



01173

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**ANALISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR  
EN ALETAS UTILIZANDO TECNICAS  
ESPECTRALES**

**TESIS**

**PRESENTADA POR:**

**EDUARDO MEDINA HERNANDEZ**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERIA**

**INGENIERIA MECANICA**

**DIRIGIDA POR:**

**ASESOR: DR. JAIME G. CERVANTES DE GORTARI**

Ciudad Universitaria

1997

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

a V.E.K.E.

**Agradecimientos:**

**A César Treviño, Federico Méndez, Jaime Cervantes, Francisco Solorio y Augusto Sánchez, todos ellos compañeros del Departamento de Termoenergía con los que he colaborado, ya que de una u otra manera me alentaron y contribuyeron para que pudiera realizar este trabajo. A Alejandro Romero por la revisión y observaciones al manuscrito.**

**ANALISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS  
UTILIZANDO TECNICAS ESPECTRALES**

<b>CONTENIDO:</b>	<b>PAGINA</b>
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>ii</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>iv</b>
<b>1.- INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>2.- ANALISIS</b>	<b>5</b>
<b>3.- DISCUSION DE RESULTADOS</b>	<b>19</b>
<b>4.- CONCLUSIONES</b>	<b>27</b>
<b>5.- RECONOCIMIENTOS</b>	<b>30</b>
<b>6.- REFERENCIAS</b>	<b>30</b>
<b>7.- FIGURAS</b>	<b>33</b>
<b>APENDICES</b>	
<b>A. TECNICAS ESPECTRALES</b>	<b>47</b>
<b>B. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV</b>	<b>55</b>
<b>C. NORMALIZACION DE ECUACIONES</b>	<b>57</b>
<b>D. ANALISIS DE COMPORTAMIENTO DE LA TECNICA ESPECTRAL</b>	<b>62</b>
<b>E. PROGRAMA DE COMPUTADORA</b>	<b>70</b>

## NOMENCLATURA

A	área transversal de la aleta en la posición x,	[m <sup>2</sup> ]
A <sub>o</sub>	área transversal de la aleta en su base,	[m <sup>2</sup> ]
A <sup>o</sup>	área transversal de la aleta, adimensional,	[1]
a <sub>n</sub>	coeficientes de la solución $\theta = \sum a_n T_n$ ,	[1]
B	amplitud de la oscilación de la temperatura,	[1]
B <sub>o</sub> <sup>2</sup>	parámetro definido por la ecuación (3),	[1]
b	ancho de la aleta,	[m]
c	calor específico de la aleta,	[J/kg·K]
c <sub>n</sub>	coeficiente en la fórmula de recurrencia $\theta'(\eta) = \sum \frac{2}{c_n} \sum p_n T_n$ ,	[1]
F	transformada rápida de Fourier (FFT),	[1]
h	coeficiente de transferencia de calor,	[W/m <sup>2</sup> ·K]
h	constante de transferencia de calor,	[W/m <sup>2</sup> ·K]
h <sub>L</sub>	mitad del espesor de la aleta en su extremo,	[m]
h <sub>o</sub>	mitad del espesor de la aleta en su base,	[m]
H <sub>OL</sub>	$= (h_o - h_L)/h_o$	[1]
H <sub>P</sub>	$= 4(h_o - h_L)/P_o$	[1]
k	conductividad térmica de la aleta,	[W/m·K]
k <sub>o</sub>	valor constante de la conductividad térmica,	[W/m·K]
k <sup>o</sup>	conductividad térmica adimensional de la aleta,	[1]
k <sub>1</sub> <sup>o</sup>	parámetro adimensional de la conductividad térmica de la aleta,	[1]
k <sub>2</sub> <sup>o</sup>	parámetro adimensional de la conductividad térmica de la aleta,	[1]
k <sub>v</sub> <sup>o</sup>	$= 1 + k_1^o + k_2^o$	[1]
L	longitud de la aleta,	[m]
M	N+1	[1]
N	número de modos (incluye el modo cero, i.e. N+1),	[1]
P	perímetro de la aleta,	[m]
P <sub>o</sub>	perímetro de la aleta en su base,	[m]

$P^\circ$	perímetro adimensional de la aleta,	[1]
$Q$	razón total de calor,	[W]
$Q^\dagger$	razón total de calor adimensional,	[1]
$t$	tiempo,	[s]
$T$	temperatura,	[K]
$T_n$	polinomio de Chebyshev de orden $n$ ,	[1]
$V$	volumen de la aleta,	[m <sup>3</sup> ]
$\alpha$	posición en la aleta,	[m]
$\alpha^\circ$	posición adimensional en la aleta,	[1]
$\psi$	altura a partir del centro de la aleta,	[m]

letras griegas:

$\alpha_0$	difusividad térmica de la aleta,	[m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	exponente en la ecuación (4)	[1]
$\delta$	pendiente en la ecuación de conductividad térmica,	[W/m·K <sup>2</sup> ]
$\epsilon$	efectividad de la aleta,	[1]
$\eta$	$2\alpha^\circ - 1$ ,	[1]
$\eta^\dagger$	eficiencia de la aleta,	[1]
$\pi$	3.14159..	[1]
$\rho$	densidad de la aleta,	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\theta$	temperatura adimensional,	[1]
$\tau$	tiempo adimensional,	[1]
$\omega$	frecuencia de la oscilación,	[1]
$\Omega$	factor de peso en el esquema numérico,	[1]

subíndices:

$b$	base de la aleta,
$m$	valor medio,
$\infty$	medio ambiente,
1-5	diferentes Transformadas Rápidas de Fourier (FFT)

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo es conocer el comportamiento de aletas de sección transversal variable y conductividad térmica variable en estado transitorio, utilizando técnicas espectrales. El problema resultante es una ecuación diferencial no lineal que se resuelve utilizando polinomios de Chebyshev en un esquema pseudo-espectral. Se realizaron los análisis del comportamiento transitorio causado por un cambio abrupto en la base de la aleta a una temperatura constante así como el debido a una fluctuación periódica de la temperatura. Los resultados muestran que el efecto de la conductividad térmica es mucho más significativo que el de la geometría de la aleta. Los efectos de la amplitud y la frecuencia de la fluctuación en la temperatura de la base, son el de elevar la amplitud promedio de la razón total de calor y el de aumentar la amplitud en las fluctuaciones de la misma razón de calor, respectivamente. Entonces, al incrementarse la frecuencia la razón de calor promedio disminuye llegando inclusive a ser más baja que la correspondiente a frecuencia cero.

## 1.- INTRODUCCION

El análisis de problemas básicos en el campo de la Ingeniería Térmica siempre será necesario por las implicaciones de los resultados obtenidos en la solución de problemas reales. Esta es la razón por la que se plantea este estudio.

La respuesta transitoria de las aletas es de gran importancia en numerosas aplicaciones de los procesos de transferencia de calor asociados a equipos térmicos. Para aletas delgadas, el proceso de transferencia de calor que

se lleva a cabo en la superficie de la aleta puede modelarse incluyendo en la ecuación de la energía un término fuente que es proporcional a la temperatura local elevada a alguna potencia,  $h = h_0^n$ . Se desacopla de esa manera el problema de transferencia de calor en la aleta con el del flujo externo a la misma. La respuesta transitoria para una aleta convectiva (dependencia lineal) ha sido analizada en varios trabajos [1-4]. El exponente puede tomar valores de 0.75, 1.0, 1.25, 3.0 y 4.0 cuando la aleta se enfria por medio de ebullición de película, convección forzada, convección natural, ebullición nucleada y radiación, respectivamente [5].

Para resolver algunos de los problemas de aletas que dan como resultado ecuaciones no lineales, se han utilizado tanto las diferencias finitas como el elemento finito en varios trabajos [6,7]. En cuanto a tratamientos analíticos, éstos se han utilizado para resolver la ecuación en el caso lineal transitorio [9] y en el caso no lineal en estado permanente obteniéndose soluciones para valores del exponente entre -1 y 2 [8]. También los métodos de perturbación así como otras técnicas aproximadas han sido empleadas en el análisis de procesos de transferencia de calor en aletas delgadas [4,10,11,12]. Aziz y Na [10] usaron una técnica de perturbación en el estudio del proceso de transferencia de calor en aletas con variación periódica de la temperatura en la base y propiedades térmicas variables. La amplitud de las oscilaciones de

temperatura fue pequeña comparada con respecto al valor medio en la base. Aziz y Na [4]] usaron una técnica de expansión de coordenadas para estudiar la respuesta transitoria de aletas delgadas para valores pequeños del tiempo adimensional. Chang et al. [11] usaron la aproximación lineal de las ecuaciones no lineales con la ayuda de métodos variacionales. Medina et al. [12, 13], empleando técnicas de perturbación para altas frecuencias y un método espectral, obtuvieron el flujo de calor cuando la temperatura en la base de la aleta de sección transversal constante, oscila alrededor de un valor medio. Méndez et al. [14], analizaron mediante técnicas asintóticas el efecto de la geometría variable y de las altas frecuencias de oscilación, y compararon los resultados con los obtenidos con métodos espectrales.

Se puede observar que aunque el análisis del comportamiento de aletas ha sido estudiado ampliamente desde distintos puntos de vista, la solución integral del problema no lineal, particularmente para amplitudes finitas, no se ha tratado. En este trabajo se obtiene el comportamiento de aletas de sección transversal y conductividad térmica variables para el caso en el que la temperatura de la base fluctúa alrededor de un valor medio a una frecuencia dada; se analiza entonces, el comportamiento transitorio de las aletas con la acción simultánea de la geometría, la conductividad y la frecuencia de oscilación con amplitud

finita utilizando técnicas espectrales, aportando una visión integral. La solución del problema resulta de interés en el estudio de aletas ya que la combinación de los parámetros es lo que normalmente se asociaría a una aleta real trabajando en condiciones que pueden presentarse en máquinas en la que las fluctuaciones de temperatura son típicas, como lo son los motores de combustión interna. El problema resultante es una ecuación diferencial no lineal que se resuelve utilizando polinomios de Chebyshev en un esquema pseudo-espectral, como el aplicado en [12] y [13]. Se reafirman las cualidades de las técnicas espectrales [15] sobre los métodos convencionales al involucrar en el cálculo un número de operaciones significativamente más pequeño. En los apéndices A, B, C y D se discuten brevemente los principios básicos de los métodos espectrales, se enlistan las principales características de los polinomios de Chebyshev, se detallan las variables dimensionales utilizadas, y se hace un análisis del comportamiento del método mediante el cual se eligió el número de nodos (*i.e.* divisiones en el espacio) utilizados en el trabajo, respectivamente. En el apéndice E se enlista el programa utilizado.

## 2. ANALISIS

Se considera el proceso de transferencia de calor pseudo-unidimensional para una aleta delgada de sección transversal y conductividad térmica variables, de longitud  $L$  como la de la figura 1, y con temperatura ambiental  $T_{\infty}$ . En el tiempo  $t=0$ , la temperatura en la base es uniforme e igual a  $T_{\infty}$  y para  $t>0$ , la aleta cambia abruptamente a una temperatura  $T_b$  que oscila alrededor de un valor medio a una amplitud y frecuencia dadas. Por simplicidad, se supone que los flujos convectivos de calor en la parte superior e inferior de la aleta dependen de la diferencia de

la temperatura local y la ambiental  $[T - T_0]$  elevada a una potencia, como suele aproximarse en otros trabajos [1-14]. EL procedimiento de solución utilizado en la ecuación resultante serán las técnicas espectrales [15]. Para este caso, dado el carácter parabólico de la ecuación y de condiciones no simétricas de frontera, se emplearán los polinomios de Chebyshev, obteniéndose una ecuación diferencial ordinaria cuya variable independiente es el tiempo y donde los términos no lineales son Transformadas Coseno de Fourier.

El balance de energía para la aleta de la figura 2 es

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g = \dot{E}_s + \dot{E}_a \quad (1)$$

donde:

$$\dot{E}_e = Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\dot{E}_g = 0$$

$$\dot{E}_s = Q_{x+dx} + Q_c = Q_x + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q_c = Q_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -kA \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + hPdx(T - T_0),$$

$$\dot{E}_a = \rho cdV \frac{\partial T}{\partial t}$$

sustituyendo en la ecuación (1):

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -kA \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + hPdx(T - T_0) + \rho cdV \frac{\partial T}{\partial t}$$

y reordenando:

$$\rho c dV \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx - hP dx (T - T_{\infty})$$

$$dV = A dx$$

$$\rho c A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ kA \frac{\partial T}{\partial x} \right] - hP (T - T_{\infty}) \quad (2)$$

Utilizando las variables adimensionales (el detalle de las variables adimensionales empleadas junto con el desarrollo de la ecuación, se encuentran en el apéndice C), la ecuación anterior se transforma en

$$A^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x^{\circ}} \left[ k^{\circ} \cdot A^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial x^{\circ}} \right] - B_0^2 (1 - H_p x^{\circ}) \theta^{\beta}$$

donde el efecto convectivo ha sido incluido en la dependencia no lineal, y el parámetro  $B_0^2$  es

$$B_0^2 = \frac{h L^2 P_0}{\rho c A_0} \quad (3)$$

Se puede ver que  $B_0^2$  es un parámetro adimensional que relaciona la transferencia de calor por convección de la aleta al medio ambiente a la transferencia de calor por conducción en la misma. Por otra parte como ya se mencionó, el exponente  $\beta$  adquirirá diferentes valores dependiendo del tipo de fenómeno convectivo que se desee estudiar. En el caso analizado,  $\beta$  es igual a 2.

Desarrollando la derivada de  $x^{\circ}$  y dividiendo entre  $A^{\circ}$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \kappa^{\circ} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\kappa^{\circ}}{A^{\circ}} \frac{\partial A^{\circ}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \kappa^{\circ}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - B_o^2 \frac{(1 - H_p \alpha^{\circ})}{(1 - H_{oL} \alpha^{\circ})} \theta^{\beta} \quad (4)$$

Finalmente, sustituyendo los valores de  $\kappa^{\circ}$  y  $A^{\circ}$ , la ecuación queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = & (1 + \kappa_1^{\circ}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa_2^{\circ} \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - H_{oL} \frac{(1 + \kappa_1^{\circ})}{(1 - H_{oL} \alpha^{\circ})} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\ & - H_{oL} \frac{\kappa_2^{\circ}}{(1 - H_{oL} \alpha^{\circ})} \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \kappa_2^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\ & - B_o^2 \frac{(1 - H_p \alpha^{\circ})}{(1 - H_{oL} \alpha^{\circ})} \theta^{\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

Para poder utilizar los polinomios de Chebyshev, es necesario hacer el siguiente cambio de variable:  $\eta = 2\alpha^{\circ} - 1$

Al sustituir en la ecuación anterior, después de algunas manipulaciones, queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = & 4(1 + \kappa_1^{\circ}) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 4\kappa_2^{\circ} \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - H_{oL} \frac{4(1 + \kappa_1^{\circ})}{(2 - H_{oL} - H_{oL} \eta)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ & - 4H_{oL} \frac{\kappa_2^{\circ}}{(2 - H_{oL} - H_{oL} \eta)} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + 4\kappa_2^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ & - B_o^2 \frac{(2 - H_p - H_p \eta)}{(2 - H_{oL} - H_{oL} \eta)} \theta^{\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

**Condiciones de frontera e inicial.**

En este trabajo se analizaron los siguientes casos de condiciones a la frontera:

i) Salto de temperatura uniforme

$$\theta(0,\tau) = 1, \theta(1,\tau) = 0 \quad (7)$$

ii) Salto de temperatura con oscilación

$$\theta(0,\tau) = 1 + B \cdot \text{sen}(\omega\tau), \theta(1,\tau) = 0 \quad (8)$$

donde B es la amplitud de la oscilación y  $\omega$  es la frecuencia de la oscilación. Por conveniencia se definió una frecuencia adimensional por lo que realmente representa un factor amplificador del tiempo adimensional.

Para ambos casos la condición inicial es

$$\theta(x,0) = 0 \quad (9)$$

Siguiendo el tratamiento aplicado en [12], se supone una solución de la forma

$$\theta(\eta, \tau) = \sum_{n=0}^M a_n(\tau) T_n(\eta) \quad (10)$$

donde  $T_n$  son los polinomios de Chebyshev definidos como

$$T_n(\eta) = \cos(n\alpha), \quad \alpha = \cos^{-1}(\eta) \quad (11)$$

$M$  es el número máximo de modos tomados en cuenta en el análisis. En el caso del método pseudo-espectral para ecuaciones parabólicas [15], dos de los modos corresponden a las condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera toman entonces la forma

$$\theta(-1, \tau) = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^M a_n(\tau) T_n(-1) = \sum_{n=0}^M a_n(\tau) (-1)^n = 1 \quad (12)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^M a_n(\tau) T_n(1) = \sum_{n=0}^M a_n(\tau) = 0 \quad (13)$$

para el primer caso, y

$$\begin{aligned} \theta(-1, \tau) = 1 + B \operatorname{sen}(\omega\tau) &\rightarrow \sum_{n=0}^M a_n(\tau) T_n(-1) \\ &= \sum_{n=0}^M a_n(\tau) (-1)^n = 1 + B \operatorname{sen}(\omega\tau) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^M a_n(\tau) T_n(1) = \sum_{n=0}^M a_n(\tau) = 0 \quad (15)$$

para el segundo caso.

Tomando en cuenta sólo M-2 modos y utilizando los restantes para satisfacer las condiciones de frontera:

$$a_{N+1} = \frac{1}{2} + \frac{A}{2} \operatorname{sen}(\omega\tau) - \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_{2n} \text{ (par)} \quad (16)$$

$$a_{N+2} = -\frac{1}{2} - \frac{A}{2} \operatorname{sen}(\omega\tau) - \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_{2n+1} \text{ (non)} \quad (17)$$

que se pueden escribir de manera reducida como

$$a_{N+L} = \left\{ \left[ \frac{3}{2} - L \right] \left[ 1 + B \operatorname{sen}\omega\tau \right] - \sum_{m=0}^{(N-1)/2} a_{2m+L} \right\} \quad (18)$$

donde L toma los valores 1 ó 2 dependiendo si n es par o non.

