



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

003845
71-

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LOS VOLANTINES: SISTEMAS DINAMICOS
ASOCIADOS AL PROBLEMA DE LA FLOTACION
DE LOS CUERPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

DEBORAH OLIVEROS BRANIFF

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT
DR. JAVIER BRACHO CARPIZO



MEXICO, D. F.

1997.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

"Los Volantines: Sistemas dinámicos asociados al problema de la flotación de los cuerpos"

M. en C. Déborah Oliveros Braniff

Resumen

El problema de la flotación de los cuerpos en equilibrio, es un problema que sigue abierto desde hace muchos años: A principios de siglo (1921) comenzó a estudiarse la versión 2-dimensional del problema que se plantea de la siguiente manera:

" Si una figura de densidad uniforme, tiene la propiedad de flotar en equilibrio, en toda posición , ¿esta figura es necesariamente un círculo?"

Para densidad un medio, este problema, está totalmente solucionado y se probó que la conjetura es falsa. Tratando de saber algo más de este problema en otras densidades encontramos un sistema dinámico al que hemos llamado Volantín o andadera de n -sillas, intuitivamente este se puede ver como n barras rígidas, acopladas cíclicamente, que se mueven de tal manera que la velocidad de sus puntos medios es paralela a las barras mismas. Esta punto de vista además de solucionar el problema original, es en sí mismo interesante.

En la profundización del estudio de los volantines se encontraron invariantes como el área y el centro de masa, se desarrollaron las ecuaciones que los determinan por completo y se caracterizaron las condiciones iniciales. En los casos $n = 3, 4$ se probó que la conjetura original en la densidad correspondiente es cierta. En el caso particular $n = 5$ se estudió el espacio fase de los pentágonos desde el punto de vista topológico, se encontraron y estudiaron las posibles orbitas periódicas, lo que nos llevó a encontrar todos los volantines cerrados que existen y al mismo tiempo concluir que la conjetura original para la correspondiente densidad es cierta.

**“Los Volantines”: Dynamical system
associated to the floating body problem.**

M. en C. Déborah Oliveros Braniff.

Abstract

The problem of bodies floating in equilibrium is one that has been open for many years. At the beginning of the century (1921) the study of the 2-dimensional version of the problem was started and this can be stated as follows:

If a plane figure of uniform density has the property that it floats in equilibrium in every position, is the figure necessarily a circle?

For density of $1/2$, the problem has been completely solved, and the conjecture has been shown to be false.

In trying to learn more about this problem for other densities, we found a dynamical system that we called “Volantín”, or Carrousel whit n -Chairs. Intuitively this can be regarded as n -rigid bar coupled cyclically which move, in such a way that the velocity of the middle points of the bars always parallel to the bars.

The main goal of this thesis is the study of the “volantines”, which are interesting by themselves and solve the original problem.

Going deeper in the study of the “volantines”, we found invariants like the area and the mass center and we developed equations that determine them completely and we characterized the initial conditions. In the case $n = 3, 4$ and particularly in the case $n = 5$ it was shown that the original conjecture is true.

A Armando por su infinito amor. . . .

A Beatriz Braniff y Arturo Oliveros

Agradecimientos

Quiero agradecer muy profundamente a Luis Montejano no sólo la dirección de esta tesis y el haberme enseñado esa forma tan especial de ver las matemáticas, si no también la maravillosa oportunidad de ser su amiga, su vitalidad, las largas discusiones de la vida, de las matemáticas y por supuesto su gran apoyo.

Agradezco muy especialmente al Roli su indispensable empuje para la dirección de esta tesis así como también, el calor humano que de él he recibido. A Mónica Clapp, mi segunda madre, por sus innumerables consejos y su infinito apoyo.

Me es indispensable también agradecerle a Francisco Larrión su gran ayuda para la elaboración del "Cinito", a Federico Sánchez, Alberto Verjovsky, Pepe Seade y por supuesto a Bernardo Llano por sus sabios consejos.

Me resulta imposible mencionar a todas las personas que directa o indirectamente han influido en este proceso que hoy termina, gracias pues a mis amigos que finalmente han llenado mi vida.

A Gaby junto con su pequeño Julián que después de tantos años e innumerables encuentros y desencuentros hemos podido descubrir que somos grandes amigas.

A mi Coquito Rita porque ella sabe lo bonito que es la vida y por todos los buenos momentos de estos últimos años.

A mis padres, Beatriz Braniff y Arturo Oliveros los más maravillosos de este mundo, cada uno a su manera y que finalmente juntos, soy quien soy.

A mis hermanos, mi Chaly y José Arcadio.

Quiero agradecer a Armando, mi compañero, por su gran amor, por su apoyo en todo momento, por llenar mi vida de dulzura, de esperanza, por hacerme simplemente feliz.

A la Dersu y a la Meche.

Finalmente quiero agradecer al Instituto de Matemáticas de la UNAM y a DGAPA por todo el apoyo que de ellos he recibido en todos estos años que he sido becaria.

Índice

Introducción	1
Capítulo 1 Los Volantines	3
Capítulo 2 Los Teoremas de Auerbach y las curvas α -Zindler	8
Capítulo 3 Figuras que flotan en equilibrio	15
Capítulo 4 Algunas propiedades intrínsecas de los Volantines	20
Capítulo 5 Las Ecuaciones Diferenciales	25
Capítulo 6 El espacio de los pentágonos	30
Capítulo 7 El Volantín de 5 sillas	50

Capítulo 8	
La Teoría de los Carritos	59
Apéndice	66
Bibliografía	80

Introducción

En los años 30, en el Libro Escocés (Scottish Book [Mau]) Ulam planteó el siguiente problema, que corresponde al problema 19 de este libro y que dice así:

“Si un sólido de densidad uniforme tiene la propiedad de flotar en equilibrio- sin voltearse- en cualquier posición en la que se deje, ¿deberá ser este necesariamente una esfera?”

En 1938 H. Auerbach estudió la versión bidimensional de este problema que se refiere a figuras y no a sólidos, es decir físicamente podemos pensar en un cilindro de densidad uniforme y suponer que mientras su eje permanezca paralelo a la superficie del agua, este flote en equilibrio en cualquier posición de acuerdo con la Ley de Arquímedes. Entonces la pregunta sería: ¿Es este cilindro necesariamente un cilindro circular?. Auerbach probó que esta conjetura es falsa en el caso en el que la densidad es $1/2$, y dio como contraejemplos las llamadas figuras de Zindler.

En el transcurso de su trabajo, Auerbach dejó a la luz propiedades que nos permiten deducir la definición del sistema dinámico al que hemos llamado volatín de n sillas y el cual será nuestro objetivo principal de estudio en esta tesis.

El estudio de los volatines es en sí mismo muy interesante y nos proporciona además más respuestas al problema original (caso bidimensional). Intuitivamente, un volatín puede pensarse como un n barras rígidas acopladas cíclicamente, que se mueven de tal manera que la velocidad de sus puntos medios es paralela a las barras mismas.

En el Capítulo 1 se definen formalmente los volatines y se prueban algunas propiedades básicas de ellos, además de dar algunos ejemplos importantes.

En los dos capítulos siguientes, se retoma el trabajo de Auerbach y se relacionan los volatines con el problema de la flotación.

En el Capítulo 4 se prueban dos propiedades muy importantes acerca del área y del centro de masa que nos permiten establecer las condiciones iniciales

que requiere todo volantín, además de permitirnos concluir entre otras cosas que para "densidades de perímetro" $1/3$ y $1/4$ la conjetura original es cierta.

En el capítulo 5 se establecen las ecuaciones diferenciales que rigen a los volantines y se prueba que estas los determinan por completo.

Para adentrarse en el caso $n = 5$, fue fundamental estudiar en el Capítulo 6, el espacio de los pentágonos, que a su vez, nos ayudará a determinar en el capítulo siguiente, las curvas integrales del campo vectorial definido por el sistema de ecuaciones diferenciales formuladas en el Capítulo 5. En el Capítulo 7 se analiza además, detalladamente, las órbitas periódicas que aparecen en nuestro sistema.

Finalmente, en el Capítulo 8, con toda la información obtenida hasta el momento se plantea la teoría de los carritos que clasifica todos los volantines cerrados de 5 sillas y prueba al mismo tiempo, que la conjetura original para la densidad correspondiente es cierta.

Capítulo 1

Los Volantines

Definición 1: Un *volantín simple* es un sistema que consiste de dos curvas diferenciables $\{\beta_1(t), \beta_2(t)\}$ en \mathbb{R}^2 que satisfacen las siguientes propiedades, para toda t en \mathbb{R} :

i) La longitud del intervalo $\beta_2(t) - \beta_1(t)$, dada por $\|\beta_2(t) - \beta_1(t)\|$, es una constante distinta de cero.

ii) La curva de los puntos medios $m(t) = \frac{\beta_1(t) + \beta_2(t)}{2}$ tiene velocidad $m'(t)$ paralela a $\beta_2(t) - \beta_1(t)$.

Definición 2: Un *volantín de n sillas* es un sistema que consiste de n curvas $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)\}$ tales que $\{\beta_i(t), \beta_{i+1}(t)\}$ es un volantín simple para toda $i = 1, \dots, n$, donde $\beta_{n+1}(t) = \beta_1(t)$.

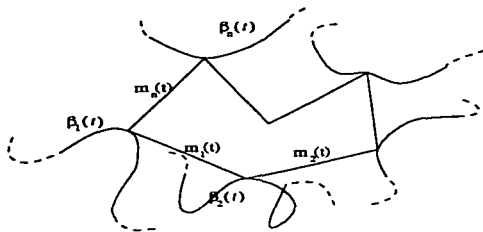


Figura 1

Lema 1: (Primera ley de los volantines). Sean $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ curvas diferenciables. Entonces el sistema $\{\beta_1(t), \beta_2(t)\}$ es un volantín simple si y sólo si $\beta_2'(t)$ es una reflexión de $\beta_1'(t)$ a través de $\beta_2(t) - \beta_1(t)$.

Demostración: La condición i) de un volantín simple es equivalente a que $\langle \beta_2(t) - \beta_1(t), \beta_2(t) - \beta_1(t) \rangle$ sea constante. Entonces si derivamos, obtenemos que a su vez ésta, es equivalente a que

$$\langle \beta_2'(t), \beta_2(t) - \beta_1(t) \rangle = \langle \beta_1'(t), \beta_2(t) - \beta_1(t) \rangle.$$

Esta condición, unida a la condición ii) es equivalente a que $\beta_1'(t) + \beta_2'(t)$ sea paralela a $\beta_2(t) - \beta_1(t)$, de aquí que podamos inferir que $\beta_1'(t) + \beta_2'(t)$ es perpendicular a $\beta_1'(t) - \beta_2'(t)$, lo cual deduce el Lema. ■

Obsérvese que de la demostración del lema anterior, también se puede deducir que $|\beta_1'(t)| = |\beta_2'(t)|$, de manera que podemos suponer de ahora en adelante que las curvas $\beta_i(t)$ están parametrizadas por longitud de arco. Para facilitar los cálculos supondremos también, de ahora en adelante, que la distancia de $\beta_{i+1}(t)$ a $\beta_i(t)$ es siempre 2.

Consideremos algunos ejemplos.

Ejemplos:

I.- Sea γ una curva diferenciable, y sea $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|p - \gamma(0)\| = 2$, usando métodos de ecuaciones diferenciales ordinarias, es sencillo probar que existe una única curva $\beta(t)$ tal que $\beta(0) = p$ de tal manera que $\{\gamma, \beta\}$ es un volantín simple.



Figura 2

II.-Las curvas de Zindler :

Sea Ψ una figura de ancho constante 2, para cada diámetro I de Ψ , dibuje un intervalo I' de longitud 2, ortogonal a I , de tal manera que los puntos medios de I y de I' coincidan (ver figura 3). Entonces, mientras I toma todas las posibles direcciones, los vertices de I' dibujan una nueva figura. A este tipo de figuras las llamaremos *figuras de Zindler*. Si permitimos en nuestra definición de volantín, que las curvas β_i puedan ser diferenciables casi dondequiera, entonces las curvas de Zindler Ψ son volantines simples.

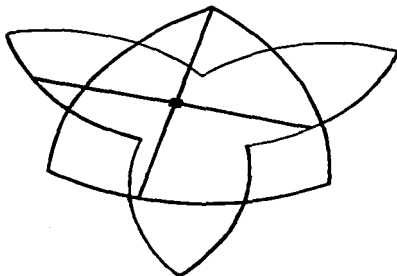


Figura 3

Demostración: Es posible parametrizar la frontera de una figura convexa Ψ [Mon] por medio de una función $x(\theta) = p(\theta)u(\theta) + p'(\theta)u'(\theta)$, donde $p(\theta)$ y su derivada son funciones diferenciables casi dondequiera, y

$$u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

es el vector unitario en la dirección $\theta \in [0, 2\pi)$.

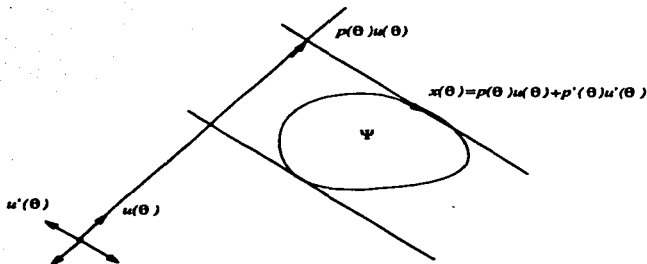


Figura 4

Tomemos pues, Ψ una figura de ancho constante, entonces el punto medio del diámetro $I(\theta)$, que hace un ángulo θ con el eje de las x 's, puede parametrizarse como $m(I(\theta)) := x(\theta) - u(\theta)$. De manera que la derivada $m'(I(\theta)) = x'(\theta) - u'(\theta)$ es perpendicular a $I(\theta)$ en toda dirección θ , lo que implica inmediatamente que la derivada del punto medio de $I'(\theta)$, es paralela a $I'(\theta)$ en toda dirección θ situación que demuestra ii) de la definición de volantín simple. i) Se sigue de manera inmediata de la construcción. ■

Estas figuras de Zindler, tienen varias propiedades que serán después muy importantes. Una de ellas (y fue así como las descubrió Zindler en 1921) (figura 5) es la de que todas las cuerdas que dividen el área de estas figuras a la mitad, tienen la misma longitud y cortan el perímetro también a la mitad. Siguiendo el proceso inverso de la construcción anterior, las figuras de Zindler definidas de esta manera, dan lugar a una figura de ancho constante. Luego entonces, las figuras de Zindler pueden considerarse duales en este sentido de las figuras de ancho constante. Más adelante probaremos que ambas definiciones de curvas de Zindler son equivalentes.

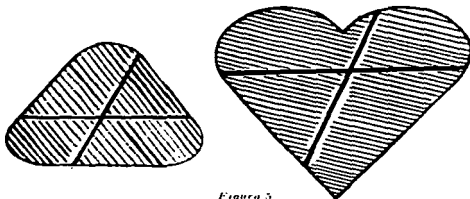


Figura 5

Definición 3: Si $\{J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)\}$ es un volantín de n sillars donde todas sus curvas son cerradas y la traza (es decir el conjunto de puntos $J_i(t)$) para toda t de todas ellas coincide, entonces llamaremos a este, *volantín de Zindler*

III.-El círculo es un volantín de Zindler de n sillars para toda n pues podemos inscribir en él, un n -ágono equilátero regular de tal manera que cada uno de sus vértices dibuje al círculo, y al mismo tiempo que el punto medio de sus aristas dibuje otro círculo concéntrico al original, lo cual hace notar que el punto medio viaja paralelo a ellas.

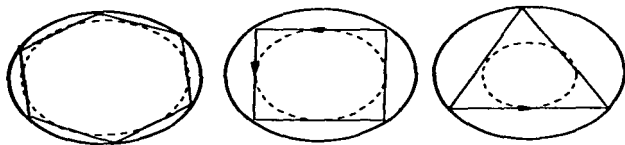


Figura 6

Capítulo 2

Los Teoremas de Auerbach y las curvas α -Zindler

Sistemas de Cuerdas:

Definición 4: Sea Φ una figura plana (región acotada por una curva cerrada). Un sistema de cuerdas $\{C(p)\}$ es una selección continua que a cada punto p en la frontera de Φ le asocia una cuerda $C(p)$ de Φ (segmento de recta con extremos en la frontera de la figura).

