy, ¿Cuál será el precio de esta acción en un día o en una semana o en un año ?.

El modelo más utilizado para explicar la evolución de los precios de las acciones es el que establece que los precios de las acciones tienen una distribución Lognormal ; de hecho este es el supuesto hecho por el modelo desarrollado por Black-Scholes para la valuación de opciones sobre el comportamiento de los precios de las acciones.

Este supuesto establece que los cambios proporcionales en los precios de las acciones en periodos pequeños de tiempo tienen una distribución Normal y los precios de las acciones en cualquier tiempo en el futuro tienen una distribución conocida como *distribución lognormal,* se dice que una variable x tiene una distribución lognormal si su logaritmo natural tiene una distribución Normal. Mientras una variable con distribución Normal puede tomar cualquier valor ya sea negativo o positivo, una variable con distribución lognormal está restringida a ser positiva. Una distribución Normal es simétrica con respecto a la media, mientras que para una distribución lognormal no es asi.

4.2.PARÁMETROS.

Los dos parámetros clave que describen el comportamiento de los precios de las acciones cuando se hace el supuesto de lognormalidad son :

1.El rendimiento esperado en la acción.
2.La volatilidad en el precio de la acción.

El parámetro μ es el rendimiento que espera ganar un inversionista en un periodo pequeño de tiempo, este parámetro está anualizado y expresado como proporción de el precio de la acción. La mayoría de los inversionistas requieren de mayores rendimientos para invertir en acciones con mayor riesgo, por lo que el valor de μ deberá depender de el riesgo en el rendimiento de la acción, también dependerá de el nivel en las tasas de interés de el mercado, mientras más altas sean las tasas de interés mayor será el rendimiento que se espera en cualquier acción. Datos estadísticos* hacen suponer que en promedio μ se establece alrededor del 8% más que la tasa de interés libre de riesgo existente en el mercado.

Para efectos de la valuación de Opciones no es muy importante el conocer a detalle los determinantes de μ recordando que para ello se utiliza un principio muy importante conocido como la VALUACIÓN NEUTRAL AL RIESGO, el cual establece que el rendimiento que esperaría ganar un inversionista en una acción x es precisamente la tasa de interés libre de riesgo. Por el contrario σ, es decir la volatilidad en el precio de la acción, es muy importante para la valuación de Opciones, algunos procedimientos para el cálculo de la volatilidad se tratarán mas adelante en este mismo capitulo, sin embargo algunos datos estadísticos* hacen suponer que los valores típicos para σ se encuentran en el rango del 20 al 40%.

Como una variable con distribución lognormal tiene la propiedad de que su logaritmo natural se distribuye normal, entonces el supuesto de que los precios de las acciones tienen una distribución lognormal implica que el $\ln(S_T)$ se distribuye Normal, con la siguiente media y desviación estándar * :

$$\ln S + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T \qquad \text{y} \qquad \sigma\sqrt{T}$$

donde :
S_T es el precio de la acción en el tiempo T.
S es el precio actual de la acción.
μ es el rendimiento anual esperado en la acción y
σ es la volatilidad anualizada en el precio de la acción.

La idea anterior puede reescribirse como :

$$\ln S_T \text{ se distribuye } N\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \text{.................(4.1)}$$

donde N(m,s) denota una distribución normal con media m y desviación estándar s. El valor esperado o la media de S_T, está dado por :

$$E(S_T) = S e^{\mu T} \text{..............................(4.2)}$$

La varianza de S_T, está dada por :

$$\text{var}(S_T) = S^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \text{.....................(4.3)}$$

* *Como referencia véase Introduction to Futures and Options Markets de John C. Hull Cap. 11*
* *Como referencia véanse OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES de John Hull cap. IV. y OPTIONS MARKETS de John C. Cox cap. V y VI y INTRODUCTION TO FUTURES AND OPTIONS MARKETS de John C. Hull Cap. 11*
*

Ejemplo 4.1.

Considérese una acción con un precio inicial de $40, un rendimiento esperado del 16% anual, y una volatilidad del 20% anual. De la ecuación (4.1) la distribución de probabilidad de el precio de la acción, S_T en seis meses está dada por :

$$\ln S_T \text{ se distribuye } N[\ln 40 + (.16-.04/2).5,\ .2\sqrt{.5}\,]$$

o bien :

$$N(3.759,\ .141)$$

Para una variable con distribución normal existe un 95% de confianza de que el valor de esa variable se encuentre entre $2\sigma+\mu$ y $2\sigma-\mu$. Por lo tanto con un 95% de confianza,

$$3.477<\ln S_T<4.041$$

o bien :

$$32.36< S_T <56.88$$

Por lo tanto existe un 95% de probabilidad de que el precio de la acción dentro de seis meses se encuentre entre 32.36 y 56.88. La media y la varianza de S_T son respectivamente :

$$40e^{(.16)(.5)} = 43.33 \qquad \text{y} \qquad 40^2e^{(2)(.16)(.5)}(e^{(.2^2)(.5)}-1) = 37.93$$

De la ecuación 4.1 puede obtenerse que :

$$\ln S_T/S \text{ se distribuye } N\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,\sigma\sqrt{T}\right]\text{.......................(4.4)}$$

4.3.LA VOLATILIDAD.

La volatilidad σ de una acción, es una medida de la incertidumbre que se tiene acerca de los rendimientos sobre una acción.

De la fórmula (4.4) $\sigma\sqrt{T}$ es la desviación estándar de el cambio proporcional en el precio de la acción en el tiempo T. Considérese la situación en donde $\sigma=.3$, es decir la desviación estándar de el cambio proporcional en el precio de una acción en un año es de aproximadamente del 30%, por lo que la desviación estándar de el cambio proporcional en el precio de la acción en seis meses es de aproximadamente del $30\sqrt{.5}=21.2$ %, la desviación estándar de el cambio proporcional en tres meses es de aproximadamente del $30\sqrt{.25}=15\%$ y así sucesivamente.

El registro de los movimientos en los precios futuros de una acción x puede ser usado para estimar la volatilidad. El precio de la acción se observa generalmente en intervalos fijos de tiempo, por ejemplo cada día, cada semana, o cada mes.

Sean :

$n+1$: el número de observaciones hechas en el precio de la acción.

S_i : Precio de la acción al final de el i-ésimo intervalo($i=0,1,2,\ldots\ldots,n$)

τ : longitud de el intervalo de tiempo en años.

y sea

$$x_i=\ln(S_i/S_{i-1})$$

Una estimación de la desviación estándar de las xi's esta dada por :

$$s=\sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(xi-X)^2\right)}$$

donde X es la media de las xi's.

De la ecuación (4.4) la desviación estándar de las xi's es $\sigma\sqrt{T}$. La variable s es por tanto una estimación de $\sigma\sqrt{T}$. De lo anterior se sigue que es posible estimar σ como:

$$\sigma^{*}=s/\sqrt{\tau}$$

En el siguiente ejemplo se muestra como es posible calcular la volatilidad a partir de el registro de los precios de la acción durante veinte días.

Tabla 4.1.

Dia	Precio en el mercado de la acción	Precio relativo Si/Si-1	Rendimiento diario xi=ln(Si/Si-1)
0	20		
1	20.125	1.00625	0.00623
2	19.875	0.98758	-0.01250
3	20	1.00629	0.00627
4	20.5	1.02500	0.02469
5	20.25	0.98780	-0.01227
6	20.785	1.02642	0.02608
7	20.785	1.00000	0.00000
8	20.785	1.00000	0.00000
9	20.75	0.99832	-0.00169
10	20.75	1.00000	0.00000
11	21	1.01205	0.01198
12	21.125	1.00595	0.00593
13	20.875	0.98817	-0.01190
14	20.875	1.00000	0.00000
15	21.25	1.01796	0.01780
16	21.375	1.00588	0.00587
17	21.375	1.00000	0.00000
18	21.25	0.99415	-0.00587
19	21.75	1.02353	0.02326
20	22	1.01149	0.01143

En la tabla 4.1 se muestra una posible secuencia de precios de una acción x durante 21 días consecutivos. Dado que $\sum xi=.09531$ y $\sum xi^2=.00333$, una estimación de la desviación estándar de el rendimiento diario es :

$$\sqrt{\left(\frac{.00333}{19}-\frac{.09531^2}{380}\right)}=.0123$$

Suponiendo que en el año hubieran 250 días para comerciar $\tau = 1/250$. Por lo que la volatilidad estimada por año sería equivalente a :

$$.0123\sqrt{250} = .194 \qquad \text{es decir } 19.4\% \text{ anual.}$$

4.4.EL ANÁLISIS DE BLACK-SCHOLES.

El análisis de Black-Scholes es análogo al método binomial desarrollado en el capitulo III. Este análisis consiste en la derivación de unas fórmulas para la valuación de Opciones Europeas las cuales se presentarán en la sección 4.5 de este capitulo. Cabe señalar que, a diferencia del método binomial, este método solamente puede ser utilizado para la valuación de Opciones tipo europeo.

El modelo de valuación de Black-Scholes hace las siguientes suposiciones :

1.-Los precios de las acciones tienen una distribución Lognormal.
2.-La volatilidad en el precio de la acción operada en la Opción es constante en el tiempo.
3.-Las Opciones son de tipo Europeas y las acciones operadas no pagan dividendos durante la vida de las Opciones.
4.-No existen oportunidades de arbitraje.
5.-La tasa de interés es constante.
6.-No existen costos de transacción.

El análisis de Black-Scholes utiliza el supuesto de no arbitraje que fue usado en el capitulo III para la valuación de Opciones cuando los cambios en el precio de la acción eran de tipo binomial. Se establece un portafolio libre de riesgo consistente de una posición en Opciones y de una posición en la acción. En ausencia de oportunidades de arbitraje el rendimiento de el portafolio deberá ser la tasa de interés libre de riesgo.

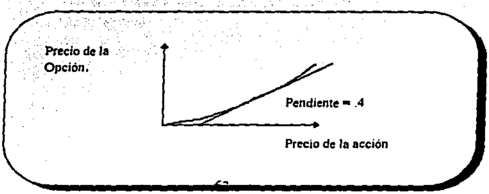
El porqué es posible establecer dicho portafolio es que el precio de la acción y el precio de la Opción están afectados por la misma fuente de incertidumbre : los movimientos en el precio de la acción.

Cuando el portafolio se establece apropiadamente la pérdida o la ganancia con la posición en la acción siempre se compensa con la ganancia o la pérdida con la posición de la Opción, por lo que el valor de el portafolio en el final de el periodo es conocido siempre con certeza.

Por ejemplo, supóngase que en un punto particular en el tiempo la relación entre un cambio pequeño en el precio de la acción ΔS, y el cambio pequeño resultante en el precio de una Opción Europea de Compra sobre esta acción, ΔC esta dada por :

$$\Delta C = .4\,\Delta S.$$

Lo anterior significa que la pendiente que representa la relación entre C y S es de .4 tal y como se muestra en la siguiente figura.



El portafolio libre de riesgo consistirá de :

1. Una posición larga en .4 acciones.
2. Una posición corta en 1 Opción de Compra.

En el análisis de Black-Sholes la posición que se toma es libre de riesgo sólo por un período muy pequeño de tiempo (teóricamente ese período de tiempo pequeño es en realidad infinitesimal). Para que la posición continúe sin riesgo, ésta deberá ser reajustada frecuentemente.

Por ejemplo, la relación entre ΔC y ΔS deberá cambiar de $\Delta C = .4\ \Delta S$ de el día de hoy a $\Delta C = .5\ \Delta S$ en dos horas, lo anterior significa que se deberán tener .5 acciones en lugar de .4 por cada Opción vendida.

4.5.LAS FÓRMULAS DE VALUACIÓN.

Las fórmulas para la valuación de Opciones Europeas de Compra y de Venta sobre acciones que no pagan dividendos son :

$$C = SN(d1) - Ke^{-rT}N(d2) \quad \text{.................(4.5)*}$$
$$P = Ke^{-rT}N(-d2) - SN(-d1) \quad \text{..............(4.6)}$$

Donde :

$$d1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

La función N(x) es la función de distribución acumulativa para una variable normal estandarizada. En otras palabras, es la probabilidad de que una variable distribuida N(0,1) sea menor a x.