Después de sustituir la ecuación (10) en la ecuación (6), se eliminan las sumas asociadas a la derivada temporal mediante las características de ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev, por lo que después de integrar utilizando el núcleo apropiado (ver apéndice B) la ecuación de la energía queda

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \sum_{m=0}^N a_m(\tau) T_m(\eta) \right] T_n(\eta) (1-\eta^2)^{-1/2} d\eta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 4(1 + \kappa_1^*) \sum_{\substack{p=m+2 \\ p+m \text{ par}}}^M p(p^2 - m^2) T_m(\eta) T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta + \\
&+ \int_{-1}^1 4\kappa_2^* \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta - \int_{-1}^1 H_{OL} \frac{4(1 + \kappa_1^*)}{(2 - H_{OL} - H_{OL} \eta)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta + \\
&- \int_{-1}^1 4H_{OL} \frac{\kappa_1^*}{(2 - H_{OL}^2 - H_{OL} \eta)} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta + \int_{-1}^1 4\kappa_2^* \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta \\
&- \int_{-1}^1 B_o^2 \frac{(2 - H_{OL} - H_{OL} \eta)}{(2 - H_{OL}^2 - H_{OL} \eta)} \theta^\beta T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta ,
\end{aligned}$$

introduciendo el siguiente cambio de variable

$$\eta = \cos \alpha, \quad d\eta = -\text{sen} \alpha \, d\alpha, \quad (1 - \eta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\text{sen} \alpha}$$

y reconociendo que

$$\int_{-1}^1 f(\eta) T_n(\eta) (1 - \eta^2)^{-1/2} d\eta = \int_{\pi}^0 f(\eta) \cos m \alpha \frac{-\text{sen} \alpha \, d\alpha}{\text{sen} \alpha} = \int_0^{\pi} f(\eta) \cos m \alpha \, d\alpha$$

puede demostrarse que se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes  $a_m$ , dado por

$$\frac{da}{d\tau^m} = \frac{4(1+k_1^0)}{c_m} \sum_{\substack{p=m+2 \\ p+m \text{ par}}}^N p(p^2-m^2) a_p + \frac{8k_2^0}{\pi c_m} F_1 - \frac{2}{\pi c_m} F_2 - \frac{2}{\pi c_m} F_3 + \\ + \frac{8k_2^0}{\pi c_m} F_4 - \frac{2B^2}{\pi c_m^0} F_5$$

y utilizando los valores de los coeficientes  $a_{N+1}$  y  $a_{N+2}$  dados por (15) finalmente se tiene que

$$\frac{da}{d\tau^m} = \frac{4(1+k_1^0)}{c_m} \left\{ \sum_{\substack{p=m+2 \\ p+m \text{ par}}}^N p(p^2-m^2) a_p + (N+L) [(N+L)^2-m^2] \left\{ \left[ \frac{3}{2} - L \right] \left[ 1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. B \operatorname{sen}(\omega\tau) \right] - \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_{n+L-1} \right\} \right\} + \frac{8k_2^0}{\pi c_m} F_1 - \frac{2}{\pi c_m} F_2 - \\ - \frac{2}{\pi c_m} F_3 + \frac{8k_2^0}{\pi c_m} F_4 - \frac{2B^2}{\pi c_m^0} F_5 \quad (19)$$

donde  $c_0=2$  y  $c_m=1$  para  $m > 0$ ,  $L=1$  para  $m$  par y  $L=2$  para  $m$  non, y

$$F_1 = \int_0^{\pi} \left\{ \left[ \theta \cdot \theta'' \right] \right\} \cos(m\alpha) d\alpha$$

$$F_2 = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{4H_{OL} (1+K_1^*)}{(2-H_{OL}-H_{OL} \cos\alpha)} \left[ \theta \cdot \theta'' \right] \right\} \cos(m\alpha) d\alpha$$

$$F_3 = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{4H_{OL} K_2^*}{(2-H_{OL}-H_{OL} \cos\alpha)} \left[ \theta \cdot \theta' \right] \right\} \cos(m\alpha) d\alpha$$

$$F_4 = \int_0^{\pi} \left\{ \left[ \theta' \cdot \theta' \right] \right\} \cos(m\alpha) d\alpha$$

$$F_5 = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{(2-H_P - H_P \cos\alpha)}{(2-H_{OL} - H_{OL} \cos\alpha)} \left[ \theta^{\beta} \right] \right\} \cos(m\alpha) d\alpha$$

Los términos  $F_1$  a  $F_5$  son Transformadas Coseno de Fourier de los argumentos encerrados entre llaves ( { . . } ).

**Procedimiento de solución.**

La ecuación (19) es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las incógnitas a determinar son los coeficientes de la serie propuesta. Si se eligen N modos (incluido el cero), se tendrá un total de N+1 ecuaciones que involucran N+3 modos, donde los últimos dos se calculan mediante (18). El sistema se puede resolver fácilmente mediante un esquema de diferencias finitas para el tiempo, la ecuación (19) toma la forma

$$\begin{aligned}
 a_m(k+1) - \frac{4\Delta\tau}{c_m} (1 + \kappa_1^0) \cdot \sum_{\substack{p=m+2 \\ p+m \text{ par}}}^N p(p^2-m^2) a_p(k+1) \cdot \Omega + \\
 \frac{4\Delta\tau}{c_m} (1 + \kappa_1^0) \cdot (N+L) \left[ (N+L)^2 - m^2 \right] \sum_{n=0}^{N-1/2} a_{2n+L-1}(k+1) \cdot \Omega \\
 = \\
 a_m(k) + \frac{4\Delta\tau}{c_m} (1 + \kappa_1^0) \sum_{\substack{p=m+2 \\ p+m \text{ par}}}^N p(p^2-m^2) a_p(k) \cdot (1-\Omega) + \\
 \frac{4\Delta\tau}{c_m} (1 + \kappa_1^0) \cdot (N+L) \left[ (N+L)^2 - m^2 \right] \left\{ \left[ \frac{3}{2} - L \right] \left[ 1 + B \operatorname{sen}(\omega\tau) \right] + \right. \\
 \left. - \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_{2n+L-1}(k) \cdot (1-\Omega) \right\} + \frac{8\kappa_2^0 \Delta\tau}{N c_m} F_1 - \frac{2\Delta\tau}{N c_m} F_2 - \frac{2\Delta\tau}{N c_m} F_3 +
 \end{aligned}$$

$$\frac{8k_2 \Delta \tau}{N c_m} F_4 - \frac{2B_0^2 \Delta \tau}{N c_m} F_5 \quad (20)$$

En la ecuación (17) los índices  $k$  y  $k+1$  representan la solución para dos tiempos consecutivos, y  $\Omega$  sería el factor de peso asignado a la función evaluada en el tiempo  $k+1$ . Si  $\Omega = 1/2$ , entonces se tiene el esquema de Crank-Nicholson [17]. En este caso se utilizó un esquema implícito puro, *i.e.*  $\Omega = 1$ . Esta ecuación representa un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Los términos  $F_1$  a  $F_5$  pueden obtenerse por medio de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Razón total de calor,  $Q$

El parámetro más importante en estos casos es el flujo de calor en la base de la aleta. Una vez determinados los coeficientes de Chebyshev, la razón total de calor  $Q$  que desaloja la aleta, se puede calcular fácilmente mediante la ley de Fourier utilizando para el cálculo de la derivada en la base de la aleta la relación de recurrencia correspondiente:

$$Q = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

y utilizando las variables adimensionales se reduce a:

$$Q^* = -2 \left[ 1 + \kappa_1^* + \kappa_2^* \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1} = \kappa_v^* Q_0^* \quad (21)$$

donde  $Q_0^* = -2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1}$ ,

representa la razón total de calor para la aleta de conductividad térmica constante, y la derivada en función de los polinomios de Chebyshev está dada por la expresión (Apendice B)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{\eta=-1} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1} = 4 \sum_{n=0}^N T_n'(-1) / c_n \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ par}}}^N p a_p \quad (22)$$

Eficiencia y efectividad de la aleta.

La eficiencia de una aleta está definida [18] como la relación del flujo de calor que disipa la aleta al flujo ideal que disiparía si su temperatura fuera constante e igual a la de su base:

$$\eta^* = \frac{Q^*}{Q_{ideal}^*}, \quad (23)$$

con

$$Q_{ideal}^* = \frac{B_o^2 A_{aleta}}{L P_o} \theta^2$$

La efectividad de una aleta está definida [18] como la relación del flujo de calor que disipa la aleta al flujo que disiparía la superficie sin la aleta correspondiente:

$$\epsilon = \frac{Q^*}{Q_{\text{sin aleta}}^*}, \quad (24)$$

con

$$Q_{\text{sin}}^* = \frac{B_o^2 A_o}{L P_o} \theta^2$$

Los parámetros anteriores se calculan una vez que se ha determinado la razón total de calor. En el caso de estudio se asignó al parámetro  $B_o^2$  el valor de 25, y para  $\beta = 2$ , como se hizo en [12, 13 y 14].

### 3.- DISCUSION DE RESULTADOS

En el presente capítulo se discuten los resultados obtenidos mediante la técnica espectral. Inicialmente, se analizó el comportamiento de la solución respecto al número de modos utilizado, para lo cual, se efectuaron un total de 24 corridas que involucraron temperatura en la base de la aleta constante, geometría y conductividad térmica de la aleta variables, y temperatura en la base de la aleta con frecuencia constante. Los valores de números de modos utilizados en este caso fueron 5, 7, 9, 11, 13, 15, 25, 35 y 45. La diferencia máxima encontrada entre

el segundo caso (N=7) y el último (N=45), fue de 0.09% para el caso de temperatura constante en la base de la aleta y del 2.0% entre los valores medios para el caso de temperatura fluctuante, por lo que se decidió utilizar el valor N=7 para el resto del análisis. En el apéndice 4 se discuten con más detalle los resultados en función del número de modos.

El flujo de calor adimensional  $Q^*$  en estado permanente en la base de una aleta de sección constante para valores grandes de  $B_0^2$  y temperatura de la base constante, tiende asintóticamente a los valores dados por la solución de aletas delgadas de longitud finita [12]

$$Q^* = [2B_0^2/(\beta+1)]^{1/2}, \text{ para } B_0^2 \gg 1. \quad (25)$$

El análisis como ya se mencionó, fue llevado a cabo utilizando N=7 para todos los casos. Se efectuaron un total de 35 corridas en las que se variaron los siguientes parámetros:

1.)  $H_{0L}$  y  $H_p$  que definen la geometría de la aleta, tomaron los siguientes valores: 0 (sección constante), 0.05, 0.0909, 0.1666, 0.3333, y 0.50 para  $H_{0L}$ , y 0, 0.01515, 0.02772, 0.05555, 0.0476, 0.0909, 0.1666, y 0.20 para  $H_p$ .

2.) Para la variación de la conductividad térmica se obtuvieron en primer término ajustes lineales que representarían el

comportamiento lineal con la temperatura. En el caso de los metales puros cuya pendiente de la conductividad con la temperatura es negativa, los valores adimensionales utilizados fueron  $k_1^\circ = -0.109$  y  $k_2^\circ = -0.0195$ . En el caso de las aleaciones que tienen pendiente positiva, los valores utilizados fueron  $k_1^\circ = 0.308$  y  $k_2^\circ = 0.0568$ .

3.) Con relación a la amplitud y frecuencia de la fluctuación de temperatura en la base de la aleta se utilizaron para la amplitud  $B$ , únicamente los valores 0.1 (amplitud pequeña) y 1.0 (amplitud grande), y en el caso de la frecuencia  $\omega$ , los valores 0.0 (temperatura constante), 0.5, 5.0, 10.0, 50.0, 100.0 y 500.0. Los resultados relevantes se resumen en las gráficas que se discuten a continuación.

La figura 3 muestra la evolución temporal de la temperatura en cualquier posición  $\eta$  de una aleta de sección constante y conductividad térmica variable hasta alcanzar el estado permanente. Se observa que se alcanzan temperaturas más elevadas en la región central de la aleta con conductividad con pendiente positiva ( $k_v^\circ = 1.3648$ ), mientras que ocurre lo contrario para la aleta con conductividad de pendiente negativa ( $k_v^\circ = 0.8715$ ), lo que se reflejará en la razón total de calor. La figura 4 muestra el comportamiento de la temperatura con el tiempo para el caso de una aleta de sección transversal variable ( $H_{0L} = 0.1666$ ,  $H_p = 0.0909$ ) y conductividad térmica variable ( $k_v^\circ = 1.3648$ ). En este caso  $\omega = 10$  y  $B = 1.0$ . En el intervalo de tiempo mostrado ( $\tau = 0 \rightarrow 2.35$ ), que

corresponde a un poco más de tres periodos, se observa que la temperatura en la porción media de la aleta supera a la de su base, lo que implica que se tiene en esos momentos un flujo de calor hacia la aleta. El resto de las gráficas está relacionado principalmente con la razón de calor ya que este es el parámetro más relevante de la aleta en combinación con su eficiencia o su efectividad.

La figura 5 muestra la evolución de la razón total de calor y de la primera derivada de la temperatura de una aleta de sección constante y temperatura constante en su base, y conductividad térmica variable. Es interesante comentar que se observa por un lado que mientras la derivada es más elevada para el caso de la aleta con conductividad de pendiente negativa (conductividad "p\_negativa"), la razón de calor total es más elevada para el caso de conductividad con pendiente positiva (conductividad "p\_positiva"). Se puede afirmar que lo primero se debe a que al estar más fría la aleta en su extremo, entonces esta temperatura favorece un gradiente más elevado causado por una mayor conductividad en la región más fría, lo que se traduce en una resistencia térmica menor; pero el efecto de la conductividad en sí permite una mayor transferencia de calor por parte de la aleta a pesar de que las aletas de materiales de aleación tienen valores de conductividad sustancialmente más bajos. Lo ideal sería entonces contar con materiales que tuviesen conductividades del orden de los metales puros pero con pendiente positiva ya que ésta finalmente es el factor que determina la magnitud de la razón total de calor. Se obtiene para el caso estudiado, un total de

9.5% más de transferencia de calor para la conductividad "p\_positiva" sobre la aleta de conductividad constante y un 28.5% más sobre la aleta de conductividad "p\_negativa". El valor de la razón total de calor en estado permanente obtenido con técnicas espectrales difiere sólo un 0.4% del valor proporcionado por la solución asintótica de la ecuación (22), por lo que el nivel de confianza de los resultados obtenidos es adecuado. En los otros casos no se pudo efectuar una comparación cuantitativa al no existir resultados teóricos o experimentales disponibles, sin embargo las comparaciones cualitativas con los resultados de otros autores confirman la confianza en los aquí presentados.

La figura 6 muestra la evolución de la razón total de calor para aletas de sección transversal y conductividad térmica variables, manteniéndose constante la temperatura en su base. Se puede notar una vez más el efecto comentado de la figura anterior con relación a la conductividad térmica; por otra parte, el efecto de la geometría es sustancialmente menor produciendo de manera consistente una reducción en la razón total de calor en tanto se incrementa la variabilidad de la sección. Se puede implicar que existe un compromiso entre la mayor área transversal para la transferencia de calor por conducción asociada a una mayor resistencia de la misma, resultando dominante este último efecto. En el caso mostrado para la conductividad "p\_positiva", la diferencia en geometría produce una diferencia de 1.6% más para la aleta de sección constante en estado permanente.

Las figuras 7 y 8 muestran los resultados de la razón total de calor promedio de aletas de sección y conductividad térmica

variables como función del tiempo en el caso de que la temperatura en la base de la aleta oscila a  $\omega=500$ . Los resultados son cualitativamente los mismos que los ya comentados correspondientes a las figuras 5 y 6. La diferencia entre los valores medios de la figura 7 es de 3.1% en favor de la aleta de sección constante. Las figuras 9 y 10 muestran la evolución de la razón total de calor para una aleta de sección y conductividad térmica variables para distintos valores de la frecuencia. En la primera, se observa claramente el efecto del aumento en la amplitud con la frecuencia, como en [9, 10]; el incremento de la frecuencia desde cero produce eventualmente la aparición de transferencia de calor hacia la aleta, como ya se notaba en la figura 4, incrementándose este efecto conforme se incrementa la frecuencia. En la figura 10 se utilizó el periodo en lugar del tiempo como variable independiente para la misma aleta de la figura anterior, notándose con mayor detalle la evolución de la razón total de calor, particularmente del primer periodo, y el defasamiento hacia la derecha para las frecuencias más bajas.

Complementando a las figuras anteriores, la figura 11 muestra el comportamiento de la razón total de calor media para la misma aleta. La razón promedio disminuye más rápidamente y tiende a valores más bajos en el estado permanente para las frecuencias más elevadas, efecto debido a la mayor ganancia de calor por parte de la aleta; por otro lado, las frecuencias bajas producen transitorios mucho más prolongados.

En la figura 12 se condensan los resultados del análisis con relación al efecto de la geometría y de la conductividad térmica

sobre el comportamiento de la aleta. Es claro que el efecto más relevante es el de la conductividad ya que produce cambios en la razón total de calor de alrededor del 23.4% entre la conductividad "p\_negativa" y la "p\_positiva", mientras que el cambio en la razón total causado por la sección variable es de sólo 1.7%, esto es para el caso de temperatura constante en la base de la aleta. Para el caso de temperatura variable en la base de la aleta, el efecto de la frecuencia produce un incremento un poco mayor como lo muestra la pendiente entre los valores de la figura.

La figura 13 muestra el efecto global de la frecuencia sobre el comportamiento de la aleta. En el intervalo estudiado la razón total promedio disminuye de manera no lineal con el aumento de la frecuencia.

Finalmente, en la figura 14 se ha graficado la efectividad de la aleta contra su eficiencia. Por la manera en la que se obtuvieron las variables adimensionales no intervino de manera directa la longitud de la aleta, cosa que si ocurre en el cálculo de estos parámetros, de acuerdo con las ecuaciones 20 y 21. Los resultados encontrados dan resultados congruentes en tanto que en todos los casos se observa una tendencia a un valor máximo de eficiencia conforme aumenta la longitud de la aleta. Si bien la razón total de calor disminuye con la geometría, la eficiencia y la efectividad para un valor específico de longitud de aleta aumenta lo que muestra el efecto neto del incremento neto de área de transferencia para la aleta de sección variable. Sin embargo el efecto de la frecuencia y su amplitud pueden llevar a valores más pequeños de eficiencia y efectividad. La forma en que se manipuló

---

la información en esta gráfica es importante ya que indica de manera directa cuáles serían para cada caso los valores adecuados de longitud para obtener la máxima eficiencia de la aleta.

#### 4.- CONCLUSIONES

El análisis del comportamiento transitorio de aletas de sección transversal y conductividad térmica variables y sujeta a un salto abrupto de temperatura constante o que oscila a una frecuencia definida en su base indica lo siguiente:

La pendiente de la conductividad térmica tiene un doble efecto, por un lado produce gradientes térmicos más elevados en el caso de conductividad "p\_negativa" y por el otro el valor de la misma conductividad conduce a razones totales de calor menores, predominando este último efecto, lo que hace que las aletas de

aleación sean mejores al contar con pendiente positiva. El efecto de la geometría es mucho menor que el de la conductividad, presentándose en este caso el compromiso de mayor área de transferencia asociado a la aleta de sección variable al de una mayor resistencia térmica por parte de ésta, donde el resultado favorece al último efecto por lo que se tienen menores razones totales de calor para las aletas de sección variable. Sin embargo, desde el punto de vista de la eficiencia de aletas, vuelve a aparecer como factor de contrapeso un área de transferencia, siendo en este caso la superficial, dando por resultado que las aletas de sección variable tiene eficiencias mejores.

El efecto de la frecuencia de oscilación de la temperatura en la base da como resultado que la razón de calor se invierte durante intervalos de tiempo reduciendo de esta manera la razón total de calor e incrementándose este efecto con el aumento de la frecuencia. El mismo efecto produce la amplitud de la oscilación. Se puede inferir que es posible lograr incrementos sustanciales en la transferencia de calor jugando con los valores de  $\omega$  y  $B$  ya que aún en los casos en los que se tiene el efecto de frecuencia y amplitud, los valores de la razón total de calor promedio son superiores a los obtenidos en el caso de temperatura constante.

