

88  
24-



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

## DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UNA MAQUINA VIBRATORIA BIAIXIAL PARA FLUJOS GRANULARES

T E S I S  
Que para obtener el título de  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA  
(AREA MECANICA)  
p r e s e n t a n

Julián Jaimes Mojica  
Adán Magaña Ramírez  
Ulises Meza Vázquez

DIRECTOR DE TESIS: DR. BALTASAR MENA INIESTA



México, D. F.

1997

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN  
DE UNA MÁQUINA VIBRATORIA BIAXIAL  
PARA FLUJOS GRANULARES**

**Todo es flujo, nada es estacionario.**  
**Heráclito**

**A aquel que mire al mundo racionalmente,  
el mundo le devolverá a su vez un aspecto racional.**  
**Hegel**

**Sin ansiedad fundamental no hay investigación fundamental.**  
**J. Monod**

**Uno vive con la esperanza de volverse una memoria.**  
**A. Porchia**

**El eterno misterio del mundo es su comprensibilidad.**  
**Albert Einstein**

**Cada creador es un tramoyero.**  
**Vladimir Nabokov**

## ***AGRADECIMIENTOS***

A la **UNAM** por brindarnos una excelente formación académica, espacios abiertos a la cultura y el deporte y el enorme orgullo de ser universitarios.

A la **Facultad de Ingeniería** por cinco años de noches en vela tratando de asimilar los conocimientos recibidos en sus aulas y por la oportunidad de hacer amigos con nuestro mismo defecto: la pasión por la ingeniería.

Al **Instituto de Investigaciones en Materiales** por nuestros innumerables viajes alrededor del mundo vía internet, por las donas de los miércoles, dieciocho meses y pico de beca, sus instalaciones y la oportunidad de conocer gente que ha ido más allá de la curiosidad científica.

A **Fundación UNAM** y a la **DGAPA** por darnos los medios para sobrevivir a nuestro viacrusis en el servicio social y en el trabajo de tesis.

Al **Dpto. de Comunicación de la FI** por el apoyo recibido para la filmación, edición, titulado y producción del video de nuestros experimentos.

Y sobre todo, al **Dr. Baltasar Mena I.** porque a pesar de la eterna insatisfacción que le provocamos como estudiantes, nos propuso un proyecto de tesis; nos brindó un espacio, con todo y su naftalina, para llevarlo a cabo; y lo más importante, mantuvo su apoyo como amigo y maestro, hasta el final.

Finalmente, a **Johnson Controls de México** por ahorrarnos una lana para la impresión de esta tesis.

A mi **DOÑA**, por darme la vida y por enseñarme lo que no aprendí en la escuela, y quien me ha hecho quien soy, aún después de irse.

A mi **PADRE**, por sus consejos, su ejemplo como ingeniero y como hombre; y sobre todo, por su banal e incansable esfuerzo de ser padre y madre a la vez.

A **FALCÓN**, por estar a mi lado dándome su apoyo aún en los momentos más difíciles, por ser la mejor compañera de estudio, la mejor amiga; y por encima de todo, porque al forjarnos un plan de vida juntos, me da el mejor motivo para seguir adelante.

A Oved, Churris, Chela, Beide, Kikis, mis abuelos, mi tía y todos aquellos en mi familia que me tuvieron confianza, me dieron su apoyo y forman parte importante de mi vida.

A Braulio, Alejandro, Yuri, Toñito, Lore, Joseph, Luis y Pablin, Paco, Diana, Virna y a todos mis verdaderos amigos, por ser precisamente eso, mis amigos.

A Julián y Ulises por mantener junto conmigo la esperanza de terminar la tesis, ahora sí, el próximo viernes. ¡Finalmente lo conseguimos!

A todos ellos: MIL GRACIAS.

**ADÁN**

***A mis padres, por todo.***

***A mis hermanos.***

***A quienes de alguna manera me han ayudado.***

***Julián***

**A la memoria de mi abuelita Luisa,  
a mis padres, Placido y Elena,  
a mi familia,  
y al equipo MINI-BAJA UNAM.**

**ULISES**

## ***RESUMEN***

Se presentan, principalmente, el diseño de detalle de una máquina vibratoria biaxial, y los resultados de algunas series de experimentos con materiales granulares sometidos a vibración, llevadas a cabo en dicha máquina una vez construida e instrumentada (capítulos 3 y 4).

Se presentan también, en el capítulo 1, las bases que justifican el presente trabajo y los antecedentes en el estudio y experimentación sobre los materiales granulares sujetos a vibración.

Un aspecto muy importante y necesario, está constituido por la teoría fundamental sobre la naturaleza y comportamiento de los materiales granulares y el flujo granular, la cuál está incluida en el capítulo 2.

Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas de todos los aspectos arriba mencionados.

<b>Introducción</b> .....	1
<b>Capítulo 1. JUSTIFICACIÓN Y ANTECEDENTES.</b>	
1.1. Justificación. ¿Porqué estudiar materiales granulares?.....	4
1.2. Antecedentes en el estudio del comportamiento de materiales granulares sometidos a vibración.....	6
1.2.1. Parámetros relevantes en el estudio de materiales granulares sujetos a vibración.....	6
1.2.2. Apilamiento.....	7
1.2.3. Ondas pequeñas de superficie.....	9
1.2.4. Arqueo.....	10
1.2.5. Ondas grandes de superficie.....	12
<b>Capítulo 2. TEORÍA DE MATERIALES GRANULARES Y FLUJO GRANULAR.</b>	
2.1. Naturaleza de los materiales granulares.....	14
2.2. El estado físico del medio.....	15
2.3. Aspectos sobre el flujo de materiales granulares.....	17
2.3.1. Transferencia de momentum y esfuerzo en materiales granulares.....	17
2.3.2. Esfuerzos de fricción.....	18
2.3.3. Esfuerzos por colisión y traslación.....	21
2.3.4. Combinación de esfuerzos de colisión-traslación y de fricción.....	24
<b>Capítulo 3. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA MÁQUINA VIBRATORIA.</b>	
3.1. Requerimientos generales.....	26
3.2. Diseño conceptual.....	29
3.2.1. Generación de opciones.....	29
3.2.2. Selección de la mejor opción.....	31
3.3. Diseño de detalle.....	34

**Capítulo 4. EXPERIMENTACIÓN.**

4.1. Consideraciones.....39

4.2. Resultados.....40

    4.2.1. Vibración vertical.....41

    4.2.2. Vibración horizontal.....47

    4.2.3. Vibración biaxial.....50

        4.2.3.1. Vibración biaxial a 30°.....51

        4.2.3.2. Vibración biaxial a 60°.....53

**Conclusiones**

**Apéndice**

**Referencias**

## *INTRODUCCIÓN*

El maíz en un silo, la arena en los relojes, la grava suelta en las carreteras y el azúcar en un tazón, son ejemplos de materiales granulares que nos resultan familiares.

Un material granular consiste básicamente de una fase sólida dividida en partículas dentro de un fluido intersticial, generalmente aire. Estos materiales muestran ciertos fenómenos fácilmente observables que son manifestaciones inmediatas de propiedades excepcionales. Por ejemplo, se comportan como sólidos y como líquidos: bajo un esfuerzo cortante débil, se deforman plásticamente; bajo un esfuerzo cortante grande, fluyen. Entonces, los materiales granulares presentan una variedad de comportamientos que en muchas formas difieren de los de otras sustancias, por lo que no pueden ser clasificados simplemente ya sea como sólidos o como líquidos. Esto ha ocasionado la generación de analogías entre la física encontrada en un simple montón de sal y aquella encontrada en complicados sistemas microscópicos. Recientemente, el extraordinario comportamiento de los sistemas granulares ha llevado a cierto número de nuevas teorías y a una nueva era de experimentación sobre dichos sistemas.

Estas teorías y tendencias de experimentación constituyen los diversos intentos para tratar de llegar a la obtención de modelos físico-matemáticos generales para sistemas granulares, ya que en la actualidad se tienen algunos modelos empíricos o que funcionan para casos especiales, pero que distan mucho de acercarse a un modelo general que nos ayude a predecir su comportamiento y a tener un conocimiento más concreto y profundo de estos sistemas.

Dentro de los temas de estudio de los materiales granulares, se encuentra el relacionado con el comportamiento de estos bajo movimientos vibratorios; tema que es de estudio relativamente reciente. Aunque en 1831 Faraday había reportado por primera vez sus observaciones sobre cierto movimiento convectivo que presentaban las partículas de arena sobre una membrana sujeta a vibración, hasta ahora se cuenta con información de tipo experimental que no es muy extensa ni profunda, recopilada básicamente en publicaciones científicas.

Las observaciones de dicha experimentación, nos muestran algunos tipos de comportamiento notorios que presentan las partículas de los materiales granulares para determinadas condiciones de experimentación; es decir, variando las condiciones se presentan cambios substanciales en el movimiento de las partículas, dependiendo de la frecuencia de la vibración, de la cantidad de material, de la amplitud de las oscilaciones, de las diferencias de tamaño entre las partículas, etc.

Ahora bien, nos preguntamos: ¿Qué utilidad puede tener el estudio de materiales granulares? Podemos decir que las vibraciones en un sistema granular son de interés por muchas razones prácticas. En la industria, la vibración es comúnmente usada como un medio de manipulación y transporte de materiales en forma de partículas como productos alimenticios, minerales y productos farmacéuticos. Podemos incluir ejemplos como bandas transportadoras,

tolvas, mesas separadoras, empacadoras, secadoras y reactores de lecho fluidizado. Además, la vibración de un material granular puede jugar un papel muy importante en fenómenos naturales como los terremotos y las avalanchas. Entonces, se puede ver claramente que un entendimiento más profundo acerca de como responde un material granular cuando es sujeto a vibración, puede proporcionar entre otras muchas aplicaciones, valiosa información para el diseño de equipo en ingeniería.

La experimentación estándar sobre vibración en un material granular realizada hasta ahora, consiste de un material granular como arena o pequeñas esferas de vidrio, en un contenedor rectangular o cilíndrico montado en una base rígida que es sujeta a oscilaciones senoidales verticales. Este simple experimento exhibe algunos comportamientos complejos y sorprendentes que deben ser cabalmente explicados. Estos incluyen estados en los cuales la capa de material se comporta como una "nube" de partículas con muy poca estructura o sin ella, y estados en los que la capa de material se mueve coherentemente como una masa y muestra complejos fenómenos de onda.

Como ya se mencionó, todas estas observaciones se han hecho partiendo de experimentación con vibración en sentido vertical y con el fondo del contenedor en forma horizontal, pero todavía no se ha estudiado el fenómeno con vibración en sentido horizontal, mucho menos con la combinación de ambos sentidos y además con variación de la inclinación del fondo del contenedor (o al menos no hay nada publicado al respecto hasta ahora).

Dentro de las publicaciones de algunos autores, al mencionar algunos aspectos que se observan dentro de la experimentación, se hace referencia a la presencia de cierta aceleración horizontal, producto de la imposibilidad de tener un movimiento vertical puro, perfectamente controlable. De esta manera, cabe preguntarse si de alguna forma el movimiento horizontal influye de manera importante en los fenómenos observados y que comportamiento se presentará, si provocamos un movimiento de este tipo, pero perfectamente controlado.

Así, algunos objetivos del presente trabajo se relacionan con el diseño y construcción de una máquina vibratoria biaxial que sea capaz de proporcionar vibraciones controlables en frecuencia y amplitud, tanto en sentido vertical, horizontal, y en una combinación de ellos; existiendo también la posibilidad de que la base del contenedor pueda ser inclinada a diferentes ángulos (15°, 30° y 45°, por ejemplo). Además, se inicia una nueva línea de experimentos que por primera vez se efectúan con las excitaciones mencionadas.

Esta tesis se estructura en cuatro capítulos:

En el primero se presentan los aspectos que justifican el trabajo desarrollado, así como los antecedentes en el estudio de los materiales granulares sujetos a vibración. Se explican los parámetros más significativos en su estudio y se hace un resumen de los tipos de comportamiento principales que se han observado por otros investigadores.

El segundo capítulo contiene la teoría fundamental sobre los sistemas granulares y el flujo granular. Se pretende, mediante ciertos conceptos, dar una idea general acerca de la naturaleza de estos materiales y sus peculiares características, no tan simples como las de otros estados de la materia.

El tercer capítulo trata sobre el proceso de diseño y construcción de la máquina vibratoria biaxial. Se presenta en detalle el diseño a que se llegó después de elegir la opción más conveniente de entre las diferentes propuestas, y se presenta también, en algunas fotografías, el modelo físico construido.

Dentro del cuarto capítulo se dan a conocer las observaciones hechas en los experimentos y los resultados obtenidos. Se trata de buscar relaciones entre las variables críticas, para así tener más elementos cualitativos y cuantitativos sobre el fenómeno, que puedan acercarnos a una mejor comprensión de éste, enriqueciendo un poco más el conocimiento de los sistemas granulares.

Finalmente se presentan las conclusiones a las que llegamos con el trabajo realizado, que esperamos y confiamos podrán ser de alguna utilidad para la continuación de este estudio.

## JUSTIFICACIÓN Y ANTECEDENTES

## 1.1 JUSTIFICACIÓN. ¿PORQUÉ ESTUDIAR MATERIALES GRANULARES?

Como primera impresión, la física de un montón de granos parece simple. Evidentemente, las masas de las partículas individuales son lo suficientemente grandes para decir que la mecánica clásica es todo lo relevante en su dinámica, y la energía térmica,  $k_B T$ , no es importante ( $k_B$ , constante de Boltzmann;  $T$ , temperatura). También, las fuerzas entre granos son generalmente repulsivas, y la cohesión es despreciable. Además, la forma de las partículas en muchos casos no afecta el comportamiento cualitativo del material, así que estas pueden ser tratadas como masas puntuales. Finalmente, un amontonamiento del material consiste de muchas partículas, por lo que se pueden utilizar métodos estadísticos. ¿Qué es entonces lo que hace extraordinaria a la física de estos materiales?

Es tentador pensar en cada grano de un material granular como una gran molécula en un gas o líquido ordinario, pero esta aproximación tiene problemas porque es inmediatamente evidente que las partículas no se están moviendo, excepto debido a distribuciones globales del flujo. Un ejemplo es la ocurrencia del "arqueo"<sup>1</sup>. El arqueo no puede ocurrir en un líquido o en un gas, donde el continuo movimiento de las partículas no permite la formación de configuraciones estáticas durante ningún periodo de tiempo apreciable. La distribución de fuerzas dentro de un material granular estará modificada entonces por la presencia de este fenómeno, de manera tal, que las propiedades de un líquido o gas no lo permitirían.

El flujo granular no ocurre de una manera Newtoniana (como se aprecia en la figura 1.1). En analogía con las ecuaciones de Navier-Stokes de la hidrodinámica, una aproximación aceptable debe tratar los fenómenos de dependencia temporal en materiales granulares sobre bases de una descripción mecánica de un medio continuo. Sin embargo, este procedimiento está lleno de dificultades y lleva a inestabilidades en las ecuaciones. La implementación de tal aproximación es aún más difícil que lo que ya de por sí es para los líquidos.

La mayor parte del trabajo realizado hasta ahora se ha enfocado sobre un caso particular, es decir, flujo completamente desarrollado en estado estacionario, el cual es de amplia importancia en aplicaciones industriales. Hasta hace poco, las propiedades dependientes del tiempo en flujo granular han sido casi completamente inexploradas. Ya se dispone de un extenso desarrollo matemático para la descripción de flujos en estado estacionario basados en los métodos de la mecánica del medio continuo [1], [3]. Además, mejoramientos más recientes a esta aproximación han introducido exitosamente herramientas estadísticas de la teoría cinética de los

<sup>1</sup> Arching o vaulting. Concepto que será explicado con detalle más adelante

gases. Estas últimas investigaciones han considerado modelos de energía y distribuciones de esfuerzo, resultado de colisiones en un gas denso de partículas esféricas idealizadas, o partículas en forma de disco. Sin embargo, como se ha señalado, existen importantes diferencias con las suposiciones usuales de la teoría cinética clásica de los gases: las colisiones entre partículas sólidas son, en general, inelásticas [4], [5]. Esto significa que el estado natural de equilibrio es una configuración estática con una temperatura granular de cero absoluto. Las colisiones y fluctuaciones de velocidad en un flujo granular pueden incrementarse solamente a partir de gradientes en el perfil promedio del flujo, el cual debe haber sido originado por fuentes externas de energía, tales como fuerzas cortantes. Gran parte del trabajo analítico ha sido complementado con simulaciones de computadora a gran escala (referencias 3, 6 y 7), que permiten la evaluación directa del tensor de esfuerzos y perfiles de flujo.

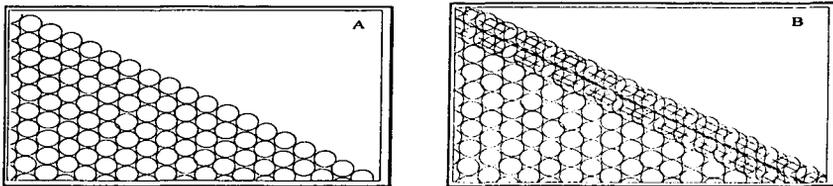


Figura 1.1. Un montón de granos en reposo (A) y durante una avalancha (B). El montón fue estable hasta que la inclinación se incrementó por arriba del ángulo máximo de estabilidad. La capa de granos que participan en la avalancha es la región rayada de la figura (B).

En general, si queremos conocer la física fundamental de un sistema, comenzamos por estudiar sus excitaciones. En el presente caso, las excitaciones de interés serán las vibraciones. A baja amplitud, como con la mayoría de otros sólidos y líquidos, las vibraciones constituyen las ondas sonoras; a amplitudes más grandes originan reacomodamientos en la estructura del material lo suficientemente grandes para cambiar la forma global, por ejemplo, de un montón de arena. Tanto a grandes como a pequeñas amplitudes, las vibraciones causan fenómenos normalmente no observados en otro tipo de materiales.