Donde :

C representa el precio de una Opción Europea de Compra
P es el precio de una Opción Europea de Venta
K es el precio de ejercicio pactado en la Opción,
r es la tasa de interés libre de riesgo,
S es el precio de la acción operado,
σ es la volatilidad en el precio de la acción operado y
T es la fecha de vencimiento de la Opción.

Como el precio de una Opción Americana de Compra es igual a el precio de una Opción Europea de Compra la ecuación 4.5 puede ser aplicada para valuar el precio de una Opción Americana de Compra, desafortunadamente no ha sido desarrollada una fórmula analítica exacta para la valuación de Opciones Americanas de Venta sobre acciones que no pagan dividendos, sin embargo, en el siguiente capítulo se discutirán algunos procedimientos numéricos para la valuación de Opciones Americanas de Venta.

---

* *"INTRODUCTION TO FUTURES AND OPTIONS MARKETS" John C. Hull.*

Ejemplo 4.2 (Ejemplo Numérico de una Opción Europea de Compra.)

Supóngase que se cuenta con la siguiente información para calcular el valor de una Opción de Compra :

El precio de una acción en el mercado (S) es de $70
La fecha de vencimiento (T) es dentro de nueve meses
El precio de ejercicio (K) es de $80
La tasa de interés libre de riesgo es de 1% mensual
La volatilidad estimada es del 2% mensual.

Es decir :
S=$70
K=80
r=1% mensual
T=9 meses y
σ =2% mensual

Con esta información, primero se calculan los valores de d1 y d2 con las formula 4.5

$$d1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$=[\ln(.875)+(.01+.02^2/2)(9)]/(.02*3)$$
$$=[-.1335+.0918]/.06$$
$$=-.695$$

Con este resultado se calcula d2 :

$$d2=d1-\sigma\sqrt{T}$$
$$=-.695-((.02)(3))$$
$$=-.76$$

Con estos valores y recurriendo a las tablas para los valores de la función de distribución acumulativa de una Normal* se obtienen los valores de N(d1) y N(d2) los cuales son .2420 y .2236 respectivamente. Es decir :

$$N(d1)=N(-.695)=1-N(.695)=.2420$$
$$N(d2)=N(-.76)=1-(N(.76)=.2236$$

El valor de la Opción de Compra es :

$$C=((70)(.2420))-80e^{-.01(9)}(.2236)$$
$$=\$.59$$

Lo anterior significa que un inversionista estaría dispuesto a pagar $.59 por cada Opción de Compra con las características señaladas. Pareciera que esta cantidad es muy pequeña, pero hay que observar que el precio de la acción tendría que subir más de $10 para que está Opción terminara dentro del dinero.

* *Ver Introduction to the Theory of Statistics Tercera Edición pp 552.de Alexander M. Mood et al.*

Ejemplo 4.3.(Ejemplo Numérico de una Opción Europea de Venta.)

Supóngase que se cuenta con la siguiente información para calcular el valor de una Opción de Venta :

El precio de una acción en el mercado (S) es de $90
La fecha de vencimiento (T) es dentro de tres meses
El precio de ejercicio (K) es de $95
La tasa de interés libre de riesgo es de 5% anual
La volatilidad estimada es del 50% mensual.

Es decir :
S=$90
K=95
r=5% anual
T=.25 años y
σ =50% mensual

Con esta información, primero se calculan los valores de d1 y d2 con las formula 4.6

$$d1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$=[-.05407+(.175)(.25)]/(.5)(.5)$$
$$=[-.01032]/.25$$
$$=-.04128$$

Con este resultado se calcula d2 :

$$d2=d1-\sigma\sqrt{T}$$
$$=-.04128-.5\sqrt{.25}$$
$$=-.29128$$

Las probabilidades normales asociadas con estos valores se obtienen N(d1) y N(d2) de las tablas con interpolación :

$$N(-d1)=N(-[-.04128])=N(.04128)=.5165$$
$$N(-d2)=N(-[-.29128])=N(.29128)=.6179$$

Con estos datos se puede calcular el valor de la Opción de Venta :

$$P=(95e^{-.05(.25)}(.6179))-90(.5165)$$
$$=\$11.4876$$

Hay que observar que la Opción tiene un precio relativamente alto porque desde un inicio la Opción se encuentra dentro del dinero y la probabilidad de que acabe así es alta por lo que tiene que valer un precio relativamente alto.

4.6.VOLATILIDAD IMPLÍCITA.

El único parámetro en las fórmulas de valuación de Black-Scholes que no puede ser observado directamente es la volatilidad en el precio de la acción. En la sección 4.3 de este capítulo se analizó la manera en que la volatilidad puede ser estimada a partir del registro de los precios de la acción en varios días consecutivos, sin embargo esta no es la única manera en que puede estimarse a la volatilidad, existe un método alternativo para el cálculo de la volatilidad.

Para ilustrar la idea básica de el método supóngase que el valor de una Opción de Compra sobre una acción que no paga dividendos es de $1.875 cuando S=$21, K=20, r=.1 y T=.25. La volatilidad implícita es el valor de σ para el cual al ser sustituido en la ecuación 4.5, resulta que C=1.875. Desafortunadamente, no es posible despejar la ecuación 4.5 para expresar a σ como función de S, K, r, T y C, sin embargo mediante un proceso iterativo puede encontrarse el valor de σ que esta implícito en la ecuación.

Si en el ejemplo anterior se toma σ=.20 el valor que resulta para C es de C=1.76 el cual resulta muy bajo ; dado que el valor de C se incrementa conforme se incrementa σ entonces se requiere un valor de σ mas alto.

Al evaluar la ecuación 4.5 con σ=.30 esta arroja un valor de C=2.10 el cual resulta muy alto lo que significa que el verdadero valor de σ debe estar entre .20 y .30. Evaluando la ecuación 4.5 con σ=.25 da como resultado un valor de C muy alto, por lo que el verdadero valor de σ debe estar entre .20 y .25, siguiendo con este proceso iterativamente el rango para el verdadero valor de σ va haciéndose mas pequeño hasta que se llega a el valor de σ para el cual la ecuación 4.5 arroja el verdadero valor de C. La volatilidad implícita que hace que C=1.875 es σ=.235 o 23.5% anual.

La volatilidad implícita puede ser usada para estimar el valor de una Opción a partir de el precio de otra Opción con características semejantes.

4.7.DIVIDENDOS.

Hasta ahora se ha tenido como supuesto que la acción sobre la cual se realiza el contrato de Opción no paga dividendos. En la práctica no tiene por que cumplirse necesariamente este supuesto. En esta sección se hará el supuesto de que los dividendos que serán pagados por la acción durante la vida de la Opción son conocidos de antemano.

El efecto del pago de dividendos es el de reducir el valor de las Opciones de Compra y el de aumentar el valor de las Opciones de Venta. Dentro de el contexto de la valuación de Opciones la palabra dividendo deberá interpretarse como una reducción en el precio de la acción en la fecha de ex-dividendos* . Por ejemplo, si el pago de un dividendo de $1 por acción es conocido con anticipación y el precio de la acción baja normalmente en un 80% la cantidad de el dividendo pagado en la fecha de ex-dividendos, para el propósito de el análisis deberá suponerse que el dividendo será de $.80.

* *fecha de corte en la cual se reconoce a los tenedores de las acciones de una empresa.*

4.7.1 OPCIONES EUROPEAS.

La fórmula de Black-Scholes puede ser usada para la valuación de Opciones sobre acciones que pagan dividendos durante la vida de la misma sólo si el precio de la acción S se reduce en una cantidad equivalente a el valor presente de todos los dividendos que serán pagados durante la vida de la Opción. Un dividendo deberá ser incluido sólo si las fechas de ex-dividendos se presentan durante la vida de la Opción.

Ejemplo 4.3.-

Considérese una Opción Europea de Compra sobre una acción cuando existen dos fechas de ex-dividendos, una en dos meses y la otra en cinco. El dividendo que se espera será pagado en cada una de estas fechas es de \$.50. El precio actual en el mercado por cada acción es de \$40, el precio de ejercicio es de \$40, la volatilidad en el precio de la acción es de 30% anual, la tasa de interés libre de riesgo es de 9% anual y la fecha de vencimiento es dentro de seis meses. El valor presente de los dividendos es de :

$$.5e^{(-.1667)(.09)}+.5e^{(-.4167)(.09)}=.9741.$$

El precio de la Opción puede calcularse con la fórmula de Black-Scholes usando : S=39.0259, K=40, r=.09, σ=.3 y T=.5.

$$d1=(\ln.9756+((.135)(.5))/(.3\sqrt{.5})=.2017$$
$$d2=(\ln.9756+.045^{*}.5)/(.3\sqrt{.5})=-.0104$$

Utilizando las tablas de la función de distribución acumulativa de N(0, 1) se obtiene :

$$N(d1)=.5800, \qquad N(d2)=.4959$$

y sustituyendo los valores anteriores en la ecuación 4.5 se tiene que el precio de la Opción es de :

$$((39.0259).5800)-40\,e^{-.09(.5)}(.4959) = 3.67$$
$$C=\$3.67.$$

4.7.2.OPCIONES AMERICANAS.

En el capítulo 2 se mostró que las Opciones Americanas de Compra sobre acciones que no pagan dividendos nunca deberán ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento ; sin embargo, cuando los dividendos son pagados, algunas veces si resulta óptimo ejercer la Opción inmediatamente antes de que los mismos sean pagados, es decir antes de la fecha de ex-dividendos.

En la práctica, las Opciones de Compra son ejercidas inmediatamente antes de la última fecha de ex-dividendos. En seguida se describe un procedimiento desarrollado por Fisher Black para la valuación de Opciones Americanas de Compra sobre acciones que pagan dividendos durante la vida de las Opciones.
El procedimiento de Black consiste en el cálculo de el precio de dos Opciones de tipo Europeo :

1. Una Opción Europea cuya fecha de vencimiento coincide con la de la Opción Americana.
2. Una Opción Europea cuya fecha de vencimiento es exactamente antes de la fecha final de ex-dividendos que ocurre dentro de la vida de la Opción Americana.

El precio de ejercicio, el precio inicial de la acción, la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad se establecen iguales para la Opción Americana como para las Opciones Europeas en consideración.

El precio de la Opción Americana sobre la acción que paga dividendos será el precio de la Opción Europea que resulte mayor.

Ejemplo 4.4.

Considérense los mismos datos del ejemplo 4.3 con una pequeña diferencia en esta ocasión la Opción de Compra será de tipo Americana y no de tipo Europea. El valor presente de el primer dividendo está dado por :

$$.5e^{-.1667(.09)} = .4926$$

el valor de la Opción Europea que se establece en el punto número dos es entonces calculada con la ecuación 4.5 , considerando que :

$$S=39.5074,\ K=40,\ r=.09,\ \sigma=.30 \text{ y } T=.4167$$

Evaluando lo anterior en la ecuación 4.5 se tiene que el precio de esta Opción Europea es de $3.52.

Siguiendo el procedimiento de Black ahora se toma el valor más grande entre el precio de la Opción anterior y el valor de la Opción que sólo puede ser ejercida dentro de seis meses, es decir la Opción establecida en el punto uno. De el ejercicio anterior se tiene que el precio de la Opción establecida en el punto uno es de $3.67.

Por lo tanto, el precio de la Opción Americana sobre la acción será de $3.67.

Capítulo 5

Valuación numérica de Opciones mediante árboles Binomiales.