En cuanto a la respuesta temporal se observa que la parte significativa del transitorio ocurre en un tiempo pequeño, de orden  $\tau \sim 0.1$  y en el caso de aletas sujetas a una temperatura oscilante del orden de  $\omega\tau \sim 2\pi$ .

Por otra parte, el análisis de los resultados muestra que la aplicación de las técnicas espectrales en la solución de problemas de transferencia de calor, particularmente aquellos con términos no-lineales, es ventajosa pues tan sólo para el caso lineal, un análisis tradicional con diferencias finitas en el cual el error asociado a la primera derivada de la temperatura (flujo de calor) es del orden de  $\Delta x$  (esto es sin considerar la convergencia e inestabilidad), si se utilizara un número divisiones en  $x$  de 7 como se hizo con este estudio, esto implicaría un error de alrededor del 14.3% que comparado contra el error que se obtuvo con el análisis espectral del 0.4% para el caso no lineal de una aleta recta y temperatura constante en su base. No se espera que con ese número de intervalos en diferencias finitas se pueda obtener una solución sin oscilaciones para el problema del salto. Esto ya vuelve atractiva su aplicación. El uso de la FFT también es una ventaja adicional pues se tiene un ahorro en tiempo de máquina al involucrar un número de operaciones del orden de  $N \ln N$ , contra un número del orden de  $N^2$ , [14]. En resumen se espera que en todos los casos el error asociado al método espectral en este análisis sea mucho menor que el correspondiente a una técnica convencional. En este caso se estima que el error máximo podría ser alrededor del 6%.

Como corolario del trabajo debe hacerse notar que la presentación detallada de la técnica espectral representa por si misma una aportación importante ya que su potencial en el análisis de problemas no lineales ha sido -hasta ahora- desaprovechada en nuestro país.

## 5.- RECONOCIMIENTOS

Se agradece el apoyo brindado por el CONACYT mediante la beca N-16154 para la realización de este trabajo.

## 6. REFERENCIAS

1. A. B. Donaldson and A.R. Shouman, Unsteady-state temperature distribution in a convecting fin of constant area, **Appl. Sci. Res.**, **26**, 75-85, 1972.
2. A.J. Chapman, Transient heat Conduction in annular fins of uniform thickness, **Chem. Eng. Symp. Series**, **55**, 195-201, 1959.
3. N.V. Suryanarayana, Transient response of fins, **J. Heat Transfer**, **97C**, 417-423, 1975.
4. A. Aziz and T.Y. Na, Transient response of fins by coordinate perturbation expansion, **Intern. Journal Heat**

**Mass Transfer, 23, 1695-1698, 1980.**

5. K.W. Haley and J.W. Westward, **Boiling Heat Transfer from Single Fins, Proceedings of the 3rd. International Heat Transfer Conference, 3, 245-253, 1966.**
6. N.V. Suryanarayana, **Two dimensional effects on the heat Transfer Rates from an Array of Straight Fins, ASME Journal of Heat Transfer, 99, 129-132, 1977.**
7. P.R. Stones, **Ph. Thesis, Leeds University, England, 1980.**
8. H.C. Ünal, **The effect of the boundary condition at a fin tip on the performance of the fin with and without internal heat generation, Intern. Journal Heat Mass Transfer, 31, 1483-1496, 1988.**
9. J. W. Yang, **Periodic Heat Transfer in Straight Fins, ASME Journal of Heat Transfer, 94, 310-314, 1972.**
10. A. Aziz and T.Y. Na, **Periodic Heat Transfer in Fins with Variable Thermal Parameters, Int. J. Heat and Mass Transfer, 24, 1397, 1404, 1981.**
11. Y.M. Chang, C.K. Chen and J.W. Cleaver, **Transient Response of Fins by Optimal Linearization and**

Variational Embedding Methods, ASME J. Heat Transfer,  
104, 813-815, 1982.

12. E. Medina, C. Treviño y F. Méndez, Solución espectral de transferencia de calor en aletas, Memorias del XVI congreso de la ANIAC, 1990.
13. E. Medina, C. Treviño y F. Méndez, Heat Transfer in Fins With a Periodic Source, Memorias III Brazilian Thermal Science Meeting, Itapema, Brasil, 1990.
14. F. Méndez, E. Medina y C. Treviño, Análisis asintótico de aletas de sección transversal variable, Memorias del XVII congreso de la ANIAC, 1991.
15. D. Gottlieb and S. Orzag, Numerical Analysis of Spectral Methods, SIAM, Philadelphia, USA, 1977.
16. C. Canuto *et al.*, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1987.
17. F. Burden, Numerical Analysis, John Wiley and Sons, Nueva York, 1984.
18. F. Incropera, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John Wiley and Sons, Nueva York, 1992.

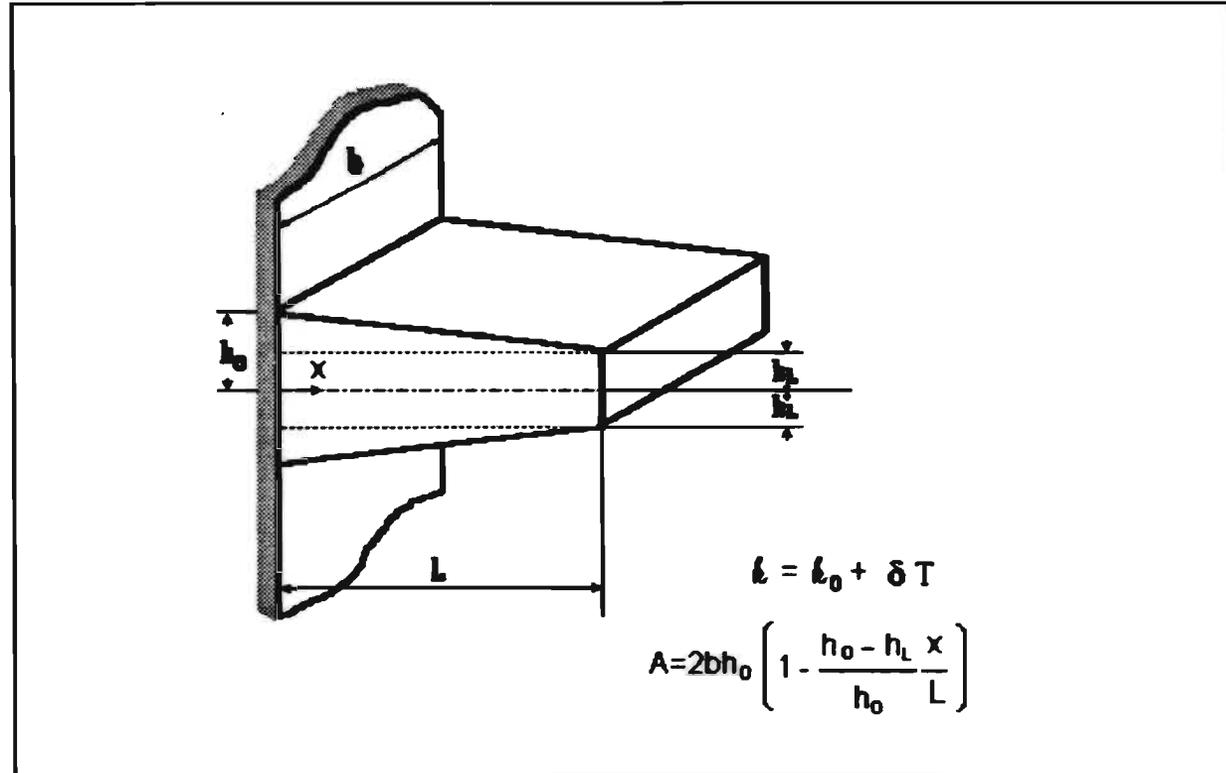


Fig. 1 CONFIGURACION Y PARAMETROS DE LA ALETA

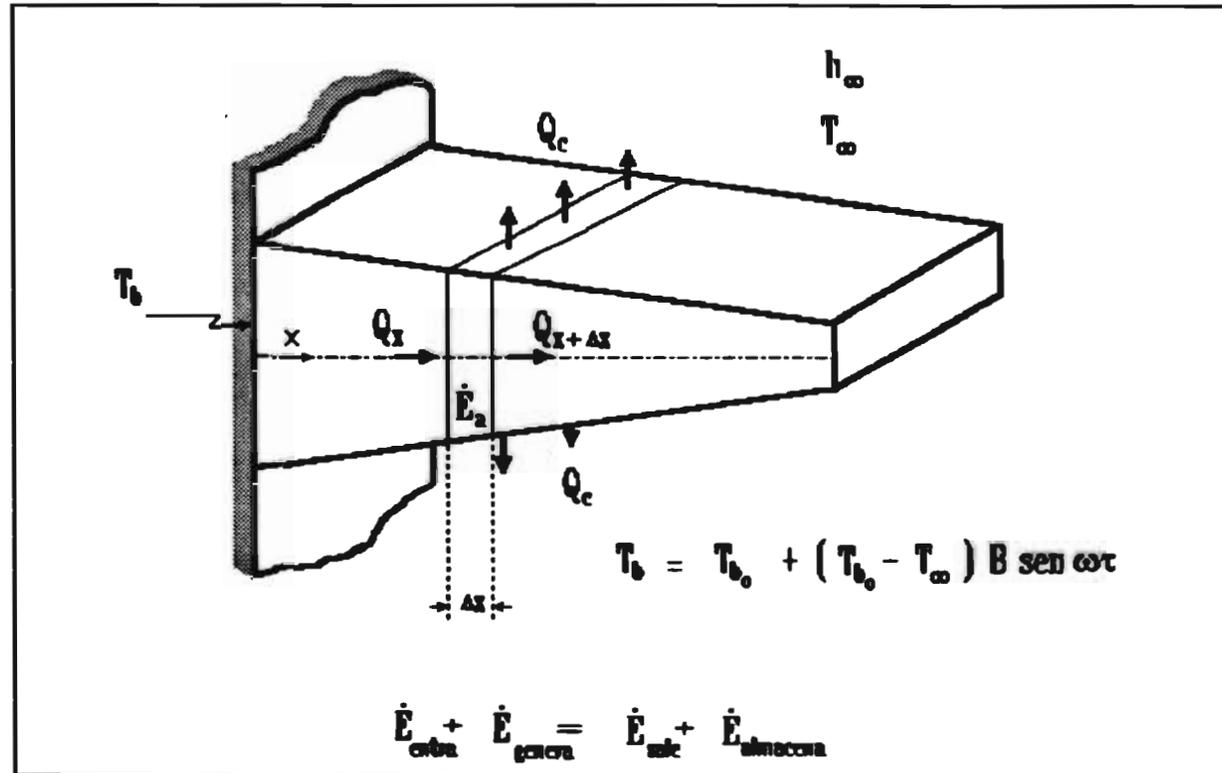


Fig. 2 BALANCE DE ENERGIA EN LA ALETA

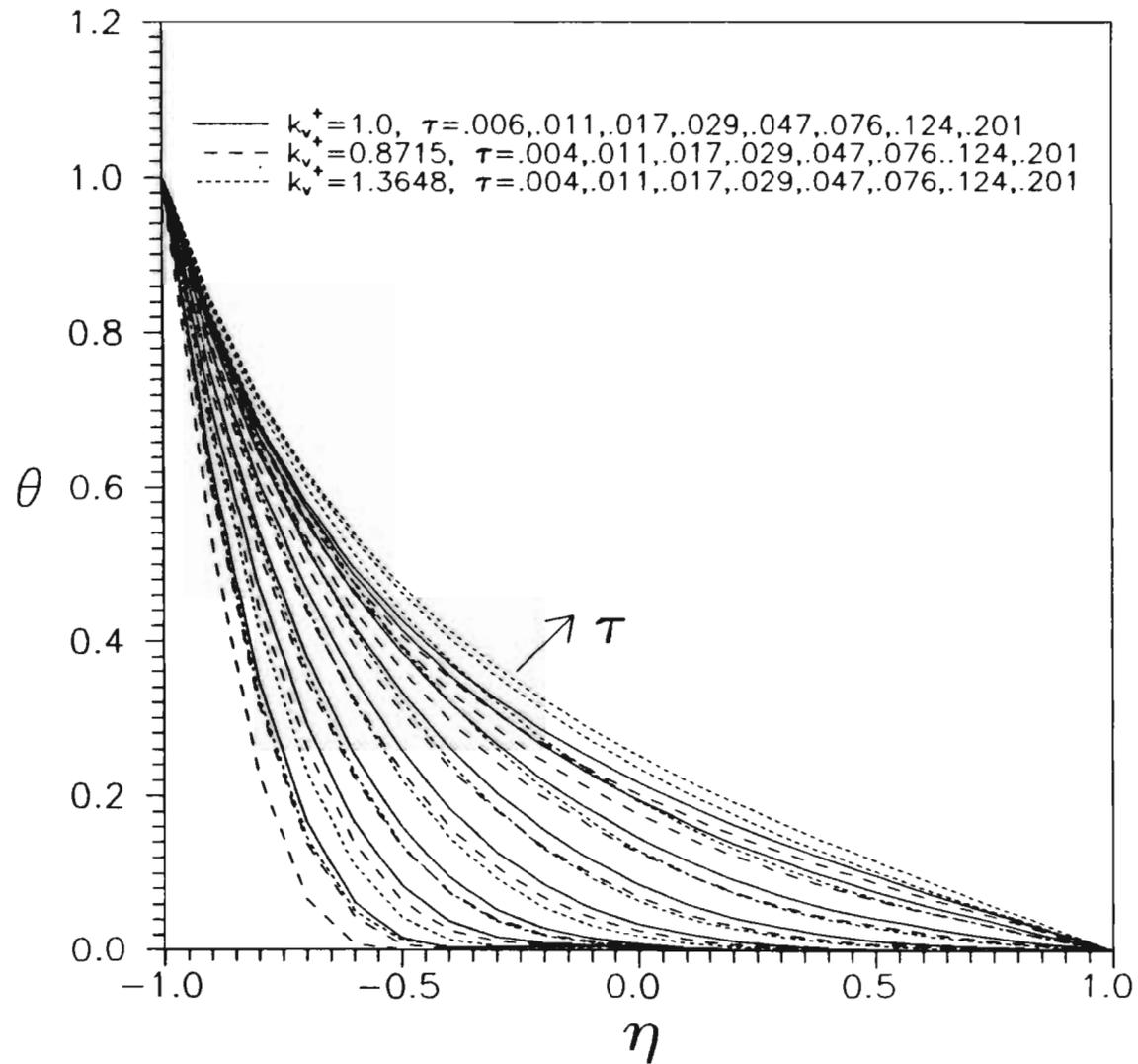
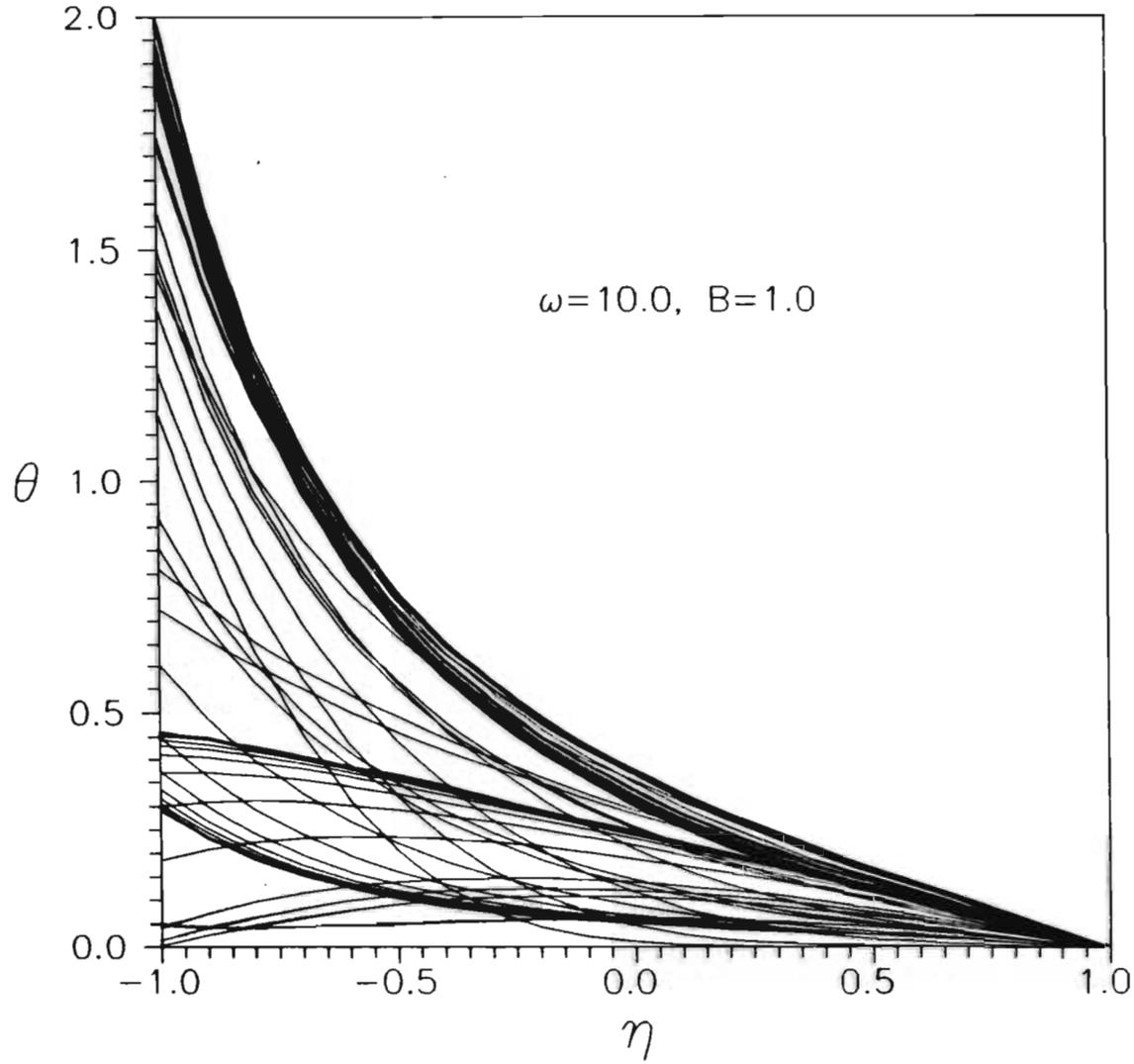


Fig. 3 EVOLUCION DE LA TEMPERATURA EN UNA ALETA DE SECCION CONSTANTE Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLE



**Fig. 4 EVOLUCION DE LA TEMPERATURA EN UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES CON TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.**