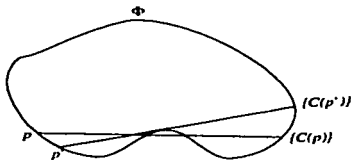


Figura 1

De manera natural podemos pensar en tres clases de sistemas de cuerdas:

- 1.- El sistema de cuerdas $\{C_1(p)\}$ que dividen al área de Φ en una razón dada β .
- 2.- El sistema de cuerdas $\{C_2(p)\}$ que dividen al perímetro de Φ en una razón dada α .
- 3.- El sistema de cuerdas $\{C_3(p)\}$ que tienen longitud constante.

En general el sistema de cuerdas $\{C_1(p)\}$ no necesariamente esta bien definido, pues la cuerda puede no estar completamente contenida en el interior de Φ , de manera que la división del área en una razón dada podría no tener sentido.

Dado un sistema de cuerdas $\{C(p)\}$ existe, de forma natural, una función $\varphi : \partial\Phi \rightarrow \mathbf{S}^1$ que asocia a cada punto p de la frontera de Φ , el vector $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ donde θ es el ángulo que forma la cuerda $C(p)$ con el eje de las x 's. Pensemos en la frontera de Φ como una curva orientada. Si la función φ es estrictamente creciente, entonces ésta, es un homeomorfismo, en cuyo caso el sistema de cuerdas $\{C(p)\}$ se puede pensar como un sistema de cuerdas $\{C(\theta)\}$ que dependa del ángulo θ . Denotaremos por $x(\theta), y(\theta)$ a los puntos en la frontera de Φ que son extremos de $C(\theta)$ y por $m(\theta)$ al punto medio de dicha cuerda. Si la frontera de Φ es una curva diferenciable casi dondequiera, es fácil ver que $x'(\theta), y'(\theta)$ y $m'(\theta)$ existen casi dondequiera.

Sea Φ una figura con área \mathcal{A} y sea $\{C(p)\}$ un sistema de cuerdas interiores. De ahora en adelante, denotaremos por $\mathcal{R}(p)$ a la región de Φ que queda a la derecha de $C(p)$, así como a $g(p)$ su centro de masa y $A(p)$ su área. Cuando el sistema de cuerdas $\{C(\theta)\}$ esté parametrizado por θ , denotaremos por $\mathcal{R}(\theta), g(\theta)$ y $A(\theta)$ las respectivas funciones.

Sea $\{C(\theta)\}$ un sistema de cuerdas parametrizado por θ , con θ un ángulo entre 0 y 2π y sea $\eta(\theta, h)$ el punto de intersección de la cuerda $C(\theta)$ con la cuerda $C(\theta + h)$. Se puede verificar que el punto $\eta(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \eta(\theta, h)$ existe. Consideremos el siguiente lema:

Lema 2: *Sea $\{C(\theta)\}$ un sistema de cuerdas interiores parametrizado por ángulos. Entonces, la función $A(\theta)$ es una función diferenciable. Más aún, para cada θ ,*

$$m(\theta) - \eta(\theta) = \frac{2A'(\theta)}{|C'(\theta)|} u(\theta).$$

Demostración: Sea θ un número fijo entre 0 y 2π y sea $l(\theta, h)$ la línea orientada que pasa a través del punto $\eta(\theta)$ y que es paralela a $C(\theta + h)$. Consideremos al área orientada $B(\theta, h)$ de la región en $\mathcal{R}(\theta)$ comprendida entre la cuerda $C(\theta)$ y la cuerda $l(\theta, h)$; al área orientada $D(\theta, h)$ de la

región en $\mathcal{R}(\theta)$ comprendida entre las cuerdas $l(\theta, h)$, $C(\theta)$ y $C(\theta + h)$; al área orientada $E(\theta, h)$ de la región en $\mathcal{R}(\theta + h)$ comprendida entre las rectas $C(\theta)$ y $C(\theta + h)$ y finalmente al área $F(\theta, h)$ de la región que se encuentra en el complemento de $\mathcal{R}(\theta + h)$ y en el complemento de $\mathcal{R}(\theta)$ comprendida entre las rectas $C(\theta + h)$, $C(\theta)$ y $l(\theta, h)$ (Figura 2).

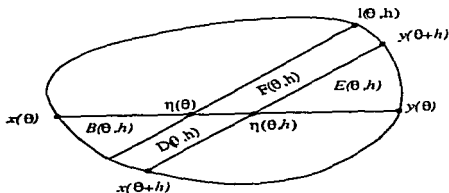


Figura 2

Por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(\theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\theta + h) - \mathcal{A}(\theta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(\theta, h) - (B(\theta, h) + D(\theta, h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(F(\theta, h) + E(\theta, h)) - B(\theta, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(\theta, h) + F(\theta, h)}{h}. \end{aligned}$$

Como Φ es acotada, existen constantes K_1, K_2 , para h suficientemente pequeña, tales que

$$\begin{aligned} K_1 | \eta(\theta) - \eta(\theta, h) | \leq \epsilon n(h) &\leq D(\theta, h) + F(\theta, h) \\ &\leq K_2 | \eta(\theta) - \eta(\theta, h) | \leq \epsilon n(h). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$A'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(F(\theta, h) + E(\theta, h)) - B(\theta, h)}{h}.$$

Ahora, para toda $\tau \in [\theta, \theta + h] \cup [\theta + \pi, \theta + \pi + h]$ sea $r(\tau)$ la distancia de $\eta(\theta)$ a la frontera de Φ , entonces

$$2((F(\theta, h) + E(\theta, h)) - B(\theta, h)) = \int_{\theta}^{\theta+h} r^2(\tau) d\tau - \int_{\theta+\pi}^{\theta+\pi+h} r^2(\tau) d\tau.$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 2 \lim_{h \rightarrow 0} ((F(\theta, h) + E(\theta, h)) - B(\theta, h)) &= r^2(\theta) - r^2(\theta + \pi) \\ &= |y(\theta) - \eta(\theta)|^2 - |\eta(\theta) - x(\theta)|^2. \end{aligned}$$

Pero

$$|y(\theta) - \eta(\theta)|^2 = (|m(\theta) - y(\theta)| - |m(\theta) - \eta(\theta)|)^2$$

y

$$|x(\theta) - \eta(\theta)|^2 = (|m(\theta) - x(\theta)| + |m(\theta) - \eta(\theta)|)^2,$$

por lo tanto

$$|y(\theta) - \eta(\theta)|^2 - |\eta(\theta) - x(\theta)|^2 = |m(\theta) - \eta(\theta)| |C(\theta)|,$$

lo que nos permite concluir el lema. ■

Usando las mismas ideas de la demostración anterior, se puede probar el siguiente hecho que nos será de utilidad más adelante. Si $\eta(\theta) = m(\theta)$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(\theta, h) + B(\theta, h)}{h} = \frac{|C(\theta)|^2}{8}. \quad (1)$$

Teorema 1: (Auerbach [Au]) Sea $\{C(\theta)\}$ un sistema de cuerdas parametrizado por ángulos. El área $A(\theta)$, es constante si y sólo si las cuerdas $C(\theta)$ son tangentes a la curva descrita por los puntos medios de las cuerdas $C(\theta)$.

Demostración: Sean $P = x(\theta)$, $Q = x(\theta + h)$, $R = y(\theta)$, $S = y(\theta + h)$ y $T = \eta(\theta, h)$ como se definió anteriormente. Entonces.

$$A'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{área de } TRS}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{área de } PQT}{h},$$

pues si V es la intersección de la línea soporte de Φ con en el punto P , entonces el límite, cuando h tiende a cero, del área del triángulo PQV tiende a cero.

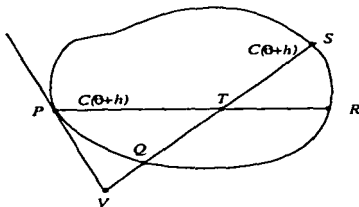


Figura 3

Sean $x'(\theta) = a(\theta)u(\theta) + b(\theta)u'(\theta)$ e $y'(\theta) = c(\theta)u(\theta) + d(\theta)u'(\theta)$ de tal forma que $2m'(\theta) = (a(\theta) + c(\theta))u(\theta) + (b(\theta) + d(\theta))u'(\theta)$. Entonces

$$2A'(\theta) = \frac{b(\theta) |T - P| - d(\theta) |R - T|}{h}.$$

Supongamos ahora que $A(\theta)$ es constante, entonces el área del triángulo TRS y del triángulo PQT son iguales y por el lema 3, el punto T tiende a el punto medio del intervalo RP de manera que $|T - P| = |R - T|$ lo cual implica que $b(\theta) = -d(\theta)$, y entonces que $m'(\theta)$ es paralela a $u(\theta)$ y por lo tanto a $C(\theta)$.

Por otro lado, si $m'(\theta)$ es paralela a $u(\theta)$, entonces $d(\theta) = -b(\theta)$, lo cual implica que el punto de intersección de la línea que pasa por los puntos $x(\theta) + hx'(\theta)$ y $y(\theta) + hy'(\theta)$ y por la línea $C(\theta)$ tiende al punto medio de $C(\theta)$ cuando h tiende a cero. Entonces el punto T tiende al punto medio, y por el lema 3, $A(\theta)$ es constante. ■

Observe que si el sistema de cuerdas es del tipo 1, que dividen al área en una razón dada, entonces el sistema de cuerdas es parametrizable por ángulos.

Teorema 2: (Auerbach [Au]) Sea $\{C(p)\}$ un sistema de cuerdas no concurrente, en donde cada una de las cuerdas $C(p)$ está totalmente contenida en el interior de la figura Φ para todo p . Si el sistema es de cualquiera dos de los tipos $\{C_i(p)\}$ para $i = 1, 2, 3$, entonces, $\{C(p)\}$ es también del tercer tipo.

Demostración: Supongamos que tenemos un sistema de cuerdas $\{C(p)\}$ del tipo 1, es decir, de cuerdas que dividen al área en una razón dada. Para empezar, podemos parametrizar nuestro sistema de cuerdas por un ángulo θ y además, de acuerdo con el teorema anterior, esta condición es equivalente a que el vector $m'(\theta)$ fuera paralelo a $C(\theta)$; es decir que $y'(\theta) + x'(\theta)$ es paralelo a $y(\theta) - x(\theta)$. Por otro lado si el sistema es del tipo 2, es decir de cuerdas que dividen el perímetro en una razón dada, lo que implica que $|x'(\theta)| = |y'(\theta)|$ y que a su vez es equivalente a que

$$(y'(\theta) + x'(\theta), y'(\theta) - x'(\theta)) = 0.$$

Por último si el sistema de cuerdas es del tipo 3, en donde las cuerdas tienen longitud constante y si además es parametrizable por ángulo, tenemos que esto es equivalente a que $|y'(\theta) - x'(\theta)| = 0$ es decir que

$$(y(\theta) - x(\theta), y'(\theta) - x'(\theta)) = 0.$$

Luego si se tiene un sistema de cuerdas del tipo 1 y 2, entonces sabemos que $y'(\theta) + x'(\theta)$ es paralelo a $y(\theta) - x(\theta)$ y que $y'(\theta) + x'(\theta)$ es perpendicular a $y'(\theta) - x'(\theta)$ lo que implica que es del tipo 3. De forma análoga, las otras implicaciones se obtienen inmediatamente. ■

Definición 5: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Diremos que una figura Φ es una curva α -Zindler, si el sistema de cuerdas $\{C_2(p)\}$ que divide al perímetro en una razón dada α es también del tipo $\{C_3(p)\}$ de cuerdas de longitudes fijas.

Esto implica que las curvas clásicas de Zindler son curvas $\frac{1}{2}$ -Zindler.

El siguiente teorema relaciona las curvas α -Zindler con los volantines de Zindler y prueba en particular que las 2 definiciones de curvas de Zindler son equivalentes.

Teorema 3: $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es un Volantín de Zindler con n sillas si y sólo si existe alguna $\alpha = \frac{q}{n}$ ($\frac{q}{n}$ fracción irreducible) para alguna $q \in \mathbb{Z}$, $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$ de tal forma que $\gamma = \beta_i(t)$, con $i = 1, \dots, n$ es una curva α -Zindler.

Demostración: Supongamos primero que γ es una curva α -Zindler con $\alpha = \frac{1}{n}$ y sea $\{C_2(p)\}$ su correspondiente sistema de cuerdas. Sea p_0 un punto arbitrario en γ , entonces, definamos como $J_1(0) = p_0$, como $J_2(0)$ el punto en γ que es extremo final de la cuerda $C_2(p_0)$, y de manera análoga $J_i(0)$ será el extremo final en γ de la cuerda $C_2(J_{i-1}(0))$. Por definición de curva α -Zindler las curvas J_i resultan ser un volantín. En general α indicará el tipo de n -ángulo al que nos referimos.

Supongamos que $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ es un Volantín de Zindler, es decir que todas las curvas β_i son congruentes, cerradas y que la traza de todas ellas coincide, de esta manera todas estas curvas dan lugar a una figura que tiene un sistema de cuerdas asociado del tipo 3. Por definición de volantín, y por el Lema 1, sabemos que $|\beta_1'(t)| = |\beta_2'(t)|$, lo que implica de forma inmediata que el sistema de cuerdas asociado es también del tipo 2. ■

Capítulo 3

Figuras que flotan en equilibrio.

Consideremos la versión bidimensional del problema de los cuerpos que flotan en equilibrio:

“Si una figura plana de densidad uniforme β tiene la propiedad de flotar en equilibrio en el agua en toda posición dada. ¿deberá ser este un círculo?”

En otras palabras, tomemos Φ una figura con área \mathcal{A} , y con centro de masa \mathcal{G} . La parte de Φ que queda sumergida en el agua, tiene área $\beta\mathcal{A}$ en cualquier posición, de manera que “si movemos el agua y dejamos fija la figura” - en otras palabras si traducimos esto a sistemas de cuerdas - obtenemos un sistema de cuerdas $\{C_1(\theta)\}$ que dividen al área de Φ en una razón fija β . Si pedimos además que la figura Φ flote en equilibrio en una posición, θ , según la ley de Arquímedes, querrá decir que la línea que pasa por el centro de masa \mathcal{G} y por $g(\theta)$ debe ser ortogonal a la línea del “agua” $C(\theta)$.

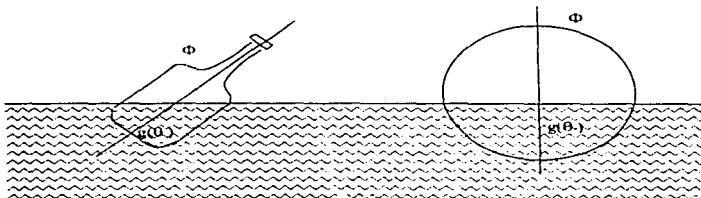


Figura 1

Antes de continuar, es necesario hacer algunas reflexiones importantes acerca de las propiedades de los centros de masa.

Supóngase que Φ es una figura que es unión de dos regiones ψ y χ , cuyos interiores no se intersectan. Denotemos por A, B y C los centros de masa, de Φ, ψ y χ respectivamente. Es bien conocido, que el punto A está en el intervalo $[B, C]$ y que se cumple la siguiente proporción:

$$\frac{|B - A|}{|C - A|} = \frac{\text{área de } \chi}{\text{área de } \psi}.$$

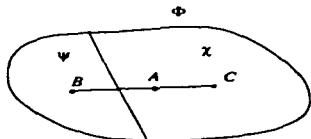


Figura 2

Sea Φ una figura, decimos que ésta tiene densidad uniforme β si al flotar en el agua las líneas del nivel del agua dan lugar a un sistema de cuerdas $\{C_i(\theta)\}$ que divide el área en la razón β .

Teorema 4: Sea Φ una figura de densidad uniforme β y sea $\{C_i(\theta)\}$ su respectivo sistema de cuerdas que divide el área de Φ en la razón β . Entonces, la curva de centros de masa $g(\theta)$ es diferenciable. Más aún,

$$g'(\theta) = \frac{|C_i(\theta)|^3}{12\beta A} u(\theta).$$

Es decir, la tangente $g'(\theta)$ en θ es paralela a la cuerda $C_i(\theta)$ y su longitud depende sólo de la longitud de la cuerda.

Demostración: Consideremos las regiones $S(\theta+h)$ y $T(\theta+h)$ de Φ comprendidas entre las cuerdas $C_1(\theta)$ y $C_1(\theta+h)$ (figura 3) y sean $\rho(\theta+h)$ y $\tau(\theta+h)$, sus respectivos centros de masa.