Ahora bien, algunos aspectos son de aplicación práctica inmediata y de importancia tecnológica. Muchas industrias, tales como la industria farmacéutica dependen del procesamiento de polvos; la construcción de carreteras, diques y presas, dependen de la manipulación de grandes cantidades de grava y arena; grandes volúmenes de mercancías como harina, granos y minerales son transportados, procesados y almacenados. De gran importancia en el diseño de equipo para manipular estos materiales son las propiedades de flujo y equilibrio de la materia granular. Con el fin de obtener aislamiento contra las vibraciones o absorción de choques, las estructuras son frecuentemente empotradas en contenedores llenos de arena. Además de esto, cierto número de

procesos geológicos tales como derrumbes, avalanchas de nieve, y, en cierto grado, el movimiento de las placas tectónicas, pueden estudiarse dentro del contexto de los materiales granulares.

La segregación de mezclas de diferentes tamaños de partículas mediante sacudimiento tiene aplicaciones prácticas importantes. Por ejemplo, después de transportar cereales, uno normalmente encuentra las hojuelas más grandes cerca de la parte más alta de la caja. En contraste con un líquido, en donde la agitación generalmente originará una mezcla más homogénea, en un sistema granular las partículas más grandes se irán hacia arriba, incluso para diferencias de tamaño muy pequeñas o para granos grandes substancialmente más densos.

A partir de todo lo anteriormente expuesto, se puede notar que el estudio de los materiales granulares se encuentra a un nivel de observación experimental, por lo que es un tema con grandes oportunidades de exploración, para que con base en un conocimiento más profundo, se puedan proponer nuevas teorías y aplicaciones.

## 1.2 ANTECEDENTES EN EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE MATERIALES GRANULARES SOMETIDOS A VIBRACIÓN.

Como se mencionó anteriormente, han sido realmente pocos los investigadores que hasta la fecha han realizado estudios del comportamiento de materiales granulares sujetos a vibración. Sin embargo, en el presente trabajo se utilizan las mismas variables y parámetros adimensionales que algunos de estos investigadores han definido, con el objeto de establecer las diferencias y similitudes que se presentan entre nuestros experimentos y los que algunos de ellos han descrito.

### 1.2.1 *Parámetros relevantes en el estudio de materiales granulares sujetos a vibración.*

Independientemente del sentido de la vibración, podemos definir las características de ésta en función de la amplitud ( $a$ ), y de la frecuencia en radianes ( $\omega$ ). Del mismo modo, las características del volumen de partículas pueden definirse en función del diámetro de las partículas ( $d$ ), y de la profundidad del volumen de partículas en el contenedor ( $H$ ).

Brennen [8] combinó las variables anteriores para generar dos parámetros adimensionales que permiten describir con mayor facilidad los rangos en los que se presentan los diferentes fenómenos. Estos parámetros son: la aceleración adimensional ( $\Gamma = a\omega^2/g$ ); donde  $g$ , es la aceleración gravitatoria; y el número adimensional de capas ( $N = H/d$ ), que puede interpretarse como el número de capas de partículas en el volumen depositado en el contenedor.

Los estudios de Brennen [9] se realizaron para rangos de  $\Gamma$  entre 1 y 7; así como para rangos de  $N$  entre 1 y 80. Por las características generales que describen a estos fenómenos, y que detallaremos a continuación, este rango se ha llamado Estado Coherente-Condensado ("coherent-condensed state").

En el presente estudio, los primeros experimentos se hicieron dentro de los mismos rangos y utilizando partículas de las mismas características que lo descrito por Brennen en sus trabajos. Todo esto, como se dijo anteriormente, con la finalidad de establecer una base comparativa respecto a investigaciones previas. Posteriormente, se utilizaron partículas más irregulares (lenteja y mijo) con la finalidad de establecer si hay una diferencia considerable en los resultados.

### 1.2.2 Apilamiento (“Heaping”).

El fenómeno de apilamiento (del inglés heaping) fue observado desde el siglo pasado por Faraday [8] y se describe como el apilamiento del material granular, o formación de una pequeña colina, en un lado preferencial del recipiente, o en el centro de éste [11]. En dicho apilamiento, puede observarse claramente un patrón de movimiento convectivo de las partículas, de modo que las que se encuentran en la superficie libre se deslizan hacia abajo (o del centro hacia afuera); mientras que las partículas del fondo se mueven hacia el centro de la colina o hacia la parte alta de ésta, como se aprecia en la figura 1.2

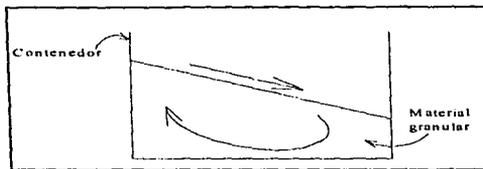


Figura 1.2: Movimiento convectivo de las partículas en el fenómeno de “heaping”.

Brennen encontró, en concordancia con Evesque [12], que el fenómeno de “heaping” se presentaba con  $\Gamma_H \approx 1.2$  independientemente del valor de  $N$  y del tipo de partículas dentro de los rangos estudiados. Con valores de  $\Gamma$  menores que  $\Gamma_H$ , la superficie libre permanece plana, y no se identifica patrón alguno en el movimiento de las partículas. Sin embargo, al incrementar  $\Gamma$  por encima de  $\Gamma_H$ , las partículas comienzan a acumularse en un lado preferencial del recipiente (siempre el mismo) o al centro (experimento de Laroche), presentándose al mismo tiempo un patrón convectivo en el movimiento de ellas. En la figura 1.3 puede verse la formación del heaping en función del tiempo.

Laroche utilizó recipientes de sección cuadrada, rectangular, circular y toroidal, encontrando que el tipo y dimensiones del recipiente tienen poco efecto en el movimiento convectivo de las partículas: En un recipiente ancho la geometría del volumen de partículas se parece a un cono; mientras que en uno angosto, veríamos una rebanada del mismo cono.

La convección de las partículas en el fenómeno de apilamiento tampoco se ha explicado; sin embargo, Laroche propone que el causante de ello es el flujo de aire a través de las partículas

que forman un medio poroso. Evesque [13], en discrepancia con Laroche, propone que el flujo de aire es la consecuencia de la convección y no la causa de esta última.

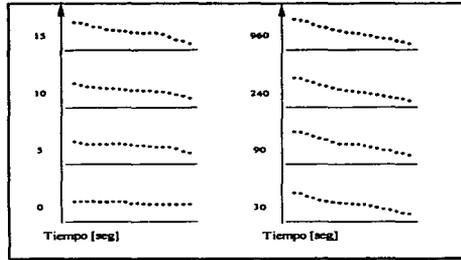
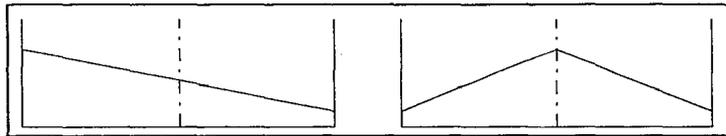


Figura 1.3. Formación del "heaping" respecto al tiempo

No se ha podido determinar porqué la punta del cono se presenta en un lado preferencial del recipiente (ver fig. 1.3a). Aunque Laroche no pone mayor atención en la tendencia de las partículas a acumularse en uno de los lados del recipiente, menciona que la máxima aceleración horizontal producida por el aparato es menor del 0.01%, respecto a la aceleración vertical. Si se considera que Brennen midió aceleraciones laterales de 0.4g cuando la aceleración vertical era de 1.8g, se puede decir que la aceleración horizontal del aparato usado por Brennen era de 22 % respecto a la vertical. Aunque en los experimentos de ambos se nota la acumulación de partículas hacia un lado preferencial del recipiente, en los experimentos de Brennen [9], esta tendencia es mucho mayor.



Apilamiento de Brennen  
vibración horizontal 22% de la vertical

Apilamiento de Laroche  
vibración horizontal 0.01% de la vertical

Figura 1.3a: Comparación entre el apilamiento observado por Brennen y el observado por Laroche; puede verse claramente el desplazamiento de la punta del cono hacia un lado del recipiente cuando las vibraciones horizontales inherentes a la máquina alcanzan magnitudes considerables.

**A partir del planteamiento anterior, se ha propuesto la siguiente hipótesis:**

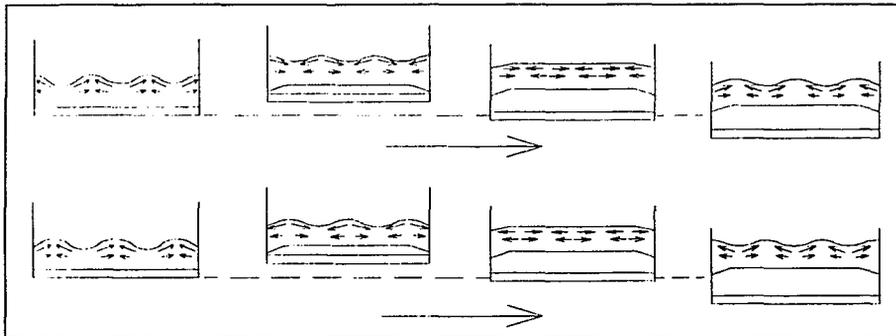
En el fenómeno de apilamiento (heaping), la tendencia de las partículas a acumularse en un lado preferencial del recipiente, se debe a la aceleración horizontal inherente a la inexactitud de los aparatos vibratorios. De modo que si se lograra reducir al máximo la aceleración horizontal, el cúmulo de partículas se debe formar en el centro del recipiente. A medida que esta aceleración se incrementa, el centro del cúmulo se desplazará hacia uno de los lados del recipiente.

***1.2.3 Ondas pequeñas de superficie ("Small amplitude surface waves").***

Si incrementamos  $\Gamma$  hasta un valor aproximado de 2.2 ( $\Gamma_S$ ), aparecerá un nuevo fenómeno, al que Brennen [9] ha llamado "small amplitude surface waves", y que se caracteriza por la formación de ondas de poca amplitud en la superficie libre del volumen de partículas, sustituyendo paulatinamente, al fenómeno de apilamiento.

Brennen encontró que, en un recipiente rectangular, regularmente las crestas de estas ondas bidimensionales se alineaban paralelamente al lado angosto del recipiente. Sin embargo, también se presentaron casos en los que, simultáneamente, se presentaban ondas con crestas paralelas al lado largo.

En la figura 1.4 se puede apreciar como la formación de las ondas se repite cada dos ciclos de vibración, siendo el número de ondas siempre  $n$  o  $n+0.5$ , donde  $n$  es un entero  $> 0$ .



**Figura 1.4:** Vista esquemática del movimiento de las partículas para ondas de superficie pequeñas durante dos ciclos de oscilación.

Se encontró también, que a medida que  $\Gamma$  aumenta, la amplitud de las ondas y la movilidad de las partículas de la superficie libre también aumentan.

Como sabemos, el número de Froude ( $Fr$ ) es utilizado en dinámica de fluidos para relacionar la velocidad de un flujo con la velocidad de su superficie. Brennen graficó el número de Froude, basado en la amplitud de las ondas, contra  $\Gamma$ ; demostrando que  $Fr$  y la amplitud de las ondas se correlacionan bien para valores de  $\Gamma$  superiores a  $\Gamma_S$ . Esto significa que puede establecerse una analogía entre la dinámica de las partículas en este fenómeno y la mecánica clásica de los fluidos.

Finalmente, al igual que en los estudios de Melo [14], Brennen determinó que la amplitud y la longitud de las ondas, aumentan a medida que aumentamos  $N$ ; sin embargo, los valores de éstas permanecen constantes a partir de  $N \approx 7$ .

### 1.2.4 Arqueo ("Arching").

El tercer fenómeno identificable dentro del estado coherente-condensado es el conocido como arqueo. El valor crítico de  $\Gamma$  en el que este fenómeno comienza a presentarse es  $\Gamma_{B1} \approx 3.7$ , conocido también como primera bifurcación. Este nombre lo recibe por la bifurcación que se presenta en la gráfica del tiempo adimensional de vuelo de las partículas como función de la aceleración adimensional (ver figura 1.5). Cabe aclarar que el tiempo de vuelo de las partículas es el período en el que las partículas que forman la capa inferior del volumen, se desprenden de éste (vuelan), a consecuencia de la vibración.

En esta misma figura, podemos observar que existe otro valor crítico ( $\Gamma_{B2} \approx 4.6$ ), conocido como "retorno a tiempo de vuelo único". El fenómeno de arqueo se presenta precisamente entre los dos valores críticos mencionados.

Básicamente, lo que ocurre una vez que sobrepasamos  $\Gamma_{B1}$ , es que las partículas oscilan defasadamente respecto a la frecuencia de vibración, generando de este modo una serie de arcos con características particulares (vea figura 1.6). A la región de los arcos con menor amplitud de oscilación se le ha llamado "nodo". De la misma forma, un "anti-nodo", es entonces la región entre nodos que presenta las mayores amplitudes.

Se observó [9], que a medida que  $N$  aumenta, ambos valores críticos disminuyen independientemente del tipo de partículas. Sin embargo, la diferencia  $\Gamma_{B2} - \Gamma_{B1}$  siempre resulta valores cercanos a 1.6.

Por otro lado, dentro de los valores críticos, fue observado también que podían generarse 2, 1 o 0 nodos. Además, al aumentar  $\Gamma$ , la diferencia de fases, la amplitud de los arcos y la movilidad de las partículas también aumentan.

Cuando se presentan 3 o más nodos, éstos siempre se colocan simétricamente en el recipiente, cuyas paredes coinciden con anti-nodos. Sin embargo, con 1 o 2 nodos, éstos pueden

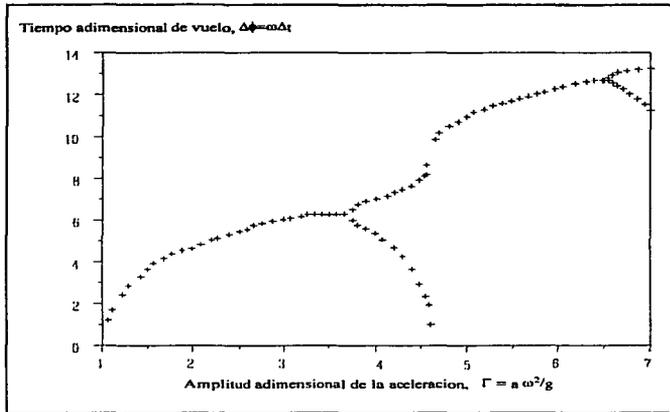


Figura 1.5: Bifurcación en  $\Gamma_{B1} \approx 3.7$  y en  $\Gamma_{B2} \approx 6.6$

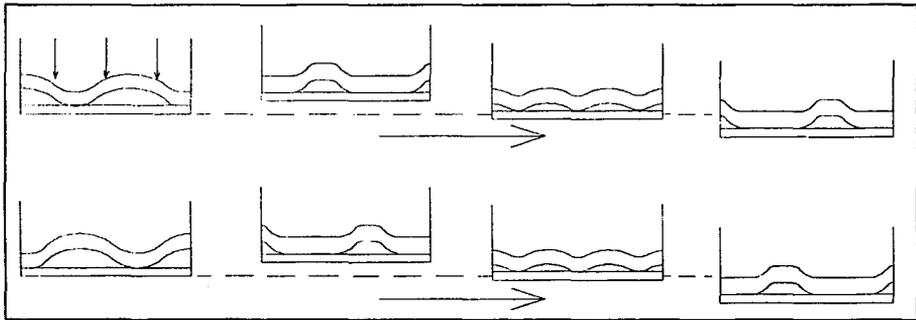


Figura 1.6: Esquema del movimiento del volumen de partículas para un arco con 3-nodos. Las flechas en el primer cuadro indican la localización de los nodos.

presentarse asimétricamente. Otro detalle interesante es que el número de nodos puede alterarse si perturbamos el movimiento de las partículas externamente (con una varilla, por ejemplo). Se notó también, que para  $N$  pequeñas, la presencia de varios nodos representa un estado más estable; mientras que con  $N$  grandes, el arqueo con cero-nodos es el fenómeno más común.

Finalmente, se encontró que las partículas se mueven formando círculos: hacia arriba en los anti-nodos y hacia abajo en los nodos, como se aprecia en la figura 1.7. En el caso de arqueo con cero-nodos, puede apreciarse un movimiento convectivo único muy parecido al que se observa en el apilamiento.

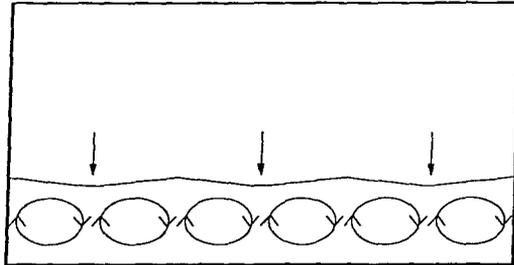


Fig. 1.7: Movimiento convectivo circular de las partículas en arqueo con 3-nodos. Las flechas verticales indican la localización de los nodos

### 1.2.5 Ondas grandes de superficie ("Large amplitude surface waves").

El valor crítico  $\Gamma_L \approx 5.3$  en el que se presenta el fenómeno de ondas de superficie de gran amplitud es cercano al de  $\Gamma_{*B1}$  (descrito en el inciso anterior). Sin embargo se observó [9] que a medida que  $N$  aumenta,  $\Gamma_L$  disminuye, alcanzando un valor constante cerca de  $N=30$ .

De modo similar a las ondas pequeñas, las ondas de gran amplitud se presentan en la superficie libre de las partículas, pero la formación de estas últimas se repite cada cuatro ciclos de vibración en vez de cada dos. Otra diferencia importante, es que las ondas de gran amplitud siempre se forman superpuestas al fenómeno de arqueo con cero, uno y dos nodos. La formación de estas ondas y el movimiento de las partículas puede observarse con mayor detalle en la figura 1.8.

Otra característica de este fenómeno, es que el número de ondas es siempre  $n/2$  (donde  $n$  es entero  $> 0$ ), además de que los anti-nodos se localizan en las paredes del recipiente en todos los casos. El número de Froud en este fenómeno, también se correlaciona con la amplitud, haciéndose constante en un valor cercano a 1.2, al igual que con las primeras ondas.

Es importante recalcar aquí, que el presente trabajo no pretende en modo alguno, dar explicación a los fenómenos conocidos o a los que en particular se observen. Una vez construida la máquina vibratoria, el objetivo fue simplemente observar, describir y publicar los fenómenos que se presentaron, para que en un futuro, esta información se utilice en nuevas investigaciones que expliquen los fenómenos sobre bases teóricas, o bien, para dirigirlos a aplicaciones prácticas.