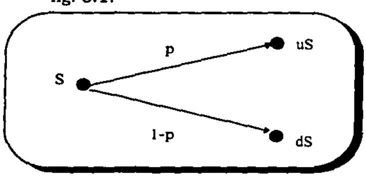
El modelo de Black-Scoles puede ser usado , como se vió en el capitulo anterior para la valuación de Opciones Europeas de Compra y de Venta, así como para Opciones Americanas de Compra sobre acciones que no pagan dividendos y para algunas Opciones Americanas de Compra sobre acciones que pagan dividendos, sin embargo el modelo de Black-Scholes no puede ser aplicado para la valuación de Opciones Americanas de Venta. En este capitulo se extenderá el análisis de el modelo binomial introducido en el capitulo III para el desarrollo de un procedimiento para la valuación de este tipo de Opciones, además se considerará el caso en que los precios de las acciones sufren un número n de cambios durante la vida de la Opción, además de contemplar el caso en que la acción paga dividendos durante la vida de la Opción. En la parte final de este capitulo se muestra un método alternativo para la valuación de Opciones relacionado con los árboles binomiales ; el método de la simulación Monte Carlo.

5.1.EL MODELO BINOMIAL PARA ACCIONES QUE NO PAGAN DIVIDENDOS.

En el capitulo III se introdujeron arboles binomiales para la valuación de Opciones sobre acciones que no pagan dividendos durante la vida de la Opción; se tenía entonces que la vida de la Opción era dividida en uno y en dos periodos y a partir de ahí se mostró como los árboles podían ser utilizados para la valuación de Opciones Europeas y Opciones Americanas. Sin embargo, los modelos utilizados bajo el supuesto de que el precio de la acción sólo puede cambiar en uno y/o en dos períodos es poco realista y sólo se utilizaron para ilustrar el principio bajo el cual trabaja el modelo binomial. Un supuesto mas realista es aquel en el que los movimientos en el precio de la acción están compuestos por un gran número de pequeños movimientos binomiales, este es el supuesto que está detrás de uno de los procedimientos numéricos más usados para la valuación de Opciones, dicho procedimiento fue propuesto por Cox, Ross y Rubinstein.

Como representación de el modelo supuesto para el comportamiento de los precios de las acciones en este trabajo se utiliza el modelo binomial. Supóngase que el precio de la acción comienza en S al tiempo 0, bajo el modelo binomial el precio de esta acción sigue el proceso ilustrado en la fig. 5.1. En el intervalo de tiempo (0, t) el precio de la acción se mueve de S a Su con probabilidad p y a Sd con probabilidad 1-p.

fig. 5.1.



5.2 DETERMINACIÓN DE p , u Y d.

Los valores de p, u y d no deben ser valores arbitrarios de hecho los valores de estos parámetros deben de ser tales que se aproximen o que cumplan con las caracteristicas de el modelo supuesto para el comportamiento de los precios de las acciones hecho en el capítulo IV. En esta sección se propondrán los valores de p, u y d ; se mostrará de una manera muy sencilla que bajo ciertas circunstancias estos valores tienen las caracteristicas de el modelo supuesto para el comportamiento de los precios. Como para efectos de la valuación de Opciones se esta haciendo el supuesto de que los inversionistas son neutrales al riesgo, el rendimiento esperado en la acción será la tasa de interés libre de riesgo r, por lo tanto el valor esperado en el precio de la acción al tiempo t será de Se^{rt}.

donde :
S es el precio de la acción al tiempo 0.

Ahora bien si se tiene que el valor esperado en el precio de la acción es de puS+(1-p)dS entonces debería cumplirse lo siguiente :

$$Se^{rt} = puS+(1-p)dS \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.1)$$

o equivalentemente :

$$e^{rt} = pu+(1-p)d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.2)$$

Por otro lado recordando el modelo para el comportamiento en los precios de las acciones de el capítulo IV, la desviación estándar de los cambios proporcionales en el precios de las acciones en pequeños intervalos de tiempo t es $\sigma\sqrt{t}$. Por lo tanto la varianza en el cambio de el precio de la acción para pequeños intervalos de tiempo es de $S^2\sigma^2t$.

Dado que la varianza de la variable Q se define como $E(Q^2)-E(Q)^2$ se tendría que cumplir que :

$$S^2\sigma^2t = pu^2S^2+(1-p)d^2S^2-S^2[pu+(1-p)d]^2 \ldots\ldots (5.3)$$

Ahora bien considérense los siguientes valores para u, d y p *

$u=e^{\sigma\sqrt{t}}$, $d=1/u$, y $p=(e^{rt}-d)/(u-d)$

Si se sustituyen estos valores en la ecuación 5.1 se obtiene que :

$$puS+(1-p)dS = puS+dS-pdS = Sp(u-d)+dS = S(e^{rt}-d)+dS = Se^{rt}$$

por lo tanto u, d, y p definidos de esta manera cumplen con la ecuación 5.1 ahora bien si estos mismos valores de u, d, y p se sustituyen en la ecuación 5.3 se obtiene :

$$pu^2S^2+(1-p)d^2S^2-S^2[pu+(1-p)d]^2 = p\,u^2S^2+(1-p)\,d^2S^2 - (Se^{rt})^2$$

que simplificando se tiene :

$$S^2[e^{rt}\,(e^{\sigma\sqrt{t}}+e^{-\sigma\sqrt{t}})-1-\,e^{2rt}\,]$$

* *Como referencia para la determinación de estos valores véanse OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES. de John Hull Capítulo III y OPTIONS MARKETS de John C. Cox y Mark Rubinstein Capítulo V.*

expandiendo los términos e^x en su forma de serie de Taylor $e^x = (1+x+x^2/2+x^3/6+...)$, se tiene :

$$S^2[(1+rt+(rt)^2/2+(rt)^3/3+...)*((1+\sigma\sqrt{t}+\sigma^2t/2+(\sigma\sqrt{t})^3/3+...)+(1-\sigma\sqrt{t}+\sigma^2t/2-(\sigma\sqrt{t})^3/3+...)) -1-(1+2rt+(2rt)^2/2+(2rt)^3/3+...)]$$

Ahora bien si los términos de orden t^2 y superior se ignoran, la ecuación anterior se convierte en :

$$S^2[(1+rt)*((1+\sigma\sqrt{t}+\sigma^2t/2+(\sigma\sqrt{t})^3/3)+(1-\sigma\sqrt{t}+\sigma^2t/2-(\sigma\sqrt{t})^3/3))-1-(1+2rt)]$$

Simplificando y eliminando términos de orden t^2y superior se tiene :

$$S^2[(1+rt)(2+\sigma^2t)-2-2rt]$$

desarrollando el producto y eliminando los términos de orden t^2 se tiene que la varianza en el precio de la acción es de $S^2\sigma^2t$. desde luego que mientras mas pequeño sea el intervalo de tiempo t mejor será la aproximación a este valor.

5.3 LA VALUACIÓN NEUTRAL AL RIESGO.

En el capítulo III se introdujo un concepto que es conocido como principio de valuación neutral al riesgo. Este concepto establece que cualquier valor que dependa de el precio de una acción puede ser valuado bajo el supuesto de que el mundo es neutral al riesgo, lo cual significa que para propósitos de la valuación de Opciones, se puede suponer que :

1.- El rendimiento esperado de cualquier acción negociada es la tasa de interés libre de riesgo.
2.- Flujos futuros de efectivo pueden ser valuados descontando sus valores futuros esperados con la tasa de interés libre de riesgo.

Como se vio en la sección anterior cuando se usa el modelo binomial se esta haciendo uso de el concepto de la valuación neutral al riesgo.

5.4.EL ÁRBOL DE PRECIOS DE LA ACCIÓN.

En la figura 5.2 se ilustra un árbol binomial más completo para representar los diferentes precios que una acción pudiera tomar a lo largo de la vida de una Opción. Sea S el precio de la acción en el tiempo cero ; en el tiempo t existen dos posibles valores para el precio de la acción a saber :

$$Su \text{ y } Sd.$$

En el tiempo 2t, existen tres posibles valores para el precio de la acción :

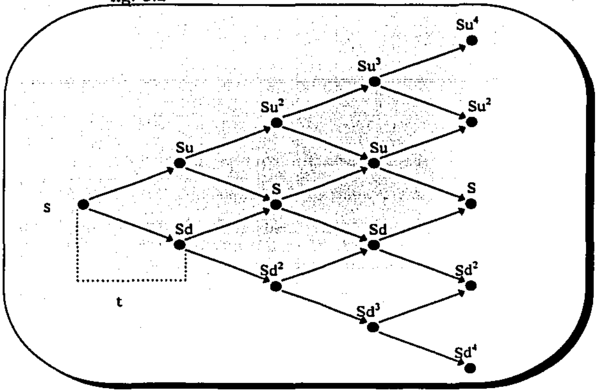
$$Su^2, S \text{ y } Sd^2.$$

En general, en el tiempo it, existen i+1 precios posibles para la acción. En forma general pueden expresarse a estos precios como :

$$Su^jd^{i-j} \quad \text{para } j=0,1,2,..........,i$$

Hay que notar en la fig. 5.2 que la relación $u=1/d$ es usada para el cálculo de el precio de la acción en cada nodo de el árbol. Por ejemplo, $Su^2d=Su$, hay que notar también que el árbol está hecho considerando que un movimiento hacia arriba en el precio de la acción seguido por un movimiento hacia abajo en el mismo conduce a el mismo precio que origina un movimiento hacia abajo y luego un movimiento hacia arriba en el precio de la acción.

fig. 5.2



Las Opciones son evaluadas empezando en el final de el árbol (tiempo T) y trabajando hacia atrás de el mismo. El valor de la Opción es conocida en el tiempo T. Por ejemplo, una Opción de Venta vale Max(K-S_T, 0) y una Opción de Compra Max(S_T-K, 0), donde S_T es el precio de la acción en el tiempo T y K es el precio de ejercicio pactado.

Como se tiene el supuesto de que el mundo es neutral al riesgo, el valor de la Opción en cada nodo en el tiempo T-t puede ser calculado como el valor esperado en el tiempo T descontado un periodo t con la tasa de interés r. De manera análoga, el valor de la Opción en cada nodo en el tiempo T-2t puede ser calculado como el valor esperado en el tiempo T-t descontado un periodo t con la tasa de interés r, y así sucesivamente. Si la Opción es de tipo Americana, es necesario checar en cada nodo si ejercer antes de la fecha de expiración es preferible a mantener la Opción por un periodo de tiempo t más. Al ir obteniendo el precio de la Opción en cada nodo de la manera indicada, se obtendrá el valor de la Opción en el inicio de el árbol.

El siguiente ejemplo servirá para ilustrar la idea general de el método descrito anteriormente el cual será generalizado en la siguiente sección.

Ejemplo. 5.1.

Considérese una Opción Americana de Venta sobre una acción que no paga dividendos durante la vida de la Opción. La fecha de vencimiento de la Opción se establece dentro de 5 meses, el precio en el mercado de dicha acción es de $50, el precio de ejercicio se fija en $50, la tasa de interés libre de riesgo es de 10% anual y la volatilidad es de 40% anual. Usando la notación acostumbrada se tiene
S=$50
K=$50
T=.4167
σ=.40
r=.10

Supóngase que se divide la vida de la Opción en cinco intervalos de un mes cada uno(.0833 de año) para los propósitos de la construcción de un árbol binomial. Entonces t= .0833 y usando los valores para u, d, y p se tiene :

$$u= e^{\sigma\sqrt{t}}=1.1224, \qquad d= e^{-\sigma\sqrt{t}}=.8909$$

$$e^{rt}=1.0084, \qquad p=(e^{rt}-d)/(u-d)=.5076$$

$$1-p=.4924$$

En la fig. 5.3 se muestra el árbol binomial. En cada nodo hay dos números, el número que se encuentra en la parte superior muestra el valor de la acción en cada nodo, mientras que el número inferior muestra el valor de la Opción en cada nodo. La probabilidad de un movimiento hacia arriba es siempre de .5076 ; y la probabilidad de un movimiento hacia abajo en el precio de la acción es de .4924.

El precio de la acción en el j-ésimo nodo (j=0,1,2,3,....,i) en el tiempo t es calculado como Su^jd^{i-j}. Por ejemplo, el precio de la acción en el nodo A(i=4, j=1) es de $(50)(1.1224)(.8909^3)$=\$39.69. Los precios de la Opción en los nodos finales de el árbol se calculan como Max($K-S_T$, 0).