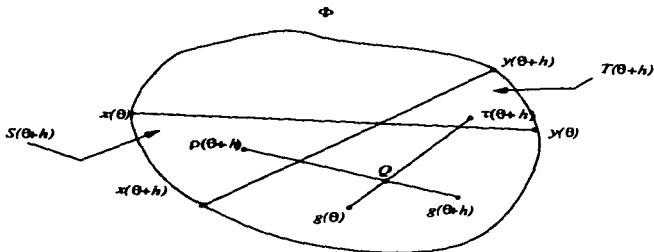


Figura 3

Sea Q , el centro de masa de las región $\mathcal{R}(\theta) \cup \mathcal{R}(\theta+h)$, entonces sabemos que el punto Q está en los intervalos $[g(\theta+h), \rho(\theta+h)]$ y $[g(\theta), \tau(\theta+h)]$. Como el área de $\mathcal{R}(\theta)$ y el área de $\mathcal{R}(\theta+h)$ son iguales a $\beta\mathcal{A}$, tenemos que al área de $S(\theta+h)$ es igual a el área de $T(\theta+h)$ y por lo tanto, por semejanza de triángulos

$$\begin{aligned} \frac{\text{área de } T(\theta+h)}{\beta\mathcal{A}} &= \frac{|g(\theta) - Q|}{|Q - \tau(\theta+h)|} = \frac{|g(\theta+h) - Q|}{|Q - \rho(\theta+h)|} \\ &= \frac{|g(\theta+h) - g(\theta)|}{|\tau(\theta+h) - \rho(\theta+h)|}. \end{aligned}$$

De tal forma que:

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\theta+h) - g(\theta)}{h} \\ &= \frac{1}{\beta\mathcal{A}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{área de } T(\theta+h)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} |\tau(\theta+h) - \rho(\theta+h)|. \end{aligned}$$

Entonces, usando la fórmula del centro de masa de un triángulo isósceles, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\tau(\theta + h) - \rho(\theta + h)| = \frac{2|C_1(\theta)|}{3}.$$

Pero la observación 1 al final del Lema 2 nos dice que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{área de } T(\theta + h)}{h} = \frac{|C_1(\theta)|^2}{8},$$

lo que nos permite concluir el Teorema. ■

Corolario 1: Una figura Φ flota en equilibrio en toda posición, si y sólo si la curva de centros de masa $g(\theta)$ es un círculo con centro en \mathcal{G} , y en este caso, el radio de dicho círculo es $\frac{|C_1(\theta)|^2}{12JA}$.

Demostración: Sea $r(\theta) = |\mathcal{G} - g(\theta)|$, entonces tenemos que su derivada $r'(\theta) = 2\langle \mathcal{G} - g(\theta), g'(\theta) \rangle$. Supongamos que la curva $g(\theta)$ es un círculo con centro en \mathcal{G} lo cual implica que $r'(\theta) = 0$ pero como $C_1(\theta)$ es paralelo a $g'(\theta)$, por el teorema anterior, $C_1(\theta)$ es perpendicular a $\mathcal{G} - g(\theta)$. Análogamente si $\mathcal{G} - g(\theta)$ es perpendicular a $C_1(\theta)$ entonces $r'(\theta) = 0$, lo cual implica que $g(\theta)$ es un círculo con centro en \mathcal{G} . Más aún, $g(\theta) = -ru'(\theta)$, de forma que el radio de dicho círculo es $\frac{|C_1(\theta)|^2}{12JA}$. ■

Teorema 5: (Auerbach [Au]) Sean Φ una figura de densidad uniforme β y $\{C_1(\theta)\}$ su respectivo sistema de cuerdas. Entonces la figura Φ flota en equilibrio en toda posición si y sólo si el sistema de cuerdas asociado $\{C_1(\theta)\}$ es también del tipo $\{C_3(p)\}$ de longitud constante.

Demostración: La primera parte de la demostración se sigue fácilmente del corolario anterior, es decir, supongamos que Φ flota en equilibrio en toda posición, entonces por el corolario anterior la curva de centros de masa es un círculo con radio $\frac{|C_1(\theta)|^2}{12JA}$ lo cual implica que $|C_1(\theta)|$ es constante para toda θ , es decir, que $\{C_1(\theta)\}$ es también del tipo $\{C_3(\theta)\}$.

Supongamos ahora que el $|C_1(\theta)|$ es constante. Si escribimos

$$g(\theta) = r(\theta)u'(\theta) + s(\theta)u(\theta),$$

entonces

$$g'(\theta) = (s'(\theta) - r(\theta))u(\theta) + (r'(\theta) + s(\theta))u'(\theta),$$

pero por el Teorema 4 tenemos que

$$g'(\theta) = -(r(\theta) - r''(\theta))u(\theta),$$

donde

$$-(r(\theta) - r''(\theta)) = \frac{|C_1(\theta)|^3}{12JA} = k.$$

De manera que si definimos la curva $\alpha(\theta) = g(\theta) - ku'(\theta)$ tenemos que $\alpha'(\theta) = 0$, entonces $\alpha(\theta)$ es un punto fijo x_0 para toda θ , lo cual implica que $g(\theta)$ es un círculo con centro en x_0 y radio $\frac{|C_1(\theta)|^3}{12JA}$, es decir, Φ flota en equilibrio en toda posición. ■

Todo lo anterior nos permite probar el siguiente resultado, el cual relaciona las curvas α -Zindler con las figuras que flotan en equilibrio.

Teorema 6: *Sea γ una curva cerrada y diferenciable c.d., con la propiedad de que el sistema de cuerdas que dividen el perímetro en una razón α sea interior. Entonces γ es una curva α -Zindler si y sólo si γ flota en equilibrio en toda posición, para alguna densidad J .*

Demostración: Si γ es una curva α -Zindler, entonces tiene la propiedad de que el sistema de tipo $\{C_2\}$ que dividen el perímetro en una razón dada es también de tipo $\{C_3\}$, de cuerdas de longitud constante. De modo que si además es interior, por el Teorema 2 de Auerbach sabemos que el sistema de cuerdas es también del tipo $\{C_1\}$ lo que implica, por el Teorema anterior que γ flota en equilibrio en toda posición. ■

Así pues los Teoremas 6 y 7 son de gran importancia, porque nos permiten afirmar que los volantines de Zindler con cuerdas interiores, nos dan figuras que flotan en equilibrio en toda posición.

Capítulo 4

Algunas propiedades intrínsecas de los Volantines

El siguiente teorema, enuncia propiedades muy importantes de los volantines, acerca del área y del centro de masa. La demostración de este, utiliza los Teoremas de Auerbach probados en el capítulo anterior.

Teorema 7: Sea $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ un volantín de n sillas y sea $X(t)$ el n -ágono con vértices en $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$. Entonces, el área $A(t)$ de $X(t)$ es constante y el centro de masa $H(t)$ de $X(t)$ es un punto fijo.

Demostración: Sea $X(t)$ un n -ágono para una t fija. Sea Ψ_1 una figura de frontera diferenciable casi dondequiera y sin autointersecciones que contenga a la curva $\beta_1(s)$ y $\beta_2(s)$ en un pequeño intervalo de tiempo alrededor de t , con $s \in (t-h, t+h)$ para $h > 0$.

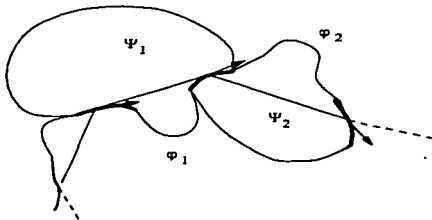


Figura 1

Llamemos φ_1 al segmento de curva (parte de la frontera de Ψ_1) que va desde el punto $\beta_1(t-h)$ al punto $\beta_2(t+h)$. Consideremos un sistema de cuerdas $\{C(p)\}$ en Ψ_1 de tal forma que las cuerdas en los puntos $\beta_1(s)$, con $s \in (t-h, t+h)$ coincida con los segmentos $\beta_2(s) - \beta_1(s)$. Entonces, por el Teorema 1 de Auerbach (Capítulo 2), podemos asegurar que el área $A(\beta_1(s))$ es constante para $s \in (t-h, t+h)$. Más aún, por el Teorema 4 (Capítulo 3), podemos asegurar también que la velocidad del centro de masa $g'(\beta_1(s))$ es paralela a las cuerdas $\beta_2(s) - \beta_1(s)$ con $s \in (t-h, t+h)$ y su longitud está dada por

$$\frac{2}{3A(\beta_1(s))}.$$

De manera análoga, construyamos una figura Ψ_i , $i = 1, \dots, n$, sin autointersecciones de tal forma que la frontera Ψ_i contenga a las curvas $\beta_i(s)$ y $\beta_{i+1}(s)$ con $s \in (t-h, t+h)$ y denotemos por φ_i al segmento de frontera de Ψ_i que va desde el punto $\beta_i(t-h)$ al punto $\beta_{i+1}(t+h)$ cuidando que la figura Ψ_i no interseque a la curva φ_{i-1} excepto, por supuesto, en $\beta_i(s)$ con $s \in (t-h, t+h)$.

Con el argumento anterior, podemos afirmar entonces que el área $A(\beta_i(s))$ es constante para $s \in (t-h, t+h)$ y que la velocidad del centro de masa, $g'(\beta_i(s))$, es paralela a las cuerdas $\beta_{i+1}(s) - \beta_i(s)$ con $s \in (t-h, t+h)$ y su longitud está dada por

$$\frac{2}{3A(\beta_i(s))}.$$

Es importante hacer notar que la dirección de el vector $g'(\beta_i(s))$ coincide con la de la cuerda $\beta_{i+1}(s) - \beta_i(s)$ si la región $\mathcal{R}_i(s)$ de la figura que está a la derecha de la cuerda, está por fuera del n -ágono y en dirección contraria si está por dentro. Denotemos por I el conjunto de índices i en donde las regiones $\mathcal{R}_i(s)$ acotadas por las curvas φ_i , están por afuera del n -ágono y por J el conjunto de índices j que corresponden a las regiones $\mathcal{R}_j(s)$ acotadas por las curvas φ_j que están por dentro del n -ágono.

Construyamos ahora una nueva figura Φ con frontera diferenciable casi dondequiera formada por las curvas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ que forman parte de las figuras Ψ_1, \dots, Ψ_n y probemos que el área y el centro de masa de $w(s) - y(s)$ para $s \in (t-h, t+h)$ es una función constante, donde

$$w(s) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i(s) \quad \text{y} \quad y(s) = \bigcup_{j \in J} \mathcal{R}_j(s)$$

o que pueden verse también como $w(s) = (\Phi - X(s))$ e $y(s) = (X(s) - \Phi)$ para $s \in (t - h, t + h)$.

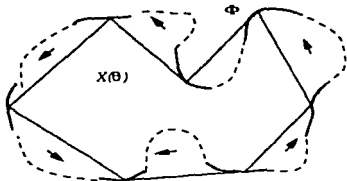


Figura 2

Entonces, las áreas

$$A(w(s)) = \sum_{i \in I} A(\beta_i(s)) = h_1 \text{ y } A(y(s)) = \sum_{j \in J} A(\beta_j(s)) = h_2,$$

por lo tanto $A(w(s) - y(s)) = k$ es constante.

Por definición de centro de masa,

$$F(w(s) - y(s)) := \frac{1}{k} \left(\sum_{i \in I} g(\beta_i(s)) A(\beta_i(s)) - \sum_{j \in J} g(\beta_j(s)) A(\beta_j(s)) \right).$$

De manera que si derivamos obtenemos que,

$$\begin{aligned} F'(w(s) - y(s)) &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i \in I} g'(\beta_i(s)) A(\beta_i(s)) - \sum_{j \in J} g'(\beta_j(s)) A(\beta_j(s)) \right) \\ &= \frac{2}{3k} \sum_{i=1}^n u(\theta_i(s)) = 0. \end{aligned}$$

pues los ángulos $(\theta_i(s))$ permiten que el n -ángono $X(s)$ se cierre. De esta manera $F(w(s) - y(s))$ y $A(w(s) - y(s))$ son funciones constantes. Así, tanto el área como el centro de masa de $X(s) = \Phi \cup y(s) - w(s)$ es un punto fijo, pues la figura Φ es fija, y por lo tanto ni su área, ni su centro de masa, cambian. ■

Dado un volantín de n sillas sabemos que para cada tiempo t , existe un n -ágono de lados iguales $X(t)$, en particular, para el tiempo $t = 0$. Si $X(0)$ es un n -ágono arbitrario de lados iguales y $w_i \in \mathbb{R}^2$ con $i = 1, \dots, n$, ¿podrán ser los vértices de $X(0)$ los puntos iniciales de un volantín? ¿Qué condiciones necesitan los vectores w_i para ser los vectores velocidad iniciales de las curvas β_i ? En otras palabras, ¿todo n -ágono funciona como condición inicial de un volantín? El siguiente teorema nos da las condiciones necesarias para el caso n par y prueba al mismo tiempo que, cuando n es impar, cualquier n -ágono podría en principio, con su adecuado vector velocidad, funcionar como condición inicial para un volantín.

Teorema 8: Sea $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ un volantín de n sillas y para toda t sea $x_i(t)$ el ángulo entre los lados $\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)$ y $\beta_i(t) - \beta_{i-1}(t)$. Entonces, si n es par, tenemos que para toda t

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i x_i(t) = 0.$$

Demostración: Comencemos fijando un tiempo t , por el Lema 1, sabemos que β'_{i+1} es una reflexión Ω_{θ_i} de β'_i con respecto al ángulo θ_i entre el lado $\beta_{i+1} - \beta_i$ y el eje de las x 's. Entonces si n es par, tenemos la siguiente igualdad:

$$\Omega_{\theta_n} \circ \Omega_{\theta_{n-1}} \circ \dots \circ \Omega_{\theta_1} (\beta'_1) = \Gamma_{2((\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}) - (\theta_2 + \theta_4 + \dots + \theta_n))} (\beta'_1) = \beta'_1,$$

donde Γ_α es una rotación de un ángulo α .

Pero esta igualdad sólo pasa si

$$2((\theta_1 + \theta_3 + \dots + \theta_{n-1}) - (\theta_2 + \theta_4 + \dots + \theta_n)) = 2k\pi.$$

De manera que, usando el hecho de que en un n -ágono, $\theta_{i+1} = \theta_i + \pi - x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$, podemos concluir que la suma de los ángulos pares es igual a la de los impares, lo que prueba la proposición. ■

En el caso en que n es impar, la composición de un número impar de reflexiones es nuevamente una reflexión. luego existe un único vector w (único salvo multiplicación por escalares) tal que

$$\Omega_{\theta_n} \circ \Omega_{\theta_{n-1}} \circ \dots \circ \Omega_{\theta_1} (w) = \Omega_{\psi} (w).$$

lo que nos sugiere que $w(t)$ puede ser el vector inicial $\beta'_i(t)$:

Ejemplo:

IV.-Por el ejemplo III. Capítulo 1, sabemos que el círculo es un volantín de n sillas para cualquier n , tomando como condición inicial a cualquier n -ágono regular. Consideremos los casos $n = 3, 4$. Por un lado, sabemos por el teorema anterior, que el cuadrado es el único cuadrilátero con posibilidad de ser condición inicial de un volantín de 4-sillas, y por el otro, que el centro de masa de los n -ágonos es un punto fijo, de aquí que podamos deducir, que el círculo es el único volantín no trivial de 3 y 4 sillas.

Capítulo 5

Las Ecuaciones Diferenciales.

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales que gobiernan los volantes. Para esto necesitamos el siguiente Lema fundamental.

Lema 3: (segunda ley de los volantes)

$\{\beta_1(t), \beta_2(t)\}$ es un volantín simple si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) $|\beta_2(t) - \beta_1(t)|$ es una constante distinta de cero y

b) $\theta'(t) = \text{sen}(\alpha_1(t))$ para toda t ,

donde $\theta(t)$ es el ángulo entre el vector $\beta_2(t) - \beta_1(t)$ y el eje de las x 's y $\alpha_1(t)$ es el ángulo entre el vector $\beta_1'(t)$ y el vector $\beta_2(t) - \beta_1(t)$.