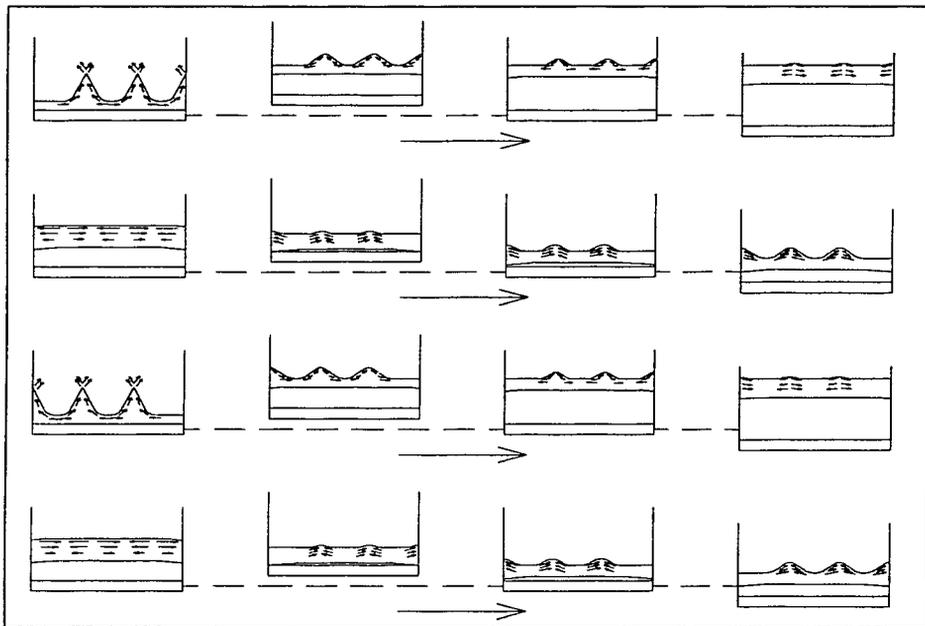


Figura 1.8: Vista esquemática del movimiento de las partículas en ondas grandes de superficie y arco de 0-nodos

### TEORÍA DE MATERIALES GRANULARES Y FLUJO GRANULAR

Se mencionó en el capítulo previo que es muy poco lo que se sabe a la fecha sobre materiales granulares. Esta afirmación incluye por supuesto a las ecuaciones que permitan un acercamiento al modelado de sus fenómenos. En el presente capítulo se mencionan algunas aproximaciones matemáticas que modelan la respuesta del material a los diferentes tipos de esfuerzo a los que puede estar sometido. Del mismo modo, se introducen también algunos parámetros que permiten caracterizar a dichos materiales, tales como densidad y espaciamento.

El objetivo de este trabajo es el de obtener resultados experimentales cualitativos que permitan plantear nuevas hipótesis sobre las condiciones que determinan el comportamiento de los materiales estudiados. El diseño y construcción de la máquina, en este sentido, no son más que el medio para llegar al objetivo final: la realización de los experimentos, obtención y análisis de los resultados.

De igual manera, las ecuaciones y conceptos que se plantean en este capítulo, constituyen los fundamentos teóricos indispensables para acercarse a la comprensión de la física de medios granulados, y es por esto que decidimos incluirlos; sin que ello implique su aplicación específica a un estudio cualitativo como el que aquí se presenta.

#### 2.1 NATURALEZA DE LOS MATERIALES GRANULARES

Durante mucho tiempo hemos estado acostumbrados a dividir los estados de la materia en gases, líquidos y sólidos. Los materiales granulares se apartan esencialmente de estos límites preestablecidos porque presentan manifestaciones inmediatas de sus excepcionales propiedades. A diferencia de los líquidos, un sistema granular se mantiene estacionario siempre y cuando la inclinación de su superficie sea menor que su "ángulo natural de reposo"  $\theta_r$  y no ocurren avalanchas espontáneamente hasta que la inclinación llega al "ángulo máximo de estabilidad",  $\theta_m$ . Cuando este ángulo es ligeramente incrementado los granos comienzan a fluir y ocurre una avalancha de partículas; sin embargo, en lugar de que el flujo ocurra a todo lo largo del espesor, como es de esperarse en el caso de un fluido, todo el movimiento ocurre en una capa relativamente delgada cerca de la superficie. Consideremos ahora otro ejemplo simple: un recipiente lleno con un material granular hasta una altura  $h$ . En el caso de un fluido normal la presión en el fondo del recipiente es proporcional a la altura  $h$  del líquido. En el caso granular la presión en el fondo del recipiente, para una altura lo suficientemente grande, puede llegar a ser independiente de  $h$ , debido a que la fricción entre partículas y las paredes del contenedor llega a contrarrestar el peso de la columna de partículas [1].

Otra característica particular de estos materiales es que presentan un fenómeno llamado "arqueo". Como analogía podemos mencionar la manera en que se construyen cúpulas, la cual depende de la exacta colocación de una "piedra angular" que permite la creación de vastos espacios vacíos (claros). En una configuración aleatoria de granos, existirán lugares donde aparezcan "arcos" naturalmente, de tal forma que dejen espacios vacíos por debajo de ellos. Los materiales granulares son inherentemente heterogéneos, y la red de fuerzas que estabiliza al sistema es también no uniforme.

Podría decirse que los materiales granulares ocupan una posición intermedia entre sólidos y fluidos. En primer término, no son fluidos debido a que pueden soportar un esfuerzo cortante sin deformarse. Por otra parte, éstos pueden soportar grandes deformaciones y subsecuentemente recuperar estados anteriores. Por esto, ninguna relación constitutiva para estos materiales sería capaz de describir la resistencia estática al corte y el flujo a la vez. Desde el punto de vista de la teoría de la plasticidad, se considera que el flujo ocurre tan pronto como se satisface cierta condición de fluencia. Esta teoría propone relaciones lineales entre incrementos en la deformación e incrementos en el esfuerzo. Un ejemplo es la transición del comportamiento sólido al comportamiento fluido observado cuando se supera el ángulo máximo de estabilidad, mencionado anteriormente.

## 2.2 EL ESTADO FÍSICO DEL MEDIO

Además de las consideraciones acerca del estado físico de las partículas, mencionadas anteriormente, se considera que la densidad volumétrica del medio  $\rho$  sea tan grande tal que el promedio de espaciamiento entre granos vecinos "s" sea siempre menor que el diámetro medio "d" del grano. Si "s" es el promedio de separación entre superficies de granos vecinos, como se ilustra en la figura 2.1 entonces asumimos que

$$s \ll d \quad (2.1)$$

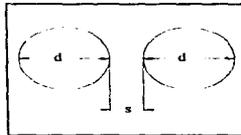


Figura 2.1 El promedio de separación entre granos vecinos, de diámetro  $d$ , se designa como  $s$ .

Cuando consideramos la ecuación anterior (2.1) podríamos realizar una simplificación en las ecuaciones del movimiento, la cual resulta del hecho de que la densidad  $\rho$  es casi constante. La dependencia de  $\rho$  sobre "s" es

$$\rho \approx \frac{m}{(s+d)^3} \quad (2.2)$$

y si consideramos la condición 2.1.

$$\rho \approx \frac{m}{d^3} \quad (2.3)$$

en donde m es la masa.

Esto tiene la ventaja de que las derivadas de la densidad pueden ser igualadas a cero, con una importante reducción en la complejidad de las ecuaciones.

Por otra parte, podemos anticipar que el proceso de transporte de momentum involucrará una parte de colisión, proporcional a  $s^{-1}$ . Debido a que  $s^{-1}$  puede variar en un intervalo de entre  $d^{-1}$  e infinito y aún así satisfacer la ecuación, es obvio que las propiedades de transporte son muy sensibles a los cambios en  $s$  y, así, de la densidad. Las pequeñas variaciones que existen en la densidad ocasionan pequeñas variaciones en los términos de inercia y estos pequeños cambios son críticos para describir el transporte de varias cantidades físicas del medio granular.

Debe también notarse que la ecuación 2.2 es solo cierta en términos de promedio. Esto es, no tiene que existir una relación uno a uno entre el parámetro de espaciamiento "s" y la densidad  $\rho$ . Para altas concentraciones, la manera en que el grano se compacta influirá en la densidad. Con esto, en principio,  $\rho$  puede ser descrita como una función tanto de  $s$  como de un número de coordinación local "v" (fracción volumétrica de sólidos).

Otra consideración importante es que a pesar de que requerimos que  $\rho$  sea grande de tal manera que se cumpla que  $s \ll d$ , no es posible llegar al límite de  $s=0$ . En cada colisión ocurrida, por supuesto, la separación entre granos colindantes se vuelve cero; sin embargo "s" en un punto nunca será cero ya que está definida como el promedio de la separación entre granos de una vecindad de ese punto. Si en realidad en cierta porción del volumen  $s \rightarrow 0$ , entonces la reología del flujo es dominada por esfuerzos de fricción únicamente. Para  $s=0$  los granos no perderán contacto entre sí por largos periodos de tiempo y se deslizan unos sobre otros. Para  $s \neq 0$  los granos rebotan continuamente entre sí como moléculas en un fluido. Por supuesto existen situaciones en las cuales la condición de  $s=0$  se cumple, por ejemplo en un montón de granos en reposo.

Es importante remarcar el papel que juega el fluido intersticial. Estrictamente hablando, si consideramos que este no afecta el comportamiento del flujo, sería decir que en realidad no existe en los intersticios. Sin embargo, se espera que los efectos de un fluido intersticial sean muy pequeños si la viscosidad efectiva, debida a las colisiones grano-grano, es substancialmente más grande que la viscosidad del fluido intersticial. Para granos lo suficientemente densos, esta condición se cumple cuando el fluido intersticial es aire. (Podemos notar que, por el contrario, en ciertos casos el fluido intersticial puede tomar parte importante en la transferencia de momentum, como el caso de lechos fluidizados).

## 2.3 ASPECTOS SOBRE EL FLUJO DE MATERIALES GRANULARES

### 2.3.1 Transferencia de momentum y esfuerzo en materiales granulares

El esfuerzo generado en un conjunto de partículas sólidas está fuertemente influenciado por la naturaleza del fluido que llena los intersticios. Las partículas reflejan las propiedades reológicas de este fluido, modificado por la suspensión de partículas sólidas. Sin embargo, cuando hablamos de la mecánica de materiales granulares nos referimos, por lo general, a casos en los cuales el esfuerzo generado por el fluido es despreciable, y está primordialmente asociado con el contacto entre partículas. Esto es considerado generalmente cuando el fluido intersticial es un gas. Con base en esto podemos decir que los esfuerzos se generan por tres mecanismos:

- (i) Transporte de momentum acompañado por traslación de partículas, entre capas de movimiento relativo.
- (ii) Transporte de momentum por colisiones entre partículas de capas en movimiento relativo, y
- (iii) Fuerzas entre partículas en los puntos de contacto sostenido.

El primer mecanismo, que se asemeja al transporte molecular de momentum en gases, es dominante cuando la fracción volumétrica de sólidos es pequeña. Cuando la fracción volumétrica de sólidos aumenta, el movimiento de las partículas se vuelve más restringido y los mecanismos segundo y tercero, antes mencionados, son dominantes. El segundo mecanismo es análogo al transporte molecular de momentum en líquidos, pero el tercero no tiene una analogía molecular. Éste último difiere de los otros mecanismos en dos aspectos importantes: el primero está asociado con un esfuerzo de fluencia que no desaparece y, segundo, cuando el material comienza a fluir genera esfuerzos los cuales son independientes de la rapidez de deformación. La fluencia está asociada con el comienzo de deslizamiento en los puntos de contacto de partícula - partícula, y así continua ocurriendo cuando la relación fuerzas tangenciales y fuerzas normales en estos puntos excede el límite de fricción. Debido a que éste límite de fuerzas friccionantes es independiente del rango de deslizamiento en los puntos en contacto, la correspondiente contribución de esfuerzos es independiente de la rapidez de deformación.

Cuando la fracción volumétrica de sólidos es grande, los esfuerzos de contacto dominarán, a baja rapidez de deformación y los esfuerzos de colisión dominarán a altas rapidez de deformación.

La teoría de los esfuerzos de contacto o de fricción tiene su origen en la mecánica de suelos y puede atribuirse a Coulomb [15], quien fue el primero en tratar al material granular como un medio continuo que fluye debido a corte en planos donde el esfuerzo cortante  $T$  alcanza un valor relacionado con el esfuerzo normal  $N$  por:

$$T = N \tan \theta + c \quad (2.4)$$

donde  $\theta$  y  $c$  son parámetros característicos del material. Cuando  $c$  es positiva se dice que el material es cohesivo. Hablaremos solo de sistemas no-cohesivos, en los cuales considera  $c = 0$ . El símbolo  $\theta$  es el ángulo natural de reposo del material.

La relación de Coulomb (ec. 2.4) es empírica, y el desarrollo subsecuente de la teoría ha continuado en este camino, complementando correlaciones empíricas de fluencia con relaciones constitutivas empíricas para el movimiento después de la fluencia. Por otra parte, la teoría de la transferencia de momentum de traslación y colisión se ha desarrollado mucho más recientemente y está fundamentada en la teoría cinética. Esta comienza de un punto de vista microscópico del material como un conjunto de partículas.

### 2.3.2 Esfuerzos de fricción

El criterio de fluencia de Coulomb para un plano cortante es equivalente a la proporción entre esfuerzos principales

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} \quad (2.5)$$

y así podemos construir un sector de fluencia ("yield locus") en el plano de los esfuerzos principales, que consiste en un par de líneas rectas que parten del origen, como se ve en la figura 2.2. Entonces la región sombreada corresponde al comportamiento elástico, mientras la fluencia ocurre exactamente en las líneas.

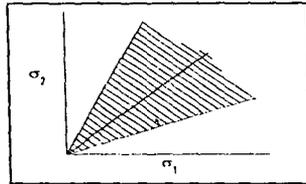


Figura 2.2 Sector de fluencia de Coulomb en el plano de esfuerzos principales

Las pruebas de fluencia son llevadas a cabo en un aparato plano - cortante, como en el medidor de Jenike, o por el llamado método triaxial [16]. El punto de fluencia, determinado por una combinación de estos métodos, no corresponde exactamente a la forma de Coulomb (ec. 2.4) y depende fuertemente del grado de compactación al cual el material ha sido sometido. Formas típicas de esto se muestran en la figura 2.3, la cual muestra un diferente sector de fluencia para

cada valor de fracción volumétrica de sólidos  $v$ . Estos están dibujados como ciclos cerrados, pero para grandes valores de compactación  $v$  bajo esfuerzo isotrópico, que corresponde al punto donde el sector cruza la diagonal principal, requiere de esfuerzos muy grandes y las partículas pueden quebrarse antes que dicho punto sea alcanzado. El rápido incremento en el esfuerzo de fluencia con el grado de compactación mostrado en la figura 2.3 es una propiedad característica de los materiales granulares.

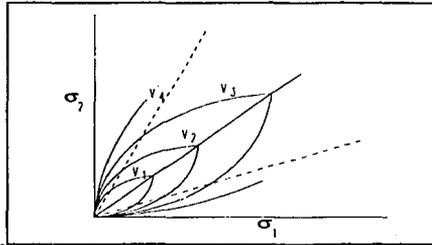


Figura 2.3 Sector de fluencia en el plano de esfuerzos principales para varias fracciones volumétricas de sólidos (resultados experimentales).

Un segundo aspecto importante fue reconocido por Reynolds [17], quien notó que la densidad volumétrica del material cambiaba mientras este se deformaba. Específicamente, observo dilatación, pero pueden ocurrir dilatación y compactación, dependiendo de los valores relativos de los esfuerzos principales y de la densidad volumétrica. Puesto que el cambio en la densidad volumétrica está acompañado por un cambio en la "fortaleza", un material puede "reforzarse" o "debilitarse" durante la deformación. La deformación de un material de baja densidad volumétrica bajo cargas relativamente altas, está acompañada por una compactación y por un reforzamiento, mientras que la deformación de materiales con gran densidad volumétrica bajo cargas relativamente bajas está acompañada por dilatación y un debilitamiento.

Las teorías constitutivas para esfuerzos friccionantes caen en dos clases principales. La primera, que está basada directamente en la teoría de Coulomb, pretende representar la deformación del material como una superposición de rotaciones y planos cortantes en aquellas superficies donde la relación entre esfuerzo tangencial y esfuerzo normal ha alcanzado el valor límite de  $\tan \theta$  prescrito por la condición de fluencia de Coulomb. Los cambios en la densidad volumétrica durante la deformación no aparecen como una consecuencia natural de esta clase de teorías, pero pueden ser incluidos suponiendo que el "corte" sobre cada plano deslizante está acompañado por una expansión o contracción en una dirección normal al plano.

En contraste con esto, los cambios en la densidad volumétrica durante la deformación son un aspecto inherente en las teorías del segundo tipo, basadas en la teoría de la plasticidad. En

estas, la proporción entre el tensor de deformación y el tensor de esfuerzos están relacionados por la regla del flujo potencial plástico [18], el cual puede ser formulado como sigue en términos de sector de fluencia en el plano de esfuerzos principales.

- (i) Los ejes principales de rapidez de deformación están alineados con los del esfuerzo, con el eje del rango principal de deformación mayor paralelo al eje del esfuerzo principal menor.
- (ii) La relación de rangos de deformación principales es igual a la relación entre los componentes de la "normal hacia adentro" para el sector de fluencia en el plano de esfuerzos principales.

La figura 2.2 muestra la normal interior para un sector de fluencia del tipo de Coulomb. De la condición (ii) anterior, la proyección de este vector sobre la diagonal principal es proporcional a la traza del tensor rapidez de deformación; o sea, es proporcional a la divergencia del campo de velocidades. Debido a que esta proyección es siempre positiva, nos lleva a que la fluencia esté siempre acompañada por una dilatación del material, contrario al comportamiento en el que se observaba compactación o dilatación. Además la disipación de calor por fricción en un material de Coulomb es cero, lo que se contrapone con la idea de deslizamiento friccionante.