Por ejemplo, el precio de la Opción en el nodo G es de :

$$50-35.36=14.64.$$

El precio de la Opción en los penúltimos nodos de el árbol se calculan a partir de los precios de la Opción en los últimos nodos de el árbol. Los precios de la Opción se calculan descontando el valor esperado de la Opción al tiempo t. Por ejemplo, en el nodo E el precio de la Opción es calculado como :

$$((.5076)(0)+(.4924)(5.45))e^{-.10(.0833)}=\$2.66$$

mientras en el nodo A se calcula como

$$((.5076)(5.45)+(.4924)(14.64))e^{-.10(.0833)}=\$9.90 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *$$

Una vez hecho lo anterior se verifica si ejercer antes de la fecha de vencimiento es preferible a esperar un periodo más. Por ejemplo, en el nodo E si se ejerce la Opción no se obtendría ninguna ganancia, dado que en ese nodo tanto el valor de la acción como el valor de el precio de ejercicio son ambos de \$50, por lo tanto es preferible esperar un período de tiempo más, por lo tanto, el valor correcto de la Opción en ese nodo es de \$2.66. En el nodo A se tiene otra situación. Si la Opción se ejerce, se tiene una ganancia de 50-39.69=\$10.31 la cual es una cantidad mayor que la se obtiene con *, por lo que si el nodo A se alcanza la Opción deberá ser ejercida y por tanto el valor correcto para la Opción de Venta en el nodo A es de \$10.31.

Los precios de la Opción en los demás nodos se calculan de la misma forma que en los casos anteriores.

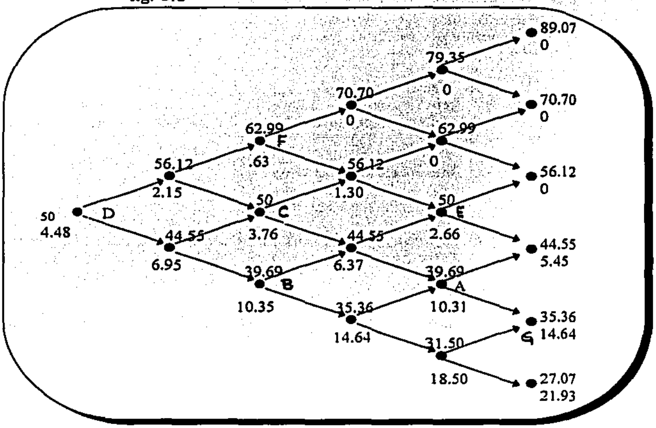
Hay que hacer notar que no necesariamente es mejor ejercer la Opción antes de la fecha de vencimiento siempre que se encuentre dentro de el dinero. Por poner un ejemplo, considérese el nodo B. Si la Opción se ejerce en este nodo, entonces la ganancia que se obtiene es de \$50-\$39.69=\$10.31, sin embargo si la Opción se mantiene y no se ejerce entonces el valor de la Opción es de :

$$((.5076)(6.37)+(.4924)(14.64))\ e^{-.10(.0833)}=\$10.35$$

Como conviene más no ejercer la Opción, ya que el valor de esta es mayor que la ganancia que se obtiene si se decide ejercer la misma, entonces el valor de la Opción en el nodo B es de $10.35.

Siguiendo el procedimiento anterior hasta el inicio de le árbol se obtiene el valor de la Opción en el nodo inicial el cual es de $4.48. Esta cantidad es la estimación numérica que se hace sobre el verdadero valor de la Opción de Venta. En la práctica mientras más pequeño sea el valor de t y más nodos sean empleados mejor será la aproximación que se tenga sobre el verdadero valor de la Opción.

fig. 5.3



5.5.OPCIONES AMERICANAS DE VENTA.

En esta sección se expresará la metodología presentada en el ejemplo anterior de una manera más general.

Supóngase que la vida de una Opción Americana de Venta, sobre una acción que no paga dividendos durante la vida de la Opción, es dividida en N subintervalos de longitud t. Si se define Pij como el valor de la Opción en el tiempo it cuando el precio de la acción es de $Su^j d^{i-j}$ para $0 \le i \le N, 0 \le j \le i$ entonces Pij será el valor de la Opción en el nodo (i, j). Dado que el valor de una Opción Americana de Venta en la fecha de vencimiento es de Max(K-S_T, 0) se tiene que :

$$P_{Nj} = \text{Max}(K - Su^j d^{N-j}, 0) \quad \text{con } j = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots,N$$

Se tiene una probabilidad p de que se produzca un movimiento de el nodo (i, j) en el tiempo it a el nodo (i+1, j+1) en el tiempo (i+1)t, si se supone que no se ejerce la Opción antes de la fecha de vencimiento, y recordando el hecho de que cualquier valor futuro puede ser descontado con la tasa de interés libre de riesgo, se tiene que el precio de la Opción en el nodo (i, j) es de :

$$P_{ij} = e^{-rt}\ [pP_{i+1,j+1}+(1-p)P_{i+1,j}]$$

para $0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq i$

Cuando las posibilidades de ejercer antes de la fecha de vencimiento de la Opción son tomadas en cuenta entonces será necesario comparar el valor de la Opción arrojado por la ecuación anterior con el valor intrínseco de la Opción para así fijar el valor de la Opción en ese nodo como :

$$P_{ij} = \mathrm{Max}(K - Su^j d^{i-j},\ e^{-rt}\ [pP_{i+1,j+1}+(1-p)P_{i+1,j}])$$

Como los cálculos se inician en el tiempo T y se van haciendo hacia atrás, el valor de la Opción en el tiempo it contempla no sólo el efecto de la posibilidad de ejercer antes de la fecha de vencimiento, sino también contempla esta posibilidad en los intervalos de tiempo subsecuentes. Mientras t tienda a cero se obtendrá una mejor aproximación para el valor de la Opción Americana de Venta. Algunos autores siguieren que con un valor de N=30 se puede esperar una buena aproximación a el verdadero valor de la Opción, dado que se contemplan 2^{30} posibles caminos para el precio de la acción.

5.6.OPCIONES DE COMPRA.

De acuerdo con el procedimiento recursivo desarrollado en este capítulo, es posible encontrar el valor de una Opción de Compra para cualquier número de periodos. Iniciando desde la fecha de vencimiento y trabajando hacia atrás, se puede escribir la fórmula general para la valuación de Opciones de Compra para un número n de periodos como :

$$C = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max\left[0, u^j d^{n-j} S - K\right] \right\} * e^{-rnt}$$

Otra manera de expresar esta formula es la siguiente :

Sea a el número mínimo de movimientos hacia arriba que el precio de la acción deberá hacer en los siguientes n periodos para que la Opción termine dentro de el dinero. Lo anterior implica que a es el entero mas pequeño no negativo tal que $u^a d^{n-a} S > K$. Tomando logaritmo natural de ambos lados, se puede escribir a a como el entero mas pequeño no negativo mayor que $\mathrm{Ln}(K/Sd^n)/\mathrm{Ln}(u/d)$.
por lo tanto.

$$a > \mathrm{Ln}(K/Sd^{n-j})/\mathrm{Ln}(u/d).$$

$$\forall j < a, \max[0, u^j d^{n-j} S - K] = 0 \quad \text{y} \quad \forall j \geq a, \max[0, u^j d^{n-j} S - K] = u^j d^{n-j} S - K.$$

por lo tanto la ecuación anterior se convierte en :

$$C = \left\{ \sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left[u^j d^{n-j} S - K\right] \right\} * e^{-rnt}$$

5.7.ESTIMACIÓN DE DELTA Y OTROS PARÁMETROS DE SENSIBILIDAD.

Como se vio en el capítulo III, la delta de una Opción δ, es la tasa de cambio del precio de una Opción con respecto al precio la acción subyacente, es decir :

$$\delta_C = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

Donde Δ S representa un pequeño cambio en el precio de la acción y Δ C es el cambio correspondiente en el precio de la Opción. En el tiempo t se tiene una estimación para el precio de la Opción dado por C_{11} en donde el precio de la acción es de Su y también se tiene una estimación para C_{10} en donde el precio de la acción es de Sd. En otras palabras una estimación para delta puede ser obtenida de la siguiente manera :

$$\Delta S = Su - Sd \text{ y } \Delta C = C_{11} - C_{10}$$

por lo tanto en el tiempo t

$$\delta = (C_{11} - C_{10}) / (Su - Sd)$$

Para poder determinar gama, γ, hay que notar que se tiene dos estimaciones de δ en el tiempo 2t. Cuando $S=(Su^2+S)/2$ (que es la mitad de camino entre el segundo y el tercer nodo), delta vale $(C_{22}-C_{21})/(Su^2-S)$; cuando $S=(S+Sd^2)/2$ (que es la mitad de camino entre el primer y el segundo nodo) delta vale $(C_{21}-C_{20})/(S-Sd^2)$.

Sea h la diferencia entre los dos valores de S.

$$h = .5(Su^2 - Sd^2)$$

Gama es el cambio en la delta dividida por los cambios en el precio de la acción S.

$$\gamma = [(C_{22}-C_{21})/(Su^2-S)]-(C_{21}-C_{20})/(S-Sd^2)]/h \ldots\ldots\ldots\ldots 5.4$$

De esta manera se estima a delta en el tiempo t y a Gama en el tiempo 2t. En la práctica, estas estimaciones se usan en el tiempo cero. Si fuera necesario se puede mejorar la estimación para delta y gama en el tiempo 0, para ello se inicia el árbol binomial en el tiempo -2t y se supone que el precio de la acción en este tiempo es de S. Más nodos tienen que ser evaluados, pero tres diferentes valores de S son considerados en el tiempo cero , Su^2,S, Sd^2., entonces la estimación para delta esta dada como :

$$\delta = (C_{22}-C_{20})/(Su^2-Sd^2) \ldots\ldots\ldots 5.5$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el uso de las ecuaciones 5.4 y 5.5

Ejemplo 5.2.

Considérese a una Opción Americana de Venta sobre una acción de Coca-Cola que no paga dividendos durante la vida de la Opción. La fecha de vencimiento de la Opción es dentro de tres meses, el precio en el mercado de la acción es de \$50, el precio de ejercicio se pacta en \$50, la tasa de interés libre de riesgo es del 10% anual, y la volatilidad es del 40% anual, es decir :

S=\$50, K=\$50, r=.10, T=.25 y σ =.40.

La Opción de este ejemplo es exactamente igual a la Opción considerada en el ejemplo 5.1, salvo la fecha de vencimiento, en este ejemplo es de tres y no de cinco meses.

Escogiendo a t de un mes (.0833 de año), una estimación para el valor de la Opción en el punto C se muestra en la fig. 5.3, dicho valor es de $3.76.

En el contexto de el ejemplo, el árbol comienza en el tiempo -2t de la ecuación 5.5 una estimación para delta puede ser calculada a partir de los valores de la Opción en los nodos B y F como :

$$(.63-10.35)/(62.99-39.69)=.42$$

De la ecuación 5.4, una estimación para la gama de la Opción puede calcularse a partir de los valores de la Opción en los nodos B, C y F como :

$$[[(.63-3.76)/(62.99-50)]-[(3.76-10.35)/(50-39.69)]]/11.65$$

Hay que mencionar que estas son sólo unas aproximaciones a los verdaderos valores de estos parámetros, mientras más pequeño sea t mejor será la aproximación a los verdaderos valores para las Opciones en los diferentes periodos de tiempo y por tanto mejor serán las aproximaciones a los verdaderos valores de delta y de gama.

5.8.EL MODELO BINOMIAL PARA ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS.

Como se mencionó anteriormente para efectos de valuación de Opciones la palabra dividendo se entenderá como una reducción en el precio de la acción en la fecha de ex-dividendos.