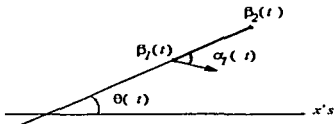


Figura 1

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos escribir el punto medio $m(t)$ del vector $\beta_2(t) - \beta_1(t)$ como $m(t) = \beta_1(t) + u(\theta(t))$, si como es usual

$$|\beta_2(t) - \beta_1(t)| = 2 \text{ y } u(\theta) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)).$$

De esta forma tenemos que $m'(t) = \beta_1'(t) + u'(\theta(t))\theta'(t)$ y multiplicando por el vector $u'(\theta(t))$, obtenemos que la condición ii) de un volantín simple es equivalente a que

$$\theta'(t) = -\langle \beta_1'(t), u'(\theta(t)) \rangle = \text{sen}(\alpha_1(t))$$

lo que nos permite concluir el Lema. ■

De ahora en adelante denotemos por, $\alpha_i(t)$ el ángulo entre el vector $\beta'_i(t)$ y el vector $\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)$, y por $\theta_i(t)$ el ángulo entre el vector $\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)$ y el eje de las x 's.

Teorema 9: Sea $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ un volantín de n sillas y sea $x_i(t)$ el ángulo entre los vectores $\beta_{i-1}(t) - \beta_i(t)$ y $\beta_{i-1}(t) - \beta_i(t)$. Entonces, $x_i(t)$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para $(i = 1, \dots, n)$

$$x'_i(t) = s \epsilon n (\alpha_{i-1}(t)) - \text{sen}(\alpha_i(t)).$$

Más aún, si n es un número impar.

$$\alpha_i(t) = x_{i+2}(t) + x_{i-4}(t) + \dots + x_{i+(n-1)}(t) - \left(\frac{k-1}{2}\right) \pi.$$

donde k es un entero tal que $\sum_{i=1}^n x_i(0) = k\pi$.

Demostración: Por el lema 3, sabemos que $\theta'_i(t) = \text{sen}(\alpha_i(t))$ y además sabemos que $\theta_i(t) = \theta_{i-1}(t) - \pi - x_i(t)$ de modo que podemos escribir

$$x'_i(t) = s \epsilon n (\alpha_{i-1}(t)) - \text{sen}(\alpha_i(t)).$$

Por otro lado, existe un entero k tal que $\sum_{i=1}^n x_i(t) = k\pi$ para toda t , pues $x'_i(t) = 0$ y $\sum_{i=1}^n x_i(0) = k\pi$ para algún entero k . Además, por el Lema 1, $\alpha_{i-1}(t) + x_i(t) + \alpha_i(t) = \pi$, entonces, despejando y sustituyendo tenemos que cuando n es impar.

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &= \pi - x_{i-1}(t) - (\pi - x_{i+2}(t) - \alpha_{i+2}(t)) \\ &= -x_{i-1}(t) + x_{i+2}(t) - x_{i+3}(t) + \dots - \alpha_i(t) + \pi \\ 2\alpha_i(t) &= x_{i+2}(t) - x_{i+3}(t) + \dots + x_{i+(n-1)}(t) - k\pi + \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha_i(t) = x_{i+2}(t) + x_{i-4}(t) + \dots + x_{i+(n-1)}(t) - \left(\frac{k-1}{2}\right) \pi.$$

donde $\sum_{i=1}^n x_i(t) = k\pi$. ■

Teorema 10: Supongamos que tenemos n funciones $x_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) con n impar, que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x_i'(t) = \text{sen}(\alpha_{i-1}(t)) - \text{sen}(\alpha_i(t)),$$

donde

$$\alpha_i(t) = x_{i+2}(t) + x_{i+4}(t) + \dots + x_{i+(n-1)}(t) - \left(\frac{k-1}{2}\right)\pi,$$

con condiciones iniciales $x_i(0)$, los ángulos interiores de un n -ágono de lados iguales. Es decir, que el conjunto $\{x_i(0)\}$ satisface la siguiente condición:

$$u(0) + u(\pi - x_2(0)) + \dots + u((n-1)\pi - (x_2(0) + \dots + x_n(0))) = 0 \quad (2)$$

Entonces, existe un volantín de n sillas $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ con la propiedad de que $x_i(t)$ son los ángulos entre los vectores $\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)$ y $\beta_{i-1}(t) - \beta_i(t)$, para $i = 1, \dots, n$ y para toda t .

Demostración: Para $i = 1, \dots, n$ definamos $\theta_i(t)$ y $\beta_i(t)$ tal que

$$\theta_i'(t) := \text{sen}(\alpha_i(t))$$

y

$$\beta_i'(t) := (\cos(\theta_i(t) - \alpha_i(t)), \text{sen}(\theta_i(t) - \alpha_i(t))),$$

con condiciones iniciales $\beta_i(0)$, los vértices de un n -ágono de lados iguales a $\theta_i(0)$, el ángulo entre el correspondiente lado y el eje de las x 's. Esto es,

$$\theta_i(0) := \theta_i(0) + (i-1)\pi - (x_2(0) + \dots + x_i(0))$$

para $i = 1, \dots, n$ y que satisface además que $|\beta_{i-1}(t) - \beta_i(t)| = 2$.

Entonces podemos probar los siguientes hechos:

(1).- El ángulo

$$\theta_i(t) = \theta_i(0) + (i-1)\pi - (x_2(t) + \dots + x_i(t))$$

para toda t por unicidad de ecuaciones [3], ya que para el tiempo 0 la condición se cumple por hipótesis, y derivando obtenemos que

$$\theta_i'(t) - (x_2'(t) + \dots + x_i'(t)) = \text{sen}(\alpha_i(t)) = \theta_i'(t).$$

(2).- Definamos $\gamma_2(t) := \beta_1(t) + 2u(\theta_1(t))$ para toda t . entonces la pareja $\{\beta_1(t), \gamma_2(t)\}$ es un volatín simple, pues para toda t si $|\gamma_2(t) - \beta_1(t)| = 2$ y $\theta_1(t) = \text{sen}(\alpha_1(t))$ donde el ángulo entre $\beta_1'(t)$ y $\gamma_2(t) - \beta_1(t)$ es $\alpha_1(t)$ por construcción.

(3).- Si definimos $\gamma_3(t) := \gamma_2(t) + 2u(\theta_2(t))$ para toda t . entonces tenemos también que $\{\gamma_2(t), \gamma_3(t)\}$ es un volatín simple pues

$$\begin{aligned} \pi - x_2 - \alpha_1 &= \pi - x_2 - x_3 - x_5 - \dots - x_n + \frac{k-1}{2}\pi \\ &= -k\pi + x_4 + x_6 - \dots - x_{n+1} + \frac{k+1}{2}\pi \\ &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Esto implica por el hecho (1), que $\theta_2 = \theta_1 + \pi - x_2 = \theta_1 + \alpha_2 + \alpha_1$, y como $\{\beta_1(t), \gamma_2(t)\}$ es un volatín simple. entonces $\gamma_2'(t)$ es una reflexión de un ángulo α_1 del vector $\beta_1'(t)$ a través de $\gamma_2(t) - \beta_1(t)$, de forma que el ángulo entre el vector $\gamma_2'(t)$ y el vector $\gamma_3(t) - \gamma_2(t)$ es $\alpha_2(t)$ de donde se tiene que $\{\gamma_2(t), \gamma_3(t)\}$ es un volatín simple. Pero además, tenemos que $\beta_2'(t) = \gamma_2'(t)$, y por hipótesis que $\beta_2(0) = \gamma_2(0)$ con lo que podemos afirmar por unicidad de ecuaciones [DeGr] que $\beta_2(t) = \gamma_2(t)$, para toda t . De manera análoga, si definimos inductivamente $\gamma_{i+1}(t) := \gamma_i(t) + 2u(\theta_i(t))$ tenemos que $\{\gamma_i(t), \gamma_{i+1}(t)\}$ es un volatín simple y además que $\beta_i(t) = \gamma_i(t)$, para toda t con lo que se prueba finalmente el Teorema. ■

Corolario 2: Sea $\{\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)\}$ un volatín de n -sillas y supóngase que existe un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $x_i(t_0) = x_{i+1}(0)$ para toda i . Entonces, todas las curvas $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ son congruentes.

Demostración: Si sabemos la existencia de un número t_0 tal que $x_i(t_0) = x_{i+1}(0)$, consideremos el sistema de ecuaciones

$$y_i'(t) = \text{sen}(\tilde{\alpha}_{i-1}(t)) - \text{sen}(\tilde{\alpha}_i(t)),$$

para $i = 1, \dots, n$ donde

$$\tilde{\alpha}_i(t) = y_{i+3}(t) - y_{i+5}(t) + \dots + y_{i+n}(t) - \frac{k-1}{2}\pi.$$

Entonces tenemos que $x_{i-1}'(t-t_0) = y_i'(t)$ para toda t y para $i = 1, \dots, n$. Más aún, $y_i(0) = x_{i-1}(t_0) = x_i(0)$, de manera que por el Teorema de Existencia y

Unicidad [DeGr], $x_i(t) = x_{i+1}(t + t_0)$ y al mismo tiempo $\beta'_{i+1}(t) = \beta'_i(t + t_0)$, lo que implica que $\beta_{i+1}(t)$ es congruente con $\beta_i(t)$. En este caso, si definimos $\eta = nt_0$ tenemos que $x_i(t + \eta) = x_i(t)$, para toda t , es decir, encontrar un punto t_0 para el cual $x_i(t + t_0) = x_{i+1}(t)$ nos permite encontrar órbitas periódicas del sistema inicial. ■

Capítulo 6

El espacio de los pentágonos

Para el estudio de los volantines de 5 sillas es necesario estudiar el espacio de los pentágonos. En esta sección analizaremos el espacio de los pentágonos de lados iguales que tienen un lado privilegiado. Supondremos que éste es siempre el lado con coordenadas $(-1,0), (1,0)$ pues bajo traslaciones y rotaciones cualquier pentágono puede ser llevado hasta aquí colocando su lado privilegiado en $[(-1,0), (1,0)]$.

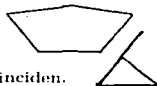
Clasificaremos los tipos de pentágonos en tres : **A) Los Orientados,** **B) Los orientados inversamente** y **C) Los Desorientados.**

Orientando el lado privilegiado del punto $(-1,0)$ al punto $(1,0)$, numeremos las aristas de un pentágono desde 1 hasta 5 comenzando con el número 1 en el lado privilegiado $((-1,0), (1,0))$ y sucesivamente el número siguiente estará dado por la adyacencia de la siguiente arista. Dadas dos aristas $i-1$ e i , el vértice entre ellas se denotará por v_i y por α_i el ángulo correspondiente. Diremos que un pentágono es orientado si con la regla de la mano derecha vamos de la arista 1 a la 5. Análogamente los orientados inversamente son los que van siempre en sentido contrario al de la regla de la mano derecha. Por otro lado los desorientados son los que no son ni orientados ni desorientados.

A) Los Orientados :

El conjunto de pentágonos orientados se clasifican a su vez en 5 tipos de pentágonos:

- 1) El conjunto de pentágonos que no se autointersectan.



- 2) El conjunto de pentágonos donde dos de sus aristas coinciden.



3) El conjunto de pentágonos orientados que se autointersectan no transversalmente en un solo punto.



4) El conjunto de pentágonos que se autointersectan en dos puntos.



5) El conjunto de pentágonos estrella.



B) Los Orientados inversamente:

El conjunto de pentágonos orientados inversamente, tienen exactamente la misma clasificación del 1 al 5 de los orientados pues pueden verse como una reflexión de ellos por medio de el eje de las x 's.

C) Los Desorientados

El conjunto de pentágonos desorientados se divide, a su vez en dos:

1) El conjunto de pentágonos desorientados con vértice arriba y



2) El conjunto de pentágonos desorientados con vértice abajo.

Comencemos primero con los del tipo A2, pentágonos orientados donde dos de sus lados coinciden.

Si la arista 3 coincide con la arista 4, entonces todos los pentágonos posibles con esas aristas unidas formarán un círculo, que denotaremos por C_{34} , en este círculo están dos pentágonos que visualmente son triángulos, uno donde las aristas 2, 3 y 4 coinciden y el segundo donde las aristas 3, 4 y 5 coinciden, llamaremos a estos pentágonos el 234 y el 345 respectivamente.

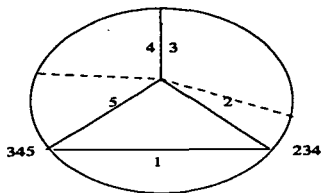
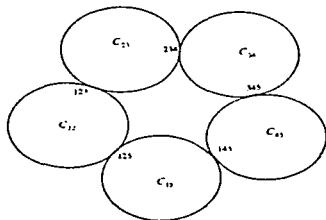


Figura 1

De manera análoga, si la arista 2 coincide con la 3 obtendremos el círculo C_{23} que contiene a los pentágonos 234 y 123. Si la arista 1 y 2 coinciden, obtenemos el círculo C_{12} en donde habitan los pentágonos 123 y 125, y así sucesivamente, obtenemos 5 círculos en donde cada uno de ellos se intersecta con otro en un punto, tal como lo muestra el siguiente dibujo.



Mapa 1

Llamemos C^i a la curva que está en el interior de esta especie de flor, es decir C^i está formada por los pentágonos en donde la arista $i - 1$ coincide con la arista i y ambas cruzan a la arista $i + 2$. De manera análoga C^E será la curva que está en el exterior de esta flor.

El conjunto de pentágonos estrella, A_5 , está determinado de manera única por el punto de intersección de 2 de sus lados de la siguiente manera: Tómese un triángulo equilátero de lado 2 y base el lado privilegiado, y sea p_0 un punto en el interior de este triángulo. Trace desde $(-1, 0)$ un segmento de lado 2 que pase por p_0 y de la misma forma trace desde $(1, 0)$ un segmento de lado 2 que pase por p_0 . Este procedimiento determina 2 únicos puntos, uno que será el vértice v_3 y el otro que será el vértice v_5 . Con base en $\overline{v_3}, \overline{v_5}$ trace hacia el lado privilegiado un triángulo isósceles, que determinará el vértice v_4 que hacia falta.

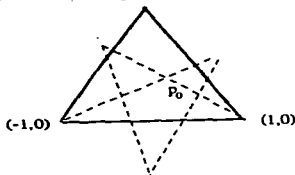


Figura 2

Supóngase que el punto p_0 está en el vértice $(-1, 0)$ entonces el punto p_0 determina todos los pentágonos en C^i que van del punto 123 al 125. De manera análoga si el punto p_0 está en el vértice $(1, 0)$, p_0 determinará todos los pentágonos en C^i que van del punto 152 al punto 154. Si el punto p_0 está en la arista izquierda del triángulo equilátero, este determinará todos los pentágonos en C^i que van desde el punto 123 al punto 234, y de igual forma si el punto p_0 está en la arista derecha del triángulo equilátero, este determinará todos los pentágonos en C^i que van desde el punto 154 al 453. Finalmente si el punto p_0 está en el vértice opuesto al lado privilegiado en el triángulo equilátero, entonces este determinará los pentágonos en C^i que van desde el punto 432 al punto 543. De esta forma el conjunto de pentágonos estrella se puede identificar como un disco, que tiene como frontera la curva C^i .

Los pentágonos del tipo A-4, que se autointersecan en 2 puntos, están determinados de manera única por el vértice v_i que provoca la intersección en dos puntos. (Por ejemplo, el vértice v_4 que une la arista 3 con la arista 4 en la siguiente figura.)

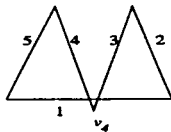


Figura 3

Para ver esto, tómesese un triángulo equilátero con lado 2 y base el lado $\overline{v_{i+2}v_{i-2}}$. Con centro en el vértice opuesto a este lado tómesese la circunferencia de radio 2. Entonces, para que exista un pentágono con 2 intersecciones (de tipo 4), el punto v_i deberá estar entre la base del triángulo y la circunferencia. Para construirlo, tracemos un triángulo isósceles de lado 2 con base el segmento $\overline{v_{i+2}v_i}$ obteniendo así los lados i e $i+1$. De manera análoga tracemos otro triángulo isósceles con base en el segmento $\overline{v_i v_{i-2}}$, de donde se obtienen finalmente los lados $i-2$ e $i-1$.

