00365
3
2i

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LA CATEGORIA DE MODULOS DE ALGEBRAS CANONICAS SALVAJES Y SU CATEGORIA DERIVADA.

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de:

MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMATICAS)

P r e s e n t a:

Mat. JESUS CARRILLO PACHECO

Director de Tesis:
DR. JOSE ANTONIO DE LA PEÑA MENA

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

PARA MIS PADRES

AGRADECIMIENTOS.

Quiero hacer patente mi agradecimiento al director de está tesis **Dr. JOSE ANTONIO DE LA PEÑA MENA** así como a cada uno de los sinodales que amablemente participaron en la revisión de este trabajo:

Dra. MARTHA TAKANE IMAY

Dr. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

Dr. ROBERTO MARTINEZ VILLA

Dr. CRISTOF GEISS

Dr. DIETER VOSSIECK MUHLENMENG

M. en C. MICHAEL BARDT SCHLATTER

Y reconocer sus acertadas observaciones y enorme paciencia que dispensaron para mí persona.

I N D I C E

CAPITULO 4.

GAVILLAS Y MODULOS SOBRE ALGEBRAS CANONICAS.

I N T R O D U C C I O N .

La finalidad de este trabajo es presentar una guía autocontenida al material necesario para entender las relaciones entre las variedades proyectivas pesadas y las álgebras canonicas. Algunas demostraciones sólo son referidas a las fuentes originales o se presentan en forma esquemática.

La conformación del presente trabajo es como sigue:

Capitulo 1 : Contiene las definiciones y ejemplos básicos para una primera comprensión de las categorias derivadas acotadas.

Capitulo 2 : Se definen las variedades proyectivas pesadas,y las gavillas coherentes de tilteo sobre dichas variedades. Se prueba la equivalencia triangular entre la categoría derivada de gavillas coherentes sobre la línea proyectiva pesada y la categoría derivada de módulos de dimensión finita sobre un álgebra canónica.

Así como hechos concernientes con la teoría de torsión de las gavillas coherentes en la línea proyectiva pesada.

Capitulo 3 : Se aborda el problema de construir las sucesiones de Auslander-Reiten en la categoría derivada de complejos acotados de gavillas coherentes sobre la línea proyectiva pesada. Para la cual es necesario desarrollar una serie de hechos de caracter geometrico tales como la comohología de Čech y la relación que guarda con la cohomología usual de gavillas.

Capitulo 4: Aqui se desarrolla lo referente a las relaciones que guardan las gavillas y módulos sobre Álgebras canonicas, las categorías perpendiculares, así como las componentes en $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{X})$; en particular la componente distinguida. El capitulo termina aportando un par de ejemplos de dichas componentes estos calculos se deben a José Antonio de Peña.

Notación y Terminología

En este trabajo asumimos la notación y terminología de "Tame algebras and quadratic forms" de M. Ringel (ver [14] en la bibliografía) para todo lo relacionado acerca de representaciones de Álgebras. También asumimos la notación de "Algebraic Geometry " y de "Residues and Duality " de R. Hartshorne (ver [11] y [10] respectivamente en la bibliografía) para todo lo relacionado a geometría algebraica y categorías derivadas respectiva-tivamente.

Capítulo 1 :

El presente capítulo tiene por objeto proporcionar al lector los resultados más generales de teoría de tilteo para módulos, y categorías derivadas necesarios para el desarrollo de la presente tesis.

La teoría de tilteo presentada aquí abarca no sólo el aspecto "clásico" de módulos tilteados de dimensión proyectiva uno , sino también la teoría tilteada generalizada concerniente con módulos de dimensión proyectiva finita.

1.1 CATEGORIAS TRIANGULADAS:

Definición : Una categoría triangulada es una categoría aditiva C junto con

a) Un automorfismo $T:C \longrightarrow C$ de categorías llamado funtor translación, y

b) Una colección de sextuplas (X,Y,Z,u,v,w), llamadas los triángulos de C, donde en cada sextupla, X,Y,Z son objetos de C, y u,v,w son morfismos de C como siguen: $u:X \longrightarrow Y$, $v:Y \longrightarrow Z$, $w:Z \longrightarrow TX$.

Un morfismo de triángulos $(f,g,h):(X,Y,Z,u,v,w) \longrightarrow (X',Y',W',u',v',w')$ es una terna de morfismos de la forma, $f:X \longrightarrow X'$, $g:Y \longrightarrow Y'$, $h:Z \longrightarrow Z'$ tal que $g\circ u=u'\circ f$, $h\circ v=v'\circ g$, $T(f)\circ w=w'\circ h$.

Y éstos están sujetos a los siguientes axiomas:

TR1) Cada sextupla (X,Y,W,u,v,w) como arriba, isomorfa a un triángulo es un triángulo. Cada morfismo $u:X \longrightarrow Y$ puede ser encajado en un triángulo (X,Y,Z,u,v,w). La sextupla $(X,X,0,id,0,0)$ es un triángulo.

TR2) (X,Y,Z,u,v,w) es un triángulo si y sólo si $(Y,Z,T(X),v,w,-T(u))$ lo es.

TR3) Dados dos triángulos (X,Y,W,u,v,w) y (X',Y',W',u',v',w'), y morfismos $f:X \longrightarrow X'$, $g:Y \longrightarrow Y'$ que conmuta con u, u', entonces existe un morfismo $h:Z \longrightarrow Z'$ (no necesariamente único) tal -- que (f,g,h) es un morfismo de triángulos.

TR4) (El axioma del octaedro).

Suponga dados los triángulos

$$(X,Y,Z',u,j,k)$$
$$(Y,Z,X',v,o,i)$$
$$(X,Z,Y',v\circ u,q,r)$$

Entonces existen morfismos $f:Z' \longrightarrow Y'$ y $g:Y' \longrightarrow X'$ tal que

$$(Z',Y',X',f,g,T(j)\circ i)$$

es un triángulo y $r\circ f=k$, $g\circ q=o$, $u\circ T^{-1}(r)=T^{-1}(i)\circ T^{-1}(g)$.

EJEMPLOS:

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana

a) La categoría $k(\mathcal{A})$.
Sus objetos son complejos de cadenas $X^{\cdot}$ de elementos de $\mathcal{A}$
Sus morfismos son morfismos de cadenas módulo homotopía.
Para cada morfismo $u:X^{\cdot}\rightarrow Y^{\cdot}$ de $k(\mathcal{A})$ podemos construir un triángulo $(X^{\cdot},Y^{\cdot},C^{\cdot}(u),u,v,w)$ donde $C^{\cdot}(u)$ es el complejo $C^{\cdot}(u)^p=(TX^{\cdot})^p\oplus Y^p$ y su morfismo frontera $\delta^{\cdot}:Y^{\cdot}\rightarrow C^{\cdot}(u)$ está dado por la matriz

$$\delta^p=\begin{bmatrix} (T\delta_X)^p & (Tu)^p \\ 0 & \delta_Y^p \end{bmatrix}$$

b) Análogamente podemos definir las categorías trianguladas

$k^+(A)$, ($k^-(\mathcal{A})$ y $k^b(\mathcal{A})$) de complejos de cadenas acotados por abajo (resp. acotados por arriba y acotados por ambos lados).

c) La categoría derivada $D(\mathcal{A})$ de A.
Sus objetos son complejos de cadenas $X^{\cdot}$ de objetos de $\mathcal{A}$
Sus morfismos son ternas $(s,X^{\cdot\cdot},f):X^{\cdot}\longrightarrow Y^{\cdot}$ donde $X^{\cdot\cdot}\in \mathrm{Ob}D(\mathcal{A})$ donde $f:X^{\cdot\cdot}\longrightarrow Y^{\cdot}$ y $s:X^{\cdot\cdot}\longrightarrow X^{\cdot}$ es un casi-isomorfismo es decir es un morfismo en $k(\mathcal{A})$ que induce un isomorfía en cohomología, esto es, el morfismo inducido

$$H^n(f):H^n(X^{\cdot}):=\ker\delta^n_X/\mathrm{Im}\delta^{n-1} \longrightarrow H^n(Y^{\cdot}):=\ker\delta^n_Y/\ \mathrm{Im}\delta^{n-1}_Y$$

es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dos morfismos $(s,X^{\cdot\cdot},a):X^{\cdot}\longrightarrow Y^{\cdot}$ y $(t,X^{\cdot\cdot\cdot},b):Y^{\cdot}\longrightarrow Z^{\cdot}$ son iguales si existe $u:W^{\cdot}\longrightarrow X^{\cdot\cdot}$ casi-isomorfismo y si existen $f:W^{\cdot}\to X^{\cdot\cdot}$, y $g:W^{\cdot}\to X^{\cdot\cdot\cdot}$ tal que

$$s\circ f=u=t\circ g \quad y \quad a\circ f=b\circ g$$

La composición :Para cada par de morfismos $r:X^{\cdot\cdot\cdot}\to Y$ con r casi-isomorfismo y $a:X^{\cdot\cdot}\longrightarrow Y$ existe un par de morfismo $f':W\longrightarrow X^{\cdot\cdot\cdot}$ y $r':W^{\cdot}\longrightarrow X^{\cdot\cdot}$ tal que r' es casi-isomorfismo y $r\circ f'=f\circ r'$.Usando este axioma en categorías derivadas (ver Hartshorne [10]), podemos definir la composición.

Sea $(s,X^{\cdot\cdot},a):X^{\cdot}\longrightarrow Y^{\cdot}$, $(t,X^{\cdot\cdot\cdot},b):Y^{\cdot}\longrightarrow Z^{\cdot}$ entonces la composición es:

$$(t,X^{\cdot\cdot\cdot},b)\circ(s,X^{\cdot\cdot},a):=(s\circ r',W^{\cdot},g\circ f')$$

donde $r':W^{\cdot}\longrightarrow X^{\cdot\cdot}$ y $f':W^{\cdot}\longrightarrow X^{\cdot\cdot\cdot}$ son como arriba.

Proposición El funtor $\mathcal{A}\longrightarrow D(\mathcal{A})$,el cual manda cada objeto X de $\mathcal{A}$ en el complejo consistente de X en grado cero, y cero en cualquier otra parte, da una equivalencia de la categoría $\mathcal{A}$ y la subcategoría plena de $D(\mathcal{A})$ consistente de los complejos $X^{\cdot}$ tal que

$$X^{i}=0 \text{ para } i\neq 0$$

Ver por ejemplo Hartshorne [10]

Triángulos en $D(\mathcal{A})$:
La categoría $\mathcal{A}$ es una subcategoría plena de $D(\mathcal{A})$, y cada morfismo $u:X^{\cdot}\longrightarrow Y^{\cdot}$ puede ser sumergido en un triángulo en $K(\mathcal{A})$ así cada sextupla isomorfa a un de estas sextuplas es un triángulo en $D(A)$, por definición.

Como en b) podemos definir las categorías trianguladas $D^{+}(\mathcal{A})$ (resp. $D^{-}(\mathcal{A})$ y $D^{b}(\mathcal{A})$) de complejos acotados por abajo (resp. de complejos acotados por arriba y complejos acotados por ambos lados)

1.2 Dos categorías triangulares son **equivalentes como categorías triangulares** si cumplen con ser equivalentes como categorías y si la equivalencia manda triángulos en triángulos. Cuando esto suceda diremos simplemente que estas categorías son **equivalentes triangulares**.

Ejemplos:

a)Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas equivalentes y sea $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ una equivalencia exacta de categorías .

Entonces F induce una equivalencia de categorías triangulares $F:D(A)\longrightarrow D(B)$. esta equivalencia se calcula "puntualmente" y es una consecuencia sencilla de la propiedad universal de categorías triangulares (ver por ejemplo [8]).

1.3 Sea C un categoría triangulada y $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de C . decimos que $\mathcal{A}$ **genera** a C si la subcategoría triangulada plena C' más pequeña de C (la cual es cerrada bajo isomorfismos) que contiene a $\mathcal{A}$ coincide con C en este caso decimos que $\mathcal{A}$ es una **subcategoría generadora** de C.

Ejemplos:

a) Sea A un anillo. Entonces modA es una subcategoría generadora de D^b(modA) ver [6].En efecto, sea $\mathcal{A}'$ la subcategoría triagulada de D^b(modA) más pequeña que contiene a modA.

Sea $X^{\cdot}$ un complejo de cadenas de la categoría derivada de complejos acotados de modA. Por inducción en el número de complejos diferentes de cero de $X^{\cdot}$ podemos demostrar que $X^{\cdot}$ está en $\mathcal{A}'$. Pero esto implica que D^b(modA) es igual ,como categorías, a $\mathcal{A}'$.

b) Sea A una k-álgebra de dimensión finita y de dimensión global finita .Entonces P_A (la subcategoría plena de A-módulos izquierdos proyectivos) e I_A (la subcategoría plena de A-módulos izquierdos inyectivos) son subcategorías generadoras de D^b(modA) .Ver [8].

1.4 El concepto de subcategoría generadora es usado a menudo para probar que ciertos funtores exactos entre categorías derivadas son equivalencias, por ejemplo :

a) Sea A una k-álgebra de dimensión global finita. Entonces D^b(modA) es equivalente triangular a $K^b(P_A)$ y a $K^b(I_A)$. En efecto, como para cada A-módulo X se tiene una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde Q_i es un módulo proyectivo para cada i.

Entonces cada objeto X de modA es isomorfo a algún elemento de la categoría de complejos acotados $K^b(P_A)$. Por lo tanto modA es una subcategoría plena de $K^b(P_A)$ pero del ejemplo anterior sabemos que D^b(modA) es la mínima subcategoría triangulada que contiene a modA así que ambas categorías son equivalentes.Un razonamiento análogo demuestra que D^b(modA) es equivalente a $K^b(I)$. Ver [8] para una demostración sin considerar subcategorías generadoras

b) Sea A una k-álgebra de dimensión finita y de dimensión global finita . Sea M un A-módulo izquierdo . decimos que M es un módulo de tilteo si se satisface lo siguiente:

i) M tiene dimensión proyectiva finita

ii) $Ext^i(M,M)=0$ para todo $i>0$

iii)Existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

donde cada M_i pertenece a la subcategoría plena engendrada por todos los sumandos directos de potencias de M ,a esta categoría la denotamos por add(M).

Para más acerca de módulos definidos de esta manera ver por ejemplo [8] y [14].

Cuando la dimensión proyectiva es uno estamos en el contexto general de módulo tilteado debido a BRENNER - BUTLER ver [8]. En este caso son fáciles de probar los siguientes resultados :

Afirmación 1) Sea M un A-módulo tilteado entonces $D^b(\mathrm{modA})$ es equivalente triangular a $K^b(\mathrm{addM})$.

En efecto con ayuda de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

podemos construir una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow N_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow N_n \longrightarrow 0$$

con N_i en addM para $i=0,\dots,n$ y para cada X en modA. De esta manera X es casi-isomorfo a algún elemento de $K^b(\mathrm{addM})$. Así modA está contenido en la subcategoría triangulada $K^b(\mathrm{addM})$ de $D^b(\mathrm{modA})$. Entonces ambas categorías son equivalentes como categorías triangulares.

Afirmación 2) $K^b(\mathrm{addM})$ y $D^b(\mathrm{Bmod})$ son triangularmente equivalentes, donde Bmod es la categoría de módulos derechos del álgebra B, y B es el álgebra de endomorfismos del módulo M. Como $F:=\mathrm{Hom}(-,M):\mathrm{addM} \longrightarrow {}_B\mathcal{P}$ es una equivalencia de categorías (donde ${}_B\mathcal{P}$ es la subcategoría plena de B-módulos proyectivos derechos) no es difícil ver de los ejemplos 1.4 (a) y 1.4 (b)que F induce una equivalencia triangular entre $D^b(\mathrm{modA})$ y $D^b(\mathrm{Bmod})$. Este funtor es denotado por RF y se le conoce como el funtor derivado derecho (ver [10])

Su funtor inverso está dado por el funtor derivado izquierdo inducido por $M\otimes_B -$ (observe que M es un A-B bimódulo).

1.5 c) **Extensiones triviales** (otra equivalencia interesante)

Sea $D:=\mathrm{Hom}_k(-,k)$ el funtor dualidad y $A^*:=D(A)$ donde A es una k-álgebra y el A-A-bimódulo A^* es un cogenerador inyectivo mínimo .El conjunto T(A) formado por todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ q & a \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in A \text{ y } q \in A^{*}$$

tiene estructura de k-álgebra con suma y producto de matrices usual, además $q.q'=0$ para cada par de elementos de $D(A)$.

A $T(A)$ le llamamos la extensión trivial de A. La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow T(A) \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

se escinde como un A-A-bimódulo .

En efecto,

$$p: \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ q & a \end{bmatrix} \longrightarrow a$$

tiene como inverso derecho a la siguiente aplicación

$$a \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Lema: $T(A)$ es un álgebra simétrica (es decir la $T(A)$-k-álgebra $T(A)$ es isomorfa a la $T(A)$-k-álgebra $DT(A)$).

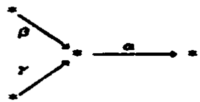
Demostración: La siguiente aplicación de $T(A)$-k-álgebras es un isomorfismo.

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ q & a \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{bmatrix} a' & 0 \\ q' & a' \end{bmatrix} \longrightarrow q(a')+q'(a) \right] \quad \square$$

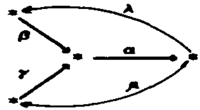
Ejemplos: i) $A=k$, $T(A)=K[x]/(x^2)$

ii) $A=k[x]/(x^2)$, $T(A)=k[x , y]/(x^2 , y^2)$

iii) Sea A el álgebra de trayectorias del siguiente carcaj.



Entonces $T(A)$ esta dada por el siguiente carcaj



con las siguientes relaciones $\lambda\beta=\mu\gamma$.$\beta\alpha\mu=0=\gamma\alpha\lambda$ y $rad^2=0$

Además hay una cubierta de Galois de $T(A)$ definida por la acción de los enteros. $\hat{A} \longrightarrow T(A)$ donde $\hat{A}$ está dada de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & & & 0 \\ & A & & & & \\ & A^* & A & & & \\ & & A^* & A & & \\ & & & A^* & & \\ 0 & & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

la cual es una álgebra de matrices infinitas como se muestra arriba sin elemento identidad. En la cual las matrices tienen sólo una cantidad finita de entradas diferentes de cero de A, que están en la diagonal principal lo mismo para la diagonal de A^*, todas las restantes entradas son cero. Y la multiplicación es inducida por las aplicaciones canónicas;

$A \otimes_A A^{*} \longrightarrow A^{*}$, $A^{*} \otimes_A A \longrightarrow A$ y la aplicación $A^{*} \otimes A^{*} \longrightarrow 0$

Al álgebra $\hat{A}$ le llamamos álgebra repetitiva (de A). Y su carcaj es como a continuación se establece.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (3,1) \arrow[dr, "(\beta,1)"] & & & (3,2) \arrow[dr, "(\beta,2)"] & & & \\
(1,1) \arrow[ur, "(\lambda,1)"] \arrow[dr, "(\mu,1)"'] & & (2,1) \arrow[r, "(\alpha,1)"] & (1,2) \arrow[ur, "(\lambda,2)"] \arrow[dr, "(\mu,2)"'] & & (2,2) \arrow[r, "(\alpha,2)"] & (1,3) \arrow[ur, "(\lambda,3)"] \arrow[dr, "(\mu,3)"'] & \\
 & (4,1) \arrow[ur, "(\gamma,1)"'] & & & (4,2) \arrow[ur, "(\gamma,2)"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

con relaciones $(\lambda,i)\circ(\beta,i)=(\mu,i)\circ(\gamma,i)$,

$(\beta,i-1)\circ(\alpha,i-1)\circ(\mu,i)=(\gamma,i-1)(\alpha,i-1)\circ(\lambda,i)=0$ y $\mathrm{rad}^{4}=0$.