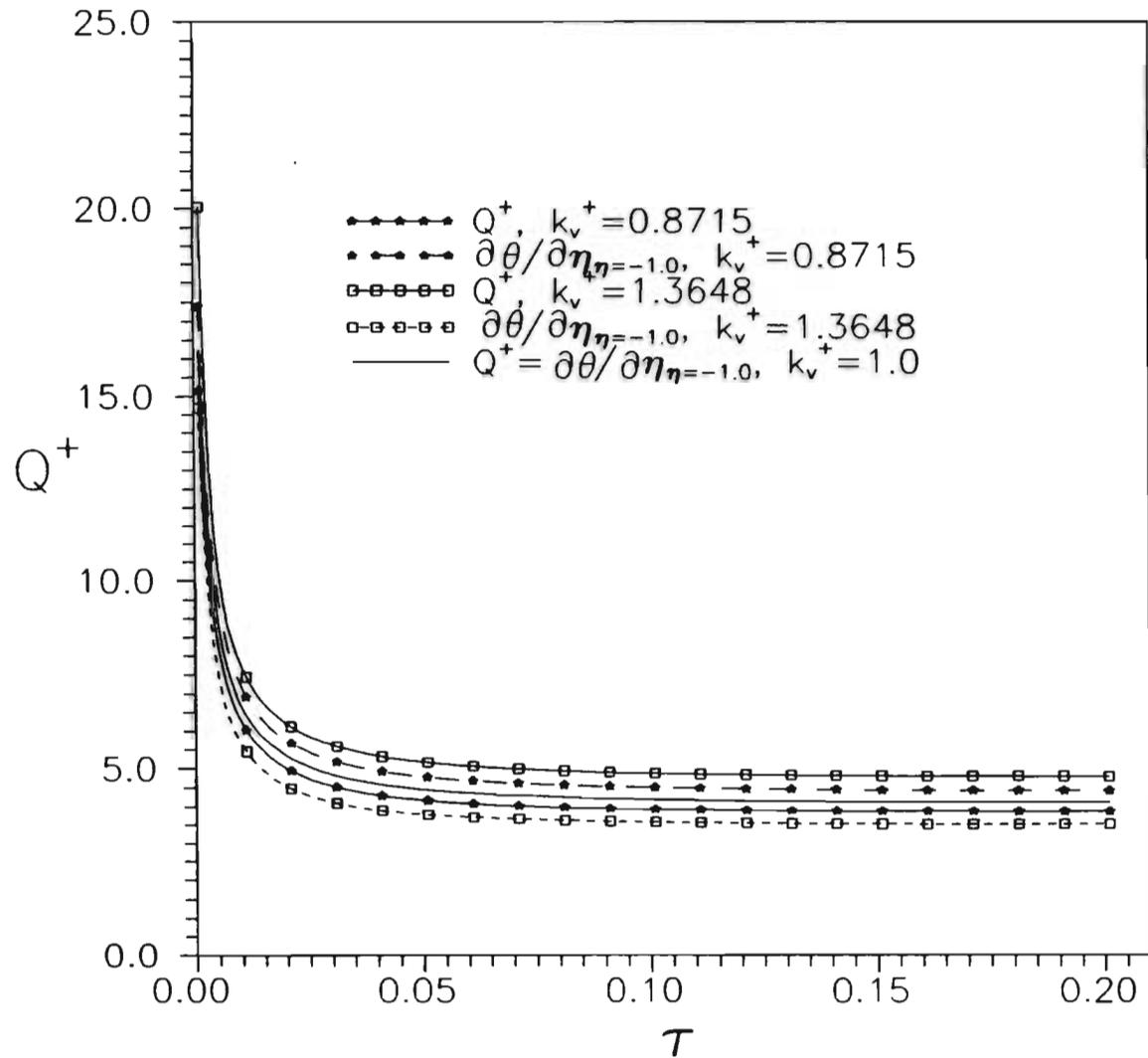


Fig. 5 RAZON DE CALOR Y DERIVADAS DE LA TEMPERATURA PARA ALETAS DE SECCION CONSTANTE Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLE



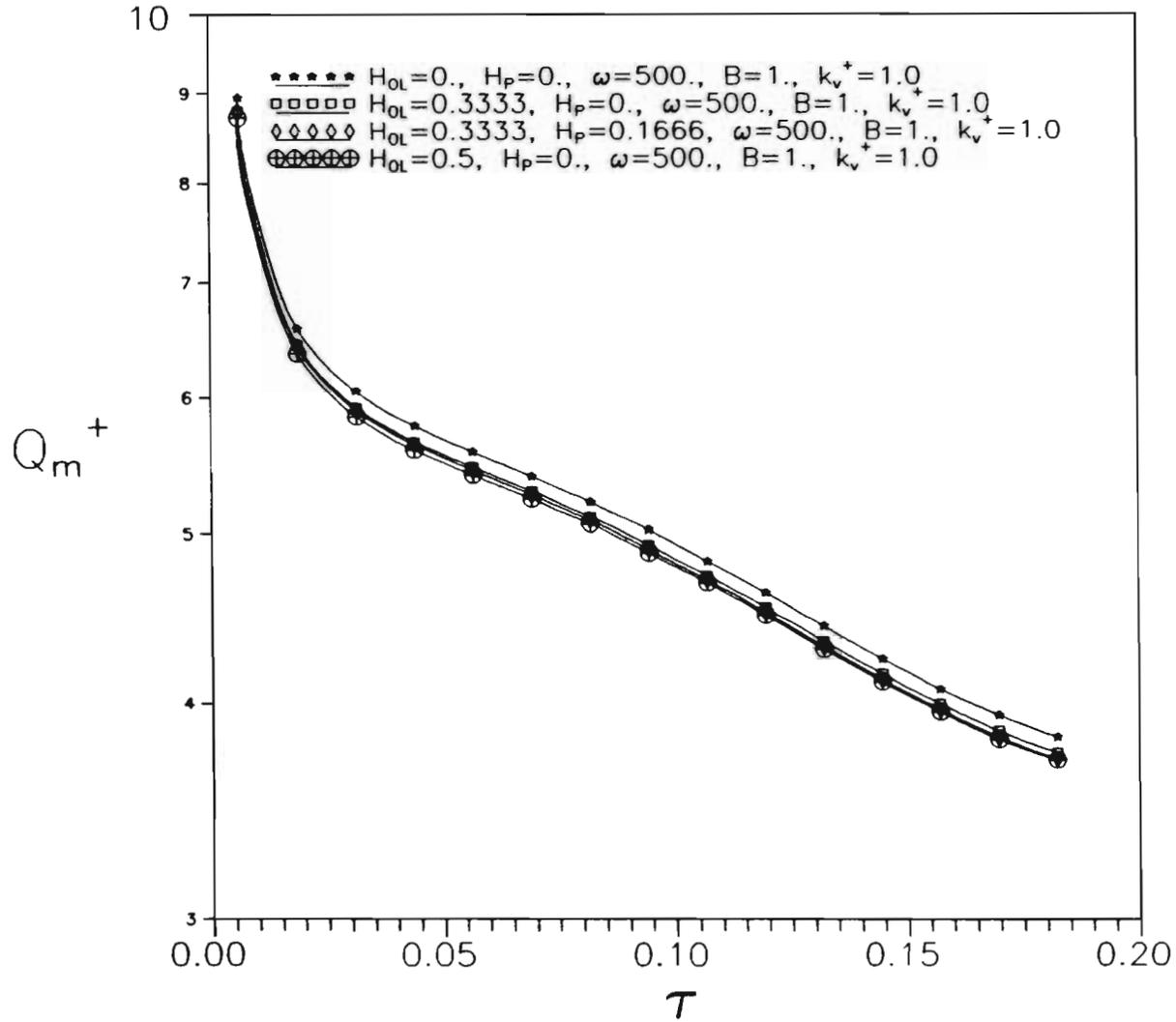
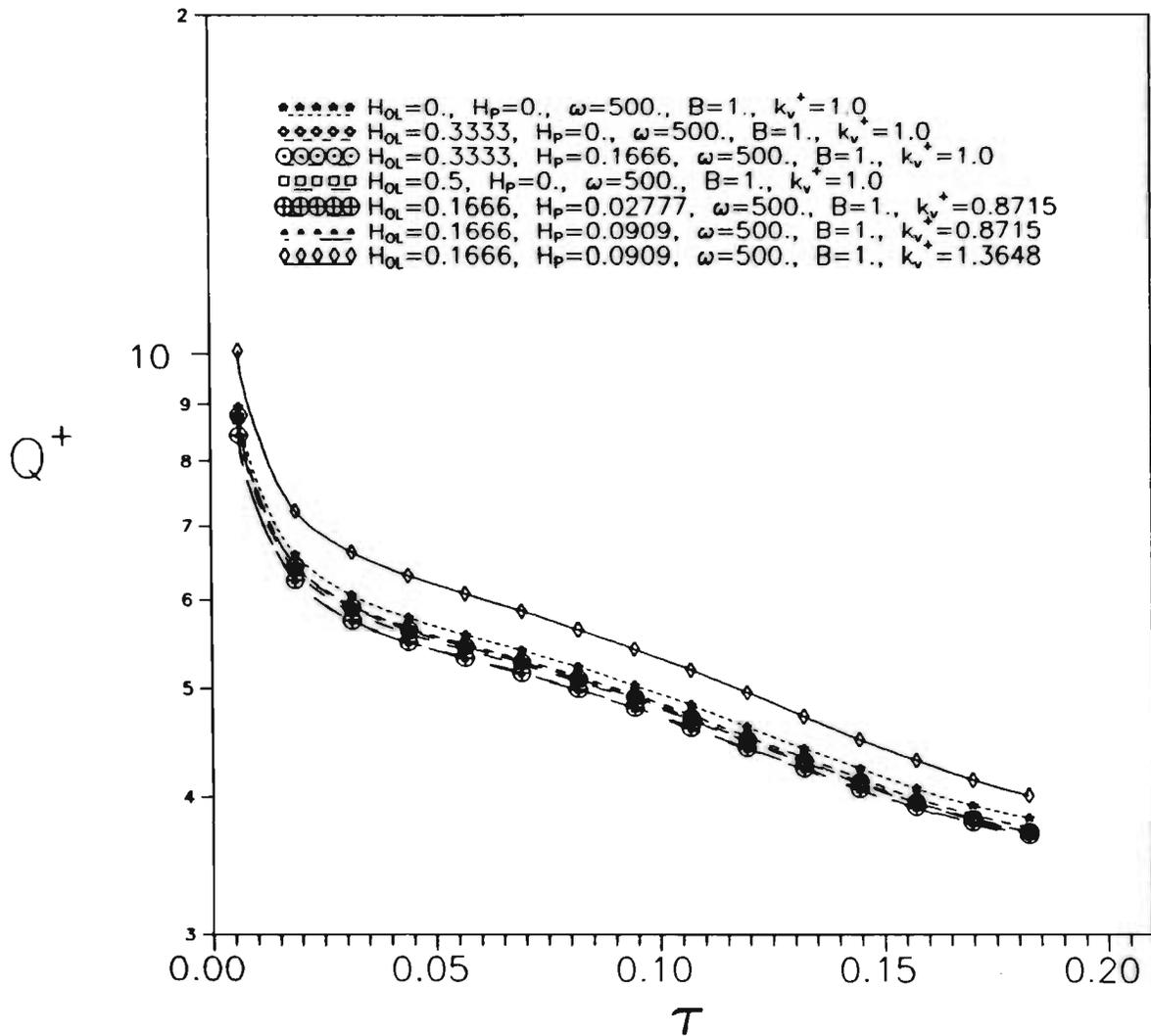
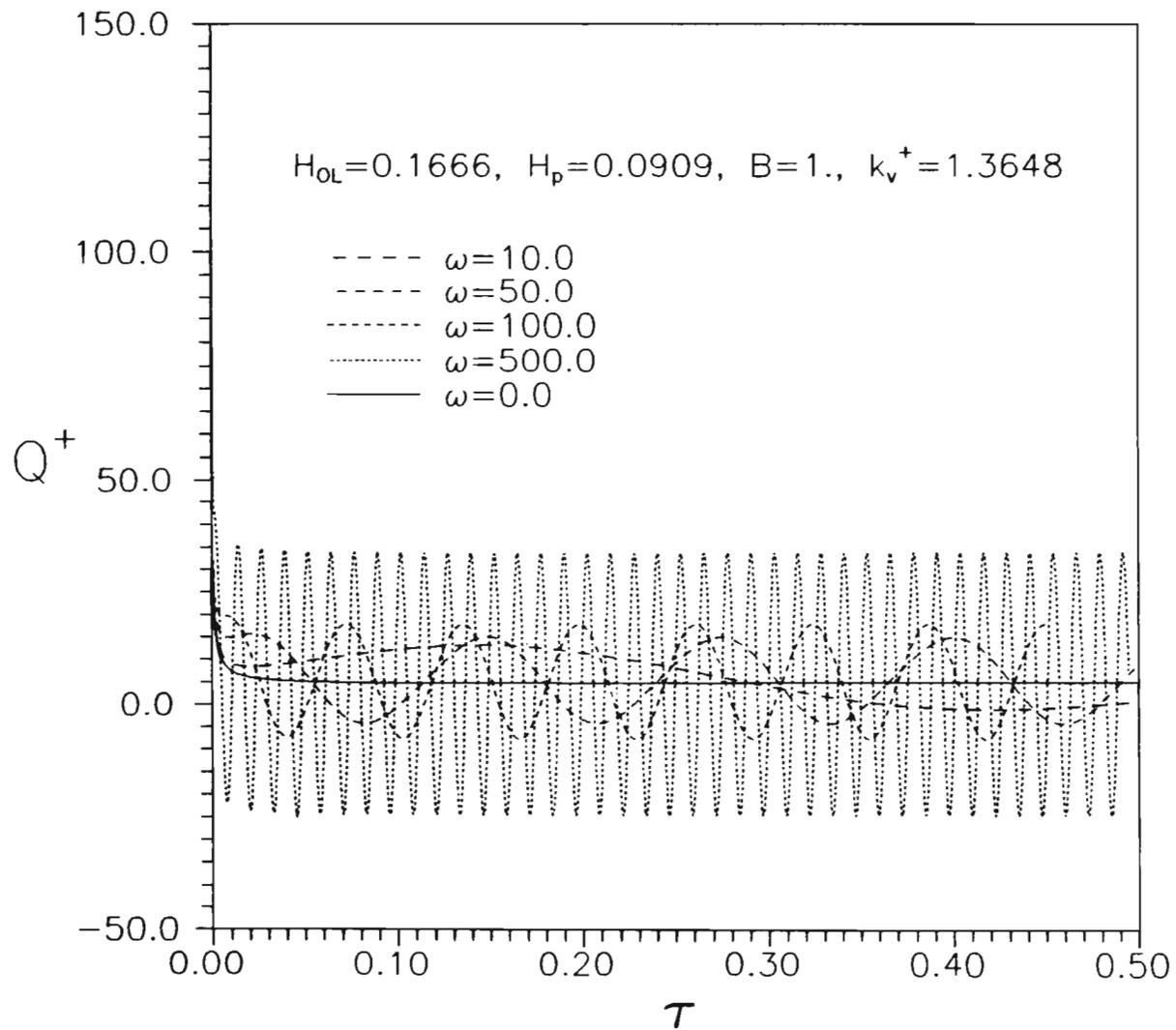


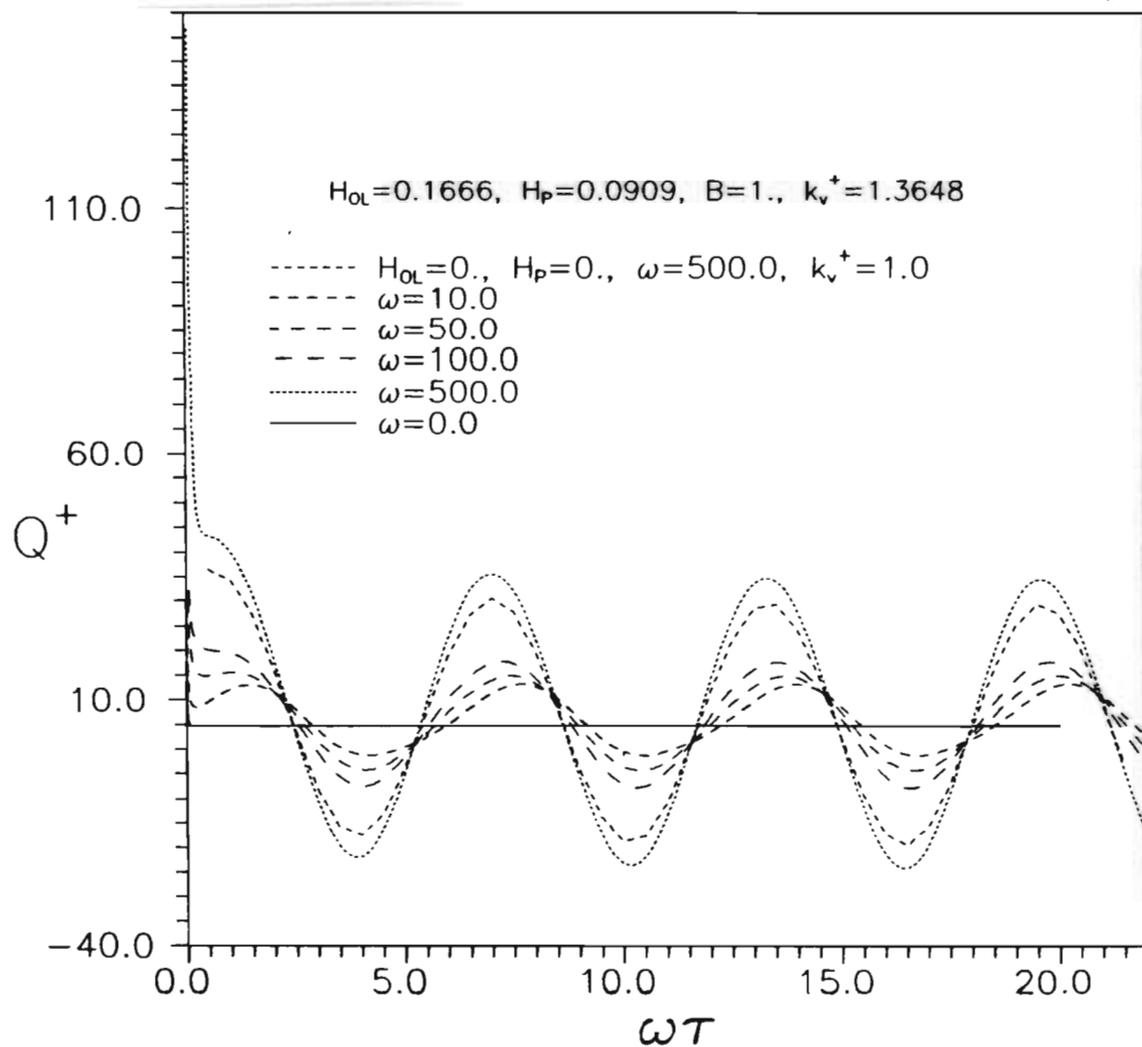
Fig. 7 RAZON DE CALOR PROMEDIO PARA ALETAS DE SECCION VARIABLE, CONDUCTIVIDAD TERMICA CONSTANTE Y TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.