Un método para resolver todas estas dificultades fue sugerido por la escuela de suelos de Cambridge [19]. Este método reconoce que la fortaleza del material granular debe representarse por un parámetro único de superficies de flujo, uno para cada valor de fracción volumétrica de sólidos, como se mostró en la figura 2.3. Una parte de este parámetro se muestra en la figura 2.4, donde se dibujaron normales interiores en tres posiciones. Sus proyecciones sobre la diagonal principal son positivas para  $n_1$ , negativas para  $n_2$  y cero para  $n_c$ . Por esto cuando el flujo se produce en 1 el material se dilata, en el punto 2 se comprime, mientras que en el punto c se deformará sin un cambio en el volumen. Se acostumbra llamar al punto c como "estado crítico". Además existe otro estado crítico en c', con los esfuerzos mayor y menor intercambiados. Por esto el sector de fluencia está dividido en dos partes por los estados críticos; una parte "dilatante" entre los estados críticos y el origen, y una parte "compactante" más allá de los estados críticos. En la figura 2.3 el lugar donde se localizan los estados críticos es mostrado por las líneas punteadas.

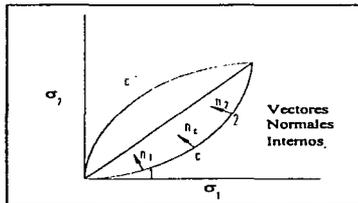


Figura 2.4 Regla del flujo potencial plástico en relación al sector de fluencia.

El efecto del comportamiento descrito es el movimiento rápido del material hacia un estado crítico cuando este se deforma, y así, para materiales en deformación continua puede ser una buena aproximación suponer que estos se encuentran siempre cerca de su estado crítico. Esto significa que el punto que representa los esfuerzos principales se encuentra cerca del sector de estados críticos, así que suponiendo este sector como un par de líneas rectas, como se indica en la figura 2.3, puede asegurarse que los esfuerzos satisfacen la condición de Coulomb, con una buena aproximación, durante deformación continua.

### 2.3.3 Esfuerzos por colisión y traslación

Así como el mecanismo de transferencia de momentum por colisión y traslación es similar al de transferencia molecular de momentum en fluidos, no existe una analogía para la agitación térmica. Para un conjunto de partículas, los componentes aleatorios de la velocidad de las partículas son generalmente debidos a colisiones causadas por la misma deformación, las cuales decaen rápidamente cuando la deformación cesa.

Los primeros estudios sobre esfuerzos de colisión fueron realizados por Bagnold [20], quien midió los esfuerzos normales y tangenciales generados en un aparato de Couette por una suspensión de igual densidad de partículas sólidas grandes. Si bien la viscosidad del fluido juega una parte muy importante a baja rapidez de corte, Bagnold identificó un "régimen de inercia de los granos" a alta rapidez de corte, en el cual la transferencia de momentum debido a las colisiones entre partículas fue la mayor contribución al esfuerzo. Bagnold puntualizó que la frecuencia de colisiones y la transferencia de momentum por colisiones entre partículas de capas adyacentes eran proporcionales a la rapidez de corte. Así, los esfuerzos normales y de corte deberían estar generados, de acuerdo con sus observaciones experimentales, con una magnitud proporcional al cuadrado de la rapidez de corte [21].

Posteriormente Mctigue elaboró este argumento para crear relaciones constitutivas para formas generales de deformación. Los modelos de Mctigue muestran la dependencia cuadrática del esfuerzo a la rapidez de deformación en un plano de corte, pero la magnitud de los esfuerzos predichos es mucho menor que la observada por Bagnold y su dependencia en la fracción volumétrica de sólidos no está bien representada. Mctigue ignoró la componente fluctuante de la velocidad de la partícula, pero fue introducida empleando argumentos de la teoría cinética, por Savage y Jeffrey [22], quienes fueron capaces de explicar mejor los resultados de Bagnold.

Un avance mayor en la teoría de esfuerzos por colisión fue reconocer que el valor cuadrático promedio  $\langle c^2 \rangle$  de las fluctuaciones de la velocidad de la partícula o, análogamente, una "temperatura de partícula"  $T_p$ , definida por  $T_p = (1/2)\langle c^2 \rangle$  estaría propiamente determinado por una "Ecuación de Energía Pseudo - Térmica" la cual complementa las ecuaciones de continuidad y momentum. Esta es una ecuación de balance de la energía de las fluctuaciones aleatorias, pero a diferencia de la ecuación de la Energía Térmica de la mecánica de fluidos molecular, ésta contiene un término de disipación que cuenta en la degradación de ésta energía en energía térmica verdadera como resultado de las colisiones inelásticas entre partículas. Esta idea fue desarrollada independientemente por Jenkins y Savage [23] y por Haff [24] basándose

formalmente en la teoría cinética aplicada a partículas cuasi - elásticas y más tarde argumentándola intuitivamente con la teoría cinética de líquidos.

Las ecuaciones propuestas son las mismas en ambos casos. La ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

y la ecuación de momentum para el movimiento:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.7)$$

y la ecuación de energía "Pseudo-Térmica" que tiene la forma siguiente cuando se escribe en términos de  $T_p$ :

$$\frac{3}{2} \rho \frac{DT_p}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \gamma \quad (2.8)$$

en estas ecuaciones:

$$\rho = \rho_F v \quad (2.9)$$

$\rho$  denota la densidad volumétrica del material,  $\mathbf{u}$  es la velocidad local promedio de las partículas,  $v$  es la fracción volumétrica de sólidos,  $\mathbf{g}$  es la fuerza gravitacional específica,  $\mathbf{q}$  es el vector de flujo de la energía pseudo térmica, y  $\gamma$  el rango de conversión de esta energía por colisiones inelásticas en energía térmica verdadera. Ambos autores suponen que el esfuerzo está relacionado con la rapidez de deformación por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{p - (\kappa - \frac{2}{3}\mu) \text{tr} \mathbf{D}\} \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{D} \quad (2.10)$$

mientras que el flujo de energía es proporcional al gradiente de temperatura de la partícula:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T_p \quad (2.11)$$

Estas dos teorías difieren únicamente en las expresiones constitutivas que proponen para  $p$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$  y  $\gamma$ , que se presentan en la **tabla 1**.

Notamos, en principio, que las expresiones de Jenkins y Savage están más precisamente definidas, pues contienen solo un parámetro sin especificar que llaman  $\alpha$ . Notemos también que las expresiones de Haff omiten el término  $\text{tr} \mathbf{D}$  de los balances de momentum y energía, lo cual es justificable para conjuntos de partículas de alta densidad. Otra ligera diferencia es la aparición de un factor  $1+\epsilon$  en la expresión de Jenkins y Savage para  $k$ , el cual no se presenta en la expresión de Haff. En forma similar un factor  $1+\epsilon$  aparece en la expresión de Haff para  $\gamma$ . Esto no se considera como una discrepancia importante.

Tabla 1. Relaciones constitutivas para esfuerzos de colisión

Cantidad	Jenkins y Savage	Haff
k	$2\rho_p v^2 g_0(v) d(1+e) \sqrt{\frac{T_p}{\pi}}$	$\frac{3\sqrt{(3\pi)} r p_p v_0^2}{(v_0 - v)} d \sqrt{\frac{T_p}{\pi}}$
p	$k \sqrt{\frac{\pi T_p}{d}}$	$tk \sqrt{\frac{\pi T_p}{d}}$
$\mu$	$\frac{1}{5} k(2 + \alpha)$	qk
$\kappa$	$\frac{5}{3} \mu$	$\frac{2\mu}{3}$
$\gamma$	$\frac{(1-e)}{2d^2} \{12kT_p + (3\pi - 4\alpha)kd\sqrt{\frac{T_p}{\pi}}\} \pi d$	$w(1 - e^2)k \frac{T_p}{d^2}$

$\alpha, r, t, q, w$  = constantes adimensionales de orden unitario

$e$  = coeficiente de restitución

$d$  = diámetro de la partícula

$v_0$  = fracción volumen de sólidos mínima

$$g_0(0) = \frac{1}{1-v} + \frac{3v}{2(1-v)^2} + \frac{v^2}{2(1-v)^3}$$

La mayor diferencia entre ambos puntos de vista se observa en la manera en que las distintas cantidades dependen de  $v$ . La expresión de Haff para  $k$  contiene un factor,  $(v_0 - v)$ , donde  $v_0$  es conocido como el valor de fracción volumétrica al cuál las partículas se mantienen en contacto permanente, tal que las colisiones difícilmente ocurren. Debido a que  $p, \mu, \kappa$  y  $\gamma$  contienen  $k$  como un factor, el esfuerzo por colisiones crecerá sin límite a medida que  $v \rightarrow v_0$ , y al mismo tiempo  $T_p \rightarrow 0$ . Por esto, las expresiones constitutivas de Haff aseguran que la energía cinética de las fluctuaciones se vuelve despreciable cuando la compactación es lo suficientemente densa para forzar a las partículas a permanecer en contacto permanente. Por el contrario, la expresión de Jenkins y Savage puede ser evaluada formalmente a valores de  $v$  mucho más grandes que los geométricamente correspondientes a una compactación elevada, y no contiene algún aspecto para distinguir el punto de más alta compactación.

Las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas con la conjunción de las adecuadas condiciones de contorno. En superficies de contacto sólidas existen dos condiciones además de la condición cinemática de velocidad normal igual a cero. La velocidad tangencial  $u$  y su derivada normal  $du/dy$ , evaluadas en la pared, deberá estar relacionada con

$$u(0) - u_w = a \frac{d}{d\phi} \left( \frac{du}{dy} \right)_0 \quad (2.12)$$

donde  $u_w$  es la velocidad de la pared. Aquí  $a$  es un factor adimensional de orden de la unidad, mientras  $\phi$  es un número entre cero y uno el cual mide la reflexión de partículas que colisionan en la pared.  $\phi=0$  corresponde a una reflexión perfecta y  $\phi=1$  se refiere a una reflexión difusa. Existe también una condición de contorno para el flujo de energía que se supone de la forma

$$T_p(0) = \frac{bd}{(1 - e_w^2)} \cdot \left( \frac{dT_p}{dy} \right)_0 \quad (2.13)$$

donde  $b$  es un factor adimensional de orden unitario y  $e_w$  es el coeficiente de restitución por colisiones entre partículas y la pared.

### 2.3.4 Combinación de los esfuerzos de colisión-traslación y los de fricción

Problemas de plano cortante, de flujo entre placas paralelas o flujo por gravedad completamente desarrollado en un plano inclinado, han sido resueltos por varios autores, tomando en cuenta únicamente los esfuerzos de colisión.

Existe cierto tipo de problemas en los cuales no cabe la menor duda de que los esfuerzos dominantes son de tipo friccionante, tales como descarga de materiales a través de toberas, con alta densidad y deformación lenta. Varios autores han resuelto distintos problemas tomando en cuenta únicamente los esfuerzos de colisión, sin embargo es difícil encontrar un problema en el que claramente estos esfuerzos sean los dominantes. La compactación del material debida tan solo a su propio peso es suficiente para asegurar que los esfuerzos por fricción son significativos, y tal vez sean parte dominante del esfuerzo total. Podríamos decir que resultados experimentales para una condición en la cual los esfuerzos de traslación-colisión sean dominantes solo podría lograrse en un ambiente sin gravedad.

Con el fin de tratar con problemas más cercanos a la realidad, como flujos cortantes rápidos, es necesario incluir ambas partes del esfuerzo: fricción y colisión-traslación. Sin embargo, como hemos podido observar, estas dos teorías que forman parte del esfuerzo, son muy distintas en su naturaleza y planteamiento; por esto no está del todo claro como es que podrían ser combinadas. Una primera formulación a este respecto fue hecha por Savage, quien supuso que el tensor total de esfuerzos era la simple suma de las contribuciones de fricción y colisión,

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_c \quad (2.14)$$

con

$$\sigma_f = \sigma_0 I - \sigma_0 \cdot \frac{\text{sen}\theta}{\sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(DD)}} \quad (2.15)$$

y asumiendo que

$$\sigma_c = \left\{ p - \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \text{tr} D \right\} \cdot I - 2\mu D \quad (2.16)$$

que es la forma propuesta por Jenkins y Savage comentada anteriormente.

La idea de simplemente sumar las contribuciones de fricción y colisión puede ser lo suficientemente razonable, debido a que los esfuerzos de fricción tienen la capacidad de "llenar el hueco" entre la contribución por colisión y el esfuerzo aplicado, como ocurre con la presión hidrostática en un fluido.

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA MÁQUINA VIBRATORIA**

**3.1 REQUERIMIENTOS GENERALES**

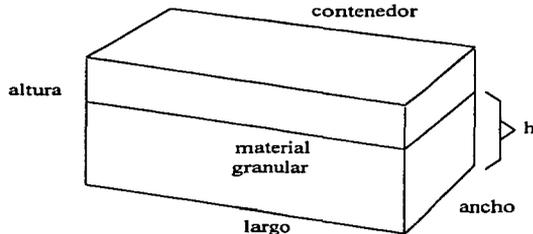
Como se mencionó, se necesita que la máquina vibratoria proporcione los movimientos vertical, horizontal y biaxial del contenedor con la mayor precisión posible.

Después de analizar las variables de mayor importancia en la caracterización de las vibraciones, se acordó establecer los siguientes rangos para cada una de las variables:

Amplitud (a):	$0 < a \leq 15$ (mm)
Frecuencia (f):	$0 < f \leq 35$ (Hz)
Número adimensional de capas (N):	$0 < N \leq 80$

En la amplitud, el rango establecido se refiere al rango operativo. En caso necesario, dicho rango podría incrementarse hasta 5 cm aproximadamente.

Por otra parte, el número adimensional de capas (N) influye en el volumen que el contenedor del material granular pueda tener, ya que recordando que  $N = (h/d)$ , esto es:



Si se llegase a usar un material granular de partículas grandes, por ejemplo de 3 mm de diámetro, y tomando en cuenta un valor máximo de  $N = 50$  para este valor de  $d$ , tendríamos que:

$$N = (h/d) \text{ ---> } h = 50 (3 \text{ mm}) \text{ ---> } h = 15 \text{ cm}$$

También hay que notar que necesitamos diversas inclinaciones de la base que transmite la vibración al material granular, ( a 15, 30 y 45 grados). Esto influye también en la altura de la capa de material dentro del contenedor.

Para que el material no se derrame del contenedor con las vibraciones, es necesario que la altura total del contenedor sea mayor que h, por lo que si se utiliza un contenedor de sección cuadrada, las dimensiones sugeridas basadas en lo anterior son:

$$\text{largo} = 12 \text{ cm} \qquad \text{ancho} = 12 \text{ cm} \qquad \text{altura} = 18 \text{ cm}$$

y la capacidad volumétrica correspondiente es de:  $V = 2592 \text{ cm}^3$ .

Este volumen está relacionado con otro aspecto muy importante a considerar, que es el cálculo del rango permisible de la masa a mover, ya que esto se refleja en la potencia que se requiere para efectuar las vibraciones. Con una densidad del material granular de  $2.5 \text{ g/cm}^3$  (vidrio) y una  $h = 15 \text{ cm}$ , se tiene una masa dada por:

$$m = (12 \times 12 \times 15) \text{ cm}^3 (2.5 \text{ g/cm}^3) = 5.4 \text{ kg.}$$

Asumiendo la máxima densidad de empaquetamiento<sup>2</sup>  $\eta$  ("maximum packing density") con un valor de  $\eta = 0.70$ , la masa real del material granular es:

$$m_{\text{mat gran}} = (0.70) 5.4 \text{ kg.} = 3.78 \text{ kg.}$$

Además de esta masa, se debe considerar la del contenedor, la de los elementos transmisores de potencia (como bielass, rodamientos, etc.), y todavía aún, las fuerzas que se presentan debido a la fricción, ya que aunque se trata de reducir esta última al mínimo, es imposible eliminarla por completo.

Así, (ver apéndice) se hace una estimación de la masa total, fuerzas de fricción y la potencia necesaria, la cual arroja los siguientes resultados:

**Peso máximo a mover (incluye fuerzas de fricción) : 6 kg.**

**Potencia mínima necesaria: 194 W = 0.26 HP**

Por otra parte, sea cual sea la forma y volumen del contenedor, el material del que esté construido debe permitir la visualización sin ningún problema, es decir, debe ser transparente, pero también debe tener efectos nulos sobre el material granular, como son fenómenos electrostáticos y de fricción, principalmente. Además de esto, es obvio que la máquina en conjunto debe permitir una fácil observación del contenedor en cualquier momento, y también una manera sencilla y rápida para depositar y extraer el material granular.

<sup>2</sup> Simulaciones por computadora han confirmado que la máxima densidad de empaquetamiento (fracción volumétrica de esferas) es de  $\eta \approx 0.64$  (ver referencia 1). Asumimos  $\eta = 0.70$  por cuestiones prácticas.

Las consideraciones anteriormente descritas son las que particularmente definen al presente diseño. A continuación mencionaremos otras que intervienen en cualquier diseño de ingeniería, y que por su importancia, deben tomarse siempre en cuenta para dar a éste la mayor calidad posible:

**FUNCIONAMIENTO :** Es de los aspectos más importantes que hay que cuidar, ya que las funciones que la máquina debe efectuar tienen que llevarse a cabo de la mejor manera posible; es decir, que una vez poniéndose en marcha, no sea necesario estar corrigiendo o ajustando detalles propios de su operación, sino sólo aquellos de interés experimental. Se debe lograr un funcionamiento global, es decir, conjuntando todos los subsistemas en un sistema práctico completo.

**PRECISIÓN:** Este aspecto es también primordial en el presente diseño debido a que se requieren movimientos del contenedor sin desviaciones o perturbaciones, de modo que se garanticen en buena medida, las condiciones de los experimentos.

**FABRICACIÓN:** Realizable con las máquinas convencionales existentes en el instituto y con materiales y accesorios de fácil adquisición. Debió ser de la mejor calidad posible, sin que esto representara excesiva dificultad en la manufactura de sus partes y componentes.

**MANTENIMIENTO:** Se intentó reducirlo al mínimo indispensable: limpieza, lubricación y cambio de refacciones y accesorios sujetos a desgaste. Debe poder efectuarse de manera sencilla y rápida y los repuestos deben ser de rápida adquisición; o bien, tener como reserva un número adecuado de ellos.

**VIDA ÚTIL:** Por las características de uso de la máquina, se diseñó para tener una vida útil de media duración (3 años como mínimo), y que pueda ser susceptible a modificaciones o mejoras, ya que se trata de una máquina única con fines de experimentación, no para ser fabricada en serie, por ejemplo.