$\hat{A}$ es una categoría localmente acotada (ver [8]).

Como categoría localmente acotada $\hat{A}$ admite la siguiente descripción : los objetos están formados por pares (r,x) donde r es un entero y x es un objeto de A. El espacio de homomorfismos $\hat{A}((r+1,x),(r,y))=\{r\}\times(A(y,x))^{*}$. $\hat{A}((p,x),(q,y))=0$ si $p\neq q$, y la composición es definida en el modo usual. Identificamos A con la subcategoría plena de $\hat{A}$ consistente de los objetos de la forma $(0,x)$ donde x es un objeto de A.

$\hat{A}$ es autoinyectiva , lo cual significa que el conjunto de $\hat{A}$ -módulos proyectivos coincide con un $\hat{A}$-módulos inyectivos. Esto implica que $\underline{\mathrm{mod}}\hat{A}$ es categoría triangulada. Brevemente indicamos la estructura del funtor de translación y la forma de los triángulos distinguidos para esta categoría (para más detalles de esto ver [8]).

Existe un monomorfismo de funtores i: Id $\longrightarrow$ I donde I es el funtor de $\hat{A}$-módulos que a cada $\hat{A}$-módulo M le asigna el $\hat{A}$-módulo inyectivo I(M) (el cual es la envolvente inyectiva de M). Entonces el funtor de translación T de $\underline{\mathrm{mod}}\hat{A}$ está definido por $T(M)=I(M)/M$.

Sea $u:M \longrightarrow N$ un mapeo en mod$\hat{A}$ y consideremos el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & I(M) \arrow[r] \arrow[d] & T(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & C_u \arrow[r] & T(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces (M,N,C_u,u,v,w) es un triángulo estándar y la triangulación está dada por la clase de sextuplas isomorfas a los triángulos estándar.

Otros ejemplos de categorías repetitivas:

a) Sea A el álgebra de trayectorias del carcaj lineal

$$\tilde{A}: \ldots \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet\, \bullet \longleftarrow \bullet$$

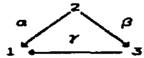
con n vértices.

Sea $\Delta(\mathbb{Z})$ el carcaj

$$\ldots \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \ldots\ldots\ldots \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \ldots\ldots$$

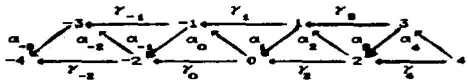
el carcaj lineal con conjunto de vértices los enteros. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe una flecha $\alpha_a : a \longrightarrow a-1$ .. Sea I el ideal bilateral en el álgebra de trayectorias $k\Delta(\mathbb{Z})$ generado por las trayectorias $\alpha_a \alpha_{a-1} \ldots \alpha_{a-n-1}$ para cada $a \in \mathbb{Z}$. Entonces un cálculo sencillo ,usando extensiones y coextensiones en un punto, demuestra que $\hat{A}$ es isomorfa al álgebra factor $k\Delta(\mathbb{Z})$ por el ideal I.

b) En el álgebra de trayectorias del siguiente carcaj



sea I el ideal bilateral generado por $\beta\alpha$. Denotamos por A a esta álgebra.

También denotamos por B al álgebra factor dado por el carcaj



con conjunto de vértices los enteros y para cada vértice a existe una flecha $\alpha_a: a \longrightarrow a-1$ y $\gamma_a: a \longrightarrow a-2$. Sea I' el ideal bilateral generado por:

$$\alpha_a\alpha_{a-1} \quad , \quad \alpha_a\gamma_{a-1}-\gamma_a\alpha_{a-1} \quad , \quad \gamma_a\gamma_{a-2}$$

para cada a entero. También usando extensiones y coextensiones en un punto uno puede demostrar que $\hat{A}$ es isomorfo a B.

En [8] capítulo II sección 4 se demuestra el siguiente teorema para categorías repetitivas:

Teorema: Sea A una k-álgebra de dimensión finita y sea $\hat{A}$ su álgebra repetitiva asociada. Existe un funtor fiel y pleno $F: D^b(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\hat{A}$, el cual es una equivalencia de categorías trianguladas, si A es de dimensión global finita.

□

Capitulo 2:

GAVILLAS DE TILTEO EN TEORIA DE REPRESENTACIONES.

La técnica de coordenadas homogeneas pesadas ha sido usada en trabajos recientes y permite presentar una variedad algebraica no singular como una hipersuperficie en cierto espacio llamado el espacio proyectivo pesado : En este trabajo veremos que tiene otras interesantes aplicaciones en ramas no geométricas como la teoria de representaciones de álgebras de dimensión finita, ver [3], [4] y [13].

2.1 VARIEDADES PROYECTIVAS PESADAS

En esta sección colectamos una cantidad de hechos necesarios para definir las variedades proyectivas pesadas.

Fijemos una n+1-upla $p=(p_0,\ldots,p_n)$ de enteros positivos. Por $L(p)$ denotamos el grupo abeliano con generadores $\vec{x}_i$ $i=0,\ldots,n$ y relaciones $p_0\vec{x}_0=\ldots=p_n\vec{x}_n=:\vec{c}$ el elemento canónico de $L(p)$. Los elementos $\vec{y}$ de $L(p)$ pueden escribirse univocamente en la forma

$$\vec{y}=\alpha\vec{c}+\sum_{i=0}^{n}\beta_i\vec{x}_i \quad \text{con } \alpha, \beta_i\in\mathbb{Z} \text{ y } 0\le\beta_i\le p_i$$

2.2 A esta representación le llamamos la forma normal.

$L(p)$ es un grupo ordenado , es decir $\vec{x} < \vec{y}$ si y sólo si $\vec{y}-\vec{x}$ pertenece a;

$$L(p)^{+}:=\{\alpha\vec{c}+\sum_{i=0}^{n}\beta_i\vec{x}_i:\alpha,\beta_i\in\mathbb{Z},\ 0\le\beta_i<p_i\ ,\ \alpha\ge 0\ \}$$

Al elemento $\vec{w}:=(n-2)\vec{c}-\sum\vec{x}_i$ con $i=1,2,\ldots,(n-1)$ le llamamos el elemento dualizante de $L(p)$.

Ejemplo:

$L(2,3,5)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ con orden en $\mathbb{Z}$ dado por:
$n\leq m$ si y sólo si $m-n$ pertenece a $\mathbb{N}_6+\mathbb{N}_{10}+\mathbb{N}_{15}$

Proposición: El grupo $L(p)$ es simétrico : Más especificamente para cada $\vec{x}$ en $L(p)$ una de las dos posibilidades se cumple o $\vec{x}\geq\vec{0}$ o $\vec{x}\leq\vec{w}+\vec{c}$.
En particular el endomorfismo dado por $\vec{x}\longrightarrow\vec{w}+\vec{c}+\vec{x}$ invierte el orden

Demostración:

Aqui $i=0,1,\ldots,(n-1)$. Entonces:
$\vec{c}+\vec{w}=\vec{c}+(n-1)\vec{c}-\sum\vec{x}_i=n\vec{c}-\sum\vec{x}_i-\vec{c}=\sum(\vec{c}-\vec{x}_i)-\vec{c}=\sum(p_i-1)\vec{x}_i-\vec{c}$ y así hemos puesto puesto $\vec{c}+\vec{w}$ en forma normal . En particular este elemento no es positivo, consecuentemente a lo más una de las dos afirmaciones siguientes se cumple $\vec{x}\geq\vec{0}$ o $\vec{x}\leq\vec{w}+\vec{c}$. En efecto:

Sea $\vec{x}$ un elemento de $L(p)$ que no es mayor o igual a cero .entonces

$$\vec{x}=\sum\lambda_i\vec{x}_i+\lambda\vec{c}\quad\text{con}\quad 0\leq\lambda_i\leq p_i-1\quad\text{y}\quad\lambda<0$$

esto implica que
$(\vec{c}+\vec{w})-\vec{x}=\sum[(p_i-1)-\lambda_i]\vec{x}_i+(-\lambda-1)\vec{c}\geq 0$ ya que $[(p-1)-\lambda_i]\geq 0$ y $(-\lambda-1)\geq 0$.

D.

Lema: El conjunto $\Sigma := \{\, \vec{x} \in L(p) : \vec{0} \le \vec{x} \le \vec{c} \,\}$ es el conjunto de todos los $m_i \vec{x}_i$ con $0 \le m_i \le p_i$. Estos elementos determinan el diagrama ordenado

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{x}_0 \arrow[r] & 2\vec{x}_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (p_0-1)\vec{x}_0 \arrow[dr] & \\
\vec{0} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \vec{x}_1 \arrow[r] & 2\vec{x}_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (p_1-1)\vec{x}_1 \arrow[r] & \vec{c} \\
 & \vec{x}_n \arrow[r] & 2\vec{x}_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (p_n-1)\vec{x}_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

□

2.3 Sea k un campo algebraicamente cerrado, como antes supusimos, y $S=k[X_0,\dots,X_n]$ el álgebra de polinomios sobre k en (n+1)-indeterminadas.

S es una álgebra L(p)- graduada, asociando el grado $\vec{x}_i$ a X_i. Si es necesario especificar la L(p)-graduación escribimos S(p) para el álgebra L(p)-graduada S. Sus componentes homogeneas son denotadas por $S_{\vec{y}}$ para cada $\vec{y}$ en L(p).

2.4 Definición Sea $I \subset S(p)$ un ideal primo L(p)-graduado (es decir un ideal L(p)-graduado que es primo con respecto a elementos homogeneos). y sea $R:=S(p)/I=k[x_0,\dots,x_n]$.Como conjunto la **variedad proyectiva pesada** X consiste de todos los ideales primos $p \subset R$ que están estrictamente contenidos en el ideal generado por $x_0,\dots,x_n$ y maximales con respecto a esta propiedad.Al dominio entero R le llamamos **anillo de coordenadas**.

2.5 EJEMPLOS :

a) Si I es el ideal cero entonces obtenemos el **Espacio proyectivo pesado** $\mathbb{P}(p)$.

Una descripción equivalente de $\mathbb{P}(p)$ como el cociente por un grupo es la siguiente:

Definimos el grupo algebraico afin

$$G(p):=\{(t_i)_{i=0}^{n} \in (k^*)^{n+1} : t_0^{p_0}=t_1^{p_1}=\ldots=t_n^{p_n}\}$$

el cual actua en el n+1-espacio afin $\mathbb{A}_{n+1}=k^{n+1}$ por multiplicación.

$$(t_i)_{i=0}^{n} * (x_i)_{i=0}^{n} = (t_i x_i)_{i=0}^{n}$$

Entonces $\mathbb{P}(p)=k^{n+1}/G(p)$

b) Linea proyectiva pesada.

Una sucesión parametrizada es una sucesión $\lambda:=(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ de elementos de k distintos de cero , diferentes dos a dos.

Definimos por $f_i:=X_i^{p_i} - X_1^{p_1} + \lambda_i X_0^{p_0}$, $i=2,\ldots n$ (polinomio homogéneo de grado $\tilde{c}$)

Sea $I(p,\lambda):=\langle f_i \mid i=2,\ldots,n \rangle = k[x_0,\ldots,x_n]$ el ideal generado por $\{f_i\}$.

Definimos la linea proyectiva pesada $C(p,\lambda)$ como la variedad proyectiva pesada asociada al anillo cociente

$S(p,\lambda):=k[x_0,\ldots,x_n]/I(p,\lambda)$

Una definición equivalente como un cociente de la línea proyectiva pesada es la siguiente:

$$C(p,\lambda)=F(p,\lambda)/G(p,\lambda) \quad \text{donde}$$

$F(p,\lambda)$ es el conjunto de elementos de $\mathbb{A}^{n+1}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$x_i^{p_i} = x_1^{p_1} - \lambda_i x_0^{p_0} \quad .$$

2.6 Proposición $S(p)$ y $S(p,\lambda)$ son dominios factoriales $L(p)$-graduados (Es decir hasta escalares cada elemento homógeneo es un producto de elementos primos homogêneos).

Hasta escalares un sistema completo de elementos primos homogeneos de $S(p)$ o $S(p,\lambda)$ está dado por

i) Los elementos $X_0,\ldots,X_n$ en $S(p)$, ($x_0,\ldots,x_n \in S(p,\lambda)$). Los cuales son llamados primos excepcionales.

ii) Los elementos $f(X_0^{p_0},\ldots, X_n^{p_n})$ ($f(x_0^{p_0}, x_1^{p_1})$), llamados primos ordinarios donde f es un elemento del álgebra de polinomios $k[T_0,\ldots T_n]$ ($k[T_0,T_1]$), no asociado a $T_0,\ldots,T_n$, (T_0,T_1) respectivamente. Aquí como es usual, ambas álgebras de polinomios son $\mathbb{Z}$-graduadas por el grado total.

Demostración

Sea

$$R(p):=\bigoplus S_{l\vec{c}} \quad \text{(con } l \text{ entero arbitrario)}$$

la restricción de $S(p)$ al subgrupo $\mathbb{Z}\vec{c}$ de $L(p)$.

Claramente $R(p)=k[X_0^{p_0},\ldots,X_n^{p_n}]$ es una álgebra de polinomios $\mathbb{Z}$-graduada sobre k en las inderteminadas $X_0^{p_0},\ldots,X_n^{p_n}$ y R_l consiste de todos los polinomios homogeneos de grado total $l\in\mathbb{Z}$.

Más aún, $\vec{l} = \sum_{i=0}^{n} l_i \vec{x}_i + l\vec{c}$ (en forma normal) implica que

$$S(p)_{\vec{\lambda}} = x_o^{lo} \dots x_n^{ln} R(p) \quad \text{donde } 0 \leq l_i < p_i \text{ , } l \in \mathbb{Z} \text{ .....(*).}$$

Análogamente

$R(p,\lambda) := k[x_o^{p_o}, x_1^{p_1}]$ y $S(p,\lambda)_\lambda = x_o^{lo} \dots x_n^{ln} R(p,\lambda)_l$, donde $0 \leq l_i < p_i$, $l \in \mathbb{Z}$ .....(**). $\square$

2.7 Sea f un polinomio homogéneo de grado $\vec{l}$ (es decir f está generado por elementos de $S_{\vec{l}}$ cuando a éste se le mira como un grupo abeliano).

Por $D(f)$ denotamos al conjunto constituido de todos los ideales primos que no contienen a f .No es difícil demostrar que estos conjuntos constituyen una base para una topología en $\mathbb{P}_n(p)$,la cual por razones obvias le llamamos la topología de Zariski.

2.8 Sea X una variedad proyectiva pesada .
La gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ en X es la gavilla de álgebras $L(p)$-graduadas asociada a la pregavilla $D(f) \longmapsto S_f$, con $f \in S$ homogéneo, donde S_f es la localización de S con respecto al subconjunto multiplicativo generado por f. Aquí S_f es $L(p)$-graduado. Análogamente $\mathcal{O}_X(\vec{l})$ es la gavilla tal que $\mathcal{O}_X(\vec{l})(D(f)) = S(\vec{l})_f$ con f homogeneo de grado $\vec{l}$ .Observe que $\mathcal{O}_X = \oplus \mathcal{O}_X(\vec{l})$ con $\vec{l}$ en $L(p)$.

2.9 GAVILLAS DE O_X-MODULOS L(p)-GRADUADOS.

Definición Una gavilla F de O_X-módulos en X se llama **gavilla L(p)-graduada** si se cumple que

$F = \oplus F_{\vec{l}}$, $\vec{l} \in L(p)$ y satisfacen que $O_{X,\vec{l}} \, F_{\vec{m}} \subseteq F_{\vec{l}+\vec{m}}$

Los morfismos de gavillas L(p)-graduadas son morfismos de O_X-módulos de grado cero.

Nosotros estamos interesados en aquellas gavillas de O_X-módulos que son L(p)-graduadas y denotamos la categoria de estas gavillas por $\mathrm{Mod}^{L(p)}(O_X)$. L(p) actua en $\mathrm{Mod}^{L(p)}(O_X)$ por torcimiento: Para cada $\vec{y} \in L(p)$ y cada gavilla $F \in \mathrm{Mod}^{L(p)}(O_X)$ la gavilla torcida $F(\vec{y})$ está definida por $F(\vec{y})_{\vec{x}} = F_{\vec{x}+\vec{y}}$, donde $F = \oplus_{\vec{x} \in L(p)} F_{\vec{x}}$ es la descomposición de F en componentes homogeneas. Como es usual $F(\vec{y})$ puede obtenerse como el producto tensorial $F \otimes O_X(\vec{y})$ sobre O_X .

$F \in \mathrm{Mod}^{L(p)}(O_X)$ es llamado **coherente (casi-coherente)** si para cada p en X existe una vecindad abierta U de p y una sucesión exacta

$$\oplus\, O_X(\vec{z}_j)\,/U \longrightarrow \oplus\, O_X(\vec{x}_i)\,/U \longrightarrow F/U \longrightarrow 0$$

con i en I y j en J donde los conjuntos de indices I y J son finitos que dependen de F y U.

Usando demostraciones análogas a las de Hartshorne [11] podemos demostrar las siguientes afirmaciones:

La categoria de gavillas coherentes (casi-coherentes), denotadas por **cohX** (**QcohX** respectivamente), son categorias abelianas con suficientes inyectivos.

Sea X una variedad proyectiva pesada. X es llamada no singular si Qcoh$X$ es de dimensión global finita.

2.10 TEOREMAS DE COMPARACION

Definición: Una gavilla coherente T en X , una variedad proyectiva pesada, es llamada **gavilla de tilteo** si las siguientes propiedades se cumplen:

1) $\mathrm{Ext}^i(T,T)=0$

2) T genera a $D^b(\mathrm{coh}X)$ como categoría triangulada. Es decir $D^b(\mathrm{coh}X)$ es la subcategoría triangulada más pequeña de $D^b(\mathrm{coh}X)$ que contiene a T

3) La dimensión global de $\Lambda:=\mathrm{End}(T)$ es finita.

Teorema: Sea T una gavilla de tilteo entonces $D^b(\mathrm{coh}X)$ es equivalente triangular a $D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$.

Demostración:

Esto resulta claro de las siguientes equivalencias triangulares:

$$D^b(\mathrm{coh}X)\cong K^b(\mathrm{add}T)\cong K^b({}_{\Lambda}P)\cong D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$$

donde estas equivalencias son inducidas por los siguientes funtores $F:=\mathrm{Hom}(T,-):\mathrm{coh}X \longrightarrow \mathrm{mod}\Lambda$ y

$G:=\_\otimes_{\Lambda}T:\mathrm{mod}\Lambda \longrightarrow \mathrm{coh}X$.

los cuales son mutuamente inversos.

En efecto add$T$ es una subcategoría generadora de $D^b(\mathrm{coh}X)$ por (2.10) (2).

En consecuencia $K^b(\mathrm{add}T)$ es equivalente triangular a $D^b(\mathrm{coh}X)$.

Análogamente ${}_{\Lambda}P$ es subcategoría generadora de $D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$. Por lo tanto $K^b({}_{\Lambda}P)$ es equivalente triangular a $D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$, ya que la dimensión global es finita. También add$T$ y ${}_{\Lambda}P$ son equivalentes mediante los funtores F y G ,usando (2.10) (1).

Esto implica que $D^b(\mathrm{coh}X)$ es equivalente triangular a $D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$.

□

2.11 Sea $\mathcal{T}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo coherente tilteado y $B:=\mathrm{End}(\mathcal{T})$ el álgebra de endomorfismos . Sea X_i la subcategoría plena de gavillas coherentes $\mathcal{F}$ tal que $\mathrm{Ext}^j(\mathcal{T},\mathcal{F})=0$, para $j\neq i$. A esta clase de categoría le llamamos la categoría de $\mathcal{T}$-extensiones concentradas en i para cada i un entero no negativo. Análogamente sea $Y_i:=\{Y\in \mathrm{mod}B:\mathrm{Tor}_i^B(Y\ ,\ \mathcal{T})=0$ con $j\neq i\}$ la subcategoría de $\mathrm{coh}X$ de $\mathcal{T}$-torsión j-concentrada.

Corolario a): Sea X variedad proyectiva pesada y $\mathcal{T}$ una gavilla de tilteo.
Sea $B:=\mathrm{End}(\mathcal{T})$ .Sea X_i y Y_i (con i entero) definidas como antes.
Entonces

$$F^i:=\mathrm{Ext}^i(\mathcal{T},-):X_i \longrightarrow Y_i$$

y

$$G_i:=\mathrm{Tor}_i^B(-,\mathcal{T}):Y_i \longrightarrow X_i$$

son equivalencias de categorías y una es la inversa de la otra.

Demostración: □.

Corolario b): Con las mismas hipótesis que el corolario anterior. Nosotros tenemos que para cada t entero:

1) $\mathrm{Ext}^t_{\mathrm{coh}X}(N,N') \cong \mathrm{Ext}_B^{t+i-j}(F^i(N)\ ,\ F^i(N'))$ para $N\in X_i$ y $N'\in X_j$.

2) $\mathrm{Ext}_B^t(N,N')\cong\mathrm{Ext}^{t-i+j}_{\mathrm{coh}X}(G_iN,G_jN')$ para $N\in Y_i, N'\in Y_j$. □

Por $K_0(\mathrm{coh}X)$ y $K_0(\mathrm{mod}B)$ denotamos los grupos de Grothendieck de las categorías aditivas $\mathrm{coh}X$ y $\mathrm{mod}B$ respectivamente. Ver por ejemplo [8] y [14].

Corolario c): Sea X variedad proyectiva pesada no singular y T en cohX una gavilla de tilteo con $B:=\mathrm{End}(T)$ como álgebra de endomorfismos. Entonces

$$F: K_0(\mathrm{coh}X) \longrightarrow K_0(\mathrm{mod}B)\ ,[H] \longmapsto \sum (-1)^i [F^i(H)] \text{ con } i\geq 0.$$

y

$$G: K_0(\mathrm{mod}B) \longrightarrow K_0(\mathrm{coh}X)\ ,[Y] \longmapsto \sum (-1)^i [G_i(Y)] \text{ con } i\geq 0.$$

son isomorfismos de grupos inverso uno del otro. En particular , $K_0(\mathrm{coh}X)$ es libre y finitamente generada.

Demostración:

La composición $G\circ F$ es la identidad en el sistema generador de $K_0(\mathrm{coh}X)$ consistente de las clases de sumandos directos de H, $F\circ G$ es la identidad en las clases de proyectivos inescindibles.

□

2.12 GAVILLAS DE TILTEO DEFINIDAS EN ESPACIOS PROYECTIVOS PESADOS

Ejemplos básicos:

a): Sea $L:= \oplus\, \mathcal{O}_X(\vec{x})$,con $\vec{0}\leq\vec{x}\leq n\vec{c}$. es una gavilla de tilteo en $X=\mathbb{P}_n(p)$

b) Sea $T:=\oplus\mathcal{O}_C(\vec{x})$,con $\vec{0}\leq\vec{x}\leq\vec{c}$. Entonces T es una gavilla de tilteo en la línea proyectiva pesada C.

2.13:

GAVILLAS DE TILTEO , MODULOS DE TILTEO Y SU ANILLO DE ENDOMORFISMOS

Proposición: Sea $X:=\mathbb{P}_n(p)$ y supongamos que $M\in\mathrm{coh}X$ con anillo de endomorfismo B no tiene autoextensiones y genera a $D^b(\mathrm{coh}X)$ como categoría triangulada . Entonces existe un módulo de tilteo Y en modS con End(Y)=B. En particular B tiene dimensión global finita y M es una gavilla de tilteo.

Demostración:

Para cada M(y) no tiene autoextenciones y genera a la categoría derivada de complejos acotados de gavillas coherentes . Más aún

$End(\mathcal{T}(\vec{y}))$ es isomorfo a B.

Así podemos suponer que $Ext^{i}(\mathcal{O}(\vec{x}),\mathcal{T})=0$ en $coh\mathbb{X}$ para $i>0$ y $\vec{0}\le\vec{x}\le n\vec{c}$ es decir que μ tiene $\mathcal{L}$-extensiones concentradas a nivel cero donde $\mathcal{L}$ es la gavilla $\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(i)$. Como

$$RHom(\mathcal{L},\_):D^{b}(coh\mathbb{X})\longrightarrow D^{b}(modS)$$

manda $\mathcal{T}$ a $Y:=Hom(\mathcal{L},\mathcal{T})$ en modS. Es facil checar que Y es un módulo de tilteo con anillo de endomorfismos B.

Dado que tiene dimensión global n, también B debe tener dimensión global finita y $\mathcal{T}$ es una gavilla de tilteo.

□

Corolario: Si $\mathbb{X}$ es la linea proyectiva pesada entonces existe Y un $S(p,\lambda)$-módulo de tilteo con A=End(Y) donde A es una Álgebra canónica salvaje. Remitase al capitulo IV de este trabajo. además ver [14].

□

La siguiente observación es una generalización del teorema Beilinson.

Observación: Si $p=(1,1,\dots,1)$ nuestro ejemplo produce la gavilla $\mathcal{L}=\oplus_{\mathbb{P}_n}(i)$,con $i=0,\dots,n$, cuya álgebra de endomorfismos es justamente el álgebra simétrica truncada $S(p,\lambda)$ considerada en [8].

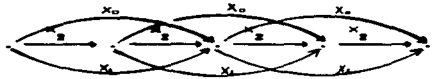
$S(p,\lambda)$ es el Álgebra de trayectorias del carcaj siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left=3, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[r, shift right=3, "x_n"'] & 1 \arrow[r, shift left=3, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[r, shift right=3, "x_n"'] & 2 \arrow[r, shift left=3, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[r, shift right=3, "x_n"'] & (n-1) \arrow[r, shift left=3, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[r, shift right=3, "x_n"'] & n
\end{tikzcd}$$

con relaciones $x_ix_j=x_jx_i$.

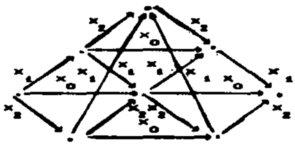
Como otro ejemplo de álgebras simétricas truncadas sea S(p)[0,n] el álgebra de trayectorias dada por el siguiente carcaj , pero con diferente graduación:

a) p=(1,2,2)



y relaciones $x_i x_j = x_j x_i$

b) p=(1,2,2)



con relaciones $x_i x_j = x_j x_i$.

2.14:

DESCRIPCION HASTA TORCIMIENTO DE GAVILLAS COHERENTES Y HACES VECTORIALES EN $\mathbb{P}_n(p)$.

En esta parte caracterizamos a aquellas gavillas en $\mathbb{P}_n(p)$ que pueden ser torcidas en una subcategoría con $\mathcal{T}$-extensiones concentradas respecto a la gavilla tilteada .

Teorema: $\mathcal{T}$ es un haz tilteado en $X=\mathbb{P}_n(p)$ y $X_o \subseteq \mathrm{coh}X$ la categoría con $\mathcal{T}$-extensines O-concentradas (ver 2.11). Entonces para cada $F \in \mathrm{coh}X$, $F(\vec{x}) \in X_o$ para cada $\vec{x} > \vec{\delta}$.

Demostración: Dado que $\mathcal{T}$ es un haz vectorial, existe una suceción exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_m \longrightarrow 0$$

Con $\mathcal{O}_i$ en $\mathrm{add}\{\mathcal{O}_X(\vec{y}) : \vec{y}$ esta $L(p)\}$ y la afirmación se sigue inmediatamente de $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, F(\vec{x}))=0$, en $\mathrm{coh}X$, para i todo i diferente de cero y $\vec{x} > \vec{\delta}$.

$\square$

Proposición: Sea $\mathcal{T}$ gavilla de tilteo en $X=\mathbb{P}_n(p)$ y $X_o \subseteq \mathrm{coh}X$ la categoria con $\mathcal{T}$-extensiones O-concentradas . Entonces son equivalentes:

a) $\mathcal{O}_X(\vec{x}) \in X_o$ para $\vec{x} > \vec{\delta}$

b) $S \in X_o$ para cada gavilla simple S.

c) $\mathcal{T}$ haz vectorial.

Demostración:

c)⇒ a) es una consecuencia sencilla del teorema anterior .

a)⇒ b) Tome la resolución siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

del módulo simple S con $\mathcal{O}_i$ en $\mathrm{add}\{\mathcal{O}_X(\vec{y}) : \vec{y}$ pertenece a $L(p)\}$. Entonces la afirmación se sigue del hecho de que $\mathcal{O}_i(\vec{x})$ pertenece a X_o para $\vec{x}_o > \vec{\delta}$ y de que el módulo simple S es isomorfo a $S(\vec{x})$ para una apropiada elección de $\vec{x} > \vec{\delta}$.

b)⇒c) De $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{T}, S)=0$ para cada gavilla simple S diferente de cero nosotros obtenemos que $\mathrm{Ext}^i(S, \mathcal{T}(\vec{w}))=0$ para cada i diferente de n y así $\mathcal{T}$ es un haz vectorial.

$\square$

En esta sección X denota a $\mathbb{P}(p)$, el espacio proyectivo pesado, o bien a $C(p,\lambda)$, la línea proyectiva pesada. Por S denotamos al álgebra $S(p)$ o a $S(p,\lambda)$ (ver 2.3 de arriba).

Sea $F\in O_X$-mod $L(p)$-graduado. Entonces por definición $F=\oplus F_{\vec{l}}$, donde $\vec{l}\in L(p)$, tal que $O_{X,\vec{l}}\cdot F_{\vec{m}} \subseteq F_{\vec{l}+\vec{m}}$. Así $\Gamma(U,F)=\oplus F_{\vec{l}}(U)$, donde $\vec{l}\in L(p)$, es un S-mod $L(p)$-graduado para cada abierto U de X. En efecto cualquier $s\in S_{\vec{l}}\subseteq S$, lo podemos ver como una sección de $O_{X,\vec{l}}(U)$, sea $t\in F_{\vec{m}}(U)$, entonces $st\in O_{X,\vec{l}}(U)F_{\vec{m}}(U) \subseteq F_{\vec{l}+\vec{m}}(U)$.

Sea $\Gamma:\mathrm{QcohX} \longrightarrow \mathrm{Mod}^{L(p)}S$, tal que $F \longmapsto F(X)=:\Gamma(X,F)$ a este funtor le llamaremos el de secciones globales.

Siguiendo a Serre (ver [6]) definimos el funtor Gavillación $\sim:\mathrm{Mod}^{L(p)}S \longrightarrow \mathrm{Mod}^{L(p)}O_X$, $M \longmapsto M^{\sim}$, donde $M^{\sim}$ es el O_X-módulo $L(p)$-graduado asociado a la pregavilla

$$D(F) \mapsto M_f \;, \; f\in S \text{ homogéneo},$$

de O_X-módulos $L(p)$-graduados.

Aquí M_f consiste de todas las fracciones m/f^n ($m\in M$ y $n\in\mathbb{N}$). En contraste a la definición tradicional, nosotros nos restringimos a la componente cero de M_f.

Para O_X tenemos que $\Gamma(D(f),M^{\sim})=M_f$, si $f\in S_+$ es homogéneo.

LEMA: a) Existe un homomorfismo natural $\alpha:M \longrightarrow \Gamma(M^{\sim})$.

b) Sea M un S-mod $L(p)$-graduado. Se puede demostrar que α es un isomorfismo en todos los grados grandes, es decir existe un $\vec{l}_o$ en $L(p)$ tal que para cada $\vec{l}\geq\vec{l}_o$, $\alpha_{\vec{l}}:M_{\vec{l}} \longrightarrow \Gamma(X,M^{\sim})_{\vec{l}}$ es un isomorfismo.

c) Con la mismas hipótesis que antes, definimos una relación de equivalencia $\approx$ en la categoría de S-módulos $L(p)$-graduados. A saber $M \approx M'$ si y sólo existe $\vec{l}\in L(p)$ tal que $M_{\geq\vec{l}} \cong M'_{\geq\vec{l}}$.

Aquí $M_{\geq i} := \oplus M_{i'}$ con $i' \geq i$. Decimos que un S-módulo es casi-generado si es equivalente a un módulo finitamente generado. Entonces los funtores $\tilde{}$ y Γ inducen equivalencias de categorías entre la categoría de los S-módulos L(p)-graduados casi-finitamente generados y la categoría de los $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes

Para una demostración de esta afirmación ver [6].

Denotamos por $\mathrm{mod}^{L^*}S$ a la categoría de módulos casi-finitamente generados

2.16 TEOREMA (Serre):

a) El funtor gavillación: $\tilde{}:\mathrm{mod}^{L(p)}(S) \longrightarrow \mathrm{coh}(X)$, $M \longmapsto M^{\sim}$ es un funtor exacto, el cual admite

$$\Gamma_{*}:\mathrm{coh}(X) \longrightarrow \mathrm{mod}^{L^*}(S);\ M \longrightarrow \oplus\Gamma(X,M)_{i}$$

como adjunto derecho. Γ_{*} es una inclusión plena que satisface $\Gamma_{*}(M)^{\sim}=M$ para todo M en $\mathrm{coh}(X)$.

b) El funtor gavillación anula a todos los $M \in \mathrm{mod}_{*}(S)$, los cuales tienen longitud finita, e induce una equivalencia

$$\mathrm{mod}^{L^*}(S)/\mathrm{mod}_{o}^{L^*}(S) \longrightarrow \mathrm{Coh}(X)\ ,\ M \mapsto M^{\sim}$$

de categorías abelianas. Aquí $\mathrm{mod}_{o}^{L^*}S$ es la categoría de módulos L(p)-graduados de longitud finita.

c) La subcategoría plena $\mathcal{A}$ de $\mathrm{mod}^{L^*}(S)$ consistente de todos los los M, que satisfacen $\mathrm{Hom}(E,M)=0=\mathrm{Ext}_{e}(E,M)$ para todos los objetos simples E en $\mathrm{mod}^{L^*}S$, es una categoría abeliana. Más aún $\tilde{}$ y Γ_{*} inducen equivalencias mutuamente inversas $\tilde{}:\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{coh}X$ y $\Gamma_{*}:\mathrm{coh}X \longrightarrow \mathcal{A}$.

d) El funtor $T:\mathrm{coh}(X) \rightarrow \mathrm{mod}^{L(p)}(\mathcal{O}_{X,\xi})$, $F \mapsto F_{\xi}$ es un funtor exacto e induce una equivalencia entre $\mathrm{coh}(X)/\mathrm{Ker}T$ y la categoría $\mathrm{mod}(k(X))$ de espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo de funciones de X . Si $C(p,\lambda)=X$, KerT es la subcategoría $coh_0 X$ de todas las gavillas coherentes de longitud finita.

Demostración:

a) Basta demostrar que Γ_* es un adjunto derecho del funtor gavillación. Pero esto es una consecuencia sencilla de la definición del funtor Γ_* y el funtor gavillación.

b) Sea $M=\oplus M_{\vec{l}}$ y $N=\oplus N_{\vec{l}}$ S-módulos $L(p)$-graduados .Por definición N es submódulo $L(p)$-graduado de M si y sólo si $N_{\vec{l}} \subseteq M_{\vec{l}}$ para cada $\vec{l}$ en $L(p)$. Y también por definición M es un S-módulo simple $L(p)$-graduado si y sólo si no tiene submódulos propios, no cero, $L(p)$-graduados. Asumimos sin demostración los siguientes resultados de álgebra conmutativa .

bi) $M^{\sim}=0$ si y sólo si existe $f\in S_+$ tal que $M_f=0$.

bii) $M_f=0$ si y sólo si existe $n>0$ tal que $f^nM=0$.

Usando (bi) y (bii) podemos demostrar b): Supongamos que existe $f\in S_+$ con $deg(f)=\vec{l}_0$ tal que $fM \neq 0$ para algún S-módulo M, $L(p)$-graduado simple.

Esto implica que $fM \subseteq \oplus M_{\vec{l}_0+\vec{l}} \subseteq M$, por ser M $L(p)$-graduado se tiene que $fM_{\vec{l}} \subseteq M_{\vec{l}_0+\vec{l}}$ (por ser M simple , no cero, implica que $fM_{\vec{l}} = M_{\vec{l}_0+\vec{l}}$) es submódulo propio de M lo cual es una contradicción .

Por tanto $fM=0$ para cada $f\in S_+$(por (bii)) y cada M S-módulo simple.

Usando (bi) $M^{\sim}=0$ para cada M un S-módulo simple. Así existe un único funtor (también denotado por el símbolo $\sim$) que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{mod}^{\mathbb{L}*}S \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{mod}^{\mathbb{L}*}S \,/\, \mathrm{mod}_0^{\mathbb{L}*}S \arrow[dl] \\
& \mathrm{coh}\mathbb{X} &
\end{tikzcd}$$

donde como antes $\mathrm{mod}_0^{\mathbb{L}*}S$ denota a la categoría de S-módulos L(p)-graduados de longitud finita. Por (bi) (de arriba) el nuevo funtor ~ es denso, fiel y pleno , luego una equivalencia.
$\square$

c) Esto es consecuencia del inciso b).

d) Supongamos que $\mathbb{X}=C(p,\lambda)$. Probaremos que $\mathrm{coh}_0\mathbb{X} = \ker\mathcal{T}$.
Demostración del inciso d: $\mathrm{coh}_0\mathbb{X} \subseteq \ker\mathcal{T}$: Sea $\mathcal{A}$ como en el inciso (c) de esta proposición.
Sea $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}_0\mathbb{X}$ simple, entonces existe $0\neq M \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F}\cong M^{\sim}$ con $M=\oplus M_{\vec{l}}$ con $\vec{l} \geq 0$. Supongamos que $\mathcal{F}_{\vec{l}}\neq 0$ luego $T^{-1}M\neq 0$,donde T es el conjunto de los no divisores de cero , esto implica que para todo $t\in T$ $tM\neq 0$.

Sea $0\neq N\subsetneq M$ (submódulo propio, que no es de longitud finita). Entonces $N^{\sim}=0$ o $N^{\sim} = M^{\sim}$.
Supongamos que $N^{\sim} = M^{\sim}$, esto implica que $M\cong\Gamma(\mathbb{X},M^{\sim})\cong\Gamma(\mathbb{X},N^{\sim})\cong N$

(ver 2.14) lo cual es una contradicción. Por tanto $N^{\sim}=0$ y así existe $t_0 \in T$ tal que $t_0 N=0$. Sea $N:=\oplus M_{\vec{l}}$ con $\vec{l}>0$, N es un submódulo L(p)-graduado propio no cero de M . Esto implica que $M=t_0 M=t_0 M_0+t_0(\bigoplus_{\vec{l}>0} M_{\vec{l}})=$

$t_0 M_0 \subseteq M_{\deg t_0}$ pero esto implica que $M_{\vec{l}}=0$ para cada $\vec{l}\neq\deg(t_0)$

Sea $t\in T$ no divisor de cero tal que $\deg t>0$ entonces $M=tM=tt_0M_0\subseteq$

$\subseteq M_{\deg t+\deg t_0}=0$. Por tanto $M=0$, lo cual es una contradicción.

□

2.17:

Corolario: Si X,Y están en coh$\mathbb{X}$ entonces Hom(X,Y) es de dimensión finita sobre k ; En particular coh$\mathbb{X}$ es una categoría Krull-Schmidt ,es decir cada F en coh$\mathbb{X}$ tiene una descomposición de la forma siguiente; $F=F_1\oplus\ldots\oplus F_n$ donde cada F_i es inescindible con anillo de endomorfismos local. Más aún tenemos que $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}),\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{y}))=S_{\vec{y}-\vec{x}}$ para cada $\vec{x}$, $\vec{y}\in L(p)$.
□

2.18 Corolario: Si K denota el campo de funciones de X, la fórmula $r(F)=\dim_K(F_\xi)_0$ define una forma lineal $r:K_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ llamada función rango. Más aún si $\mathbb{X}=C(p,\lambda)$, $r(F)=0$ si y sólo si F tiene longitud finita .
□

2.19 Corolario: Cada gavilla coherente F en $\mathbb{X}$ tiene una resolución exacta

$$\ldots\longrightarrow L_2\longrightarrow L_1\longrightarrow L_0\longrightarrow F\longrightarrow 0$$

donde cada L_i es una suma directa finita de gavillas de la forma $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x})$.

Más aún para $\mathbb{X}=\mathbb{P}(p)$ podemos suponer que $L_j=0$ para $j\geq n+2$.

Demostración: Use que la dimensión global de S(p) es igual a n+1.
□

Capitulo 3:

SUCESIONES DE AUSLANDER-REITEN EN D^b(CohX)

En el presente capitulo se pretende demostrar la existencia de sucesiones de Auslander-Reiten en $D^b(\mathrm{coh}X)$ donde $X=C(p,\lambda)$ y para tal efecto comenzamos desarrollando una serie de hechos necesarios para la demostración técnica de dicha existencia que de paso muestra la influencia geométrica de los trabajos de Grothendieck. Ver [4],[6] o [7].

3.1 Definición: Sea X un espacio topológico. $\Gamma(X,-)$ denota el funtor de secciones globales. Definimos los funtores de cohomología $H^i(X,-)$ como los funtores derivados derechos de $\Gamma(X,-)$.

A continuación probaremos que $\mathbb{P}(p)$ satisface para, las gavillas casi coherentes $\mathcal{F}$ y la cubierta abierta afín, que los grupos de cohomología como los definimos anteriormente coinciden con los grupos de cohomología de Čech.

Definición: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}=\{U_i\}$ con i en I, una cubierta abierta de X.

Fijando un buen orden para el conjunto de indices I y para cada conjunto finito de indices $i_0,\dots,i_r$, en I denotemos la intersección $U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_r}$, por $U_{i_0,\dots,i_r}$.

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos en X. Definimos un complejo de grupos abelianos $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ como sigue: Para cada $p\geq 0$ sea

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=\prod \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_r}),\quad i_0<\dots<i_r.$$

Definimos el mapeo cofrontera $d: C^p \longrightarrow C^{p+1}$ de la siguiente manera:

$$(d\alpha)_{i_0,\dots,i_{r+1}} = \sum (-1)^k \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{r+1}} \,/U_{i_0,\dots,i_{r+1}}$$

donde $\hat{i}_k$ significa que i_k fue omitido.

A este complejo le llamamos el Complejo de Čech.

Definición: Definimos el n-grupo de cohomología $\check{H}^n(\mathcal{U},X)$ de Čech como el n-grupo de cohomología del complejo de Čech $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

3.2 El siguiente es un resultado conocido de teoría general de gavillas (ver por ejemplo [11]):

Lema: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Entonces para todo $p\geq 0$ existe un mapeo natural

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{F})$$

que es funtorial en $\mathcal{F}$.

Demostración: Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I^{\cdot}$ una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{Ab}$ (=categoría de grupos abelianos) . Comparando con la resolución $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ (ver [11]), se sigue que existe un morfismo de complejos $C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow I^{\cdot}$, induciendo la identidad en $\mathcal{F}$, el cual es único hasta homotopía . Aplicando los funtores $\Gamma(X,-)$ y H^p da el morfismo requerido. $\square$

Definición: Una gavilla $\mathcal{F}$ en un espacio topológico es **flasque** si para cada inclusión $V\subseteq U$ de conjuntos abiertos, la restricción $\mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{F}(V)$ es suprayectiva.

Ejemplo:

Sea I una $\mathcal{O}_X$ -gavilla inyectiva. Entonces I es flasque: En efecto sean U y V subconjuntos abiertos de X tal que $V\subseteq U$. Por $\mathcal{O}_U$ y $\mathcal{O}_V$ representamos la restricción de $\mathcal{O}_X$ a los subconjuntos abiertos U y V respectivamente (al extender por cero fuera de U y V).

Por la inclusión

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_U$$

además por ser I un objeto inyectivo de O_X-mod tenemos el homomorfismo supráyectivo $Hom(O_U, I) \longrightarrow Hom(O_V, I) \longrightarrow 0$. Pero $Hom(O_U, I) \cong I(U)$ análogamente $Hom(O_V, I) \cong I(V)$, así que I es gavilla flasque.

Proposición: Sea $X = \mathbb{P}(p)$ y sea $U := \{D(f) : f \in S_+\}$ una cubierta abierta afín de X, y sea F en Qcoh$X$. Entonces para todo $p \geq 0$, el morfismo

$$\check{H}^p(U, F) \longrightarrow H^p(X, F)$$

dado por el lema anterior es un isomorfismo.

Demostración: Para $p=0$, tenemos un isomorfismo como sigue

$$\check{H}^0(U, F) = \ker(d : C^0(U, F) \longrightarrow C^1(U, F)).$$

Si α en C^0 está dado por $\{\alpha_i \in F(U_i)\}$ entonces para cada $i<j$, $(d\alpha)_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$.

Así $d\alpha = 0$ decimos que las secciones α_i y α_j coincien en $U_i \cap U_j$. Así se sigue de los axiomas de gavillas que $\operatorname{Ker} d = \Gamma(X, F)$.

En lo que sigue definimos una versión de "Gavillación" de complejos de Čech. Para cada conjunto abierto $V \subseteq X$, sea $f : V \longrightarrow X$ que denota la inclusión de V en X. Ahora dado que X, U, F como arriba, construimos un complejo $C^\cdot(U, F)$ de gavillas en X como sigue:

Para cada $p \geq 0$ sea $C^p(U, F) = \prod f_*(F/U_{i_0, \ldots, i_p})$ con $i_0 < \ldots < i_p$ y definimos $d : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ por la misma fórmula de arriba. Note que por construcción que para cada p tenemos que $\Gamma(X, C^p(U, F)) = C^p(U, F)$.

Para el caso distinto de cero encajamos F en una gavilla G flasque casi-coherente y denotamos por R el cociente

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Para cada $i_0 < \ldots < i_p$, el conjunto abierto $U_{i_0, \ldots, i_p}$ es afín, dado que es la intersección de subconjuntos abiertos afines. Por el lema anterior y por ser F casi-coherente obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(U_{i0,\ldots,ir}) \longrightarrow G(U_{i0,\ldots,ir}) \longrightarrow R(U_{i0,\ldots,ir}) \longrightarrow 0$$

de grupos abelianos. Tomando productos encontramos que la sucesión correspondiente de complejos de Čech

$$0 \longrightarrow C^{\cdot}(U,F) \longrightarrow C^{\cdot}(U,G) \longrightarrow C^{\cdot}(U,R) \longrightarrow 0$$

es exacta .Consecuentemente tenemos una sucesión exacta de Čech de grupos de cohomología dado que G es flasque, su cohomología de Čech se anula para p>0 .En efecto sea

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de gavillas donde I es inyectiva y R es el cociente de I entre G.

Como G es flasque (ver ejemplo anterior) obtenemos la suceción exacta corta

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,G) \longrightarrow \Gamma(X,I) \longrightarrow \Gamma(X,H) \longrightarrow 0$$

Por otro lado como I es inyectivo tenemos que $H^i(X,I)=0$ para $i>0$. Así de la suceción exacta larga de cohomología tenemos que $H^1(X,G)=0$ y $H^i(X,G)=H^{i-1}(X,H)$ para $i\geq 2$. Pero G es flasque y en consecuencia tenemos que $H^i(X,G)=0$ para $i>0$.

Así tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(U,F) \longrightarrow \check{H}^0(U,G) \longrightarrow \check{H}^0(U,R) \longrightarrow \check{H}^1(U,F) \longrightarrow 0$$

e isomorfismos

$$\check{H}^p(U,F) \cong \check{H}^{p+1}(U,F)$$

para $p\geq 1$.

Ahora comparando con la sucesión exacta larga de cohomología usual, para la sucesión de arriba, usando el caso p=0 y usando que G es flasque concluimos que el morfismo natural

$$\check{H}^{1}(U,F) \longrightarrow H^{1}(X,F)$$

es un isomorfismo. Pero R es también casi-coherente, así obtenemos el resultado por inducción. □

3.3 Como antes sea $X=\mathbb{P}(p)$.

Claramente $U_{i0,\ldots,ir} = \cap U_i := D(x_{i0}\ldots x_{ir})$ así que por definición de $O_X(\vec{y})$ tenemos que

$$O_X(\vec{y})(U_{i0},\ldots,U_{ir}) = S(\vec{y})_{x_{i0}\ldots x_{ir}}$$

El complejo de Čech para U y $O_X(\vec{y})$ esta dado por

$$C^{\cdot}(U,O_X(\vec{y})): \prod S(\vec{y})_{x_{i0}} \longrightarrow \prod S(\vec{y})_{x_{i0}\cdot x_{i1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow S(\vec{y})_{x_{i0}x_{i1}\ldots x_{ir}}$$

Lema: El n-ésimo grupo de cohomología de Čech es

$$\check{H}^{n}(U , O_X(\vec{y}))=S(\vec{y})_{i_0\ldots i_p} /\mathrm{Imd}^{n-1} \cong D(S_{-\vec{y}} - \sum_{i=0}^{r} x_i) \quad \ldots.(*)$$

Demostracción : Se reduce a demostrar que

$$DH^n(X,\mathcal{O}_X(\vec{y}))=\langle x_0^{l_0-1}\dots x_n^{l_n-1}\cdot(x_0^{p_0})^{k_0-1}\dots(x_n^{p_n})^{k_n-1}\mid l_i, k_i < 0 \text{ para todo } i \text{ y } j\rangle$$

tal que si u esta en $DH^n(X,\mathcal{O}_X(\vec{y}))$ entonces $\deg(u)=\vec{y}+\vec{t}$ donde $\vec{t}=\sum t_i\vec{x}_i+t\vec{c}$ está escrito en forma normal aqui $t=\sum t(i)$ con $i=1,\dots,n$ es la suma de n enteros que dependen de $\vec{t}$.

En efecto, es claro que

$$S_{-\vec{y}-\sum_{i=0}^{n}\vec{x}_i}$$

está generado como k-espacio vectorial por los monomios de la forma

$$x_0^{r_0}\dots x_n^{r_n}\cdot(x_0^{p_0})^{s_0}\dots(x_n^{p_n})^{s_n} \quad 0\le r_i\le p_i \text{ y } s_i\in\mathbb{Z} \text{ y tal que}$$

$$y=\sum_{i=0}^{n} r_i\vec{x}_i+\Big(\sum_{i=0}^{n} s_i\Big)\vec{c} \text{ , aqui } y:=-\vec{y}_i-\sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Para demostrar nuestra afirmación basta probar que el siguiente morfismo es un isomorfismo

$$\psi : DH^n(X,\mathcal{O}_X(\vec{y})) \longrightarrow S_y$$

tal que si

$u:=x_0^{l_0-1}\dots x_n^{l_n-1}(x_0^{p_0})^{k_0-1}\dots(x_n^{p_n})^{k_n-1}$ es un elemento arbitrario

entonces $\psi(u)=x_0^{l_0+t_0}\dots x_n^{l_n+t_n}(x_0^{p_0})^{(k_0-1)+t(0)}\dots(x_n^{p_n})^{(k_n-1)+t(n)}$

está bien definida:

$\deg(\psi(u))=-\sum l_i\vec{x}_i-\sum(k_i-1)\vec{c}+\sum t_i\vec{x}_i+\sum t(i)\vec{c}=-\sum l_i\vec{x}_i-\sum(k_i-1)\vec{c}+\vec{t}$ donde $i=0,\dots,n$

pero

$\deg(u)=\sum l_i\vec{x}_i-\sum\vec{x}_i+\sum(k_i-1)\vec{c}=\vec{y}+\vec{t}$ (*) pero esto implica que

$y=\deg(\varphi(u))$, en efecto de (*) tenemos $-\vec{y}-\sum\vec{x}_i=-\sum l_i\vec{x}_i-\sum(k_i-1)\vec{c}+\vec{t}$

Claramente no depende del representante y es un isomorfismo de grupos abelianos por construcción, pues generadores van a generadores.

Teorema: a) $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X\ \ \mathcal{O}_X(\vec{y}))\cong S_{\vec{y}}$

$$\text{b)}\ \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{coh}X}(\mathcal{O}_X\ \mathcal{O}_X(\vec{y}))\cong D(S_{-\vec{y}-\sum\vec{x}_i})\ \text{con } i=0,\ldots,n$$

$$\text{c)}\ \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{con}X}(\mathcal{O}_X\ \mathcal{O}_X(\vec{y}))\cong 0\ \text{para } r\neq 0,n\ .$$

Demostración:

a) Se sigue del lema 2.15 a)

b) Esto se sigue del lema anterior y de la proposición 3.2.

c) Sea $F:=\oplus\mathcal{O}_X(\vec{y})$ con $\vec{y}\in L(p)$.

Inducción en r. Si $r=1$ no hay nada que demostrar .Así sea $r>1$. localizamos el complejo de Čech $C^{\cdot}(U.F)$ con respecto a X_r, como S-módulos graduados, y así obtenemos el complejo de Čech para la gavilla $F_{/U_r}$ en el espacio $U_r:=D(X_r)$, con respecto a la cubierta afín $\{U_i\cap U_j\ :\ i=0,\ldots,r\}$ con $U_i:=D(X_i)$.Este complejo de la cohomologia de $F_{/U_r}$ en U_r la cual es cero para $i>0$.

En otras palabras, cada elemento de $H^i(X,F)$, para $i>0$, es anulado por alguna potencia x_r.

Para completar la prueba, basta demostrar que para $0<i<r$, la multiplicación por x_r induce un mapeo biyectivo de $H^i(X,F)$ en si mismo Entonces claramente se sigue que este módulo es cero.

Consideremos la sucesión exacta de S-módulos L(p)-graduados

$$0\longrightarrow S(-\vec{x}_r)\xrightarrow{x_r}S\longrightarrow S/(x_r)\longrightarrow 0$$

en X donde H es el hiperplano $x_r=0$. Torciendo por $\vec{l}\in L(p)$ y tomando sumas directas, tenemos

$$0 \longrightarrow F(-\vec{x}_r) \longrightarrow F \longrightarrow F_H \longrightarrow 0$$

donde $F_H=\oplus O_H(\vec{y})$, $\vec{y}\in L(p)$. Tomando cohomología obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^i(X,F(-\vec{x}_r)) \longrightarrow H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,F_H) \longrightarrow \cdots$$

Considerados como S-módulos L(p)-graduados $H^i(X,F(-x_r))$ es $H^i(X,F)$ corrido un lugar , y el mapeo $H^i(X,F(-\vec{x})) \longrightarrow H^i(X,F)$ de la sucesión exacta es la multiplicación por x_r .

Como H es isomorfo a $\mathbb{P}(p')$ donde $p'=(p_0,\ldots,p_{n-1})$ y $H^i(X,F_H)=H^i(H,\oplus O_H(\vec{y}))$ con $\vec{y}\in L(p)$.

Así podemos aplicar la hipótesis de inducción a F_H , encontramos que $H^i(X,F_H)=0$ para $0<i<n-1$.

□

Proposición: a) $F\in \mathrm{coh}X$ tenemos $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{coh}X}(O_X , F(\vec{y}))=0$,con $n\neq 0$ y $\vec{y} > \vec{\delta}$

b) Para cada $F\in \mathrm{vect}(X)$ $\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{coh}X}(O_X , F(\vec{y}))=0$ con $n\neq 0$ y $\vec{y} < \vec{\delta}$.

Demostración:

Basta considerar el teorema (3.3) y la resolución exacta de $F(\vec{y})$ con elementos de vect(X) para obtener de manera directa dichos resultados

□

n es la dimensión de $\mathbb{P}n(p)$

a) **Lema:** $DH^m(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{n-m}(X, \mathcal{O}_X(-\sum \hat{x}_i))$ con $i=0,\ldots,n$

Demostración : Por el teorema (3.3) tenemos que si $m \neq 0,n$ entonces

$$DH^m(X,\mathcal{O}_X)=0=H^{n-m}(X,\mathcal{O}_X(-\sum \hat{x}_i)) \text{ con } i=0,\ldots,n$$

También por (3.3) si $m=0$ entonces

$DH^0(X,\mathcal{O}_X) = DExt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong DHom(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong S_{0-0} \cong k$

$H^n(X,\mathcal{O}_X(-\sum \hat{x}_i)) \cong Ext^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-\sum x_i)) \cong S_{-(-\sum x_i)-(\sum x_i)} \cong S_0 \cong k$

para $i=0,\ldots,n$.

Así hemos demostrado que si $m=0$ tenemos el resultado requerido.

El caso $m=n$ es análogo □

Observación :- $H^n(X, \mathcal{O}_X(-\sum x_i)) \cong k$

El siguiente lema, lo aceptamos sin demostración. Como dijimos al principio esta parte esta influenciada por las técnicas geométricas de Grothendieck, por tal razón sugerimos ver las demostraciones análogas en el libro de Algebraic Geometry de Hartshorne [11].

b) **Lema** : Para cada $\mathcal{F}$ en $CohX$ tenemos que

$$Ext^i_{cohX}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X(-\sum \hat{x}_j)) \cong DH^{n-i}(X,\mathcal{F}) \text{ con } j=1,\ldots,n$$

□

Proposición: (Dualidad de Serre para $\mathbb{P}(X)$): Para F y G en coh$X$ se tiene que

$$D\mathrm{Ext}_X^{n-m}(F,G(-\sum x_j))\cong\mathrm{Ext}_X^m(G,F)$$

Demostración: Esto es una consecuencia del lema anterior:

$$D\mathrm{Ext}_X^{n-m}(F,G(-\sum x_j))\cong D\mathrm{Ext}_X^{n-m}(F,G\otimes O_X(-\sum x_j))\cong D\mathrm{Ext}_X^{n-m}(F\otimes DG,O_X(-\sum x_j))\cong$$
$$\cong\mathrm{Ext}_X^m(O_X,F\otimes DG)\cong\mathrm{Ext}_X^m(O_X\otimes DG,F)\cong\mathrm{Ext}_X^m(G,F)$$

Lo que concluye la demostración.

□

3.4.1: Teorema: (Dualidad de Serre para $C(p\ ,\ \lambda)$).

Para cada F, G en coh X (Aquí $X:=C(p\ ,\ \lambda)$)tenemos un isomorfismo $D\mathrm{Ext}_X^1(F\ ,\ G)\longrightarrow \mathrm{Hom}_X(G\ ,\ F(\vec{\omega}))$, el cual es funtorial en F y G donde $\omega:=(n-1)\vec{c}-\sum\vec{x}_i$ es el elemento dualizante de $L(p)$.

Demostración:

Primero calculamos los grupos de cohomología de Čech de $X=C(p,\lambda)$ asociada a la cubierta abierta afín $U=\{D(x_i)\ :i=0,\dots,n\}$.

Como la sucesión $x_0,\dots,x_n$ en $S(p)$ es una sucesión regular tenemos:

$$DH^i(X,O_X)=H^{n-i}(X,O_X(-\sum x_i))\ \text{con}\ i=1,\dots,n\quad\dots(*)$$

Note que para este proposito cada M en $\mathrm{Mod}^{L(p)}S$, DM es el $L(p)$-módulo graduado con componentes $(DM)_{\vec{x}}=D(M_{-\vec{x}})$.

$O_X(-\sum\vec{x}_i)$ que ocurre en $(*)$ dado que $S(-\sum\vec{x}_i)$ es el último término de complejos $L(p)$-graduados de Koszul asociado a la sucesión regular de $x_0,\dots,x_n$.

Se sigue que la cohomología de Čech coincide con la gavilla de cohomología calculada por medio de una resolución inyectiva o bien en $\mathrm{Mod}^{L(p)}\mathcal{O}_X$ o en QcohX.

Dado que el sistema de ecuaciones definida por $f_i = X_i^{p_i} - X_1^{p_1} + \lambda_i X_0^{p_0}$.

con $i=1,\ldots,n$, forman una sucesión regular de elementos de $S(p)$, cada una de grado $\vec{c}$ se sigue por argumentos estandar la existencia de isomorfismos de S-módulos $L(p)$-graduados , donde $S=S(p,\lambda)$.

$$DH^1(X,\mathcal{O}_X)=\Gamma(X,\mathcal{O}_X(\vec{\omega})) \quad \ldots.(**)$$

con $\vec{\omega}=(n-1)\vec{c}-\sum\vec{x}_i$ ($i=0,\ldots,n$,).

En particular para cada $\vec{x}$ en $L(p)$ obtenemos una única $\eta_{\vec{x}}$ en $DExt^1(\mathcal{O}_X(\vec{x}),\mathcal{O}_X(\vec{x}+\vec{\omega}))$, correspondiente (hasta torcimiento) con el morfismo identidad en $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ por medio de (**).

El lema de Yoneda produce transformaciones

$$\eta_{\vec{x}}:\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\vec{x}),\_) \longrightarrow DExt^1_X(\_,\mathcal{O}_X(\vec{x}+\vec{\omega}))$$

funtorial con respecto al morfismo $\mathcal{O}_X(\vec{x})\longrightarrow\mathcal{O}_X(\vec{y})$. Aquí usamos la familia de todos los $\eta_{\vec{x}}$ para definir el morfismo natural.

$$\eta_{F,G}:\mathrm{Hom}_X(F,G) \longrightarrow DExt^1_X(G,F(\vec{\omega}))$$

para cada par F,G de gavillas coherentes en X. Trabajando con resoluciones de F por sumas directas de gavillas estructural torcidas , inducidas por resoluciones libres de $\Gamma_*(F)$ en $\mathrm{Mod}^L S$.

Ya que todos los tallos de X tienen dimensión global graduada igual a uno, entonces cada gavilla casi-coherente H tiene dimensión inyectiva a lo más uno , así Ext^2 se anula. Por argumentos estardar uno primero prueba que $\eta_{F,G}$ es un isomorfismo si $F=\mathcal{O}_X(\vec{x})$ y G arbitrario .

combinado con la exactitud derecha de Ext^i y el hecho de que cada gavilla coherente F tiene una resolución exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

donde cada L_i es una suma directa finita de gavillas de la forma $\mathcal{O}_X(\vec{x})$.

$\square$

Corolario: La categoría coh$X$ tiene sucesiones de Auslander-Reiten. Más aun torciendo $F \mapsto F(\vec{\omega})$ con el elemento dualizante el cual sirve como traslación de Auslander-Reiten para Coh$X$.

Demostración:

Claramente para cada $F \in$ coh$X$ existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow F(\vec{\omega}) \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} F \longrightarrow 0$$

(pues $0 \neq \mathrm{Hom}_X(F(\vec{\omega}), F(\vec{\omega})) \cong \mathrm{Ext}_X(F, F(\vec{\omega})))$

Sea $f: S \longrightarrow F$ un morfismo de gavillas epi no escindibles (es decir no existe $\sigma: F \longrightarrow S$ tal que $f\sigma = \mathrm{Id}$).

$$\begin{array}{lccccccccc} s^*: & 0 & \longrightarrow & F(\vec{\omega}) & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ s: & 0 & \longrightarrow & F(\vec{\omega}) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esto implica que existe un morfismo

$$\alpha: \mathrm{Ext}^1_X(F, F(\vec{\omega})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(S, F(\vec{\omega}))$$

$$s \longrightarrow \alpha(s) := s^*$$

Basta demostrar que $\alpha(s) = 0$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_X(F\ .\ F(\tilde{\omega})) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{DHom}_X(F,F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_F\ f)"] & \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_X(F,F),k)) \arrow[d, "\mathrm{DHom}(\mathrm{Id}_F\ f)"] \\
\mathrm{Ext}^1_X(S\ .\ F(\tilde{\omega})) \arrow[r] & \mathrm{DHom}_X(F,S) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_X(F,S),k))
\end{tikzcd}
$$

Si $\mathrm{DHom}(\mathrm{Id}_F\ .\ f)(s)=0$ entonces $\alpha(s)=0$.
Pero analizando el siguiente diagrama podemos probar que

$\mathrm{DHom}_X(\mathrm{Id}_F.\ f)(s)::=s\circ\mathrm{DHom}_X(\mathrm{Id}_F\ f)=0$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{coh}X}(F\ .\ S) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{coh}X}(F\ .\ F) \arrow[d, "s\neq 0"] & r \arrow[r, mapsto] & f\circ r \\
& k & &
\end{tikzcd}
$$

$s\neq0$ implica que s es suprayectiva (pues la imagen de s es subespacio vectorial ,no cero,esto implica que $\dim\mathrm{Im}f=1$ y así $\mathrm{Im}f\cong k$).Análogamente $\mathrm{DHom}(\mathrm{Id}_F.,\ f)(s)$ es suprayectiva .Además $S(\mathrm{Id}_F)\neq0$, por construcción

(ver demostración del teorema de Serre para la curva C) esto implica que existe r en $\mathrm{Hom}_X(F\ .\ S)$ tal que $f\circ r=\mathrm{Id}_F$. Lo cual es una

contradición por que f no es escindible. Por tanto $\alpha(s)=0$.$_\square$

3.5:

Lema: para cada $F \in \mathrm{coh}X$ ($X=C(p,\lambda)$) tiene una subgavilla de longitud finita maximal.

Demostración: Sea Ω el conjunto de subgavillas de F de longitud finita. Claramente Ω es una familia no vacía, además Ω es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión de gavillas.

Sea $T:=\{F_\alpha\}$ con $\alpha \in I$ una cadena en Ω. Sea $T:=\oplus F_\alpha$, $\alpha \in I$, la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \oplus F_\alpha(U)$ con $\alpha \in I$. Claramente $F_\alpha \le T$, en nuestro orden dado, para cada $\beta \in I$. Además $T_\xi := \oplus F_{\alpha,\xi}$ (donde ξ es el punto genérico de X) ya que $F_{\alpha,\xi}=0$ para cada $\alpha \in I$ así esto implica que $T_\xi=0$ y por lo tanto T pertenece a Ω.

Esto prueba que cada cadena tiene una cota superior, luego por el lema de Zorn existe un elemento maximal tF en Ω. $\square$

3.6

Definición: A la subgavilla maximal tF de F se le llama **gavilla de torsión.**

Observación: La gavilla F/tF no tiene gavillas simples y así es una gavilla libre de torsión.

Lema: $F=tF$ si y sólo si F tiene soporte finito.

Demostración: $\Rightarrow$): Como $F=tF$ entonces $F_\xi=0$ y así el $\mathrm{Supp}F:=\{x\in X: F_x\neq 0\}\neq X$. Sea x un punto de X que no pertenece a $\mathrm{Supp}F$ entonces existe una vecindad abierta U de x tal que $F/U=0$ entonces $F_y=(F/U)_y=0$ para cada y en U. Así U está contenido en el complemento de $\mathrm{Supp}F$ y esto implica que $\mathrm{Supp}F$ es cerrado.

X es un espacio topológico noetheriano de dimensión uno. Por tanto la dimensión de $\mathrm{Supp}F$ es cero y esto implica que $\mathrm{Supp}F$ es un conjunto finito.

e) supongamos que $\mathcal{F}$ tiene soporte finito entonces $\mathrm{Supp}\mathcal{F} \neq X$. Sea x un punto que no pertenece al $\mathrm{Supp}\mathcal{F}$ entonces existe una vecindad abierta U de x no contenida completamente en $\mathrm{Supp}\mathcal{F}$. Como ξ es un punto genérico entonces ξ está en U y así $\mathcal{F}_\xi=0$ y en consecuencia $\mathcal{F}$ es de longitud finita (Ver teorema de Serre).

$\square$

3.6.1 **Definición:** Aquí X denota o bien a $C(p,\lambda)$ o a $\mathbb{P}_n(p)$.

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla libre de torsión en X, a $\mathcal{F}$ le llamaremos **haz vectorial**.

No es difícil probar que existe un n en $\mathbb{N}$ tal que para cada x en X existe una vecindad de x tal que:

$$\mathcal{F}_{/U} \cong (\mathcal{O}_{X/U})^n$$

A este número le llamaremos el rango de $\mathcal{F}$ y se denota por $\mathrm{rank}\mathcal{F}$.
Observe que este número es un invariante de $\mathcal{F}$ ya que X es un espacio topológico conexo.

Proposición: Cada gavilla $\mathcal{F}$ en X tiene una descomposición $\mathcal{F}=t\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}$, donde $t\mathcal{F}$ es una gavilla de torsión de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}:=\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ es un haz vectorial. En particular cada subgavilla de un haz vectorial es un haz vectorial.

Demostración: Antes probaremos el siguiente lema:

Lema: $t\mathcal{F}\cong(\tau M)^\sim$ y $\mathcal{F}\cong(M/\tau M)^\sim$ donde τM es un submódulo de torsión de M, tal que $\mathcal{F}\cong M^\sim$

Demostración: Como $\mathcal{F}\in\mathrm{coh}X$ existe un M en modS tal que $\mathcal{F}\cong M^\sim$. También aquí $\xi\in X$ denota el punto genérico de X.

$((\tau M)^\sim)_\xi=T^{-1}(\tau M)=0$ donde T es el conjunto de no divisores de cero de S.

En efecto sea m/t un elemento de $T^{-1}(\tau M)$ como $m\in\tau M$ entonces existe λ en S tal que $\lambda m=0$. Pero $0=\lambda m=\lambda(m.1-t.0)$ esto implica que $m/t=0/1=0$ lo cual nos dice que $((\tau M)^\sim)_\xi\subseteq t\mathcal{F}$.

Por otro lado como $t\mathcal{F}$ es una gavilla coherente entonces existe un submódulo N de M tal que $t\mathcal{F}\cong N^\sim$. Además $(t\mathcal{F})_\xi=0$ lo que implica $T^{-1}N=0$

de lo cuál sabemos que existe λ en S tal que $\lambda(m/1)=\lambda m=0$ y así N tiene torsión por tanto $N\subseteq \tau M$ y $(N^{\sim})\subseteq(\tau M^{\sim})$. La conclusión final es que $t\mathcal{F}\cong(\tau M)^{\sim}$ de lo cual es claro que $\mathcal{F}\cong(M/\tau M)^{\sim}$.

□

Demostración de la proposición:

De la sucesión exacta corta $0\longrightarrow t\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow 0$ tenemos que la sucesión $0\longrightarrow(t\mathcal{F}_{\xi})\longrightarrow\mathcal{F}_{\xi}\longrightarrow\mathcal{F}_{\xi}\longrightarrow 0$ es $\mathcal{O}_{X,t}$-exacta para t un punto arbitrario de X.

Por el lema anterior es fácil ver que dicha sucesión se escinde para cada ξ en X. Por lo que se sigue $\mathcal{F}$ es suma directa de la gavilla de torsión $t\mathcal{F}$ y de la gavilla libre de torsión $\mathcal{F}$.

□

3.6.2 :

Proposición: Cada $\mathcal{F}$ en VectX tal que $\Gamma(X,\mathcal{F})\neq 0$ tiene una filtración $0=\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{F}_n=\mathcal{F}$ cuyos factores son haces lineales de la forma $\mathcal{O}_X(\vec{x}_i)$ para una elección apropiada de $\vec{x}_i$ en L(p).

Demostración: Desde luego existe $\vec{x}\in L(p)$ tal que $F(\vec{x})$ es generado por secciones globales.

Dado que cada filtración de $F(\vec{x}_i)$ induce una filtración de F, podemos suponer sin pérdida de generalidad que F es generado por secciones globales.

Considere un homomorfismo $\phi:\mathcal{O}_X\longrightarrow F$ no cero . Dado que su imagen es una gavilla libre de torsión en X tenemos que F contiene un subhaz vectorial y así tenemos un subhaz de rango uno : denotemos este subhaz por F_1 . dado que el cociente de una gavilla generada por secciones globales es ella misma generada por secciones globales podemos elegir un subhaz L_2 de rango uno en F/F_1. Ahora definimos un subhaz F_2 de F como aquella subgavilla de F tal que F_2/F_1 es isomorfo a L_2.

continuando por inducción , obtenemos la afirmación de esta proposición. $\square$

Corolario: sea x un punto de $\mathbb{X}$: Si F es un haz vectorial de $\mathbb{X}$ de rango n , entonces existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \oplus L_i \longrightarrow N \longrightarrow 0 \text{ con } i=1,\dots,n.$$

en coh$\mathbb{X}$, donde cada L_i ,es un haz lineal y N está concentrado en x.

Demostración: procedemos por inducción en n . Elijase una sucesión de haces vectoriales de la forma $0 \to F_{n-1} \longrightarrow F \longrightarrow L_n \longrightarrow 0$. Donde L_n es un haz lineal. Por hipótesis de inducción F_{n-1} esta encajado en una suma directa $\oplus L_i$,con $i=1,\dots,n-1$, con cokernel concentrado en x. Reemplazando (si es necesario) cada L_i por algún $L(l\vec{c})$, por el uso de la dualidad de Serre podemos suponer que $\mathrm{Ext}^1(L_n,L_j)=0$ para todo $j=1,\dots,n$. tomando el push-out

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & L_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus L_j \arrow[r] & G \arrow[r] & L_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $j=1,\dots,n-1$,

se prueba que F está encajado en $\oplus F_i$,con $i=1,\dots,n$,también con conucleo concentrado en x.

$\square$

Dado que Ext^2 se anula en coh$\mathbb{X}$ la caracteristica de Euler está dada por

$$\chi: K_0(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad ,[F] \longrightarrow \sum (-1)^j \dim_k \mathrm{Ext}^j(O_{\mathbb{X}},F) \text{ donde } j=0,1$$

es una forma lineal en $K_0(\mathbb{X})$.

Definición: Al morfismo de grupos $\delta: L(p) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definido en generadores por $\delta(\vec{x}_i)=p/p_i$ donde $p:=\mathrm{m.c.m.}(p_1,\dots,p_n)$ se le llama el **grado** de $\vec{x}_i$.

3.8:

Proposición: Existen formas lineales rango y grado r, $d:K_0(X)\longrightarrow \mathbb{Z}$ Los cuales están unívocamente determinados por las propiedades;

$$\operatorname{rank}\mathcal{O}_X(\vec{x})=1 \text{ y } \deg\mathcal{O}_X(\vec{x})=\delta(\vec{x})$$

Demostración:
Considere la resolución exacta

$$0\longrightarrow R_t\longrightarrow R_{t-1}\longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow R_1\longrightarrow F\longrightarrow 0$$

por la aditivida de las funciones lineales tenemos el resultado deseado.

□

Teorema: (Riemann-Roch) La característica de Euler para una gavilla F sobre $\mathbb{X}$ definida por

$$\bar{\chi}(F)=\sum_{j=1}^{n}\chi(F(-j\vec{w}))$$

satisface

$$\bar{\chi}(F)=\sum_{j=1}^{n} r(F)\bar{\chi}(\mathcal{O}_X)+d(F)$$

En particular si F es igual a la gavilla $\mathcal{O}_X(\vec{x})$ tenemos que la siguiente identidad se cumple;

$$\chi(\mathcal{O}_X(\vec{x}))=\chi(\mathcal{O}_X)+\delta(\vec{x})$$

se cumple para cada $\vec{x}$ en $L(p)$ .Más aún

$$(1/p)\chi(\mathcal{O}_X)=-1/2\delta(\vec{w})=(p/2)(\sum 1/p_i-(n-1)) \text{ con } i=1,\ldots,n$$

Demostración:
Resta demostrar la siguiente afirmación . Por dualidad de Serre tenemos

$$\chi(\mathcal{O}_X(j\vec{w}))=\dim \operatorname{Hom}_k(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X(j\vec{w}))-\dim_k \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X(j\vec{w}),\mathcal{O}_X(\vec{w})) \quad \text{para cada } j.$$

Consecuentemente

$$\bar{\chi}(O_X)+\bar{\chi}(O_X(p\vec{w}))=\sum\chi(O_X(j\vec{w}))=0 \quad \text{con } j=-(p-1),\dots,p$$

de aquí $2\bar{\chi}(O_X)+p\delta(\vec{w})=0$ $\square$

3.9:

Definición: sea $g_X(x):=1+1/2\delta(\vec{w})$ el cual llamaremos el **género virtual** de X.

El género virtual g_X de X es un invariante que describe el problema de clasificación para coh$X$ y para mod$A$.

3.10:

Definición: la **inclinación de** F, un haz vectorial no trivial está dada por el número racional $\mu F=\deg F/\mathrm{rank} F$.

3.11:

Definición: Sea F un haz vectorial. Diremos que F es estable (respectivamente semiestable) si para cada subhaz propio, no cero, F' se tiene $\mu F'<\mu F$ (respectivamente $\mu F'\leq \mu F$).

Cada F haz vectorial tiene un subhaz semiestable maximal F^{*} unívocamente determinado por las propiedades;
i) Para cada subhaz no trivial F' de F se tiene $\mu F'\leq \mu F^{*}$
ii) F^{*} tiene rango maximal con respecto a los subhaces de F que satisfacen (i).

Teorema: Sea F y G haces vectoriales no cero en X con $\mu G-\mu F > \delta(\vec{c}+\vec{w}) = p+\delta(\vec{w})$ entonces $\mathrm{Hom}_X(F, G)\neq 0$.

Demostración: Consideremos la gavilla $\mathcal{H}:=\mathcal{H}om_X(F,G)=F^{\vee}\otimes G$ tiene inclinación $\mu\mathcal{H}=\mu G-\mu F$ es suficiente probar que $\mathrm{Hom}_X(O_X,\mathcal{H})\neq 0$ ya que $\mu\mathcal{H} >\delta(\vec{c}+\vec{w})$.

Sea $\mathscr{E}'$ el subhaz maximal de $\mathscr{E}$. Note que $\mu\mathscr{E}' \geq \mu\mathscr{E} > \delta(\vec{c}+\vec{w})$. Supongamos que $Hom_X(O_X, \mathscr{E}')=0$ es claro que

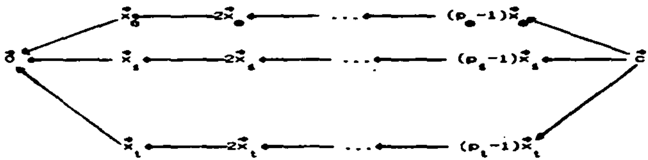
$$0 = DExt^1_X(O_X, \mathscr{E}') = Hom_X(\mathscr{E}', O_X(\vec{c}+\vec{w}))$$

consecuentemente $\mu\mathscr{E}' \leq \mu(O_X(\vec{c}+\vec{w}) = \delta(\vec{c}+\vec{w})$ lo cual es una contradicción. $\square$

Capitulo 4 :

GAVILLAS Y MODULOS SOBRE ALGEBRAS CANONICAS

En [14], Ringel introduce la clase de álgebras canónicas, las cuales son álgebras de trayectorias del siguiente carcaj:



(*)

sujeto a las relaciones :

$$x_i^{p_i} = x_0^{p_0} - \lambda_i x_1^{p_1}$$

para $i=2,\dots,t$, donde λ_i son elemento diferentes 2 a 2 de $k-\{0\}$ y $\lambda_0=\infty$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$

Como antes denotamos por $\mathbb{X}$ la curva proyectiva pesada y sea $T:=\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x})$,con $0\leq\vec{x}\leq\vec{c}$, a la gavilla tilteada dada en (2.12) : no es difícil ver usando el lema (2.2) , que el carcaj de Gabriel del álgebra de endomorfismos $A:=\mathrm{End}(T)$ es un carcaj como el dado en * .

A las categorías $\mathbb{X}_0$, $\mathbb{X}_1$ las denotamos por $\mathrm{coh}_+\mathbb{X}$ y $\mathrm{coh}_-\mathbb{X}$ respectivamente y están dadas por las gavillas $F\in\mathrm{coh}\mathbb{X}$ que cumplen con $H^1(\mathbb{X},F(\vec{x}))=0$ y

$\Gamma(X,F(\vec{x}))=0$,con $-\vec{c}\leq\vec{x}\leq\vec{\delta}$, respectivamente . También usamos las siguientes notaciones para los siguientes funtores:

$$\Gamma_\Lambda(X,-):\mathrm{coh}_+X\longrightarrow Y_0 \quad . \quad H^1_\Lambda(X,-):\mathrm{coh}_-X\longrightarrow Y_1$$

donde $\Gamma(X,F):=\Gamma_\Lambda(X,-)(F)$ es el Λ-módulo dado por la siguiente representación : Para cada vértice $\vec{x}$ de (*) el funtor $\Gamma_\Lambda(X,-)$ le asocia el k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}(O_X(\vec{x}),F)$ y a cada flecha $x_k:k\vec{x}\longrightarrow(k+1)\vec{x}$ le asocia la imagen bajo la dualidad x_k^* .

Análogamente $H^1_\Lambda(X,-)$ está dado por $\mathrm{Ext}^1(O(\vec{x}),-)$.

4.1:

Sea M la representación dado por $(M_{\vec{x}}\ ,\ \ x_i:M_{k\vec{x}_i}\longrightarrow M_{(k+1)\vec{x}_i})$ entonces decimos que M es una representación monomorfa (respectivamente epimorfa) si todos los mapeos lineales x_i son monomorfismos (respectivamente epimorfismos) pero no todos son isomorfismos.

El rango de M está definido por $r(M):=\dim_k M_{\vec{0}} - \dim_k M_{\vec{c}}$.

Lema: $r(\Gamma(X,F))=r(F)$ para cada F en coh_+X y $r(H^1_\Lambda(X,F))=-r(F)$ para cada $F\in\mathrm{coh}_-X$. En particular si $F\in\mathrm{coh}_+X$ es localmente libre entonces $\Gamma(X,F)$ es monomorfo y si F está en coh_-X entonces $H^1_\Lambda(X,F)$ es epimorfo.

Demostración: La prueba para $F\in\mathrm{coh}_-X$ es análoga a la que a continuación damos para $F\in\mathrm{coh}_+X$.

Nuestra primera afirmación es por inducción en el rango de F:

$r(F)=0$: Entonces demostraremos que $r(\Gamma_\Lambda(X,F))=0$, para esto usamos inducción en la longitud $l(F)$ de F.

Si $l(F)=1$ entonces F es isomorfo a alguna de las gavillas simples S o $S_{i,k}$.

Supongamos que $F\cong S$, ($F\cong S_{i,k}$)entonces $\mathrm{Hom}(O(\vec{c}),S)\cong\mathrm{Hom}(O,S(-\vec{c}))\cong$ $\cong\mathrm{Hom}(O_X,S)$ (análogamente $\mathrm{Hom}(O(\vec{c}),S_{i,k})\cong\mathrm{Hom}(O_X,S_{i,k})$) y en ambos casos tenemos $r(\Gamma_\Lambda(X,F))=0$.

Sea $\mathcal{F}$ en $coh_{\bullet}\mathbb{X}$ tal que $l(\mathcal{F})=n$ entonces existe $\mathcal{F}'$en $coh_{\bullet}\mathbb{X}$ tal que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

tiene conúcleo $\mathcal{S}$ gavilla simple .
Entonces $r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{F}))=r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{F}'))+r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{S}))$ por la aditividad del rango. Y así por hipótesis de inducción $r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{F}))=0$.

Sea $\mathcal{F}$ en $coh_{+}\mathbb{X}$ de rango 1, y consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathcal{O}(\vec{c}) \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

aplicando el funtor $Hom(-,\mathcal{F})$ a esta sucesión tenemos
$\dim_k Hom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},\mathcal{F})-\dim_k Hom(\mathcal{O}(\vec{c}),\mathcal{F})=\dim_k Ext^1(S,\mathcal{F})$ pero $\mathcal{F}$ es isomorfo a $\mathcal{O}(\vec{x})$ para algún $\vec{x}$ en $L_{+}(p)$, entonces $\dim_k Ext^1(S,\mathcal{F})=1$ y así $r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{F}))=1$ si $r(\mathcal{F})=1$.

Sea $\mathcal{F}$ en $coh_{+}\mathbb{X}$ tal que $r(\mathcal{F})>1$: En esta situación existe una sucecón exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \oplus\mathcal{O}(\vec{x}_i) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0 \quad \text{con } i=1,\ldots,n$$

donde $\mathcal{L}$ está en $coh_{o}\mathbb{X}$ (ver el corolario 3.6.2) es fácil ver por hipótesis de inducción y la aditividad del rango que $r(\Gamma_A(\mathbb{X},\mathcal{F}))=n$ si $\mathcal{F}$ es gavilla en $coh_{+}\mathbb{X}$ de rango n.

Para la segunda afirmación consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(k\vec{x}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}((k+1)\vec{x}_i) \longrightarrow S_{i,k} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

la cual no se escinde. Entonces tenemos que:
$0\neq Ext^1(S_{i,k},\mathcal{O}(k\vec{x}_i))\cong DHom(\mathcal{O}(k\vec{x}_i),S_{i,k}(\vec{\omega}))\cong DHom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},S_{i,k}(\vec{\omega}-kx_i))\cong$
$\cong DHom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},S_{i,k-1-k})\cong DHom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},S_{i,-1})$.

Esto implica que para cada i existe un $k\in\{0,1,\ldots,p_i-1\}$ tal que $Ext^1(S_{i,k},\mathcal{O}(\vec{x}))$ es diferente de cero para cada $\vec{x}=\sum l_i\vec{x}_i+l\vec{c}$ (con $i=0,\ldots,n$).

En efecto;
$Ext^1(S_{i,k},\mathcal{O}(\vec{x}))\cong DHom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},S_{i,k}(\vec{\omega}-\vec{x}))\cong DHom(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},S_{i,k,li})$ y este último espacio es diferente de cero para algún k (por ejemplo $k=l_i$) y esto prueba lo

anteriormente dicho.

al aplicar el funtor covariante Hom$(-,\mathcal{F})$ a la sucesión (*) tenemos la sucesión exacta larga

$0\rightarrow \mathrm{Hom}(S_{i,k},\mathcal{F})\rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X((k+1)\vec{x}_i),\mathcal{F})\rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(k\vec{x}_i),\mathcal{F})\rightarrow \mathrm{Ext}^1(S_{i,k},\mathcal{F})\rightarrow$
$\rightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}((k+1)\vec{x}_i,\mathcal{F})\rightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(k\vec{x}_i),\mathcal{F})\rightarrow 0$ (*)

para cada $\mathcal{F}$ en coh_+X.

Dado que $\mathcal{F}\in \mathrm{coh}_+X$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}((k+1)\vec{x}_i,\mathcal{F})\cong \mathrm{Ext}^1(k\vec{x}_i,\mathcal{F})=0$. De esta situación y del hecho de que $\mathrm{Ext}^1(S_{i,k},\mathcal{F})$ es diferente de cero para algún k entonces $\mathcal{F}$ es una representación monomorfa si $r(\mathcal{F})>0$.

□

Sea mod_+A y mod_-A las subcategorías plenas de modA consistentes de todos los M tal que cada submódulo (resp. cociente) es monomorfo (resp. epimorfo).

Sea $\mathrm{mod}_\bullet A$ la categoría de todos los módulos, cuyos sumandos directos no pertenecen ni a mod_+A ni a mod_-A , $\mathrm{mod}_\geq A$ denota la cerradura aditiva de mod_+A y $\mathrm{mod}_o A$.

Denotamos por $\mathrm{coh}_\geq X$ la subcategoría plena de gavillas coherentes que satisfacen que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\vec{c}),\mathcal{F})=0$. Como antes $\mathrm{coh}_o(X)$ es la categoría de gavillas de longitud finita , la cual está contenida en coh_+X. Denotamos por $\mathrm{coh}_+^\vee X:=\mathrm{vect}X \cap \mathrm{coh}_+X$. Entonces $\mathrm{coh}_-X:=\{\mathcal{F}\in\mathrm{vect}X:\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\ \mathcal{F})=0\}$. Es claro que $\mathrm{coh}_\geq X \cap \mathrm{coh}_-X=\{0\}$.

4.2:

De acuerdo a [14] decimos que $\mathrm{mod}_o A$ separa a $\mathrm{mod}_+ A$ de $\mathrm{mod}_- A$ si las siguientes dos condiciones son satifechas:

1) $\mathrm{Hom}_A(Z,X)=\mathrm{Hom}_A(Y,Z)=\mathrm{Hom}_A(Y,X)=0$ para cada X en mod_+A. $Y\in\mathrm{mod}_-A$, y $Z\in\mathrm{mod}_oA$.

2) Cada morfismo $f:X\rightarrow Z$, con X en mod_+A y Z en mod_-A admite una factorización $f=[X\rightarrow Y\rightarrow Z]$ con Y en mod_oA. Más aún, Y puede

elegirse en una componente preescrita $\mathrm{mod}_0(A)_x$.

Proposición: Un módulo inescindible M pertenece a mod_+A, mod_0A o a mod_-A si y sólo si $r(M)>0$, $r(M)=0$, o $r(M)<0$, respectivamente. Más aún, mod_0A separa mod_+A de mod_-A.

Demostración: La primera afirmación es cubierta por el lema 4.1

Sea X en $\mathrm{mod}_+ A$, Y en $\mathrm{mod}_0 A$, y Z en $\mathrm{mod}_- A$.
Entonces tenemos que $\mathrm{Hom}_A(Y,X)=0$ dado que no existen morfismos distintos de cero de gavillas de longitud finita a gavillas localmente libres .

$\mathrm{Hom}(Y,Z)=\mathrm{Hom}(X,Z)=0$ dado que X,Y ambos pertenecen a la subcategoría $\mathcal{Y}_0$ y Z pertenece a la subcategoría $\mathcal{Y}_1$.Como antes $\mathcal{T}$ denota la gavilla de tilteo $\oplus\mathcal{O}(\vec{x})$ con $0\le\vec{x}\le\vec{c}$.

Sea $f:X\to Z$ un morfismo , $\mathcal{F}=X\otimes_A\mathcal{T}$ y $\mathcal{G}=\mathrm{Tor}_1^A(Z,\mathcal{T})$. Entonces existe una sucesión exacta de la forma $0\to\mathcal{G}\to\mathcal{F}'\to\mathcal{L}\to0$, donde $\mathcal{L}$ pertenece a una componente fija de $\mathrm{coh}_0(X)$ y tal que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}')=0$. De la exactitud de la sucesión $0\to\Gamma(X,\mathcal{F}')\to\Gamma(X,\mathcal{L})\to Z\to0$ concluimos que f puede ser identificada con $\Gamma(X,\mathcal{L})$ dado que $\mathrm{Ext}_A^1(X,\Gamma(X,\mathcal{F}'))=0$.

□

De la proposición anterior deducimos el siguiente teorema.

Teorema: El funtor derivado derecho $R^*\mathrm{Hom}(A,-)$ induce una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\mathrm{coh}X)\to D^b(\mathrm{mod}A)$. Consecuentemente la categoría $\mathrm{mod}A$ puede ser identificada con la subcategoría plena de la categoría derivada $D^b(\mathrm{coh}X)$ la cual está dada como la cerradura aditiva de $\mathrm{coh}_{\ge}X \cup \mathrm{coh}_-X[1]$ con :

coh_0X correspondiente a mod_0A por medio de $\mathcal{F}\mapsto\Gamma(X,\mathcal{F})$

coh_+X correspondiente a mod_+A por medio de $\mathcal{F}\mapsto\Gamma(X,\mathcal{F})$

coh_-X correspondiente a mod_-X por medio de $\mathcal{F}[1]\mapsto H^1(A,\mathcal{F})$

□

Como una consecuencia al teorema anterior tenemos que $\mathrm{mod}_o\Lambda$ es una subcategoría exacta de $\mathrm{mod}\Lambda$ que admite una descomposición

$$\mathrm{mod}_o\Lambda = \amalg C_\lambda \quad \text{con } \lambda\epsilon X$$

en subcategorías uniseriales C_λ ,con $\lambda\epsilon X$. Aquí $C_\lambda \epsilon \mathrm{mod}_o^L(\mathcal{O}_{X,\lambda})$ puede ser visto como una categoría de gavillas coherentes en X con soporte en $\{\lambda\}$: Además los objetos inescindibles de C_λ forman una componente de Auslander-Reiten la cual es un tubo homogéneo de rango uno si λ es un punto ordinario y es igual a p_i si $\lambda=\lambda_i$.

4.3:

CATEGORIAS PERPENDICULARES

Sea $\mathcal{A}$ una categoría triangulada y sea $\mathcal{B}\le\mathcal{A}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{B}\perp$ a la subcategoría plena generada por todos los X en $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Ext}^i(X,Y)=0$ para cada Y en $\mathcal{B}$ y para cada $i\ge 0$. A está subcategoría le llamamos subcategoría perpendicular derecha de B.

Para el caso de $\mathcal{A}=\mathrm{coh}X\subseteq D^b(\mathrm{coh}X)$. $\mathcal{O}_X(\vec{c})\perp$ es la subcategoría perpendicular derecha del haz lineal $\mathcal{O}_X(\vec{c})$. Esta categoría está dada todas las gavillas coherentes en X que cumplen con

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(\vec{c}),F)=0=\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{O}_X(\vec{c}),F)$$

(recordemos que la dimensión proyectiva de X es 2).

$\mathcal{O}_X(\vec{c})\perp$ es una categoría abeliana , la cual además es cerrada bajo extensiones. De hecho, $\mathcal{O}_X(\vec{c})\perp$ es la categoría de todas las gavillas de la forma $F\ni M^\sim$ (con M un B-módulo) tal que $M_{\vec{c}}=0$; esto prueba la siguiente proposición:

Proposición: $\mathcal{O}_X(\vec{c})\perp$ puede ser identificada con la categoría de todos los módulos derechos sobre el álgebra

$$\Lambda_o=\{\mathcal{O}_X(\vec{x}):\vec{0}\le\vec{x}\le\vec{c}\}$$

la cual puede ser visto como el álgebra de trayectorias del carcaj :

$$
\begin{tikzcd}
 & \vec{x}_0 \arrow[dl] & 2\vec{x}_0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (p_0-1)\vec{x}_0 \arrow[l] \\
\vec{0} & \vec{x}_1 \arrow[l] & 2\vec{x}_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (p_1-1)\vec{x}_1 \arrow[l] \\
 & \vec{x}_t \arrow[ul] & 2\vec{x}_t \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (p_t-1)\vec{x}_t \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Si $g_{\mathbb{X}}<1$ entonces A_o es hereditaria de tipo de representación finito.
Si $g_{\mathbb{X}}=1$ entonces A_o es hereditaria de tipo de representación manso.
Si $g >1$ entonces A_o es hereditaria de tipo de representación salvaje.

4.4 COMPONENTES EN $D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{X})$

Proposición: a) Si $0\longrightarrow F\xrightarrow{\rho}\oplus G_i\xrightarrow{\psi} F(-\vec{\omega})\longrightarrow 0$,con $1\leq i\leq q$, es una sucesión de Auslander-Reiten de haces vectoriales en $\mathbb{X}$, donde G_i es inescindible y además $\mathrm{rk}G_i\leq \mathrm{rk}F$ para cada $i=1,\dots,q$. Entonces $g_{\mathbb{X}}<1$.

b) Si $g_{\mathbb{X}}>1$ entonces cada componente $\mathcal{C}$ de Auslander-Reiten formada por haces vectoriales tiene la forma $\mathbb{Z}A_\infty$.

Demostración: a) Como conocemos la estructura de las sucesiones de Auslander-Reiten para $g_{\mathbb{X}}=1$ es suficiente probar que $\delta(\vec{w})\leq 0$.

Sea $\rho:=(\rho_i)$, $\psi:=(\psi_i)$ primero notamos que cada $\psi_i:G_i\longrightarrow F(-\vec{w})$ es irreducible.Debe ser un monomorfismo por nuestra suposición en los rangos.

Más aún, si F^* denota el subhaz maximal de F. Para al menos un $i=1,\dots,q$, la imagen de ρ_i en F^* es cero, de aquí que $\psi_i(\rho_i(F^*))=0$.
Así:

$$\mu F^*\leq\mu(\psi_i\rho_i F^*)\leq\mu F^*(-\vec{w})=\mu F^*-\delta(\vec{w})$$

Es claro de la desigualdad anterior tenemos que $\delta(\vec{w})\leq 0$.

b) La función rank: $C \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función τ-invariante la cual es aditiva en C, es decir satisface $\mathrm{rk}F+\mathrm{rk}\tau_X F=\sum \mathrm{rk}G_i$, donde G_i es el conjunto de términos de en medio de la malla de Auslander-Reiten determinada por F y $\tau_X F$. De la proposición previa se sigue que $\mathrm{rk}: C\longrightarrow \mathbb{N}$ es no acotada y τ_X-invariante. En vista de que $\mu F(\vec{x})=\mu F+\delta(\vec{x})$, una inspección en las inclinaciones demuestra que los transladados de Auslander-Reiten $X(n\vec{w})$ (con n un número entero) son distintos dos a dos.

□

Corolario: Si $g_X>1$ entonces cada componente de Auslander-Reiten en las categorías derivadas $D^b(\mathrm{coh}X)\cong D^b(\mathrm{mod}\Lambda)$ es o bien del tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ o del tipo $\mathbb{Z}A_\infty/\mathbb{Z}q$ con $q\in\{1,p_1,\ldots,p_n\}$

□

Aquí compararemos las translaciones de Auslander-Reiten: τ_X, τ_Λ, τ_{Λ_0}.

De acuerdo a las identificaciones:

$$\mathrm{mod}_{\geq}\Lambda=\{F\in\mathrm{coh}X:\mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{O}_X(\vec{c}),F)=0\}$$

$$\mathrm{mod}\Lambda_0=\mathcal{O}_X(\vec{c})\perp$$

donde $\mathrm{mod}\Lambda_0\subseteq\mathrm{mod}_{\geq}\Lambda\subseteq\mathrm{coh}X$.

Como existe sólo una cantidad finita de Λ_0-módulos de rango cero (necesariamente preinyectivos sobre Λ_0) tenemos que $\mathrm{reg}(\Lambda_0)\subseteq\mathrm{mod}_+\Lambda$.

Como $\mathrm{mod}_{\geq}\Lambda$ es cerrado bajo translaciones de Auslander-Reiten τ_Λ y τ_Λ^- tiene sentido comparar τ_X,τ_Λ, y τ_Λ y sus inversos en aquellas subcategorías de $\mathrm{Coh}X$ donde la translación esté conjuntamente definida.

De la proposición 3.5 de [4] sabemos que para cada M en $\mathrm{coh}\mathbb{X}$ existe una sucesión exacta de la forma $0\to M_+\to M\to M_-\to 0$ con $M_+\in\mathrm{mod}_{\geq}A$, $M_-\in\mathrm{coh}\_(A)$. La cual además es funtorial en M. De hecho M_+ es la subgavilla más grande de M que pertenece a $\mathrm{coh}_{\geq}\mathbb{X}=\mathrm{mod}_{\geq}A$.

4.5:

Proposición: Para cada inescindible M en $\mathrm{mod}_{\geq}A$ tenemos que $\tau_A M=M(\vec{\omega})_+$. En particular $M(\vec{\omega})_+$ es inescindible o cero. Más aún, $\tau_A:\mathrm{mod}_{\geq}A\to\mathrm{mod}_{\geq}A$ donde $M\mapsto M(\vec{\omega})$ es un funtor que induce un epimorfismo $\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(\tau_A X,\tau_A Y)$ para cada X, Y en $\mathrm{mod}_{\geq}A$.

Demostración:

Observe primero que para M,N en $\mathrm{mod}_{\geq}A$ tenemos que $\mathrm{Hom}(M,N)=\overline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ dado que no existen morfismos distintos de cero de mod_A a $\mathrm{mod}_{\geq}A$, y todos los A-módulos inyectivos están en mod_A.

La fórmula de Auslander-Reiten conduce a $D\mathrm{Ext}^1_A(M,N)=\mathrm{Hom}_A(N,\tau_A M)$. Observe que $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)=\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(M,N)$ e involucrando la dualidad de Serre tenemos las siguientes identidades:

$$D\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(M,N)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(N,M(\vec{\omega}))=\mathrm{Hom}_A(N,M(\vec{\omega})_+)$$

Lo cual justifica el siguiente isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(N,\tau_A M)=\mathrm{Hom}_A(N,M(\vec{\omega})_+)$ la cual es funtorial para cada N en $\mathrm{mod}_{\geq}A$ y consecuentemente $\tau_A M=M(\vec{\omega})_+$.

Dado que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(X(\vec{x}),Y(\vec{\omega}))=D\mathrm{Hom}(Y,X(\vec{\omega}))=0$, cada morfismo $u:X(\vec{\omega})_+\longrightarrow Y(\vec{\omega})_+$ se extiende a un morfismo $\bar{u}:X(\vec{\omega})\longrightarrow Y(\vec{\omega})_+$. De aquí que

$v:X\longrightarrow Y$ con $v(\vec{\omega})=[X(\vec{\omega})\xrightarrow{\bar{u}}Y(\vec{\omega})_+\longrightarrow Y(\vec{\omega})]$ satisface que $\tau_A(v)=u$.

□

a) **Corolario:** Para cada inescindible $M\in\mathrm{mod}_+$ tenemos que $\mathrm{rk}\tau_A M\leq\mathrm{rk}M$ la igualdad ocurre si y sólo si $\tau_A M=\tau_{\mathbb{X}}M$.

Demostración:

Dado que $\tau_A M=M(\vec{\omega})_+$ existe una inclusión $\tau_A M\subseteq M(\vec{\omega})$ de gavillas coherentes y consecuentemente $\mathrm{rk}\tau_A M\leq\mathrm{rk}M$ se cumple.

La igualdad $\mathrm{rk}\tau_A M=\mathrm{rk}M$ si y sólo si el cokernel $(M(\vec{w})/\tau_A M)=M(\vec{w})_-$ es un haz de rango cero, así es el haz cero.

□

b) Corolario: Para cada M en $\mathrm{mod}_+ A$ existe n_o en $\mathbb{N}$ tal que:

i) τ_X y τ_A coinciden en $\{\tau_A^n M : n\geq n_o\}$

ii) $\mathrm{inj.dim}_A \tau_A^n M\leq 1$ para cada $n\geq n_o$.

Demostración:

Elijase n_o tal que $\tau_A^{n_o}M$ tiene rango mínimo. La afirmación es consecuencia del corolario anterior, mientras que (ii) se sigue del teorema 4.1 (iv)

□

Corolario: Supongamos que M y N están en $\mathrm{mod}_+ A$, N no es preproyectivo. Entonces existe n_o en $\mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Hom}_A(M,\tau_A^n N)\neq 0$ para cada $n\geq n_o$.

Demostración:

Por el corolario (4.5)(b)(i) y por el teorema 3.12 se concluye la demostración. □

4.6:

Proposición: Para cada M en $\mathrm{mod}A$ la extensión universal

$$0\longrightarrow M(-\vec{\omega})\xrightarrow{\alpha}\bar{M}\longrightarrow \mathcal{O}_X(\vec{c})^q\longrightarrow 0$$

tiene término $\bar{M}=\tau_A^- M$.

Demostración: Sea $q=\dim_k \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X(\vec{c}),M(-\vec{\omega}))$ y consideremos la extensión universal $0\longrightarrow M(-\vec{\omega})\longrightarrow\bar{M}\longrightarrow\mathcal{O}_X(\vec{c})^q\longrightarrow 0$, determinada por la $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{c}),\bar{M})=0$. Esto es posible gracias a que $\mathrm{Ext}^2(-,-)=0$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{c}),\mathcal{O}(\vec{c}))=0$ y $\mathrm{End}(\mathcal{O}(\vec{c}))\cong k$.

Un corrimiento apropiado de la extención universal conduce a la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow M\longrightarrow\bar{M}(\vec{w})\longrightarrow\mathcal{O}(\vec{c}+\vec{w})^q\longrightarrow 0$$

dado que $\mathcal{O}(\vec{c}+\vec{w})$ esta en coh_X esto demuestra que $M=\bar{M}(\vec{w})_+=\tau_A M$, lo cual implica $\bar{M}=\tau_A^{-1}M\oplus P$ donde P es un módulo proyectivo.

Como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(M(-\vec{\omega}),\ \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{x}))=0$ (para $\vec{0}<\vec{x}<\vec{c}$)ya que M está en $\mathrm{coh}_{+}\mathbb{X}$ y $\mathcal{O}(\vec{c}+\vec{\omega})$ está en $\mathrm{coh}\_\mathbb{X}$,. también $\mathrm{Hom}(M(-\vec{\omega}),P)\cong D\mathrm{Ext}^1(P,M)=0$ por ser P un A-módulo proyectivo.

Por tanto existe una sucesión exacta de la forma:

$$0\to M(-\vec{\omega})\to \tau_A^{-1}M\to \mathcal{O}(\vec{c})^s\to 0$$

con s menor o igual a q .

Supongamos que P es diferente de cero entonces $s<q$, aplicando el funtor covariante $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(\vec{c}),-)$ a la sucesión anterior tenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}))^s\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),M(-\vec{\omega}))\to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}(\vec{c}),\tau_{\mathbb{X}}^{-1}M)=0$$

Pero $\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}(\vec{c}),M(-\vec{\omega}))=q>s=\dim_k \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}))^s$. Lo cual es una contradicción.

$\square$

Corolario: sea M en $\mathrm{mod}_{+}A$ inescindible. Entonces $\mathrm{inj.dim}_A M=1$ si y sólo si $\mathrm{rk}\tau_A^{-}M=\mathrm{rk}M$.

Demostración: En vista del teorema (4.1) (ii) que mide la desviación de la dimensión inyectiva uno y $q=0$ si y sólo si $\mathrm{rk}\tau_A^{-}M=\mathrm{rk}M$.

$\square$

4.7:

Proposición: Si M está en $\mathrm{mod}_{+}A$ entonces para n grande tenemos ;

i) $\tau_A^{-n}M$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})^{\perp}$

ii) $\mathrm{inj.dim}_A\tau_A^{-n}M=2$.

Demostración:

Para cada entero n tenemos una sucesión exacta

$$\eta:\quad 0\longrightarrow M(-n\vec{\omega})\longrightarrow \tau_A^{-n}M\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

donde C admite una filtración con factores de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}-(n-1)\vec{\omega}),\ldots,\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}-\vec{\omega}),\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})$. Por medio de una filtración de haces para M se demuestra la exactitud de la sucesión:

$$0=\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),C(-\vec{\omega}))\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),M(-(n+1)\vec{\omega}))\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}),\tau_A^{-n}M(-\vec{\omega})).$$

En vista de que $Ext^1_X(O_X(\vec{c}), M(-n\vec{\omega}))$ es diferente de cero para n grande y así (ii) se ha demostrado.

□

4.9:

Proposición: Sea C una componente de Auslander-Reiten en mod_+A, diferente de la componente preproyectiva P_0. Entonces lo siguiente se cumple:

i) Existe una única componente C_X de Auslander-Reiten en Vect(X) tal que C y C_X coinciden en un τ-cono.

ii) Existe una única componente C_0 de Auslander-Reiten en Vect(X) tal que C y C_0 coinciden en un τ^--cono.

Más aún, en el caso (i) cada componente de vect(X) tiene la forma C_X para una única componente $C\neq P_0$ de mod_+A . Análogamente en el caso de (ii) cada componente regular de $regA_0$ tiene la forma C_0 para una única componente $C\neq P_0$ de mod_+A.

Demostración:

La afirmación (i) se sigue del corolario 4.5 (b). Para la afirmación (ii) notamos que cada inescindible X en mod_+A existe un natural n_0 en $\mathbb{N}$, tal que $\tau_A^{-n}X$ pertenece a $modA_0$ para cada $n\geq n_0$ (Por la proposición 4.7 y además τ_A^- y $\tau_{A_0}^-$ coinciden en $M=\{\tau_A^{-n}X : n\geq n_0\}$.

(La proposición 4.8 implica que ningún miembro X de M es preinyectivo sobre A_0. Además hemos excluido las componentes preproyectivas, donde τ_A^- y $\tau_{A_0}^-$ coinciden, M consecuentemente consiste de módulos regulares. Pasando a extensiones sea probado el teorema.

□

a) **Corolario:** con la excepción de la componente preproyectiva P_0 y de la componente que contiene $O_X(\vec{c})$, cada componente C de mod_+A tiene la forma $\mathbb{Z}A_\infty$. Más aún un objeto X en tal componente de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ está determinado dentro de su órbita de Auslander-Reiten por el par (rkX, degX).

Demostración:

La primera afirmación se sigue de la componente C_X en vect$X$ tiene la forma $\mathbb{Z}A_\infty$.

Para la última afirmación sea $X=\tau_A^r Y$ con $r\geq 0$. Conocemos que $rkX=rk\tau_A^r Y\leq rk\tau_A^{r-1}Y\leq\dots\leq rkY=rkX$. Así tenemos la igualdad para los rangos y consecuentemente $\tau_A^n Y=Y(r\vec{m})$. Pasando a grados ahora mostramos que $r=0$.

$\square$

b) Corolario: Existen biyecciones entre los tres espacios:

— $\Omega(A_0)$ de componentes regulares sobre A_0.

—$\Omega(A)$ de componentes de mod A diferentes de la componente preproyectiva.

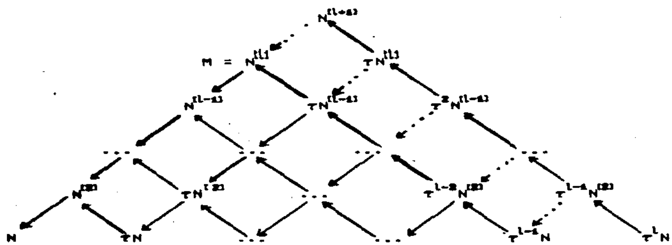
— $\Omega(X)$ de componentes de vect(X).

En particular los espacios $\Omega(A_0)$, $\Omega(A)$ y $\Omega(X)$ sólo depende de p y no de λ. $\square$

4.9 HACES Y MODULOS EXCEPCIONALES

Definición: Sea M un objeto inescindible en $D^b(\mathrm{coh}X)\cong D^b(\mathrm{mod}A)$. M es llamado excepcional si se cumple que $\mathrm{End}(M)\cong k$ y $\mathrm{Ext}^1(M,M)=0$.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una componente de VectX, de mod_+A o de $\mathrm{reg}(A_0)$ del tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ y M en la componente $\mathcal{C}$. La situación puede visualizarse parcialmente en la siguiente figura:



Lema: Sea $\mathcal{C}$ una componenete de Auslander-Reiten del tipo $\mathbb{Z}A_\infty$ ya sea en VectX, mod_+A o $\mathrm{reg}A_0$. Entonces todos los mapeos irreducibles $N^{[l]}\longrightarrow N^{[l+1]}$ (resp. $\tau N^{[l-1]}\longrightarrow N^{[l]}$) son epimorfismos (respectivamente monomorfismos).

Demostración: Sea $\lambda:\mathcal{C}\longrightarrow\mathbb{Z}$ tal que

$$M\longmapsto\begin{cases}\mathrm{rank}M \text{ si } M \text{ está en VectX}\\ \dim_k M \text{ si } M \text{ está en } \mathrm{mod}_+A\\ \dim_k M \text{ si } M \text{ está en } \mathrm{reg}(A)\end{cases}$$

Note λ es aditiva y que sólo toma valores mayores o iguales a uno. Un morfismo irreducible es por si mismo monomorfismo o epimorfismo. En particular un morfismo irreducible $M \longrightarrow M'$ es monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si $\lambda(M)$ es mayor que $\lambda(M')$ (resp. $\lambda(M)$ es menor o igual a $\lambda(M')$). La afirmación se concluye por inducción.

□

4.9.1 Definición: Sea M un A-módulo, la filtración de Auslander-Reiten está dada por

$$0 \subseteq \tau^{l-1}N \subseteq \tau^{l-2}N^{(2)} \subseteq, \ldots, \subseteq N^{(l)} = M$$

con factores $N, \tau N, \ldots, \tau^{l-1}N$. Además l es llamada la casi-longitud de M.

4.9.2.

Para completar la información enunciamos el siguiente lema sin demostración. Para una demostración de esta proposición remitimos al lector a la fuente original [13]:

Lema: (Strauß) Sea $0 \longrightarrow \tau\mathcal{F} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$ una sucesión casi escindible en coh$\mathbb{X}$ o en modA_0 donde $\mathcal{F}$ es excepcional, entonces E pertenece a $\mathcal{F}^{\perp}$.

□

Proposición: Para cada objeto M inescindible M en Vect$\mathbb{X}$ o en regA_e. Son equivalentes;

i) M es excepcional de casi-longitud l

ii) Los cocientes $N, \tau N, \ldots, \tau^{l-1}N$ de una filtración de Auslander-Reiten para M son excepcionales y satisfacen $\mathrm{Hom}_A(N, \tau^h N) = 0$ para todo $1 \leq h \leq l$.

iii) Cada elemento M' en la componente de Auslander-Reiten de M, con casi-longitud menor o igual que l, es excepcional.

□

4.10 COMPONENTE DISTINGUIDA

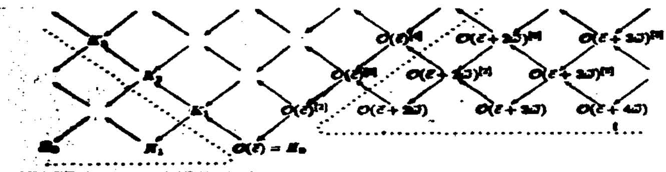
De aquí y hasta nueva indicación $g_X>1$

Definición: La componente $\mathcal{D}$ que contiene al módulo proyectivo $O_X(\vec{c})$ se le llama **componente distinguida** de A.

4.10.1

Proposición: La componente distinguida en mod_+A contiene los módulos de rango uno $O(\vec{c})$, $O(\vec{c}+j\vec{\omega})$ para cada $j\geq 2$. Consecuentemente el τ_A-cono de $O(\vec{c}+2\vec{\omega})$ formado en D coincide con el τ_X-cono de $O(\vec{c}+2\vec{\omega})$ formado en D_X.

Los módulos $H_j:=\tau_A^{-j}O_X(\vec{c})$, $j\geq 1$ son A_0-módulos regulares. Consecuentemente, el τ_A^--cono de H_1 formado en D coincide con el $\tau_{A_0}^-$-cono de H_1 formado en la componenete regular D.



componente distinguida

Note que el $\tau_{A_0}^{-}$-cono de H_1 es claramente separado del resto de la componente D dado que ningún módulo del rayo $O(\vec{c})$, $K_1, K_2, \ldots$, pertenece a $\mathrm{mod}A_0$.

Demostración:

Para $j \geq 2$ tenemos que $\vec{c}+j\vec{w} \geq 0$ dadao que si no $\vec{c}+j\vec{w} \leq \vec{c}+\vec{w}$ lo cual no es posible . Sea $G_n := O(\vec{c}+(n+1)\vec{w})$ y así $\tau_A G_n = G_{n+1}$ se cumple para $n \geq 1$.

Por el lema de Strauβ (4.9.2) el término medio de la sucesión casi-escindible (en coh$X$)

$$0 \longrightarrow O(\vec{c}+\vec{w}) \longrightarrow O(\vec{c})^{(2)} \longrightarrow O(\vec{c}) \longrightarrow 0$$

pertenece a $\mathrm{mod}A_0$. (En términos de módulos $O(\vec{c})^{(2)}$ es el radical del módulo proyectivo $O(\vec{c})$ con inclusión j).

Para cada $n \geq 1$ pegamos las dos sucesiones de Auslander-Reiten de coh$X$ en

$$\begin{tikzcd}
 & O(\vec{c})^{(n+2)} \arrow[dl] & & \\
O(\vec{x}) & & O(\vec{c}+\vec{w})^{(n+1)} \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & O(\vec{c}+\vec{w})^{(2)} \arrow[ul] & & O(\vec{c}+2\vec{w})^{(2)} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & O(\vec{c}+2\vec{w})^{(n-1)} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

conduce a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow O(\vec{c}+2\vec{w})^{(n)} \longrightarrow O(\vec{c}+2\vec{w})^{(n-1)} \oplus O(\vec{c})^{(n+2)} \longrightarrow O(\vec{c})^{(n+1)} \longrightarrow 0 \quad \ldots (*)$$

en coh$X$. Obviamente las gavillas $O(\vec{c}+2\vec{w})^{(n)}$ pertenecen a mod_+A , así que por inducción en n también las gavillas $O(\vec{c})^{(n)}$ pertenecen a mod_+A

Trivialmente cada no isomorfismo $X \longrightarrow O(\vec{c})^{(n+1)}$ con X inescindible en mod_+A se factoriza a través de un morfismo $X \longrightarrow O(\vec{c}+2\vec{w})^{(n-1)} \oplus O(\vec{c})^{(n+2)}$ de aquí que (*) es casi-escindible en $\mathrm{mod}A$.

Nosotros ponemos $H_n=\tau_A^{-n}\mathcal{O}_X(\vec{c})$ es decir $H_0=\mathcal{O}(\vec{c})$ y para cada $n\geq 1$ H_n está dado como el término medio de la extensión universal

$$0 \longrightarrow H_{n-1}(-\vec{w}) \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathcal{O}(\vec{c})^{q_n} \longrightarrow 0$$

Consecuentemente $H_{n-1}(-\vec{w})$ tiene una filtración de haces lineales con factores $\mathcal{O}(\vec{c}-n\vec{w})$, $\mathcal{O}(\vec{c}-(n-1)\vec{w}),\ldots,\mathcal{O}(\vec{c}-\vec{w})$, así que H_n $(n\geq 1)$ pertenece a $\mathcal{O}(\vec{c})\perp=\mathrm{mod}A_0$.

□

4.10.2

Lema: a) La casi-longitud de un haz semiestable (ver 4.9.1) en su componente de Auslander-Reiten Vect$X$ es uno.

b) $\mathcal{O}_X(\vec{c})$ con $\vec{x}$ mayor o igual a $\vec{0}$ es un A-módulo inescindible de rango uno. Entonces $\tau_A(\mathcal{O}_X(\vec{c}))$ es igual a cero si $\vec{0}$ es menor o igual a $\vec{x}$ o si $\vec{x}$ es mayor o igual a $\vec{c}$, o es igual a $\mathcal{O}_X(\vec{x}+\vec{\omega})$ en otro caso.

Demostración:

a) Supongamos que existe sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \tau_X F \longrightarrow G\oplus H \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

de Auslander-Reiten .Con $\tau_X F \longrightarrow G$ epimorfismo y $G \longrightarrow F$ monomorfismo. Entonces $\mu F+\delta(\vec{\omega})=\mu(\tau_X F)\leq \mu G\leq \mu F$. Esto contradice $\delta(\vec{\omega})>0$.

b) Sabemos que $\tau_A(\mathcal{O}_X(\vec{x}))$ tiene rango cero o uno dependiendo de si $\mathcal{O}(\vec{c})$ es proyectivo o no. Más aún, en el último caso τ_A y τ_X coinciden en $\mathcal{O}_X(\vec{c}))$

□

Proposición: Existen $|L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}|$ componentes de Vect(X) que contienen un haz lineal. Consecuentemente existen $|L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}|$ componentes distintas de P_0 (la componente preproyectiva de modA) de mod_+A que contienen un módulo de rango uno. Más aún

$$|L(p)/\mathbb{Z}|=p_1*p_2*\ldots*p_t[(t-2)-\sum_{i=1}^{t}(1/p_i)]=p_1*p_2*\ldots*p_t(\delta(\vec{w})/p)$$

donde p es el mínimo común multiplo de $\{p_1,\ldots,p_t\}$

Demostración: Del lema precedente todos los haces lineales de una componente de Auslander-Reiten están en alguna órbita de Auslander-Reiten y así consisten de haces $\mathcal{O}(\vec{x})$ con $\vec{x}$ en alguna clase de $L(p)$ con respecto a $\mathbb{Z}\vec{\omega}$. Esto demuestra que tenemos exactamente $|L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}|$ componentes de Auslander-Reiten que contienen un haz lineal. En vista del lema anterior la segunda afirmación se sigue directamente de la primera por medio de la biyección $C \longmapsto C_X$ del teorema

Nosotros podemos expresar $L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}$ como un grupo abeliano con generadores $X_0,\ldots,X_t$ sujeto a $(t+1)$-relaciones

$$X_0=p_1X_1=\ldots=p_tX_t$$
$$(t-2)X_0=X_1+\ldots+X_t$$

Esto expresa a $L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}$ como el conúcleo del morfismo $\mathbb{Z}^{t+1}\longrightarrow\mathbb{Z}^{t+1}$ cuyo determinante es igual al orden de $L(p)/\mathbb{Z}\vec{\omega}$.

□

EJEMPLOS DE COMPONENTES DISTINGUIDAS

Como se definió anteriormente la componente distinguida D en $D^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ es aquella que contiene al módulo proyectivo $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})$. Bajo algunas condiciones es fácil calcularlas ya que como quedó expresado anteriormente el τ_Λ-cono de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}+2\vec{w})$ formado en D coincide con el $\tau_{\mathbb{X}}$-cono de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}+2\vec{w})$ formado en $D_{\mathbb{X}}$

También los módulos $\tau_\Lambda^{-j}\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})$ con el índice $j\geq 1$ son Λ_0-módulos regulares. Consecuentemente el $\tau_\Lambda^{-j}\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c})$ formada en D coincide con el $\tau_{\Lambda 0}^{-j}$-cono de H_1 formado en la componente regular D_0.

A continuación proporcionaremos un par de ejemplos calculados por José Antonio de la Peña. La idea principal para el cálculo de estos ejemplos consiste en obtener la dimensión como k-espacio vectorial de la extensión universal de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}-\vec{w})$, o la de $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\vec{c}-2\vec{w})$ para a continuación calcular la dimensión de los módulos anteriores.

Ejemplos:

A) Sean n y t números naturales que cumplen la ecuación

$$t=(1+2n)/(n-1)$$

y sea $p=(p_1,p_2,\dots,p_t)$ la sucesión de pesos para el álgebra canónica

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{x}_0 \arrow[dl] & 2\vec{x}_0 \arrow[l] & \dots \arrow[l] & (p_0-1)\vec{x}_0 \arrow[l] & \\
\vec{0} & \vec{x}_1 \arrow[l] & 2\vec{x}_1 \arrow[l] & \dots \arrow[l] & (p_1-1)\vec{x}_1 \arrow[l] & \vec{c} \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \vec{x}_t \arrow[ul] & 2\vec{x}_t \arrow[l] & \dots \arrow[l] & (p_t-1)\vec{x}_t \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

sujeto a las relaciones :

$$x_i^{p_i} = x_0^{p_0} - \lambda_i x_1^{p_1}$$

para $i=2,\ldots,t$ y donde λ_i son elementos diferentes 2 a 2 de $k-\{0\}$.

Supongamos que todos de los pesos p_i son iguales a p . Entonces:

$$p\vec{w}=p((t-2)\vec{c}-\sum\vec{x}_i)=p(t-2)\vec{c}-\sum p\vec{x}_i=p(t-2)\vec{c}-\sum\vec{c}=p(t-2)\vec{c}-t\vec{c}=((p-1)t-2p)\vec{c}=\vec{c} \quad (*)$$

Es fácil probar el siguiente isomorfismo:

$$\tau^{-(p-2)}\mathcal{O}(\vec{c})(-\vec{w})\cong\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w})$$

el cual justifica la extensión universal, dada en la proposición (4.6), del módulo $\mathcal{O}(\vec{c}-(n-2)\vec{w})$.

$$0\longrightarrow\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w})\longrightarrow\tau_{\Lambda}^{-(p-1)}\mathcal{O}(\vec{c})\longrightarrow\mathcal{O}(\vec{c})^{q}\longrightarrow 0 \quad (**)$$

donde $q:=\dim_k \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{c}),\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w}))=2$ ya que usando (*) de arriba tenemos: $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(c),\mathcal{O}(c-(p-1)w))\cong D\operatorname{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{O}(pw))\cong D\operatorname{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{O}(c))$.

Aplicamdo el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{X}}(\mathcal{O}(\vec{x}),\_\_)$ a la sucesión anterior para $\vec{x}$ en $L(P)$ tenemos la sucesión:

$$0\longrightarrow\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}),\tau_{\Lambda}^{-(p-1)}\mathcal{O}(\vec{c}))\longrightarrow\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}),\mathcal{O}(\vec{c})^{q})\longrightarrow\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{x}),\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w}))\longrightarrow 0$$

observe que $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{x}),\tau_{\Lambda}^{-(p-1)}\mathcal{O}(\vec{c}))=0$ ya que $\tau_{\Lambda}^{-(p-1)}\mathcal{O}(\vec{c})$ esta en $\operatorname{mod}_{+}\Lambda$ y también que $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{x}),\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w})\cong\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},\mathcal{O}(\vec{w}-\vec{x})=0$ ya que $\vec{0}<\vec{c}+\vec{x}$ si y sólo si $\vec{w}-\vec{x}<\vec{c}+\vec{w}$ y esta última desigualdad implica que $\vec{w}-\vec{x}$ no esta en $L_{+}(p)$.

Además por la dualidad de Serre y la ecuación (*) de arriba tenemos $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{x}),\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w})\cong D\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(\vec{c}-(p-1)\vec{w},\mathcal{O}(\vec{x}+\vec{w}))\cong D\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}},\mathcal{O}(\vec{x}))$.

De la sucesión exacta corta anterior podemos calcular el vector dimensión de $\tau_{\Lambda}^{-(p-1)}\mathcal{O}(\vec{c})$:

$$\dim \tau_\Lambda^{-(p-1)} O(\vec{c}) = \quad 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2,1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1,1 & 1 & \cdots & 1 \quad 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3,1,1 & & \cdots & 1 \quad 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

b) Si $t=5$ y $p=(2,2,2,2,2)$

Entonces Λ está dado por el carcaj siguiente

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \vec{x}_0 \arrow[dr] & \\ & \vec{x}_1 \arrow[r] & \\ \vec{0} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \vec{x}_2 \arrow[r] & \vec{c} \\ & \vec{x}_3 \arrow[ur] & \\ & \vec{x}_4 \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

y además $\vec{\omega}=3\vec{c}-(\Sigma\vec{x}_i)$ con $i=0,1,\ldots,4$.

$2\vec{\omega} = 6\vec{c}-\sum 2\vec{x}_i=6\vec{c}-\sum\vec{c} = 6\vec{c}-\sum \vec{c}= 6\vec{c} -5\vec{c}=\vec{c}$

$\dim_k \mathrm{Ext}^1_X(O(\vec{c}),O(\vec{c}-\vec{\omega}))=\dim_k D\mathrm{Hom}_X(O(\vec{c}-\vec{\omega}),O(\vec{c}+\vec{\omega}))=\dim_k \mathrm{Hom}_X(O_X,O(2\vec{\omega}))=$
$=\dim_k \mathrm{Hom}(O_X,O(\vec{c}))=\dim S_{\vec{c}}=2.$

Como antes la sucesión $0\to O(\vec{c}-\vec{\omega})\to\tau^{-1}O(\vec{c})\to O(\vec{c})^2\to 0$ es exacta y $\vec{0}\le\vec{x}\le\vec{c}$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}(O(\vec{x}),\_)$ a la sucesión anterior obtenemos;

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_X(O(\vec{x}),\tau_\Lambda^{-1}O(\vec{c}))\longrightarrow \mathrm{Hom}_X(O(\vec{x}),O(\vec{c})^2)\longrightarrow \mathrm{Hom}_X(O_X,O(\vec{x}))\longrightarrow 0$$

es exacta. Ya que;

$\mathrm{Ext}^1(O_X(\vec{x}),O_X(\vec{c}-\vec{w}))\cong D\mathrm{Hom}(O_X(\vec{c}-\vec{w}),O_X(\vec{x}+\vec{w}))\cong D\mathrm{Hom}(O_X,O_X(\vec{x}+\vec{w}+\vec{w}-\vec{c}))\cong$
$D\mathrm{Hom}(O_X,O_X(\vec{x}))$.

Obsérvese que $\vec{x}+\vec{w}+\vec{w}-\vec{c}=\vec{x}+2\vec{w}-\vec{c}=\vec{x}+\vec{c}-\vec{c}=\vec{x}$.

Así $\dim \tau_{\Lambda}^{-1}O(\vec{c})=2\dim O(\vec{c})-\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1, & 1, & 2 \\ & 1 & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 1 & \\ 3, & 1, & 0 \\ & 1 & \end{bmatrix}$

Dado que conocemos que

$$\tau_{\Lambda}^{-2}O(\vec{c})=\tau_{\Lambda_0}^{-1}(\tau_{\Lambda}^{-1}O(\vec{c}))$$

entonces

$$\dim \tau_{\Lambda}^{-2}O(\vec{c})=(\dim\tau_{\Lambda}^{-1}O(\vec{c}))\phi_0^{-1}$$

donde ϕ_0 es la matriz de Coxeter asociada a Λ_0. La cual tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Así $\dim \tau_{\Lambda}^{-2}O_X(\vec{c})=\begin{bmatrix} & 2 & \\ & 2 & \\ 7 & 2 & 0 \\ & 2 & \\ & 2 & \end{bmatrix}$

c) Sea A el álgebra asociada al siguiente carcaj;

$$\begin{tikzcd}
& \vec{x}_0 \arrow[r] & 2\vec{x}_0 \arrow[r] & 3\vec{x}_0 \arrow[dr] & \\
\vec{\delta} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \vec{x}_1 \arrow[r] & 2\vec{x}_1 \arrow[r] & 3\vec{x}_1 \arrow[r] & \vec{c} \\
& \vec{x}_2 \arrow[r] & 2\vec{x}_2 \arrow[r] & 3\vec{x}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y sea $p=(4,4,4)$ y $t=3$.

Dado que $\vec{c}+2\vec{w}=2\sum\vec{x}_i$ con $i=1,2,3$.. tenemos que

$$\dim\tau_{\Lambda}^{-1}\mathcal{O}(\vec{c}+2\vec{w})=\begin{bmatrix} 1,0,0 \\ 1,1,1,0,0 \\ 1,0,0 \end{bmatrix}$$

dado que $\vec{w}\leq\vec{c}$ entonces $2\vec{w}\leq\vec{w}+\vec{c}$ y $2\vec{w}$ no es mayor o igual a $\vec{\delta}$. Por lo tanto

$$\tau_{\Lambda}^{-1}\mathcal{O}(\vec{c})=\mathcal{O}(\vec{c}-\vec{w})$$

como $\vec{c}-\vec{w}=\sum\vec{x}_i$ tenemos que $\dim\tau^{-1}\mathcal{O}(\vec{c})=\begin{bmatrix} 1,0,0 \\ 1,1,0,0,0 \\ 1,0,0 \end{bmatrix}$

la $\dim_k \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}(\vec{c}),\mathcal{O}(\vec{c}-2\vec{w}))=\dim_k \operatorname{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{O}(3\vec{w}))=1$, pero $3\vec{w}=\sum\vec{x}_i$ con $i=1,2,3$.

Así la sucesión exacta universal

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X(\vec{c}-2\vec{w})\longrightarrow\tau^{-1}\mathcal{O}_X(\vec{c})\longrightarrow\mathcal{O}_X(\vec{c})\longrightarrow 0$$

y la sucesión exacta que se obtiene al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{O}_X(\vec{x}),\_\_)$ a la sucesión exacta universal anterior tiene la forma;

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(\vec{x}), \tau^{-2}\mathcal{O}_X(\vec{c})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\vec{x}), \mathcal{O}_X(\vec{c})) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(3\vec{\omega}-\vec{c}+\vec{x})) \longrightarrow 0$$

para todo $0 \le \vec{x} \le \vec{c}$. Entonces $\dim \tau_A^{-2}\mathcal{O}_X(\vec{c}) = \begin{bmatrix} & 1,1,1 & \\ 2,1,1,1,1 & & \\ & 1,1,1 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 0,0,1 & \\ 0,0,0,1,1 & & \\ & 0,0,1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1,1,0 & \\ 2,1,1,0,0 & & \\ & 1,1,0 & \end{bmatrix}$

De hecho podemos expresar $\tau_A^{-2}\mathcal{O}_X(\vec{c})$ como $\tau_{A_e}^{-1}(\mathcal{O}_X(\vec{c}-\vec{\omega}))$ usando la transformación de Coxeter ϕ_e asociada a A_e. De hecho tenemos

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & -1, & -1 \end{bmatrix}$$

y aplicando la matriz anterior a $\tau_A^{-2}\mathcal{O}_X(\vec{c})$ tenemos el vector dimensión;

$$\begin{bmatrix} & 2, & 1, & 1 & \\ 4, & 2, & 1, & 1, & 0 \\ & 2, & 1, & 1 & \end{bmatrix}.$$

B I B L I O G R A F I A.

1.- A.A. Beilinson, "Coherent sheaves on $\mathbb{P}_n$ and problems of linear algebra", Funct. Anal., Appl., vol 12, pag. 214-216, 1979.

2.- D. Baer "Tilting sheaves in representation theory of algebras" Manuscipta Math. 1988 pag. 323-347

3.- I. Dolgachev, "Weighted projetive varieties", Group actions and vector fields, pag. 34-71, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982. Lecture Notes in Mathematics 956.

4.- W. Geigle and H. Lenzing "A class of weighted projetive curves arinsing in representation theory of finite dimensional algebras", Fachbereich Mathematik-informatik.

5.- R. Godement, théorie des faisceaus, Hermann, Paris 1973.

6.- A. Grothendieck, Eléments de géométrie II, Publications Mathématiques 8, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris 1961

7.- A. Grothendieck, Eléments de géométrie III Publications Mathématiques 11, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris 1961

8.- D.Happel, "triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras". Conm. Math. Helv., 1986.

9.- D Happel and C.M. Ringel, "The derived category of tubular algebra", Representation theory I, Finite dimensional algebras pag. 156-180, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1986. Lecture Notes in Mathematics 1177.

10.- R.Hartshorne "Residues and Duality", Leatures Notes in Mathematics 20 Springer-Verlag, berlin-Heidelberg-New-York, 1966.

11.- R. Hartshorne "Algebraic Geometry", Graduate Texts in Mathematics 52 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1977.

12.- H. Lenzing . "Curve singularities arising from the representation theory of tame hereditary Artin algebras". Representation theory I.Finite dimensional algebras, pag. 199-231, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986. Lectures Notes in Mathematics 1177.

13.- H. Lenzing and José Antonio de la Peña, " Wild canonical algebras " Funct. Anal., Appl., vol 12, pag. 214-216, 1979.

14.- M. Ringel, "Tame algebras and quadratic forms", Springer, Berlin-Heildelberg-New York 1984 . Lectures notes in Mathematics 1099.

15.- J. P. Serre "Faisceaux algébriques cohérents". Annals of Math., vol 61 pag. 197-278, 1955.

16.- C. S. Seshadri, "Fibres vectoriels sur les courbes algébriques". Asterique, vol. 96 pag. 1-209, 1982.