**Fig. 8 RAZON DE CALOR PROMEDIO PARA ALETAS DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES, CON TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.**



**Fig. 9 RAZON DE CALOR PARA UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES, CON TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.**



**Fig. 10 RAZON DE CALOR PARA UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES, CON TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.**

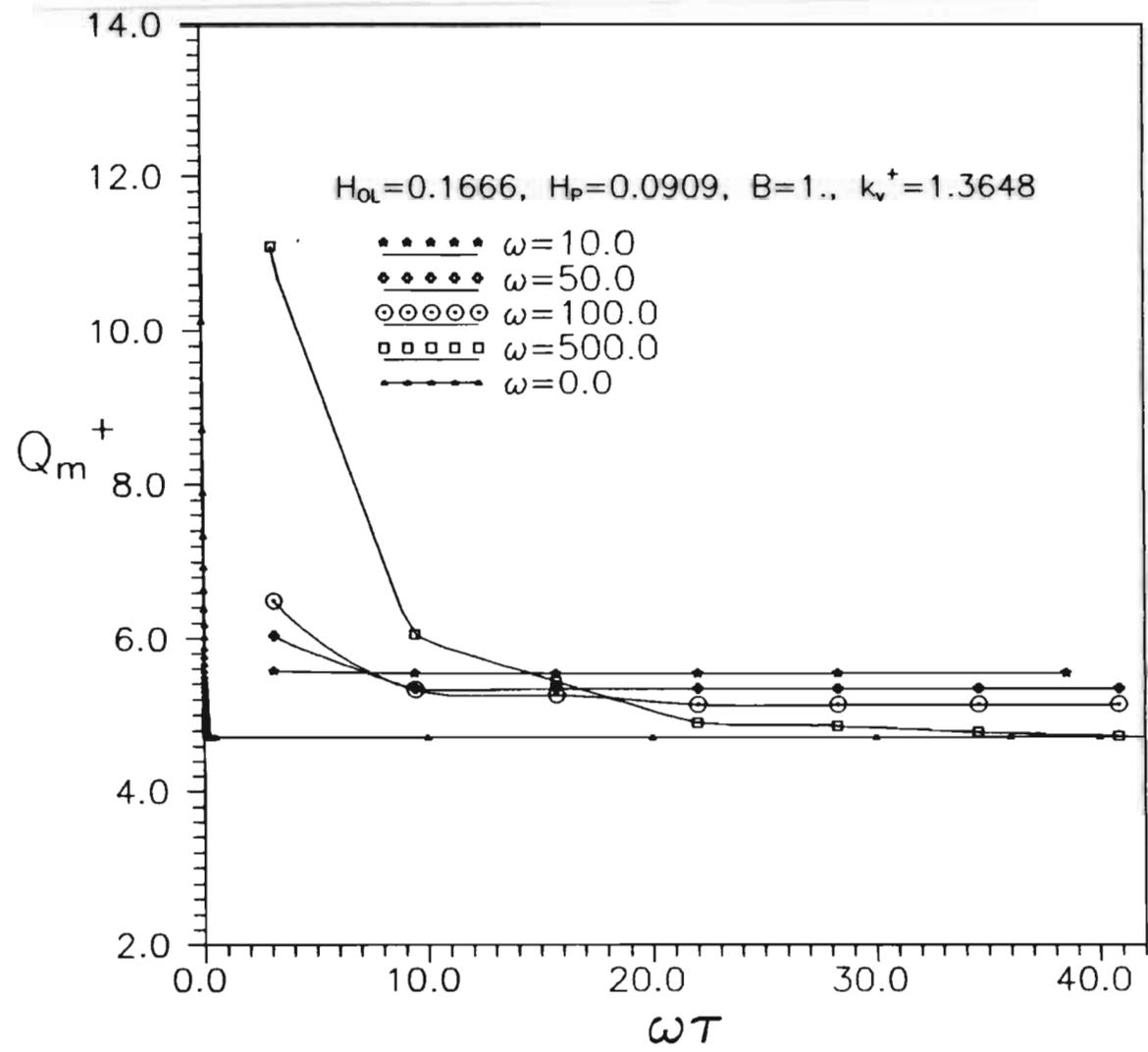


Fig. 11 RAZON DE CALOR PROMEDIO PARA UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES, CON TEMPERATURA VARIABLE EN SU BASE.

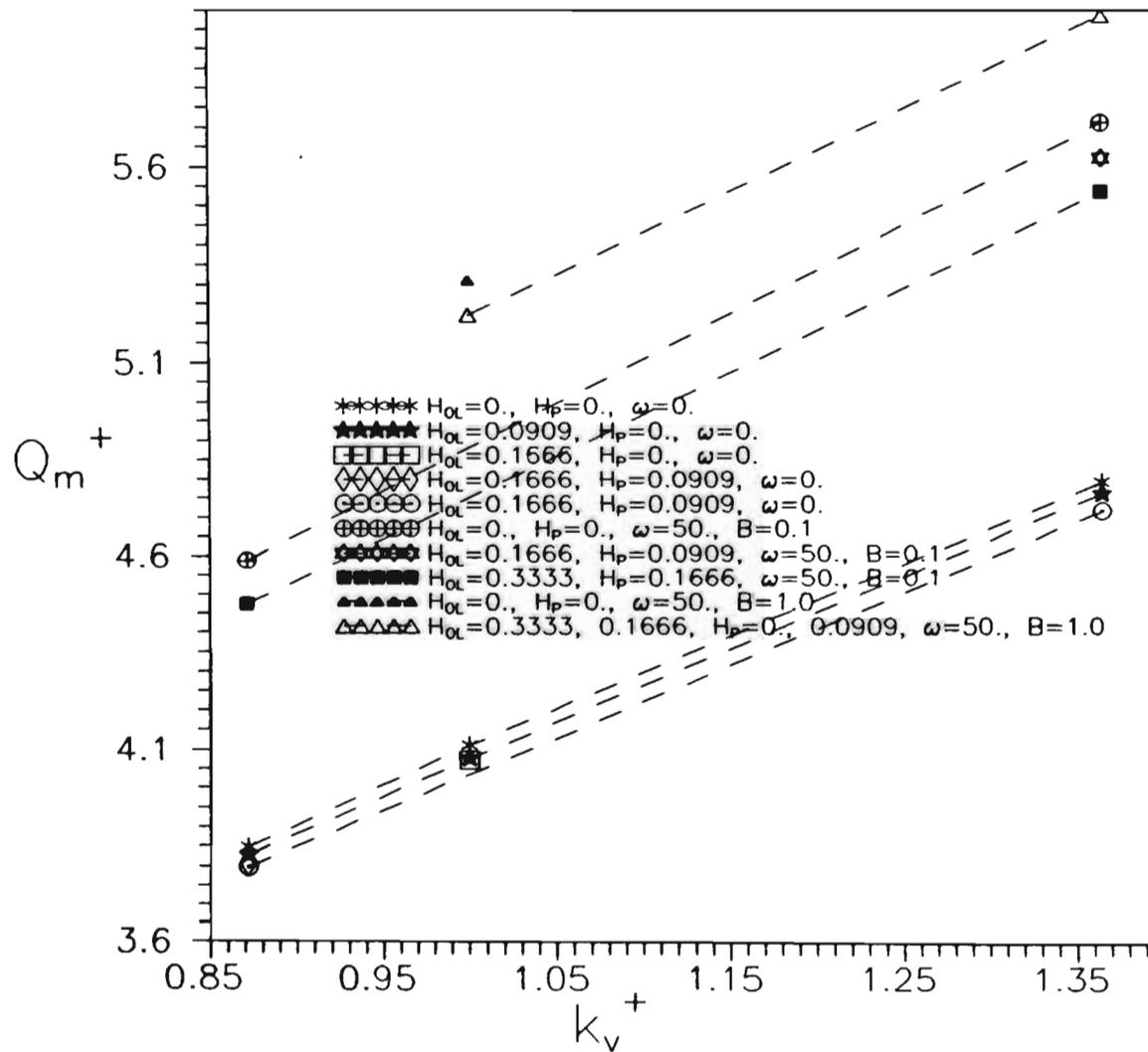


Fig. 12 RAZON DE CALOR PROMEDIO PARA ALETAS DE SECCION VARIABLE EN FUNCION DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA.

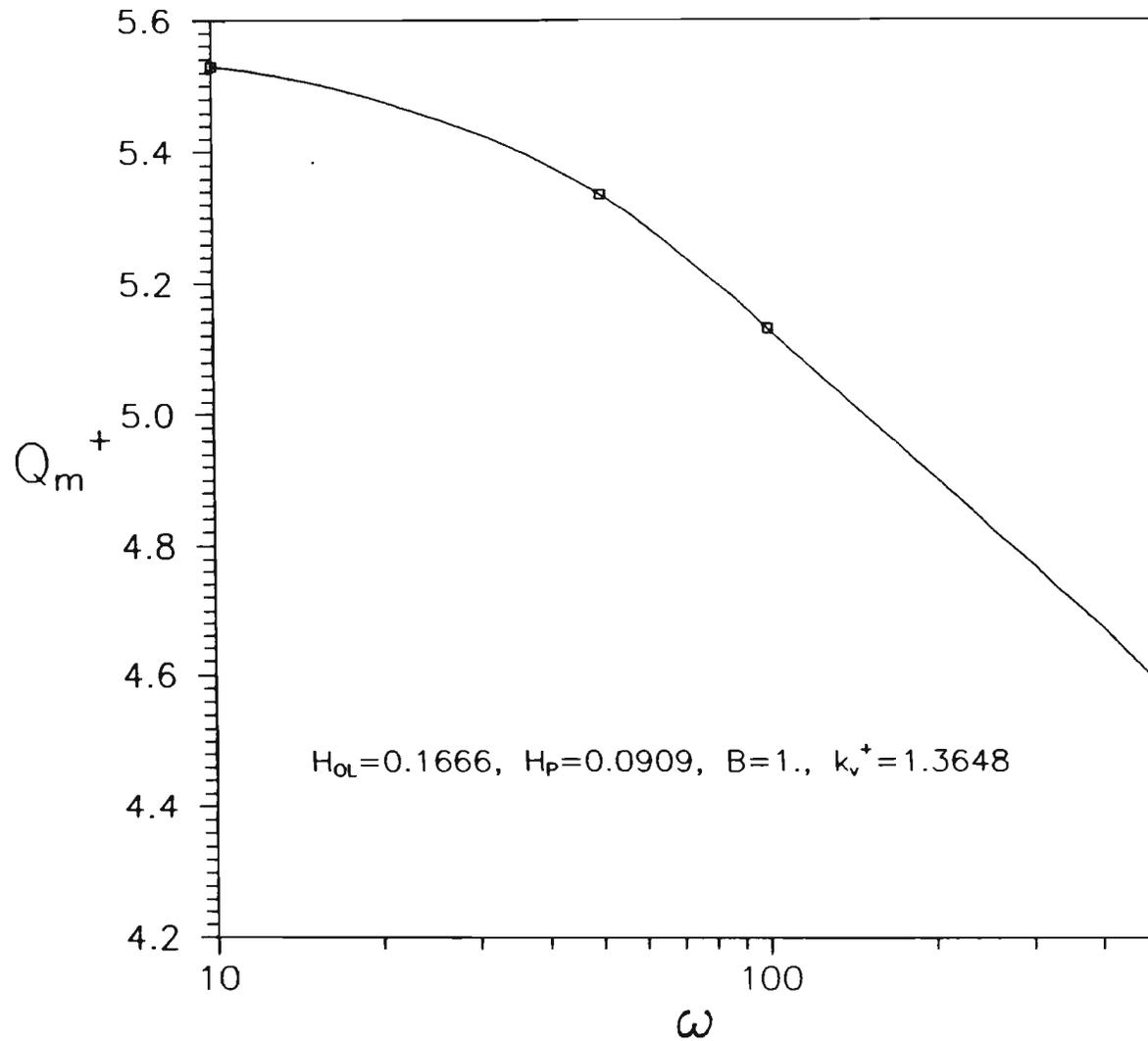


Fig. 13 RAZON DE CALOR PROMEDIO PARA UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES EN FUNCION DE LA FRECUENCIA.

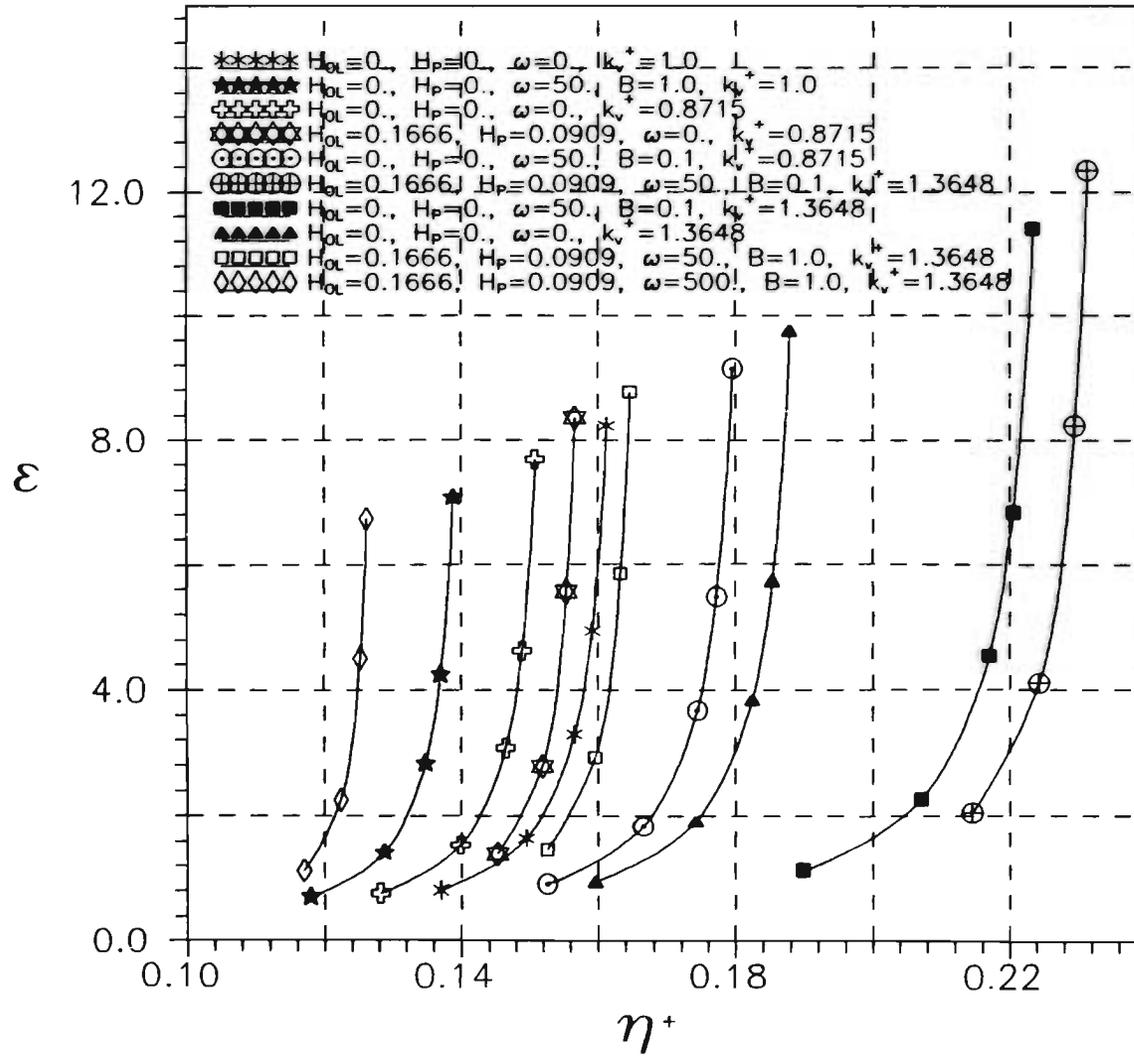


Fig. 14 EFECTIVIDAD CONTRA EFICIENCIA DE ALETAS DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLES.

## APENDICE A. TECNICAS ESPECTRALES

### 1. Introducción.

Los métodos espectrales pueden ser vistos como un desarrollo extremo de la clase de esquemas de discretización para ecuaciones diferenciales conocido genéricamente como método de residuos pesados [16] (MWR por sus siglas en inglés). Los elementos clave de el MWR son las funciones de aproximación (llamadas también funciones de expansión) y las funciones de prueba (conocidas como funciones de peso). Las primeras se utilizan como funciones base para una expansión en series truncada de la solución. Las segundas se usan para asegurar que se satisface la ecuación diferencial tan cercanamente como sea posible por la expansión en series truncada. Lo anterior se logra minimizando el residuo, *i.e.* el error producido por el uso de una serie truncada.

La manera de escoger las funciones de aproximación es una de las características que distinguen a los métodos espectrales de los métodos de elementos finitos y diferencias finitas. En el caso de los métodos espectrales las funciones de aproximación utilizadas son funciones infinitamente diferenciables. En el caso de los métodos de elementos finitos, el dominio se divide en pequeños elementos y las funciones de aproximación se especifican para cada elemento, teniendo entonces un carácter local apropiado para manejar geometrias complejas. En el caso de los métodos por diferencias finitas se tiene también un carácter local.

Adicionalmente, la manera de elegir las funciones de aproximación hace la diferencia entre los tres esquemas espectrales más usados: Galerkin, colocación y tau. En la versión de Galerkin, las funciones de aproximación y pruebas son las mismas, por lo que existe un número infinito de funciones suaves que satisfacen individualmente las condiciones de frontera. La ecuación diferencial se refuerza haciendo que la integral del producto de los residuos por cada función de peso sea cero. En el de colocación, las funciones de prueba se convierten en funciones delta de Dirac centradas en puntos especiales, denominados puntos de colocación, por lo que el esquema requiere que la ecuación diferencial se satisfaga exactamente en los puntos de colocación. Los métodos espectrales tau son similares a los de Galerkin en cuanto se refuerzan a las ecuaciones diferenciales, sin embargo, no se requiere que las funciones de prueba satisfagan las condiciones de frontera por lo que se usa un conjunto adicional de ecuaciones para esas condiciones.

Los métodos espectrales de colocación son los más simples y utilizan una gran variedad de funciones de aproximación que incluyen a las series de Fourier, los polinomios de Chebyshev, los de Legendre y otros. Son especialmente atractivos por su facilidad para tratar coeficientes variables y problemas no lineales.

El esquema de Galerkin es el más estético ya que las funciones de aproximación y prueba son las mismas y el problema físico puede discretizarse en términos de un principio variacional. Los métodos de elementos finitos utilizan convencionalmente este esquema. Sin embargo no son prácticos para problemas con términos no lineales

complicados donde se desea una resolución alta.

El esquema tau es una modificación del método de Galerkin aplicable a problemas con condiciones de frontera no periódica, aunque es difícil de utilizar en problemas no lineales.

En términos generales, los métodos de Galerkin y tau se llevan a cabo en términos de coeficientes de expansión, mientras que los métodos de colocación lo hacen en términos de valores en el espacio físico de la función desconocida. El método de colocación utiliza entonces los valores de la función en ciertos puntos físicos como el aspecto fundamental y sólo utiliza las funciones de expansión para evaluar las derivadas espaciales, por lo que más bien es un método pseudo-espectral. Los puntos de colocación para las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera son usualmente los mismos puntos físicos de la malla, pero difieren en número dependiendo del carácter de la ecuación diferencial.

## 2. Método pseudo-espectral (colocación) de Chebyshev.

Cuando una función  $f(x)$  no es periódica, un polinomio de interpolación trigonométrico no da suficiente aproximación para lograr valores exactos de las derivadas de  $f(x)$ . Es mejor aproximar  $f(x)$  con polinomios de  $x$ . Sin embargo, es bien sabido que los polinomios de interpolación de Lagrange basados en puntos igualmente espaciados no dan una aproximación satisfactoria a una función general suave,  $f$ . De hecho cuando el número de puntos de colocación se incrementa, los polinomios de interpolación divergen. El pobre incremento de la interpolación polinomial puede

evitarse para funciones suavemente diferenciables quitando la restricción de puntos igualmente espaciados. Se obtienen buenos resultados relacionando los puntos de colocación a la estructura de polinomios ortogonales clásicos, tales como los de Chebyshev o los de Legendre.