**ERGONOMÍA:** Se tiene, sin problemas, una clara visualización del contenedor, y más que de éste, del material granular, ya que en él se manifiestan los fenómenos que se estudiarán y que son en sí la finalidad de la experimentación. Otro aspecto es la manipulación de las partes de la máquina, ya sea cada una de ellas o todas en conjunto, en cuanto a que debe ajustarse, ensamblarse, desarmarse o transportarse con facilidad. Por otro lado, es importante considerar también la posibilidad de que sea operada exclusivamente por una sola persona, por lo que los componentes que deban ser movidos por el operario deben diseñarse con dimensiones y pesos que permitan tal manejo; es decir, hay que evitar zonas de acceso difícil, partes no manipulables, etc.

**SEGURIDAD:** La seguridad es siempre importante. En el presente caso se supone que no existen riesgos considerables; sin embargo, se trataron de evitar zonas peligrosas tales como orillas filosas, puntas de tornillos al descubierto; conexiones eléctricas inadecuadas, sustancias tóxicas, etc.

**COSTO:** Como se mencionó anteriormente, se trata de una máquina única con fines no comerciales, sino de experimentación a nivel laboratorio, por lo que se economizó al máximo utilizando materiales, accesorios y equipos comerciales; sin descuidar en modo alguno la calidad deseada puesto que se requiere obtener una máquina confiable.

**MOVILIDAD:** Por último, un aspecto importante es el relacionado con la movilidad de la máquina, y que se refiere a un diseño "compacto" de fácil transportación e instalación de todos los componentes en conjunto. Hay que tomar en cuenta el peso, el grado de dificultad en el ensamble, manipulación, facilidad en las conexiones (eléctricas, mecánicas, etc.), fácil nivelación, etc. Todos estos detalles influyen también en los costos.

### 3.2 DISEÑO CONCEPTUAL

#### 3.2.1 Generación de opciones

En esta etapa de diseño, se propicia la "lluvia de ideas" con la finalidad de obtener varias propuestas para satisfacer los requerimientos planteados. A continuación se muestran esquemas representativos de las que fueron las propuestas más viables y se explica brevemente cada uno de ellos. También se mencionan algunas otras ideas que fueron desechadas desde un principio por las dificultades que presentarían.

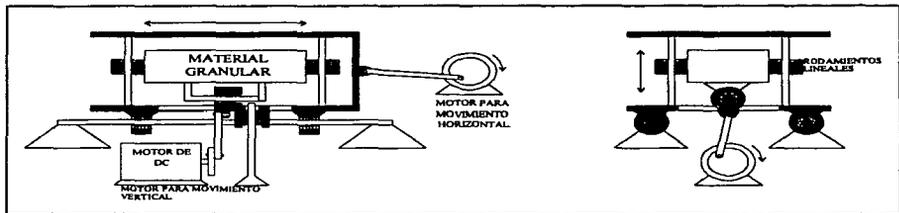


Figura 3.1. Propuesta A

**PROPUESTA A :** El movimiento biaxial se logra al combinar los movimientos horizontal y vertical, que son provocados por dos motores acoplados con mecanismos del tipo biela-manivela y que trabajan independientemente. El contenedor se desliza sobre rodamientos lineales tipo "collarín" con mínima fricción. Los movimientos horizontal puro o vertical puro se logran haciendo trabajar solamente el motor correspondiente.

**PROPUESTA B:** El movimiento también se origina por medio de un motor acoplado a un mecanismo biela-manivela. La idea es la del desplazamiento del contenedor a lo largo de una

barra guía que puede fijarse en diferentes posiciones. El movimiento biaxial se presentará cuando la barra tenga cualquier inclinación, ya que se puede notar que entonces el movimiento tiene una componente horizontal y una componente vertical. Al modificar la inclinación, una componente aumentará en amplitud mientras la otra disminuirá. Obviamente la barra guía puede estar en forma vertical u horizontal.

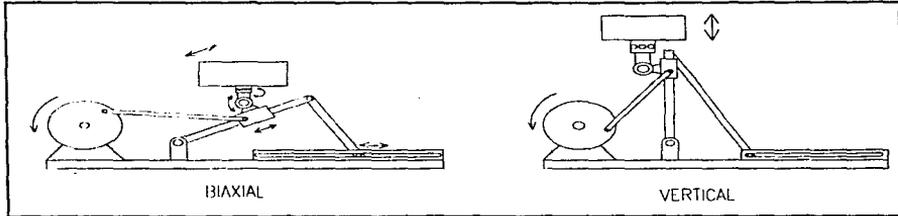


Figura 3.2 Propuesta B.

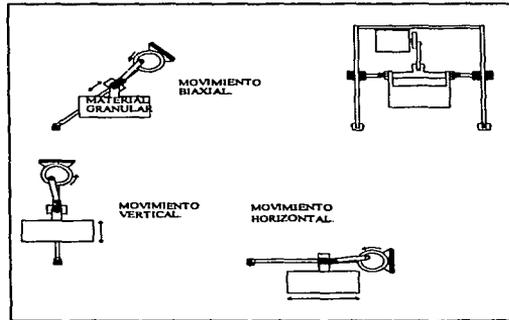


Figura 3.3. Propuesta C

PROPUESTA C: El principio de funcionamiento es muy similar al anterior, pero aquí el contenedor se desplaza en medio de dos barras guía y el motor se encuentra en la parte superior.

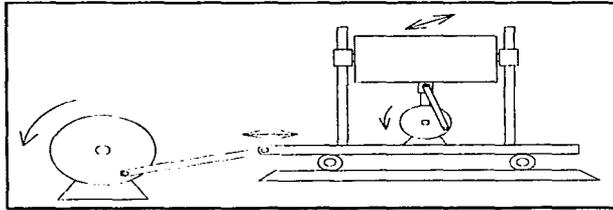


Figura 3.4. Propuesta D.

**PROPUESTA D:** En esta otra propuesta, el motor pequeño provoca el movimiento vertical, mientras que el motor grande provoca el horizontal, moviendo al conjunto formado por el motor pequeño y el contenedor. El inconveniente que puede presentarse es que los efectos de inercia del conjunto afectan significativamente al comportamiento del motor grande, reflejándose en un desgaste excesivo o en un consumo innecesario de potencia, además de que también podría verse afectada la precisión de los desplazamientos.

**PROPUESTA E:** Otra idea, fue la de utilizar dispositivos neumáticos para provocar la excitación del contenedor, pero dadas las características requeridas para las vibraciones, se pudo notar que esta propuesta presentaba mayores dificultades y que, de llevarse a cabo, tendría un costo sumamente elevado, ya que se necesitarían accesorios confiables y precisos, como por ejemplo pistones con carrera regulable, válvulas muy rápidas, etc. Otro gran inconveniente es el hecho de que siempre debe contarse con aire comprimido en el lugar en que se encuentre la máquina vibratoria, dificultándose aún más su operación y mantenimiento.

**PROPUESTA F:** También se propuso utilizar elementos magnéticos para generar el movimiento. El inconveniente en este caso, es que debido a la potencia requerida, los bobinados e imanes tendrían que ser de tamaño y peso considerables. Además, expertos en el ramo, opinaron que existe una probabilidad muy alta de que los elementos magnéticos se neutralicen debido a la generación de corrientes magnéticas inherentes a este tipo de sistemas. Todo esto, aunado al elevado costo de los dispositivos magnéticos, orilló a que la propuesta fuese desechada.

### 3.2.2 Selección de la mejor opción

Evidentemente, en la conceptualización de las propuestas anteriores se tomaron en cuenta seriamente los requerimientos planteados al inicio de este capítulo. Sin embargo, al hacer un análisis más profundo de las ventajas y desventajas de cada una de las propuestas, notamos que podríamos hacer una combinación de las primeras cuatro (de la A a la D), de modo tal, que pudiésemos conjuntar en sólo dos nuevas propuestas, las virtudes de las primeras.

Para llevar a efecto lo anterior, cabe hacer notar que existen similitudes obvias entre las propuestas A y D, así como entre B y C. Tomando en cuenta estas similitudes, surgieron entonces a las propuestas AD y BC que a continuación se ilustran y que se consideraron como definitivas.

#### PROPUESTA AD.

Su principal ventaja radica en la completa autonomía de los movimientos horizontal y vertical. Al hacer uso de dos motores, independientes en su control, podrían variarse en cualquier momento las condiciones de experimentación sin mayores complicaciones. El soporte del contenedor permite una enorme flexibilidad debido a que puede modificarse la inclinación respecto al plano horizontal y su posición respecto a un eje vertical. Se redujeron las dimensiones de la estructura de soporte, que representaban un inconveniente en la propuesta inicial (A). Esto último contribuye a facilitar el llenado y vaciado del contenedor, además de que se mejora por mucho la visibilidad del mismo desde cualquier punto.

Las desventajas de esta propuesta radican principalmente en su costo, como consecuencia del número y precisión de las piezas que se requieren, así como del uso de dos motores. Por otro lado, existen algunos inconvenientes mecánicos que podrían afectar el comportamiento del material granular: para evitar efectos indeseables es necesario que las bielas estén siempre alineadas con el centro de masa del contenedor y esto resulta prácticamente imposible de lograrse con el arreglo propuesto.

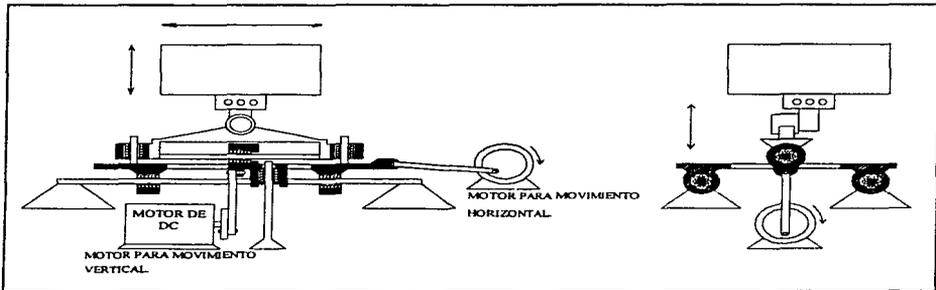


Figura 3.5. Propuesta AD

#### PROPUESTA BC.

En esta nueva propuesta se sustituye el concepto de una o dos barras soporte inclinables, por el de una sola placa soporte también inclinable, de modo que la estabilidad de ésta placa garantice la precisión de los desplazamientos. De la propuesta B, se conserva el uso de la barra móvil que se fija a la estructura principal para asegurar aún más que la posición deseada no se altere. Por otro lado, el motor sería colocado en un costado de la zona de desplazamiento del

contenedor con el fin de reducir vibraciones indeseables, aumentar la estabilidad del contenedor; así como facilitar la fabricación, el ensamble y el posicionamiento durante la experimentación.

Lamentablemente, esta disposición no permite una independencia total de los movimientos horizontal y vertical, pues resulta obvio que uno es dependiente del otro, y éste a su vez, de la inclinación de la placa que soporta al contenedor.

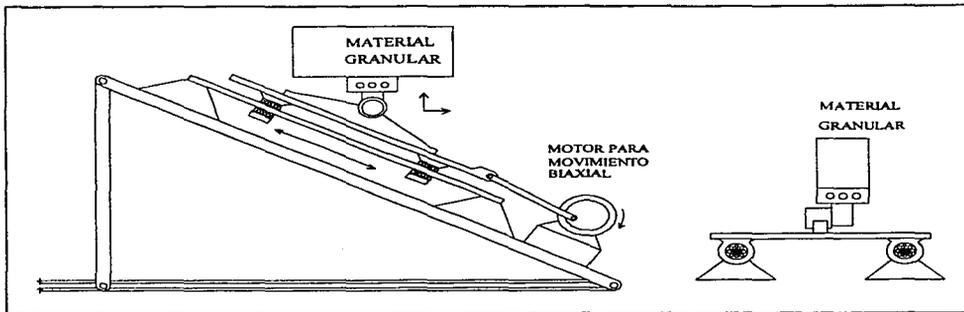


Figura 3.6. Propuesta BC

De lo anteriormente expuesto, resulta evidente que no fue tan simple elegir entre una de estas dos últimas opciones; pero gracias a esto, se volvieron a analizar exhaustivamente las ventajas y desventajas de cada una de ellas, llegando al fin a la elección del concepto definitivo. Enseguida se mencionan algunos puntos derivados de dicho análisis:

A) Como se sabe, la finalidad de la máquina es la experimentación, por lo que una vez que se hayan llevado a cabo todos los experimentos para los que se diseñó, creemos que su uso disminuirá notablemente; a menos que posteriormente se programen otros experimentos, o bien, se le hagan modificaciones o adaptaciones para otros usos. Por ello, consideramos que la propuesta a elegir debe ser la más económica. En este caso, la propuesta BC tiene ventaja sobre la AD.

B) Otro aspecto es el relacionado con la dificultad que se presenta para la fabricación y ensamble de la máquina. Entre más mecanismos y partes se tengan, se requiere más tiempo de manufactura y ensamble. En la propuesta AD podemos observar mayor complejidad que en la BC. Además, en la propuesta AD, el mecanismo que permite la combinación del movimiento vertical con el horizontal (pieza acoplada a la biela del motor para mov. vertical, vea fig. 3.5) es una pieza

crítica que tiene que ser fabricada a la perfección, conjuntamente con sus guías lineales. Aquí también observamos ventaja en la propuesta BC.

C. En cuanto a las características del movimiento que cada propuesta proporcionaría, aparentemente en la propuesta AD se tendría un mejor control de las excitaciones debido a la independencia de los movimientos vertical y horizontal. Al observar la propuesta BC, se nota que en la vibración biaxial, las componentes vertical y horizontal no son independientes, pero constituyen un movimiento biaxial variable, que es finalmente el que interesa, y que además se logra de una manera mucho más sencilla. Adicionalmente, es más probable que la propuesta BC tenga un mejor funcionamiento que el que en la realidad podría ofreceremos la propuesta AD.

A continuación se presentan en forma esquemática las consideraciones sobre las que basamos la selección, el factor de peso (FP) asignado a cada una y la calificación resultante para cada propuesta.

PROPUESTA	COSTO FP=0.2	FACILIDAD DE MANUFACTURA FP=0.4	INDEPENDENCIA DE MOVIMIENTOS FP=0.4	CALIFICACIÓN TOTAL
AD	5	5	10	7
BC	10	10	5	8

Tomando como apoyo la matriz de decisión, se llegó a la elección de la propuesta BC como el concepto en el que se basó el diseño final. El siguiente paso ahora, es el diseño de detalle, que se presenta enseguida.

### 3.3 DISEÑO DE DETALLE

#### *Descripción de los elementos*

#### A) CONTENEDORES

Se construyeron cuatro de éstos. El primero de base cuadrada de 12 cm de lado por 18 cm de altura, el segundo de base rectangular de 3.6 por 15 cm y 20 cm de altura, el tercero también rectangular de 2 por 20 cm en la base y 20 cm de altura, y el cuarto de forma cilíndrica de 8 cm de diámetro y 18 cm de altura. El material utilizado fue acrílico transparente de 3 mm de espesor. En su manufactura se cuidó que las paredes quedaran perfectamente escuadradas, sin filos ni rebabas que pudiesen obstruir el movimiento de las partículas durante la vibración.

#### B) BASE DEL CONTENEDOR

Consiste de una placa atornillada a dos abrazaderas. En conjunto, estas piezas permiten girar al contenedor alrededor de un eje perpendicular al plano de vibración. El objetivo de este movimiento es, por un lado, el de ajustar con precisión el ángulo del contenedor, y por otro, corregir desalineamientos que pudieran surgir como consecuencia de la imprecisión en el acabado de las piezas.

**C) BUJE Y SOPORTE DEL CONTENEDOR**

El soporte del contenedor es el elemento de unión entre la base del mismo y el carro móvil. En la parte superior de dicho soporte está montado el buje sobre el que giran las abrazaderas para permitir el movimiento arriba descrito. El buje tiene una longitud de 5 cm y un diámetro de 3/4" y va fijado al soporte por medio de un tornillo prisionero. Ambos, el buje y el soporte se manufacturaron en acero "cold rolled" para garantizar que dichas piezas soporten los esfuerzos a que son sometidas como consecuencia de las vibraciones.

**D) CARRO**

Es la base móvil del soporte del contenedor. Se desliza linealmente sobre el riel. La selección del conjunto carro-riel se basó en las dimensiones requeridas, así como en la resistencia a momentos torsionantes y flexionantes al rededor de los ejes principales X, Y y Z.

**E) RIEL**

Constituye la guía del movimiento. Éste, y el carro son partes comerciales de la marca INA con especificaciones en catálogo. La precisión del movimiento lineal de este conjunto reduce al mínimo vibraciones diferentes de las que genera el sistema biela-manivela.

**F) SOPORTE DEL RIEL**

Este elemento sólo tiene por objeto el de elevar al sistema por encima de la placa móvil de modo que el eje del motor quede alineado con el acoplamiento biela-soporte. En su parte superior, el soporte permite fijar al riel en distintas posiciones para adecuarlo a los diferentes experimentos.

**G) BIELA**

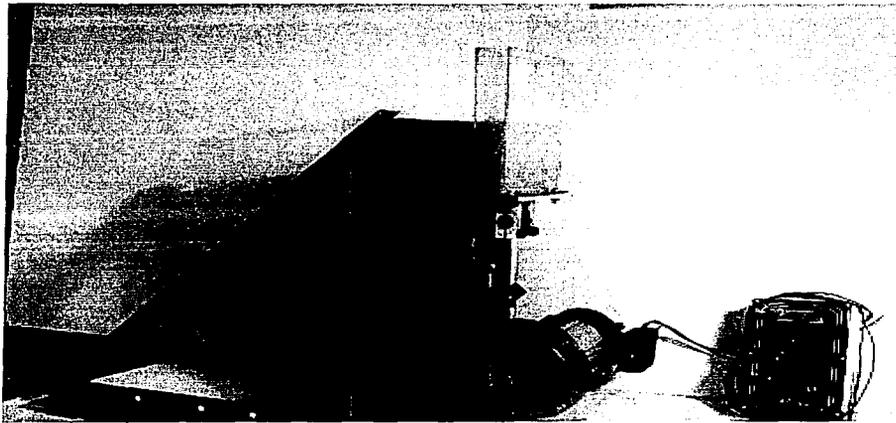
En los extremos de ésta se colocaron un par de juntas esféricas que absorben cualquier pequeño desalineamiento que pudiera darse entre la manivela y el carro. La longitud de la biela es de aproximadamente 15 cm y se une al carro y a la manivela por medio de tornillos.

**H) MANIVELA**

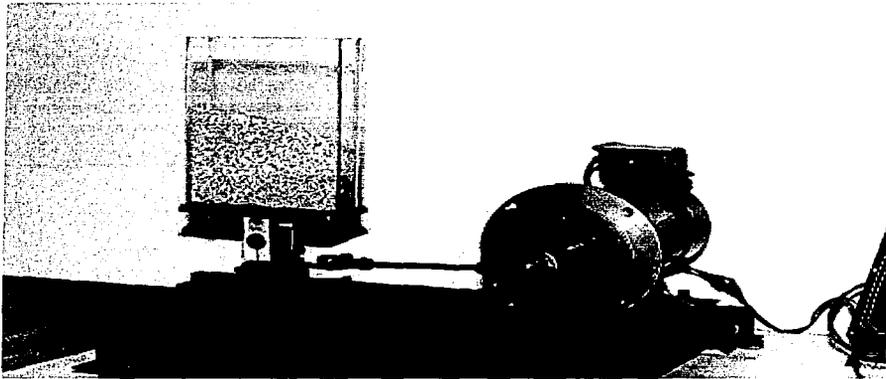
Debido a que la amplitud de la vibración es uno de los parámetros determinantes en los experimentos, la manivela se construyó de modo que permita colocar a la biela a diferentes distancias del eje del motor. Con esto, se puede controlar la amplitud de la vibración de acuerdo a las necesidades de cada experimento. Aunque la precisión de este sistema no es muy grande, tiene una gran flexibilidad.

**I) MOTOR**

Se utilizó un motor de corriente directa marca "ELECTROL" de 0.5 HP, 90 V de armadura y 2500 RPM., conectado a un controlador de velocidad de la misma marca con una precisión del 2% en la regulación de la velocidad del motor a par constante. Por medio del controlador de velocidad y de un medidor de frecuencia se ajusta esta última para efectuar los experimentos.



**Figura 3.7:** Vibración vertical y contenedor rectangular en posición horizontal



**Figura 3.8:** Vibración horizontal y contenedor rectangular en posición horizontal

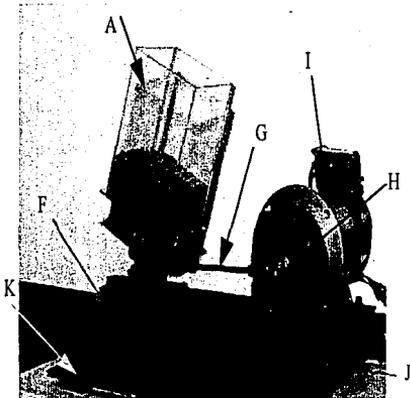


Figura 3.9: Vibración horizontal y contenedor cuadrado inclinado

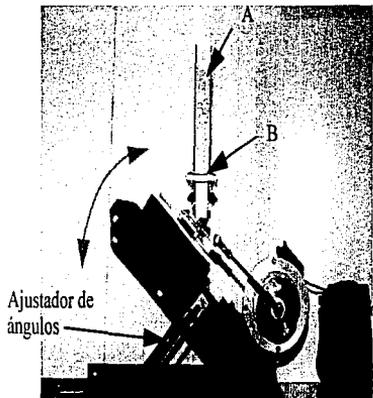


Figura 3.10: Vibración biaxial y contenedor rectangular horizontal

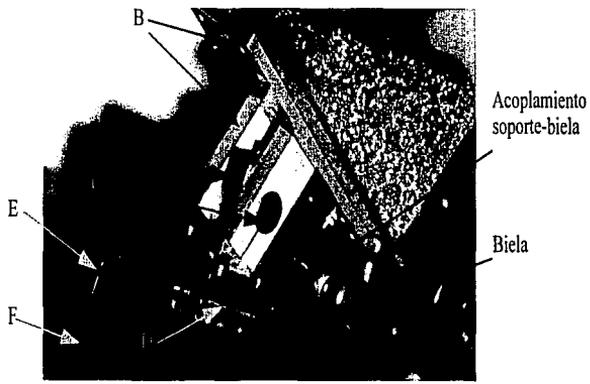


Figura 3.11: Detalle de la estructura de soporte del contenedor

### J) PLACA MÓVIL

Sobre ésta se colocan todas las partes previamente descritas. Va unida a la estructura por medio de un mecanismo de tornillos en uno de sus lados, de modo que se puede variar la inclinación del sistema en un rango de cero a noventa grados respecto al plano horizontal. Como ya se ha comentado, esta inclinación permite obtener dos componentes de la vibración, una horizontal y otra vertical. Es obvio que a medida que el ángulo de inclinación aumenta, también crecerá la componente vertical del movimiento vibratorio y viceversa. El ángulo de inclinación se ajusta por medio de un sistema de nivel magnético y se fija por medio de soleras de ajuste como puede apreciarse en la figura 3.10.

### K) BASE DE LA MÁQUINA

Sólo tiene por objeto el de dar un soporte adecuado al sistema. La estructura se fija en una base metálica para asegurar la posición de la placa móvil. Para absorber confiablemente los efectos de la vibración se colocaron bloques de hule entre la mesa metálica y la base del sistema; dando como resultado una mínima propagación de las vibraciones hacia afuera del sistema.

Además de los componentes antes descritos, y con la finalidad de facilitar la observación y el registro de los fenómenos, se emplearon también algunos otros dispositivos electrónicos que se mencionan a continuación:

1. Estroboscopio marca "Pasco scientific" con capacidad de 300 pulsos por segundo y una precisión de 0.1 Hz
2. Medidor de frecuencia marca "Pasco" con capacidad de 99 Hz y una precisión de 0.001 Hz.
3. Se utilizaron además dos cámaras de video conectadas a un mezclador. Este arreglo permitió grabar imágenes simultáneas de dos de las caras del contenedor en uso, con la finalidad de comparar el movimiento de las partículas en dichos planos.
4. Un comparador óptico de nivel también fue usado para garantizar con mayor precisión el ángulo de inclinación del contenedor y del sistema.

Esta es, grosso modo, la descripción de los componentes de la máquina y sus accesorios. En el siguiente capítulo, se anota la descripción y características de los experimentos realizados, así como los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

**EXPERIMENTACIÓN**

**4.1 CONSIDERACIONES.**

Con la finalidad de comprobar las observaciones experimentales citadas por otros investigadores y la de hacer observaciones en condiciones diferentes, se planeó una serie de experimentos con vibración vertical y diferentes materiales granulares (mijo, lenteja y esferas de vidrio). Además, también se llevaron a cabo experimentos con vibración horizontal y biaxial. Las características de los materiales utilizados son las siguientes:

	<b>Mijo</b>	<b>Lenteja</b>	<b>Vidrio</b>
<b>Densidad (g/cm<sup>3</sup>)</b>	1.35	1.27	2.5
<b>Diámetro medio (mm)</b>	2.25	3.5	1.28
<b>Angulo de reposo (°)</b>	30	28	30.1

En donde :

$$\text{Diámetro medio} = (\phi M + \phi m) / 2$$

$\phi M$  = diámetro mayor

$\phi m$  = diámetro menor

Debido a que no se conocen a ciencia cierta los efectos que la densidad y forma del material granular provocan en los experimentos, dichos materiales fueron seleccionados con base en sus diferencias geométricas y de densidad. Aunque la lenteja y el mijo son similares en densidad, su geometría es radicalmente distinta. Las esferas, en cambio, tienen una densidad superior a la de los granos y presentan una esfericidad cercana al 100%.

Por otro lado, aunque Brennen reporta sus experimentos con base en la aceleración adimensional de la vibración ( $\Gamma$ ), este parámetro está en función de la amplitud de la vibración. Por esto, se decidió también realizar la misma serie de experimentos variando dicha amplitud un 100% respecto al experimento previo y para todo el rango de frecuencias permisible.

Un sólo experimento consiste en someter a vibración cierta cantidad de uno de los materiales citados, con determinada N (H/d) y con determinada amplitud, aumentando poco a poco la frecuencia desde cero hertz hasta el límite superior permisible (30 a 35 Hz); haciendo anotaciones que describan a todos los fenómenos observados y los valores de f que marcaban su aparición. Posteriormente, se repite el procedimiento anterior con diferentes valores de N (número adimensional de capas).

Cabe mencionar que además de las anotaciones, se cuenta con un videocasete que contiene la grabación de los fenómenos más relevantes de cada experimento. Para visualizar óptimamente el movimiento de las partículas, se utilizó la lámpara de luz estroboscópica descrita en el capítulo anterior.

En resumen, al tener como variables a  $N$  (número adimensional de capas),  $a$  (amplitud de la vibración),  $\Gamma$  (aceleración adimensional) y el material usado, lo que se buscó en los experimentos fue:

- Describir los diferentes fenómenos encontrados bajo condiciones de vibración vertical,
- determinar si la densidad y/o geometría del material tiene efecto apreciable en el comportamiento,
- observar el efecto de la amplitud de la vibración para las mismas condiciones de aceleración adimensional,
- determinar si el inicio y finalización de los diferentes fenómenos es dependiente o no, de los parámetros adimensionales,
- demostrar que la inclinación preferencial en el fenómeno de apilamiento se debe a componentes laterales de la vibración,
- observar y describir el comportamiento del flujo en condiciones de vibración horizontal y vibración biaxial a 30 y 60 grados.

Las experimentos realizados fueron los siguientes:

**VIBRACIÓN VERTICAL:**

36 experimentos  
 Amplitudes: 5.5, 2.1 y 1 mm  
 Valores de  $N$ : 10, 20, 30 y 40  
 Materiales: mijo, lenteja y vidrio  
 Contenedor rectangular

**VIBRACIÓN BIAxIAL A 30 °**

2 experimentos  
 Amplitud: 2.25 mm  
 Material: mijo con  $N = 15$   
 Contenedores: rectangular y cilíndrico

**VIBRACIÓN HORIZONTAL:**

7 experimentos  
 Amplitud : 2.25 mm  
 Materiales: mijo con  $N = 15$  y vidrio  
 con  $N = 20$   
 Contenedores cuadrado y cilíndrico

**VIBRACIÓN BIAxIAL A 60 °**

2 experimentos  
 Amplitud: 2.25 mm  
 Material: mijo con  $N = 15$   
 Contenedores: rectangular y cilíndrico

**4.2 RESULTADOS**

Una manera práctica de presentar los resultados de las observaciones experimentales, en la que se pueden ver directamente las tendencias del comportamiento del material granular, lo constituyen las gráficas que más adelante se muestran y en las que se han localizado los puntos de aparición de los fenómenos dentro de cada experimento, mediante las coordenadas  $\Gamma$  (abscisas) y  $N$  (ordenadas).

No es difícil notar que los valores de  $\Gamma$  para los diversos fenómenos pueden considerarse como una función de  $N$ . Si bien es cierto que en realidad son pocos puntos, la tendencia es notoria y perfectamente repetible (cabe mencionar que se efectuaron numerosos "experimentos piloto" que no se incluyen aquí, pero en los que se pudieron apreciar las mismas características de comportamiento).

El factor de error tanto de las variables independientes, así como de  $\Gamma$ , se anota en el apéndice.

#### 4.2.1 Vibración vertical

Los fenómenos observados en la vibración vertical, fueron en general, los mismos que los descritos por Brennen [8], [9] y que citamos en el capítulo 1 del presente trabajo; sin embargo, se observaron algunas variantes. Se consideró prudente colocar al pie de cada una de las siguientes figuras, una pequeña nota referente a las discrepancias entre ambos trabajos. A grandes rasgos, las variantes son las siguientes:

El apilamiento es sin duda el fenómeno más estable para la vibración vertical. En todos los casos se presentó para valores de gama entre 1 y 2. Lo interesante aquí es que, como se verá más adelante, dicho apilamiento se presentó tanto en los extremos del recipiente como en el centro del mismo. De hecho, se observó en algunos casos que el apilamiento de partículas se desplazaba de izquierda a derecha a medida que se aumentaba la frecuencia de vibración.

Las ondas pequeñas se presentaron invariablemente en todos los experimentos con vibración vertical en los que se utilizó vidrio; sin embargo en el caso del mijo, y muy particularmente en el de la lenteja, este fenómeno parece ser muy poco estable, sobre todo para amplitudes pequeñas. Este hecho hace pensar que la densidad del material pudiera estar directamente vinculada con la formación de este fenómeno.

El arqueo se manifestó con cero y hasta cuatro nodos. Aunque Brennen [8] reporta siempre la presencia de este fenómeno antes de la aparición de ondas grandes, en el presente caso la tendencia fue opuesta, excepto en valores pequeños de  $N$  (véanse, por ejemplo, las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5).

A diferencia del apilamiento, presente en todos los experimentos con vibración vertical, las ondas grandes son el fenómeno más inestable, al menos a bajas amplitudes (véanse figuras 4.5 a 4.7). Con  $a=5.5$  mm aparecieron en todos los experimentos; para  $a=2.1$  mm, usando vidrio se manifestaron en todo el rango de  $N$ ; con mijo y lenteja a esta misma amplitud sólo se presentaron con valores de  $N < 20$ . Con  $a=1$  mm, este fenómeno no fue observado. Por otro lado, Brennen<sub>8</sub> afirma que las ondas grandes siempre se presentan superpuestas al arqueo, pero nuestras observaciones no concuerdan con esto último, pues aunque hubo casos aislados en que esta superposición se manifestó, también es cierto que no fue la regla general.

A muy altas frecuencias ( $f \approx 40$  Hz), pero con amplitudes pequeñas ( $a = 1$  mm), se observó un fenómeno no descrito previamente y que fue denominado "efecto cascada" (ver figura

4.1). Visto de frente, se puede apreciar una leve inclinación de la superficie. Los movimientos convectivos son muy rápidos y sin saltos de partículas. En la vista frontal todas las partículas descienden, mientras que en la posterior, sucede exactamente lo contrario. En la vista lateral izquierda, se observa obviamente, un ciclo convectivo en sentido horario.

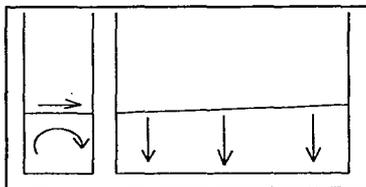


Figura 4.1 "Efecto cascada"

Además de lo anteriormente descrito, se notó que al irse desplazando, las partículas de forma irregular mostraban cierta orientación preferencial según la zona del flujo. Por ejemplo, para el caso de la lenteja, en las zonas "lentas" mostraba su cara circular; mientras que en las "rápidas", sólo se aprecia la parte angosta. Esto se debe, probablemente, a que el aumento en la velocidad obliga a las partículas a acomodarse de modo que opongan menor resistencia al flujo.

También es importante mencionar que algunos fenómenos como el arqueo, una vez que aparecían y se volvían estables, podían mantenerse al disminuir la frecuencia por debajo del valor de aquella en el que aparecieron. Es decir, el rango de aceleraciones en el que se presenta un fenómeno no es siempre igual cuando se va incrementando la frecuencia de vibración que cuando ésta va disminuyendo.

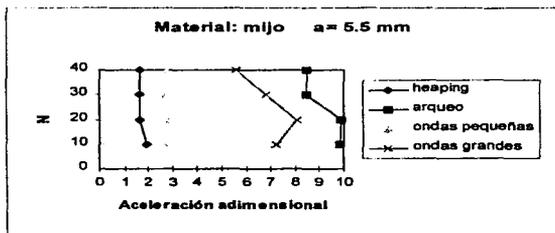


Figura 4.2. Todos los fenómenos presentes. Las ondas grandes ocurren antes que el arqueo.

La última observación que se considera importante, es que en la transición de un fenómeno a otro, siempre hubo superposición de ellos al menos en un rango de frecuencia. En otras palabras, un fenómeno comenzaba a manifestarse mientras el otro iba desapareciendo.

La posición de la cima del apilamiento ha llamado la atención de modo particular. La pregunta sigue vigente: ¿A qué se debe que dicha cima se presente a veces al centro y otras en uno de los extremos del recipiente? Baste citar un ejemplo para subrayar la pregunta: en el experimento con mijo,  $N=10$  y una amplitud de 5.5 mm, se observa el apilamiento al centro del recipiente con  $f=9.4$  Hz. Al aumentar la frecuencia a 10.2 Hz, éste se presenta del lado izquierdo del contenedor en la vista frontal; mientras que con  $f=10.9$  Hz, sucede justo lo contrario.

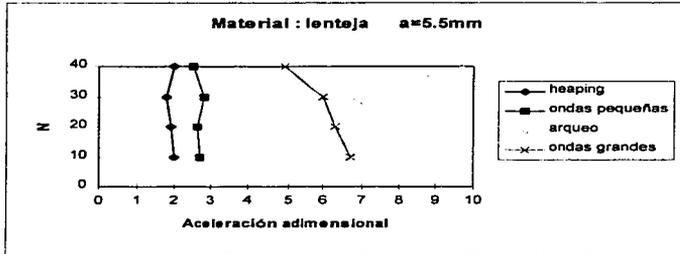


Figura 4.3. También aquí las ondas grandes se presentan antes del arque, excepto en  $N<15$

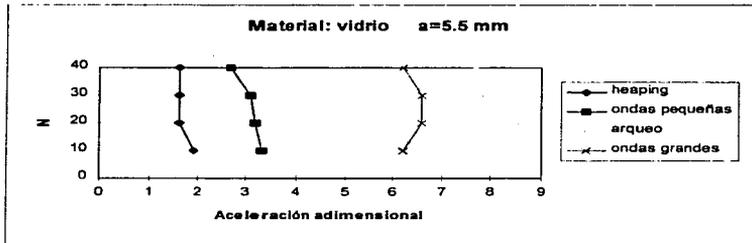


Figura 4.4. Nuevamente el arque se presenta antes que las ondas grandes sólo para bajos valores de  $N$

Este mismo fenómeno fue reportado en varios de los experimentos. Por otro lado, tampoco se cree que dicha configuración se deba a condiciones aleatorias al inicio del experimento en cuestión, pues hay que resaltar que la repetibilidad se da en el 100% de los casos,

aún después de provocar alguna perturbación, siempre y cuando se garanticen las mismas condiciones de  $\Gamma$  y  $N$ .