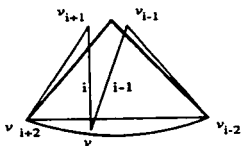
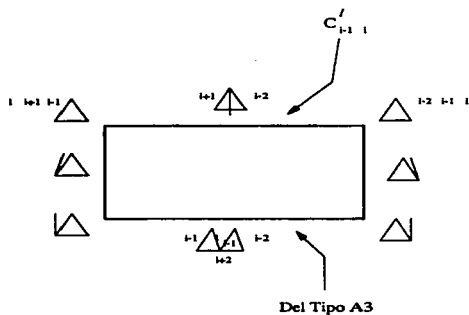


Figura 4

Nótese que si el vértice v_i está muy cerca de la circunferencia, el pentágono tenderá a ser del tipo 2 en C' y cuando el vértice esté muy cerca de la base del triángulo, este tenderá a ser del tipo 3. De manera que el conjunto de pentágonos del tipo 4 pueden verse como la unión ajena de 5 discos, uno por cada i y en cada uno de ellos la frontera se divide en 4 partes, como lo indica la siguiente figura.



Mapa 2

El conjunto de pentágonos A1 que no se autointersectan se clasifica a su vez en 3: Los convexos, los no convexos por el vértice v_1 y los no convexos por 2 vértices v_1 y v_{1+2} .

Sean $\alpha = 2\arcsen(\frac{1}{2})$ y $\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Consideremos la región \mathcal{R}_c determinada por las siguientes curvas:

$$C_1(t) := (-3 + 2\cos(t), 2\sen(t)) \text{ donde } \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$C_2(t) := (1 + 4\cos(t), 4\sen(t)) \text{ donde } \pi - \beta \leq t \leq \pi - \alpha,$$

$$C_3(t) := (-1 + 4\cos(t), 4\sen(t)) \text{ donde } \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$C_4(t) := (3 + 2\cos(t), 2\sen(t)) \text{ donde } \pi - \beta \leq t \leq \pi - \alpha \text{ y}$$

finalmente por la curva C_5 determinada por el vértice v_4 en un pentágono, cuando el ángulo $x_4 = \pi$ siempre. que explícitamente esta dada por la siguiente curva $C_5(t) = (x(t), y(t))$ definida por las siguientes igualdades:

$$1) x(t) = \cos\gamma(t) - \frac{1}{2} \text{ e } y(t) = \sen(\xi)a,$$

$$2) \sen(\gamma(t)) = \sen(\xi)a \text{ donde}$$

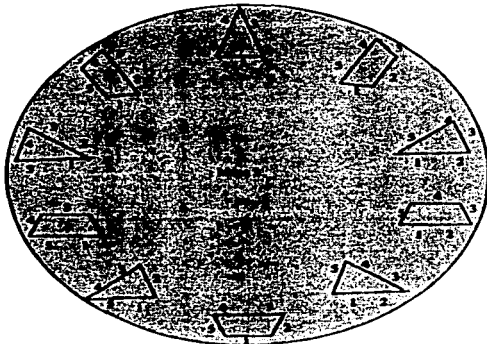
$$a = \sqrt{2 - 2\cos(r(t))}, b = \sqrt{2 - 2\cos(s(t))} \text{ y}$$

$$\xi = \pi - \arcsen\left(\frac{\sen(\alpha)}{a}\right) - \arcsen\left(\frac{\sen(\beta)}{b}\right).$$

3) las curvas $r(t)$ y $s(t)$ están dadas por:

$$r(t) = \beta + t(\alpha - \beta) \text{ y } s(t) = \alpha + t(\beta - \alpha).$$

Entonces, todo punto v_4 de la región \mathcal{R}_c determina de manera única un pentágono convexo de la siguiente manera: Con base en los lados formados por los vértices $[v_1, (-1, 0)]$ y $[v_1, (1, 0)]$ tracemos 2 triángulos isósceles de lado 2. Así el conjunto de pentágonos convexos puede ser identificado como un disco que tiene como frontera los pentágonos convexos donde alguno de sus ángulos interiores forma un ángulo de π . (Mapa 3)



Mapa 3

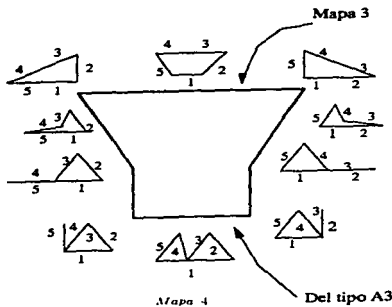
El conjunto de pentágonos no convexos por el vértice v_1 está determinado también de manera única por todos los puntos en el interior de la región \mathcal{R}_1 (con el mismo procedimiento anterior) delimitada por las siguientes curvas:

$$A_1(t) = (-3 + 2\cos(t), 2\text{sen}(t))$$

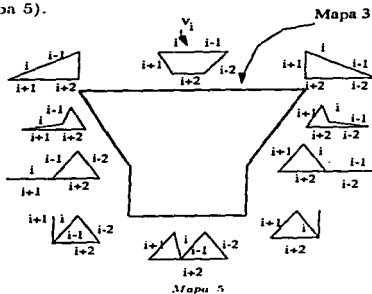
cuando $0 \leq t \leq \alpha$; por la curva C_5 , definida anteriormente, por la curva

$$A_2(t) = (3 + \cos(t), 2\text{sen}(t))$$

cuando $\pi - \alpha \leq t \leq \pi$, y finalmente por el intervalo $[(-1, 0), (1, 0)]$. De manera que el conjunto de pentágonos no convexos por el vértice v_1 se puede identificar con un disco que tiene como frontera las siguientes regiones. (Mapa 4)



De la misma forma, el conjunto de pentágonos no convexos por el vértice v_i , $i = 1, \dots, 5$ forma un disco que tiene, al igual que en el mapa 4 la siguiente frontera. (Mapa 5).



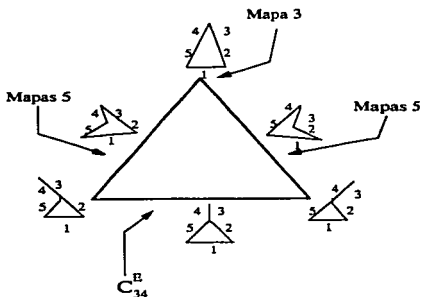
Para terminar con el conjunto de pentágonos que no se autointersecta, necesitamos considerar la siguiente región \mathcal{R}_{34} determinada por las siguientes curvas:

$$B_1(t) = (-1 + 4\cos(t), 4\text{sen}(t)) \text{ cuando } \frac{\pi}{3} \leq t \leq \beta,$$

$$B_2(t) = (1 + 4\cos(t), 4\text{sen}(t)) \text{ cuando } \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi - \beta \text{ y}$$

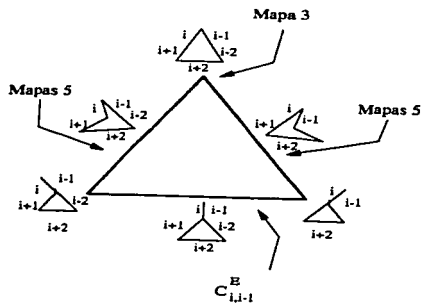
$$B_3(t) = (2\cos(t), 2\text{sen}(\frac{\pi}{3}) + 2\text{sen}(t)) \text{ cuando } \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Todo punto del interior de esta región, determina también de manera única el conjunto de todos los pentágonos no convexos por los vértices v_3 y v_4 . Así este conjunto de pentágonos tiene asociado un disco cuya frontera son los siguientes pentágonos. (Mapa 6)



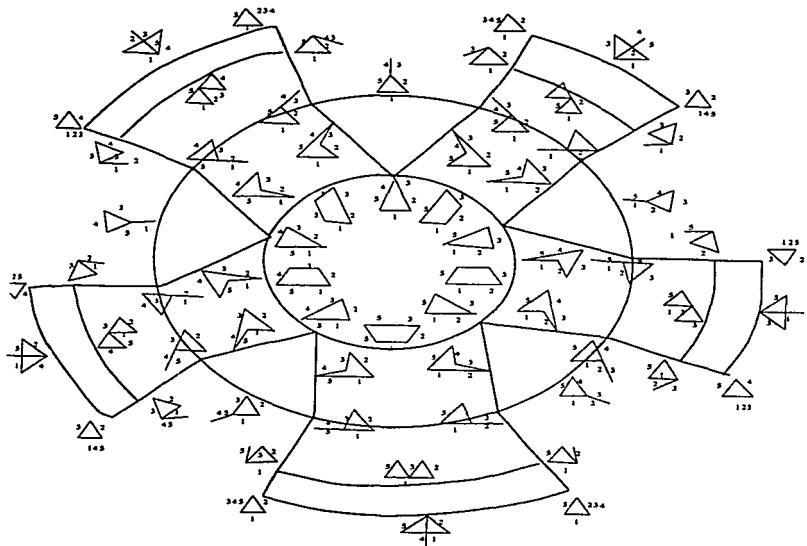
Mapa 6

Análogamente, el conjunto de pentágonos no convexos por los vértices v_i y v_{i+1} están identificados con un disco y cada uno tiene la siguiente frontera. (Mapa 7)



Mapa 7

Hasta aquí, hemos estudiado todos los pentágonos orientados y sabemos que cada uno de sus tipos, son un disco. Siguiendo las fronteras de cada uno de los Mapas del 2 al 7, y pegando adecuadamente obtenemos el siguiente Mapa.



Мапа 8

Unido finalmente el Mapa 8. con el Mapa 1 junto con los pentágonos estrella que están en el interior de la curva C^I , llegamos a la conclusión que el resultado de dicha unión es una variedad orientable de dimensión 2 con frontera, pues, para cada punto existe alrededor de él una vecindad homeomorfa a un disco y donde dicha frontera es exactamente el círculo C^E .

Si a esta variedad, le adjuntamos por la frontera un disco, obtenemos una variedad X de dimensión 2. Si calculamos su característica de Euler $\chi(X)$ podremos saber que tipo de variedad obtuvimos.

Así pues, el número de 0-células es $\alpha_0 = 5$ (los pentágonos llamados ijk , que visualmente son triángulos); el número de 1-células es $\alpha_1 = 10$ (las aristas entre los puntos ijk en el Mapa 1); el número de 2-células es $\alpha_2 = 3$; con lo cual $\chi(X) = 5 - 10 + 3 = -2$. Entonces X es un toro de género 2 y por lo tanto, el conjunto de pentágonos orientados, es un toro agujerado cuya frontera es la curva C^E . Haciendo el mismo tratamiento para el conjunto de todos los pentágonos orientados inversamente, obtenemos exactamente la misma conclusión.

Sólo nos resta analizar el conjunto de pentágonos desorientados. Para este fin es necesario hacer notar que cada uno de estos pentágonos se auto-intersectan transversalmente en un punto. Al igual que en los pentágonos estrella este punto determina de manera única el pentágono desorientado del que se trate. Consideremos la siguiente región. Tómese un triángulo equilátero de lado 2 y base en el lado privilegiado $\{(-1, 0), (1, 0)\}$. Con centro en el vértice $(-1, 0)$ y radio 2 tracemos un semicírculo del punto $(1, 0)$ al vértice restante del triángulo, y análogamente tracemos otro semicírculo de radio 2 y centro en el vértice $(1, 0)$ que va del vértice $(-1, 0)$ al otro vértice del triángulo. (ver figura 5)

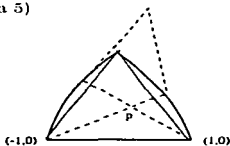
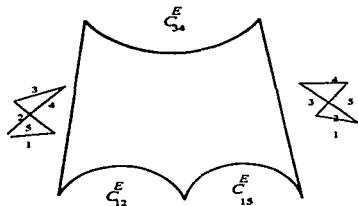


Figura 5

Cada punto p del interior de esta región, determina de manera única un pentágono desorientado con vértice hacia arriba y con punto de intersección en los lados 2 y 5 de la siguiente forma: Tracemos desde el vértice $(-1, 0)$ un segmento de lado 2 que pase por el punto p , e igualmente un segmento de lado 2 por $(1, 0)$ que pase por el punto p . Con base en los extremos finales de estos segmentos tracemos un triángulo isósceles de lado 2, lo que determina finalmente un pentágono desorientado.

Si el punto p , tiende hacia el vértice del triángulo equilátero, el pentágono que define tiende a ser del tipo A2. (conjunto de pentágonos orientados donde 2 de sus aristas coinciden). Si el punto p tiende al lado privilegiado entonces el pentágono que resulta tiende a ser del tipo B2 (pentágonos orientados inversamente donde dos de sus vértices coinciden). De esta forma el conjunto de pentágonos desorientados con punto de autointersección en los lados 2 y 5 se puede visualizar como un disco que tiene como frontera las siguientes curvas. (Mapa 9)



Mapa 9

De manera análoga, los demás conjuntos de pentágonos desorientados nos proporcionan mapas iguales al anterior, que unidos correctamente por sus fronteras generan el siguiente mapa.

Otra manera distinta de ver que el espacio de pentágonos es un toro de género 4 es la siguiente:

A todo pentágono \mathcal{P} de nuestro espacio, le podemos asociar de forma única la quinteta de sus ángulos interiores $\mathcal{P} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Por lo tanto, es claro que podemos identificar el pentágono \mathcal{P} con este punto de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Por supuesto, no todo punto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ representa los ángulos interiores de un pentágono. Así pues, sea \mathcal{P}^5 el subconjunto cerrado de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ tal que las x_i sean los ángulos interiores de un pentágono de lados iguales y lado privilegiado $[(-1, 0), (1, 0)]$.

Tómese la proyección $P : \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ que asocia a cada quinteta $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ los primeros dos ángulos (x_1, x_2) . Inversamente, dados dos ángulos $(x_1, x_2) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ podemos describir la relación

$$P^{-1} : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathcal{P}^5,$$

que asocia a cada (x_1, x_2) quintetas de ángulos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, los cuales son ángulos interiores de pentágonos, de la siguiente manera:

Dado el lado privilegiado $[(-1, 0), (1, 0)]$, los ángulos x_1 y x_2 determinan dos únicos puntos $v_3(x_2)$ y $v_3(x_1)$ en los círculos de radio 2 y centros en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$:

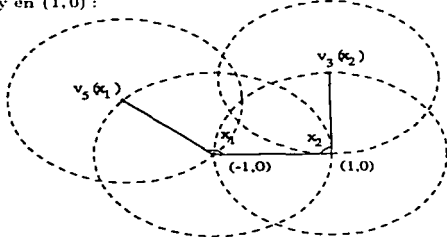


Figura 6

Trazando desde $v_3(x_2)$ y $v_3(x_1)$ otros 2 círculos de radio 2, puede ocurrir que la intersección de estos últimos sea:

- a) todo un círculo. (en cuyo caso existe todo un círculo de pentágonos posibles).
- b) un punto. (en cuyo caso el pentágono generado es único).
- c) dos puntos. (en cuyo caso se determinan 2 pentágonos) y
- d) ningún punto (lo que implica que x_1, x_2 no generan pentágono alguno).

Consideremos el primer caso en el que los dos círculos coincidan. Entonces $v_3(x_2) = v_3(x_1)$, lo que implica que

$$y_1 = (x_1, x_2) = (\pi/3, \pi/3) \text{ e } y_2 = (x_1, x_2) = (-\pi/3, -\pi/3).$$

Supongamos ahora que la intersección de estos dos últimos círculos fue de dos puntos, el punto v_4 y el punto \bar{v}_4 , es decir, que los ángulos x_1 y x_2 determinan dos pentágonos $P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ y $P_2 = (x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$. Es posible verificar de manera muy sencilla, que existen vecindades abiertas y ajenas \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 de P_1 y P_2 respectivamente que muestran que $P: \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ es una cubierta doble en estos puntos.

Finalmente si los puntos (x_1, x_2) no generan pentágono alguno, entonces, la distancia en \mathbb{R}^2 del vértice $v_3(x_1)$ al vértice $v_3(x_2)$ es mayor que 2 con lo que se prueba fácilmente que este tipo de puntos forman un abierto V de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ que tiene como frontera al conjunto de puntos Γ de (x_1, x_2) tales que $v_3(x_1)$ y $v_3(x_2)$ distan justamente 2. Por otro lado, Γ es justamente el conjunto de puntos que bajo P^{-1} determinan un solo pentágono.

A continuación mostraremos que V es homeomorfo a un disco abierto de \mathbb{R}^2 . Con tal propósito observemos la gráfica restringida al intervalo $[-\pi, \pi]$ de $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(v_3(x_1), v_3(x_2)) = 2\}$ (figura 8)

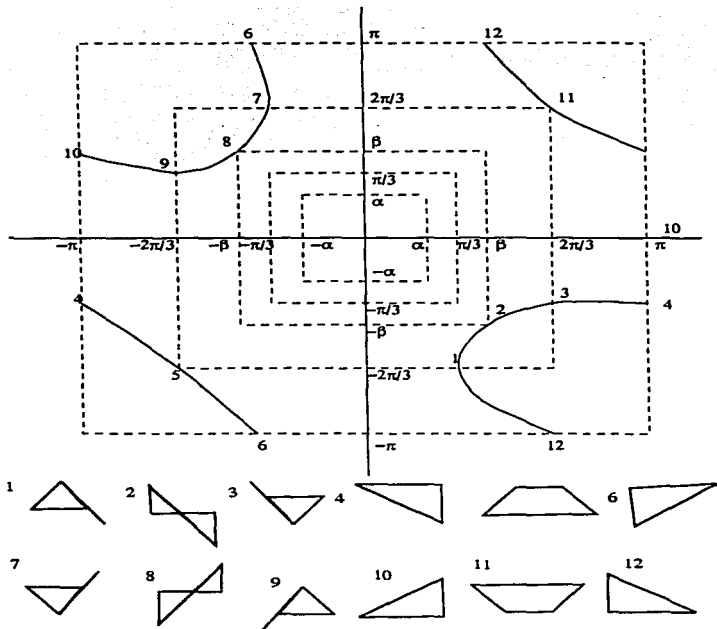


Figura 8

Ahora, si vemos Γ en todo \mathbb{R}^2 tenemos el siguiente conjunto.

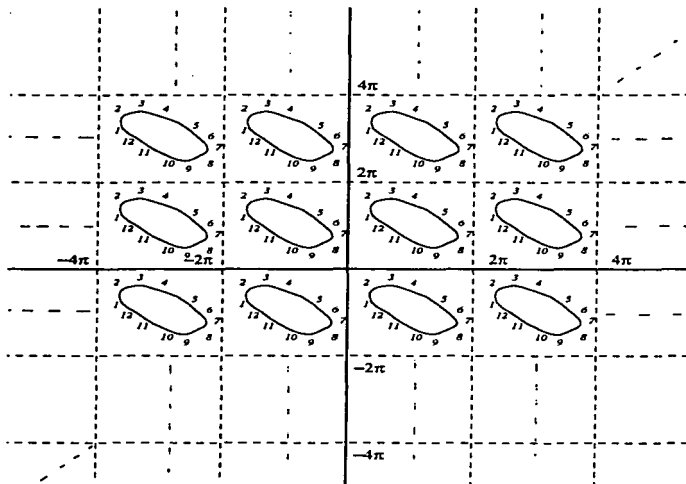


Figura 9

Haciendo la identificación $[0, 2\pi] / \sim$ donde \sim es la relación de equivalencia que identifica los puntos $(x, y) \sim (x + 2k\pi, y + 2k\pi)$ donde $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que el conjunto V de puntos que no generan pentágono alguno es un abierto de \mathbb{R}^2 .

Con todo lo anterior, podemos concluir que la proyección

$$P: \mathcal{P}^5 \rightarrow (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) - V'$$

es una cubierta doble en casi todos sus puntos, excepto para dos puntos $y_1, y_2 \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ en cuyo caso la imagen inversa es un círculo y la curva $\Gamma \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, cuya imagen inversa consiste de un solo punto, y que cumple además ser frontera de el conjunto V' de puntos que no generan pentágono alguno.

Cortemos a \mathcal{P}^5 , a través del círculo $P^{-1}(y_1)$ y del círculo $P^{-1}(y_2)$ e identifiquemos cada uno de los círculos que quedan en un punto. Obtenemos así una nueva superficie \mathcal{S}^5 y una nueva función $\tilde{P}: \mathcal{S}^5 \rightarrow (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) - V'$, que es cubierta doble en todo punto excepto en la curva Γ .

Cortemos ahora a la superficie \mathcal{S}^5 , a través de la curva $\tilde{P}^{-1}(\Gamma)$, para obtener de esta manera dos curvas cerradas que son imagen inversa de Γ . Con esto, se tiene nuevamente una superficie \mathcal{T}^5 , cuya frontera son las curvas $\tilde{P}^{-1}(\Gamma)$, después del corte, y una nueva función $\tilde{P}: \mathcal{T}^5 \rightarrow (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) - V'$ que ahora sí es cubierta doble del toro menos un disco. Sabemos que las únicas cubiertas dobles de $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) - V'$ son o dos copias de sí mismo o un toro menos dos discos ajenos. Así pues la superficie \mathcal{T}^5 , puede ser conexa o inconexa.



Figura 11-a)

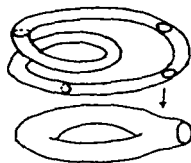


Figura 11-b)

Con ayuda de los Mapas anteriores y siguiendo a la curva Γ en ellos, podemos llegar a la conclusión que la cubierta doble de la que se trata, es conexa (Figura 11-b)). De modo que haciendo el proceso inverso a los cortes, es decir pegando adecuadamente por los puntos en donde hicimos los respectivos cortes, llegamos a concluir que \mathcal{P}^5 es un toro de género 4.

Capítulo 7

El volantín de 5 sillas

Antes de comenzar, veamos algunas imágenes de los volantines de 5 sillas que se obtuvieron mediante el programa "cinito" (ver apéndice).

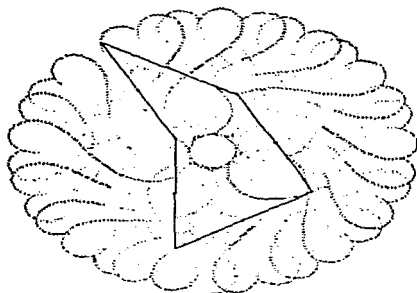
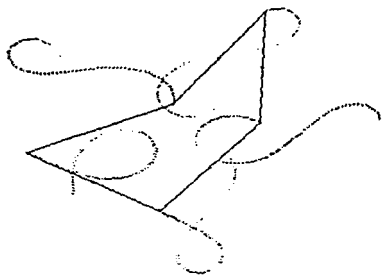
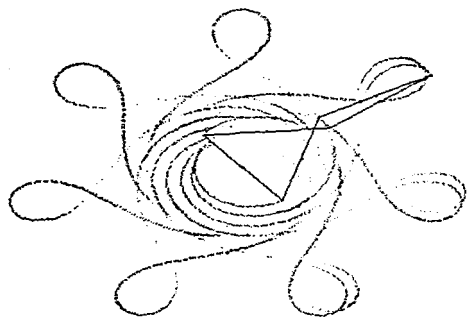


Figura 1



En el capítulo 5 hicimos notar, en particular, que una quinteta de números reales $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ forman los ángulos interiores de un pentágono si la siguiente ecuación se satisface:

$$u(0) + u(\pi - x_2) + u(2\pi - (x_2 + x_3)) + \dots + \\ -u(4\pi - (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)) = 0 \quad (3)$$

es decir, si los vectores direccionales de cada uno de los lados del pentágono suman 0.

Por otro lado sabemos, por el capítulo anterior, que el espacio de pentágonos con un lado privilegiado es una superficie $\mathcal{P}^5 \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, más aún, es un toro de género 4. Entonces, dado un pentágono $P \in \mathcal{P}^5$ podemos representarlo como la quinteta $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$, donde cada uno de los α_j son números complejos de la forma $\alpha_j = e^{ix_j}$ y x_j es un número real en el intervalo $[0, 2\pi)$. De esta forma podemos pensar a \mathbb{R}^5 como el espacio cubriente de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ junto con su proyección natural $P: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ que asocia a cada quinteta $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ la quinteta $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$. Sea $\tilde{\mathcal{P}}^5 = P^{-1}(\mathcal{P}^5)$, entonces es claro que $\tilde{\mathcal{P}}^5$ es también una superficie, y consta de todas las quintetas de números reales que satisfacen la ecuación (3). Es importante hacer notar, que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es igual a $3\pi + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ lo que implica que $\tilde{\mathcal{P}}^5$ tiene tantas componentes conexas como números enteros. Si fijamos una k digamos $k = 0$ la componente conexa correspondiente $\tilde{\mathcal{P}}_0^5$ de $\tilde{\mathcal{P}}^5$ está dada por el conjunto de puntos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ que satisfacen por un lado la ecuación (3) y por otro la ecuación a) $\sum_{i=1}^5 x_i = 3\pi$ que al unirlos, se simplifican en las siguientes 3 ecuaciones:

- $\sum_{i=1}^5 x_i = 3\pi$,
- $\cos(x_1) + \cos(x_2) - \cos(x_2 + x_3) - \cos(x_1 + x_5) = 1$ y
- $\sen(x_1) - \sen(x_2) + \sen(x_2 + x_3) - \sen(x_1 + x_5) = 0$.

Definamos ahora una nueva función $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{P}}_0^5 \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ que determina el área de un pentágono y que está dada por

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sen(x_1) + \sen(x_2) - \sen(x_1 + x_2) + \sen(x_4)$$

y definamos análogamente la correspondiente función área $f: \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema 4: La función $f : \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene 14 puntos críticos. 2 máximos que corresponden al área del pentágono regular, 2 mínimos que corresponden al área del pentágono regular estrella y 10 puntos silla que corresponden al área de un triángulo que visualmente es un triángulo (ver capítulo anterior).

Demostración: Para facilitar los cálculos, consideremos la siguiente función

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

dada por:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \cos(x_1) + \cos(x_2) - \cos(x_2 + x_3) - \cos(x_1 + x_5), \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_2 + x_3) - \operatorname{sen}(x_1 + x_5) \text{ y} \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2) - \operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \operatorname{sen}(x_4). \end{aligned}$$

Calculemos los determinantes de todas las submatrices de 4×4 de la matriz dF_p

1- El determinante de la primera submatriz, denotado por E_1 , es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_2 + x_3) & \operatorname{sen}(x_2 + x_3) & 0 & \operatorname{sen}(x_1 + x_5) \\ -\cos(x_2) + \cos(x_2 + x_3) & \cos(x_2 + x_3) & 0 & -\cos(x_1 + x_5) \\ \cos(x_2) - \cos(x_1 + x_2) & 0 & \cos(x_4) & 0 \end{vmatrix}$$

Es decir

$$E_1 = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} A_{i1} \delta(\bar{A}_{i1}).$$

donde

$$\begin{aligned} \delta(\bar{A}_{11}) &= \operatorname{sen}(x_2 + x_3) (\cos(x_4) \cos(x_1 + x_5)) + \\ &\quad \cos(x_2 + x_3) (\cos(x_4) \operatorname{sen}(x_1 + x_5)), \end{aligned}$$

$$\delta(\bar{A}_{21}) = \cos(x_4) \cos(x_1 + x_5) + \cos(x_2 + x_3) \cos(x_4).$$

$$\delta(\bar{A}_{31}) = -\cos(x_4) \cos(x_1 + x_5) + \operatorname{sen}(x_2 + x_3) \cos(x_4) \text{ y}$$

$$\delta(\bar{A}_{41}) = \operatorname{sen}(x_2 + x_3) \cos(x_1 + x_5) + \cos(x_2 + x_3) \operatorname{sen}(x_1 + x_5).$$

Así

$$E_1 = \cos(x_4) (\operatorname{sen}(x_4 + x_3) - \operatorname{sen}(x_3)) + \\ + \operatorname{sen}(x_4) (\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_2)).$$

Ahora, restringiéndonos a \tilde{P}_0^5 tenemos que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2) - \operatorname{sen}(x_2 + x_3) - \operatorname{sen}(x_1 + x_3) = 0$$

se satisface y que es válida también si recorremos x_1 por x_2 y x_2 por x_3 de manera que

$$E_1 = \cos(x_4) \operatorname{sen}(x_2 + x_1) - \cos(x_4) \operatorname{sen}(x_2) + \\ + \operatorname{sen}(x_4) \cos(x_2 + x_1) - \operatorname{sen}(x_4) \cos(x_2) \\ = \operatorname{sen}(x_4 + x_1 + x_2) - \operatorname{sen}(x_4 + x_2) \\ = \operatorname{sen}(x_3 + x_5) - \operatorname{sen}(x_2 + x_4).$$

Similarmente se calculan los demás determinantes y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, cuya solución nos da el conjunto de puntos críticos de la función F restringida a \tilde{P}_0^5 , en otras palabras, el conjunto de puntos críticos de la función f , esta dado por:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x_3 + x_5) - \operatorname{sen}(x_2 + x_4) = 0 \\ \operatorname{sen}(x_4 + x_1) - \operatorname{sen}(x_3 + x_5) = 0 \\ \operatorname{sen}(x_5 + x_2) - \operatorname{sen}(x_4 + x_1) = 0 \\ \operatorname{sen}(x_1 + x_3) - \operatorname{sen}(x_5 + x_2) = 0 \\ \operatorname{sen}(x_2 + x_4) - \operatorname{sen}(x_1 + x_3) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Equivalentemente, los puntos críticos de la función $f: \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ están dados por el siguiente sistema de ecuaciones, cuya solución nos da el conjunto de puntos críticos de f :

$$e^{i(x_{l+1} + x_{l-1})} = (-1)^k e^{(-1)^k i(x_{l-2} + x_{l+2})}, \quad (5)$$

con $l = 1, \dots, 5$ y $k = 0, 1$. Sea $\alpha_k = e^{i\pi k}$.

Resolvamos uno de los casos no triviales:

$$\begin{aligned} \alpha_3 \alpha_5 &= \alpha_2 \alpha_1 \\ \alpha_4 \alpha_1 &= \alpha_3 \alpha_5 \\ \alpha_5 \alpha_2 &= \alpha_4 \alpha_1 \\ \alpha_1 \alpha_3 &= -\alpha_2^{-1} \alpha_2^{-1} \\ \alpha_2 \alpha_4 &= -\alpha_1^{-1} \alpha_1^{-1} \end{aligned}$$

Se puede comenzar verificando que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ y que $\alpha_5 = \alpha_4$, además de que $\alpha_5^{-1} = -\alpha_1^3$, pero del hecho que $\sum_{i=1}^5 x_i = 3\pi$ tenemos que $\alpha_1^3 = -1$, es decir, x_1 puede tomar cualquiera de los siguientes valores $x_1 = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$, y con esto que $x_5 = 0$.

Análogamente, podemos calcular los demás casos y con esto probar que el conjunto de puntos críticos de f consta del siguiente conjunto puntos:

i) pentágonos cuyos ángulos interiores son

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3\pi/5,$$

ii) pentágonos cuyos ángulos interiores son

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = \pi/5 \text{ y } x_4 = 2\pi + \pi/5,$$

iii) pentágonos cuyos ángulos interiores son

$$x_1 = \pi/3, x_2 = \pi/3, x_3 = \pi/3, x_4 = 0, x_5 = 2\pi$$

y rotaciones donde $x_i = x_{i+1}$.

Así que tenemos 14 puntos críticos en el espacio de pentágonos, 2 que corresponden al caso *i*) y son el pentágono regular orientado y el pentágono regular orientado inversamente, de los cuales el primero, es máximo y el segundo es mínimo, pues pueden ser inscritos en un círculo y por lo tanto tienen área máxima (positiva el primero y negativa el segundo)[Bol]. Otros 2 que corresponden al caso *ii*) que se refieren a pentágonos regulares estrella orientados y orientados inversamente que corresponden a un mínimo local y a un máximo local respectivamente. Y finalmente los 10 restantes que corresponden al caso *iii*) de pentágonos que visualmente son triángulos. Como sabemos que el espacio de pentágonos es un toro de género 4, entonces estos 10 últimos, por Euler, tienen que ser puntos silla. ■

Tomemos un área A que sea un valor regular de la función f , entonces tenemos que $f^{-1}(A)$ es una curva ξ en \mathcal{P}^5 , el espacio de pentágonos. Es importante hacer notar, de la demostración anterior, que $\ker dF_p = \ker df_p$, dado por (4) coincide con el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x'_i(t) = \text{sen}(\alpha_{i-1}(t)) - \text{sen}(\alpha_i(t)), \quad (6)$$

donde $i = 1, \dots, 5$, $\sum_{i=1}^5 x_i = 3\pi$ y

$$\alpha_i(t) = x_{i+2}(t) + x_{i+4}(t) - \pi.$$

determinadas en el Teorema 10, Capítulo 5, e igualadas a 0. Esto prueba que si $v \in \ker df_p$ entonces $v \in T_p(\xi)$, es decir, $\ker df_p$ es el conjunto de vectores tangentes a las curvas obtenidas como imágenes inversas de valores regulares. En otras palabras, el campo de vectores determinado por las ecuaciones diferenciales (6) y por $\ker df$ coinciden, lo que implica que nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es integrable.

Por el Lema de Morse [Mard] podemos afirmar que existen vecindades de los 2 máximos y de los 2 mínimos en los cuales todas las curvas son cerradas, es decir, tenemos órbitas periódicas alrededor de estos puntos.

Observemos la proyección en \mathbb{R}^2 de estas órbitas periódicas y notemos que estas son simétricas con respecto al eje $x = y$, pues si el pentágono $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$ está en una de estas órbitas entonces el pentágono $(x_2(t), x_1(t), x_5(t), x_4(t), x_3(t))$ también está, dado que los dos pentágonos tienen la misma área. Por la misma razón existe un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_i(t_0) = x_{i-1}(0)$ ya que si $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0))$ son los ángulos interiores del pentágono inicial, es decir, si el punto $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0))$ está en la curva $f^{-1}(A)$ para alguna A entonces el punto $(x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0), x_1(0))$ también está en la órbita $f^{-1}(A)$, pues los dos pentágonos que representan tienen la misma área, y por lo tanto, existe un punto t_0 tal que $x_i(t_0) = x_{i-1}(0)$. Así que por el Corolario 3 (Capítulo 5) la curva $\beta_i(t+t_0)$ es congruente con $\beta_{i-1}(t)$ en estos casos.

Consideremos pues, como en la observación anterior, órbitas periódicas del sistema de ecuaciones (6) alrededor de los puntos críticos i e ii , y sean $t_0, \eta \in \mathbb{R}$, los mínimos números positivos tales que, $x_i(t+t_0) = x_{i-1}(t)$ como en el párrafo anterior y donde η es el periodo de dichas órbitas, es decir, $x_i(t+\eta) = x_i(t)$. Entonces tenemos el siguiente lema.

Lema 5: Para órbitas periódicas cerca del punto crítico *i*) tenemos que $5t_0 = 2\eta$ y para órbitas periódicas cerca del punto crítico *ii*) tenemos que $5t_0 = \eta$. (ver figura 2)

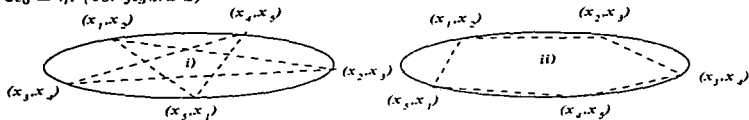


Figura 2

Demostración: Sustituyendo, en la ecuación $x_i(t + t_0) = x_{i+1}(t)$ podemos verificar, que $5t_0 = m\eta$ y que m tiene como posibilidades $m = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado, como la proyección en \mathbb{R}^2 , de estas curvas es simétrica con respecto al eje $x = y$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un pentágono $P_1(t)$ con ángulos interiores

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) = (a, a, b, c, b) \in f^{-1}(A)$$

para alguna t , por ejemplo $t = 0$. Sabemos además, que existe un punto t_0 que estamos suponiendo infinito tal que $x_i(t + t_0) = x_{i+1}(t)$. Entonces encontramos un pentágono $P_2(0)$ con ángulos interiores (a, b, c, b, a) que se puede ver como $P_1(t_0)$ y sucesivamente encontramos pentágonos

$$P_3(0) = P_2(t_0) = P_1(2t_0).$$

$$P_4(0) = P_3(t_0) = P_2(2t_0).$$

$$P_5(0) = P_4(t_0) = P_3(2t_0) = P_2(3t_0) = P_1(4t_0)$$

con ángulos interiores (b, c, b, a, a) , (c, b, a, a, b) y (b, a, a, b, c) , respectivamente y todos ellos en $f^{-1}(A)$ para alguna A , valor regular de f , en una vecindad de los valores críticos correspondientes a *i*) e *ii*).

Consideremos primero el caso *ii*) es decir, estamos pensando en órbitas periódicas alrededor del pentágono regular orientado y orientado inversamente de manera que como (a, a, b, c, b) son los ángulos interiores de un pentágono, tenemos las siguientes desigualdades naturales, si $a \leq b$ entonces $c \leq a$ y si $b \leq a$ entonces $a \leq c$.

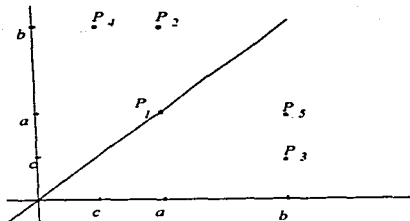


Figura 3

Lo anterior implica que la proyección en \mathbb{R}^2 de los puntos $P_2(0)$ y $P_1(0)$ están en un lado del eje $x = y$ y los puntos $P_3(0)$ y $P_5(0)$ en el otro lado. De manera que existen 4 posibilidades para el orden de la proyección en \mathbb{R}^2 de los puntos $P_1(0) = P_i$: $\{P_1, P_2, P_4, P_3, P_5\}$ y su recíproco $\{P_1, P_5, P_3, P_4, P_2\}$ o $\{P_1, P_4, P_2, P_5, P_3\}$ y su recíproco.

Supongamos primero que tenemos el orden $\{P_1, P_2, P_4, P_3, P_5\}$, entonces existe un punto $s_0 \in \mathbb{R}$ con $t_0 < s_0 < 2t_0$ tal que $P_1(s_0) = P_1(0)$. Esto implica que el punto $s := s_0 - t_0$ es tal que $P_1(s)$ tiene que ser $\tilde{P}_3(0) = (b, c, b, a, a)$ pues $\tilde{P}_3(t_0) = P_4(0)$, lo cual contradice que t_0 fuera el mínimo, pues podemos encontrar un punto $l < t_0$ tal que $P_1(l) = \tilde{P}_2(0) = (a, b, c, b, a)$, a saber $l = -(s + 4t_0)$, que es un número que está siempre entre $-t_0$ y 0 . Entonces el orden de la proyección en \mathbb{R}^2 de los puntos P_i en la curva tiene que ser $\{P_1, P_4, P_2, P_5, P_3\}$ o su recíproco.

Por otro lado el vector velocidad de la proyección en \mathbb{R}^2 de la curva en el punto $P_1(0)$ es perpendicular al eje $x = y$ porque

$$x_1'(t) = s \sin(2a) - \sin(a+c) = -x_2'(t)$$

en este punto.

Analizando el campo vectorial sobre el eje $x = y$, en una vecindad del punto $(\frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{5})$, podemos concluir que el campo apunta siempre hacia el punto $P_1(0)$ en un lado de la recta y hacia el punto $P_1(0)$ en el otro lado de la recta. Así pues el orden de la proyección en \mathbb{R}^2 de los puntos P_i en la curva tiene que ser $\{P_1, P_4, P_2, P_3, P_3\}$.

En otras palabras la proyección en \mathbb{R}^2 de la órbita periódica satisface la siguiente condición. Existe un punto $t_1 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_0$ tal que $x_i(t + t_1) = x_{i+3}(t)$ para toda t . En consecuencia,

$$x_i(t + 5t_1) = x_i(t + \eta) \text{ y } x_i(t + 10t_1) = x_i(t + 5t_0) = x_i(t + 2\eta).$$

lo que quiere decir que $5t_0 = 2\eta$ y $2t_1 = t_0$.

De manera análoga, para vecindades de los puntos críticos *ii*) que corresponden a órbitas periódicas alrededor de los pentágonos regular estrella orientado y regular estrella orientado inversamente, se puede probar que $x_i(t + 5t_0) = x_i(t + \eta)$. ■

Capítulo 8

La Teoría de los Carritos.

Uno de los propósitos de esta tesis es encontrar volantines de Zindler, es decir, volantines en donde cada una de las curvas β_i sea cerrada y la traza de todas ellas coincida. En el Capítulo 3 vimos que una vez encontrado un volantín de Zindler, es posible que éste sea una figura que flota en equilibrio en toda posición si las cuerdas que define el n -ágono son interiores. Así pues, en este capítulo, estudiaremos la teoría de los carritos que nos permite encontrar todos los volantines de Zindler de 5 sillas que existen.

Por los Lemas 6 y 7 del capítulo anterior sabemos que existe, para órbitas periódicas alrededor del pentágono regular orientado y orientado inversamente, un tiempo $0 < t_1 < t_0$ tal que $x_i(t + t_1) = x_{i+3}(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica, que dado un pentágono inicial $X(0)$, el pentágono $X(mt_1)$ con $m \in \mathbb{Z}$, es congruente al inicial. Mas aún, por el Corolario 2 del capítulo 5, sabemos que $\beta_i(t + t_1) = \Lambda_i \beta_{i+3}(t)$, donde Λ_i es una composición de una rotación seguida de una traslación. Como el centro de masa de los pentágonos es un punto fijo y como existe una única rotación que lleva el pentágono inicial $X(0)$ en el pentágono $X(mt_1)$, podemos afirmar que Λ_i no depende de i y que además Λ_i es una rotación R_σ , de un ángulo σ . Por todo lo anterior, podemos decir que, para algún $t_1 \in \mathbb{R}$:

$$\beta_i(t + t_1) = R_\sigma \beta_{i+3}(t). \quad (7)$$

ESTA TESIS
SALIR DE LA
NO DEBE
BIBLIOTECA

Definición 5: Sea $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_5(t)\}$ un volántin de 5 sillars. llamemos a la restricción de la curva $\beta_i(t)$ en el tiempo $[0, t_1]$ el i -ésimo carro o vagón del volántin .

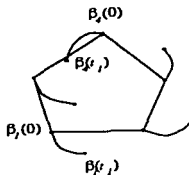


Figura 1

Proposición: Las curvas $\beta_i(t)$ de un volántin de 5 sillars están formadas de los vagones o carros. En otras palabras, una vez definido el i -ésimo carro del volántin para toda $i = 1, \dots, 5$, es posible reconstruir todas las curvas $\beta_i(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, por medio de dichos carritos. (ver figura 2)

Demostración: Tómese $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y escribáse $t = mt_1 + \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < t_1$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces, substituyendo en (7) tenemos que:

$$\beta_i(\varepsilon + mt_1) = R_{\sigma^m} \beta_k(\varepsilon)$$

donde las k son enteros entre 0 y 4 y que están dadas por la relación.

$$k \equiv i + 3m \pmod{5}.$$

■

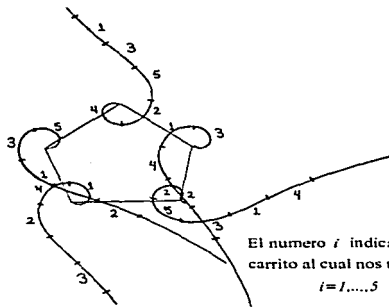


Figura 2

El número i indica el número de carrito al cual nos referimos.
 $i=1,\dots,5$

Decíamos que el propósito de este capítulo es encontrar volantines de Zindler, por lo tanto, necesitamos que la traza de la curva β_i forme parte de la traza de la curva β_{i+1} .

Por la proposición anterior, sabemos que

$$\beta_i(t) = \beta_i(\varepsilon + mt_1) = R_\sigma^m \beta_k(\varepsilon)$$

con $k \equiv i + 3m \pmod{5}$, entonces si queremos que la curva β_i forme parte de la curva β_{i+1} necesitamos que m sea de la forma $m = 5s + 2$, para $s \in \mathbb{N}$, para que así $\beta_i(t) = R_\sigma^m \beta_{k-1}(\varepsilon)$. Luego, si encontramos un pentágono inicial $X(0)$ que permita un ángulo σ tal que R_σ^m sea la identidad, habremos encontrado un volantín de Zindler. En otras palabras, si encontramos un pentágono inicial en donde la rotación que lleva dicho pentágono a él mismo, en el tiempo t_1 , sea $\sigma = \frac{2\pi r}{m}$, $1 < r < m$, entonces tendremos un volantín cerrado.

Pero no sólo buscamos volantines de $\frac{1}{2}$ -Zindler si no también figuras que no se autointersecten, es decir, queremos, por lo menos que el índice de la curva alrededor del centro de masa sea 1 (lo cual no garantiza que la curva no se autointersecte). Para verificar este hecho necesitamos saber el tamaño angular del i -ésimo carrito.

Definición 6: Supongamos que G el centro de masa de los pentágonos está en el origen, entonces definamos el tamaño angular del i -ésimo carrito como

$$C_i := \text{ángulo} \left(\frac{\beta_i(0)}{\|\beta_i(0)\|} \cdot \frac{\beta_i(t_1)}{\|\beta_i(t_1)\|} \right)$$

y por

$$\gamma_i := \text{ángulo} \left(\frac{\beta_i(0)}{\|\beta_i(0)\|} \cdot \frac{\beta_{i+1}(0)}{\|\beta_{i+1}(0)\|} \right).$$

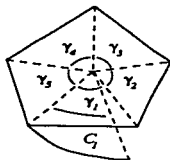


Figura 3

Como la rotación R_σ manda el 4-carrito en el conjunto

$$\{\beta_i(t_1 + \varepsilon) \mid 0 < \varepsilon < 1\},$$

entonces el ángulo σ debe ser de la forma $\sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + C_1 + 2\pi l$ con $l \in \mathbb{Z}$. pero si queremos que R_σ^m sea la identidad, entonces sabemos que $\sigma = \frac{2\pi r}{m}$, $1 < r < m$, lo cual implica que el tamaño angular del 1-carrito debe ser de la siguiente forma:

$$C_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \left(\frac{r}{m} + k_1 \right) 2\pi$$

con $k_1 \in \mathbb{Z}$.

Análogamente el tamaño angular del i -ésimo carrito es igual a

$$C_i = \gamma_i - \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \left(\frac{r}{m} + k_i\right) 2\pi$$

con $k_i \in \mathbf{Z}$.

De manera que la suma

$$C_i + C_{i+3} + C_{i+3(2)} + \dots + C_{i-3(m)} = \gamma_i + (3s+1)2\pi + r2\pi + (k_i + \dots + k_{i+3(m)})2\pi.$$

donde $C_i + C_{i+3} + C_{i+3(2)} + \dots + C_{i+3(m)}$ es el tamaño angular de la curva $\beta_i(t)$ con $0 < t < mt_1$ y donde $(3s-1)$ es el número de vueltas que se obtienen de $3(m) = 3(5s+2)$ dividiendo entre 5 y tomando su parte entera.

Si queremos que el volantín de Zindler tenga índice 1 necesitamos que

$$\sum_{i=1}^5 (C_i + C_{i-3} + C_{i+3(2)} + \dots + C_{i+3(m)}) = 1,$$

lo que implica que

$$15s + 5 + 5r + mK = 0,$$

donde $K = \sum_{i=1}^5 k_i$. Es decir las soluciones enteras para $r = 1, \dots, m$ y K de la siguiente ecuación

$$K = \frac{5(3s+1+r)}{m},$$

nos da el número r , correspondiente para dicha m (con m de la forma $5s+2$).

De manera análoga la solución de la ecuación

$$1 + 15s + 5 + 5r + mK = d,$$

nos da el ángulo necesario para encontrar un volantín de Zindler de índice d .

Ejemplo 1: Si $m = 7 = 5s + 2$ con $s = 1$, entonces la única solución entera de $K = 5(4+r)/7$ está dada por $r = 3$, de manera que $\sigma = \frac{3(2\pi)}{7}$ es el ángulo que permite la igualdad $R_\sigma^3 \beta_{i+1}(t) = \beta_i(t)$.

Buscando el adecuado pentágono inicial $X(0)$ que permita esa rotación encontramos el siguiente volántin de Zindler.

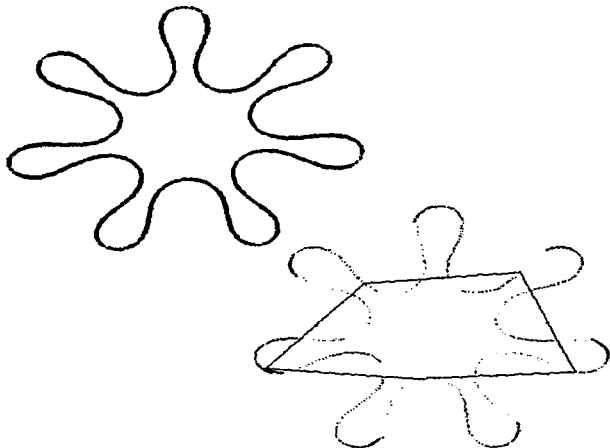


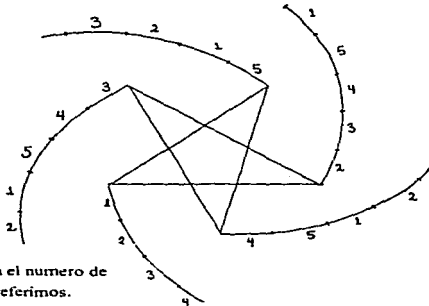
Figura 4

Observe que desgraciadamente, el sistema de cuerdas que definen los pentágonos no es interior, de manera que esta figura no flota en equilibrio a pesar de que es una curva de Zindler.

De manera análoga, para el caso de órbitas periódicas alrededor de los pentágonos regular estrella orientado y orientado inversamente, obtenemos que la soluciones enteras para $r = 1, \dots, m$ de la ecuación

$$K = \frac{5(2s + 2 + r)}{m}$$

con $m = 5s + 3$ y $s \in \mathbb{N}$, nos permiten encontrar el ángulo que necesitamos $\sigma = \frac{2\pi r}{m}$ para obtener un volantin $\frac{1}{5}$ -Zindler.



El número i indica el número de carrillo al cual nos referimos.

$i = 1, \dots, 5$

Figura 5

Apéndice

Programa para simular el comportamiento de los volantines "El Cinito"

El siguiente programa llamado Cinito, fue realizado con el Dr. Francisco Larrión y su objetivo es el de simular el movimiento de los volantines para el caso $n = 5$. Este programa esta basado en el programa de ecuaciones diferenciales llamado Phaser [Koc]. El procedimiento básico de este programa, elaborado en Pascal consiste en leer los datos que Phaser calcula de las ecuaciones diferenciales que se obtuvieron en el (Capítulo 7)(6) junto con las ecuaciones que se desprenden del Teorema 10 (Capítulo 5), y como condiciones iniciales los ángulos interiores de un pentágono. Con estos datos se grafican los puntos que determinan las curvas β_i con la posibilidad de ver la traza de estas curvas, así como también, las barras dadas por los vectores $\beta_i(t) - \beta_{i-1}(t)$ en todo momento. Grafica también los puntos medios de estas barras con lo que puede visualizarse muy claramente la condición de todo volatín de que sus puntos medios tengan velocidad paralela a las barras mismas. Este programa también permite observar la sombra que van dejando estas barras y la traza de los puntos medios si es que así se quiere.

Si bien es cierto que en Matemáticas no se puede dar como demostración la imagen obtenida mediante un programa de computadora, no se podrá negar que una vez hecho todo el trabajo formal, el poder comprobar visualmente que las cosas funcionan como esperábamos es muy gratificante.

```

program Cinito;{R+}
uses crt, graph,dos,tres_cin;

var f : array [1..5] of text;
    RenglonVacio,
    Lleno: Boolean;
    pun : pointer;
    size : word;

procedure Baja(k,i:integer):
var co:integer;
    c:char;
begin
    co:=0;
    repeat
        while not SeekEoln(f[i]) do

read(f[i],c);
        readln(f[i]); inc(co);
    until co=k;
end;

procedure LeeNum(i:integer;var r:real);
var s,t:string;
    code,l,cont:integer;
    c:char;
begin
    cont:=0;
    repeat
        begin
            read(f[i],c);
            inc(cont);
            if cont = 80 then
                begin
                    RenglonVacio:=TRUE;

```

```

        exit
    end;
end;
until c=#61;
read(f[i],c);
if not (c=#32) then Vent.Err ('Chaféó gacho mi compadre PHASER');
s:=#';
for l:=1 to 12 do
    begin
        read(f[i],c);
        s:=s+c
    end;
Val(s, r, code);
Str(code,t);t:='Error at position :'+t;
if code<>0 then Vent.Err(t);
end;

procedure Filma;
var l:integer;
s:string;
u,v:array[1..5] of real;
begin
s:=nombrePel+' .PEL';
if Existe(s) then
    begin
        reset(pelicula);close(pelicula);
        assign(pelicula,s);reset(pelicula);
        read(pelicula,P);
        Pietaje:=P.x[1];
        PuntReng:=0;reset(pelicula);
        exit
    end;
Vent.Pon('Desenlatando Pelicula...');
for l:=1 to 5 do
    begin
        Str(l,s);s:=nombrePel-s;assign(f[l],s);reset(f[l]);
    end;
end;
with P do

```

```

begin
for l:=1 to 5 do
begin
baja(9,l);
LeeNum(l,u[l]);
x[l]:=80+trunc(480/(2*e)*(u[l]+e));
LeeNum(l,v[l]);
y[l]:=80+trunc(480/(2*e)*(e-v[l]));
end;
s:=nombrePel+' .PEL';
reset(pelicula);close(pelicula);
assign(pelicula,s);rewrite(pelicula);
seek(pelicula,1);
write(pelicula,P);inc(Pietaje);
repeat
for l:=1 to 5 do
begin
baja(5,l);
LeeNum(l,u[l]);
LeeNum(l,v[l]);
end;
if not RenglonVacio then
begin
inc(Pietaje);
for l:=1 to 5 do
begin
x[l]:=80+trunc(480/(2*e)*(u[l]+e));
y[l]:=80+trunc(480/(2*e)*(e-v[l]));
end;
write(pelicula,P);
end;
until RenglonVacio = true;
end;
P.x[l]:=Pietaje;reset(pelicula);write(pelicula,P);
PuntReng:=0;reset(Pelicula);
for l:=1 to 5 do
begin
Str(l,s);s:=nombrePel+s;close(f[l]);

```

```

end;
end;

procedure ModoGrafico;
var grDriver, grMode, ErrCode : Integer;
begin
  grDriver := Detect;
  InitGraph(grDriver,grMode,'c:turbo');
  ErrCode := GraphResult;
  if ErrCode <> grOk then
    WriteLn('Graphics error : ' . GraphError.Msg(ErrCode));
  SetBkColor(ColorFondo);
end;

procedure Pinta;
begin
  with P do
    begin
      SetColor(ColorVertices);
      Case NumVertPint of
        1 : Circle(x[1],y[1],1);
        5 : begin
              Circle(x[1],y[1],1);
              Circle(x[2],y[2],1);
              Circle(x[3],y[3],1);
              Circle(x[4],y[4],1);
              Circle(x[5],y[5],1);
            end;
      end;
      SetColor(ColorAristas);
      Case NumArisPint of
        1 : line(x[1],y[1],x[2],y[2]);
        5 : begin
              line(x[1],y[1],x[2],y[2]);
              line(x[2],y[2],x[3],y[3]);
              line(x[3],y[3],x[4],y[4]);
              line(x[4],y[4],x[5],y[5]);
              line(x[5],y[5],x[1],y[1]);
            end;
      end;
    end;
end;

```

```

    end;
  end;
  SetColor(ColorMedios):
  Case NumMediosPint of
    1 : Circle(round(1/2*(x[1]+x[2])),round(1/2*(y[1]+y[2])),1);
    5 : begin
      Circle(round(1/2*(x[1]+x[2])),round(1/2*(y[1]+y[2])),1);
      Circle(round(1/2*(x[2]+x[3])),round(1/2*(y[2]+y[3])),1);
      Circle(round(1/2*(x[3]+x[4])),round(1/2*(y[3]+y[4])),1);
      Circle(round(1/2*(x[4]+x[5])),round(1/2*(y[4]+y[5])),1);
      Circle(round(1/2*(x[5]+x[1])),round(1/2*(y[5]+y[1])),1);
    end;
  end;
end;

procedure Borra;
begin
with P do
  begin
  if HueVert then SetColor(ColorVertices)
  else SetColor(ColorFondo):
  Case NumVertPint of
    1 : Circle(x[1],y[1],1);
    5 : begin Circle(x[1],y[1],1):
      Circle(x[2],y[2],1):
      Circle(x[3],y[3],1):
      Circle(x[4],y[4],1):
      Circle(x[5],y[5],1):
    end;
  end;
  if HueAris then SetColor(ColorHuella)
  else SetColor(ColorFondo):
  Case NumArisPint of
    1 : line(x[1],y[1],x[2],y[2]);
    5 : begin
      line(x[1],y[1],x[2],y[2]);
      line(x[2],y[2],x[3],y[3]);
    end;
  end;
end;
end;

```



```

        line(x[3],y[3],x[4],y[4]);
        line(x[4],y[4],x[5],y[5]);
        line(x[5],y[5],x[1],y[1]);
    end;
end;
if HueMeds then SetColor(ColorMedios)
else SetColor(ColorFondo);
Case NumMedsPint of
1 : Circle(round(1/2*(x[1]+x[2])),round(1/2*(y[1]+y[2])),1);
5 : begin
    Circle(round(1/2*(x[1]+x[2])),round(1/2*(y[1]+y[2])),1);
    Circle(round(1/2*(x[2]+x[3])),round(1/2*(y[2]+y[3])),1);
    Circle(round(1/2*(x[3]+x[4])),round(1/2*(y[3]+y[4])),1);
    Circle(round(1/2*(x[4]+x[5])),round(1/2*(y[4]+y[5])),1);
    Circle(round(1/2*(x[5]+x[1])),round(1/2*(y[5]+y[1])),1);
end;
end;
end;
end;

procedure DaCapo;
begin
if PuntReng=1
then Pita
else begin
    Borra;
    PuntReng:=1;
    seek(pelicula,PuntReng);
    Read(pelicula,P);
    Pinta;
end;
end;

procedure AlFine;
begin
if PuntReng=Pietaje
then Pita
else begin

```

```

        Borra;
        PuntReng:=Pietaje;
        seek(pelicula,PuntReng);
        Read(pelicula,P);
        Pinta;
        end;
end;

procedure Avanza;
var l:integer;
    c:char;
begin c:=#19;
If PuntReng = Pietaje
then Pita
else repeat
    Borra;
    read(pelicula,P);inc(PuntReng);
    Pinta;
    if KeyPressed then
        begin
            c:=ReadKey;
            if c=#40 then c:=ReadKey;
            end;
        if PuntReng = Pietaje then
            begin
                Pita;
                exit
            end;
        delay(lentitud);
        until (c=#80) or (c=#72);
end;

procedure Retrocede;
var l:integer;
    c:char;
begin
    c:=#19;
    If PuntReng = 1

```

```

then Pita
else repeat
  Borra;
  seek(pelicula,FilePos(pelicula)-2);
  read(pelicula,P);dec(PuntReng,1);
  Pinta;
  if KeyPressed then
  begin
    c:=ReadKey;
    if c=#0 then c:=ReadKey;
  end;
  if PuntReng = 1 then
  begin
    Pita;
    exit
  end;
  delay(lentitud);
  until (c=#80) or (c=#72);
end;

procedure Guarda;
var x1,x2,y1,y2:word;
begin
  if Lleno then freemem(Pun.size);
  x1:=150;y1:=10+75;x2:=500;y2:=320+78;
  Size := ImageSize(x1,y1,x2,y2);
  GetMem(Pun, Size);
  GetImage(x1,y1,x2,y2,Pun );
  Lleno:=true;
end;

procedure Pon:
begin
  if not Lleno
  then pita
  else PutImage(150. 10+75, Pun .NormalPut);
end;

```

```

procedure MenuCabina:
  begin
    cursor.apagado;
    with v[0] do
      begin
        guarda;
        pintate;
        cursor.en(1.PrimReng);
        for i:=1 to NumRengs do writeln(Letrero[0,i]);
        prende(ind);
        trabaja;
        end;
      VentMenu.VeteAl(2);
    end;

procedure AtajoCabina:
  begin
    reg.ah:=$05;
    reg.ch:=1;
    reg.cl:=27;
    intr(16,reg);{Mete Esc al KbdBfr}
    reg.ah:=05;
    reg.ch:=80;
    reg.cl:=0;
    intr(16,reg);{Mete Flecha.Abajo al KbdBfr}
    reg.ah:=05;
    reg.ch:=1C;
    reg.cl:=0D;
    intr(16,reg);{Mete Ret al KbdBfr}
  end;

procedure PintaMenuPrinc: forward;
procedure RegresaMenuPrinc:
  begin
    CloseGraph;
    PintaMenuPrinc;
    seek(Pelicula.puntreng);
    dec(PuntReng);
  end;

```

```

end;

procedure MenuGraf;
var c:char;
begin
  ModoGrafico;
  inc(PuntReng);
  seek(pelicula.puntreng);
  Read(pelicula.P);
  Pinta;
  repeat
    c:=ReadKey;
  case c of
    #27 [Esc] : RegresaMenuPrinc;
    #8 [BkSp] : AtajoCabina;
    #12 [Ctrl-L] : ClearDevice;
    #13 [Ret] : Avanza;
    #2 [Ctrl-B] : Borra;
    #7 [Ctrl-G] : Guarda;
    #16 [Ctrl-P] : Pon;
    # 0 Especial : begin
      c:=ReadKey;
      case c of
        #71 [Ini] : DaCapo;
        #77 [Flecha.Arriba] : Avanza;
        #75 [Flecha.Abajo] : Retrocede;
        #79 [Fin] : AlFin;
      end;
    end;
  until c =#27;
end;

procedure PintaMenuPrinc;
var i:word;
begin
  cursor.apagado;
  window(1,1,80,25);

```

```

Tapiz2;
with VentMenu do
begin
Ini;
Nombre:= ' ';
ConMarco:=true;
TipoDeMarco:=Doble;
ColorLetras:=0;
ColorFondo:=2;
x1:=2+35; y1:=2+6; x2:=32+35; y2:=14+6;
ind:=2;
r[1]:= '          ':
r[2]:= ' CACARO ':
r[3]:= '          ':
r[4]:= '          ':
r[5]:= '          ':
r[6]:= 'CABINA':
r[7]:= '          ':
r[8]:= '          ':
r[9]:= '          ':
r[10]:= 'SALIDA':
Guarda;
Pintate;
window(x1,y1,x2,y2);
gotoXY(2,5);write(#204{ # });
gotoXY(30,5);write(#185{#});
gotoXY(3,5);
for i:=1 to 27 do write(#205{=});
gotoXY(2,9);write(#204{#});
gotoXY(30,9);write(#185{#});
gotoXY(3,9);
for i:=1 to 27 do write(#205{ });
TextColor(ColorLetras);
for i:=1 to 10 do
if i mod 4 <> 0 then
begin
gotoXY(4,i+1);
write(r[i]);

```

```

        end;
        TextColor(7);
        prende(ind);
        end;
end;

procedure MenuPrinc;
var c:char;
begin with VentMenu do
repeat
begin
c:=readkey;
case c of
0 :| begin
c:=readkey;
case c of
#72 : sube;
#80 : baja;
#71 : VeteAl(2);
#79 : VeteAl(10);
end;
end;
#13 : case ind of
# 2 : MenuGraf;
# 6 : MenuCabina;
#10 : exit;
end;
end;
end;
until FALSE;
end;

BEGIN
Pietaje:=0;
RenglonVacio:=FALSE;
Lleno:=false;
clrscr;
Tapiz2;

```

```
v[1].conSombra:=true;  
pideNombrepelicula;  
v[1].conSombra:=false;  
Filma;  
PintaMenuPrinc;  
MenuPrinc;  
CloseGraph;  
Reset(pelicula);Close(pelicula);  
window(1,1,80,25);  
TextBackground(0);  
TextColor(7);  
clrscr;  
END.
```


Bibliografía

[Au] Auerbach, H. *Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottant.* Studia Math. 7 1938 pp (121-142)

[Bol] Boltyanskii, V.G. and Yaglom, I.M., *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1961.

[DeGr] Derrick and Grossman., *Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones* Addison- Wesley Iberoamericana. 1986

[Koç] Koçak, Hüseyin., *Differential and Difference Equations Through Compute Experiments.*
(*Phaser: An Animator/ Simulator for Dynamical systems for IBM Personal Computers*) Springer-Verlag 1986.

[Mard] Marsden, Jerrold E., *Elementary Classical Analysis.* W.H. Freeman and Company 1974.

[Mau] Mauldin, R.D., *The Scottish Book; Mathematics from the Scottish Café*, Birkhauser, Boston 1981

[Mon] Montejano Peimbert, Luis., *Cuerpos de Ancho Constante.* Instituto de Matemáticas U.N.A.M. (por aparecer)