En el método pseudo-espectral de Chebyshev más común, los puntos de interpolación en el intervalo  $[-1,1]$  son los extremos

$$\alpha_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad (j=0, \dots, N) \quad (A1)$$

de los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$ , de orden  $N$ , entonces (ver apéndice B)

$$T_n(\alpha_j) = \cos(n \cdot \cos^{-1} \alpha_j) \quad (A2)$$

entonces

$$T_n(\alpha_j) = \cos n \frac{\pi j}{N} \quad (A3)$$

Se puede notar una relación cercana entre el método pseudo espectral de Chebyshev y el de Fourier.

Para construir la interpolación de  $f(x)$  en el punto  $x$ , se definen los polinomios

$$g_j(x) = \frac{(1-x^2)T_n'(x)(-1)^{j+1}}{c_j N^2 (x-\alpha_j)} \quad (j=0, \dots, N) \quad (A4)$$

con  $c_0=c_N=2$ ,  $c_j=1$  para  $1 \leq j \leq N-1$

se verifica fácilmente que

$$g_j(x_k) = \delta_{jk}$$

El polinomio de interpolación  $p_N f(x)$  de grado  $N$  para  $f(x)$  está dado por

$$p_N f(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j) g_j(x) \quad (A5)$$

utilizando la igualdad

$$\sum_{n=0}^N \frac{T_n(x_j) T_n(x)}{c_n} = \frac{(1-x^2) T_n'(x) (-1)^{j+1}}{c_j^2 (x-x_j)}$$

sustituyendo en A4:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N f(x_j) g_j(x) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \frac{f(x_j)}{c_j} \sum_{n=0}^N \frac{T_n(x_j) T_n(x)}{c_n} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N T_n(x) \frac{1}{c_n} \sum_{j=0}^N \frac{f(x_j) T_n(x)}{c_j} \end{aligned}$$

entonces

$$p_N f(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x) \quad (A6)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{N} \frac{1}{c_n} \sum_{j=0}^N \frac{f(x_j) T_n(x)}{c_j} \quad (A7)$$

se hace notar que los coeficientes  $a_n$  pueden evaluarse usando la Transformada Rápida de Fourier (FFT). De hecho, utilizando A2 en

A6

$$a_n = \frac{2}{N} \frac{1}{c_n} \sum_{j=0}^N \frac{f(x_j)}{c_j} \cos \frac{\pi j n}{N} \quad (A8)$$

El segundo paso para obtener la aproximación pseudo-espectral es el expresar las derivadas de  $p_N f$  en términos de  $f(x)$  en los puntos de colocación  $x_j$ . Esto puede hacerse diferenciando la ecuación A5 ó A6. Con A5 se obtiene

$$\frac{d^p}{dx^p} p_N f(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j) \frac{d^p}{dx^p} g_j(x) \quad (A9)$$

tal que

$$\frac{d^p}{dx^p} p_N f(x_j) = \sum_{j=0}^N f(x_j) (D_p)_{k,j} \quad (A10)$$

donde

$$(D_p)_{k,j} = \left. \frac{d^p}{dx^p} g_j(x) \right|_{x=x_k} \quad (A11)$$

Utilizando el esquema presentado, la función y sus derivadas espaciales quedarán en función de los coeficientes  $a_n(t)$ , mientras que las derivadas temporales deberán tratarse como se hace convencionalmente en cualquier método numérico, e.g. diferencias finitas. A diferencia del método de Galerkin, en este método se utilizan valores adicionales de los coeficientes para cumplir con las condiciones de frontera. Los términos no lineales toman la forma de transformadas coseno de Fourier, por lo que se pueden evaluar con algún algoritmo de FFT.

Los Puntos de Colocación utilizados dependen del carácter de la ecuación diferencial.

Para el caso de ecuaciones diferenciales parabólicas como la ecuación de calor los puntos de colocación son

$$\alpha_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad (j=1, \dots, N-1) \quad (A12)$$

en el caso de ecuaciones hiperbólicas como la ecuación de onda

$$\alpha_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad (j=0, \dots, N-1) \quad (A13)$$

y para ecuaciones elípticas

$$\alpha_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad (j=0, \dots, N) \quad (A14)$$

Errores en métodos espectrales.

Los errores asociados a los métodos espectrales son de dos tipos: errores de truncado y de "aliasing". En el primer caso se trata del error causado al plantear una solución como una serie finita por lo que es de esperar que cuando aumenta el valor de N el error disminuya. El otro error se debe a que en la serie discreta las frecuencias presentes también cubren (se vuelven "alias") de las

otras dando como resultado que en esos casos no es posible distinguir entre éstas y aquellas. Este fenómeno produce oscilaciones en la solución. Se ha probado que la influencia del aliasing en la exactitud de los métodos espectrales es asintóticamente del mismo orden que el error de truncado. Otro problema asociado al tratamiento con los métodos espectrales es el fenómeno de Gibbs que está ligado a cambios abruptos (discontinuidades) y que da por resultado la aparición de oscilaciones en la vecindad de la discontinuidad, tendiendo la amplitud a límites finitos que se acercan a la discontinuidad conforme se incrementa el número de frecuencias.

Algunas de las formas para eliminar el aliasing son mediante el incremento del número de modos (M en lugar de N) siendo el valor de los coeficientes extra iguales a cero, o bien mediante el defasamiento de las frecuencias.

## APENDICE B. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

1. El polinomio de Chebyshev de orden N se define por

$$T_n(\eta) = \cos(n\alpha) \quad (B1)$$

$$\alpha = \cos^{-1}(\eta) \quad (B2)$$

2. Condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = c \frac{\pi}{n^2} \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (B3)$$

3. Función de peso para condición de ortogonalidad

$$w(x) = (1-x^2)^{-1/2} \quad (B4)$$

4. Ecuaciones de recurrencia

Sea  $f(\eta)$  una función definida como una serie infinita de polinomios de Chebyshev:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) T_n(\eta) \quad (B5)$$

entonces la primera y segunda derivadas se evalúan por medio de las siguientes expresiones

$$f'(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p \text{ par}}}^{\infty} p a_p(\tau) T_n(\eta) \quad (\text{B6})$$

$$f''(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p(\tau) T_n(\eta) \quad (\text{B7})$$

donde  $c_0 = 2$  y  $c_n = 1$ , para  $n \geq 1$

## APENDICE C. NORMALIZACION DE LAS ECUACIONES

### 1. Variables adimensionales utilizadas

Se definen las siguientes variables adimensionales:

i) Posición:

$$x^{\circ} = \frac{x}{L} \quad (C1)$$

ii) Tiempo:

$$\tau = \frac{\alpha_0 t}{L^2} \quad (C2)$$

donde  $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho c}$

iii) Temperatura:

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_b - T_a} \quad (C3)$$

iv) Conductividad térmica:

la conductividad térmica de la aleta tiene la forma

$$k = k_0 + \delta T = k_0 + \delta \left[ (T_b - T_a) \theta + T_a \right],$$

$$k^{\circ} = \frac{k}{k_0} = 1 + \frac{\delta T_a}{k_0} + \frac{\delta (T_b - T_a)}{k_0} \theta = 1 + k_1^{\circ} + k_2^{\circ} \theta$$

$$k^{\circ} = 1 + k_1^{\circ} + k_2^{\circ} \theta \quad (C4)$$

en la base de la aleta ( $\theta = 1$ ) la conductividad térmica toma el valor

$$k_v^{\circ} = 1 + k_1^{\circ} + k_2^{\circ} \quad (C5)$$

Geometría de la aleta (ver figura 1)

iv) Altura de la aleta

$$\frac{h_0 - h_L}{L} = \frac{\psi - h_L}{L - \alpha}$$

$$\psi = (h_0 - h_L)(1 - \alpha^{\circ}) + h_L$$

$$\psi = h_0 \left[ 1 - \frac{h_0 - h_L}{h_0} \alpha^{\circ} \right] \quad (C6)$$

v) Area de la aleta:

el área en la base de la aleta es

$$A_0 = 2bh_0$$

el área transversal de la aleta a una distancia  $\alpha$  es

$$A = 2b\psi = 2bh_0 \left[ 1 - \frac{h_0 - h_L}{h_0} \alpha^{\circ} \right] = A_0 \left[ 1 - H_{0L} \alpha^{\circ} \right],$$

entonces

$$A^{\circ} = \frac{A}{A_0}$$

$$A^{\circ} = 1 - H_{0L} \alpha^{\circ} \quad (C7)$$

vi) Perímetro de la aleta

el perímetro en la base la aleta es

$$P_0 = 2(b + 2h_0)$$

el perímetro de la aleta a una distancia  $x$  es

$$P = 2(b + 2y) = 2b + 4h_0 - 4h_0 \frac{h_0 - h_L}{h_0} \alpha^2 = P_0 - 4(h_0 - h_L) \alpha^2,$$

entonces

$$P^* = \frac{P}{P_0} = 1 - 4 \frac{h_0 - h_L}{P_0} \alpha^2 = 1 - H_P \alpha^2$$

$$P^* = 1 - H_P \alpha^2 \quad (C8)$$

## 2. Normalización de las ecuaciones

La ecuación de la aleta es

$$\rho c A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \right] - h P (T - T_\infty) \quad (C9)$$

utilizando las variables adimensionales

$$dT = (T_b - T_\infty) d\theta,$$

$$\rho c A (T_b - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa A \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] (T_b - T_\infty) - h P (T_b - T_\infty) \theta,$$

$$\rho c \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - h P \theta$$

$$dt = \frac{L^2}{\alpha_0} d\tau, \quad dx = L d\alpha^*$$

$$\rho c \alpha_0 \frac{L^2}{L^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - h P \theta$$

$$\Lambda \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c \alpha_0} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - \frac{h L^2}{\rho c \alpha_0} P \theta$$

$$\Lambda^* \Lambda_0 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c \alpha_0} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k^* k_0 \cdot \Lambda^* \Lambda_0 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - \frac{h L^2}{\rho c \alpha_0} P \theta$$

$$\Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k^* \cdot \Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - \frac{h L^2}{\rho c \alpha_0} \frac{P}{\Lambda_0} \theta = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k^* \cdot \Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - \frac{h L^2}{\rho c \alpha_0} \frac{P}{\Lambda_0} (1 - H_P \alpha^*) \theta$$

$$\Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = k^* \cdot \Lambda^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^{*2}} + k^* \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \alpha^*} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} + \Lambda^* \frac{\partial k^*}{\partial \alpha^*} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} - B_0^2 (1 - H_P \alpha^*) \theta^2$$

y agrupando las derivadas se obtiene

$$\Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[ k^* \cdot \Lambda^* \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^*} \right] - B_0^2 (1 - H_P \alpha^*) \theta^2 \quad (C10)$$

donde el efecto convectivo ha sido incluido en la dependencia no lineal, y el parámetro  $B_0^2$  es

$$B_0^2 = \frac{h L^2}{\rho c \alpha_0} \frac{P}{\Lambda_0} \quad (C11)$$

Desarrollando la derivada de  $\alpha^\circ$  y dividiendo entre  $A^\circ$ :

$$A^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = k^\circ \cdot A^\circ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + k^\circ \frac{\partial A^\circ}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + A^\circ \frac{\partial k^\circ}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - B_0^2 (1 - H_P \alpha^\circ) \theta^\beta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = k^\circ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{k^\circ}{A^\circ} \frac{\partial A^\circ}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial k^\circ}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - B_0^2 \frac{(1 - H_P \alpha^\circ)}{(1 - H_{OL} \alpha^\circ)} \theta^\beta \quad (C12)$$

sustituyendo los valores de  $k^\circ$  y  $A^\circ$ :

$$k^\circ = 1 + k_1^\circ + k_2^\circ \theta$$

$$A^\circ = 1 - H_{OL} \alpha^\circ$$

la ecuación queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = (1 + k_1^\circ) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + k_2^\circ \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} - H_{OL} \frac{(1 + k_1^\circ)}{(1 - H_{OL} \alpha^\circ)} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$$

$$- H_{OL} \frac{k_2^\circ}{(1 - H_{OL} \alpha^\circ)} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + k_2^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - B_0^2 \frac{(1 - H_P \alpha^\circ)}{(1 - H_{OL} \alpha^\circ)} \theta^\beta$$

(C13)

para poder utilizar los polinomios de Chebyshev, es necesario hacer el siguiente cambio de variable:  $\eta = 2\alpha^\circ - 1$

Al sustituir en la ecuación anterior, después de algunas manipulaciones, queda:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 4(1 + k_1^\circ) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 4k_2^\circ \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - H_{OL} \frac{4(1 + k_1^\circ)}{(2 - H_{OL} - H_{OL} \eta)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$- 4H_{OL} \frac{k_2^\circ}{(2 - H_{OL} - H_{OL} \eta)} \theta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + 4k_2^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$- B_0^2 \frac{(2 - H_P - H_P \eta)}{(2 - H_{OL} - H_{OL} \eta)} \theta^\beta \quad (C14)$$

#### APENDICE D. ANALISIS DE COMPORTAMIENTO DE LA TECNICA ESPECTRAL

Con el objeto de definir el número de modos que se utilizarían para la realización del estudio, en primer lugar se hizo un análisis del comportamiento de la técnica espectral en función del número de modos. Se efectuaron 24 corridas tomando en cuenta tanto la aleta de sección constante con temperatura constante en su base, como aletas de sección y conductividad térmica variables, con temperatura fluctuante en su base. Se involucraron los siguientes valores de número de modos: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 25, 35 y 45. Los resultados del análisis se resumen en las siguientes gráficas.

La figura A1 muestra la evolución de la temperatura de una aleta de sección y conductividad térmica constantes, con temperatura en su base constante. Se puede observar que para tiempos muy pequeños existen oscilaciones (aliasing y truncado) en la solución pero éstas disminuyen sensiblemente aumentando el número de modos. Destacan particularmente las fuertes oscilaciones iniciales del caso con  $N=5$ . Conforme avanza el tiempo las oscilaciones se atenúan en todos los casos, de manera que cuando se alcanza el estado permanente (línea superior), con la excepción del caso  $N=5$ , el perfil de temperaturas es el mismo. En la figura A2 se han incluido solamente algunas de las gráficas de la figura anterior. Es claro que la diferencia entre los diferentes valores es

practicamente indistinguible. Revisando los valores de la razón total de calor se encontró una diferencia de 0.09% entre el caso con  $N=7$  y el caso con  $N=45$ .

Con el fin de observar el comportamiento espacial de la solución se incluyó en el programa una rutina para el cálculo de la temperatura y su primera y segunda derivadas. Esto fue hecho para los últimos tres tiempos antes de alcanzar el estado permanente. En la figura A3 se muestran los resultados para la aleta de las figuras A1 y A2. Puede notarse el comportamiento suave de los tres parámetros, siendo sólo distinguibles las líneas que unen los diferentes valores cuando  $N$  es más bajo, pero los valores en las posiciones calculadas caen en la línea continua que corresponde a  $N=25$ . En la figura A4 se muestran los parámetros anteriores para el caso de la aleta anterior pero con temperatura fluctuante en su base. Como en el caso anterior, el comportamiento entre las soluciones con diferentes valores de  $N$  es esencialmente la misma. En este caso si se puede notar la diferencia obvia entre los tiempos incluidos en el cálculo de la segunda derivada. Los valores de mayor interés, temperatura y primera derivada, principalmente la última, nuevamente dan resultados sin grandes diferencias.

Para poder evaluar las diferencias entre los diferentes casos, se calcularon los valores medios de la razón total de calor en función del tiempo de la aleta anterior. En la gráfica A5 se puede observar su comportamiento. Es claro que para tiempos pequeños existe una diferencia significativa entre los valores correspondientes a  $N=5$  y  $N=45$ , prediciéndose un valor más bajo

para  $N=45$ , pero a partir de  $\tau \sim 0,02$  esto se invierte calculándose valores más bajos para  $N=5$ . Después del tiempo mencionado la diferencia entre los valores calculados con  $N$ 's diferentes se hace más pequeña siendo la diferencia del orden del 1% entre la  $N=5$  y  $N=45$ .

Con base en lo anterior, se decidió escoger  $N=7$  ya que los resultados encontrados revelan que el error máximo sería del orden del 6% contra un 16% si se utilizaran diferencias finitas con el número de modos considerado. No se espera que se obtendría una solución que fuera convergente con un número tan pequeño de puntos utilizando diferencias finitas.

Una de las ventajas de las técnicas espectrales es obtener soluciones con gran exactitud aún con un pequeño número de modos particularmente en problemas no lineales donde se hace uso de la FFT, lo que se traduce en un número de operaciones significativamente más pequeño ya que en este caso es del orden de  $N \log N$  en lugar de  $N^2$  correspondiente al caso convencional. Por otra parte, se ha estimado que el error de aliasing y truncado pueden ser del orden  $N^{-2}$  [16] para métodos de colocación.

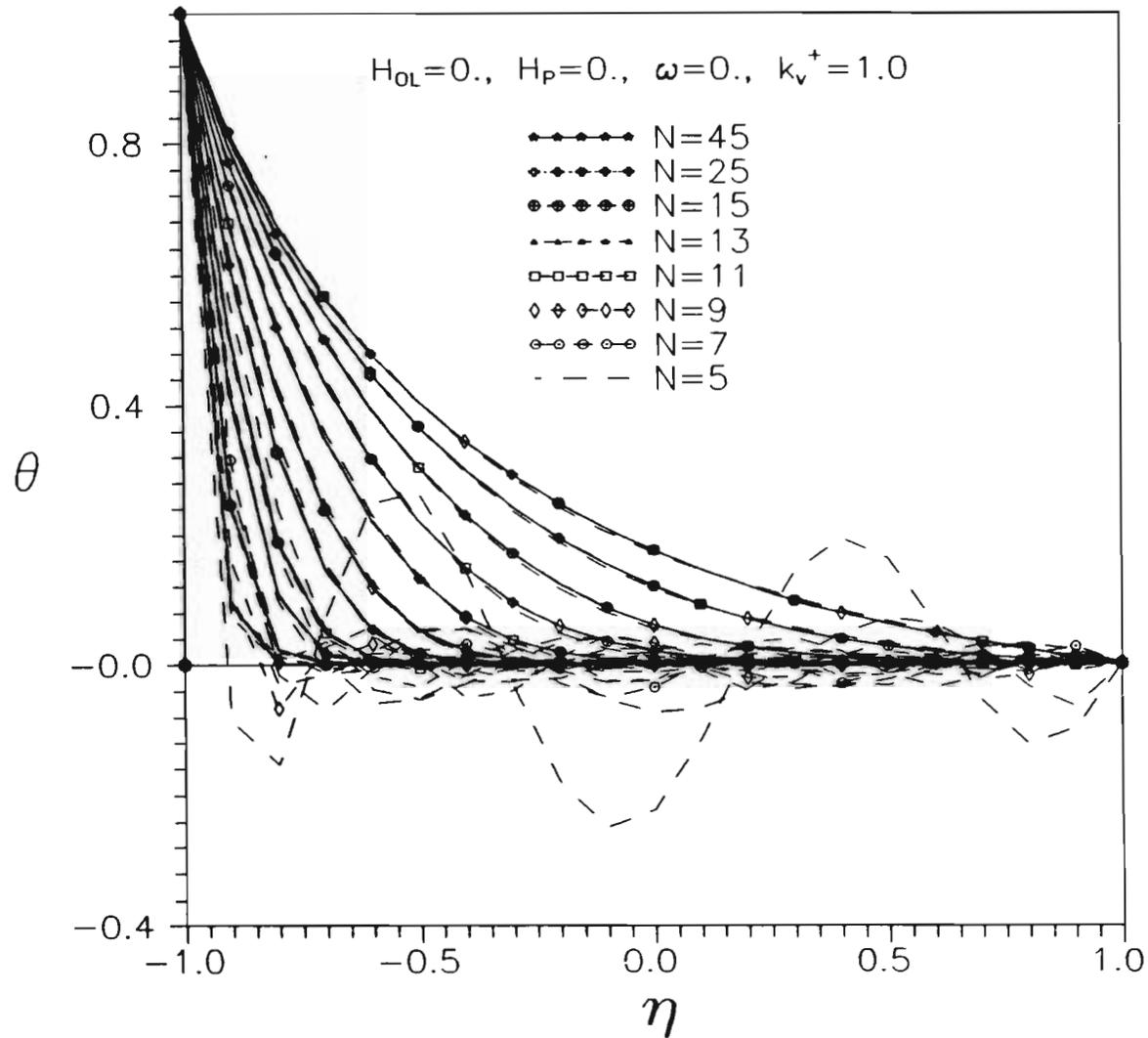


Fig. A1 EVOLUCION DE LA TEMPERATURA EN UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA CONSTANTE EN FUNCION DEL NUMERO DE MODOS.