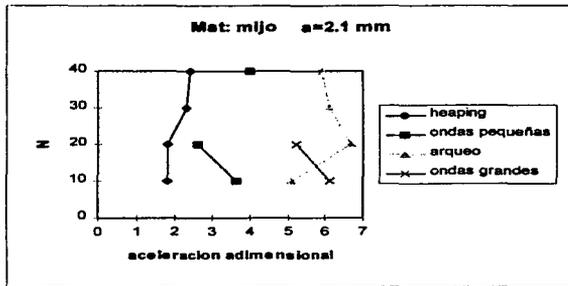


Figura 4.5. Con mijo y una amplitud de 2.1 mm las ondas grandes sólo fueron observadas para  $N < 20$ . No se detectó la presencia de ondas pequeñas alrededor de  $N = 30$

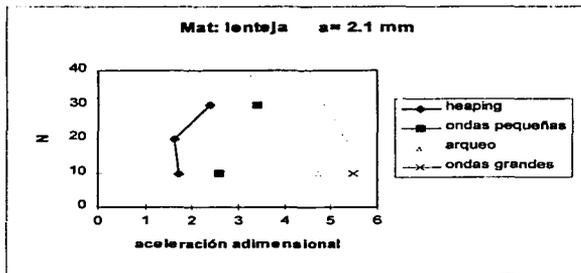


Figura 4.6. En este caso las ondas grandes se presentan sólo para  $N = 10$  y posteriores al arqueo.

Como se mencionó en la sección 4.2, las ondas pequeñas se presentaron para valores de gama entre 2 y 4 en todos los experimentos con amplitud de 5.5 mm. También lo hicieron en este rango de aceleración en todos los experimentos con vidrio. Sin embargo con amplitudes de 1 y 2.1 mm en los experimentos con mijo y lenteja, la presencia de estas ondas fue

inestable y difícilmente detectable. Esto orilla a pensar entonces, que la amplitud de la vibración y alguna característica del material (probablemente la densidad) podrían ser determinantes en la formación de este fenómeno.

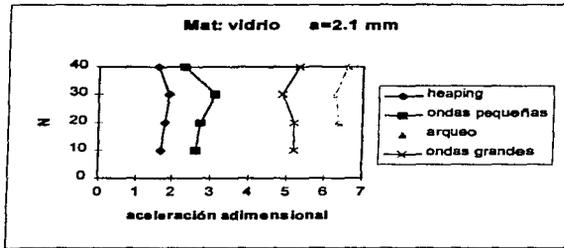


Figura 4.7. Todos los fenómenos presentes, excepto el arqueo, que no fue observado para  $N=10$ . Nuevamente, la tendencia es que las ondas grandes se presenten antes del arqueo.

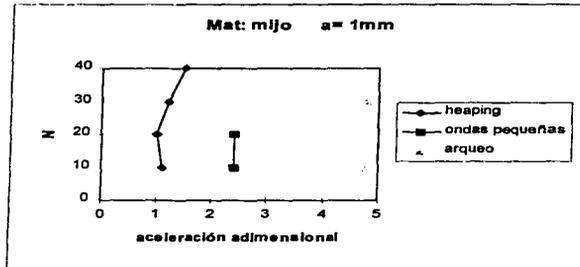


Figura 4.8. No se presentaron ondas grandes para ningún valor de  $N$ . Las ondas pequeñas sólo se observaron para  $N < 20$ .

Las observaciones respecto a la formación y comportamiento de las ondas grandes, coinciden con lo reportado por Brennen [8] y por Melo [14], excepto en que dicho fenómeno no necesariamente se manifestó superpuesto al arqueo. En el período de transición entre arqueo y ondas grandes se observó la superposición de ambos, así como la presencia de inestabilidades en las que el comportamiento parecía ser aleatorio; pero una vez que las ondas eran estables, se manifestaban como un fenómeno completamente independiente del arqueo.

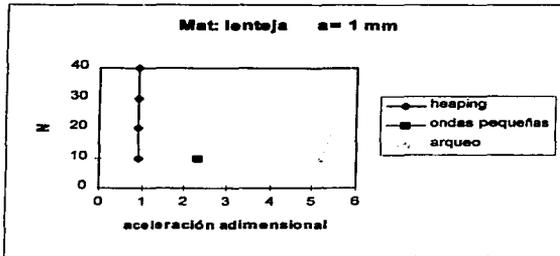


Figura 4.9. El apilamiento parece ser el único fenómeno estable en estas condiciones. No se detectó la presencia de ondas grandes y, tanto el arqueo como las ondas pequeñas, sólo se visualizaron para bajos valores de  $N$ .

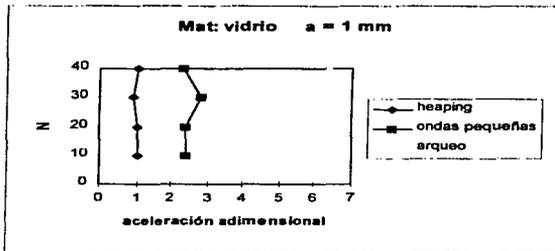


Figura 4.10. La presencia de ondas pequeñas en todos los experimentos realizados con vidrio podría indicar que la densidad es un parámetro importante para la formación de este fenómeno. Para estas condiciones de amplitud y material tampoco fue detectada la presencia de ondas grandes.

En cuanto al fenómeno de arqueo, los resultados coinciden con lo reportado por Douady [11]. Él afirma que el número de nodos, en general, disminuye a medida que aumenta  $N$ ; sin embargo, no se determinó la relación entre  $\Gamma$  y el número de nodos, pues dicho número puede ser diferente para igual valor de la aceleración adimensional. Como un ejemplo de esto, en los experimentos efectuados para el presente trabajo, se puede citar la presencia de "arching-3" usando mijo y con  $N=10$ : mientras que para  $N=20$ , el fenómeno observado fue "arching-2" para el mismo valor de  $\Gamma$ . Con  $N=30$ , sólo se observó arqueo de un solo nodo, sucediendo lo mismo con  $N=40$ .

Una vez que el arqueo (con cualquier número de nodos) se presenta, es sumamente estable, pues no se altera aún después de perturbarlo externamente. Cabe mencionar que para un mismo experimento se pueden presentar arqueo de 1, 2, 3, 4 y 5 nodos, al disminuir la frecuencia el número de nodos va disminuyendo, como lo sucedido en el experimento con  $N=10$  para mijo.

## EXPERIMENTOS CON FLUIDO INTERSTICIAL VISCOSO

Se hará aquí referencia a 3 experimentos únicos en los que se utilizó un líquido como fluido intersticial. Al no tener antecedentes que describan el comportamiento de materiales granulares con un fluido intersticial diferente al aire, surge necesariamente la idea de iniciar la experimentación sobre el tema. Aunque los autores del presente trabajo reconocen que realmente es muy poco lo que se hizo al respecto, se consideró necesario reportarlo.

Se utilizaron tres líquidos diferentes como fluido intersticial: glicerina, agua y una solución al 50% (volumétrico) de glicerina en agua. Se emplearon esferas de vidrio de 1.28 mm de diámetro como material granular porque son más densas que el líquido intersticial y además no lo absorben. Se eligieron estos tres fluidos para observar como podría variar el comportamiento del material con fluidos intersticiales de diferente viscosidad. Para cada experimento se usó una  $N \approx 20$  y 40 ml de líquido intersticial. Las observaciones hechas se resumen a continuación:

1. Cuando se utilizó glicerina, todo el material se movía conjuntamente como una sola masa, es decir la viscosidad de este fluido anula la interacción entre los granos, por lo que no hubo patrón convectivo alguno y mucho menos formación de ondas.
2. Con la solución agua-glicerina o bien agua pura como fluido intersticial, el comportamiento fue similar: el líquido comenzaba a acumularse en cierta zona y a desplazar al material granular bien hacia un lado, o bien hacia ambos lados. Una vez que en esa zona se tenía cierta cantidad de líquido, aparecía una onda de Rayley al centro de la superficie libre de la acumulación de líquido, mientras que el material granular desplazado presentaba una formación parecida al apilamiento, incluso con convección y avalanchas superficiales, pero con la diferencia de que las partículas se movían agrupadas en "gránulos" relativamente grandes y de diferentes tamaños debido al fluido intersticial.

### 4.2.2 Vibración horizontal

Los experimentos con vibración horizontal se llevaron a cabo utilizando tanto el contenedor cuadrado como el cilíndrico. Del mismo modo, se utilizaron mijo y vidrio como materiales de estudio.

En ambos contenedores el comportamiento del material fue, en general, el mismo:

1. El movimiento se comenzaba a manifestar solamente en la capa superficial de partículas y en el sentido de la vibración. (Rango de aparición:  $0.5 < \Gamma_0 < 0.77$ ). Con valores de gama por debajo de este rango, no se percibe movimiento relativo entre las partículas

2. Para  $1.2 < \Gamma_1 < 1.65$ , se observó un comportamiento como el que se muestra en la figura 4.11b, en el que las partículas de la superficie libre se desplazan del centro a las orillas en el sentido de la vibración. En la vista frontal del contenedor, resulta clara la presencia de dos ciclos convectivos que coinciden en un movimiento ascendente de las partículas en el centro del contenedor y descendente en los extremos izquierdo y derecho del mismo.
3. Por último, y para valores de  $\Gamma$  entre 7.3 y 8.7, iniciaba un fenómeno muy peculiar y que se denominó simplemente "giro". Como su nombre lo indica, este fenómeno se caracteriza por el desplazamiento de las partículas alrededor de un eje perpendicular al fondo del contenedor. Visto desde arriba, el centro del vórtice coincide con el centro del contenedor. Para el contenedor cuadrado, una característica importante es que la rapidez de las partículas no era igual en todas las caras del recipiente. Aunque dicha rapidez no fue determinada, se notó que era mayor en las caras frontal y posterior (paralelas a la vibración) que en las laterales. Esta diferencia en la rapidez de las partículas provoca la formación de un apilamiento en las esquinas frontal-izquierda y posterior-derecha en el caso del contenedor cuadrado, de modo que la superficie libre se asemeja a la superficie hiperbólica conocida como "silla de montar". Para determinar si el giro era provocado por una pequeña desviación en la horizontalidad del contenedor, se hicieron experimentos con una inclinación del mismo de 2.5 grados, tanto en sentido horario (ángulo negativo) como anti-horario. Como se puede notar en las gráficas correspondientes (figuras 4.13 y 4.14), esta inclinación no influyó en la formación de dicho giro, ni en ninguno de los otros dos comportamientos descritos. La única diferencia notoria es que con un ángulo negativo del contenedor el inicio del giro para el mijo fue en  $\Gamma \approx 8.5$ , mientras que para el vidrio, el giro comenzó en  $\Gamma \approx 7.5$ .

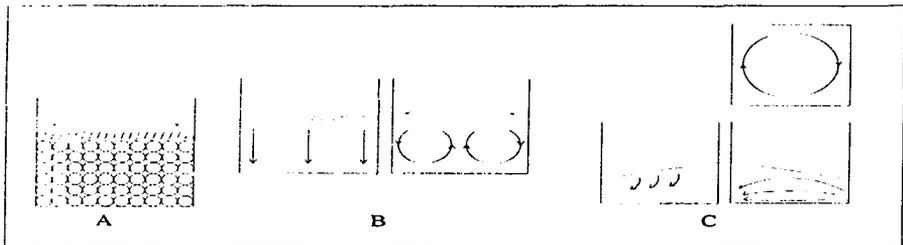


Figura 4.11. Movimiento de partículas en el contenedor cuadrado con vibración horizontal. A) A bajas frecuencias sólo se observa movimiento de las partículas en la capa superficial. B) con  $\Gamma > 1.5$  empiezan a formarse dos ciclos convectivos, el dibujo de la izquierda representa la vista lateral y el de la derecha la frontal. C) A grandes frecuencias el material gira a gran velocidad y en sentido horario como se aprecia en el dibujo superior derecho.

En la serie de experimentos con el contenedor cilíndrico, el giro sólo se presentó en forma inestable y en sentido anti-horario, para valores de gama cercanos al límite de la máquina ( $\Gamma=10$ ), y mostrando una región en que se rompía la continuidad del giro (figura 4.12d). Además del giro, el movimiento convectivo en el contenedor cilíndrico presentó también algunas diferencias. En la vista superior, puede verse no una migración del centro hacia las orillas, como en el contenedor cuadrado, sino de los extremos frontal y posterior (fuentes) al izquierdo y derecho (sumideros), como se aprecia en la figura 4.12b.

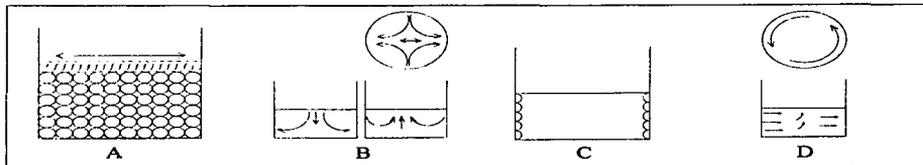


Figura 4.12 Movimiento de las partículas en un contenedor cilíndrico con vibración horizontal. A) Sólo se aprecia movimiento de las partículas en la superficie libre. B y C) A mayores frecuencias se forman ciclos convectivos: En la parte superior parece haber una fuente en las partes frontal y posterior del recipiente, así como un sumidero en los extremos izquierdo y derecho del mismo. Se observaron ondas a lo largo de los extremos izquierdo y derecho. D) A muy altas frecuencias se observó la tendencia al giro pero en sentido anti-horario.

Con ayuda de la luz estroboscópica, se detectaron además ondas estacionarias a lo largo de las paredes laterales (extremos izquierdo y derecho para el contenedor cilíndrico). Al igual que las ondas pequeñas en la vibración vertical, en este caso, la frecuencia de las ondas laterales es del orden de la mitad de la frecuencia de excitación.

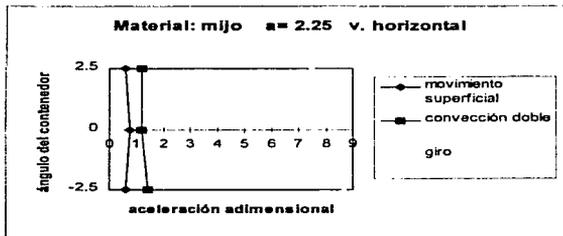
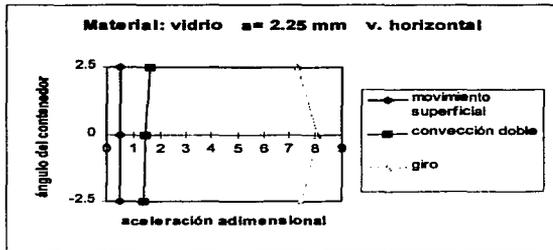


Figura 4.13. La variación en el ángulo del contenedor no parece afectar al comportamiento del material. El giro de las partículas al rededor de un eje perpendicular a la base del contenedor cuadrado es el fenómeno que más llama la atención en los experimentos con vibración horizontal.



**Figura 4.14.** La diferencia de densidad y geometría del material no parece inducir un cambio radical en el comportamiento de las partículas al ser sometidas a vibración horizontal. La única diferencia se encuentra en la aceleración en la que inicia el giro con un ángulo negativo del contenedor cuadrado.

El fenómeno de giro, descrito ya ampliamente, causó en particular gran extrañeza ya que inmediatamente surgió la inquietud de saber porque la vibración horizontal en un solo eje es capaz de producir giros. Con esto en mente, se hizo necesario analizar las variables de este fenómeno y verificar las condiciones de operación de la máquina.

Así, se encontró que debido al continuo funcionamiento, la máquina comenzaba a presentar, en la base, un movimiento perpendicular al sentido de la vibración. Aunque este movimiento era mínimo y apenas medible, se optó por reajustar la base de la máquina y eliminar este efecto indeseable. Hecho esto, se efectuaron experimentos adicionales encaminados exclusivamente a determinar si el giro era consecuencia de esta vibración perpendicular al eje de interés, o bien, de la geometría del contenedor. Aunque ya no se describirán a detalle las observaciones de esta última serie experimental, se encontró que los dos primeros fenómenos para vibración horizontal ya descritos seguían presentándose, pero no así el giro, por lo que podemos decir que dicho fenómeno se presentó por la presencia, sobre el mismo plano, de una componente perpendicular a la excitación.

#### 4.2.3 Vibración biaxial

Se realizó utilizando el contenedor rectangular y el contenedor cilíndrico, sin inclinación de la placa del contenedor. El material experimental fue mijo, manejando una  $N = 15$  y dos ángulos de inclinación de la placa móvil (30 y 60 grados).

Para esta condición se observó una combinación de efectos, para una inclinación de 30 grados de la placa móvil los fenómenos dominantes son los observados en la vibración horizontal y para ángulos mayores a 60 grados la tendencia es hacia los fenómenos de vibración vertical. A continuación se describe en detalle, lo observado en estos experimentos.

### 4.2.3.1 Vibración biaxial a $30^\circ$

En la vibración biaxial a  $30^\circ$  se observó el siguiente comportamiento en el contenedor rectangular:

1. Al iniciar la vibración, se presenta una gradual inclinación de la superficie del material granular, con avalanchas superficiales (figura 4.15), hasta alcanzar una inclinación similar a la de la placa móvil (para  $\Gamma < 1$ ).

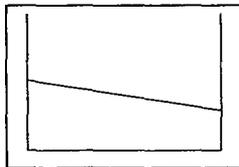


Figura 4.15. Apilamiento con vibración biaxial a  $30^\circ$ .

2. Para  $\Gamma \approx 2.26$  y de forma similar al apilamiento, se forman dos ciclos convectivos, con una cresta cargada completamente a la izquierda. Al principio, este movimiento convectivo de las partículas es difícilmente apreciable y no afecta a las partículas de la esquina inferior-izquierda del contenedor si éste se ve desde su parte frontal. A medida que aumentamos la frecuencia, la convección del lado izquierdo aumenta en tamaño y rapidez hasta manifestarse en toda la masa de partículas del lado izquierdo (figura 4.16). En la vista lateral se ve cómo las partículas suben a lo largo de la cara izquierda del contenedor y descienden en el derecho. Cabe señalar que el ciclo convectivo de la derecha es mucho más grande que el de la izquierda.