Si se supone que se conoce con certeza que un porcentaje de el precio de la acción (δ), será pagado por concepto de dividendos en algún momento en el futuro dentro de la vida de la Opción, se tendrá un árbol binomial semejante al que se muestra en la fig. 5.4 y el análisis que se realice sobre el árbol para determinar el valor de una Opción sobre esta acción se hará de manera análoga a el análisis hecho sobre el árbol elaborado para las acciones que no pagan dividendos. Si el periodo it se presenta antes de que la acción llegue a su fecha de ex-dividendos , los nodos en el árbol representarán los siguientes precios de la acción :

$$Su^j d^{i-j} \quad \text{para } 0 \le i \le N, 0 \le j \le i$$

recordando los valores para u y d presentados en la sección 5.2 de este capítulo.

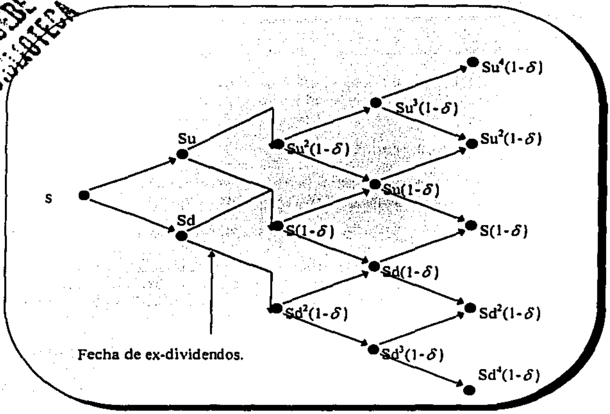
Si el periodo it se presenta después de la fecha de ex-dividendos , los nodos en el árbol representarán los siguientes precios de la acción :

$$S(1-\delta)u^j d^{i-j} \qquad \text{con } j=0,1,2,.,i$$

El caso en el que se pagan varios dividendos durante la vida de la Opción es tratado de manera similar que el caso en el que se tiene sólo un pago de dividendos. Si δi es el dividendo asociado con todas las fechas de ex-dividendos entre el tiempo cero y el tiempo it, los nodos en el tiempo it corresponden a los siguientes precios de la acción :

$$S(1-\delta i)\, u^j d^{i-j}$$

fig. 5.4



Otra posibilidad para el pago de dividendos es la siguiente :

En lugar de que los dividendos que serán pagados sean un porcentaje de el valor de la acción en cada nodo del árbol, ahora los dividendos serán pagados pero como una cantidad de dinero conocida independientemente de el valor de la acción en cada nodo del árbol. Si la volatilidad en el precio de la acción se supone constante, el árbol toma la forma que se muestra en la fig. 5.5. Este árbol a diferencia de el que se muestra en la figura 5.4 tiene la dificultad de que el número de nodos que son necesarios para evaluar se incrementan en forma considerable.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que existe sólo un pago de dividendos y que la fecha de ex-dividendos, τ, se dará en algún tiempo entre Kt y (K+1) t, la cantidad de dinero correspondiente a el pago de dividendos es de D. Cuando $i \leq K$ los nodos correspondientes representan un precio de la acción de

$$Su^jd^{i-j} \qquad \text{con } j=0,1,2,..,i$$

Cuando $i=(K+1)$, los nodos que se encuentran en it y posteriores representan un precio de la acción de

$$Su^jd^{i-j} - D \qquad \text{con } j=0,1,2,..,i$$

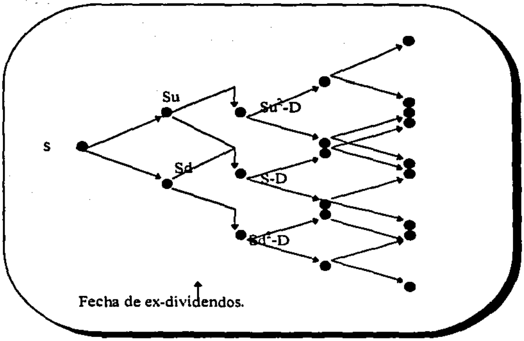
Cuando $i=(K+2)$, los nodos corresponden a el precio de la acción de

$$(Su^jd^{i-1-j} - D)u \qquad \text{o bien de} \qquad (Su^jd^{i-1-j} - D)d$$

$$\text{para } j=0,1,2,..,i-1$$

por lo tanto existen 2i nodos en lugar de i+1 nodos. En el tiempo (K+m) t, existen m(K+1) nodos en lugar de K+m+1 para evaluar.

fig. 5.5



Para resolver el problema de evaluar demasiados nodos se sigue el procedimiento siguiente :

Supóngase que existe sólo una fecha de ex-dividendos τ, durante la vida de la Opción y esta fecha de ex-dividendos se presenta en el periodo $Kt \leq \tau \leq (K+1)$ t.

Sea S^* el valor de la acción en el tiempo x dado por :

$$S^*(x)=S(x) \qquad \text{cuando } x>\tau \quad \text{y}$$
$$S^*(x)=S(x)-De^{-r(\tau-x)} \qquad \text{cuando } x\leq\tau$$

Donde D representa la cantidad de dinero que será pagada por concepto de dividendos. Sea σ^* la volatilidad de S^* donde σ^* es constante . Los parámetros p, u, y d se calculan de la misma manera que en la sección 5.2. Es entonces cuando se construye un árbol binomial modelando a S^* en lugar de a S. Agregando a el precio de la acción en cada nodo, el valor presente de los dividendos futuros, el árbol se convierte en otro que modela a S.

En el tiempo it, los nodos de este árbol representan a los precios de la acción siguientes :

$$S^*(t)\, u^j d^{i-j}+De^{-r(\tau-it)} \qquad j=0,1,2,....,i$$

cuando $it<\tau$ y

$$S^*(t)\, u^j d^{i-j} \qquad j=0,1,2.....,i$$

cuando $it>\tau$

Esta técnica permite resolver el problema de evaluar demasiados nodos, reduciéndolo a sólo evaluar en el tiempo it (i+1) nodos.

Ejemplo 5.3.

Considérese a una Opción de Venta sobre una acción cuya fecha de vencimiento es dentro de cinco meses, dentro de la vida de la Opción sólo es esperado un pago por $2.06 correspondiente a dividendos . El precio inicial de la acción es de $52, el precio de ejercicio se pacta en $50, la tasa de interés es del 10% anual, la volatilidad es del 40% anual y la fecha de ex-dividendos se espera dentro de 3.5 meses.

Para aplicar la técnica explicada anteriormente, el primer paso es el de construir un árbol para modelar S*, el precio de la acción menos el valor presente de los dividendos que serán pagados durante la vida de la Opción. El valor presente de los dividendos que serán pagados es de :

$$2.06e^{-.2917*.1}=2$$

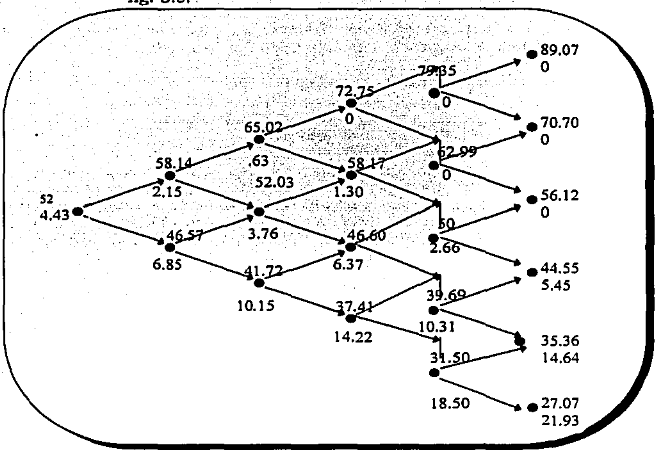
Por lo tanto el valor inicial de S* será de $50, suponiendo que la volatilidad de S* sea del 40% la fig. 5.3 representa el árbol binomial para S* (S* tiene el mismo valor inicial y la misma volatilidad que el precio de la acción para la cual se elaboró la fig. 5.3.)

Agregando el valor presente de los dividendos en cada nodo se llega a la fig. 5.6 la cual representa el modelo binomial para S=$52. Las probabilidades de que el precio de la acción suba o baje son respectivamente :

$$p=.5076 \text{ y de } (1-p)=.4924$$

Evaluando el precio de la Opción en cada nodo desde el final de el árbol hasta el inicio de el mismo se tiene que el precio de la Opción es de $4.43.

fig. 5.6.



5.9.LA TÉCNICA DE LA VARIABLE DE CONTROL.

En muchos casos las estimaciones sobre el precio de las Opciones Americanas mediante el uso de árboles binomiales pueden mejorarse usando un modelo conocido como técnica de la variable de control* . Este modelo consiste en el uso de árboles binomiales para valuar tanto a la Opción Americana en cuestión como a una Opción Europea con las mismas características que la Opción Americana ; una vez hecho lo anterior se calcula el valor de una Opción Europea con el modelo de Black-Scholes y a partir de lo anterior se puede obtener una mejor estimación sobre el valor de la Opción Americana.

Para la técnica de la variable de control se define :

Wa= El precio estimado de una Opción Americana (puede ser de compra o de venta) a partir de la construcción de un árbol binomial.

We= El precio estimado de una Opción Europea (puede ser de compra o de venta) a partir de la construcción de un árbol binomial.

Wbs= El precio de una Opción Europea (puede ser de compra o de venta) a partir de la fórmula de Black-Scholes.

Entonces una mejor estimación sobre el precio de la Opción Americana está dada por :

$$Wa+Wbs-We$$

Ejemplo 5.4.

Considérese la Opción Americana de Venta que fue valuada en el ejemplo 5.1 (S=\$50, K=\$50, r=.10, σ=.40 y T=.4167). En la fig. 5.7 se evalúa a una Opción Europea de Venta con las mismas características que la Opción Americana de Venta anterior. La estimación obtenida sobre la Opción Europea de Venta es de \$4.31. Ahora bien, usando la fórmula de Black-Scholes se obtiene que el valor de la Opción Europea de Venta es de \$4.08.

Por lo tanto usando el método de la variable de control para estimar el precio de la Opción Americana de Venta se obtiene :

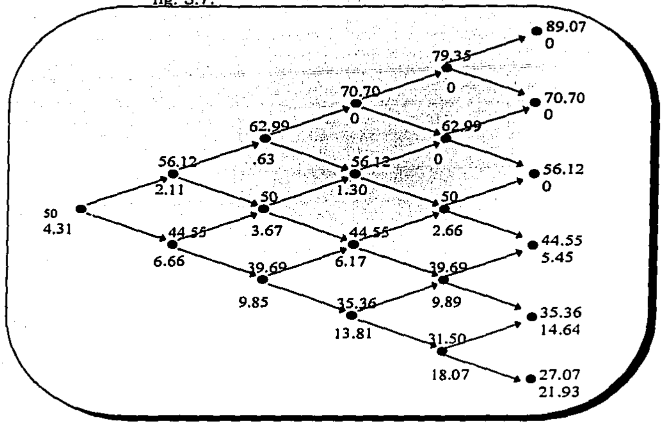
$$4.48+4.08-4.31=4.25$$

Mientras que el verdadero valor de la Opción Americana de Venta es de \$4.29

Como se pudo apreciar en este ejemplo la técnica de la variable de control mejoró considerablemente la estimación hecha sobre el precio de la Opción.

* *Para mayores referencias véase OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES de John Hull.*

fig. 5.7.



5.10 LA SIMULACIÓN MONTE CARLO.

Los arboles binomiales pueden se usados en conjunto con una técnica para la valuación de Opciones conocida como Simulación Monte Carlo. Esta técnica involucra la simulación de caminos aleatorios para el precio de la acción durante la vida de la Opción. En lugar de ir recorriendo los nodos de el árbol desde el nodo final hasta el nodo inicial, se recorre el árbol desde el nodo inicial hasta el nodo final de el mismo.