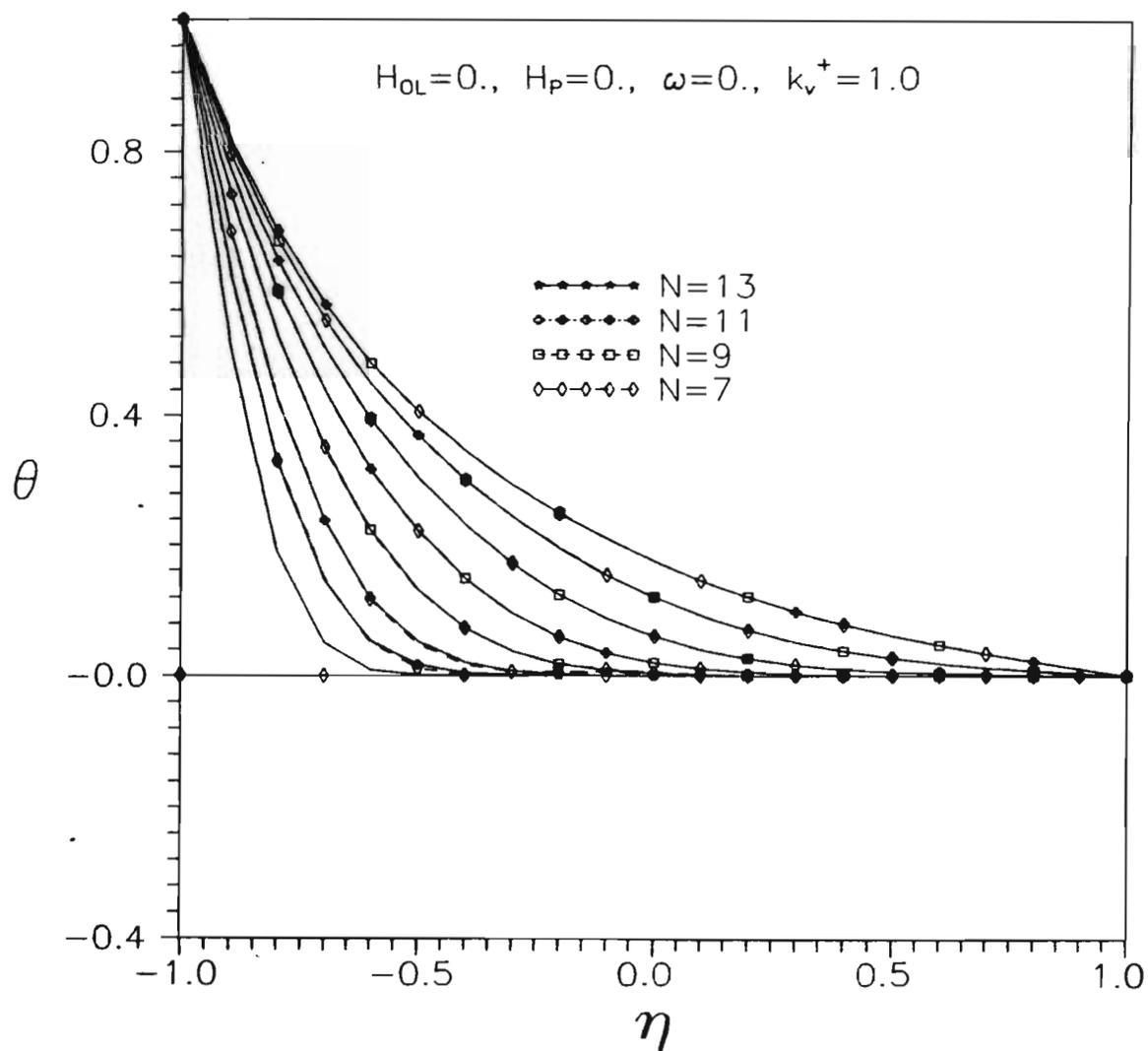


Fig. A2 EVOLUCION DE LA TEMPERATURA EN UNA ALETA DE SECCION Y CONDUCTIVIDAD TERMICA CONSTANTE PARA ALGUNOS VALORES DE N.

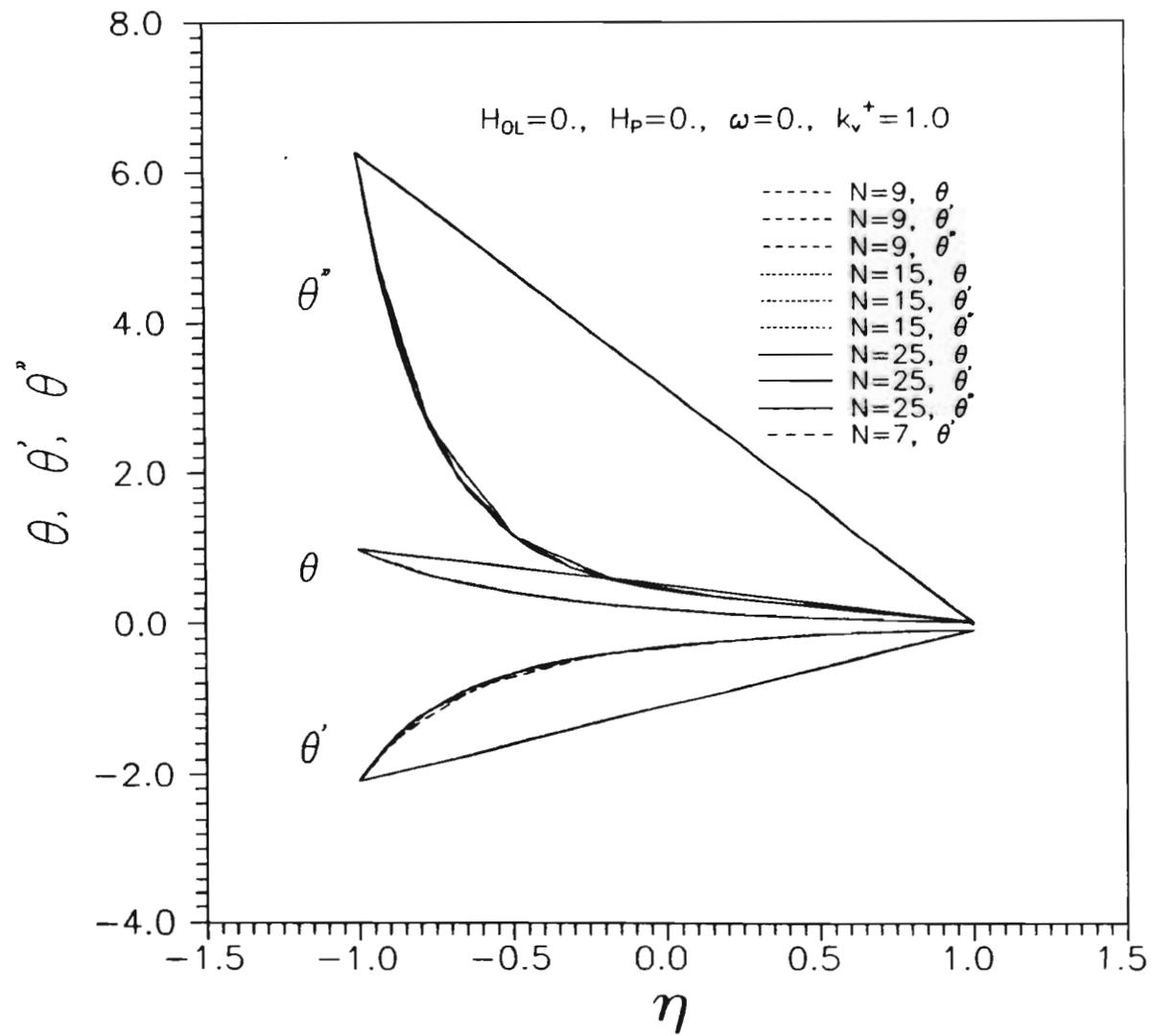
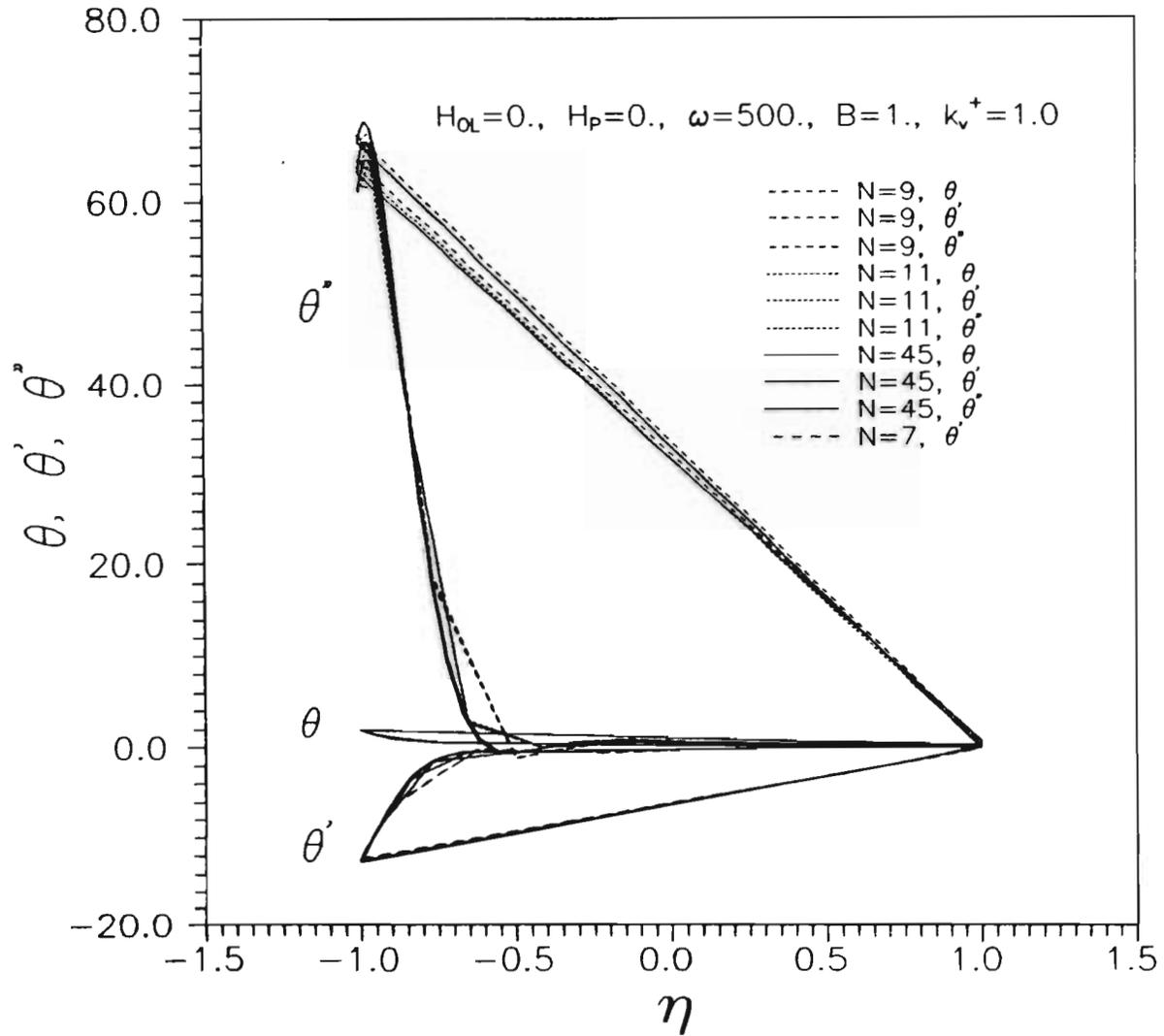


Fig. A3 COMPORTAMIENTO DE LA TEMPERATURA, LA PRIMERA Y LA SEGUNDA DERIVADAS EN FUNCION DEL NUMERO DE NODOS.



**Fig. A4 COMPORTAMIENTO DE LA TEMPERATURA, LA PRIMERA Y LA SEGUNDA DERIVADAS EN FUNCION DEL NUMERO DE MODOS.**

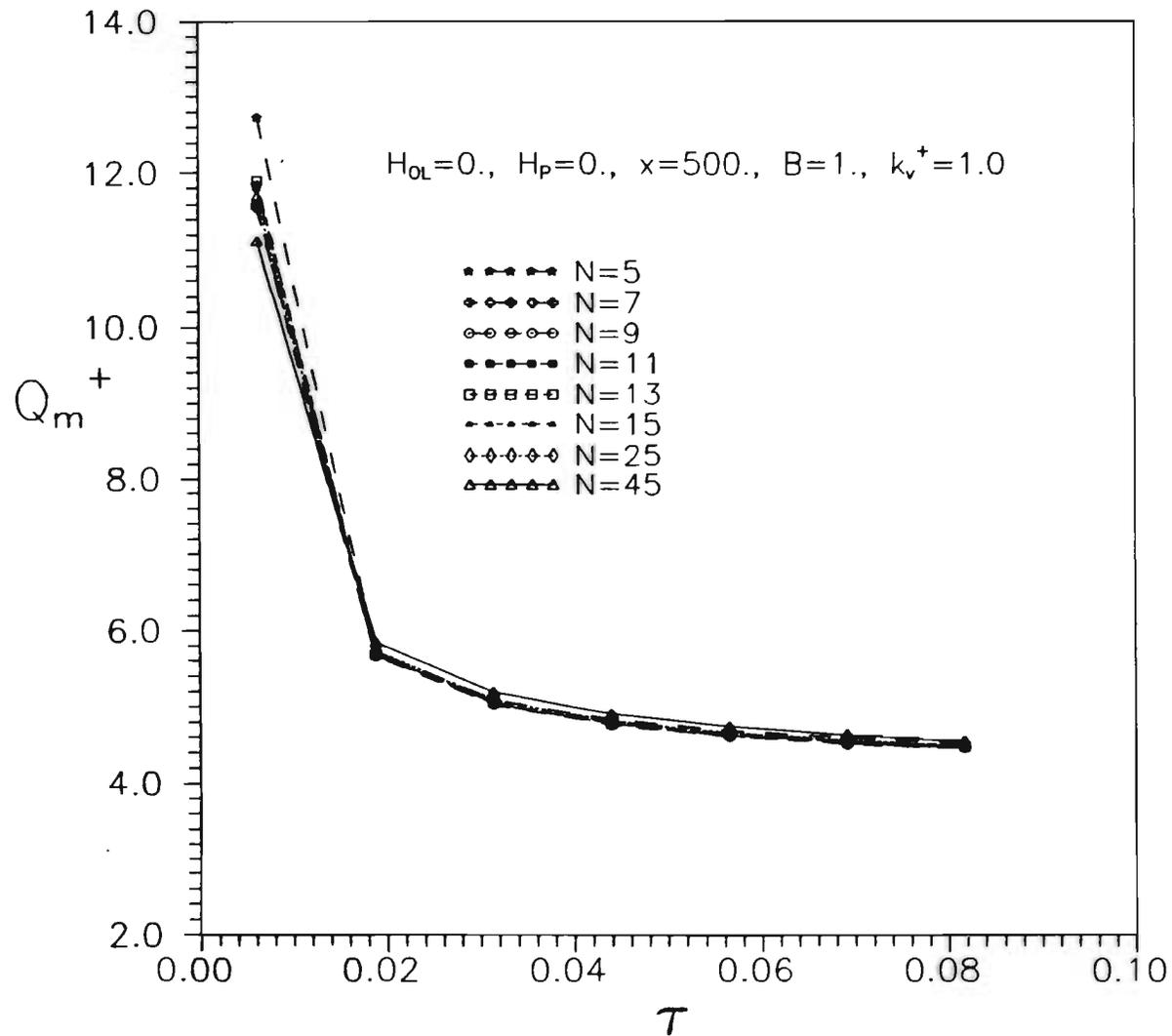


Fig. A5 COMPORTAMIENTO DE LA RAZON DE CALOR PROMEDIO EN FUNCION DEL NUMERO DE MODOS.