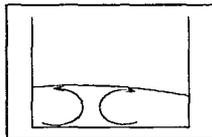


Figura 4.16. Doble convección con vibración biaxial a  $30^\circ$ .

3. Al aumentar la frecuencia hasta  $\Gamma \approx 6.8$  se forma un solo ciclo convectivo que, en la parte frontal del contenedor, se mueve en sentido horario (figura 4.17). En este punto, y con ayuda de la luz estroboscópica, se observó la presencia de ondas laterales similares a las que se presentan en los experimentos con vibración horizontal; así como otras pequeñas ondas en el fondo del contenedor muy parecidas a las que se presentan en el arqueado con vibración vertical.

Comparativamente, la amplitud de las ondas laterales es mayor que las que se presentan en el fondo.

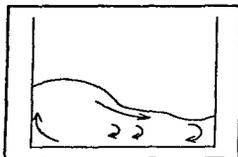


Figura 4.17. Convección con vibración biaxial a  $30^\circ$ .

Tomando en cuenta que en estos experimentos la componente horizontal de la vibración es mayor que la vertical, es de esperar que los fenómenos observados en la vibración horizontal se manifiesten en mayor medida que los vistos en la vertical; tal es el caso de las ondas laterales descritas en el párrafo anterior.

En el caso de los experimentos realizados con el **contenedor cilíndrico** en estas mismas condiciones, los fenómenos observados son muy parecidos a los descritos para el contenedor rectangular; sin embargo, pueden notarse algunas diferencias:

- La formación del movimiento convectivo de las partículas es total e inmediata una vez que se alcanza  $\Gamma \approx 2.26$ . Es decir, no se detectan zonas en las que se aprecie amovilidad (figura 4.18). Esto indica que las características geométricas del contenedor afectan el comportamiento de las partículas en las regiones cercanas a las esquinas y vértices del mismo.

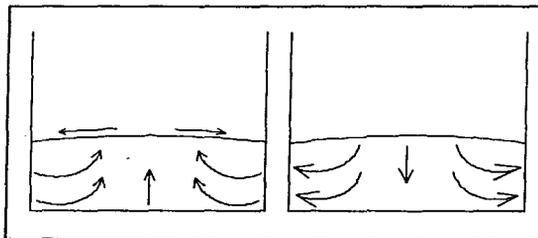


Figura 4.18. Convección en contenedor cilíndrico y vibración biaxial a  $30^\circ$ . A la izquierda, vista frontal; a la derecha, vista lateral.

- En este contenedor, la presencia de las ondas laterales es mucho más evidente que en el rectangular, pues incluso se observa claramente el rebote de las partículas de la superficie al momento en que la onda choca con las paredes.

- A grandes frecuencias ( $\Gamma > 9.4$ ), en lugar de la formación de un solo ciclo convectivo, se observa gran número de ellos, muy pequeños y poco estables en todos los puntos visibles del recipiente (figura 4.19).

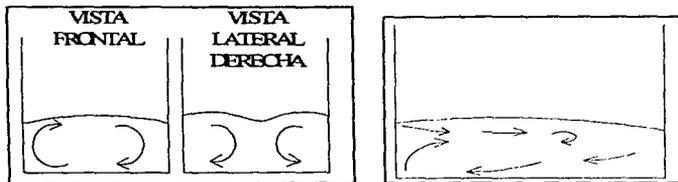


Figura 4.19. Cambio en la convección con vibración biaxial a  $30^\circ$  y contenedor cilíndrico.

#### 4.2.3.2. Vibración biaxial a $60^\circ$

Los fenómenos vistos en estas condiciones de excitación son también similares a los descritos con vibración biaxial a  $30^\circ$ . La formación del apilamiento a bajas frecuencias se presenta aquí con la única diferencia que su pendiente es un poco más pronunciada y la rapidez con la que descienden las partículas de la superficie es considerablemente menor (figura 4.20).

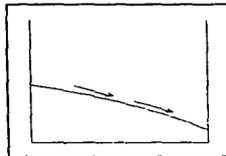


Figura 4.20. Apilamiento con vibración biaxial a  $60^\circ$ .

La doble convección en dicho apilamiento es evidente cuando la aceleración adimensional alcanza valores cercanos a 2. A medida que se aumenta la frecuencia, la rapidez de las partículas en la convección también aumenta. Cuando  $\Gamma \approx 5.5$  puede detectarse fácilmente con ayuda del estroboscopio la presencia de ondas estacionarias en el fondo y paredes laterales del contenedor (figura 4.21). Como ya se dijo, en este caso la amplitud de la onda del fondo es

(figura 4.21). Como ya se dijo, en este caso la amplitud de la onda del fondo es considerablemente mayor que la de las paredes. La diferencia de dichas amplitudes es del orden de la diferencia observada con vibración a  $30^\circ$ .

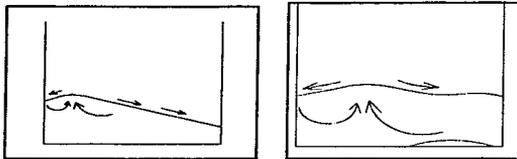


Figura 4.21. Apilamiento (izquierda) y convección con presencia de ondas en vibración biaxial a  $60^\circ$ .

Con altas frecuencias ( $\Gamma > 7.4$ ), en lugar de formarse un sólo ciclo convectivo, como en el caso anterior, se genera un fenómeno parecido al arqueo de dos y tres nodos; sólo que ahora, la profundidad de la capa de partículas no es constante, sino que dicho arqueo se manifiesta superpuesto al apilamiento descrito anteriormente. Es decir, en la vista frontal se nota una capa más profunda de partículas en el lado izquierdo, que decrece en magnitud hasta alcanzar un mínimo en el lado derecho, sin que esto altere la formación de los arcos (figura 4.22). En este punto, la onda estacionaria del fondo del contenedor es visible aún sin la ayuda del estroboscopio.

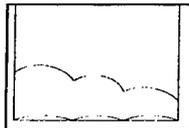


Figura 4.22. Arqueo superpuesto al apilamiento con vibración biaxial a  $60^\circ$ .

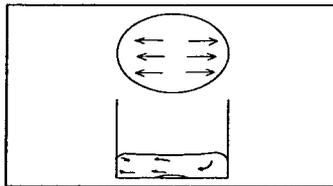


Figura 4.23. Convección sin apilamiento en contenedor cilíndrico con vibración biaxial a  $60^\circ$ .

Para el **contenedor cilíndrico**, la única diferencia apreciable es que a grandes frecuencias en lugar de la formación del arqueo, permanece la doble convección pero desaparece el apilamiento (figura 4.23). Es decir, la superficie libre se vuelve plana a pesar de la presencia de la doble convección.

**NOTA:**

Si el lector desea ver el video donde se muestran los fenómenos descritos, éste permanecerá a su disposición en el laboratorio de reología del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM.

## ***CONCLUSIONES***

- Se obtuvo, de manera sencilla, una máquina experimental capaz de proporcionar vibraciones en sentido vertical, horizontal y en una combinación de ambos sentidos (biaxial), con diferentes grados de inclinación, tanto de la placa móvil como del contenedor, así como un amplio rango para la amplitud y el rango necesario de frecuencia.
- Haciendo uso de esta máquina, se realizaron algunas series de experimentos que arrojaron la información suficiente para sustentar las siguientes afirmaciones:
- Las observaciones hechas parecen descartar la hipótesis planteada al inicio de este trabajo, en la que se consideraba la posibilidad de que la tendencia al apilamiento preferencial se debiera a vibraciones laterales presentes durante la experimentación vertical. Sin embargo, se piensa ahora que dicha tendencia al apilamiento se debe a las condiciones de esfuerzo presentes en el material al iniciarse la excitación. Resulta pues imprescindible, continuar con la investigación de modo que puedan proponerse nuevas hipótesis que den respuesta a ésta incógnita.
- La geometría de las partículas no parece afectar en gran medida el comportamiento global del material en los rangos estudiados y que la aparición de los fenómenos tiene una tendencia definida e independiente del tipo de material en cuestión.
- Para amplitudes relativamente grandes ( $a > 5$  mm), la densidad no afecta en la formación de los fenómenos. A pequeñas amplitudes ( $a < 5$  mm), es difícil la formación de algunos fenómenos (como las ondas superficiales pequeñas y grandes en la vibración vertical), notándose esto aún más con los materiales menos densos (mijo y lenteja).
- En la vibración vertical, las ondas grandes no necesariamente se presentan superpuestas al arqueado.
- Resulta necesario incluir un parámetro que relacione el número adimensional de capas con el largo del contenedor, esto con la finalidad de tener una mejor descripción de la formación de ondas.
- Como un aporte al estudio de materiales granulares, se reportan los fenómenos que aparecen en la vibración horizontal (doble ciclo convectivo) y en la vibración biaxial (suma de efectos de vibración horizontal y vertical).
- El fenómeno de giro observado en la vibración horizontal fue ocasionado por vibraciones perpendiculares al eje de interés, pero una vez corregida esta situación éste fenómeno desapareció.

**ESTIMACIÓN DE LA POTENCIA REQUERIDA.**

El trabajo de un par con momento  $M$  que actúa sobre un cuerpo rígido es:

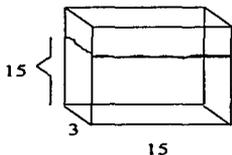
$$dU = Md\theta$$

Para el caso de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular  $\omega$  y sobre el cuál actúa un par de momento  $M$  paralelo al eje de rotación, tenemos que:

$$\text{Potencia} = dU/dt = Md\theta/dt = M\omega$$

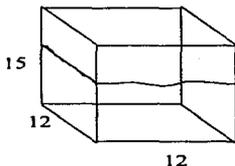
**Cálculo de la masa total a mover.**

**Material granular** ( $\rho = 2.5 \text{ g/cm}^3$ ,  $\eta=0.7$ ) :



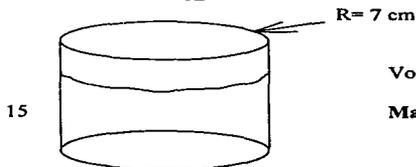
$$\text{Vol} = 675 \text{ cm}^3$$

$$\text{Masa real} = \text{Vol } \rho \eta = 1182 \text{ g}$$



$$\text{Vol} = 2160 \text{ cm}^3$$

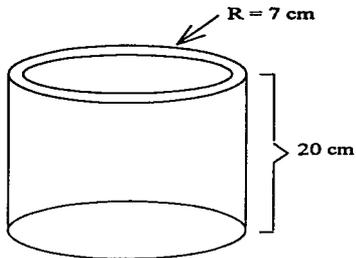
$$\text{Masa real} = 3780 \text{ g}$$



$$\text{Vol} = 2309 \text{ cm}^3$$

$$\text{Masa real} = 4041 \text{ g}$$

Contenedor:



Material : acrílico  
 $\rho = 1.5 \text{ g/cm}^3$   
 Radio interior =  $6.7 \text{ cm}$   
 Sección transversal:  $12.9 \text{ cm}^2$   
 Vol =  $258 \text{ cm}^3$

Masa =  $258 (1.5) = 387 \text{ g}$

Considerando un posible recubrimiento interior de vidrio de espesor de  $3 \text{ mm}$ :

Sección transversal:  $12.3 \text{ cm}^2$   
 Vol. Vidrio =  $247 \text{ cm}^3$   
 Masa vidrio =  $617 \text{ g}$

Sumando estas dos masas:

**Masa del contenedor =  $1004 \text{ g}$**

Soporte del contenedor:

Estimando la masa del soporte del contenedor:

**Masa del soporte =  $450 \text{ g}$**

Transmisión de potencia (biela y rodamiento lineal) :

**Masa trans.de pot. =  $350 \text{ g}$**

Masa total ' =  $4041 + 1004 + 450 + 350 = 5845 \text{ g}$

Tomando en cuenta una compensación estimativa debido a efectos de fricción:

**Masa total =  $6000 \text{ g}$**

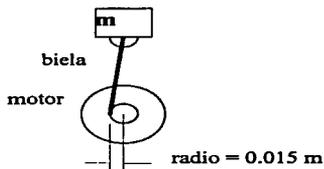
Cálculo de la potencia

$Pot = M\omega$

$0 < \omega < 35 \text{ Hz}$

$35 \text{ Hz} = 2100 \text{ rpm} = 219.9 \text{ rad/s}$

M: de la figura podemos observar que el par de momento M es prácticamente:



$$M = mgr$$

en donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ), y  $r$  es el radio (brazo de palanca). Así, tenemos que  $M = 0.883 \text{ N} \cdot \text{m}$  y finalmente:

$$\text{Potencia} = 0.883 \text{ N} \cdot \text{m} (219.9 \text{ rad/s}) = 194.2 \text{ J/s} \approx 0.26 \text{ HP}$$

Entonces, un motor que proporcione una potencia un poco mayor a un cuarto de HP y 2100 rpm, es suficiente para originar el movimiento vibratorio, ya que éstos cálculos se efectuaron tomando en cuenta los valores máximos de las variables que pueden presentarse durante el funcionamiento de la máquina.

### *Cálculo del error en $\Gamma$*

Sabemos que siendo  $X$  y  $Y$  dos cantidades y  $e_x$ ,  $e_y$  sus errores respectivos, entonces el error del producto  $XY$  es:

$$e_{xy} = Xe_y + Ye_x \quad (1)$$

Entonces, si la aceleración adimensional ( $\Gamma$ ) está dada por:

$$\Gamma = (2\pi)^2 af^2 / g \quad (2)$$

Siendo  $f$ , la frecuencia de vibración en (Hz);  $a$ , su amplitud en (m); y  $g$ , la aceleración gravitatoria.

Aplicando (1) a (2) y considerando  $e_a$  y  $e_f$  los errores de  $a$  y  $f$  respectivamente, tenemos que el error en  $\Gamma$  ( $e_\Gamma$ ) está dado por:

$$e_\Gamma = ((2\pi)^2 / g) (ae_{f^2} + f^2e_a) \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} e_a &= 0.00003 \text{ m}, & a &= 5 \text{ mm} \\ e_{f^2} &= 2fe_f & f &= 40 \text{ Hz} \\ e_f &= 0.01 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (3), tenemos que el error relativo en  $\Gamma$ , expresado en forma porcentual es:

$$e_\Gamma = 0.65\% \Gamma$$

1. **Jaeger y Nagel**. "Physics of the Granular State". *Science*, Vol. 255. No. 5051. Marzo de 1992.
2. **S.B Savage**. *Adv. App. Mech.* 24, 289 (1984).
3. **C.S. Campbell**. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 22, 57 (1990).
4. **S.B. Savage and D.J. Jeffrey**. *J. Fluid Mech.* 110, 255 (1981).
5. **J.T. Jenkins and M.W. Richman**. *J. Fluid Mech.* 171, 53 (1986).
6. **C.S. Campbell and C.E. Brennen**. In *Proceedings of the IUTAM Conference of Deformation and Failure of Granular Materials (Delft, The Netherlands, 1982)* p. 515
7. **H. Caram and D.C. Hong**. *Phys. Rev. Lett.* 67, 828 (1991).
8. **Brennen, Wassgren & Hunt**. "Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container". Artículo proporcionado por los autores, con fecha del 31 de octubre de 1995.
9. **Brennen, Wassgren & Ghosh**. "Vertical oscillation of a bed of granular material". *J. of App. Mechanics*; marzo de 1996.
10. **Thomas, Mason, Liu & Squires**. "Identifying states in shallow vibrated beds". *Powder Technology*, Vol. 57, 1989.
11. **Laroche, Douady & Fauve**. "Convective flow of granular masses under vertical vibrations". *Journal of Physics, France*, Vol. 50, No. 7, 1990.
12. **Evesque & Rajchenbach**. "Instability in a sand heap". *Physics Review Letters*, Vol. 62, No. 1, 1989.
13. **Evesque**. "Comment on: Convective flow of granular masses under vertical vibrations". *Journal of Physics, France*, Vol. 51, No. 8, 1990.
14. **Melo, Umbanhowar & Swinney**. "Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer". *Physical Review Letters*, Vol. 72, No. 1, 1994
15. **Coulomb, C.A.** "Essai sur une application des règles de maximis et minimis, à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture". *Memories de Mathematiques de l'Academie Royal des Sciences*, (1776), Vol. 7, pp 343-382.
16. **Jenike, A.W.** "Gravity flow of solids". *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, 1940.

17. **Reynolds, O.** "On the dilatancy of composed media of rigid particles in contact". *Phil. Mag.*, (1885), vol. 20, pp 469-481.
18. **Cowin S.C. y Mehrabadi M.M.** "On the double-sliding free rotating model for the deformation of granular materials". *J. Mech. Phys. Solid*, (1981), vol. 29, pp. 269-282.
19. **Schofield N. y Wroth C.P.** "Critical state soil mechanics". McGraw-Hill, New York, 1968.
20. **Bagnold, R.A.** "Experiments on gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear". *Proc. Roy. Soc. London.*, (1954), vol. A225, pp. 49-63.
21. **McTigue, D.F.** "A model for stress in shear flow of a granular material". *Proc. U.S.-Japan Seminar On Continuum Mechanical an statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials.* (1978), pp. 266-271.
22. **Savage S.B. y Jeffrey D.J.** "The stress tensor in a granular flow at high Shear Rates". *J. fluid. Mech.*, (1981), vol. 110, pp. 255-272.
23. **Jenkins, J.T. y Savage S.B.** "A Theory for rapid flow of identical, smooth and nearly elastic particle". *J. Fluid Mech.*, (1983), vol. 130, pp 187-202.
24. **Haff, P.K.** "Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon". *J. Fluid Mech.*, (1983), vol. 134, pp. 401-430.

## BIBLIOGRAFÍA

1. **Zenit Camacho Roberto.** "Análisis y diseño reológico de un silo". Tesis, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, D.F., 1992 .
2. **White Frank M.** "Mecánica de fluidos". Editorial Mc.Graw-Hill. México, 1993
3. **Beer y Jhonston.** "Mecánica vectorial para ingenieros". Tomo II : Dinámica. Mc. Graw-Hill. México 1992.