El procedimiento básico de la Simulación Monte Carlo es el siguiente :

En el nodo inicial de el árbol se toma un número aleatorio entre 0 y 1. Si el número aleatorio se encuentra entre 0 y p con $p=(e^{rt}-d)/(u-d)$, $u=e^{\sigma\sqrt{t}}$ y $d=1/u$, se considera que el precio de la acción en el siguiente período será el que se obtenga siguiendo la rama superior de el árbol, es decir uS; por otro lado si el número aleatorio obtenido se encuentra entre p y 1 se considera que el precio de la acción en el siguiente período será el que se obtenga siguiendo la rama inferior de el árbol, es decir dS . Una vez alcanzado el tiempo t se repite el procedimiento anterior hasta llegar a el final de el árbol, de esta manera se simula un posible camino para el precio de la acción a través de cada uno de los períodos de tiempo t en que se haya dividido la vida de la Opción.

Si se define a S1 como el precio final de la acción obtenido con la primera simulación es posible conociendo el precio de ejercicio (K) pactado en la Opción calcular el precio de la misma en la fecha de vencimiento, siendo este valor de :

$$C1=Max[0, S1-K]$$

si se trata de una Opción de Compra y

$$P1=Max[0, K-P1]$$

si se trata de una Opción de Venta.

El siguiente paso es simular otro posible camino para el precio de la acción de la misma manera que en el caso anterior. Sea S2 el valor obtenido para la acción en la fecha de vencimiento de la Opción en esta segunda simulación, de manera análoga a la primera simulación es posible calcular el precio de la Opción en su fecha de vencimiento como :

$$C2=Max[0, S2-K]$$

si se trata de una Opción de Compra y

$$P2=Max[0, K-P2]$$

si se trata de una Opción de Venta.

Se simula ahora un tercer valor para el precio de la acción y se procede a calcular el precio de la Opción en la fecha de vencimiento de la misma manera que en los dos casos anteriores, repitiendo el procedimiento un gran número de veces se tendrán en la fecha de vencimiento una gama de posibles valores que pudiera tomar el precio de la Opción, el número de posibles valores para la Opción dependerá de el número de simulaciones para el precio de la acción que se hayan realizado.

Con los posibles valores obtenidos para la Opción se puede hacer una estimación de el valor esperado de el precio de la Opción en la fecha de vencimiento de la siguiente manera.

$$E(C_T)=\frac{\sum_{i=1}^{n} Ci}{n}$$

donde :

E(x)= Valor esperado de la variable x
C_T = Valor de la Opción de Compra en la fecha de vencimiento.
n = Número de simulaciones hechas para el precio de la acción.

De manera análoga :

$$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{n} Pi}{n}$$

donde :

E(x)= Valor esperado de la variable x
P_T = Valor de la Opción de Venta en la fecha de vencimiento.
n = Número de simulaciones hechas para el precio de la acción.

Una vez estimado el valor esperado de el precio de la Opción en la fecha de vencimiento y recordando el concepto de la valuación neutral al riesgo, puede estimarse el valor de la Opción el dia de hoy como :

$C=e^{-rT}E(C_T)$ si se trata de una Opción de Compra.

y

$P=e^{-rT}E(P_T)$ si se trata de una Opción de Venta.

donde

r= Es la tasa de interés libre de riesgo.

Debido al procedimiento que sigue la simulación Monte Carlo esta técnica no puede usarse para valuar Opciones Americanas de Venta ya que no hay forma de conocer si en un cierto periodo de tiempo es óptimo ejercer antes de la fecha de vencimiento de la Opción.

Para propósitos de la simulación la vida de la Opción se divide en N subintervalos de longitud t, comúnmente se escoge a t entre 1 y 5 días.

La exactitud que se requiera para la aproximación de el valor de la Opción dependerá de el número de simulaciones y de el número de periodos en que sea dividida la vida de la Opción. Si M es el número de simulaciones y w es la desviación estándar de los valores calculados para la Opción a través de las simulaciones, el error* aproximado sobre el verdadero valor de la Opción está dado por $w/\sqrt{M}$. Mientras que al aumentar el número de periodos en que es dividida la vida de la Opción se contempla un mayor número de precios terminales de la Opción por lo que el promedio de ellos se aproximará mas a el verdadero valor de la Opción.

En el siguiente ejemplo se ilustra la Simulación Monte Carlo para la valuación de Opciones.

Ejemplo 5.5.

La empresa XYZ está emitiendo Opciones Europeas de Venta sobre acciones de TV-AZTECA con fecha de vencimiento dentro de cinco meses a partir de el día de hoy, el precio actual de una acción de TV-AZTECA en el mercado es de $50, la tasa de interés libre de riesgo es del 10% anual, el precio de ejercicio pactado en la Opción sobre la acción se establece en $50 y la volatilidad esperada para el precio de la acción se estima en 40% anual. Una persona desea calcular el precio que deberá pagar por la compra de una de esas Opciones. Usando la notación habitual se tiene :

S=$50,
K=$50,
r=.10
σ=.40
T=.4167

Para efectos de la simulación supóngase que la vida de la Opción se divide en cinco intervalos de tiempo t cada uno de ellos de un mes, por lo tanto t=.0833 y los valores correspondientes para p, u y d son respectivamente :

$$p=(e^{rt}-d)/(u-d)=.50732$$
$$u=e^{\sigma\sqrt{t}}=1.12240$$
$$d=1/u=.89094$$

Siguiendo con el procedimiento empleado por la simulación Monte Carlo lo que sigue es simular el precio de la acción en cada intervalo de tiempo, en la siguiente tabla se muestra la primera simulación para el precio de la acción en cada mes :

---

* *Ver como referencia OPTIONS , FUTURES AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES de John Hull .Capítulo 9*

Simulación 1

PERIODO t(mes)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERÍODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.720015643	44.54715686
1	44.54715686	0.36720408	50
2	50	0.522600041	44.54715686
3	44.54715686	0.666327091	39.68898369
4	39.68898369	0.209691945	44.54715686
5	44.54715686	0.005644809	

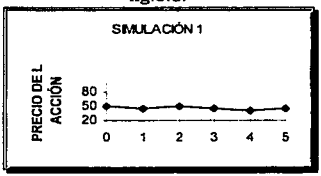
Como se puede observar el precio de la acción resultante por la simulación es de \$44.547 al término de cinco meses.

Por lo tanto el valor de la Opción de Venta dentro de cinco meses para esta simulación será de :

$$P_1 = Max[0,\ 50-44.5471] = \$5.452$$

En la siguiente gráfica se puede observar el movimiento de el precio de la acción a través de el tiempo.

fig.5.8.



Continuando con el proceso de simulación se tiene ahora un segundo valor para el precio de la acción dentro de cinco meses ; este valor se ilustra en la siguiente tabla :

Simulación 2

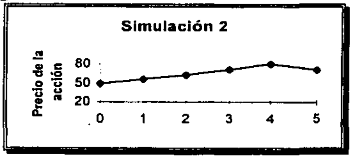
PERIODO t(mes)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.482507862	56.12030433
1	56.12030433	0.316551223	62.98977115
2	62.98977115	0.060888895	70.70010253
3	70.70010253	0.201164318	79.35422539
4	79.35422539	0.846094224	70.70010253
5	70.70010253	0.696801766	

Como se puede observar el precio de la acción resultante por la simulación es de $70.700 al término de cinco meses.

Por lo tanto el valor de la Opción de Venta dentro de cinco meses para esta simulación será de :

P2=Max[0,50-70.700]= $0

fig. 5.9.



En la gráfica anterior se puede observar el movimiento de el precio de la acción a través de el tiempo.

El valor de otros de los posibles precios de la acción al término de cinco meses se ilustra en la siguiente tabla :

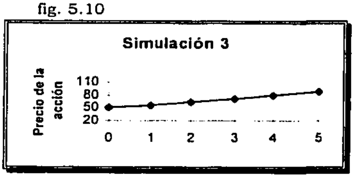
Simulación 3

PERIODO t(mes)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.481661225	56.12030433
1	56.12030433	0.358952525	62.98977115
2	62.98977115	0.484074282	70.70010253
3	70.70010253	0.304845995	79.35422539
4	79.35422539	0.103844205	89.06766557
5	89.06766557	0.606216631	

de la simulación tres se tiene que el precio de la Opción de Venta dentro de cinco meses será de :

P3=Max[0,50-89.067]= $0

fig. 5.10



En la gráfica anterior se puede observar otro de los posibles comportamientos de el precio de la acción.

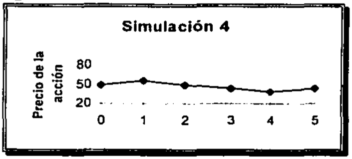
Ahora haciendo una cuarta simulación se tiene :

Simulación 4.

PERIODO t(mes)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERÍODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.092620153	56.12030433
1	56.12030433	0.525545014	50
2	50	0.588911183	44.54715686
3	44.54715686	0.908059462	39.68898369
4	39.68898369	0.263299237	44.54715686
5	44.54715686	0.833852412	

P4=Max[0,50-44.547]= $5.4528

fig.5.11

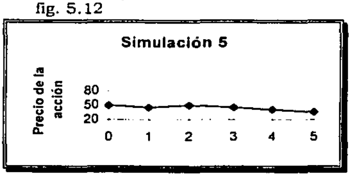


Simulación 5.

PERÍODO t(mes)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERÍODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.673815665	44.54715686
1	44.54715686	0.237418967	50
2	50	0.903001598	44.54715686
3	44.54715686	0.590019406	39.68898369
4	39.68898369	0.791912526	35.36062765
5	35.36062765	0.754970186	

P5=Max[0,50-35.36]= $14.639

fig. 5.12



De la misma manera que en las simulaciones anteriores se obtuvieron 30 de los posibles valores de la acción dentro de 5 meses. De esta manera fue posible estimar el valor de la Opción dentro de 5 meses. Los resultados se muestran el la siguiente tabla :

Simulación i	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T	Simulación i	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T
1	44.547	5.4528	6	28.068	21.932
2	70.700	0	7	44.547	5.453
3	89.067	0	8	70.7	0
4	44.547	5.4528	9	56.12	0
5	35.36	14.639	10	70.7	0

Simulación i	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T	Simulación i	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T
11	35.36	14.64	21	35.36	14.64
12	44.547	5.453	22	89.06766	0
13	35.36	14.64	23	56.12	0
14	56.12	0	24	44.5471	5.4529
15	70.7	0	25	70.7	0
16	70.7	0	26	35.36	14.64
17	70.7	0	27	70.7	0
18	70.7	0	28	56.12	0
19	44.547	5.453	29	44.5471	5.45
20	56.12	0	30	56.12	0

NOTA : La columna de precio de la Opción en el tiempo T se calculó usando Max[0, 50-Si] donde Si representa el precio de la acción en el tiempo T obtenido en la simulación i.

Para efectos de este ejemplo sólo se simularon 30 posibles precios para la acción y por consiguiente se tienen sólo 30 posibles valores para la Opción al término de cinco meses. El siguiente paso en la simulación Monte Carlo consiste en obtener una estimación sobre el valor esperado de la Opción en la fecha de vencimiento.

En la siguiente tabla se ilustra la manera en la cual se obtiene el valor de la Opción el día de hoy a partir de la estimación de el valor esperado en el precio de la Opción en el tiempo T.

1 No. de Simulaciones i	2 Valor de la opción en el tiempo T	3 $E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	4 Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
1	5.45	5.45	5.23
2	0.00	2.73	2.62
3	0.00	1.82	1.74
4	5.45	2.73	2.62
5	14.64	5.11	4.90
6	21.93	7.91	7.59
7	5.45	7.56	7.25
8	0.00	6.62	6.35
9	0.00	5.88	5.64

No. de Simulaciones i	Valor de la opción en el tiempo T	$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
10	0.00	5.29	5.08
11	14.64	6.14	5.89
12	5.45	6.09	5.84
13	14.64	6.74	6.47
14	0.00	6.26	6.01
15	0.00	5.84	5.61
16	0.00	5.48	5.26
17	0.00	5.16	4.95
18	0.00	4.87	4.67
19	5.45	4.90	4.70
20	0.00	4.66	4.47
21	14.64	5.13	4.92
22	0.00	4.90	4.70
23	0.00	4.69	4.49
24	5.45	4.72	4.52
25	0.00	4.53	4.34
26	14.64	4.92	4.72
27	0.00	4.74	4.54
28	0.00	4.57	4.38
29	5.45	4.60	4.41
30	0.00	4.44	4.26

Las columna marcada con el número 2 representa el valor de la opción obtenido en la simulación i y su valor fue calculado de la siguiente manera Pi=max[0, 50-Si] donde Pi es el valor de la Opción de Venta en la simulación i, 50 es el precio de ejercicio pactado y Si es el valor de la acción obtenido con la simulación i.

La columna 3 no es otra cosa que el valor esperado de el precio de la Opción en el tiempo T, es decir :

$$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$$

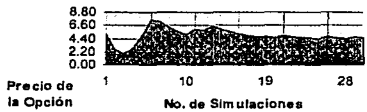
Donde N representa el número de simulaciones hechas.

Finalmente la columna 4 representa el valor esperado de la Opción descontado con la tasa de interés libre de riesgo, es decir el valor de la Opción de Venta el día de hoy :

$$P=e^{-rT}E(P_T)$$

Es importante observar de la tabla anterior que el valor de la Opción en mucho depende de el número de simulaciones hechas para el precio de la acción. Como se observa en la siguiente gráfica mientras mas simulaciones se elaboren, los cambios en los precios de la Opción tienden a estabilizarse acercándose a lo que seguramente será el verdadero valor para la Opción.

fig. 5.13



Este ejemplo fue elaborado con las mismas características que el ejemplo 5.4 de este mismo capitulo por lo cual es posible comparar el valor de la Opción de Venta obtenido a través de las fórmulas de Black-Scholes, con el valor obtenido a través de el árbol binomial de la fig. 5.7. y con el valor obtenido a través de la Simulación Monte Carlo.

Con la fórmula de Black-Scholes el valor obtenido para la Opción de Venta fue
P_{BS}=\$4.08

Con el árbol binomial el valor obtenido para la Opción de Venta fue :
P_A=\$4.31

Y con la Simulación Monte Carlo el valor obtenido para la Opción de Venta fue :
P_{SM}=\$4.26

El siguiente paso será el estimar el valor de la misma Opción Europea de Venta con la diferencia de que ahora se considerarán a los intervalos de tiempo t de una semana en lugar de un mes , con ello se permite que el precio de la acción cambie un mayor número de veces durante la vida de la Opción logrando con ello una situación más real . Al considerar que los intervalos de tiempo representan una semana entonces los nuevos valores para p, u , d y t son :

$$t=.020833$$
$$p=(e^{rt}-d)/(u-d)=.50362$$
$$u=e^{\sigma\sqrt{t}}=1.0594$$
$$d=1/u=.94390$$

El procedimiento será el mismo que fue usado en el caso en que los intervalos de tiempo representaban meses

Simulación 1

PERIODO t(semana)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
0	50	0.425	52.972
1	52.972	0.494	56.120
2	56.120	0.658	52.972
3	52.972	0.214	56.120
4	56.120	0.728	52.972
5	52.972	0.424	56.120
6	56.120	0.724	52.972
7	52.972	0.182	56.120

PERIODO t(semana)	PRECIO DE LA ACCION EN EL PERIODO t	* ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCION EN EL PERIODO t+1
8	56.120	0.347	59.455
9	59.455	0.698	56.120
10	56.120	0.722	52.972
11	52.972	0.214	56.120
12	56.120	0.797	52.972
13	52.972	0.181	56.120
14	56.120	0.905	52.972
15	52.972	0.332	56.120
16	56.120	0.291	59.455
17	59.455	0.893	56.120
18	56.120	0.673	52.972
19	52.972	0.097	56.120
20	56.120		

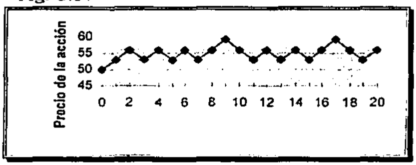
Como se puede observar el precio de la acción resultante por la simulación es de $56.120 al término de cinco meses.

Por lo tanto el valor de la Opción de Venta dentro de cinco meses para esta simulación será de :

$$P_1 = \text{Max}[0,\ 50 - 56.120] = \$0$$

En la siguiente gráfica se puede observar el movimiento de el precio de la acción a través de el tiempo.

Fig. 5.14



Simulación 2.

PERIODO t(semana)	PRECIO DE LA ACCION EN EL PERIODO t	* ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCION EN EL PERIODO t+1
0	50	0.055	52.972
1	52.972	0.538	50.000
2	50.000	0.610	47.195
3	47.195	0.810	44.547
4	44.547	0.243	47.195
5	47.195	0.260	50.000
6	50.000	0.954	47.195
7	47.195	0.656	44.547
8	44.547	0.004	47.195

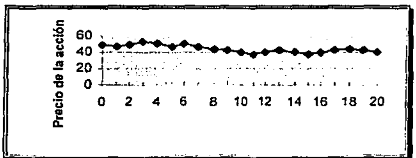
PERIODO t(semana)	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t	# ALEATORIO	PRECIO DE LA ACCIÓN EN EL PERIODO t+1
9	47.195	0.075	50.000
10	50.000	0.807	47.195
11	47.195	0.858	44.547
12	44.547	0.852	42.048
13	42.048	0.337	44.547
14	44.547	0.612	42.048
15	42.048	0.681	39.689
16	39.689	0.708	37.463
17	37.463	0.431	39.689
18	39.689	0.363	42.048
19	42.048	0.156	44.547
20	44.547		

Como se puede observar el precio de la acción resultante por la simulación es de \$44.547 al término de cinco meses.

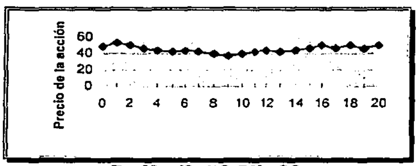
Por lo tanto el valor de la Opción de Venta dentro de cinco meses para esta simulación será de :

P2=Max[0, 50-44.547]= \$5.453

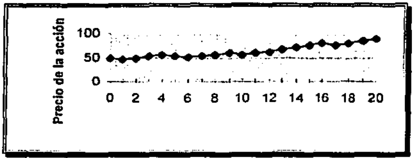
Las siguientes gráficas muestran los caminos que sigue el precio de la acción en diferentes simulaciones así como el valor de la Opción dentro de 5 meses.



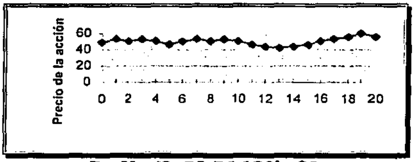
P3=Max[0, 50-39.689]= \$10.311



P4=Max[0, 50-50]= \$0



P5=Max[0, 50-89.06]= $0



P6=Max[0, 50-56.120]= $0

En la siguiente tabla se muestran los precios de las acciones así como los precios de las Opciones obtenidos con 30 simulaciones :

Simulación N	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T	Simulación N	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T
1	56.120	0	11	70.699	0
2	44.547	5.453	12	39.689	10.311
3	39.689	10.311	13	44.547	5.453
4	50	0	14	56.12	0
5	89.065	0	15	50	0
6	56.120	0	16	62.989	0
7	44.547	5.453	17	50	0
8	28.069	21.931	18	62.989	0
9	50	0	19	44.547	5.453
10	56.12	0	20	56.12	0

Simulación N	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T
21	50	0
22	125.93	0
23	44.547	5.453
24	56.12	0
25	62.989	0
26	70.699	0
27	28.069	21.931
28	56.12	0

Simulación N	Precio de la acción en el tiempo T	Precio de la Opción en el tiempo T
29	31.505	18.495
30	31.505	18.495

En la siguiente tabla se ilustra la manera en la cual se obtiene el valor de la Opción el día de hoy a partir de la estimación de el valor esperado en el precio de la Opción en el tiempo T.

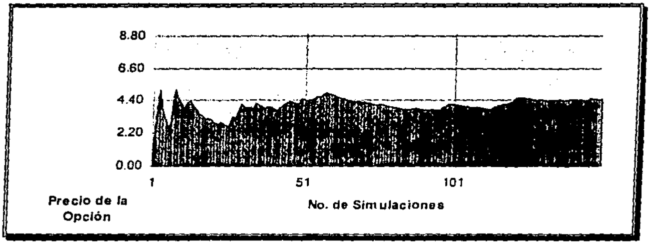
No. de Simulaciones i	Valor de la opción en el tiempo T	$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
1	0.00	0.00	0.00
2	5.45	2.73	2.62
3	10.31	5.25	5.04
4	0.00	3.94	3.78
5	0.00	3.15	3.02
6	0.00	2.63	2.52
7	5.45	3.03	2.91
8	21.93	5.39	5.17
9	0.00	4.79	4.60
10	0.00	4.31	4.14
11	0.00	3.92	3.76
12	10.31	4.45	4.27
13	5.45	4.53	4.35
14	0.00	4.21	4.04
15	0.00	3.93	3.77
16	0.00	3.68	3.53
17	0.00	3.47	3.32
18	0.00	3.27	3.14
19	5.45	3.39	3.25
20	0.00	3.22	3.09
21	0.00	3.07	2.94
22	0.00	2.93	2.81
23	5.46	3.04	2.91
24	0.00	2.91	2.79
25	0.00	2.79	2.68
26	0.00	2.69	2.58
27	21.93	3.40	3.26
28	0.00	3.28	3.14
29	18.50	3.80	3.65
30	18.50	4.29	4.12
31	0.00	4.15	3.98
32	0.00	4.02	3.86
33	5.45	4.07	3.90
34	0.00	3.95	3.79

No. de Simulaciones i	Valor de la opción en el tiempo T	$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
35	18.50	4.36	4.18
36	0.00	4.24	4.07
37	0.00	4.13	3.96
38	0.00	4.02	3.85
39	10.31	4.18	4.01
40	0.00	4.08	3.91
41	0.00	3.98	3.81
42	0.00	3.88	3.72
43	14.64	4.13	3.96
44	10.30	4.27	4.10
45	10.30	4.41	4.23
46	10.30	4.53	4.35
47	0.00	4.44	4.26
48	0.00	4.34	4.17
49	5.45	4.37	4.19
50	21.93	4.72	4.53
51	0.00	4.63	4.44
52	0.00	4.54	4.35
53	14.64	4.73	4.53
54	0.00	4.64	4.45
55	14.64	4.82	4.63
56	5.45	4.83	4.64
57	10.30	4.93	4.73
58	18.50	5.16	4.95
59	0.00	5.08	4.87
60	0.00	4.99	4.79
61	0.00	4.91	4.71
62	0.00	4.83	4.63
63	0.00	4.75	4.56
64	0.00	4.68	4.49
65	0.00	4.61	4.42
66	0.00	4.54	4.35
67	5.46	4.55	4.37
68	0.00	4.48	4.30
69	10.30	4.57	4.38
70	0.00	4.50	4.32
71	0.00	4.44	4.26

No. de Simulaciones i	Valor de la opción en el tiempo T	$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
72	0.00	4.38	4.20
73	5.45	4.39	4.21
74	0.00	4.33	4.16
75	0.00	4.28	4.10
76	10.30	4.35	4.18
77	0.00	4.30	4.12
78	0.00	4.24	4.07
79	0.00	4.19	4.02
80	0.00	4.14	3.97
81	0.00	4.09	3.92
82	0.00	4.04	3.87
83	0.00	3.99	3.82
84	0.00	3.94	3.78
85	5.45	3.96	3.80
86	5.45	3.98	3.81
87	10.31	4.05	3.88
88	0.00	4.00	3.84
89	0.00	3.96	3.80
90	5.45	3.97	3.81
91	0.00	3.93	3.77
92	0.00	3.89	3.73
93	10.31	3.96	3.80
94	0.00	3.91	3.75
95	0.00	3.87	3.72
96	5.45	3.89	3.73
97	21.93	4.08	3.91
98	14.64	4.18	4.01
99	14.64	4.29	4.11
100	10.31	4.35	4.17
101	0.00	4.31	4.13
102	0.00	4.26	4.09
103	0.00	4.22	4.05
104	0.00	4.18	4.01
105	0.00	4.14	3.97
106	0.00	4.10	3.94
107	5.45	4.12	3.95
108	5.45	4.13	3.96
109	0.00	4.09	3.92
110	0.00	4.05	3.89
111	0.00	4.02	3.85
112	0.00	3.98	3.82

No. de Simulaciones i	Valor de la opción en el tiempo T	$E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{N} Pi}{N}$	Precio actual de la Opción $P=e^{-rT}E(P_T)$
113	0.00	3.95	3.78
114	21.93	4.10	3.94
115	10.31	4.16	3.99
116	10.31	4.21	4.04
117	18.50	4.33	4.16
118	0.00	4.30	4.12
119	14.64	4.38	4.20
120	27.72	4.58	4.39
121	27.72	4.77	4.57
122	0.00	4.73	4.54
123	10.31	4.77	4.58
124	0.00	4.74	4.54
125	0.00	4.70	4.51
126	0.00	4.66	4.47
127	0.00	4.62	4.44
128	0.00	4.59	4.40
129	5.45	4.59	4.41
130	10.30	4.64	4.45
131	0.00	4.60	4.42
132	0.00	4.57	4.38
133	5.45	4.58	4.39
134	14.64	4.65	4.46
135	0.00	4.62	4.43
136	0.00	4.58	4.39
137	0.00	4.55	4.36
138	14.64	4.62	4.43
139	0.00	4.59	4.40
140	10.31	4.63	4.44
141	5.45	4.63	4.45
142	0.00	4.60	4.41
143	5.45	4.61	4.42
144	0.00	4.58	4.39
145	10.31	4.62	4.43
146	10.31	4.65	4.46
147	10.31	4.69	4.50
148	0.00	4.66	4.47
149	0.00	4.63	4.44
150	10.31	4.67	4.48

En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento de el precio de la Opción con respecto a el número de simulaciones hechas. Al igual que en la figura 5.13 puede observarse como a medida que aumenta el número de simulaciones los cambios en el valor de la Opción tienden a ser cada vez más pequeños.



En este caso resultó que el valor de la Opción de Venta fue de $4.48 que comparándolo con el valor obtenido mediante la fórmula de Black-Scholes de $4.08 resulta ser una buena aproximación para este valor.

Los cálculos para la simulación fueron elaborados en una Hoja de Cálculo Excel ver. 7 para Windows 95, la computadora utilizada fue una Acer con procesador 586 a 75 MHZ.

CONCLUSIONES

La aceptación que han tenido los productos derivados y en particular las Opciones, en los mercados financieros internacionales obedece al hecho de que estas son uno de los instrumentos de cobertura más versátiles. Las funciones de las Opciones van desde ser instrumentos netamente de cobertura de riesgos hasta ser entre otras cosas excelentes instrumentos de inversión.

Las empresas y los hombres de negocios están expuestos a constantes riesgos en sus inversiones, por ello la necesidad de implementar nuevas estrategias que permitan disminuir o en su caso eliminar el potencial de pérdidas inherentes a sus inversiones.

Gracias a los productos derivados y en particular a las Opciones, es posible transferir o disminuir estos riesgos aceptando solamente aquellos que las empresas e inversionistas estén dispuestos a afrontar.

Consideró que con el análisis y el desarrollo del modelo binomial, en este trabajo se dio respuesta a varias de las preguntas que se formulan cuando se habla de valuar opciones , por ejemplo ¿ Cuanto es lo que tiene que pagar el comprador de una Opción sobre una determinada acción? O ¿ Como cubrir la venta de las Opciones con la compra de un determinado número de acciones ?

Me gustaría señalar que el tema de la valuación de Opciones es bastante extenso y rico por lo que aún se puede desarrollar y decir mucho sobre el mismo ; basta mencionar todo el análisis que esta detrás del modelo de Black-Scholes para hacerse una idea de todo el campo de investigación que queda abierto sobre el tema.

En México desafortunadamente no se cuenta todavía con algún mercado organizado de Opciones y Futuros, sin embargo es importante señalar que se están haciendo muchos esfuerzos para que en un futuro, espero no muy lejano, se establezca el primer mercado organizado de productos derivados en México. Con ello se abriría la posibilidad de contar con los "nuevos" productos de cobertura de riesgos.

A medida que transcurran los años habrá sin duda un mayor número de instrumentos de cobertura e inversión y será imprescindible conocerlos y ponerlos en práctica para no estar en desventaja con los mercados financieros internacionales.

GLOSARIO

ARBITRAJE : Es la compra y la venta simultánea del mismo instrumento en diferentes mercados realizada para obtener pequeñas ganancias, en el mercado de Opciones y otros productos derivados, el término se aplica cuando se crea una estrategia que implica comprar un contrato que se considera está subvaluado, y vender otro considerado sobrevaluado de dos activos subyacentes relacionados, esperando obtener un beneficio positivo libre de riesgo sin que se medie inversión alguna.

BINOMIAL : Denominación de uno de los modelos matemáticos para evaluar el monto de las primas de las Opciones.

BLACK-SCHOLES :Denominación de uno de los modelos mas frecuentemente empleados para evaluar el monto de las primas de las Opciones, se trata de un modelo probabilistico, y su denominación se refiere a los apellidos de los matemáticos que lo desarrollaron.

CÁMARA DE COMPENSACIÓN : Es la institución encargada de realizar los cargos y abonos en las cuentas de los compradores y vendedores de Opciones.

COMPRADOR DE LA OPCIÓN : Es quien recibe los derechos que la Opción confiere, se le conoce como el tenedor de la Opción y solamente él tiene derecho a ejercer la Opción.

CONTRATO : Instrumento legal en el que se establecen las partes que se obligan, sinónimo de garantía, fianza que da una persona por otra.

Instrumento legal en el que se establecen los términos de garantías necesarios para operaciones entre intermediarios financieros.

DELTA : Tasa de cambio del precio de una Opción como resultado de cambios en el precio del valor subyacente.

DENTRO DE EL DINERO (In the money) : Se dice que una Opción de Compra esta dentro de el dinero si su precio de ejercicio esta por debajo del precio corriente de mercado del subyacente, se dice que una Opción de Venta esta dentro de el dinero si su precio de ejercicio esta por arriba del precio corriente de mercado del subyacente.

DIVIDENDOS : Monto de dinero que se reparte entre los accionistas de una empresa como resultado de las ganancias generadas.

EJERCICIO DE UNA OPCIÓN : Es la compra o la venta del activo subyacente por parte de el tenedor o comprador de la Opción al precio de ejercicio pactado en el contrato.

EXACTAMENTE EN EL DINERO (At the money) : Se dice que una Opción se encuentra exactamente en el dinero cuando el precio de ejercicio de la Opción es igual al precio corriente en el mercado de el valor subyacente.

FUERA DE EL DINERO (Out of the money) : Se dice que una Opción de Compra esta fuera de el dinero si su precio de ejercicio es mayor que el precio de mercado del subyacente, una Opción de Venta esta fuera de el dinero si su precio de ejercicio es menor que el precio de mercado del subyacente. Cuando una Opción está fuera de el dinero su valor intrínseco es igual a cero.

FECHA DE EJERCICIO : Es la fecha en que se ejerce una Opción.

FECHA DE VENCIMIENTO O EXPIRACIÓN : Es la fecha límite en que es posible hacer válido el contrato de Opción.

OPCIÓN : Contrato entre dos partes por el cual una de ellas adquiere sobre la otra el derecho, pero no la obligación, de comprarle o de venderle una cantidad determinada de un activo a un cierto precio y en una fecha futura.

OPCIÓN TIPO AMERICANA : Es una Opción que puede ser ejercida en una fecha antes de su vencimiento.

OPCIÓN TIPO EUROPEA : Es una Opción que solamente puede ser ejercida hasta su fecha de vencimiento.

OPCIÓN DE COMPRA : Es un contrato entre un comprador y un vendedor, con el cual el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar al vendedor un determinado valor, conocido como bien subyacente, a un precio determinado en el contrato en una fecha posterior. El vendedor de la Opción de Compra adquiere la obligación de entregar al comprador el valor amparado en el contrato, si éste ejerce la Opción, a cambio de ello, él recibe un pago conocido como prima.

OPCIÓN DE VENTA : Contrato entre un comprador y un vendedor con el cual el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de vender un valor específico, a un precio determinado en una fecha posterior. El vendedor de la Opción de venta adquiere la obligación de tomar el bien especificado en el contrato al precio acordado, en caso de que el comprador ejerza la Opción.

POSICIÓN CORTA SOBRE UNA OPCIÓN : Posición que mantiene el vendedor de una Opción de cualquier tipo.

POSICIÓN LARGA SOBRE UNA OPCIÓN : Posición que mantiene el comprador de una Opción de cualquier tipo.

PRECIO DE EJERCICIO : Precio al cual se va a vender o a comprar el valor subyacente, en caso de que la Opción sea ejercida.

PRIMA : Precio de una Opción, es la cantidad de dinero que un comprador de una Opción, de Compra o de Venta, paga por adquirir el derecho que esta le confiere.

PRODUCTO DERIVADO : Instrumento (título o contrato), cuyo precio o valor depende del precio o cotización de otro instrumento empleado como valor de referencia. Las Opciones son un tipo de producto derivado.

SUBYACENTE : Es el título, instrumento o valor empleado como referencia en el contrato. Pueden ser valores subyacentes las acciones, los índices, bienes físicos etc.

VALOR EN EL TIEMPO : Se define como la diferencia entre el valor teórico de una Opción y su valor intrínseco. Siempre va a ser mayor o igual que cero. Los factores que influyen en su determinación son básicamente los siguientes tres : el plazo de vencimiento de la Opción, la diferencia entre el precio del bien subyacente y el precio de ejercicio de la Opción y la volatilidad del bien subyacente.

VALOR INTRÍNSECO : Es el precio de mercado del subyacente menos el precio de ejercicio de la Opción. El valor intrínseco no puede ser menor que cero. Representa el beneficio inmediato que el comprador de la Opción puede obtener a través del ejercicio de la misma.

VALOR TEÓRICO : Es el valor de una Opción generado por un modelo matemático asumiendo ciertos supuestos a priori sobre los términos de la Opción, las características del subyacente y de la tasa de interés prevaleciente en el mercado. Se determina considerando una serie de parámetros que desde un punto de vista teórico influyen de manera decisiva en el valor de la Opción.

VIGENCIA : Es el período que va desde la fecha de emisión a la fecha de vencimiento. En este período la Opción es susceptible de negociarse o de ejercerse si es de tipo americano.

VOLATILIDAD : Es el grado con el cual el precio del subyacente tiende a fluctuar a través del tiempo.

VOLATILIDAD IMPLÍCITA : Es el valor de la volatilidad que los compradores y vendedores de una Opción aceptan cuando el precio de una Opción esta determinado. Es el valor de la volatilidad que iguala el precio teórico de la Opción con su precio de mercado.

BIBLIOGRAFÍA

Options Markets
Cox John C.
Rubinstein Mark
Editorial Prentice Hall. 1985.

Options, Futures and Other Derivative Securities
Hull John C.
Editorial Prentice Hall. 1989.

Introduction to Futures and Options Markets.
Hull John C.
Segunda edición. Editorial Prentice Hall. 1995.

Futuros y Opciones Financieras una introducción.
Díaz Tinoco Jaime
Hernández Trillo Fausto
Editorial Limusa. 1996.

Option Pricing
Jarrow Robert A.
Editorial Irwin. 1983

Recent Innovations in International Banking.
Bank for International Settlements. 1986.

Introduction au Calcul Stochastique Applique a la Finance
Lamberton Damien
Lapeyre Bernard
Editorial Ellipses.

Introduction to the Theory of Statistics .
Mood Alexander et al.
Tercera edición.Editorial McGraw-Hill. 1974.