APENDICE 5. PROGRAMA DE COMPUTADORA

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C          PROGRAMA PARA OBTENER EL COMPORTAMIENTO                C
C  TRANSITORIO DE UNA ALETA DE SECCION TRANSVERSAL              C
C  VARIABLE Y CONDUCTIVIDAD TERMICA VARIABLE.                   C
C  CONDICION DE FRONTERA OSCILATORIA                            C
C  -----                                                       C
C                                                                 C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
PROGRAM FKT
DIMENSION A(60,60),CH(60,900),AN(60),AA(60),C(60)
DIMENSION BA(60),B(60,1),WK(180)
DIMENSION TE1(60),TE2(60),SF(60)
DIMENSION IWKF(510),WKF(510)
dimension tr(60),tr1(60),tr2(60)
COMPLEX TRC(120)
EQUIVALENCE (IWKF(1),WKF(1))
C SE LEE EL VALOR DE N (IMPAR) PARA OBTENER N+1
C ECUACIONES SIMULTANEAS, EL VALOR DE DELTA-T, Y
C EL # DE INTERVALOS DE TIEMPO
WRITE(6,20)
20  FORMAT(2X,'UNIDAD DE SALIDA = ? ')
    READ(5,*) NUT
    write(6,*)'tiempo inic?'
    read(5,*)tin
    WRITE(6,30)
30  FORMAT(2X,'N= ? ',' DT= ?', 'FAC=? ',' EXP=?')
    READ(5,*) N, VALOR,FAC,NBT
    WRITE(6,*) ' FAC/delta t=? t inter=? t final=?'
    READ(5,*) FDT,TSI,TSF
    WRITE(6,*) ' sin iter. despues de TTS= ?'
    READ(5,*) TTS
    write(6,*)' frecuencia de registro?'
    read(5,*)NT
    WRITE(6,*) ' FREC DE OSCILACION= ?,AMPLITUD= ?'
    READ(5,*) WO,AMP
    write(6,*)'bet,bet1,bet2=?'
    read(5,*)bet,bet1,bet2
    read(5,*)om
C se establecen las características de la aleta [k, A(x)]
    READ(5,*)RK,RK2
    READ(5,*)HOL,HP
    WRITE(6,50)
50  FORMAT(2X,' INTERVALOS EN X= ?')
    READ(5,*) NX
    WRITE(6,*) ' lee condicion inicial? si=1/no=0'
    READ(5,*) LDAT
    OPEN(UNIT=NUT,STATUS='UNKNOWN',ACCESS='append')
    LUU=NUT+7

```

```

OPEN(UNIT=LUU,STATUS='UNKNOWN',ACCESS='append')
WRITE(LUU,*) ' tiempo ',' flujo de calor en x=0'
WRITE(LUU,*) ' t ',' q '
C M=1 CORRESPONDE CON el primer renglon de la matriz a(i,j)
CIN=0
M=1
N1=N+1
N2=(N+1)/2
nf=2*n1
C K=1 CORRESPONDE CON EL TIEMPO t=0
temp=1.0
K=1
TS=tin
DT=VALOR
NTI=0
NTS=0
E=0.0010
oo=0.0
pi=4.0*atan(1.0)
WRITE(NUT,55) N,DT,FAC,NBT
55 FORMAT(5X,'N= ',I2,' delta t= ',F9.5,' FAC= ',F7.3,' EXP= ',I2)
WRITE(NUT,*) ' frecuencia=',W0,' AMPLITUD=',AMP
C NT CONTROLA EL INTERVALO DE REGISTRO
NC1=NT
NCH=0
KA=1
NQI=0
C C(1) CORRESPONDE CON CO
C(1)=2.0
DO 60 NC=2,M2
60 C(NC)=1.0
C CONDICION INICIAL DE LOS COEFICIENTES DE CHEBYSHEV
IF(LDAT.EQ. 1) GO TO 70
DO 65 J=1,N1
65 AA(J)=0.0
GO TO 90
DO 75 J=1,M2
75 READ(17,*) AA(J)
75 CONTINUE
C CALCULO DE Q EN X=0
sumq=0.0
do 85 iq=1,m2-1
iqq=iq-1
pap=0.0
do 80 it=iq,m2-1,2
pp=it
80 pap=pp*aa(it+1)+pap
85 sumq=sumq+2.0/c(iq)*pap*(-1)**iqq
smqf=2.0*sumq
smqf=-1.0*smqf
write(luu,*)ts,smqf
90 DO 100 J=1,N1
TR(J)=0.0
te1(j)=0.0
te2(j)=0.0
CH(J,K)=AA(J)

```

```

100  B(J,1)=0.0
      IF(CIN .EQ. 0.0) GO TO 2410
105  CIN=1
      if(ldat .ne. 1) go to 235
235  K=K+1
      DO 240 J=1,N1
          te2(j)=tr(j)
240  TE1(J)=TR(J)
C    SE HACEN CERO LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ A(I,J) (AX=B)
250  JZ=0
260  DO 560 I=1,N1
      DO 560 J=1,N1
560  A(I,J)=0.0
C    CALCULO DE LOS COEFICIENTES A(I,J) DE LA MATRIZ A, DE
C    COEFICIENTES DE CHEBYSHEV EN EL TIEMPO K+1
C    I=1 CORRESPONDE AL PRIMER RENGLON DE LA MATRIZ
      I=1
580  L=1
      A(I,M)=1.0
      NN=M-1
      NP=M+1
      DO 590 JJ=NP,N,2
590  A(I,JJ+1)=-4.0*JJ*(1.0+RK)*(JJ**2-NN**2)*DT/C(M)*om+A(I,JJ+1)
      LI=(1-(-1)**NN)/2
      L=L+LI
      DO 600 NI=1,N2
          MI=2*NI+L-2
600  A(I,MI)=4.0*DT/C(M)*om*(1.0+RK)*(N+L)*((N+L)**2-NN**2)+A(I,MI)
C    AQUI TERMINA EL CALCULO DE COEFICIENTES DE CHEBYSHEV
C    A(I,J) PARA EL RENGLON I
C
C    CALCULO DEL RENGLON I DEL VECTOR B
C    SE CALCULA EN PRIMER LUGAR LA PARTE DEPENDIENTE DE LOS
C    COEFICIENTES DE CHEBYSHEV EN EL TIEMPO K
C
      SCA=0.0
      S1=0.0
      S3=0.0
      L=1
      DO 700 JJ=NP,N,2
700  S1=4.0*DT/C(M)*(1.0-om)*(1.0+RK)*JJ*(JJ**2-NN**2)*AA(JJ+1)+S1
      LI=(1-(-1)**NN)/2
      L=L+LI
      DO 800 NI=1,N2
          MI=2*NI+L-2
800  S3=AA(MI)+S3
      IF(LDAT .EQ. 1) GO TO 820
      OSS=1.0+AMP*SIN(WO*TS)
      GO TO 840
820  OSS=1.0+AMP*SIN(WO*TS)
840  SCA=(N+L)*((N+L)**2-NN**2)*((1.5-L)*OSS-(1.0-om)*S3)
      SCA=S1+SCA*4.0*DT/C(M)*(1.0+RK)
      BA(I)=SCA+AA(I)
C    SE CALCULA UN NUEVO RENGLON I
      I=I+1
      M=M+1

```

```

      IF(I.GT.N1) GO TO 2000
      GO TO 580
C   SE COMPLETO EL SISTEMA AX=B SIN EL TERMINO NO LINEAL
C   -----
C   SE INTRODUCE EL TERMINO NO LINEAL i.e. LAS TRANSFORMADAS
C   DE FOURIER EN FUNCION DEL TIEMPO K
2000 IV=0
      if(nte .lt. 2) go to 2060
      do 2040 i=1,n1
      tr(i)=1.5*tr(i)-0.5*te1(i)
2040 continue
2060 DO 2100 I=1,N1
2100 B(I,1)=BA(I)+TR(I)
C   SE PROCEDE AL CALCULO DEL SISTEMA AX=B
C   USO DEL IMSL-LEQIF PARA LA SOLUCION DEL SISTEMA
      MA=60
      IA=60
      IB=60
      IJOB=0
      MC=1
C   -----
C   CALL LEQIF(A, IA, N1, MA, B, IB, MC, IJOB, WK, IER)
C   -----
      DO 2200 J=1,N1
      AN(J)=B(J,1)
2200 CONTINUE
      DO 2300 I=1,N1
      anmax=abs(an(1))
      do 2220 i=2,n1
      if(anmax .gt. abs(an(i))) go to 2220
      anmax=abs(an(i))
2220 continue
      damax=abs(an(1)-aa(1))
      do 2230 i=2,n1
      if(damax .gt. abs(an(i)-aa(i))) go to 2230
      damax=abs(an(i)-aa(i))
2230 continue
      EMX=abs(damax/anmax)
      if(EMX .gt. E) IV=1
      IF(ABS(AN(I)-AA(I)).GT.E) IV=1
2300 CONTINUE
C   SI IV=0 ENTONCES LOS VALORES DE An SON IGUALES A LOS DE Aa
      IF(IV.EQ.0) GO TO 6500
C   LOS VALORES EN EL TIEMPO K+1 SE SUSTITUYEN EN AA (TIEMPO K)
2350 IF(NTI .EQ. 0) TS=DT+tin
      NTI=1
      DO 2400 I=1,N1
2400 AA(I)=AN(I)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC*CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   SE CALCULA EL TERMINO NO LINEAL
C   CALCULO DE LOS COEFICIENTES N+1 Y N+2
2410 DO 2450 L=1,2
      S3=0.0
2420 DO 2430 NI=1,N2
      MI=2*NI+L-2
      S3=AA(MI)+S3

```

```

2430 CONTINUE
      IF(LDAT .EQ. 1) GO TO 2440
      GO TO 2445
2440 OSS=1.0+AMP*SIN(WO*TS)
2445 AA(N1+L)=(1.5-L)*OSS-S3
2450 CONTINUE
C ***** T"
C CALCULO DE LA TEMPERATURA
C *****
2455 DO 2480 LM=1,N1
      VA=LM-1
      AX=PI/N*VA
      ANA=0.0
      ST1=0.0
      STR=0.0
2460 DO 2470 II=1,M2
      NM=II-1
      ST1=ST1+AA(II)*COS(NM*AX)
2470 CONTINUE
      STR=ST1
      XX=COS(AX)
      IF(STR .lt. .0005) STR=0.0
      TR(LM)=STR
2480 CONTINUE
C ***** D1T"
C PRIMERA DERIVADA DE LA TEMPERATURA
C *****
2490 DO 2540 LM=1,N1
      VA=LM-1
      AX=PI/N*VA
      SUMQ=0.0
2500 DO 2530 IQ=1,(M2-1)
      IQQ=IQ-1
      PAP=0.0
2510 DO 2520 IT=IQ,(M2-1),2
      PP=IT
      PAP=PP*AA(IT+1)+PAP
2520 CONTINUE
      NM=IQ-1
      SUMQ=SUMQ+2.0/C(IQ)*PAP*COS(NM*AX)
2530 CONTINUE
C EL DOBLE DE SUMQ REPRESENTA EL FLUJO DE CALOR
C SMQF=2.0*SUMQ
      TR1(LM)=SUMQ
      XX=COS(AX)
      TANTA=TR(LM)+TR(LM-1)
2540 CONTINUE
C ***** D2T"
C SEGUNDA DERIVADA DE LA TEMPERATURA
C *****
2550 DO 2590 LM=1,N1
      SCA=0.0
      VA=LM-1
      NP=2
      AX=PI/N*VA
2555 DO 2580 NM=1,N1

```

```

      NN=NM-1
      S1=0.0
2560 DO 2570 JJ=NP,M2,2
      S1=JJ*(JJ**2-NN**2)*AA(JJ+1)+S1
2570 continue
      NP=NM+2
      SCA=SCA+1/C(NM)*S1*COS(NN*AX)
2580 CONTINUE
      TR2(LM)=SCA
      XX=COS(AX)
      DNTA=TR1(LM)+TR1(LM-1)
      IF(ABS(DNTA) .LT. 1.0E-05) TR2(LM)=0.0
2590 CONTINUE
      IF(TS .LT. (TSF-3.0*DT)) GO TO 3000
      DO 2600 LM=1,N1
      VA=LM-1
      AX=PI/N*VA
      XX=COS(AX)
      WRITE(20,*)LM,XX,TR(LM),TR1(LM),TR2(LM)
2600 CONTINUE
C SE CALCULAN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER
3000 DO 5000 IR=1,N1
      VA=IR-1
      AX=PI/N*VA
      F1=TR(IR)*TR2(IR)
      F2=(4.0*HOL*(1.0+RK))/(2-HOL-HOL*COS(AX))*TR1(IR)
      F3=(4.0*HOL*RK2)/(2.0-HOL-HOL*COS(AX))*TR(IR)*TR1(IR)
      F4=TR1(IR)*TR1(IR)
      F5=(2.0-HP-HP*COS(AX))/(2.0-HOL-HOL*COS(AX))*TR(IR)*TR(IR)
      F1=8.0*RK2*F1
      F2=2.0*F2
      F3=2.0*F3
      F4=8.0*RK2*F4
      F5=2.0*FAC*F5
      RLT=F1-F2-F3+F4-F5
      TRC(IR)=CMLX(RLT,00)
5000 CONTINUE
      TRC(N1)=TRC(N1)/2.0
      DO 5200 IR=N1+1,N
5200 TRC(IR)=CMLX(00,00)
C SE LLAMA A IMSL-FFTCC PARA CALCULAR FFT1
C -----
      CALL FFTCC(TRC,NF,IWKF,WKF)
C -----
      DO 6000 I=1,N1
6000 TR(I)=REAL(TRC(I))*DT/(N*C(I))*TEMP
      IF(CIN .EQ. 0) GO TO 105
      nte=nte+1
      if(csi .eq. 0.0) go to 6500
      if(nqi .eq. 1) go to 6500
C SE RECALCULA EL SISTEMA AX=B PARA EL MISMO TIEMPO
      JZ=JZ+1
      IF(JZ .EQ. 1) GO TO 6100
      go to 6180
6100 do 6120 i=1,n1
      tr(i)=tr(i)*bet1+tel(i)*bet2

```

```

6120 continue
      go to 2000
6180 IF(NQI .EQ. 1) GO TO 2000
      DO 6200 I=1,N1
      TR(I)=(TR(I)*bet+TE1(I)*(1.0-bet))*bet1+te2(i)*bet2
6200 CONTINUE
      GO TO 2000
C   SE GUARDAN LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES CADA NT
C   INTERVALOS DE TIEMPO
6500 M=1
      do 6540 i=1,n1
      te1(i)=tr(i)
6540 continue
      IF(TS .GT. DTI*FDT) GO TO 6600
      K=K+1
      GO TO 6650
6600 K=K+1
      IF(NTS .EQ. 1) GO TO 6650
C   SE CAMBIA EL VALOR DE delta t
      DT=DT*FDT
      NTS=1
6650 TS=TS+DT
      IF(K .GT. NT) GO TO 7000
      IF(JZ .EQ. 0) GO TO 6740
      WRITE(6,6700) JZ
6700 FORMAT(2X,'SE LOGRO CONVERGER EN ',I3,' ITERACIONES')
6740 WRITE(6,6750) TS
6750 FORMAT(5X,'TIEMPO= ',F10.5)
      if(csi .eq. 0.0) go to 250
C   SE GUARDAN LAS TRANFORMADAS DE LOS ULTIMOS DOS TIEMPOS
      do 6770 i=1,n1
      te2(i)=te1(i)
6770 continue
      DO 6800 I=1,N1
6800 TE1(I)=TR(I)
C   SE ACTUALIZAN LOS VALORES ANTERIORES
      DO 6900 I=1,N1
6900 AA(I)=AN(I)
      GO TO 250
7000 WRITE(6,7100)TS,KA
7100 FORMAT(5X,'TIEMPO= ',F10.5,'KA= ',I3)
      KA=KA+1
      K1=KA-1
      DO 7200 I=1,N1
      IF(ABS(AN(I)-CH(I,K1)).GT.EE) NCH=1
7200 CONTINUE
      IF(NCH.EQ.0) GO TO 10000
      NCH=0
      IF(TS .GT. TTS) NQI=1
      DO 8000 I=1,N1
8000 CH(I,KA)=AN(I)
      DO 8200 L=1,2
      SUMCH=0.0
      DO 8100 I=1,N2
      MI=2*I+L-2
8100 SUMCH=SUMCH+CH(MI,KA)

```

```

      OSS=1.0+AMP*SIN(WO*TS)
8160 CH(N1+L,KA)=(1.5-L)*OSS-SUMCH
8200 CONTINUE
C   calculo de q en x=0
      SUMQ=0.0
      DO 8350 IQ=1,M2-1
      IQQ=IQ-1
      DO 8300 IS=IQ,M2-1,2
8300 PAP=PP*CH(IS+1,KA)+PAP
8350 SUMQ=SUMQ+2.0/C(IQ)*PAP*(-1)**IQQ
      SMQF=2.0*SUMQ
      SMQF=-1.0*SMQF
      WRITE(LUU,*)TS,SMQF
      M=1
      IF(KA .EQ. 900) GO TO 10000
      do 8370 i=1,n1
      te2(i)=te1(i)
8370 continue
      DO 8500 I=1,N1
      TE1(I)=TR(I)
8500 CONTINUE
      DO 9000 I=1,N1
9000 AA(I)=AN(I)
      NT=NT+NC1
      IF(TS .GT. TSF) GO TO 10000
      IF(NSI .EQ. 1) GO TO 250
      IF(TS .GT. TSI) GO TO 9400
      GO TO 250
9400 WRITE(6,*)' SE DESEAN VALORES ADICIONALES ? si>0/no=0'
      READ(5,*) MSI
      if(cdt .eq. 0.0) go to 9800
9600 dt=cdt
9800 IF(MSI .EQ. 0) GO TO 10000
      NSI=1
      GO TO 250
C   SE ALCANZO EL ESTADO PERMANENTE
10000 LF=KA
      DO 10200 I=1,N1
      CH(I,KA)=AN(I)
10200 continue
      do 10300 i=1,m2
      write(18,*)ch(i,ka)
10300 continue
      WRITE(18,*)'      t= ',TS
      CLOSE(UNIT=LUU)
      WRITE(6,*)' SE LOGRO EL ESTADO PERMANENTE EN = ',K,
1' INTERVALOS DE TIEMPO'
      NUU=NUT+6
      WRITE(NUU,*) 'FRECUENCIA DE OSCILACION=',WO,'AMP=',AMP
      WRITE(6,*)' # DE INTERVALOS DE TIEMPO DESEADO ?, lineal?'
      READ(5,*) ET,m1
      ETI=1.0/ET
      LL=1
      IV=1
      TS=tin
14020 WRITE(NUU,14040) TS

```

```

14040 FORMAT(3X,'TEMP. EN FUNCION DE X PARA EL TIEMPO= ',F10.5,/)
      WRITE(NUU,14060)
14060 FORMAT(6X,'X ',10X,' TEMPERATURA',/)
      BB=LF**ETI+0.90
      bl=lf*eti+0.90
      RXN=NX-1
      DO 15000 NE=1,NX
      RNE=NE-1
      VA=RNE/RXN
      XX=2.0*VA-1.0
      ALFA=ACOS(XX)
      ANA=0.0
      ST1=0.0
      ST2=0.0
      DO 14200 II=1,N1
      NM=II-1
14200 ST1=ST1+CH(II,LL)*COS(NM*ALFA)
      DO 14600 L=1,2
      ST3=0.0
      DO 14400 NI=1,N2
      MI=2*NI+L-2
14400 ST3=ST3+CH(MI,LL)
14500 OSS=1.0+AMP*SIN(WO*TS)
14540 ANA=(1.50-L)*OSS-ST3
      IF(TS .EQ. 0.0) ANA=0.0
14600 ST2=ST2+ANA*COS((N+L)*ALFA)
      STR=ST1+ST2
      if(abs(str) .le. 5.0E-04) str=0.0
      WRITE(NUU,14800) XX,STR
      WRITE(6,*) ' X= ',XX,' T= ',STR
14800 FORMAT(2X,F10.5,3X,E15.8)
15000 CONTINUE
      IF(IV .GT. ET) GO TO 16000
      IV=IV+1
      if(ml .eq. 1) go to 15500
      LL=INT(BB)
      TS=(LL-1)*DT*NC1+tin
      ETI=ET1*IV
      GO TO 14020
15500 ll=int(bl)
      ts=(ll-1)*dt*nc1+tin
      eti=et1*iv
      go to 14020
16000 CLOSE(UNIT=NUU)
      CALL EXIT
      END

```

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA