

45
207.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**DEFORMACIÓN DE UN ANILLO
DE COSSERAT EN EL PLANO**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A :
J O R G E V I V E R O S R O G E L

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. JORGE IZE LAMACHE



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MÉXICO, D.F. 1997





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Deformación de un anillo de Cosserat en el plano
realizado por Viveros Rogel Jorge

con número de cuenta 9150705-5 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario


J. Gilberto Flores

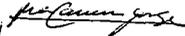
Dr. Jorge Ize Lamache

Propietario


Dra. María del Carmen Jorge y Jorge

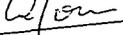
Dr. Gilberto Flores Gallegos

Propietario


Dra. Antonmaría Minzoni Alessio

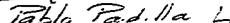
Dra. María del Carmen Jorge y Jorge

Suplente


Dr. Pablo Padilla Longoria

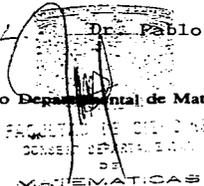
Dr. Antonmaría Minzoni Alessio

Suplente


Dr. Pablo Padilla Longoria

Dr. Pablo Padilla Longoria

Consejo Departamental de Matemáticas


FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Deformación de un anillo de Cosserat en el plano (Soluciones simétricas)

Jorge Viveros Rogel

Contenido

0	introducción	7
1	preliminares	13
1.1	métodos de estudio	13
1.1.1	método de continuidad	17
1.1.2	primer método	17
1.1.3	segundo método	18
1.1.4	tercer método	19
1.1.5	reducción de Ljapunov-Schmidt	20
1.2	grado de Brouwer	23
1.2.1	propiedades	26
1.3	grado de Leray-Schauder	28
1.4	resultados importantes	30

2 elementos	35
2.1 estado de referencia	36
2.2 estado deformado	40
2.3 ecuaciones de movimiento	45
2.4 variables de esfuerzo	52
2.5 constricciones	54
2.6 deformaciones básicas	60
2.6.1 elongación pura	61
2.6.2 Deformación pura	61
2.6.3 torsión pura	62
2.6.4 flexión pura	63
2.7 invarianza	65
2.8 ecuacioness constitutivas	69
2.9 condiciones de monotonicidad	72
2.10 condiciones de crecimiento	75
2.11 $(\eta, \nu, \mu) \leftrightarrow (H, N, M)$	77

<i>CONTENIDO</i>	3
3 deformación en un plano	83
3.1 estado de referencia	84
3.2 estado deformado	85
3.3 variables de esfuerzo	87
3.4 constricciones	89
3.5 ecuaciones de equilibrio	92
3.6 ecuaciones constitutivas	95
3.7 condiciones de monotonicidad	95
3.8 condiciones de crecimiento	96
3.9 condiciones de paridad e iniciales	98
3.10 integración de las ecuaciones de equilibrio	99
4 deformación de un anillo horizontal	101
4.1 configuración de referencia	103
4.2 configuración deformada	103
4.3 la fuerza de cuerpo	105
4.4 ecuaciones constitutivas	107
4.5 ecuaciones de equilibrio	107
4.6 condiciones generales	108
4.7 ecuaciones del anillo	109

4.8	simetrías	110
4.9	soluciones triviales	113
4.10	interpretación de las soluciones triviales	116
4.11	formulación integral	117
4.11.1	sistema integral	117
4.11.2	cantidades conservadas	120
4.11.3	condiciones necesarias: caso 2π -periódico	120
4.11.4	condiciones necesarias: caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico	122
4.11.5	cotas sobre H, N, M	125
4.11.6	ceros de $\eta(s)$	126
4.11.7	problema de punto fijo	127
4.12	linearización	129
4.13	$N(\mathcal{A}(\lambda))$	132
4.14	soluciones D_n -simétricas	135
4.15	crecimiento de $q(\lambda)$	140
4.16	$R(\mathcal{A})$	144
4.17	reducción de Ljapunov-Schmidt	149
4.18	ecuación de bifurcación	153
4.19	ecuaciones para r_1 y r_2	157
4.20	bifurcación global	162

<i>CONTENIDO</i>	5
4.20.1 propiedades nodales	165
4.20.2 crecimiento de las ramas bifurcadas	168
4.20.3 linealización	170
caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico	172
caso 2π -periódico	175
Conclusiones	182
Referencias	183

Capítulo 0

Introducción

Este trabajo tiene que ver con el estudio de los estados que adopta una barra en forma de anillo (o toroidal), sujeta a moverse siempre sobre el plano horizontal, cuando sobre ella actúa una fuerza de presión hidrostática uniforme, también horizontal. Con esto se quiere decir, que la fuerza tiene la misma intensidad sobre todos los puntos de la barra, y que actúa siempre perpendicular a una línea que representa la forma que tiene aquella, y que se denomina *eje de la barra*.

Los estados en los que estamos interesados, no son cualesquiera, sino aquellos que tienen ciertas propiedades de simetría; por ejemplo, simétricos respecto de algún eje en el plano horizontal.

Antes de intentar abordar el problema en sí, es importante entender el *modelo matemático del anillo*. Esto requiere de entender varios conceptos previamente. Por ejemplo, se ha dicho que el anillo es una *barra*, así que es necesario dar una definición en términos matemáticos de este concepto. Como se verá en el segundo capítulo, en realidad no hay una definición generalmente aceptada, mucho menos precisa, de tal término. Nos conformaremos con saber que la “barra” a la que nos referimos, es una que recibe el distintivo de ser *elástica y no lineal*, en los siguientes sentidos: 1. es un cuerpo lo suficientemente *delgado* como para poder ser descrito en términos de la deformación del ya mencionado eje de la barra, y la orientación de una base de vectores ortonormales, sobre cada punto del eje, y que se encargan de estimar el cambio en la posición de los puntos fuera del mismo (es decir, el cambio en la estructura). 2. es *elástica* en tanto que se tenga una idea de cómo es que esta responde a las fuerzas y torcas que actúan sobre ella; con esto queremos decir, que debemos ser capaces de establecer ecuaciones que describan, no solamente el equilibrio de la barra, sino también su *dinámica*. Por otro lado, como no estamos interesados en plantear ecuaciones para cada punto, queremos *resumir* estas mismas en

ecuaciones que describan la deformación de *secciones completas* de la barra. En este punto entra la hipótesis más fuerte del modelo: se definirán las llamadas *secciones transversales*, las cuales, junto con el eje, vienen a completar todo lo que se necesita saber sobre la deformación de la barra. Las secciones transversales en el estado base, (libre de fuerzas), se suponen *perpendiculares* al eje de la barra. Más aún, se supondrá que las secciones transversales *son siempre planas*, y lo único que puede cambiar además de su tamaño y forma, una vez que la barra se somete a alguna fuerza, es la orientación que estas tienen, respecto del eje; es decir, después de la deformación, las secciones transversales no tienen por qué seguir siendo perpendiculares al eje. Un cuerpo que satisface la propiedades antes citadas, recibe el nombre de “barra de Cosserat”. Aquí es en donde entra la base ortonormal de vectores mencionada en el punto anterior, pues con ella se determina la nueva orientación de las secciones transversales en cada punto; razón por la cual se les llama *los vectores directores*. Así pues, el plan es obtener ecuaciones para las fuerzas y torcas sobre la barra, en términos de la fuerza sobre sus secciones transversales y que se denominan *fuerzas de contacto*; de la misma manera se definirán las *torcas de contacto*. Estas no son todas las torcas y fuerzas que pueden actuar sobre la barra. Entonces, a lo que nos referimos con “tener una idea” de la respuesta de la barra a las fuerzas y torcas que sobre ella actúan es, precisamente, a tener una expresión para la fuerza y la torca de contacto, y que conforman lo que se llamará *las ecuaciones constitutivas*. Una hipótesis razonable sobre las ecuaciones constitutivas, será la de suponer que dependen de las componentes del vector tangente al eje de la barra (en cada punto) en la base de vectores directores, y de las componentes (en la base canónica $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ de las derivadas de estos mismos, respecto de la longitud de arco en el estado de referencia; a este grupo de seis componentes se le conoce con el nombre de *variables de esfuerzo*). El término “no lineal” viene, por supuesto, de que las ecuaciones constitutivas dependen en forma no lineal de las variables de esfuerzo.

La parte del modelo (capítulos 2 y 3), no tendría que haber sido tan larga; pero se le dedicó mucho tiempo para justificarla bien y, creo, constituye una discusión muy completa de algunos de los conceptos principales para barras, que se encuentran en la referencia para esta parte: [Ant]. El capítulo 2 se dedica al caso de la deformación de una barra en el espacio, mientras que el tercero se dedica al caso plano (el caso del problema discutido en el capítulo IV). De estos dos capítulos, el lector interesado está obligado a leer, por lo menos, la parte de la deducción de las ecuaciones de equilibrio, la discusión de las variables de esfuerzo y las hipótesis sobre las funciones constitutivas (incluyendo la demostración de la invertibilidad del mapeo que asocia las variables de esfuerzo con las funciones constitutivas -muy importante para todo el estudio posterior-). Creemos que estas partes justifican por sí solas el estudio del caso de la deformación en el espacio.

En el capítulo IV se reescriben las ecuaciones de equilibrio para el caso de un anillo, que en su estado base (configuración de referencia) resulta ser un círculo de radio unitario. El

lector podrá encontrar este problema, discutido en el artículo de T. Healey ([Hea]), desde un punto de vista distinto del que aquí se empleará. En el artículo antes mencionado, se hace énfasis en las propiedades del conjunto completo de ecuaciones. Entonces, en la cuarta parte de este trabajo, todavía se tratan, muy al principio, algunas condiciones sobre las ecuaciones constitutivas. En esta sección se introducen las llamadas *relaciones de esfuerzo-desplazamiento* y que tocan el aspecto “geométrico” de la deformación; estas no son otra cosa que descomponer el vector de posición en términos de la base de vectores directores, derivar respecto de la longitud de arco, e igualar la expresión obtenida con la que se venía manejando anteriormente, y que involucraba una parte de las variables de esfuerzo. Estas ecuaciones son muy importantes, pues con ellas se puede demostrar que el anillo no puede pasar directamente del estado circular, a otro con una simetría particular; en este sentido el artículo de Healey es muy claro al remarcar la importancia de dichas relaciones, pues ignorarlas puede hacer un poco más elaborado el tratamiento del problema. Es importante que el lector revise la parte en la que se obtiene una solución estacionaria para el problema (la llamada *solución trivial*) junto con su interpretación, ya que, cuando comencemos a hablar de buscar soluciones con alguna simetría en particular, rápidamente se visualiza la configuración que debe de tener el anillo (el lector también puede consultar la lámina final de figuras, al término del capítulo IV).

La necesidad de buscar soluciones con una simetría muy particular, viene de que es conveniente reducir la dimensión del núcleo de la linearización del conjunto completo de (6) ecuaciones del anillo, pues para propósitos del método que se utilizará, cuanto más baja sea la dimensión del núcleo, más tratable se hace el problema. Cabe aquí precisar, que la simetría de la que tanto se ha hablado, significa buscar soluciones al conjunto de ecuaciones, que poseen propiedades de paridad y periodicidad muy específicas. En este caso, solamente nos dedicaremos a la búsqueda de soluciones con periodicidad $\frac{2\pi}{n}$, $n \geq 1$.

El estudio de bifurcación en sí, está dividido en dos partes:

la parte que concierne a la existencia y comportamiento de soluciones que se desprenden de la solución trivial y en una vecindad de la misma, y que se ha llamado “bifurcación local”. El estudio se hace, básicamente, partiendo de las ecuaciones diferenciales, y no se usa nada más que el teorema de la función implícita; una vez que ya se ha justificado la existencia y la unicidad de una rama que bifurca, vía el *método de reducción de Ljapunov-Schmidt*.

La segunda parte trata sobre el comportamiento de las ramas obtenidas, lejos de la solución trivial. El planteamiento es distinto que el dado en la sección anterior, pues utiliza la formulación integral de las ecuaciones y el tratamiento del problema en términos de encontrar los puntos fijos de cierto mapeo, que resulta ser de la forma identidad menos compacto. Para esto fué preciso redefinir el espacio de trabajo, a uno que resultara *lineal*.

Ciertamente esto no es necesario para el caso de soluciones de período $\frac{2\pi}{n}$, para $n > 1$; pero para el caso 2π —periódico sí se requirió, ya que el conjunto de soluciones a la formulación integral, con este periodo, se acompaña por condiciones que dependen no linealmente de las variables de esfuerzo, y si lo que se desea es emplear un argumento de contracción, necesitamos que tales condiciones dependan linealmente de sus variables. El método sigue siendo entonces, linealizar la ecuación, justificar una deformación que permita eliminar la parte que involucra los términos de orden cuadrático y mayores, proyectar sobre las bases de Fourier que correspondan, y usar los resultados de bifurcación conocidos que, en pocas palabras, dicen que para el tipo de problema que nosotros tenemos, la pregunta sobre la existencia de las ramas lejos de la solución trivial, se reduce a probar que los determinantes de las matrices que se obtendrán para los distintos modos (cuando menos alguno), cambie de signo al cruzar un valor crítico de la intensidad, λ , de la fuerza aplicada.

Esto me lleva, irremediablemente, a hablar sobre el primer capítulo. En él se ha pretendido dar un resumen muy breve, de las herramientas que se usarán para el análisis del cuarto capítulo. Las partes más importantes son las que tratan sobre el método de reducción de Ljapunov-Schmidt, la definición del grado topológico y los resultados básicos sobre teoría de bifurcación y que tienen que ver con nuestro problema. Estoy de acuerdo en que los métodos que se trataron en la primera sección de este capítulo, aparte de el de Ljapunov-Schmidt, pueden ser obsoletos. En mi defensa lo único que puedo decir, es que traté de dar un panorama de la forma de abordar este tipo de problemas y nada más; si el lector los quiere saltar, pues muy bien, el que no, lo único que le puede pasar es que termine con un sabor añejo en la boca, totalmente inofensivo. Quisiera agregar en este sentido, que los libros “modernos” sobre teoría de bifurcación que he tenido ocasión de consultar me resultaron, en su mayoría, de difícil lectura (si no es que incomprensibles después de las primeras 30 páginas). Es por esta razón que encontré las notas referidas como [Nir1] y [Nir2] de gran consuelo. Aunque el material en ellas “ya está superado” sigo recomendando a quienes se interesen en este tipo de temas, las lean sin meterse demasiado en los detalles, como un primer contacto con la filosofía de este campo, ya muy avanzado hoy en día. Además, éstas cuentan con una muy buena bibliografía de textos que se pueden ver citados una y otra vez en libros que tratan este tipo de temas, y que distingue a las personas que han hecho escuela en esta parte de las matemáticas.

Nota del autor

Normalmente, en este sitio se acostumbra poner algo conciliatorio, que tiende a atenuar muchos de los sinsabores (en casi todos los casos que me ha tocado ver se dan) que se tuvieron durante el tiempo en el que se estuvo trabajando en este proyecto. Me he tomado la libertad para reemplazar esa parte “romántica”, para decir unas palabras que considero necesarias, so riesgo de ser mal interpretado.

Cuando un individuo con intenciones de continuar sus estudios profesionales comienza su trabajo de tesis, lo hace con un poco de resignación, pues no puede dejar de considerarlo, en parte, como “un mero trámite”. No es mi caso, el tiempo que dediqué a este trabajo (que no fué poco) siempre lo consideré como algo muy serio que, en mi opinión, debe hacerse. Por eso es que ahora me parece bastante natural mi ingenuidad, al creer que podría hacer algo que me sirviera no solamente a mí, sino, quizás, a alguien más. Esa fué la razón de hacer un trabajo innecesariamente extenso, en el cual se revisó con cuidado y más de una vez, hasta la redacción de cada página. Naturalmente eso agotó mi tiempo, y confieso que la parte final del capítulo IV (bifurcación global), pagó las consecuencias. Como el lector lo notará, no se hicieron explícitos todos los cálculos, lo cual era la tendencia al principio del mismo capítulo y los anteriores. Así mismo, tampoco tuve tiempo de reflexionar de verdad, los resultados y los pendientes que se mencionaron en las conclusiones.

Soy ingenuo al pensar que mi caso podría ser una excepción de todos aquellos que hacen una tesis de licenciatura para no ser leída por nadie después del examen. De cualquier forma, quiero decir lo siguiente, que se desprende del último renglón del párrafo anterior: la elección del tema de tesis, lo mismo que del asesor del trabajo, deben hacerse con cuidado. El tema debe elegirse de acuerdo con los conocimientos que se tengan y se requieran para hacer un trabajo original, o por lo menos propio. Es un reto, pero no debe ser un imposible. El estudiante debe estar consciente de que pasará por todas las etapas por las que se debe pasar: “muy motivado”, estado que rápidamente se convierte en “muy ocupado”, pasando por “medio perdido”, “un poco angustiado” (depende del caso), “cansado”, para terminar con “(muy) satisfecho”. En cuanto a la elección del asesor, aún no me queda claro si uno los elige o ellos se dejan elegir. De cualquier forma, en mi opinión, deber ser una persona con la que se tenga un acercamiento de algún tipo (interés en el mismo campo de estudio, gusto por transmitir conocimientos de algún área de investigación, etc.). Creo que si uno es dedicado y responsable, estos son los únicos dos factores que se deben considerar antes de empezar algo que podría terminar siendo un infierno muy exclusivo. Por supuesto que esta es una opinión muy personal, pero que con todo y eso contiene partes que son “vox populi” en las esferas de estudiantes, que se dicen pero no se escriben (mucho menos se publican!) ya que nadie es tan “tonto”. Creo

que solo el tiempo me podría dar la razón, o (si resultara más afortunado de lo que ya soy) el olvido del perdón. Bueno.

He tenido la suerte de trabajar en alguna u otra forma con varios de los miembros del departamento de matemáticas y mecánica de este instituto. A ellos les estoy muy agradecido por abrirme las puertas de par en par como si me lo mereciera por alguna extraña razón o simplemente como si ese fuera mi derecho. Uno a uno fui conociendo a los investigadores del departamento de matemáticas y mecánica y, debo decirlo, muy por encima de todo no deja de maravillarme el compañerismo y el entusiasmo con el que siempre se trabaja. A todos los que hemos tenido el privilegio de haber entrado en este departamento, nos han cambiado para siempre. De verdad no tengo palabras para agradecerles lo mucho que han hecho por nosotros.

Para mi asesor Jorge Ize, a quien respeto mucho, de la misma forma quiero darle las gracias, a la vez que aprovechar la ocasión para decir que, después de todos estos años de "conocerlo", sigo sin entenderlo. Sé de sobra que las palabras de gratitud, dirigidas a él, son palabras al viento, pues me consta, que no las escucha. De todas formas, creo que el año pasado ya tuvo suficientes hasta el empalago.

Para terminar necesito decir que, después de todo lo que me he quejado egoístamente, no quisiera ofender a nadie dedicándole este trabajo. Sin embargo, y muy en el fondo, éste fué otorgado al pilar de mi familia: mi madre; y a mis dos hermanos, pues ellos son mucho más valientes y maduros que yo.

I.I.M.A.S.
Ciudad Universitaria.
México, D.F. a 1 de Septiembre de 1997.

Capítulo 1

Preliminares

En la primera sección de este capítulo se presenta una revisión rápida de algunos de los métodos empleados en problemas no lineales, terminando con aquél que será utilizado en el problema del capítulo IV. En las secciones segunda y tercera se establecen las “herramientas” que serán empleadas más adelante (definición y propiedades del grado topológico en dimensión finita e infinita). En la cuarta y última sección se mencionan los resultados más importantes de la teoría de bifurcación, y que conciernen a la existencia de ramas de soluciones no triviales; para terminar con una breve nota sobre las propiedades de simetría que puede presentar un sistema de ecuaciones.

1.1 Algunos métodos para el estudio de problemas no lineales

Una gran cantidad de problemas en matemáticas se reduce a encontrar el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen una ecuación no lineal de la forma:

$$F(x,y) = 0 \quad .$$

Por lo regular, F es un mapeo de la forma $F : X \times Y \longrightarrow Z$, donde X, Y y Z son espacios de Banach, y uno de los espacios X o Y , digamos Y se denomina *el espacio de los parámetros*. Al conjunto

$$\Sigma \equiv \{(x,y) \in X \times Y : F(x,y) = 0\} \quad ,$$

se le denomina *conjunto solución*. En la mayoría de los casos se parte de la premisa de que el punto $(0, 0)$, por decir algo, está en Σ . Supongamos entonces que ese es nuestro caso, y que nos interesa encontrar otros puntos $(x, y) \in \Sigma$, tales que $(x, y) \neq (0, 0)$, $(x, y) \sim (0, 0)$.

Lo único que se tiene como base para proceder, es el conocido teorema de la función implícita en su forma más simple, y que dice que si $f(x, y)$ es una función escalar, definida en una vecindad del origen en el plano $X - Y$ tal que $f(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial}{\partial x} f$ es continua cerca del origen con $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \neq 0$; entonces se puede resolver de manera única y diferenciable para x en términos de y , $x = \hat{x}(y)$, donde $y \sim 0$, $\hat{x}(y) \sim 0$, tal que $f(\hat{x}(y), y) = 0$. Sabemos que la demostración se basa en la linealización de la ecuación, y escribiendo después

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)x + R(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{R(x, y)}{\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)},$$

la cual se resuelve por iteraciones para y pequeña.

Parece entonces natural buscar escribir el problema de forma análoga al caso escalar; para lo cual es necesario definir para F el equivalente de la derivada en el sentido tradicional:

Definición: Se dice que el mapeo no lineal $F : X \rightarrow Z$, X y Z espacios normados, tiene una derivada de Fréchet en x_0 si existe un operador lineal A tal que, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene una $\delta(\varepsilon)$ con la propiedad de que:

$$|F(x_0 + x) - F(x_0) - Ax| \leq \varepsilon |x|, \text{ para } |x| < \delta.$$

A partir de la definición, es claro que el operador A , en caso de existir, es único.

Por ejemplo, sea Ω un dominio¹ en R^n , ($R^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$), y sea $C^m(\bar{\Omega})$ el espacio de funciones escalares m veces continuamente diferenciables en $\bar{\Omega}$, con la norma:

$$|u|_m = \sum_{j=0}^m |D^j u|_0,$$

donde $|D^j u|_0 \equiv \max_{\Omega} |D^j u|$; $D^j[\]$ un operador diferencial que está formado por sumas de operadores de la forma $\partial_{x_1}^{m_1}(\dots)\partial_{x_n}^{m_n}$, con $|m| \equiv \sum_i m_i = m$, (todas las posibles combinaciones).

Supongamos que tenemos una relación no lineal entre una función $u \in C^m(\bar{\Omega})$ y sus derivadas hasta orden m , de la forma:

¹Un dominio es un conjunto conexo, abierto y no vacío.

Teorema: (Teorema de la función implícita)

Sea F un mapeo definido en una vecindad del origen en $X \times Y$, con derivada de Fréchet en x en el punto $(0, 0)$. Supóngase que F se puede escribir como: $F(x, y) = Ax + R(x, y)$, donde:

- (i) R es continua en x y en y .
- (ii) $|R(x_1, y) - R(x_2, y)| = o(\varepsilon) |x_1 - x_2|$ para $|x_1|, |x_2|, |y| < \varepsilon$.
- (iii) A tiene un inverso acotado A^{-1} definido para toda Z .

Entonces, para y pequeña, $F(x, y) = 0$ tiene una única solución, $x = \hat{x}(y)$ cerca del origen. La demostración se hace siguiendo los mismos pasos que se usaron para demostrar el teorema en su forma más simple (por iteraciones de $x_{n+1} = -A^{-1}R(x_n, y)$, $y \sim 0$ fija).

Prueba (ver [Nir1]).

Una generalización del teorema anterior la constituye el siguiente

Teorema: (L.H. Graves. 1950)

Sea G un mapeo que manda una vecindad del origen del espacio X en el espacio Z , tal que $G(0) = 0$. Supóngase que G tiene una derivada de Fréchet, A , en el origen y que está acotada. Supóngase además que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon)$ tal que $|G(x_1) - G(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2|$ para $|x_1|, |x_2| \leq \delta(\varepsilon)$. Entonces:

- (i) Si $Ax = y$, existe una solución para $y - G(x) = 0$ para y pequeño (pero no necesariamente es única).
- (ii) Si además A es uno a uno, entonces la solución es única cerca del origen.

Por lo tanto, bajo las condiciones del teorema de la función implícita, se acaba de ver que, dado el punto $(0, 0)$, solución de $F(x, y) = 0$; es posible encontrar otras soluciones cercanas a este, de la forma $(\hat{x}(y), y)$, $(y \sim 0, \hat{x}(y) \sim 0, x(0) = 0)$. A esta solución se le conoce como solución trivial del problema. El punto de partida del análisis del problema anterior, consiste en encontrar dicha solución trivial.

Hay varias formas de abordar la búsqueda de soluciones al problema $F(x, y) = 0$ y que el lector encontrará en cualquier libro sobre análisis no lineal bajo el título de **Teoría de bifurcación**; a continuación sólo se mencionarán algunas, poniendo especial atención en aquella que se usará en el capítulo IV para el problema de este trabajo (la reducción de Ljapunov-Schmidt).

1.1.1 Método de continuidad

Considérese un mapeo $F : D(f) \subset X \times Y \ni (x, y) \longrightarrow z \in Z$,
 X, Y, Z espacios de Banach. Queremos encontrar las soluciones de $F(x, y) = 0$.

Supóngase que F es un miembro de la familia de mapeos F_t que depende continuamente del parámetro $t \in [0, 1]$ (o incluso diferenciable), tal que $F_1 = F$. Sea T el conjunto de valores de t para los cuales el problema $F_t(x, y) = 0$ tiene solución.

El método de continuidad consiste en encontrar la familia de mapeos F_t , tal que $t = 0 \in T$ y probar que:

- i T es abierto.
- ii T es cerrado.

Se sigue entonces que T es todo el intervalo (cierto, supongamos que $T \in [0, 1]$ es abierto y cerrado. Como $0 \in T$ y T es cerrado, se tiene que $[0, \alpha] \subset T$, $0 < \alpha < 1$. Pero como T es abierto, entonces $[0, \alpha + \varepsilon] \subset T$; $\alpha < \alpha + \varepsilon < 1$ (ε independiente de α). Otra vez, como T es cerrado, $[0, \alpha + \varepsilon] \subset T$, y así se sigue hasta llenar todo el intervalo $[0, 1]$). Una demostración del empleo de este método puede verse en [Nir1] (sec. 7.5); donde se prueba la existencia de soluciones periódicas para la ecuación $\ddot{u} = u\alpha(t, u, \dot{u}) + \beta(t, u, \dot{u})$, donde α y β dependen continuamente de sus argumentos y son periódicas de periodo 1; (además de ciertas hipótesis razonables sobre su crecimiento).

1.1.2 Primer método: reducción sobre $N(A)$

Supongamos que se tiene el problema escrito en la forma dada por el teorema de la función implícita ($F(x, y) = 0 \Leftrightarrow Ax + R(x, y) = 0$), con la diferencia de que ahora A no tiene un inverso acotado, razón por la cual, la unicidad de la solución no está garantizada; incluso ni siquiera la existencia. Supongamos además que A es un operador acotado con rango $R(A)$ cerrado, tal que junto con su núcleo $N(A)$ admiten proyecciones Q y P , respectivamente. De manera que si $x \in X$, se puede escribir $x = \underbrace{x_1}_{\in N(A)} + \underbrace{x_2}_{\in X_2}$, y si $z \in Z$, $z = \underbrace{z_1}_{\in R(A)} + \underbrace{z_2}_{\in Z_2}$; es decir, se tiene que $N(A) \cap X_2 = \{0\}$, $N(A) \cup X_2 = X$, lo cual se escribe $X = N(A) \oplus X_2$, de igual forma $Z = R(A) \oplus Z_2$. Bajo estas hipótesis, A tiene un pseudo-inverso K sobre $R(A)$ (ver [Nir1] lema 4.4); de manera que se puede escoger $P = Id - KA$ (Id la identidad en X). Si se define al operador $K' \equiv KQ$, este resulta

ser una extensión de K sobre Z ($K' : Z \rightarrow X$). Entonces, si x es una solución de $Ax + R(x, y) = 0$, se tiene que $x_0 \equiv x + K'R(x, y)$ pertenece a $N(A)$.

En esencia, de lo que se trata en el método presente y los dos que le siguen, es de implementar unas nuevas variables que se denotarán por x_0 , y encontrar una ecuación adicional, llamada la ecuación de bifurcación, que deben satisfacer dichas variables para que el problema $F(x, y) = 0$ tenga solución.

Tomemos entonces un elemento x_0 en $N(A)$, y consideremos el problema auxiliar de encontrar x solución a la ecuación:

$$x + K'R(x, y) = x_0 \quad ,$$

y dado. Para $|x_0|$ y $|y|$ suficientemente pequeñas, el teorema de la función implícita (tomando $F = x + K'R(x, y) - x_0$, $A = Id$, $Z = Y \times N(A)$) permite resolver de manera única para x en términos de y y x_0 : $x = \hat{x}(x_0, y)$. Esta resultará también solución de la ecuación original $Ax + R(x, y) = 0$, siempre y cuando: $AK'R(x, y) = R(x, y)$ es decir:

$$(Id - AK')R(x, y) = 0 \quad .$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de bifurcación del problema; la cual es una relación que deben satisfacer y y x_0 . Ciertamente resolver la ecuación de bifurcación, otra vez vía el teorema de la función implícita, también constituye un problema no lineal; la ventaja en este caso radica en una reducción del número de ecuaciones; es decir, se trata de un problema que en la práctica resulta ser de dimensión finita ($\dim R(Id - AK') < \infty$). También a menudo sucede que la ecuación de bifurcación no puede resolverse completamente para x_0 en términos de y , sino para algunas de sus componentes en términos de las restantes y de y .

1.1.3 Segundo método: sistema aumentado

Considérese el sistema aumentado:

$$\begin{aligned} Ax + R(x, y) + z &= 0 \\ Px &= x_0 \end{aligned}$$

donde, al igual que antes, $y \in Y$, $x_0 \in N(A)$. Se buscará resolver para x y $z \in (Id - Q)Z$. Ahora, la linealización del sistema anterior es:

$$\begin{aligned} Ax + z &\equiv f \in Z \\ Px &= x_0 \in N(A) \quad , \end{aligned}$$

y tiene una única solución continua $x = \hat{x}(f, x_0)$, $z = \hat{z}(f, x_0)$. Entonces, por el teorema de la función implícita es posible resolver para x y z en términos de y y x_0 : $x = \hat{x}(x_0, y)$, $z = \hat{z}(x_0, y)$. La solución \hat{x} será también solución al problema original, siempre y cuando $\hat{z}(x_0, y) \equiv 0$; la cual es la ecuación de bifurcación para el problema. No es difícil probar que los dos métodos antes citados son equivalentes:

1 \Rightarrow 2 : Supongamos que x es la solución del primer método; es decir:

$x + K'R(x, y) = x_0$ ($\in N(A)$); entonces, aplicando A de ambos lados:

$Ax + AK'R(x, y) = 0$, como se definió al operador K' como $K' = KQ$, la igualdad anterior resulta ser: $Ax + QR(x, y) = 0$. Definiendo entonces a z como

$z \equiv (Q - Id)R(x, y)$ y substituyendo en el lado derecho de la primera de las ecuaciones al principio de esta sección, es inmediato que (x, z) satisfacen la igualdad. Por otra parte, dado que se tomó $P = (Id - KA)$, se tiene que:

$Px = (Id - KA)x = x - KAx$; pero $x = x_0 - K'R(x, y)$, entonces

$Px = x_0 - K'R(x, y) + KAK'R(x, y) = x_0$; y por lo tanto se satisface la segunda ecuación al principio de esta sección.

1 \Leftarrow 2 : Como $z \in (Id - Q)Z$, se tiene que

$$Q(Ax + R(x, y) + z) = \underbrace{Ax + QR(x, y)}_{\in R(A)=QY} = \underbrace{(Q - Id)R(x, y) - z}_{\in (Id-Q)Y};$$

lo cual no es posible, a menos que ambos lados sean cero. Por lo tanto: $KAx + KQR(x, y) = 0$, o bien, de la definición de P , $(Id - P)x + KQR(x, y) = 0$; usando entonces que $Px = x_0$ y $KQ = K'$, se tiene la ecuación del primer método. \square

1.1.4 Tercer método: (P. Ungar)

Este método se aplica en el caso $\dim N(A) = \dim (Id - Q)X = \text{codim} R(A) = n$. Sea B un mapeo lineal de $N(A)$ sobre $(Id - Q)Z$ y sea $W \equiv BP$. $T \equiv (A + W)^{-1}$ es el inverso (por la derecha) de A , continuo y definido sobre todo Z . Se plantea entonces el problema auxiliar:

$$x + TR(x, y) = x_0,$$

$x_0 \in N(A)$, cuya solución $x = \hat{x}(x_0, y)$ asumimos, existe. Entonces, reescribiendo la ecuación $Ax + R(x, y) = 0$ como $(A + W)x + R(x, y) = Wx$, es decir:

$$x + TR(x, y) = TWx,$$

se tiene que $\hat{x}(x_0, y)$ resuelve $Ax + R(x, y) = 0$, siempre y cuando $TW\hat{x} = x_0$, es decir $W\hat{x} = (A + W)x_0 = Wx_0$; es decir, si $W(\hat{x}(x_0, y) - x_0) = 0$ (ecuación de bifurcación para este caso).

1.1.5 Reducción de Ljapunov-Schmidt

Este es el método que se utilizará para tratar el problema en el capítulo IV. Para estandarizar la notación, de ahora en adelante llamaremos a $\lambda \in \Lambda$ el conjunto de parámetros de la ecuación.

Supongamos que podemos escribir el mapeo F de nuestro problema como:

$$F(x, \lambda) = \mathcal{A}x - \mathbf{T}(\lambda)x - \mathbf{g}(x, \lambda)$$

donde $F : B \times \Lambda \rightarrow E$; \mathcal{A} es un operador de Fredholm; es decir, \mathcal{A} es continuo, $\dim N(\mathcal{A}) = d < \infty$, $\text{codim} R(\mathcal{A}) = d^* < \infty$. Además supondremos que $\mathbf{T}(\lambda)$ es continuo con $\mathbf{T}(0) = \mathbf{0}$, $\|\mathbf{T}(\lambda)\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ y que $\mathbf{g}(x, \lambda) = o(\|x\|)$; uniforme en λ .

Sea P la proyección de B sobre $N(\mathcal{A})$ y Q la proyección de E sobre $R(\mathcal{A})$, entonces se tiene la descomposición ortogonal:

$$\begin{aligned} B &= N(\mathcal{A}) \oplus B_2 \\ E &= E_2 \oplus R(\mathcal{A}) \end{aligned} ,$$

B_2 un subespacio cerrado de B y $\dim(E_2) = d^*$. De manera que $x \in B$ tiene una

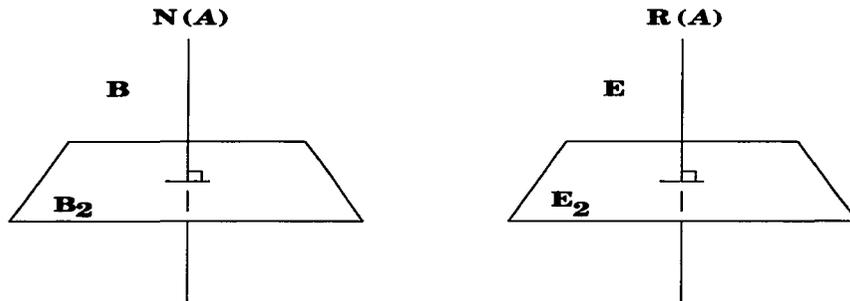


Figura 1.1: Descomposición de los espacios B y E .

descomposición única de la forma $x = \underbrace{x_1}_{=Px \in N(\mathcal{A})} + \underbrace{x_2}_{\in B_2}$. Siendo \mathcal{A} continuo y uno a uno

de B_2 sobre $R(\mathcal{A})$, tiene un pseudo-inverso \mathcal{K} continuo, de $R(\mathcal{A})$ sobre B_2 . Entonces podemos hacer la siguiente descomposición sobre F (ver [Izel]):

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda) &= Q(\mathcal{A}(x_1 + x_2) - \mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) - \mathbf{g}(x, \lambda)) \oplus \\
 &\quad (Id_E - Q)(\mathcal{A}(x_1 + x_2) - \mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) - \mathbf{g}(x, \lambda)) \\
 \stackrel{\mathcal{A}x_2 \in R(\mathcal{A})}{=} & Q(\mathcal{A}x_2 - \mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) - \mathbf{g}(x, \lambda)) \oplus (Id_E - Q)(\mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) + \mathbf{g}(x, \lambda)) \\
 &= (\mathcal{A}x_2 - Q\mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) - Q\mathbf{g}(x, \lambda)) \oplus (Id_E - Q)(\mathbf{T}(\lambda)(x_1 + x_2) + \mathbf{g}(x, \lambda)) \\
 &= (\mathcal{A}(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))x_2 - Q\mathbf{T}(\lambda)x_1 - Q\mathbf{g}(x, \lambda)) \oplus \\
 &\quad (Id_E - Q)(\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \mathbf{T}(\lambda)x_2 + \mathbf{g}(x, \lambda)) \\
 &= \mathcal{A}(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)) \underbrace{(x_2 - (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q(\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \mathbf{g}(x, \lambda)))}_{\equiv H(x_1, x_2, \lambda)} \oplus \\
 &\quad (Id_E - Q)(\mathbf{T}(\lambda) \underbrace{(x_2 - (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q(\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \mathbf{g}(x, \lambda)))}_{\equiv H(x_1, x_2, \lambda)} + x_1 \\
 &\quad + \mathbf{g}(x, \lambda) + \mathbf{T}(\lambda)(Id_B \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q(\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \mathbf{g}(x, \lambda))) \\
 &= \mathcal{A}(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))H(x_1, x_2, \lambda) \oplus ((Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)(H(x_1, x_2, \lambda) + x_1) \\
 &\quad + (Id_E - Q)(\mathbf{g}(x, \lambda) + \mathbf{T}(\lambda)(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q(\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \mathbf{g}(x, \lambda)))) \\
 &= \mathcal{A}(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))H(x_1, x_2, \lambda) \oplus ((Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)H(x_1, x_2, \lambda) + \\
 &\quad (Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda) \underbrace{(\mathcal{K}Q(Id_B - \mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q)^{-1}\mathbf{T}(\lambda) + Id_B)}_{\equiv (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}} x_1 + \\
 &\quad (Id_E - Q) \underbrace{(Id_E + \mathbf{T}(\lambda)(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q)}_{\equiv (Id_E - \mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q)^{-1}} \mathbf{g}(x, \lambda)) \\
 &= \mathcal{A}(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))H(x_1, x_2, \lambda) \oplus (-(Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)H(x_1, x_2, \lambda) \\
 &\quad \underbrace{-(Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)(Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}P}_{\equiv B(\lambda)} x_1 \\
 &\quad \underbrace{-(Id_E - Q)(Id_E - \mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q)^{-1}\mathbf{g}(x, \lambda)}_{\equiv G(x, \lambda)}) \\
 &= (\mathcal{A} - Q\mathbf{T}(\lambda))H(x_1, x_2, \lambda) \oplus B(\lambda)x_1 + G(x, \lambda) - (Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)H(x_1, x_2, \lambda) .
 \end{aligned}$$

Ahora, el problema $F(x, \lambda) = 0$ tiene solución, siempre y cuando cada uno de los factores en la suma del último renglón sean cero. Si $\mathbf{g}(x, \lambda)$ es C^1 y $\|\mathbf{T}(\lambda)\| \leq C\|\lambda\|$; para λ y x pequeños, se puede demostrar que $H(x_1, x_2, \lambda) = 0$, tiene una única solución $x_2 = \hat{x}_2(x_1, \lambda)$, con $\|x_2\| \leq C\|x_1\|(\|\lambda\| + O(\|x_1\|))$; vía un argumento de contracción (ver siguiente acotación).

Teorema: (de contracción de Banach)

Sean E y \tilde{E} espacios de Banach.

- (1) Sea $F : E \rightarrow \tilde{E}$ una contracción, esto es, $\|F(X) - F(X')\| \leq k\|X - X'\|$; $0 < k < 1$. Si $\|X\|, \|X'\| \leq R$; es decir, están en la bola de radio R con centro en el origen (y por lo tanto $\|F(X)\| \leq R$), entonces F tiene un único punto fijo $\tilde{X} = F(\tilde{X})$ en la bola.
- (2) Sea $F : E \times \tilde{E} \rightarrow E$ continua, tal que $\|F(X, Y) - F(X', Y)\| \leq k\|X - X'\|$ $0 < k < 1$. Si $\|X\|, \|X'\| \leq R$, elementos de la bola de radio R con centro en el origen (y por lo tanto $\|F(X, Y)\| \leq R$), entonces existe una única $\tilde{X}(Y) = F(\tilde{X}(Y), Y)$ en la bola, continua en Y . Si además F es Lipschitz en Y , entonces $\tilde{X}(Y)$ es Lipschitz continua.

Prueba: (Igual que para el teorema de la función implícita; ejercicio).

Entonces, substituyendo la expresión anterior para x_2 en el resto de los factores del lado derecho de la descomposición para F (es decir en $B(\lambda)x_1 + G(x, \lambda) - (Id_E - Q)\mathbf{T}(\lambda)H(x_1, x_2, \lambda)$), se tiene que los ceros de F coinciden con los ceros de

$$B(\lambda)x_1 + G(x_1 + \hat{x}_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0$$

Ecuación de bifurcación.

A partir de la definición de $B(\lambda)$ resulta claro que $B(0) = 0$; además, como $x_1 \in N(\mathcal{A})$ cuya dimensión es finita (d) y el lado derecho de F es un elemento sobre E_2 el cual también es de dimensión finita (d^*), es obvio que $B(\lambda)$ es una matriz rectangular de $d \times d^*$; además $G(x_1 + \hat{x}_2(x_1, \lambda), \lambda) = o(\|x_1\|)$.

Nota : (propiedades espectrales de $\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)$)

Tomando $\mathbf{g} \equiv 0$:

Se tiene que $\mathbf{G} \equiv 0$, entonces de la definición de H se tiene que

$H(x_1, x_2, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x_2 = (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)x_1$, por lo tanto ya no es necesario usar ningún argumento de contracción para demostrar que se puede tener una expresión para x_2 en términos de x_1 y λ . Luego,

$F(x, \lambda) \equiv \mathcal{A}x - \mathbf{T}(\lambda)x = 0 \Leftrightarrow B(\lambda)x_1 = 0$; por lo tanto,

$x \in N(\mathcal{A}(\lambda)) \Leftrightarrow x_1 \in N(B(\lambda))$; es decir, si x^1, \dots, x^k , $(x^j = \underbrace{x_1^j}_{\in N(\mathcal{A})} + \underbrace{x_2^j}_{\in E_2})$ son lineal-

mente independientes en $N(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$; entonces x_1^1, \dots, x_1^k también son linealmente independientes en $N(B(\lambda))$, y lo mismo se tiene procediendo al revés, tomando un conjunto linealmente independiente en $N(B(\lambda))$: x_1^1, \dots, x_1^k y completando cada uno de sus miembros con $x_2^j = (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)x_1^j$ (obviamente el conjunto

formado por los x_2^j también es un conjunto linealmente independiente). Por lo tanto, $\dim N(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)) = \dim N(B(\lambda))$.

Tomando $\underline{g} \in R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$:

$$\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)x = \underline{g}(x, \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = (Id_B - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}(\mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)x_1 + \underline{g}) \\ B(\lambda)x_1 = -G(x, \lambda) \end{cases}$$

Entonces, $\underline{g} \in R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)) \Leftrightarrow G \in R(B(\lambda))$ de aquí que si $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k$ son elementos en el complemento de $R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$ y son linealmente independientes, entonces $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_k$ son elementos en el complemento de $B(\lambda)$ y son también linealmente independientes.

Por lo tanto $\text{codim} R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)) = \text{codim} R(B(\lambda)) \leq d^*$.

Demostremos ahora que $R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$ es cerrado:

Sea $\{\underline{g}_n\}$ una sucesión en $R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$; supongamos que esta sucesión es convergente y denotemos a su límite por \underline{g} ($\underline{g}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{g}$; p.d. $\underline{g} \in R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$). Por lo visto arriba, esto es equivalente a tener una sucesión $\{G_n\}$ en $R(B(\lambda))$, la cual, puesto que $R(B(\lambda))$ es de dimensión finita y por lo tanto cerrado, es convergente (digamos a G) en $B(\lambda)$ ($G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \in B(\lambda)$). Pero entonces, por la misma equivalencia mencionada anteriormente, $\underline{g} \in R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$, es decir, $R(\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda))$ es cerrado. \square

En conclusión: $\mathcal{A} - \mathbf{T}(\lambda)$ es un operador de Fredholm del mismo índice constante que $B(\lambda) = d - d^*$.

1.2 Definición del grado topológico en R^n : grado de Brouwer

Las referencias para esta parte son los excelentes textos de [Smo] (cap. 12) y [Nir2] (caps. I y II). En esta parte nos limitaremos solamente al caso que será requerido en los capítulos II y IV: para mapeos de R^n a R^n . A grosso modo, el grado de un mapeo f (f al menos continua) $f : U \subset R^n \rightarrow R^n$ es un entero determinado solamente por los valores de f sobre ∂U ; el cual, siempre que sea distinto de cero, indica que f tiene un cero en U .

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de R^n , y sea f un mapeo de Ω en R^n . Tómese el caso en el que se desea encontrar los puntos x en Ω tales que satisfacen la ecuación $f(x) = y_0$ (aquí $f = (f_1, \dots, f_n)^t$, $x = (x_1, \dots, x_n)^t$). Básicamente el grado de Brouwer

es un número que dependerá del valor de f sobre $\partial\Omega$ y que indica cuándo lo anterior es posible.

Supongamos por el momento que $f \in (C^1(\Omega))^n$.

Definición:

- (i) $x_0 \in \Omega$ es un punto regular de f , si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ (el jacobiano de f)² es invertible; en caso contrario, x_0 se llama un punto crítico de f .
- (ii) $y_0 \in R^n$ se es un valor regular de f , si su conjunto preimagen $f^{-1}(y_0)$ existe y no contiene puntos críticos de f ; en caso contrario, y_0 se llama un valor crítico de f .

En el caso más general, si $f : R^n \rightarrow R^m$ ($n > m$) y f es además $(C^{n-m+1}(\Omega))^m$, x_0 se dice un punto regular de f si $\frac{\partial f}{\partial x}$ tiene rango máximo; es decir, el mínimo entre n y m ; y las demás definiciones se siguen de manera análoga.

El primer resultado importante sobre la materia es el siguiente

Teorema: (A. Sard)

Si f es un mapeo con las propiedades mencionadas, el conjunto de sus valores críticos tiene medida cero, (y por lo tanto son puntos de acumulación de valores regulares).

Prueba: (ver referencias).

Supongamos entonces que $R^n \ni y_0 \notin \{f(x) : x \in \partial\Omega\}$. Si y_0 es un valor regular de f , entonces el teorema de la función implícita dice que el conjunto:

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in \bar{\Omega} : f(x) = y_0\}$$

es finito, (por lo tanto discreto y sin puntos de acumulación -por el teorema de Bolzano-Weierstrass). Se tiene entonces la siguiente

Definición: (grado de f en y_0)

Si y_0 es un valor regular de f , se define el grado de f en y_0 de la siguiente forma:

$$d(y_0) \equiv \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \sigma \left(\left| \frac{\partial f}{\partial y_0} \right| \right) .$$

²Para este caso, $\frac{\partial f}{\partial x} = [(\text{grad}_x f_1), \dots, (\text{grad}_x f_n)]$ (desarrollado por columnas).

($\sigma(\) = \text{signo}(\)$, $|\ (\) | = \det(\)$). De manera que el grado (de f en el punto y_o) está definido como un número entero, que puede ser positivo, negativo o incluso cero.

Para completar la definición anterior, es necesario extenderla para funciones $f \in (C^1(\Omega))^n$ tales que $\frac{\partial f}{\partial x}(y_o)$ no sea invertible (i.e. y_o valor crítico); o bien, simplemente para $f \in (C(\Omega))^n$ (funciones continuas sobre Ω). Para ello habría que seguir el siguiente esquema:

- (a) En el primer caso ($f \in (C^1(\Omega))^n$, y_o valor crítico), se intenta aproximando y_o por una sucesión de valores regulares y_k y definir $d(y_o)$ como el límite:

$$d(f, y_o; \Omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} d(f, y_k; \Omega) .$$

- (b) En el segundo caso ($f \in (C(\bar{\Omega}))^n$, y_o valor regular), se busca aproximar f por una sucesión de funciones $f_k \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ y definir $d(y_o)$ también como un límite:

$$d(f, y_o; \Omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, y_o; \Omega) .$$

Para ambos casos habría que demostrar que los límites existen, son finitos e independientes de la sucesión empleada en la aproximación.

En lugar de enfocarnos con esta manera de definir el grado de una función en un punto, se verá otra forma de hacerlo a través de formas diferenciales, y que se conoce como la forma de Heinz-Lax (ver [Ize2] sec. III-3 para complementar referencias).

Sea entonces como antes, $f \in (C^1(\Omega))^n$, Ω un subconjunto abierto y acotado de R^n ($\bar{\Omega}$ compacto), $y_o \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Definición: Sea $\mu = \phi(y) dy$ una n -forma diferencial, C^∞ ($dy = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$) en R^n y de soporte compacto $K \subset R^n \setminus f(\partial\Omega)$, tal que $y_o \in K$ y $\int_{R^n} \mu = 1$. Se define el grado de f en el punto y_o como:

$$\text{deg}(f, y_o; \Omega) \equiv \int_{\Omega} \mu \circ f .$$

Las formas diferenciales μ que satisfacen las hipótesis arriba mencionadas se denominan admisibles para y_o y para f .

Se puede demostrar que el grado en su forma de Heinz-Lax está bien definido, esto es, no depende de la forma diferencial μ empleada (ver lemma 12.4 en [Smo], o bien lemma 1.3.3 en [Nir2]).

A continuación solamente se mencionan las propiedades que tiene el grado, definido como arriba, haciendo hincapié únicamente en aquellas que serán de utilidad más adelante.

1.2.1 Propiedades del grado

1. Si $y_1 \sim y_0$, entonces $\deg(f, y_0; \Omega) = \deg(f, y_1, \Omega)$

Cierto, ya que si y_1 es suficientemente cercana a y_0 , cualquier μ admisible para y_0 lo será también para y_1 . Como consecuencia se tiene entonces que el grado de un mapeo es constante sobre cada componente conexa C de $R^n \setminus f(\partial\Omega)$, lo cual se considera al escribir $\deg(f, C, \Omega)$.

2. Si y_0 es un valor regular de f , entonces:

$$d(y_0) = \deg(f, y_0; \Omega) .$$

3. Propiedad de homotopía.

Sea $\{f_t(\cdot)\}$ una familia de mapeos de $\bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow R^n$ con un solo parámetro, tal que $f_t \in (C^1(\Omega))^n \forall t \in [0, 1]$. Supongamos que $y_0 \notin f_t(\partial\Omega) \ 0 \leq t \leq 1$. Entonces $\deg(f_t, y_0; \Omega)$ es independiente de t .

(No es difícil convencerse de esta propiedad, escribiendo: $\deg(f_t, y_0; \Omega) = \int_{\Omega} \mu \circ f_t$ la cual es una función continua en t ; pero por otro lado sabemos que el grado es un número entero, entonces debe ser constante para toda t).

4. (Dependencia sólo de los valores en la frontera)

Si $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, y $y_0 \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$, entonces $\deg(f, y_0, \Omega) = \deg(g, y_0, \Omega)$.

(Aplicuese la propiedad anterior a la familia $tf + (1-t)g$, $0 \leq t \leq 1$, dado que f y g coinciden en $\partial\Omega$, las hipótesis de la condición anterior se satisfacen).

5. Sea Ω_i una familia numerable de conjuntos abiertos disjuntos, contenidos en Ω y supongamos que $y_0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus \cup \Omega_i)$. Entonces, $\deg(f, y_0; \Omega_i)$ es cero excepto sobre un conjunto finito de i 's; además:

$$\deg(f, y_0; \Omega) = \sum_i \deg(f, y_0; \Omega_i) .$$

6. Propiedad de excisión.

Sea Ψ un subconjunto cerrado en $\bar{\Omega}$ y supóngase que $y_0 \notin f(\Psi)$, entonces:

$$\deg(f, y_0; \Omega) = \deg(f, y_0; \Omega \setminus \Psi) .$$

(Aplicar la propiedad anterior para $\Omega_1 = \Omega \setminus \Psi$).

7. Producto.

Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos abiertos y acotados en R^n y R^m , respectivamente, y sean $f \in (C^1(\bar{\Omega}_1))^n$, $g \in (C^1(\bar{\Omega}_2))^m$. Entonces, si $y_1 \in R^n \setminus f(\partial\Omega_1)$ y $y_2 \in R^m \setminus g(\partial\Omega_2)$, se tiene que:

$$\deg(f \times g, (y_1, y_2); (\Omega_1 \times \Omega_2)) = \deg(f, y_1; \Omega_1) \deg(g, y_2; \Omega_2) .$$

8. Composición: teorema del producto de Leray.

Sea $f \in (C(\Omega_1))^n$ $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y sea $g \in (C(\Omega_2))^n$; donde Ω_1 y Ω_2 son subconjuntos abiertos de R^n ; y sean $\{\Psi_j\}$ subconjuntos abiertos y conexos de $\Omega_2 \setminus f(\partial\Omega_1)$ cuyas cerraduras son subconjuntos compactos contenidos en Ω_2 . Entonces, si $z_0 \in R^n \setminus (g \circ f)(\partial\Omega_1)$, se tiene que:

$$\deg(g \circ f, z_0; \Omega_1) = \sum_j \deg(f, \Psi_j; \Omega_1) \deg(g, z_0; \Omega_2) ,$$

y la suma de la derecha es finita, (por la propiedad 1., $\deg(f, \psi; \Omega_1)$ es constante sobre todas las $\psi \in \Psi_j$, entonces $\deg(f, \Psi_j; \Omega_1)$ se define como $\deg(f, \psi; \Omega_1)$, $\psi \in \Psi_j$).

A veces considerado como parte de las propiedades del grado, se tiene el siguiente

Lema: Si los vectores $f(x)$ y $g(x)$ no apuntan en direcciones opuestas sobre $\partial\Omega$ (i.e. $f(x) + \lambda g(x) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$), entonces $\deg(f, 0; \Omega) = \deg(g, 0; \Omega)$, siempre y cuando $0 \notin g(\partial\Omega)$. En particular, si Ω es una bola en R^n con centro en el origen y $g(x) \equiv x$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución dentro de Ω .

Prueba: Es directo a partir de la propiedad de homotopía, definiendo la familia de mapeos $t[f(x)] + (1-t)[g(x)]$. \square

El grado definido de la forma anterior, puede extenderse para funciones continuas solamente: Sea $f \in (C(\Omega))^n$, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables en Ω , tal que f_n converge uniformemente a f en $\bar{\Omega}$. Si $y_0 \notin f_n(\partial\Omega)$, tal que $\deg(f_n, y_0; \Omega)$ está bien definido. Entonces se conviene en establecer:

$$\deg(f, y_0; \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \deg(f_n, y_0; \Omega) .$$

El lector puede consultar las referencias principales para ver la demostración de que el límite anterior está bien definido; es decir, existe y es independiente de la sucesión $\{f_n\}$; así que el grado es una cantidad que tiene que ver solamente con la topología del espacio en cuestión. Además, todas las propiedades antes mencionadas siguen siendo válidas para este caso. Dos de los resultados más importantes que se tienen una vez que se ha extendido el grado a funciones continuas, son: 1) sea ϕ un mapeo continuo, $\phi: \partial\Omega \rightarrow R^n \setminus \{y_0\}$. Sea f cualquier extensión continua de ϕ a Ω ; de manera tal que $\deg(f, y_0; \Omega)$ está bien definido; entonces, tal grado es independiente de la extensión escogida. 2) Si $\phi \in (C(\partial\Omega))^n$, y $y_0 \notin \phi(\partial\Omega)$; entonces $\deg(\phi, y_0; \Omega)$ depende solamente de la clase de homotopía de ϕ .

Una de las aplicaciones más notables del grado en dimensión finita, dentro del estudio de las ecuaciones no lineales, es el siguiente

Teorema: (Punto fijo de Brouwer)

Sea B la bola unitaria cerrada en R^n y sea $f : B \rightarrow R^n$, continua en B , tal que $f(\partial B) \subset B$. Entonces f tiene un punto fijo.

Prueba: (ver referencias).

En su forma más general, el teorema del punto de fijo de Brouwer dice: sea Ω un conjunto cerrado, acotado y conexo en R^n , y sea $(C(\Omega))^n \ni f : \Omega \rightarrow \Omega$. Entonces f tiene un punto fijo.

1.3 Definición del grado topológico en dimensión infinita: grado de Leray-Schauder

Solamente para completar esta introducción, se mencionará la manera de definir el grado topológico en dimensión infinita, junto con los cambios más importantes en relación con el caso anterior.

El primer hecho que uno debe tener en cuenta al tratar de extender la definición del grado topológico a espacios de Banach de dimensión infinita es que la hipótesis de continuidad con la que se empezó el caso anterior, ya no es suficiente para este caso. En particular, el teorema del punto fijo de Brouwer no es aplicable. Un contraejemplo sencillo consiste en tratar de aplicar dicho teorema al mapeo $Ax \equiv (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots)$ de la bola unitaria en sí misma, sobre el espacio de sucesiones de cuadrado sumable (l_2); suponer que tiene un punto fijo y llegar a una contradicción.

La idea para superar esta deficiencia consiste en restringirse al caso de mapeos compactos.

Definición: Sea X un espacio de Banach y $f : B \rightarrow B$. Se dice que f es compacto si para cada subconjunto Ω cerrado y acotado, $\overline{f(\Omega)}$ es compacto, (i.e., toda cubierta de $\overline{f(\Omega)}$ admite una subcubierta finita).

El primer paso para la construcción de una definición adecuada para el grado, consiste en el siguiente

Teorema: Sea Ω un subconjunto cerrado y acotado de X . Entonces, $f : \Omega \rightarrow X$ es compacto, si y solo si f es el límite uniforme de mapeos de dimensión finita f_n (i.e. mapeos cuyos rangos caen dentro de un subespacio de dimensión finita).

Prueba: (ver referencias).

A los mapeos f_ε también se les conoce como ε -aproximaciones de f . Bajo el teorema anterior, el análogo del teorema del punto fijo de Brouwer se conoce como

Teorema: (Punto fijo de Schauder)

Sea Ω un subconjunto cerrado, acotado y conexo de X , espacio de Banach, y $f : \Omega \rightarrow \Omega$ un mapeo compacto. Entonces, f tiene un punto fijo.

Prueba: (Aproximando f por mapeos de dimensión finita y aplicando después el teorema del punto fijo de Brouwer junto con la compacidad de f : ver referencias).

Ahora se define el grado para mapeos de la forma $f = Id - K$, donde K es un operador compacto, $f : \Omega \rightarrow X$, Ω un subconjunto abierto y acotado de X un espacio de Banach.

Para esto se tienen que seguir varios pasos. Primero, mostrar que $f(\partial\Omega)$ es un conjunto cerrado. Esto es una consecuencia del hecho que, si S es un conjunto cerrado y acotado, entonces $f(S)$ es cerrado en X (la demostración no es complicada, usando sucesiones y la compacidad de K). Ahora, si $f(\Omega)$ es cerrado y se tiene que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, entonces entre y_0 y $\partial\Omega$ hay una distancia $\delta > 0$. Segundo, se toma una ε -aproximación de K , K_ε , donde $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$; tal que el rango de K_ε sea un espacio de dimensión finita N_ε , que contenga a y_0 . Entonces, definiendo $f_\varepsilon(x) \equiv x - K_\varepsilon(x) \neq y_0$, sobre $\partial\Omega$, se considera:

$$f_\varepsilon|_{N_\varepsilon \cap \Omega} : N_\varepsilon \cap \Omega \rightarrow N_\varepsilon,$$

entonces $\deg(f_\varepsilon, y_0; N_\varepsilon \cap \Omega)$ está bien definido. Finalmente, se hace la siguiente

Definición: (grado de Leray-Schauder)

$$\deg(f, y_0; \Omega) \equiv \deg(f_\varepsilon, y_0; N_\varepsilon \cap \Omega).$$

Se puede demostrar que esta extensión de la definición del grado para el caso de dimensión infinita está bien establecida; esto es, no depende de K_ε . Además, casi todo lo hecho para el caso de dimensión finita sigue siendo válido, por ejemplo, las propiedades 1., 3., 5., 6. y 8.. Además, el mapeo f sólo necesita estar definido sobre $\partial\Omega$, $f : \partial\Omega \rightarrow X \setminus \{y_0\}$, y la propiedad de homotopía sigue siendo cierta.

1.4 Resultados importantes de la teoría de bifurcación

La teoría de bifurcación es un tema muy extenso, el lector interesado puede encontrar una detallada introducción junto con los resultados que se tenían hace poco más de 20 años en [Ber]. Para propósitos del problema del capítulo 4, solamente enunciaremos aquellos resultados que conciernen a la existencia de soluciones que bifurquen a partir de soluciones conocidas, llamadas triviales, y que se encuentran dentro del área de los resultados topológicos. La referencia principal para esta parte es [Ize1].

Retomando la idea de la primera sección de este capítulo, supóngase que se quiere encontrar el conjunto de soluciones al problema:

$$F(x, \lambda) = 0,$$

donde $F : B \times \Lambda \rightarrow Z$, B, Λ, Z son espacios de Banach. Anteriormente se sugirió que una manera de abordar dicha tarea era la de copiar el resultado simple con funciones de una variable, y usar el análogo del teorema de la función implícita. Es decir, se propuso linearizar la ecuación anterior, alrededor de una solución conocida de antemano (por ejemplo, supongamos que tal solución es de la forma $x(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in \Lambda$), y que se denominó solución trivial. Supongamos además, que $(0, 0)$ es un punto que pertenece a la solución trivial y que deseamos saber si existen soluciones distintas de aquella, cerca de tal punto. Para esto reescribiremos el mapeo F en la forma siguiente:

$$F(x, \lambda) = \mathcal{A}x - \mathbf{T}(\lambda)x - g(x, \lambda).$$

Si \mathcal{A} y $\mathbf{T}(\lambda)$ son operadores lineales de B en E , $\mathbf{T}(0) = 0$, $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$ y además \mathcal{A} es invertible; entonces, la ecuación $F(x, \lambda) = 0$ se escribe ahora como:

$$x = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{T}(\lambda)x + \mathcal{A}^{-1}g(x, \lambda);$$

la cual, para $(x, \lambda) \sim (0, 0)$, no tiene otra solución que $x = 0$. Es decir que en ese caso no hay soluciones distintas de la trivial, cercanas al punto $(0, 0)$. Por lo tanto, una condición necesaria para la existencia de soluciones no triviales (cerca de $(0, 0)$) es la de pedir que el operador \mathcal{A} sea singular en dicho punto.

De aquí se desprende la siguiente

Definición: Sea $(x(\lambda), \lambda)$ una solución conocida (trivial) del problema $F(x, \lambda) = 0$. Se dice que el punto (x_0, λ_0) es un punto de bifurcación, si cualquier vecindad de este punto contiene soluciones no triviales.

La manera de proceder con el problema en términos de los operadores \mathcal{A} y $\mathbf{T}(\lambda)$ será la discutida en la segunda sección y que se denominó "reducción de Ljapunov-Schmidt". Así que las hipótesis que se usarán serán las mismas que se emplearon entonces: \mathcal{A} es un operador de Fredholm (donde $\dim R(\mathcal{A}) = d < \infty$, $\text{codim} R(\mathcal{A}) = d^* < \infty$), $\mathbf{T}(\lambda)$ es continuo, $\mathbf{T}(0) = \mathbf{0}$, $\|\mathbf{T}(\lambda)\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ y $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$.

Este método permite reducir la ecuación anterior a otra de dimension *finita*:

$$B(\lambda)x_1 + G(x_1 + x_2(x_1, \lambda)) \quad ,$$

(donde $B = N(\mathcal{A}) \oplus B_2$ y $x_1 \in N(\mathcal{A})$ y $x_2 \in B_2$) y que se llamó "la ecuación de bifurcación del problema". Aquí $B(\lambda)$ es una matriz rectangular de $d \times d^*$.

La solución a la ecuación de bifurcación, garantiza entonces la existencia de soluciones no triviales, en una vecindad de un punto perteneciente a la solución trivial (y que por consiguiente es un punto de bifurcación); es decir, constituye la parte de *bifurcación local*. En este sentido se tienen los siguientes resultados, cuyas demostraciones el lector encontrará en la referencia antes citada: supongamos que \mathcal{A} no es invertible en $(0, 0)$; entonces, para $\Lambda = R$:

Teorema: *si $|B(\lambda)|$ cambia de signo en $\lambda = 0$, entonces $(0, 0)$ es un punto de bifurcación.*

Lema: (condición necesaria).
si $|B(\lambda)|$ no cambia de signo, entonces existe una $g(x, \lambda)$ tal que $F(x, \lambda)$ no tiene ceros no triviales cerca de $(0, 0)$.

Si el problema en cuestión satisface las hipótesis anteriores, y por lo tanto se tiene la parte local resuelta, queda por determinar el comportamiento de tales soluciones (o ramas) lejos del punto de bifurcación; es decir, aún queda pendiente la parte *global*. En relación con este punto, el resultado más importante que se tenía hace 26 años es el siguiente:

Teorema: (alternativa de Rabinowitz. 1971)
 Sea F un mapeo, $F : B \times R \rightarrow B$. $F(x, \lambda) = x - \lambda Kx - g(x, \lambda)$, donde K es un operador compacto y $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$; y sea λ_0 un valor característico de K de multiplicidad algebraica impar. Entonces, existe un continuo C de ceros no triviales, a partir de $(0, \lambda_0)$ tales que:

(1) C es no acotada en $B \times R$,

δ

(2) C regresa a un punto de bifurcación distinto $(0, \lambda_1)$.

Prueba: (ver referencia para un argumento sencillo).

El resultado que se utilizará en este trabajo, y cuyo enunciado completo al igual que demostración el lector podrá encontrar en la referencia, es el siguiente:

Teorema: Si $\deg(F, \|x\|^2 - \varepsilon^2; B_{2\varepsilon} \times B_\rho)$ es no trivial, entonces C es no acotada, o bien, regresa a otro punto de bifurcación. En nuestro caso, $F(x, \lambda) = x - g(x, \lambda)$, con $g(0, \lambda) = 0$, $g(x, \lambda)$ es compacto, $B_{2\varepsilon} = \{x : \|x\| < 2\varepsilon\}$, $B_\rho = \{\lambda : |\lambda| < \rho\}$ y se supone que el grado está bien definido sobre ese conjunto. Si además $F(x, \lambda)$ tiene una linearización en $x = 0$ de la forma $Ax - T(\lambda)x$, dando una ecuación de bifurcación $B(\lambda)x_1 + G(x_1 + x_2(x_1, \lambda)) = 0$, con $|B(\lambda)| \neq 0$ para $\lambda \neq 0$, entonces ese grado es $\sigma(B(0_-)) - \sigma(B(0_+))$; es decir, el salto en el signo del determinante; o equivalentemente, el salto en el índice de la solución trivial, cuando λ pasa por 0.

Nota:

Cada problema no lineal tiene una forma distinta de ser tratado, de acuerdo a sus propiedades. Entre estas, una de las más importantes y que será usada en el capítulo IV es la llamada *propiedad de equivarianza*.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(x) ,$$

donde $f : R^n \rightarrow R^n$ (con las propiedades de diferenciabilidad que sean necesarias), y sea γ una matriz invertible de $n \times n$. Se dice que γ es una simetría del sistema si

$$f(\gamma x) = \gamma f(x)$$

para toda $x \in R^n$. De manera que si x es una solución del sistema, lo mismo se puede decir de γx ; en particular, si x_0 es una solución estacionaria, también lo será γx_0 . Ya sea que $\gamma x_0 \neq x_0$ o $\gamma x_0 = x_0$ en cualquier caso se dice que γ es una simetría de la solución x_0 . Las soluciones estacionarias γx_0 no se consideran en realidad como nuevos estados, pues basta conocer x_0 para encontrar los demás; así que en la práctica, se considerarán como soluciones estacionarias aquellas que no estén relacionadas por simetrías del sistema. El lector podrá encontrar ejemplos muy ilustrativos de sistemas con simetrías en [GSS] vol 2, chap. XII.

Supongamos que Γ representa el conjunto de todas las matrices γ que satisfacen la propiedad de ser simetrías del sistema. Entonces, es sencillo ver que si $\gamma, \delta \in \Gamma$ se tiene que:

- (a) $\gamma^{-1} \in \Gamma$
- (b) $\gamma\delta \in \Gamma$.

Tiene entonces sentido hablar del grupo de simetrías Γ de f . En particular, el conjunto de simetrías de una solución x_0 talque $\gamma x_0 = x_0$, resulta ser un subgrupo de Γ llamado el subgrupo de isotropía de x_0 , y que se denotará por Σ_{x_0} .

En nuestro caso (bifurcación con un solo parámetro), diremos que $F(x, \lambda)$ ($\lambda \in R$) posee la propiedad de equivarianza, si siempre que γ sea un elemento de un grupo de simetrías Γ (por ejemplo el grupo de simetrías del plano $O(2)$), se tenga entonces que:

$$F(\gamma x, \lambda) = \gamma F(x, \lambda) .$$

Los problemas con simetrías tienen una desventaja aparente, visible a primera vista: supongamos que el problema $F(x, \lambda)$ tiene una solución trivial estacionaria $(x_o(\lambda), \lambda)$, tal que $\gamma x_o = x_o$, y que F posee la propiedad de equivarianza sobre los elementos del grupo Γ ; entonces, linearizando alrededor de la solución trivial, dicha propiedad se lee como:

$$D_x F(x_o, \lambda) \gamma x + R(\gamma x, \lambda) = \gamma D_x F(x_o, \lambda) x + \gamma R(x, \lambda) ,$$

donde $D_x F(x_o, \lambda)$ representa la derivada de Fréchet de F en x_o . Si ahora se quiere pasar el problema a la forma $\mathcal{A}x - T(\lambda)x - g(x, \lambda) = 0$, es conveniente escribir:

$$F(x, \lambda) = D_x F(x_o(\lambda_o), \lambda_o) x - (D_x F(x_o(\lambda_o), \lambda_o) - D_x F(x_o(\lambda), \lambda)) x - (-R(x, \lambda))$$

donde $(x_o(\lambda_o), \lambda_o)$ es un candidato a ser punto de bifurcación. Entonces, si $u \in N(D_x f(x_o(\lambda_o), \lambda_o))$, por ser F equivariante, γu también es un elemento de dicho espacio. Al ser este núcleo de dimensión grande, es un hecho que el método de Ljapunov-Schmidt se complica, ya que la ecuación de bifurcación, que en principio es una ecuación vectorial, tiene más componentes.

Ahora bien, decimos que esa complicación es "aparente", pues al mismo tiempo, los problemas con simetrías ofrecen una posibilidad para descartar elementos en dicho núcleo; es decir, reducir su dimensión. Esto se logra buscando desde un principio, soluciones que sean invariantes bajo algún otro grupo de simetrías; para lo cual es necesario definir una proyección adecuada. Se recomienda al lector la parte de los métodos en [GSS] vol 2, cap. XI, pp. 9-17, y cap. XII, pp. 30-33 para la definición de la integral de Haar, a partir de la cual se construye la proyección.

Capítulo 2

Elementos de la teoría especial de Cosserat para barras

El punto de partida (a la vez que pieza fundamental) de todo estudio en matemáticas aplicadas está constituido por una descripción analítica y precisa de un fenómeno físico (real o hipotético), en un lenguaje exacto propio de tal disciplina, y que constituye al llamado *modelo*.

Es por esto que el segundo capítulo de este trabajo está dedicado a la construcción de un modelo adecuado que permita la comprensión del objeto de estudio, a saber, las barras de Cosserat. Cabe aquí mencionar que esta segunda parte toma solamente los elementos indispensables de la teoría de la deformación de los “cuerpos delgados”, impulsada por Stuart S. Antman, y la cual él mismo llama “Teoría especial de Cosserat para barras”. Para una exposición completa de su trabajo en este sentido ver [Ant], caps. IV y VIII. El valor de su obra consiste en exponer la teoría de la elasticidad con un enfoque y en un lenguaje distintos a los empleados en los trabajos “clásicos” (ver referencias a lo largo del capítulo), mucho más accesible para el lector que no se encuentra familiarizado con la materia.

Por último diremos que el objetivo de este capítulo no es el de exponer con todo rigor cada uno de los diferentes puntos a tratar, pues nos llevaría a entrar en complicaciones de las cuales el problema principal de este trabajo (cap. IV) carece. Con todo esto, algunas definiciones sí son detalladas, siempre que tengan que ver con las hipótesis detrás del modelo. Todo aquello que pretenda aclarar o completar una idea, se ha escrito en forma de acotaciones dentro del texto. Las primeras dos secciones son fundamentales, pues en ellas se explica la forma en la que se debe entender una barra, esto es, su estructura interna antes y después de ser sometida a fuerzas que pretenden modificar su aspecto. La

tercera sección, en donde se obtienen las ecuaciones de movimiento, es clave para todo el trabajo posterior; en ella se tiene la oportunidad de entender con más detalle la dinámica de la deformación. En la sección 2.5 se establece la forma en la que se podrá determinar el aspecto de la barra tras ser deformada (dentro de los límites permitidos por el modelo) a través de definir cierto conjunto de variables. La sección 2.6 es básica, pues en ella se especifica una hipótesis importante: la llamada *constricción de "deformación plana"*, cuya justificación reside en una necesaria simplificación del tratamiento del problema y que en cierto sentido ya se percibía de las secciones anteriores. Las secciones 2.7 y 2.8 fueron incluidas sólo para apreciar el significado y propiedades del conjunto de variables definidas en la sección 2.5. Las secciones 2.9, 2.10 y 2.11 son imprescindibles, pues en ellas se encierra el resto del modelo: la respuesta del material a la deformación por medio de suponer una forma razonable para las funciones que participan en las ecuaciones de movimiento y por último, las propiedades que tienen aquellas así como sus consecuencias.

2.1 Estructura interna de una barra en su estado de referencia

Un *cuerpo* es un conjunto de puntos llamados *puntos materiales*, que posee masa, puede soportar fuerzas y ocupar regiones en el espacio euclidiano tridimensional E^3 .

Decimos que un cuerpo ocupa una región $B \in E^3$ al tiempo t , si existe una correspondencia uno a uno entre los puntos materiales que lo conforman y los puntos en B .

Esta correspondencia podría ser, por ejemplo, asociarle a cada punto del cuerpo sus coordenadas cartesianas con respecto a una base ortonormal: $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $E^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

La *configuración de referencia* de tal cuerpo es una distinción que se le otorga a una correspondencia en particular con los puntos de una región B_0 al tiempo $t_0 = 0$, en la que el cuerpo se encuentra libre de fuerzas aplicadas.

Vamos a suponer que $B_0 \subset E^3$ es acotada, abierta, conexa y con una frontera suficientemente suave (regular). (Por ejemplo, con vector normal bien definido en casi todo punto)

Sea Z la función que nos da la correspondencia entre los puntos del cuerpo y los puntos en B_0 , i.e., $R(Z) = B_0$ ¹. Decimos entonces que un punto material tiene posición Z dentro de B_0 .

¹ $R(Z) \equiv \text{Rango}(Z)$.

En toda la exposición posterior se hablará de un tipo de cuerpos en particular, llamados barras. No hay una definición precisa del término 'barra', entendido como el objeto de estudio de la descripción a continuación. La razón de ello se encuentra en que dicha descripción supone que el cuerpo es lo suficientemente delgado como para ser caracterizado por un conjunto de ecuaciones en las que aparece una sola variable espacial. El término 'delgado' se usa arbitrariamente y por lo tanto la definición de barra no puede enunciarse de una manera definitiva.

Vamos a suponer que dentro de la región \mathcal{B}_o es posible definir una curva suave C_o , con la propiedad de darnos una idea de la forma o aspecto global de la barra.

La elección de C_o depende tanto de la forma de la barra como de las fuerzas que se le aplican. Por ejemplo, cuando la barra es sometida a fuerzas superficiales (es decir, sobre su superficie), es conveniente escoger C_o sobre $\partial\mathcal{B}_o$ y no en su interior.

Supondremos además que C_o tiene una parametrización por longitud de arco

$$\mathbf{R}(s) = (x_o(s), y_o(s), z_o(s))^t \\ s \in [0, l]$$

donde l es la longitud de C_o . De manera que el vector $\mathbf{R}(s)$ describe la curva C_o al variar su argumento. El origen de $\mathbf{R}(s)$ corresponde al de un sistema de coordenadas arbitrario fijo $\{e_1, e_2, e_3\}$ en E^3 .

C_o se llama el eje de la barra y a s se le llama la longitud de arco de la barra en su configuración de referencia, o mejor: longitud de arco de referencia.

De aquí en adelante hablaremos del punto sobre C_o con vector de posición $\mathbf{R}(s)$, simplemente como el punto s .

Definamos entonces en el punto s sobre C_o , al vector tangente unitario:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}'(s) \equiv \mathbf{D}_3(s).$$

El origen de $\mathbf{D}_3(s)$ es entonces el punto s sobre \mathcal{B}_o . Ahora, sobre el plano perpendicular a \mathbf{D}_3 y que pasa por el punto s , escogamos un par de vectores ortonormales también con origen en s . Llamaremos a estos vectores $\mathbf{D}_1(s)$ y $\mathbf{D}_2(s)$. De esta forma, sobre cada punto s hemos construido una base ortonormal directa $\{\mathbf{D}_1(s), \mathbf{D}_2(s), \mathbf{D}_3(s)\}$, que satisface

$$\mathbf{D}_j(s) = \varepsilon_{jkl}\mathbf{D}_k(s) \wedge \mathbf{D}_l(s)$$

donde $\varepsilon_{jkl} = +1$ si la permutación (j,k,l) se descompone en un número par de ciclos de orden 2 (transposiciones), o -1 si el número de ciclos es impar.

En el estado de referencia, definimos la sección transversal (o sección material), $\mathcal{B}_o(s)$ en el punto s , como la intersección del plano generado por $\mathbf{D}_1(s)$ y $\mathbf{D}_2(s)$ con \mathcal{B}_o ; es decir:

$$\mathcal{B}_o(s) \equiv \langle \mathbf{D}_1(s), \mathbf{D}_2(s) \rangle \cap \mathcal{B}_o.$$

Por la definición de \mathcal{B}_o ; todo punto material con posición Z dentro de \mathcal{B}_o , pertenece a una (y solo una) sección transversal $\mathcal{B}_o(s)$.

Aquí tiene lugar por vez primera la hipótesis de que una barra es un cuerpo delgado; ya que esta característica, junto con la regularidad de C_o serán la base para suponer que las secciones transversales $\mathcal{B}_o(s)$ no se intersecan dentro de \mathcal{B}_o .

Por lo tanto, a cada punto material le podemos asociar tres coordenadas de manera única, a saber:

$$X \equiv (x_1, x_2, s).$$

s nos dice la sección transversal a la que pertenece el punto material, mientras que las dos primeras nos dan su ubicación dentro de la misma. Las coordenadas x_1, x_2, s se llaman las coordenadas curvilíneas del punto material.

Formalizando:

Supondremos que existe un mapeo diferenciable e invertible \tilde{X} que asocia a cada punto material con posición Z sus coordenadas curvilíneas (x_1, x_2, s) . Si llamamos a su inverso \tilde{Z} tenemos el siguiente esquema:

$$\tilde{\mathcal{B}}_o \ni Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{X}} \\ \xleftarrow{\tilde{Z}} \end{array} X \in R^3.$$

Es claro que los mapeos \tilde{X} y \tilde{Z} no se refieren a transformaciones de ciertas regiones del espacio en otras; sino a un simple cambio de variables. Por tal razón, vamos a pedir que el jacobiano $\frac{D(\tilde{X})}{D(\tilde{Z})} \equiv J(Z)$ sea positivo, para toda Z en $\tilde{\mathcal{B}}_o$. Esta hipótesis es importante y se asumirá durante todo el trabajo.

Si este es el caso, el teorema de la función inversa nos dice que el mapeo \tilde{Z} es diferenciable en $\tilde{X}(\tilde{\mathcal{B}}_o)$ y además $\frac{D(\tilde{Z})}{D(\tilde{X})} \equiv j(X) > 0$, para toda $X \in \tilde{X}(\tilde{\mathcal{B}}_o)$.

Con esta misma notación, podríamos decir que una barra de Cosserat se caracteriza por:

1. $s \in (0, l) = \{s : X \in \bar{X}(\bar{B}_o)\}$.
2. Definimos la sección transversal en el estado de referencia, en el punto a , como:

$$B_o(a) \equiv \{Z \in B_o : \bar{X}(Z) = (x_1, x_2, a); a \in I \equiv (0, l)\}.$$

De manera que para cualquier subintervalo J de $(0, l)$:

$$B_o(J) \equiv \cup_{a \in J} B_o(a) = \{Z \in B_o : \bar{X}(Z) = (x_1, x_2, a); a \in J\},$$

así: $B_o = B_o(0, l)$. (Ver figura 1)

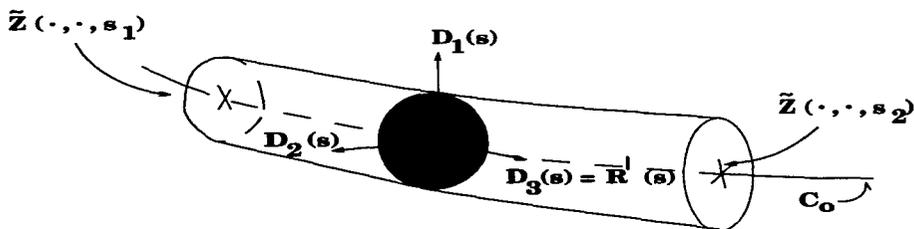


Figura 2.1: Configuración de referencia de una barra. C_o es una curva suave dentro de B_o , cuya existencia se supone. En este estado se definen las secciones transversales siempre perpendiculares a C_o . La forma de las secciones no tiene por qué ser circular, sino cualquiera compatible con las hipótesis sobre ∂B_o .

No hay una razón en especial para pensar que las secciones transversales de la barra en su estado de referencia deban tener alguna forma en particular. Sin embargo, sea cual sea la forma de éstas, debe ser compatible con las hipótesis de regularidad impuestas sobre ∂B_o .

Por ejemplo, supongamos que la configuración de referencia es una barra cilíndrica; es decir, de secciones transversales circulares, no necesariamente del mismo radio todas ellas. En tal caso, si escogemos como eje de la barra a la línea de los centros de estos círculos, el cambio de variables \bar{Z} (de X a Z), tiene una representación muy sencilla:

$$\begin{aligned} Z &= \bar{Z}(X) \\ &= R(s) + x_1 D_1(s) + x_2 D_2(s) \\ &= \begin{bmatrix} x_o(s) \\ y_o(s) \\ z_o(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\tau \rho(s) \text{sen} \psi}_{x_1(\tau, \psi; s)} D_1(s) + \underbrace{\tau \rho(s) \text{cos} \psi}_{x_2(\tau, \psi; s)} D_2(s) \end{aligned}$$

donde: $\tau \in [0, 1]$, $\psi \in [0, 2\pi)$. (Ver figura 2)

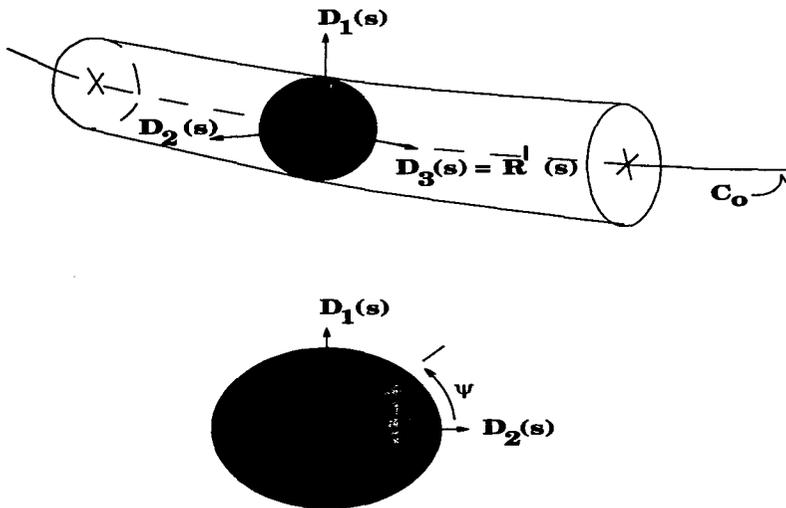


Figura 2.2: Configuración de referencia de una barra con sección transversal circular

2.2 Estructura interna de una barra en su estado deformado

La deformación de la configuración de referencia de la barra está dada por un mapeo:

$$\begin{aligned} p: \bar{E}_0 \times R &\longrightarrow E^3 \\ (Z, t) &\longrightarrow p(Z, t) \end{aligned}$$

el cual representa la posición del punto material Z de la barra al tiempo t .

En general, las hipótesis sobre p son las siguientes: (ver [Ciar])

$$p: \bar{E}_0 \times R \longrightarrow E,$$

p suficientemente regular, inyectiva excepto posiblemente en $\partial\mathcal{B}_o$ y con la propiedad de conservación de la orientación. El hecho de que partes de la barra puedan entrar en contacto, se refleja en la posible pérdida de la inyectividad de p en (o partes de) $\partial\mathcal{B}_o$.

Si $p = (p_1, p_2, p_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3)$, $p_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial z_j}$; la condición de preservación de la orientación se expresa como $\|\nabla p\| > 0 \forall Z \in \bar{\mathcal{B}}_o$. $\|\nabla p\| = [p_{ij}]$ se llama el *gradiente de deformación*.

En este contexto se suele llamar a $z \in \mathcal{B}_o$ los *puntos materiales*, y a $p(Z, t) \in p(\mathcal{B}_o, t)$, los *puntos espaciales*. A Z se le llama la *variable de Lagrange* y a $p(Z, t)$ (t fijo) la *variable de Euler*.

La región ocupada por la barra en su estado deformado al tiempo t , es ahora $p(\bar{\mathcal{B}}_o, t) \equiv \mathcal{B}$. Definamos

$$\begin{aligned}\tilde{p}(X, t) &\equiv (p \circ \tilde{Z})(X, t) \\ &= p(\tilde{Z}(X), t).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la configuración de la sección transversal en el punto s al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(s, t) &\equiv \tilde{p}(\mathcal{B}_o(s), t) \\ &= \{\tilde{p}(X, t) : X = \tilde{X}(Z), Z \in \mathcal{B}_o(s)\}.\end{aligned}$$

La forma exacta que pueda tener $\mathcal{B}_o(s)$ después de la deformación, depende de la barra particular que se estudia y por lo tanto de nuestro modelo de la misma. $\mathcal{B}(s, t)$ puede tener una forma complicada. Una manera de simplificar el estudio, es imponiendo restricciones sobre p . Dichas restricciones o hipótesis son necesarias ya que la descripción de la deformación seguirá las mismas líneas que se siguieron cuando se estudió la configuración de referencia y, por lo tanto, es necesario definir un conjunto de vectores equivalente a $\{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3\}$.

En la configuración de referencia fue fácil establecer una base ortonormal en cada punto s , ya que las secciones transversales se construyeron como regiones planas y perpendiculares a C_o , pero ahora la forma de éstas después de la deformación puede ser cualquiera.

Una primera hipótesis sobre $\mathcal{B}(s, t)$ podría ser, que la deformación de la barra no fuera tan severa; de tal forma que $\mathcal{B}(s, t)$ sea una superficie regular (la normal unitaria bien definida en cada punto) y parametrizable. Otra hipótesis aún más importante sería la de pedir que dos secciones transversales distintas $\mathcal{B}_o(s_1)$ y $\mathcal{B}_o(s_2)$ sean tales que, después de la deformación, sus imágenes $\mathcal{B}(s_1, t)$ y $\mathcal{B}(s_2, t)$ no tengan puntos en común. Esta

hipótesis físicamente razonable es más fuerte que la de pedir la inyectividad de p en el interior de B_0 .

Supongamos entonces que la barra se ha deformado. Su eje es ahora una curva C descrita por un vector $r(s,t)$ dado por:

$$r(s,t) \equiv p(\mathbf{R}(s), t) = \tilde{p}(0, 0, s, t)$$

parametrizada por la longitud de arco de referencia s .

El punto s definido por $\mathbf{R}(s)$ y que antes pertenecía a la sección transversal $B_0(s)$, ocupa ahora la posición $r(s,t)$, dentro de $B(s,t)$. Bajo las hipótesis de regularidad arriba mencionadas, el plano tangente a $B(s,t)$ en el punto $r(s,t)$ está dado por:

$$\tilde{p}_T - r(s,t) = \tilde{p}_{x_1}^o x_1 + \tilde{p}_{x_2}^o x_2$$

donde \tilde{p}_T se refiere a las coordenadas de un punto sobre el plano tangente en $B(s,t)$ y $\tilde{p}_{x_i}^o = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}(0, 0, s, t)$; $i = 1, 2$. (Ver figura 3)

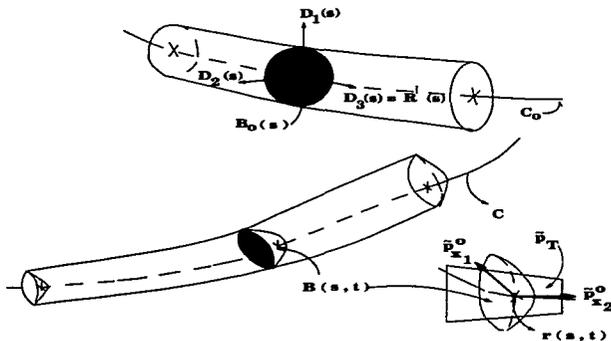


Figura 2.3: Deformación de una barra. Supondremos que las secciones transversales deformadas no se intersectan y que constituyen superficies regulares; de manera que es posible hablar del plano tangente en el punto $r(s,t)$. Nótese que C_0 no es una curva en particular

Sobre el plano tangente a $B(s,t)$ en el punto $r(s,t)$, escojamos dos vectores ortonormales $d_1(s,t)$ y $d_2(s,t)$, con origen en $r(s,t)$.

$\mathbf{d}_1(s, t)$ y $\mathbf{d}_2(s, t)$ pueden escogerse de cualquier manera, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1(s, t) &= \frac{\bar{p}_{x_1}^o}{\|\bar{p}_{x_1}^o\|} \\ \mathbf{d}_2(s, t) &= \frac{\mathbf{u}(s, t)}{\|\mathbf{u}(s, t)\|}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}(s, t) = \bar{p}_{x_2}^o - (\bar{p}_{x_2}^o \cdot \bar{p}_{x_1}^o)\bar{p}_{x_1}^o$.

Otra forma adecuada para definir \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 tiene que ver con el concepto de *fibras materiales* y *fibras espaciales* (ver [Nov]):

Supongamos que tenemos un cuerpo cuyas puntos tienen coordenadas $\mathbf{X} = (x, y, z)^t$, con respecto a algún sistema de referencia. Después de una deformación, con respecto al mismo sistema de ejes, sus puntos están dados por: $\Xi = (\xi, \eta, \zeta)^t = (x + u(\mathbf{X}, t), y + v(\mathbf{X}, t), z + w(\mathbf{X}, t))$; donde $u, v, w \in C^\infty((R^3 \supset \Omega) \times [0, \infty))$, son los desplazamientos.

Si $X = \bar{X}(\sigma)$ es una curva parametrizada por σ en el cuerpo antes de la deformación, una vez deformado sus coordenadas son ahora $\Xi = \Xi(\sigma) = (x(\sigma) + u(\bar{x}(\sigma), t), \dots)^t$. Por ejemplo, una línea que pasa por el punto X_o y es paralela al eje x está dada por $X = (x, y_o, z_o)^t$, sus coordenadas en el estado deformado son:

$$\Xi = (x + u(x, y_o, z_o, t), y_o + v(x, y_o, z_o, t), z_o + w(x, y_o, z_o, t))^t.$$

Podemos hacer lo mismo para y y z ; a las líneas obtenidas se les llama *líneas coordenadas*.

A las líneas $\bar{X}(\sigma)$ les llamamos *fibras materiales*, y podemos imaginar al cuerpo constituido por una infinidad de ellas. (Ver figura 4)

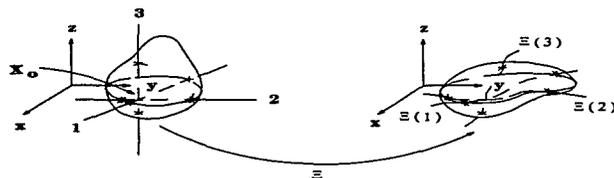


Figura 2.4: Definición de las fibras materiales $X(\sigma)$ y las líneas coordenadas $\Xi(\sigma)$

Ahora podemos pensar en el proceso inverso, dadas 3 líneas en el cuerpo deformado, paralelas a los ejes coordenados; nos preguntamos cómo se veían antes de la deformación. A tales líneas se les llama *fibras espaciales*.

Para escoger a $\mathbf{d}_1(s, t)$ y $\mathbf{d}_2(s, t)$ con este enfoque, habrá que buscar dos fibras en el cuerpo deformado, sobre $B(s, t)$ y que se intersecten perpendicularmente en $\mathbf{r}(s, t)$. Si $\Xi(\sigma_1)$ y $\Xi(\sigma_2)$ son estas curvas, entonces podemos tomar:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1(s, t) &\equiv \frac{\Xi'(\sigma_1)}{\|\Xi'(\sigma_1)\|}, \\ \mathbf{d}_2(s, t) &\equiv \frac{\Xi'(\sigma_2)}{\|\Xi'(\sigma_2)\|}.\end{aligned}$$

Ahora definimos un tercer vector:

$$\mathbf{d}_3(s, t) \equiv \mathbf{d}_1(s, t) \wedge \mathbf{d}_2(s, t)$$

de tal forma que $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ constituye una base ortonormal para E^3 , cuyo origen está en $\mathbf{r}(s, t)$. Por lo tanto, sobre cada punto de C , es posible definir estos tres vectores; a los cuales llamamos vectores directores, y por consistencia deben satisfacer:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_i(s, 0) &= \mathbf{D}_i(s) \\ \forall s \in [0, l] \quad , \quad i &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Nótese que ahora $\mathbf{r}_s(s, t)$ y $\mathbf{d}_3(s, t)$, no son necesariamente colineales, como ocurría con $\mathbf{R}'(s)$ y $\mathbf{D}_3(s)$. (Ver figura 5)

La construcción de los vectores directores nos permite tomar a la barra como su propio marco de referencia; eventualmente descompondremos todas las cantidades vectoriales en términos de ellas.

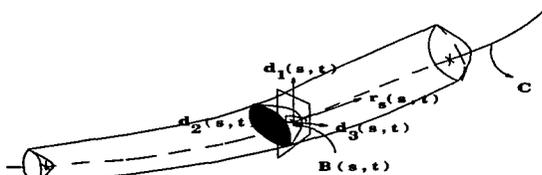


Figura 2.5: Definición de los vectores directores en el estado deformado

2.3 Obtención de las ecuaciones de movimiento

Un cuerpo se deforma bajo la acción de torcas y fuerzas que actúan sobre los puntos que lo constituyen. Las ecuaciones de movimiento se obtienen igualando la fuerza resultante con la derivada con respecto al tiempo del momento lineal y la torca resultante con la derivada con respecto al tiempo del momento angular.

El lector podrá encontrar una formulación de las ecuaciones de movimiento distinta a la empleada en este trabajo, en [Ant] (caps. IV y VIII); bajo condiciones menos estrictas de diferenciabilidad que las adoptadas por nosotros. (Para un enfoque con tensores el lector puede consultar [Veü] (caps. II y V), o bien [Nov] (cap. III))

Para esto consideraremos un segmento de barra para el cual $0 < a \leq s \leq b < l$. Si quisiéramos extendernos incluso al caso $s = 0$ y $s = l$, tenemos que prescribir las condiciones de la barra en sus extremos (condiciones de frontera).

Descomponemos al vector de posición $p(Z, t)$ como:

$$p(Z, t) = r(s, t) + p'(Z, t)$$

donde $p'(Z, t)$ es un vector con origen en $r(s, t)$ y que ubica a los puntos sobre la sección transversal $B(s, t)$. (Ver figura 6). En términos de los vectores directores, p' tiene una

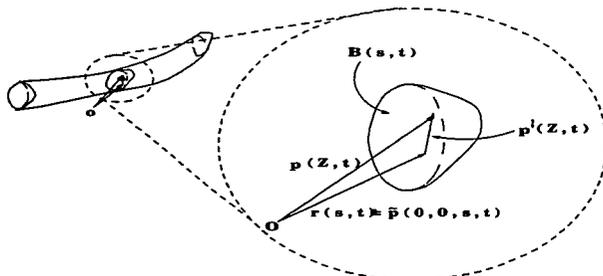


Figura 2.6: Descomposición del vector de posición $p(Z, t) = r(s, t) + \bar{p}'(Z, t)$

expresión:

$$\vec{p}'(X, t) = \varphi_1(X, t)\mathbf{d}_1(s, t) + \varphi_2(X, t)\mathbf{d}_2(s, t) + \varphi_3(X, t)\mathbf{d}_3(s, t),$$

en donde las funciones φ_i podrían tener, en principio, una forma complicada que constituye parte de las hipótesis del modelo. En general $\vec{p}' = g(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{d}_1(s, t), \mathbf{d}_2(s, t), \mathbf{d}_3(s, t), X, t)$, en donde ahora g vendría determinada por el modelo. Por el momento sólo pensemos que siempre es posible descomponer p en términos de \mathbf{r} y p' .

Las fuerzas aplicadas sobre la barra se dividen en dos clases:

- Fuerzas de cuerpo aplicadas: Estas se definen por un campo vectorial

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde f es una densidad de la fuerza aplicada, por unidad de volumen en el estado deformado.

- Fuerzas superficiales aplicadas: también definidas por un campo vectorial

$$g : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde Γ_1 es un conjunto de $\Gamma \equiv \partial\mathcal{B}$ y g es una densidad de fuerza superficial aplicada, por unidad de área deformada.

Cuando definimos un cuerpo al principio, se dijo que entre sus características estaban la de tener masa. Entonces, sea Ω un conjunto de puntos materiales ($\Omega \subset \mathcal{B}$) con masa $m(\Omega)$. Definimos la densidad de masa en un punto $p \in \Omega$ mediante el límite:

$$\rho(p) = \lim_{\mu(\Omega) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega)}{\mu(\Omega)};$$

donde $\mu(\Omega)$ es una cantidad relacionada con el tamaño de Ω , por ejemplo su volumen o área.

Nuestro modelo supondrá que ρ depende únicamente de la posición (no del tiempo).

Fijémonos ahora en $\mathcal{B}_{[a, b]} \equiv \cup_{s \in [a, b]} \mathcal{B}(s, t)$ y definamos las fuerzas aplicadas sobre él:

Fuerzas superficiales: Sea F_a la fuerza por unidad de masa sobre $\mathcal{B}_a \equiv \mathcal{B}(a, t)$, ejercida por el segmento de barra adyacente $\mathcal{B}_{[0, a]}$, al tiempo t . Análogamente defínase F_b , la fuerza sobre \mathcal{B}_b .

Fuerzas de cuerpo: Sea F la fuerza por unidad de masa sobre los puntos de $\mathcal{B}_{[a,b]}$ (debida a la gravedad, presión, etc.).

Por lo tanto, la fuerza total sobre $\mathcal{B}_{[a,b]}$ es:

$$F_T = \int_{\mathcal{B}_a} \rho F_a dS_a + \int_{\mathcal{B}_b} \rho F_b dS_b + \int_{\mathcal{B}_{[a,b]}} \rho F dV ,$$

donde dS y dV son los elementos de área y volumen, respectivamente.

Notación: Supongamos que G es una función de la posición $p(Z, t)$ y del tiempo. Convenimos en escribir: $G(p(Z, t), t) = G(\tilde{p}(X, t), t) \equiv \tilde{G}(X, t)$. Por otra parte, si $c \in [a, b]$, llamamos a X_c las coordenadas (x_1, x_2, c) .

Cambiando entonces a las coordenadas curvilíneas tendremos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_a} \rho F_a dS_a &= \int_{\mathcal{B}_a} \tilde{\rho}(X_a) \tilde{F}_a(X_a, t) |j(X_a)| dx_1 dx_2 \\ &\equiv \mathbf{n}(a, t) ; \end{aligned}$$

análogamente para $\int_{\mathcal{B}_b} \rho F_b dS_b \equiv \mathbf{n}(b, t)$; donde $j(X_s) = \frac{D(\tilde{Z})}{D(X_s)}$ es el jacobiano de la transformación $X \rightarrow Z$ y **el cual es positivo por hipótesis** (sec. 2.1: $|j| = j$), (no volveremos a hacer hincapié en ello).

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{[a,b]}} \rho F dV &= \int_b^a \int_{\mathcal{B}_s} \tilde{\rho}(X) \tilde{F}(X, t) j(X) dx_1 dx_2 ds \\ &\equiv \int_b^a \mathbf{f}(s, t) ds . \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F_T = \mathbf{n}(b, t) - \mathbf{n}(a, t) + \int_b^a \mathbf{f}(s, t) ds .$$

El signo menos se introduce por convención. $\mathbf{n}(a, t)$ y $\mathbf{n}(b, t)$ son las fuerzas de contacto y \mathbf{f} es la fuerza de cuerpo por unidad de longitud de referencia en el punto s al tiempo t .

Con la misma notación y usando la descomposición del vector de posición: $p = \mathbf{r} + p'$, el momento lineal de $\mathcal{B}_{[a,b]}$ es:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\mathcal{B}_{[a,b]}} \rho \frac{\partial p}{\partial t} dV \\ &= \int_a^b \int_{\mathcal{B}_s} \tilde{\rho}(X) \frac{\partial \tilde{p}(X, t)}{\partial t} j(X) dx_1 dx_2 ds ; \end{aligned}$$

desarrollando:

$$\mathbf{p} = \int_a^b (\rho A)(s) \mathbf{r}_t(s, t) ds + \int_a^b \mathbf{q}_t(s, t) ds$$

donde:

$$\begin{aligned} (\rho A)(s) &\equiv \int_{B_s} \bar{\rho}(X) j(X) dx_1 dx_2 \\ \mathbf{q}(s, t) &\equiv \int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{\rho}'(X, t) j(X) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

De esta manera, el segundo término en \mathbf{p} , resulta ser la cantidad de movimiento (o momento lineal) relativo al eje de la barra C : $\mathbf{r}(s, t)$.

Ahora, $F_T = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, por lo tanto:

$$\mathbf{n}(b, t) - \mathbf{n}(a, t) + \int_a^b \mathbf{f}(s, t) ds = \int_a^b (\rho A)(s) \mathbf{r}_{tt}(s, t) ds + \int_a^b \mathbf{q}_{tt}(s, t) ds.$$

Si llamamos a τ_T la torca total sobre $B_{[a, b]}$:

$$\tau_T = \int_{B_{[a, b]}} \rho p \wedge F_a dS_a + \int_{B_b} \rho p \wedge F_b dS_b + \int_{B_{[a, b]}} \rho p \wedge F dV$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} \int_{B_a} \rho p \wedge F_a dS_a &= \int_{B_a} \bar{\rho}(X_a) \bar{\rho}(X_a, t) \wedge \bar{F}_a(X_a, t) j(X_a) dx_1 dx_2 \\ &= \mathbf{r}(a, t) \wedge \int_{B_a} \bar{\rho}(X_a) \bar{F}_a(X_a, t) j(X_a) dx_1 dx_2 + \\ &\quad + \int_{B_a} \bar{\rho}(X_a) \bar{\rho}'(X_a, t) \wedge \bar{F}_a(X_a, t) j(X_a) dx_1 dx_2 \\ &\equiv -\mathbf{r}(a, t) \wedge \mathbf{n}(a, t) - \mathbf{m}(a, t), \end{aligned}$$

en donde los signos negativos han sido introducidos solamente por convención. Análogamente:

$$\int_{B_b} \rho p \wedge F_b dS_b = \mathbf{r}(b, t) \wedge \mathbf{n}(b, t) + \mathbf{m}(b, t).$$

Ahora para el último término, que son todos los puntos situados entre las secciones transversales B_a y B_b :

$$\begin{aligned} \int_{B_{[a, b]}} \rho p \wedge F dV &= \int_a^b \mathbf{r}(s, t) \wedge \int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{F}(X, t) j(X) dx_1 dx_2 ds + \\ &\quad + \int_a^b \int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{\rho}'(X, t) \wedge \bar{F}(X, t) j(X) dx_1 dx_2 ds \\ &= \int_a^b \mathbf{r}(s, t) \wedge \mathbf{f}(s, t) ds + \int_a^b \mathbf{l}(s, t) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\tau_T = \mathbf{r}(b,t) \wedge \mathbf{n}(b,t) - \mathbf{r}(a,t) \wedge \mathbf{n}(a,t) + \mathbf{m}(b,t) - \mathbf{m}(a,t) + \int_a^b [\mathbf{r}(s,t) \wedge \mathbf{f}(s,t) + \mathbf{l}(s,t)] ds.$$

Los cuatro primeros términos en la expresión para la torca total reciben el nombre de torcas de contacto. Como se puede ver, las torcas de contacto son de dos tipos: $\mathbf{r}(a,t)$ y $\mathbf{r}(b,t)$ son torcas alrededor del origen de coordenadas \mathbf{O} , mientras que $\mathbf{m}(b,t)$ y $\mathbf{m}(a,t)$ son torcas alrededor de los puntos $\mathbf{r}(b,t)$ y $\mathbf{r}(a,t)$, respectivamente. De igual manera, los últimos términos, llamados torcas externas o de cuerpo, se dividen en torcas alrededor del origen \mathbf{O} ($\mathbf{r}(s,t) \wedge \mathbf{f}(s,t)$) y torcas alrededor del punto $\mathbf{r}(s,t)$ ($\mathbf{l}(s,t)$). (Ver figura 7) Ahora calcularemos el momento angular total de $B_{[a,b]}$:

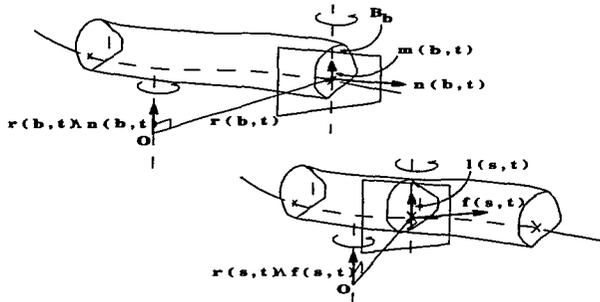


Figura 2.7: Torcas y fuerzas sobre la barra en su estado deformado.

$$\mathbf{l}_T = \int_{B_{[a,b]}} \mathbf{p} \wedge \rho \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} dV$$

Tomando la descomposición del vector de posición $\mathbf{p} = \mathbf{r} + \mathbf{p}'$ y cambiando a coordenadas curvilíneas:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_T = & \int_a^b (\rho A)(s) \mathbf{r}(s,t) \wedge \mathbf{r}_t(s,t) ds + \int_a^b \left[\int_{B_s} \tilde{\mathbf{p}}'(X,t) \tilde{\mathbf{p}}(X) j(X) dx_1 dx_2 \right] \wedge \mathbf{r}_t(s,t) ds + \\ & + \int_a^b \mathbf{r}(s,t) \wedge \left[\int_{B_s} \tilde{\mathbf{p}}(X) \tilde{\mathbf{p}}'_t(X,t) j(X) dx_1 dx_2 \right] ds + \\ & + \int_a^b \left[\int_{B_s} \tilde{\mathbf{p}}'(X,t) \wedge \tilde{\mathbf{p}}(X) \tilde{\mathbf{p}}'_t(X,t) j(X) dx_1 dx_2 \right] ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_T &= \int_a^b \mathbf{r}(s, t) \wedge (\rho A)(s) \mathbf{r}_t(s, t) ds + \int_a^b \mathbf{q}(s, t) \wedge \mathbf{r}_t(s, t) ds + \\ &+ \int_a^b \mathbf{r}(s, t) \wedge \mathbf{q}_t(s, t) ds + \int_a^b \mathbf{h}(s, t) ds . \end{aligned}$$

Nótese que $\mathbf{h}(s, t)$ es el momento angular relativo a $\mathbf{r}(s, t)$. Por otra parte, $\tau_T = \frac{d}{dt} \mathbf{l}_T$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(b, t) \wedge \mathbf{n}(b, t) - \mathbf{r}(a, t) \wedge \mathbf{n}(a, t) + \mathbf{m}(b, t) - \mathbf{m}(a, t) + \int_a^b [\mathbf{r}(s, t) \wedge \mathbf{f}(s, t) + \mathbf{l}(s, t)] ds \\ = \int_a^b [(\rho A)(s) \mathbf{r}(s, t) \wedge \mathbf{r}_{tt}(s, t) + \mathbf{q}(s, t) \wedge \mathbf{r}_{tt}(s, t) + \mathbf{r}(s, t) \wedge \mathbf{q}_{tt}(s, t) + \mathbf{h}_t(s, t)] ds . \end{aligned}$$

Haciendo $b = s$ en las ecuaciones para la torca y la fuerza total y derivando con respecto a s , obtenemos la forma clásica de las ecuaciones de movimiento de la teoría especial de Cosserat para barras:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s + \mathbf{f} &= (\rho A) \mathbf{r}_{tt} + \mathbf{q}_{tt} \\ (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n})_s + \mathbf{m}_s + \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} + \mathbf{l} &= (\rho A) \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}_{tt} + \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}_{tt} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}_{tt} + \mathbf{h}_t . \end{aligned}$$

Substituyendo la primera ecuación en la segunda, se simplifica en:

$$\mathbf{r}_s \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}_s + \mathbf{l} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}_{tt} + \mathbf{h}_t .$$

Esta última ecuación junto con la de la fuerza, describen la dinámica de la deformación. En ellas \mathbf{f} se supone conocida, lo mismo que \mathbf{q} , \mathbf{l} , \mathbf{h} ; estas tres últimas estarán determinadas, siempre y cuando $\tilde{\mathbf{p}}'$ lo esté.

Así, tendremos 6 ecuaciones diferenciales parciales para las tres componentes de \mathbf{r} , y las tres componentes de $\tilde{\mathbf{p}}'$, de acuerdo al modelo que de este vector se tenga.

Más adelante, cuando establezcamos un modelo para \mathbf{m} y \mathbf{n} por medio de ecuaciones constitutivas, veremos cómo cambiar el planteamiento del problema utilizando como incógnitas otras variables (las variables de esfuerzo) que serán definidas entonces.

Decimos que un cuerpo se encuentra en equilibrio estático (o que ha alcanzado el equilibrio) cuando su configuración se mantiene constante en el tiempo. Las ecuaciones que caracterizan este estado se obtienen haciendo igual a cero todas las derivadas en el tiempo en las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' + \mathbf{f} &= 0 \\ \mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}' + \mathbf{l} &= 0 \end{aligned}$$

son las ecuaciones de equilibrio estático para cuerpos delgados.

Para una deducción de las ecuaciones bajo hipótesis menos fuertes en cuanto a la diferenciabilidad de las fuerzas, ver [Ant] caps. IV y VIII. Ahí se parte de leyes fundamentales expresadas en forma integral, estas son, *el principio del trabajo virtual o ley del impulso-momento lineal*, y *la ley del impulso-momento angular*. La primera de ellas dice que el impulso que proporcionan todas las fuerzas que actúan sobre la barra en un intervalo de tiempo τ , es igual al cambio en el momento lineal. La segunda dice que el impulso de todas las torcas presentes es igual al cambio en el momento angular. Estas leyes permiten el tratamiento del problema desde un punto de vista variacional.

Para una exposición más completa se recomienda el libro de Ciarlet ([Ciar], cap. II). En él se demuestra que un cuerpo alcanza el equilibrio estático si satisface el principio fundamental de esfuerzos de Euler y Cauchy:

Sea un cuerpo que ocupa una configuración deformada B y que se encuentra sujeto a fuerzas superficiales y de cuerpo, representadas por densidades:

$$f : B \longrightarrow R^3 \quad ; \quad g : \Gamma_1 \longrightarrow R^3 ,$$

entonces existe un campo vectorial

$$t : \bar{B} \times S_1 \longrightarrow R^3 ,$$

donde $S_1 = \{v \in R^3 : \|v\| = 1\}$ tal que:

- a) Para cualquier subconjunto \mathcal{A} de B y en cualquier punto $p \in \Gamma_1 \cap \partial\mathcal{A}$ donde el vector normal unitario (exterior) \hat{n} a $\Gamma_1 \cap \partial\mathcal{A}$ exista, se tiene que: $t(p, \hat{n}) = g(p)$.

Para cualquier subconjunto \mathcal{A} de B :

- b) *Axioma del balance de fuerzas:*

$$\int_{\mathcal{A}} f(p) dp + \int_{\partial\mathcal{A}} t(p, \hat{n}) dS = 0$$

(\hat{n} la normal exterior unitaria a $\partial\mathcal{A}$).

- c) *Axioma del balance de momento:*

$$\int_{\mathcal{A}} p \wedge f(p) dp + \int_{\partial\mathcal{A}} p \wedge t(p, \hat{n}) dS = 0 .$$

Estos principios aseguran la existencia de fuerzas superficiales $t(p, \hat{n}) dS$ sobre la frontera de todo subconjunto de B . $t(p, \hat{n}) dS$ es el vector de esfuerzos de Cauchy, el cual es una densidad de fuerza superficial por unidad de área, en la configuración deformada B .

En este texto también se demuestra que bajo condiciones de continuidad de f y diferenciabilidad de t , existe un campo tensorial continuamente diferenciable

$T: \mathcal{B} \ni p \longrightarrow T(p) \in \mathbf{M}^3$ (matrices de 3×3), tal que $t(p, \hat{n}) = T(p)\hat{n} \forall p \in \mathcal{B}$, $n \in S_1$; además $T(p) = T^t(p)$. T es el tensor de esfuerzos de Cauchy. Las ecuaciones de equilibrio tienen ahora la forma:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} T &= f \quad \text{en } \mathcal{B} \\ Tn &= f \quad \text{en } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Este problema es equivalente a dos ecuaciones variacionales, conocidas como el *principio del trabajo virtual en la configuración de referencia*.

2.4 Las variables de esfuerzo

El hecho de haber escogido a los vectores directores como una base ortonormal para E^3 en cada punto de \mathcal{C} , nos trae como consecuencia que, derivando con respecto a s en $\|\mathbf{d}_i(s, t)\|^2 = \mathbf{d}_i(s, t) \cdot \mathbf{d}_i(s, t) = 1$, se tiene $\mathbf{d}_i(s, t) \cdot \partial_s \mathbf{d}_i(s, t) = 0$, por lo tanto:

$$\partial_s \mathbf{d}_1(s, t) = a_j^i(s, t) \mathbf{d}_j(s, t) + a_k^i(s, t) \mathbf{d}_k(s, t) \quad .$$

Si ahora derivamos con respecto a s en $\mathbf{d}_i(s, t) \cdot \mathbf{d}_j(s, t) = 0$; tenemos que: $\mathbf{d}_j(s, t) \cdot \partial_s \mathbf{d}_i(s, t) = -\mathbf{d}_i(s, t) \cdot \partial_s \mathbf{d}_j(s, t)$ y substituyendo las expresiones para las derivadas de los vectores directores que obtuvimos arriba:

$$a_j^i(s, t) = -a_i^j(s, t).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \partial_s \mathbf{d}_1 &= a_2^1 \mathbf{d}_2 + a_3^1 \mathbf{d}_3 \\ \partial_s \mathbf{d}_2 &= -a_1^2 \mathbf{d}_1 + a_3^2 \mathbf{d}_3 \\ \partial_s \mathbf{d}_3 &= -a_1^3 \mathbf{d}_1 - a_2^3 \mathbf{d}_2 \end{aligned}$$

Entonces, si definimos 3 variables: $u_1 \equiv a_3^2$, $u_2 \equiv -a_3^1$, $u_3 \equiv a_2^1$, podemos escribir las tres últimas relaciones como:

$$\partial_s \mathbf{d}_1(s, t) = \mathbf{u}(s, t) \wedge \mathbf{d}_1(s, t),$$

donde $\mathbf{u}(s, t) \equiv \sum_{i=1}^3 u_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$.

Escrito en forma matricial resulta entonces que para t fijo:

$$\partial_s \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} & u_3 \mathbf{I} & -u_2 \mathbf{I} \\ -u_3 \mathbf{I} & \mathbf{O} & u_1 \mathbf{I} \\ u_2 \mathbf{I} & -u_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Donde \mathbf{I} y \mathbf{O} son las matrices identidad y nula, respectivamente (de 3×3). \mathbf{U} es una matriz antisimétrica (de 9×9) y no invertible, ya que para cada t fijo

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1 &= (u_1, 0, 0, u_2, 0, 0, u_3, 0, 0)^t \\ \mathbf{N}_2 &= (0, u_1, 0, 0, u_2, 0, 0, u_3, 0)^t \\ \mathbf{N}_3 &= (0, 0, u_1, 0, 0, u_2, 0, 0, u_3)^t\end{aligned}$$

pertenecen al núcleo de \mathbf{U} .

Escribiendo el sistema explícitamente

$$\partial_s \mathbf{d}_1 = u_3 \mathbf{d}_2 - u_2 \mathbf{d}_3, \quad \partial_s \mathbf{d}_2 = -u_3 \mathbf{d}_1 + u_1 \mathbf{d}_3, \quad \partial_s \mathbf{d}_3 = u_2 \mathbf{d}_1 - u_1 \mathbf{d}_2$$

podemos despejar u_i tomando el producto punto entre las derivadas de los vectores directores j, k y sumando:

$$u_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} (\partial_s \mathbf{d}_k) \cdot \mathbf{d}_l.$$

Esto que hicimos para t fijo, también puede hacerse ahora para s fijo; de manera que si llamamos a $\mathbf{w}(s, t) = \sum_{i=1}^3 w_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$:

$$\partial_t \mathbf{d}_i(s, t) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{d}_i(s, t);$$

así que:

$$\partial_t \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{O} & w_3 \mathbf{I} & -w_2 \mathbf{I} \\ -w_3 \mathbf{I} & \mathbf{O} & w_1 \mathbf{I} \\ w_2 \mathbf{I} & -w_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}.$$

En estas variables:

$$\partial_t \mathbf{d}_1 = w_3 \mathbf{d}_2 - w_2 \mathbf{d}_3, \quad \partial_t \mathbf{d}_2 = -w_3 \mathbf{d}_1 + w_1 \mathbf{d}_3, \quad \partial_t \mathbf{d}_3 = w_2 \mathbf{d}_1 - w_1 \mathbf{d}_2$$

por lo tanto:

$$w_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} (\partial_t \mathbf{d}_k) \cdot \mathbf{d}_l.$$

Definamos ahora tres nuevas variables v_1, v_2, v_3 , como las componentes del vector tangente a C (el eje del cilindro) en el punto s (al tiempo t):

$$\mathbf{r}_s(s, t) = \sum_{i=1}^3 v_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t).$$

Las seis variables, representadas por las ternas

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

se denominan las variables de esfuerzo.

Nuestro objetivo es encontrar la forma que tendría la barra al tiempo t . Por lo pronto hemos visto que, si conociéramos la forma exacta que tienen las variables de esfuerzo, podríamos determinar la forma del eje de la barra y la ubicación de los vectores directores, resolviendo el sistema de primer orden:

$$\partial_s \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & u_3 \mathbf{I} & -u_2 \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -u_3 \mathbf{I} & \mathbf{O} & u_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ u_2 \mathbf{I} & -u_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ v_1 \mathbf{I} & v_2 \mathbf{I} & v_3 \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

para t fijo. Este sistema con condiciones iniciales (o de frontera) $\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{R}(t)$, $\mathbf{d}_i(0, t) = \mathbf{D}_i(t)$, tiene solución única. Por lo tanto, y dada la ortogonalidad de los vectores directores, las variables de esfuerzo determinan \mathbf{r} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 salvo por una traslación y una rotación de nuestro sistema de coordenadas.

Sin embargo, el problema no termina aquí, pues queda aún por determinar las proyecciones del vector de posición relativo p' ; es decir; φ_1 , φ_2 , φ_3 . (Recuérdese que se hizo la descomposición $p = \mathbf{r} + \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{d}_i$. Sección 2.4).

Si para la configuración de referencia escogemos

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{Z}(X) \\ &= \mathbf{R}(s) + x_1 \mathbf{D}_1(s) + x_2 \mathbf{D}_2(s), \end{aligned}$$

debemos entonces tener sobre $\tilde{p}(X, t)$ la restricción (*condición de compatibilidad*):

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, 0) &= \mathbf{r}(s, 0) + \sum_{i=1}^3 \varphi_i(X, 0) \mathbf{d}_i(s, 0) \\ &= \mathbf{R}(s) + x_1 \mathbf{D}_1(s) + x_2 \mathbf{D}_2(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{r}(s, 0) = \mathbf{R}(s), \quad \mathbf{d}_i(s, 0) = \mathbf{D}_i(s), \quad \varphi_i(X, 0) = x_i.$$

Como la configuración de referencia se supone conocida, \mathbf{R} , \mathbf{D}_i , x_i ($i=1,2,3$) son funciones conocidas.

2.5 Constricciones de la deformación

Para facilitar el estudio posterior, nos enfocaremos solamente a aquél tipo de barras que se apegue a un modelo de *deformación plana*. Anteriormente se había supuesto que siempre se partiría de secciones transversales cuya forma en el estado de referencia es plana, y que en el estado deformado tendrían, en general, la forma de una superficie parametrizada por X, t en la base \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 . El modelo de deformación plana supone

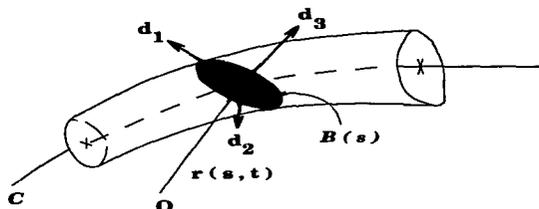


Figura 2.8: *Hipótesis de deformación plana: las secciones transversales yacen en el plano generado por \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 .*

que en el estado deformado, las secciones transversales $B(s)$ siguen siendo planas; esto es, que si antes de la deformación los puntos sobre la sección transversal $B_0(s)$ se encontraban en el plano generado por $\mathbf{D}_1(s)$ y $\mathbf{D}_2(s)$, ahora esos mismos puntos se encontrarán en el plano generado por $\mathbf{d}_1(s)$ y $\mathbf{d}_2(s)$ (en el tiempo t). (Ver figura 8)

Como consecuencia de esta hipótesis, la forma de el vector \mathbf{p}' estará dada por:

$$\tilde{\mathbf{p}}' = \varphi_1(X)\mathbf{d}_1(s,t) + \varphi_2(X)\mathbf{d}_2(s,t)$$

(o en general $\tilde{\mathbf{p}}'(X,t) = g(\mathbf{r}(s,t), \mathbf{d}_1(s,t), \mathbf{d}_2(s,t), X, t)$). Este modelo nos dice que no solamente la deformación es plana, sino que además la posición de los puntos en el estado deformado (es decir φ_1 y φ_2) depende únicamente de la posición que tenían en el estado de referencia. De hecho, la condición de compatibilidad con este modelo queda:

$$\tilde{\mathbf{p}}(X, 0) = \mathbf{R}(s) + \sum_{i=1}^3 \varphi_i(X)\mathbf{D}_i(s) \equiv \tilde{\mathbf{Z}}(X) .$$

Una vez que se ha especificado la forma de \mathbf{p}' , podemos escribir los términos \mathbf{q} y \mathbf{h} en las ecuaciones de movimiento de una forma más simple:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(s,t) &= \int_{B_s} [\varphi_1(X)\mathbf{d}_1(s,t) + \varphi_2(X)\mathbf{d}_2(s,t)] \tilde{\rho}(X) j(X) dX_s \\ &= \left[\int_{B_s} \varphi_1(X) \tilde{\rho}(X) j(X) dX_s \right] \mathbf{d}_1(s,t) + \left[\int_{B_s} \varphi_2(X) \tilde{\rho}(X) j(X) dX_s \right] \mathbf{d}_2(s,t) \\ &\equiv (\rho I_1)(s) \mathbf{d}_1(s,t) + (\rho I_2)(s) \mathbf{d}_2(s,t) \end{aligned}$$

donde $(\rho I_i)(s)$ es el primer momento generalizado de masa con respecto a $\mathbf{d}_i(s,t)$ ($dX_s = dx_1 dx_2$).

De la misma manera para $\mathbf{h}(s,t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s,t) &= \int_{B_s} \tilde{\rho}' \wedge \tilde{\rho} \tilde{\rho}' j(x) dX_s \\ &= \int_{B_s} [\varphi_1(X) \mathbf{d}_1(s,t) + \varphi_2(X) \mathbf{d}_2(s,t)] \wedge \\ &\quad \tilde{\rho}(X) [\varphi_1(X) \mathbf{w}(s,t) \wedge \mathbf{d}_1(s,t) + \varphi_2(X) \mathbf{w}(s,t) \wedge \mathbf{d}_2(s,t)] j(X) dX_s. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{w}(s,t) = \sum_{i=1}^3 w_i(s,t) \mathbf{d}_i(s,t)$ según se definió en la sección anterior, agrupando términos, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s,t) &= \left[\int_{B_s} \tilde{\rho} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) j(X) dX_s \right] w_3 \mathbf{d}_3 + \left[\int_{B_s} \tilde{\rho} \varphi_2^2 j(X) dX_s \right] w_2 \mathbf{d}_2 + \\ &\quad - \left[\int_{B_s} \tilde{\rho} \varphi_1 \varphi_2 j(X) dX_s \right] w_1 \mathbf{d}_2 - \left[\int_{B_s} \tilde{\rho} \varphi_2 \varphi_1 j(X) dX_s \right] w_2 \mathbf{d}_1 + \\ &\quad + \left[\int_{B_s} \tilde{\rho} \varphi_2^2 j(X) dX_s \right] w_1 \mathbf{d}_1. \end{aligned}$$

La expresión anterior se suele abreviar como:

$$\mathbf{h}(s,t) = \sum_{\gamma=1}^2 (\rho J_{\gamma\gamma})(s) w_3(s,t) \mathbf{d}_3(s,t) + \sum_{\mu,\nu=1}^2 (\rho J_{\mu\nu})(s) w_\nu(s,t) \mathbf{d}_\mu(s,t),$$

en donde $(\rho J_{\gamma\delta})(s) = \sum_{\mu,\nu=1}^2 \varepsilon_{\gamma\mu} \varepsilon_{\delta\nu} \int_{B_s} \tilde{\rho} \varphi_\mu \varphi_\nu j(X) dX_s$, es el segundo momento generalizado de masa con respecto a \mathbf{d}_γ y \mathbf{d}_δ .

En algunos casos es posible escoger $\mathbf{q}=0$ por ejemplo, si $\tilde{Z}(X) = \mathbf{R}(s) + \varphi_1(X) \mathbf{D}_1(s) + \varphi_2(X) \mathbf{D}_2(s)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} j(X) &= \frac{D(\tilde{Z})}{D(X)} \\ &= \det(\mathbf{R}'(s) + \varphi_1(X) \mathbf{D}_1'(s) + \varphi_2(X) \mathbf{D}_2'(s), \varphi_{1,1} \mathbf{D}_1(s) + \varphi_{2,1}(X) \mathbf{D}_2(s), \\ &\quad \varphi_{1,2}(X) \mathbf{D}_1(s) + \varphi_{2,2}(X) \mathbf{D}_2(s)) \\ &= [\mathbf{R}' + \varphi_1 \mathbf{U} \wedge \mathbf{D}_1 + \varphi_2 \mathbf{U} \wedge \mathbf{D}_2] \cdot [\varphi_{1,1} \mathbf{D}_1 + \varphi_{2,1} \mathbf{D}_2] \wedge [\varphi_{1,2} \mathbf{D}_1 + \varphi_{2,2} \mathbf{D}_2] \\ &= [V_3(s) - \varphi_1(X) U_2(s) + \varphi_2 U_1(s)] \frac{D(\varphi_1 \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}, \end{aligned}$$

en donde hemos tomado $\mathbf{R}'(s) = \sum_{i=1}^3 V_i(s) \mathbf{D}_i(s)$, $\varphi_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$. Supongamos ahora que $U_2 = U_1 = 0$; como $\mathbf{D}_3'(s) = -U_1 \mathbf{D}_2 + U_2 \mathbf{D}_1$, vemos que $\mathbf{D}_3(s) = \mathbf{cte}$. Dado que escogimos $\mathbf{R}'(s) = \mathbf{D}_3(s)$, esto corresponde a tener a la barra en una configuración inicial en la que se encuentra estirada. Por otra parte, \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 quedarían siempre determinados por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}' = u_3(s) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^\circ \\ \mathbf{D}_2^\circ \end{bmatrix}.$$

Supongamos además que $\mathbf{R}(s)$ corresponde a la línea de los centros de masa de las secciones transversales $B_o(s)$; y que $\bar{p}'(X) = x_1 \mathbf{d}_1 + x_2 \mathbf{d}_2$; i.e.; $j(X) = 1$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(s, t) &= \int_{B_s} \bar{\rho}(X)(x_1 \mathbf{d}_1 + x_2 \mathbf{d}_2) V_3(s) dX_s \\ &= v_3(s, t) \left[\left(\int_{B_s} \bar{\rho}(X) x_1 dX_s \right) \mathbf{d}_1(s, t) + \left(\int_{B_s} \bar{\rho}(X) x_2 dX_s \right) \mathbf{d}_2(s, t) \right] \\ &= v_3(s, t) [M \xi \mathbf{d}_1(s, t) + M \eta \mathbf{d}_2(s, t)] \\ &\equiv v_3(s, t) [T_1 \mathbf{d}_1(s, t) + T_2 \mathbf{d}_2(s, t)] \end{aligned}$$

donde T_i es el momento con respecto al eje x_i (con respecto a \mathbf{d}_1), M es la masa de la sección transversal, ξ, η son las coordenadas del centro de masa según los ejes x_1 y x_2 . (Ver [Cou], sec. 4.9)

Sin embargo, escogimos a $\mathbf{R}(s)$ como la línea de los centros, por lo tanto $\xi = \eta = 0$; i.e.; $\mathbf{q}(s, t) \equiv \mathbf{0}$, (o bien $(\rho J_\alpha)(s) = 0$).

Por otra parte, \mathbf{q} no tiene por qué ser siempre cero; si la configuración de la barra no es recta (u_1 y/o $u_2 \neq 0$) o bien si a ésta se le aplican fuerzas sobre su superficie (por un fluido en movimiento o por contacto con otros cuerpos) en tal caso, $\mathbf{r}(s)$ se toma sobre la superficie.

Bajo condiciones más generales, por ejemplo B_s simétrica con respecto a x_1 y x_2 y $\bar{\rho}(X)$ par en x_1 y x_2 , o bien u_1 y u_2 suficientemente pequeñas, pueden escogerse φ_1 y φ_2 tales que $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (ver [Ant], cap. VIII).

Por último, un comentario más acerca de escoger $\bar{p}' = x_1 \mathbf{d}_1 + x_2 \mathbf{d}_2$:

En este caso, la matriz de 2×2 cuyas componentes son $(\rho J_{\mu\nu})(s)$, resulta ser el tensor de inercia de la sección B_s , ([Lan] cap. VI). Este tensor es una matriz hermitiana, y por lo tanto diagonalizable bajo una transformación de ejes principales; así que, escogiendo $\mathbf{D}_1(s)$ y $\mathbf{D}_2(s)$ como los ejes principales de B_s , $(\rho J_{\mu\nu})(s) = 0 \quad \forall \mu, \nu : \mu \neq \nu$.

Por todo lo anterior, en el mejor de los casos, las ecuaciones de movimiento podrían reducirse a:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s + \mathbf{f} &= (\rho A) \mathbf{r}_{tt} \\ \mathbf{r}_s \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}_s + \mathbf{l} &= \partial_t \left[\sum_{\gamma=1}^3 (\rho J_{\gamma\gamma})(s) \omega_\gamma(s, t) \mathbf{d}_\gamma(s, t) \right] \end{aligned}$$

Otra condición que impondremos y que es tan importante como lógica desde un punto de vista físico es:

$$v_3 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_3 > 0 \quad \forall s \in [0, l], t \geq 0.$$

Como consecuencia inmediata de esta condición tendremos:

²Físicamente, las secciones transversales sólo cambian orientación, pero no forma ni tamaño

$$i] \|\mathbf{r}_s\|^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 > 0 .$$

Es decir, que si definimos al estiramiento en el punto s al tiempo t como la razón entre la longitud de un segmento de barra después de la deformación y su longitud antes de ser deformado, cuando este último tiende a cero:

$$\begin{aligned} e(s, t) &\equiv \lim_{a, b \rightarrow s} \frac{\int_a^b \|\mathbf{r}_s(\xi, t)\| d\xi}{b - a} \\ &= \lim_{a, b \rightarrow s} \|\mathbf{r}_s(\xi^*, t)\| \\ &= \|\mathbf{r}_s(s, t)\| \\ &= \left[\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} ; \end{aligned}$$

donde $a < \xi^*, s < b$ y se asumen válidas las condiciones del teorema del valor intermedio (continuidad de $v_i, i=1,2,3$).

ii] El plano generado por \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 y que contiene a la sección transversal B_s , no puede ser tangente a $\mathbf{r}_s(s, t)$ ($\forall s \in [0, l], t \geq 0$).

La hipótesis $v_3 > 0$ proviene de un contexto puramente unidimensional. Al estudiar la deformación en el espacio, es fácil obtener su generalización:

La configuración del cuerpo en su estado deformado y que está dada por $p : (Z, t) \rightarrow p(Z, t)$ debe ser inyectiva, de tal forma que dos puntos materiales no puedan ocupar el mismo lugar en el espacio E^3 . Sin embargo, la hipótesis de inyectividad es una restricción global sobre la configuración y es difícil de manejar matemáticamente. Por lo tanto, en vez de pedir la inyectividad, se suele pedir algo que es más tratable y que por lo menos localmente, nos daría la inyectividad: supondremos que la transformación p conserva la orientación.

Como sabemos, la orientación se conserva pidiendo que el signo del jacobiano de $p(Z, t)$ (t fijo) sea positivo. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{D(p)}{D(Z)} &= \frac{D(\bar{X})}{D(Z)} \frac{D(\bar{p})}{D(X)} \\ &= \left(\frac{D(\bar{Z})}{D(X)} \right)^{-1} \frac{D(\bar{p})}{D(X)} . \end{aligned}$$

Si como antes $j(X) = \frac{D(\bar{Z})}{D(X)}$ (sección 2.2), la condición de preservación de la orientación es:

$$\frac{1}{j(X)} \frac{D(\bar{p})}{D(X)} > 0 \quad \forall X \in \bar{X}(B_o) .$$

La generalización de la restricción unidimensional viene dada por el siguiente

Teorema: Supongamos que $\tilde{p}(X, t) = r(s, t) + \sum_{i=1}^2 \varphi_i(X) \mathbf{d}_i(s, t)$, donde $\varphi_i \in C[\tilde{X}(\bar{B}_\sigma)]$, y que $\frac{D(\tilde{p})}{j(X)D(X)} > 0 \quad \forall X \in \tilde{X}(\bar{B}_\sigma)$.
Entonces existe una función $V : (u_1, u_2, s) \rightarrow V(u_1, u_2, s)$ tal que $V(0, 0, s) = 0$, $V(\cdot, \cdot, s)$ es convexa, homogénea de grado 1 y además:

$$v_3 > V(u_1, u_2, s).$$

Prueba: Aquí sólo un bosquejo (ver [Ant], cap. VIII). Recordemos que

$$j(X) = [V_3(s) - \varphi_1(X)U_2(s) + \varphi_2U_1(s)] \frac{D(\varphi_1\varphi_2)}{D(x_1, x_2)}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{D(\tilde{p})}{D(X)} &= \det(\varphi_{1,1}\mathbf{d}_1 + \varphi_{2,1}\mathbf{d}_2, \varphi_{1,2}\mathbf{d}_1 + \varphi_{2,2}\mathbf{d}_2, \\ &\quad \varphi_{1,3}\mathbf{d}_1 + \varphi_1\mathbf{u} \wedge \mathbf{d}_1 + \varphi_{2,3}\mathbf{d}_2 + \varphi_2\mathbf{u} \wedge \mathbf{d}_2 + v_1\mathbf{d}_1 + v_2\mathbf{d}_2 + v_3\mathbf{d}_3) \\ &= (v_3 - \varphi_1u_2 + \varphi_2u_1) \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{j(X)D(X)} \frac{D(\tilde{p})}{D(X)} > 0 \iff \frac{v_3 - \varphi_1u_2 + \varphi_2u_1}{V_3 - \varphi_1U_2 + \varphi_2U_1} > 0 \quad \forall X \in \tilde{X}(\bar{B}_\sigma).$$

Como $V_3(s) = v_3(s, 0)$, lo anterior se satisface si pedimos que $\varphi_3(s, t) > \varphi_1(X)u_2(s, t) - \varphi_2(X)u_1(s, t) \equiv \mathcal{F}(u_1, u_2, s)$. $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, s)$ es homogénea de grado uno, convexa y continua.

Sea $V(u_1, u_2, s) \equiv \max\{\varphi_1(X)u_2(s, t) - \varphi_2(X)u_1(s, t) : x_1, x_2 \in \bar{B}_s\}$. Por lo tanto, el conjunto de variables de esfuerzo que satisfacen la propiedad de preservación de la orientación son aquellas para las cuales v_3, u_1, u_2 satisfacen:

$$v_3 > V(u_1, u_2, s).$$

Para entender mejor lo que representa V , defínase

$\mathcal{H}(X) \equiv \{(u_1, u_2, v_3) : v_3 > \varphi_1u_2 - \varphi_2u_1\}$. $\mathcal{H}(X)$ es la parte superior al plano $\varphi_1u_2 - \varphi_2u_1$, del espacio de coordenadas (u_1, u_2, v_3) .

Sea ahora $\mathcal{N}(s) \equiv \bigcap\{\mathcal{H}(X) : (x_1, x_2) \in \bar{B}_s\}$; como la intersección de regiones superiores a cierto plano en el espacio (u_1, u_2, v_3) (ver figura 9). $\mathcal{N}(s)$ es conexo y abierto además, como sus puntos son tales que $v_3 > V(u_1, u_2, s)$

(i.e. $v_3 > \varphi_1u_2 - \varphi_2u_1$) tenemos que para cualquier $\alpha > 0$, $\alpha(u_1, u_2, v_3)$ también satisface la desigualdad; es decir $(u_1, u_2, v_3) \in \mathcal{N}(s) \Rightarrow \alpha(u_1, u_2, v_3) \in \mathcal{N}(s)$, por lo tanto, $\mathcal{N}(s)$ es un cono sólido, abierto en \mathbb{R}^3 (figura 10). \square

Una vez que sabemos la estructura, ecuaciones de movimiento, constricciones de la deformación y las variables en términos de las cuales haremos la descripción de la barra, analizaremos en breve algunas deformaciones características que puede sufrir aquella de tal manera que, sea cual sea la forma que tenga la barra, el estado en el que se encuentra es alcanzado por un número finito de dichas deformaciones.

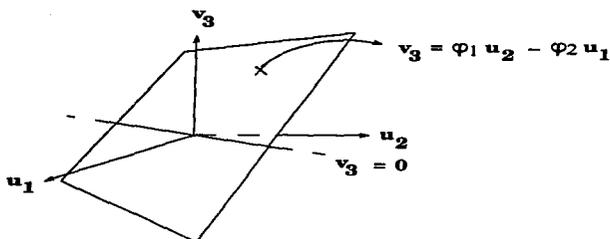


Figura 2.9: $v_3(s, t) > \varphi_1(X)u_2(s, t) - \varphi_2(X)u_1(s, t)$

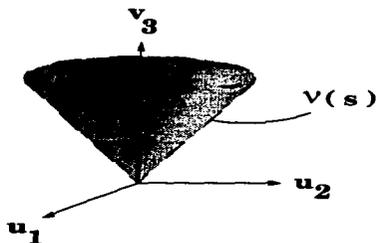


Figura 2.10: Rango de valores para las variables u_1, u_2 y v_3 .

2.6 Deformaciones básicas

Interpretación de las variables de esfuerzo

Supongamos que en la configuración de referencia el eje de la barra es paralelo al eje de coordenadas \hat{k} , es decir, tenemos que

$$\mathbf{R}(s) = s\hat{k}$$

$$\mathbf{D}_1(s) = \hat{i}, \quad \mathbf{D}_2(s) = \hat{j}, \quad \mathbf{D}_3(s) = \hat{k}$$

(Ver figura 11). Supongamos ahora que sometemos a la barra a ciertas deformaciones, de tal manera que alcanza un estado de equilibrio (*independiente del tiempo*) por lo cual hemos quitado la dependencia en t . Entonces, se presentan los casos siguientes.

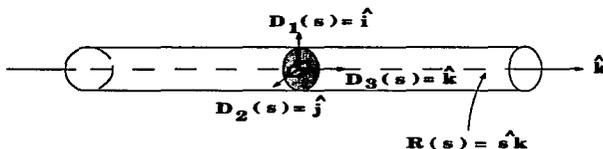


Figura 2.11: Estado de referencia de la barra.

2.6.1 Elongación pura

En este tipo de deformación supondremos que solamente hemos cambiado la longitud de la barra, estirándola o comprimiéndola. El estado deformado está dado por:

$$\mathbf{r}(s) = \lambda s \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{d}_1(s) = \hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{d}_2(s) = \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{d}_3(s) = \hat{\mathbf{k}}$$

Calculando u_l y w_l (ver sec. 1.5) tenemos que:

$$u_l = w_l = 0, \quad l = 1, 2, 3.$$

Luego, $\mathbf{r}_s = \lambda \hat{\mathbf{k}} = \lambda \mathbf{d}_3$, entonces:

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_3 = \lambda.$$

v_3 podría entonces ser considerada como la variable de esfuerzo que mide el estiramiento. Tal interpretación no es sin embargo exacta, ya que:

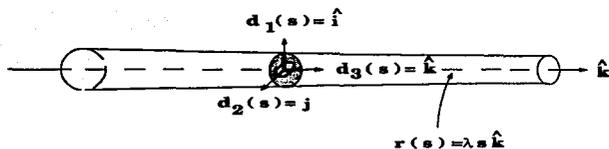
$$v_3 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_3 = \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2).$$

(ver figura 12). Por lo tanto, v_3 es la razón de los volúmenes formados por los vectores tangentes (\mathbf{r}_s y $\mathbf{R}' = \mathbf{D}_3$) y transversales ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ y $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$) después y antes de la deformación (obviamente por construcción, antes de la deformación tal volumen es igual a 1). Por la condición $v_3 > 0$, tal razón no es cero, y además el paralelepípedo $\mathbf{r}_s, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ siempre está orientado positivamente; razón por la cual a aquella condición también se le llama *condición de conservación de la orientación*.

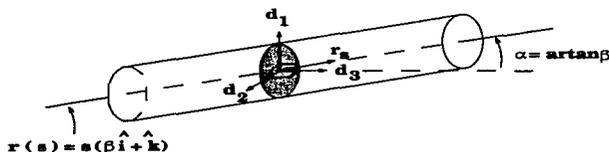
2.6.2 Deformación pura

Ahora el estado de referencia de la barra está dado por:

$$\mathbf{r}(s) = s(\beta \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \\ \mathbf{d}_1(s) = \hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{d}_2(s) = \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{d}_3(s) = \hat{\mathbf{k}}$$

Figura 2.12: *Elongación pura*

(ver figura 13). Entonces:

Figura 2.13: *Deformación pura*

$$u_l = w_l = 0 \quad , \quad l = 1, 2, 3$$

$$v_1 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{i}} = \beta \quad , \quad v_2 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad , \quad v_3 = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_3 = \mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

Por lo tanto, podríamos decir que v_1 nos da una medida del desplazamiento (cambio en el ángulo) entre \mathbf{d}_1 y \mathbf{r}_s . Sin embargo esto no es del todo correcto ya que, en general, un estiramiento también podría originar torcas sobre las secciones transversales, que las desplacen del plano $\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}} \rangle$.

Una medida de la deformación pura está definida como:

$$\frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_1}{\|\mathbf{r}_s\|} = \frac{v_1}{[\sum_{i=1}^3 v_i^2]^{\frac{1}{2}}}$$

2.6.3 Torsión pura

Este es el caso en el que la barra ha sido torcida girando alrededor de su eje, como si se tratara de exprimirla. El estado deformado estará caracterizado por:

$$\mathbf{r}(s) = s\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{d}_1(s) = \cos(\mu s)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\mu s)\hat{\mathbf{j}} \quad , \quad \mathbf{d}_2(s) = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{d}_1(s) \quad , \quad \mathbf{d}_3(s) = \hat{\mathbf{k}}$$

(ver figura 14). Por lo tanto:

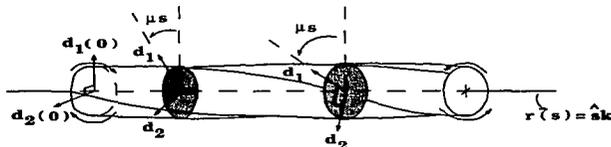


Figura 2.14: Deformación por torsión

$$\begin{aligned} w_l &= 0 & , & \quad l = 1, 2, 3 \\ u_1 &= u_2 = 0 \\ u_3 &= \mu \\ v_1 &= v_2 = 0 \\ v_3 &= 1 \end{aligned}$$

Puede entonces considerarse a μ como una medida de la torsión de la barra.

2.6.4 Flexión pura

La configuración deformada de la barra es ahora un anillo en el plano $\langle \hat{i}, \hat{k} \rangle$:

$$\mathbf{r}_s = \lambda(\sin(\omega s)\hat{k} - \cos(\omega s)\hat{i})$$

$$\mathbf{d}_1(s) = \hat{j} \wedge \mathbf{d}_3 \quad , \quad \mathbf{d}_2(s) = \hat{j} \quad , \quad \mathbf{d}_3(s) = \cos(\omega s)\hat{k} + \sin(\omega s)\hat{i} .$$

De hecho, $\mathbf{d}_1(s) = -\frac{1}{\lambda}\mathbf{r}_s(s)$ (ver figura 15). Entonces:

$$\begin{aligned} w_l &= 0 & , & \quad l = 1, 2, 3 \\ u_1 &= u_3 = 0 \\ u_2 &= \omega \\ v_1 &= v_2 = 0 \\ v_3 &= \omega\lambda \end{aligned}$$

Por esto se dice que u_2 mide la cantidad de flexión. Obsérvese que el ángulo de inclinación del vector tangente (en este caso \mathbf{d}_3) es $\phi = \omega s$; por lo tanto $u_2 = \frac{d\phi}{ds}$. Así que uno debe tener cuidado de no confundir u_2 con la curvatura, ya que s es la longitud de arco en el estado de referencia. De hecho la longitud de arco en el estado actual (deformado) es $\lambda\omega s$, y por lo tanto la curvatura es $\frac{1}{\lambda}$. Hacemos notar que en estos casos particulares

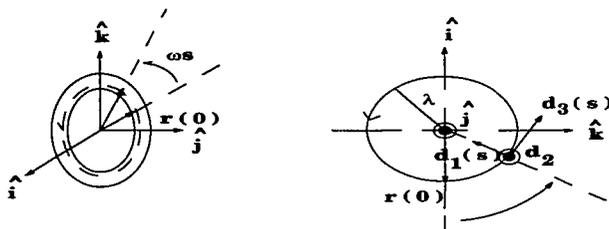


Figura 2.15: Deformación por flexión

de barras circulares, un cambio en la curvatura causado por un cambio en el tamaño del círculo, no produce cambios en u_2 .

Como los anteriores ejemplos pretenden ilustrar, es posible asociar directamente cada una de las variables de esfuerzo, con deformaciones específicas de la barra.

Supongamos que $M(\sigma)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva en las coordenadas móviles o de Frenet-Serret (σ la longitud de arco de la curva). Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \mathbf{M} &\equiv \mathbf{T}(\sigma) && \text{es el vector tangente unitario a la curva.} \\ \mathbf{N}(\sigma) &\equiv \frac{1}{\kappa} \frac{d}{d\sigma} \mathbf{T} && \text{es la normal principal y } \kappa > 0 \text{ es la curvatura } (\|\mathbf{N}\| = 1). \\ \mathbf{B}(\sigma) &\equiv \mathbf{T}(\sigma) \wedge \mathbf{N}(\sigma) && \text{también es unitario y se llama la binormal.} \end{aligned}$$

Es sencillo ver que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \mathbf{B} &= -\frac{1}{\tau} \mathbf{N}(\sigma) && \tau \text{ el radio de torsión, } 1/\tau \text{ la torsión.} \\ \frac{d}{d\sigma} \mathbf{N} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{B}(\sigma) - \kappa \mathbf{T}(\sigma) \end{aligned}$$

(ver [Cou], cap. 2). En la configuración de referencia $s = \sigma$. Ahora, escojamos a los vectores directores de referencia como:

$$\mathbf{D}_1(s) = \mathbf{N}(s) \quad , \quad \mathbf{D}_2(s) = \mathbf{B}(s) \quad , \quad \mathbf{D}_3(s) = \mathbf{T}(s) \quad .$$

En tal caso, si calculamos las variables de esfuerzo u_1, u_2, u_3 tenemos que:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{123} \mathbf{D}_2' \cdot \mathbf{D}_3 + \varepsilon_{132} \mathbf{D}_3' \cdot \mathbf{D}_2 \} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\tau} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} - \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{123} \mathbf{D}'_1 \cdot \mathbf{D}_3 + \varepsilon_{231} \mathbf{D}'_3 \cdot \mathbf{D}_1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{\tau} \mathbf{B} + \kappa \mathbf{T} \right) \cdot \mathbf{T} + \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \right] \\
 &= \kappa \\
 U_3 &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{312} \mathbf{D}'_1 \cdot \mathbf{D}_2 + \varepsilon_{321} \mathbf{D}'_2 \cdot \mathbf{D}_1 \} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\tau} \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T} \right) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{\tau} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \right] \\
 &= \frac{1}{\tau}
 \end{aligned}$$

Así que en este caso U_2 sí es la curvatura.

Por lo anterior, convenimos en llamar a las variables de esfuerzo de la siguiente manera:

v_1 y v_2	son los <u>esfuerzos de deformación pura</u> ,
v_3	es la <u>dilatación</u> ,
u_1 y u_2	son los <u>esfuerzos de flexión</u> ,
u_3	es el <u>esfuerzo de torsión</u> .

Por otra parte, a partir de la definición de $u_1, u_2, u_3; w_1, w_2, w_3$ es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
 \partial_s u_i(s, t) &= \partial_s [u(s, t) \cdot \mathbf{d}_1(s, t)] \\
 &= [\partial_s u(s, t)] \cdot \mathbf{d}_1(s, t), \\
 \partial_t w_i(s, t) &= \partial_t [w(s, t) \cdot \mathbf{d}_1(s, t)] \\
 &= [\partial_t w(s, t)] \cdot \mathbf{d}_1(s, t).
 \end{aligned}$$

2.7 Invarianza de las variables de esfuerzo

Primero se demuestra que las variables de esfuerzo son las mismas, independientemente del sistema de coordenadas que se hubiera escogido para $\mathbf{r}(s, t)$. Después se demuestra que las variables de esfuerzo determinan \mathbf{r} y \mathbf{d}_1 salvo por un desplazamiento rígido; por lo tanto, este conjunto de seis variables participa solamente del cambio en la forma de la barra, mas no de su posición en el sistema de coordenadas.

Sean dos sistemas de coordenadas con orígenes \mathbf{o} y $\bar{\mathbf{o}}$, respectivamente. Una barra en el espacio tendrá, según el sistema de referencia del que se trate, vectores de posición $\mathbf{r}(s, t)$

y $\bar{\mathbf{r}}(s, t)$, y vectores directores $\mathbf{d}_1(s, t)$ y $\bar{\mathbf{d}}_1(s, t)$. Llamemos a $\mathbf{T}(t)$ el vector de traslación entre \mathbf{o} y $\bar{\mathbf{o}}$, y $\mathbf{Q}(t)$ la matriz ortogonal que nos da la rotación entre sus ejes. Entonces:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}(s, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(s, t) + \mathbf{T}(t) \\ \bar{\mathbf{d}}_1(s, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_1(s, t)\end{aligned}$$

(ver figura 16). Por lo tanto, en el sistema $\bar{\mathbf{o}}$ las variables de esfuerzo están dadas por:

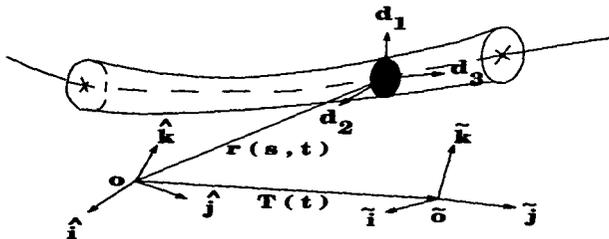


Figura 2.16: Deformación por flexión

$$\begin{aligned}\bar{u}_l(s, t) &= \bar{\mathbf{r}}_s \cdot \bar{\mathbf{d}}_1 \\ &= \partial_s(\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(s, t) + \mathbf{T}(t)) \cdot \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_1(s, t) \\ &= [\mathbf{Q}'(t)\mathbf{r}_s(s, t)]' \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_1(s, t) \\ &= \mathbf{r}_s' \mathbf{Q}' \mathbf{Q} \mathbf{d}_1 \\ &= \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_1 \\ &= u_l(s, t) \quad .\end{aligned}$$

Análogamente, de la definición de u_l :

$$\begin{aligned}\bar{u}_l(s, t) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} (\partial_s \bar{\mathbf{d}}_m) \cdot \bar{\mathbf{d}}_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} \partial_s \mathbf{d}_m' \mathbf{Q}' \mathbf{Q} \mathbf{d}_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} (\partial_s \mathbf{d}_m) \cdot \mathbf{d}_n \\ &= u_l(s, t) \quad .\end{aligned}$$

Por lo tanto, las variables de esfuerzo son las mismas, independientemente del sistema de ejes coordenados escogido.

De hecho:

$$\begin{aligned}\partial_s \bar{u}_l(s, t) &= (\partial_s \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{d}}_l \\ &= (\partial_s \mathbf{u})' \mathbf{Q}' \mathbf{Q} \mathbf{d}_l \\ &= (\partial_s \mathbf{u}) \cdot \mathbf{d}_l \\ &= \partial_s u_l(s, t) \\ \partial_t \bar{v}_l(s, t) &= \partial_t v_l(s, t)\end{aligned}$$

(usando que $(\mathbf{Q}')' \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}' \mathbf{Q}'$ y la definición: $v_l = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{d}_l$).

Llamemos al vector $\mathbf{D} \equiv (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. Para t fijo, sabemos que \mathbf{D} satisface la ecuación diferencial: $\mathbf{D}_s = \mathbf{U}\mathbf{D}$. Dada la linealidad del sistema y suponiendo la continuidad de $u_l(\cdot, t)$, $l = 1, 2, 3$, la solución al problema de valores iniciales existe y es única.

Sea \mathbf{P} la matriz fundamental del sistema, escogida de tal forma que $\mathbf{P}(0, t) = \mathbf{I}$, entonces la solución al sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\mathbf{D}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) \mathbf{D}_0.$$

Descompongamos la matriz fundamental en nueve matrices de 3×3 $\mathbf{P}_{ij}(s, t)$, es decir:

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(s, t) & \cdots & \mathbf{P}_{13}(s, t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{31}(s, t) & \cdots & \mathbf{P}_{33}(s, t) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, por componentes, $\mathbf{D}(s, t)$ es de la forma ($\mathbf{D}_0 = (\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0)^t$):

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_l(s, t) &= \mathbf{P}_{1l}(s, t) \mathbf{d}_1^0(t) + \mathbf{P}_{2l}(s, t) \mathbf{d}_2^0(t) + \mathbf{P}_{3l}(s, t) \mathbf{d}_3^0(t); \\ & \quad l = 1, 2, 3\end{aligned}$$

de tal forma que $\mathbf{P}_{ij}(0, t) = \delta_{ij} \mathbf{I}$. $\{\mathbf{d}_l^0\}$ es un conjunto ortonormal de vectores, y por lo tanto base para \mathbf{E}^3 , (así se escoge).

Supongamos que $\mathbf{M}(s, t)$ es otra matriz fundamental del sistema, por lo tanto:

$$\bar{\mathbf{D}}(s, t) = \mathbf{M}(s, t) \mathbf{C}_0,$$

también es solución de la ecuación diferencial, donde \mathbf{C}_0 es un vector constante (en s). De la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales (ver [Codd], cap.3, teorema 2.3) sabemos que, por la unicidad al problema de valores iniciales, $\mathbf{M}(s, t)$ y $\mathbf{P}(s, t)$ difieren por una matriz constante (en s):

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) \mathbf{C}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}(s, t) &= \mathbf{P}(s, t)\mathbf{C}\mathbf{C}_o \\ &\equiv \mathbf{P}(s, t)\tilde{\mathbf{D}}_o.\end{aligned}$$

O bien, por componentes:

$$\tilde{\mathbf{d}}_1(s, t) = \mathbf{P}_{11}(s, t)\tilde{\mathbf{d}}_1^o(t) + \mathbf{P}_{12}(s, t)\tilde{\mathbf{d}}_2^o(t) + \mathbf{P}_{13}(s, t)\tilde{\mathbf{d}}_3^o(t).$$

Escogeremos $\{\tilde{\mathbf{d}}_l^o(t)\}$ de tal forma que también sea una base ortonormal para \mathbf{E}^3 . La conexión entre las bases $\{\mathbf{d}_l^o\}$ y $\{\tilde{\mathbf{d}}_l^o\}$ es una rotación, si llamamos a $\mathbf{Q}(t)$ la matriz de rotación:

$$\tilde{\mathbf{d}}_l^o(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_l(t), \quad l = 1, 2, 3.$$

Como $\{\mathbf{d}_l^o\}$ es una base, escribamos a $\mathbf{d}_1(s, t)$ en términos de sus elementos:

$$\mathbf{d}_1(s, t) = \sum_{m=1}^3 (\mathbf{d}_1(s, t) \cdot \mathbf{d}_m^o) \mathbf{d}_m^o.$$

Comparando esta expresión con la descomposición de $\mathbf{d}_1(s, t)$ en términos de la matriz fundamental $\mathbf{P}(s, t)$, encontramos que:

$$(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_m^o) \mathbf{I} = \mathbf{P}_{1m}(s, t).$$

Si esto lo sustituimos en la expresión para $\tilde{\mathbf{d}}_1$ y usamos que $\tilde{\mathbf{d}}_l^o = \mathbf{Q}\mathbf{d}_l^o$, vemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_1(s, t) &= \sum_{m=1}^3 (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_m^o) \mathbf{Q}\mathbf{d}_m^o \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_1(s, t).\end{aligned}$$

Así que las soluciones de $\partial_s \mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{D}$ difieren por una rotación y por lo tanto equivalen a ver la deformación desde dos sistemas de referencia rotados uno con respecto al otro, con matriz de rotación $\mathbf{Q}(t)$. De esta forma, u_1 , u_2 y u_3 determinan \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 y \mathbf{d}_3 (para t fijo) salvo por una rotación.

Si ahora integramos $\mathbf{r}_s(s, t) = \sum_{i=1}^3 v_i(s, t)\mathbf{d}_i(s, t)$ para t fijo, obtenemos:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_o + \int_0^s \sum_{i=1}^3 v_i(\xi, t)\mathbf{d}_i(\xi, t) d\xi.$$

Si hacemos lo mismo, pero ahora en el sistema con origen $\tilde{\mathbf{o}}$:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s, t) = \tilde{\mathbf{r}}_o + \int_0^s \sum_{i=1}^3 v_i(\xi, t)\tilde{\mathbf{d}}_i(\xi, t) d\xi,$$

donde además hemos usado que las variables de esfuerzo no dependen del sistema de coordenadas ($\tilde{v}_l(s, t) = v_l(s, t)$, $l = 1, 2, 3$). Pero como arriba se demostró, $\tilde{\mathbf{d}}_1(s, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{d}_1(s, t)$, entonces podemos reescribir al vector $\tilde{\mathbf{r}}$ como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}(s, t) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}_o + \tilde{\mathbf{r}}_o - \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}_o + \mathbf{Q}(t) \int_0^s \sum_{i=1}^3 v_i(\xi, t) \mathbf{d}_1(\xi, t) d\xi \\ &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(s, t) + \mathbf{T}\end{aligned}$$

es decir, recuperamos la ecuación al principio de esta sección.

En conclusión:

- Dados dos sistemas de coordenadas al tiempo t , las variables de esfuerzo asociadas a cada uno de ellos son las mismas.
- Dado un conjunto de variables de esfuerzo, éstas determinarán $\mathbf{r}(s, t)$ y los vectores directores, módulo una transformación rígida.

2.8 Ecuaciones constitutivas

Cuando se dedujeron las ecuaciones de movimiento, al mismo tiempo se definieron la fuerza de contacto $\mathbf{n}(s, t)$ y la torca de contacto $\mathbf{m}(s, t)$, en función de las fuerzas aplicadas; y en el caso de $\mathbf{m}(s, t)$ del vector de posición relativo \mathbf{p}' . Una forma de redefinir a $\mathbf{n}(s, t)$ y a $\mathbf{m}(s, t)$ es a través de funciones constitutivas que dependen de las variables de esfuerzo $\mathbf{U}(s, t) = (u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s, t))$, $\mathbf{V}(s, t) = (v_1(s, t), v_2(s, t), v_3(s, t))$. Para toda la discusión posterior, supondremos que estas ecuaciones constitutivas son de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(s, t) &= \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{U}(s, t), \mathbf{V}(s, t), s) \\ \mathbf{n}(s, t) &= \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{U}(s, t), \mathbf{V}(s, t), s),\end{aligned}$$

cuyo dominio se restringe al cumplimiento de $v_3(s, t) > 0 \forall s \in [0, l]$, $t \geq 0$; o si se prefiere abordar un punto de vista tridimensional, el dominio es el conjunto de variables para las cuales u_1, u_2, v_3 satisfacen $v_3 > V(u_1, u_2, s)$ (i.e. $(u_1, u_2, v_3) \in \mathcal{N}(s)$), como se definió en la sección 2.6.

Siempre que existan las ecuaciones constitutivas para la torca y la fuerza de contacto, se dirá que la barra en cuestión es elástica.

Una definición más completa del término elástico se puede ver en [Ciar], cap. 3. En ella se involucran al gradiente de deformación (∇p) y al tensor de esfuerzos de Cauchy (T), según fueron introducidos en las secciones 2.3 y 2.4, respectivamente.

Definición: Sean S^3 las matrices simétricas de 3×3 , y M_{\pm}^3 las matrices cuadradas de 3×3 , cuyo determinante es positivo. Un material es elástico si existe un mapeo

$$\hat{T} : (Z, F) \in B_0 \times M_{\pm}^3 \longrightarrow \hat{T}(Z, F) \in S^3,$$

llamado la función de respuesta para el tensor de esfuerzos de Cauchy, tal que, sea cual sea la configuración deformada que adopte un cuerpo hecho de este material; el tensor de esfuerzos de Cauchy T en cualquier punto p de la configuración deformada, está relacionado con el gradiente de deformación ∇p por la ecuación:

$$T(p) = \hat{T}(Z, \nabla p(Z))$$

en donde como antes, Z son las coordenadas del punto material en la configuración de referencia.

En adelante se pensará en la variable temporal t que aparece en las ecuaciones constitutivas, no como el tiempo absoluto, sino como el tiempo transcurrido desde la fabricación del material (la edad del material). Tal suposición es obvia, si se piensa que de ser t el tiempo absoluto, un experimento realizado hoy con una barra fabricada ayer, daría resultados diferentes al mismo experimento realizado mañana, con una barra fabricada hoy.

La dependencia de las ecuaciones constitutivas en las variables de esfuerzo, proviene de la experiencia física. Por ejemplo, de haber una dependencia en $r(s, t)$, las propiedades del material cambiarían con su posición en el sistema de referencia escogido. Si dependiera de $r_s(s, t)$, las propiedades de la barra cambiarían con su orientación. Si hubiera una dependencia en las derivadas mayores con respecto de s del vector $r(s, t)$, se involucrarían efectos de tensión superficial, los cuales no forman parte del modelo que se adoptará.

Otras formas razonables para la dependencia de las funciones constitutivas podrían ser:

(a)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(s, t) &= \hat{\mathbf{m}}(U(s, t), V(s, t), U_t(s, t), V_t(s, t), s) \\ \mathbf{n}(s, t) &= \hat{\mathbf{n}}(U(s, t), V(s, t), U_t(s, t), V_t(s, t), s) \end{aligned}$$

En este modelo se supone que las propiedades de la barra dependen de la rapidéz con la que se realiza la deformación. Una barra que satisfaga estas propiedades se dice viscoelástica de tipo diferencial con grado de complejidad igual a 1.

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(s, t) &= \hat{\mathbf{m}}(U(s, t), V(s, t), \theta(s, t), s) \\ \mathbf{n}(s, t) &= \hat{\mathbf{n}}(U(s, t), V(s, t), \theta(s, t), s) \end{aligned}$$

Aquí $\theta(s, t)$ representa la temperatura de la barra. En este caso, las ecuaciones de movimiento deben ser complementadas con la ecuación de la energía y las ecuaciones constitutivas correspondientes a las nuevas variables que tuvieran que ser involucradas.

En realidad, la forma más general de las ecuaciones constitutivas para una barra elástica (sin tomar en cuenta los efectos por la temperatura) son:

$$\mathbf{n}(s, t) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}(s, t), \mathbf{r}_s(s, t), \mathbf{d}_\alpha(s, t), \partial_s \mathbf{d}_\alpha(s, t), s)$$

(análogamente para $\mathbf{m}(s, t)$). De igual forma, las ecuaciones constitutivas más generales que uno puede pensar para una barra viscoelástica son:

$$\mathbf{n}(s, t) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_s(s, t), \mathbf{d}_\alpha(s, t), \partial_s \mathbf{d}_\alpha(s, t), \mathbf{r}_{st}(s, t), \partial_t \mathbf{d}_\alpha(s, t), \partial_{ts} \mathbf{d}_\alpha(s, t), s)$$

(igualmente para $\mathbf{m}(s, t)$).

Sin embargo, se puede demostrar (ver [Ant] cap. VIII), que en ambos casos estas expresiones se reducen a las mencionadas al principio para la barra elástica y viscoelástica (caso (a)), respectivamente.

La demostración es una aplicación directa de llamado teorema de representación de Cauchy. Este teorema utiliza la propiedad que tienen las funciones constitutivas de ser hemitrópicas. Esto es, supongamos que con respecto a la base de vectores directores hacemos la descomposición:

$$\mathbf{n}(s, t) = \sum_{i=1}^3 n_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{m}(s, t) = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{d}_i(s, t).$$

Ahora definamos el par de ternas:

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, m_3).$$

La propiedad de hemitropía se expresa como:

$$n_l(\mathbf{r}_s, \mathbf{d}_\alpha, \partial_s \mathbf{d}_\alpha, s) = \hat{n}_l(\mathbf{Q}(t) \mathbf{r}_s, \mathbf{Q}(t) \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{Q}(t) \partial_s \mathbf{d}_\alpha, s) \\ l = 1, 2, 3$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ es una matriz de rotación (análogamente para \hat{m}_l). Es decir, una función es hemitrópica si es invariante bajo un grupo ortogonal propio de transformaciones. En nuestro caso, el hecho de que las funciones constitutivas sean hemitrópicas, es una consecuencia del principio de objetividad, el cual

supone que \mathbf{m} y \mathbf{n} son las mismas para cualquier sistema de coordenadas (es decir, son invariantes bajo transformaciones rígidas). Otra forma de decirlo es que las leyes que dictan el comportamiento de las fuerzas (y torcas) son las mismas para todos los sistemas de referencia.

Hacemos ahora las siguientes definiciones:

n_1 y n_2 son las fuerzas de deformación pura,
 m_1 y m_2 son las torcas de doblamiento o momentos de doblamiento,
 m_3 es la torca de torsión o momento de torsión.

2.9 Condiciones de Monotonidad

Las variables de esfuerzo y las ecuaciones constitutivas se relacionan, además, por las siguientes condiciones físicas:

- (1) Un incremento en la tensión $\tau \equiv \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}_s}{\|\mathbf{r}_s\|}$ acompaña un incremento en el estiramiento (sec. 2.6) $e \equiv \|\mathbf{r}_s\|$. Matemáticamente este hecho se expresa como sigue:

Sea $\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\mathbf{r}_s}{\|\mathbf{r}_s\|} = \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \mathbf{d}_i$; donde $\cos \beta_i = v_i/e$ son los cosenos directores de \mathbf{r}_s con respecto a los vectores directores $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$. Por lo tanto, como $\mathbf{n}(s, t) = \sum_{i=1}^3 n_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$, tendremos que:

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}_s \\ &= \sum_{i=1}^3 n_i \cos \beta_i. \end{aligned}$$

Ahora, según las ecuaciones constitutivas $n_i = \hat{n}_i(U(s, t), V(s, t), s)$, donde $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ (sec. 2.9). Luego, substituyendo $v_i = e \cos \beta_i$,

$$\tau = \sum_{i=1}^3 \hat{n}_i(U, e \cos \beta_i, e \cos \beta_2, e \cos \beta_3, s) \cos \beta_i.$$

Entonces:

$$\partial_e \tau = \sum_{i,m=1}^3 \frac{\partial \hat{n}_i}{\partial v_m} \cos \beta_i \cos \beta_m$$

Si por $\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{V}}$ representamos a la matriz cuya componente (i, m) es $\frac{\partial \hat{n}_i}{\partial v_m}$, entonces esta condición queda expresada como:

$$(\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3) \left[\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{V}} \right] \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall s \in [0, l], t \geq 0.$$

- (2) Un incremento en la fuerza de deformación pura n_α , acompaña un incremento en la variable de esfuerzo de deformación pura v_α correspondiente ($\alpha = 1, 2$). Como $n_\alpha(s, t) = \hat{n}_\alpha(U(s, t), V(s, t), s)$, suponiéndola función de v_α solamente y bajo las hipótesis del teorema del valor medio, escribimos esta condición como:

$$0 < \hat{n}_\alpha(\dots, v_\alpha + h, \dots) - \hat{n}_\alpha(\dots, v_\alpha, \dots) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \hat{n}_\alpha(\dots, v_\alpha^*, \dots) h \iff \frac{\partial \hat{n}_\alpha}{\partial v_\alpha} > 0$$

$$v_\alpha < v_\alpha^* < v_\alpha + h \quad ; \quad \alpha = 1, 2.$$

- (3) Un incremento en la torca de doblamiento m_α , acompaña un incremento en el esfuerzo de flexión u_α correspondiente. Dado que $m_\alpha(s, t) = \hat{m}_\alpha(U(s, t), V(s, t), s)$ y suponiéndola función de u_α solamente, esta condición se escribe:

$$0 < \hat{m}_\alpha(\dots, u_\alpha + h, \dots) - \hat{m}_\alpha(\dots, u_\alpha, \dots) = \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \hat{m}_\alpha(\dots, u_\alpha^*, \dots) h \iff \frac{\partial \hat{m}_\alpha}{\partial u_\alpha} > 0$$

$$u_\alpha < u_\alpha^* < u_\alpha + h \quad ; \quad \alpha = 1, 2.$$

- (4) Un incremento en el momento de torsión m_3 acompaña un incremento en el esfuerzo de torsión u_3 . $m_3(s, t) = \hat{m}_3(U(s, t), V(s, t), s)$ y suponiéndola función de u_3 solamente:

$$0 < \hat{m}_3(\dots, u_3 + h, \dots) - \hat{m}_3(\dots, u_3, \dots) = \frac{\partial}{\partial u_3} \hat{m}_3(\dots, u_3^*, \dots) h \iff \frac{\partial \hat{m}_3}{\partial u_3} > 0$$

$$u_3 < u_3^* < u_3 + h \quad .$$

Asumiendo la diferenciabilidad de las funciones constitutivas, las cuatro condiciones de monotonicidad anteriores, con frecuencia son reemplazadas por una condición más general:

Lema: Supongamos que la matriz de 6×6

$$\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{m}}{\partial U} & \frac{\partial \hat{m}}{\partial V} \\ \frac{\partial \hat{n}}{\partial U} & \frac{\partial \hat{n}}{\partial V} \end{bmatrix}$$

es definida positiva. Entonces las cuatro condiciones de monotonicidad se satisfacen.

Prueba: Una matriz \mathbf{A} de $n \times n$ se dice definida positiva si su forma cuadrática asociada es definida positiva; es decir; si

$$(X, \mathbf{A}X) \equiv X^T \mathbf{A} X > 0 \quad \forall X \in E^n, X \neq 0.$$

$(\cdot, \cdot) : E^n \times E^n \longrightarrow R$ el producto escalar en E^n .

Como $X^t \mathbf{A} X$ es un escalar, tendremos que:

$$X^t \mathbf{A} X = (X^t \mathbf{A} X)^t = X^t \mathbf{A}^t X = (X, \mathbf{A}^t X);$$

Por lo tanto: $X^t \mathbf{A} X = \frac{1}{2}[(X, \mathbf{A} X) + (X, \mathbf{A}^t X)]$, y como el producto escalar es una forma bilineal:

$$(X, \mathbf{A} X) = (X, \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)X);$$

por lo tanto una matriz es definida positiva si la parte simétrica es definida positiva.

Ahora, si \mathbf{A} es la matriz de elementos $a_{i,j}$ y $\{\hat{\mathbf{e}}_l\}$ es la base canónica de E^n , ($\hat{\mathbf{e}}_l$ ceros en todas sus entradas excepto la l -ésima, que es uno), el hecho de ser \mathbf{A} definida positiva da como resultado:

$$0 < (\hat{\mathbf{e}}_l, \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}_l) = \hat{\mathbf{e}}_l^t \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}}_l = a_{ll} \quad ; \quad l = 1, \dots, n;$$

es decir, los elementos de la diagonal son todos positivos. En particular, para la matriz jacobiana $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)}$, se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{m}_l}{\partial u_l} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \hat{n}_l}{\partial v_l} > 0$$

$$l = 1, 2, 3.$$

Esto implica de inmediato las condiciones 2,3 y 4.

En cuanto a la primera condición, como $X^t \mathbf{A} X > 0 \quad \forall x \in E^6$, en particular para $X^t = (\mathbf{0}, \mathbf{Y})$ ($\mathbf{0}$ el vector nulo en E^3 , $\mathbf{Y}^t = (y_1, y_2, y_3)$):

$$0 < \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}^t \frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^t \frac{\partial \hat{n}}{\partial V} \mathbf{Y};$$

es decir; que la matriz $\frac{\partial \hat{n}}{\partial V}$ también es definida positiva y por lo tanto la condición 1 (con $\mathbf{Y}^t = (\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3)$), se satisface. (De la misma forma $\frac{\partial \hat{m}}{\partial U}$ es definida positiva)
—□

En cuanto a las condiciones de monotonicidad, la hipótesis $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)}$ definida positiva no es la hipótesis más general que puede pensarse. Una extensión para funciones \hat{m} y \hat{n} no diferenciables, constituye en pedir que el mapeo $(\hat{m}(\cdot, \cdot, s), \hat{n}(\cdot, \cdot, s))$ sea uniformemente monótono sobre subconjuntos compactos de su dominio $\mathcal{N}(s)$ (ver

sec. 2.6). Es decir, que para cada subconjunto compacto $\mathcal{K}(s) \subset \mathcal{N}(s)$, existe un número $c(\mathcal{K}(s)) > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}\Phi(U, V, \bar{U}, \bar{V}) &\equiv [\hat{m}(U, V, s) - \hat{m}(\bar{U}, \bar{V}, s)] \cdot (U - \bar{U}) + \\ &+ [\hat{n}(U, V, s) - \hat{n}(\bar{U}, \bar{V}, s)] \cdot (V - \bar{V}) \\ &> c(\mathcal{K}(s))(\|U - \bar{U}\|^2 + \|V - \bar{V}\|^2) \\ &\forall (U, V), (\bar{U}, \bar{V}) \in \mathcal{K}(s)\end{aligned}$$

Una generalización de la hipótesis anterior y que en la práctica resulta ser de mayor utilidad, consiste en pedir que el mapeo $(\hat{m}(\cdot, \cdot, s), \hat{n}(\cdot, \cdot, s))$ sea estrictamente monótono sobre $\mathcal{N}(s)$:

$$\Phi(U, V, \bar{U}, \bar{V}) > 0 \\ \forall (U, V), (\bar{U}, \bar{V}) \in \mathcal{N}(s) : (U, V) \neq (\bar{U}, \bar{V}) .$$

Aún más general que la condición anterior aunque de menor utilidad en la práctica resulta ser que el mapeo $(\hat{m}(\cdot, \cdot, s), \hat{n}(\cdot, \cdot, s))$ sea monótono sobre $\mathcal{N}(s)$:

$$\Phi(U, V, \bar{U}, \bar{V}) \geq 0 \\ \forall (U, V), (\bar{U}, \bar{V}) \in \mathcal{N}(s) .$$

Es claro que una función uniformemente monótona sobre conjuntos compactos es estrictamente monótona, y que una función estrictamente monótona es monótona.

Suponiendo la diferenciabilidad de \hat{m} y \hat{n} , es fácil ver cómo el hecho de pedir que el mapeo (\hat{m}, \hat{n}) sea uniformemente monótono, inmediatamente implica que $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)}$ es definida positiva, (lo único que debe hacerse es linearizar las expresiones entre corchetes que aparecen en Φ , componenete por componenete, alrededor de (U, V)). El mismo caso se tiene para la condición de monotonidad estricta, sólo que aquí se obtiene la equivalencia. Por otro lado, la propiedad de monotonidad resulta a su vez equivalente a la no-negatividad de la matriz $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)}$.

2.10 Condiciones de crecimiento

Las condiciones de crecimiento se refieren al comportamiento de las funciones constitutivas, cuando las variables de esfuerzo asumen valores extremos. Al igual que en el caso de las condiciones de monotonidad, las condiciones de crecimiento tienen una base física.

- (i) Una elongación (estiramiento) infinito de la barra, debe ser causado por una tensión infinita. Si como antes τ representa a la tensión y e el estiramiento, esta condición nos dice que

$$\tau(e) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad e \longrightarrow \infty$$

(sec. 2.10).

(ii) Valores infinitos en los esfuerzos de deformación pura, deben ser causados por fuerzas de deformación pura infinitas:

$$\begin{aligned}\hat{n}_1(U, V, s) &\longrightarrow \pm\infty && \text{cuando } v_1 \longrightarrow \pm\infty \\ \hat{n}_2(U, V, s) &\longrightarrow \pm\infty && \text{cuando } v_2 \longrightarrow \pm\infty.\end{aligned}$$

(iii) Un esfuerzo de torsión infinito debe ser causado por un momento de torsión infinito:

$$\hat{m}_3(U, V, s) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{cuando } u_3 \longrightarrow \pm\infty.$$

El establecimiento de condiciones análogas para \hat{n}_3 , \hat{m}_1 y \hat{m}_2 en términos de las variables de esfuerzo correspondientes v_3 , u_1 y u_2 (respectivamente), deben tener en cuenta la condición de preservación de la orientación ($v_3 > 0$), o en general, la condición $(v_3, u_1, u_2) \in \mathcal{N}(s)$ (dentro de un contexto tridimensional). En este sentido hacemos la siguiente

Definición: Se dice que el esfuerzo (U, V) es *extremo* si

$$\begin{aligned}\|(U, V)\| &\equiv \sqrt{\|U\|^2 + \|V\|^2} = \infty \\ \text{ó} \\ (U, V) &\in \partial\mathcal{N}(s)\end{aligned}$$

Ahora se adaptará el siguiente:

Principio constitutivo general: Esfuerzos extremos deben venir acompañados por resultantes infinitas. Es decir, si (U, V) es un esfuerzo extremo, entonces $\|\hat{m}(U, V, s), \hat{n}(U, V, s)\| = \infty$.

Una hipótesis de utilidad, y que resulta ser una generalización de las condiciones (i), (ii), (iii); es la llamada **Hipótesis de coercibilidad**. Esta nos dice que si definimos la función $\Phi(U, V, \hat{U}, \hat{V})$ como en 2.10, la siguiente suposición tiene lugar:

$$\frac{\Phi(U, V, \hat{U}, \hat{V})}{(\|U - U_0\|^2 + \|V - V_0\|^2)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \infty \quad \text{según } (U, V) \text{ se convierta en extremo.}$$

Esta hipótesis tiene sentido ya que, si se supone válida y además que la función Φ es estrictamente monótona, entonces las ecuaciones $m = \hat{m}(U, V, s)$, $n = \hat{n}(U, V, s)$ pueden resolverse de manera única para (U, V) (ver siguiente sección). La solución obtenida $U = \hat{U}(m, n, s)$, $V = \hat{V}(m, n, s)$, nos lleva a definir ecuaciones constitutivas análogas a las vistas en 2.9.

Mas aún, supóngase que $\hat{m}(\cdot, \cdot, s)$ y $\hat{n}(\cdot, \cdot, s)$ son continuamente diferenciables y satisfacen la propiedad $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)} = \Delta$ definida positiva. En tal caso el teorema de la

función inversa dice, por una parte, que $\frac{\partial(\hat{U}, \hat{V})}{\partial(\hat{m}, \hat{n})} = \Delta^{-1}$; y por otra parte, dado que Δ es definida positiva: $(Y, \Delta Y) > 0 \forall Y \in E^6$, en particular para $Y = \Delta^{-1}X$, $0 < (Y, \Delta Y) = (\Delta^{-1}X, X) = (X, \Delta^{-1}X)$; por lo tanto $\frac{\partial(\hat{U}, \hat{V})}{\partial(\hat{m}, \hat{n})}$ también es definida positiva.

La ventaja de tener la invertibilidad se verá mas adelante y consiste, básicamente, en una simplificación de las ecuaciones de equilibrio.

2.11 Invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \longrightarrow (H, N, M)$

Teorema: (Invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \longrightarrow (H, N, M)$)

Sean $m = (m_1, m_2, m_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ las ternas formadas por las componentes de la fuerza y torca de contacto; con dominio en el cono sólido abierto en $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$, dado por $v_3 > V(u_1, u_2, s)$, donde V es homogénea y de grado 1.

(i) Defínase el mapeo

$$\Phi(U, V, U_0, V_0) \equiv \langle (\hat{m}(U, V, s) - \hat{m}(U_0, V_0, s), \hat{n}(U, V, s) - \hat{n}(U_0, V_0, s)), (U - U_0, V - V_0) \rangle \\ (U, V, s), (U_0, V_0, s) \in \mathcal{N} .$$

Supóngase que $\Phi(U, V, U_0, V_0) > 0 \forall (U, V, s), (U_0, V_0, s) \in \mathcal{N} : (U, V) \neq (U_0, V_0)$.

Si

$$\frac{\Phi(U, V, U_0, V_0)}{|(U - U_0, V - V_0)|} \longrightarrow \infty \begin{cases} |U - U_0, V - V_0| \longrightarrow \infty \\ \text{ó} \\ (U, V) \in \partial\mathcal{N} \text{ (extremo)} \end{cases} \quad \text{(Hipótesis de coercibilidad).}$$

Entonces, las ecuaciones $m(U, V, s) = \tilde{m}$, $n(U, V, s) = \tilde{n}$, pueden resolverse de manera única para U y V en términos de m y n : $U = \hat{U}(\tilde{m}, \tilde{n}, s)$, $V = \hat{V}(\tilde{m}, \tilde{n}, s)$.

(ii) Si además $\hat{m}(U, V, s)$, $\hat{n}(U, V, s)$ son continuamente diferenciables y $\frac{\partial(\hat{m}, \hat{n})}{\partial(U, V)}$ es definido-positivo, entonces también $\hat{U}(m, n, s)$, $\hat{V}(m, n, s)$ son C^1 y $\frac{\partial(\hat{U}, \hat{V})}{\partial(\hat{m}, \hat{n})}$ es definido-positivo.

Prueba:

(i)

Tomemos (\tilde{m}, \tilde{n}) tales que $|(\tilde{m} - m_0, \tilde{n} - n_0)| < R$. Defínase ahora el conjunto:

$$\Omega_R \equiv \{(U, V) : \frac{\Phi(U, V, U_0, V_0)}{|(U - U_0, V - V_0)|} < R\} .$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la continuidad de \hat{m} y \hat{n} , Ω_R es no vacío, ya que (m_0, n_0) están en Ω_R .

Ahora, $\partial\Omega_R = \{(U, V) : \frac{\Phi(U, V, U_0, V_0)}{\|(U - U_0, V - V_0)\|} = R\}$, y por lo tanto $\bar{\Omega}_R$ es acotado: supongamos que (U_n, V_n) es una sucesión en Ω_R , convergente en $\bar{\Omega}_R$, tal que $\|(U_n - U_0, V_n - V_0)\| \rightarrow \infty$, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(U_n, V_n, U_0, V_0)}{\|(U_n - U_0, V_n - V_0)\|} = \infty$. Pero por la continuidad del cociente y por la definición de Ω_R , esto es cierto si para n suficientemente grande, $(U_n, V_n) \notin \Omega_R$, lo cual es una contradicción (pues se tiene la hipótesis de coercibilidad). Por lo tanto, $\bar{\Omega}_R$ es acotado.

Considérese ahora el mapeo

$$f(U, V) \equiv \begin{pmatrix} \hat{m}(U, V) - \bar{m} \\ \hat{n}(U, V) - \bar{n} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\langle f(U, V), (U - U_0, V - V_0) \rangle}{\|(U - U_0, V - V_0)\|} \Big|_{\partial\Omega_R} = \left[\frac{\Phi(U, V, U_0, V_0)}{\|(U - U_0, V - V_0)\|} - \frac{\langle (\bar{m} - m_0, \bar{n} - n_0), (U - U_0, V - V_0) \rangle}{\|(U - U_0, V - V_0)\|} \right] \Big|_{\partial\Omega_R}$$

$$\geq R - |(\bar{m} - m_0, \bar{n} - n_0)| > 0$$

(por la hipótesis sobre (\bar{m}, \bar{n})).

Por lo tanto, sobre $\partial\Omega_R$, $f(U, V)$ no solo es distinta de cero, sino que $f(U, V)$ y $\begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix}$ no son antiparalelas. Entonces, por el lema de la sección 1.2, $\text{deg}(f, 0; \Omega_R) = \text{deg}\left(\begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix}, 0; \Omega_R\right) = 1$, de donde f tiene un cero en el interior de Ω_R ; es decir, existe un punto $(\bar{U}, \bar{V}) \in \Omega_R$ tal que $\hat{m}(\bar{U}, \bar{V}, s) = \bar{m}$ y $\hat{n}(\bar{U}, \bar{V}, s) = \bar{n}$, (cierto, pues de no haber un cero, la suma en la definición de $d(0)$ -ver capítulo I- sería vacía y por lo tanto el grado sería igual a cero).

El lema antes citado, para este caso, tiene la siguiente forma:

Sea $g(U, V) \equiv \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix}$. Defínase la familia de mapeos

$$F(U, V; \tau) \equiv \tau f(U, V) + (1 - \tau) \begin{pmatrix} U - U_0 \\ V - V_0 \end{pmatrix}; \tau \in [0, 1].$$

Ahora, para $(U, V) \in \partial\Omega_R$:

$$\langle F(U, V; \tau), (U - U_0, V - V_0) \rangle = \tau \langle f(U, V), (U - U_0, V - V_0) \rangle + (1 - \tau) \|(U - U_0, V - V_0)\|^2.$$

2.11. $(\eta, \nu, \mu) \leftrightarrow (H, N, M)$

79

Para $\tau = 1$ se vió arriba que $\langle F(U, V; \tau), (U - U_0, V - V_0) \rangle > 0$. Por otra parte, para $\tau = 0$, $\langle F(U, V, 0), (U - U_0, V - V_0) \rangle > 0$. Por lo tanto, de la continuidad en τ de f , $\langle F(U, V; \tau), (U - U_0, V - V_0) \rangle > 0$ sobre $\partial\Omega_R$, y por lo tanto $F(U, V; \tau) \neq 0$ (de hecho positivo) para $(U, V) \in \partial\Omega_R$.

Así que por la propiedad de homotopía:

$$\deg(F(U, V; 1), 0; \Omega_R) = \deg(F(U, V; 0), 0; \Omega_R) ;$$

es decir:

$$\deg(f(U, V), 0; \Omega_R) = \deg\left(\left(\begin{array}{c} U - U_0 \\ V - V_0 \end{array}\right), 0; \Omega_R\right) = 1 .$$

En cuanto a la unicidad del cero de $f(U, V)$: si f tuviera otro cero, (\bar{U}, \bar{V}) ; es decir,

$$f(\bar{U}, \bar{V}) \equiv \left(\begin{array}{c} \hat{m}(\bar{U}, \bar{V}, s) - \bar{m} \\ \hat{n}(\bar{U}, \bar{V}, s) - \bar{n} \end{array} \right) = 0 .$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{U}, \bar{V}, \bar{U}, \bar{V}) &= [\hat{m}(\bar{U}, \bar{V}, s) - \hat{m}(\bar{U}, \bar{V}, s)] \cdot [\bar{U} - \bar{U}] + [\hat{n}(\bar{U}, \bar{V}, s) - \hat{n}(\bar{U}, \bar{V}, s)] \cdot [\bar{V} - \bar{V}] \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis, esto es cierto si y solo si $(\bar{U}, \bar{V}) = (\bar{U}, \bar{V})$.

Por último, como se puede hacer esto para cualesquier $(U_0, V_0) \in \mathcal{N}$ y (\bar{m}, \bar{n}) que satisfagan $|\bar{m} - m_0, \bar{n} - n_0| < R$, se tiene que el mapeo $(U, V, s) \rightarrow \left(\begin{array}{c} m(U, V, s) \\ n(U, V, s) \end{array} \right)$ es invertible en \mathcal{N} .

(ii) (Ya demostrada en la sección I.10).

—□

Resumen.

Se quiere estudiar la deformación de un tipo de barra en particular, llamada barra de Cosserat, cuando ésta es sometida a una fuerza f .

La barra parte de una configuración de referencia o inicial, en la cual ocupa una región \mathcal{B}_0 del espacio euclidiano tridimensional E^3 . La estructura de la barra en este estado se caracteriza por el eje de la barra $\mathbf{R}(s)$ (escogido de manera apropiada) y las secciones

transversales $\mathcal{B}_o(s)$, perpendiculares al eje y definidas como la intersección de \mathcal{B}_o con el plano generado por dos vectores \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , escogidos de tal manera que junto con $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{R}'$, forman una base ortonormal derecha ($\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_3$) en cada punto s del eje. Por otra parte, todo punto material con posición Z , tendrá asociadas una terna de coordenadas curvilíneas $X = (x_1, x_2, s)$, ($\tilde{Z}(X) = \mathbf{R}(s) + x_1\mathbf{D}_1(s) + x_2\mathbf{D}_2(s)$).

Una vez que la barra se ha deformado bajo la acción de esa fuerza \mathbf{f} , ocupará ahora una región que se llamó \mathcal{B} , de E^3 . El eje de la barra está ahora representado por el vector $\mathbf{r}(s, t)$, y los vectores directores son ahora $\mathbf{d}_1(s, t)$, $\mathbf{d}_2(s, t)$, $\mathbf{d}_3(s, t)$; en donde \mathbf{d}_3 y \mathbf{r}_s ya no son necesariamente paralelos.

Las barras de Cosserat cumplen con la hipótesis de deformación plana, la cual consiste en que los puntos materiales sobre cada sección transversal $\mathcal{B}_o(s)$ permanecerán en el plano generado por \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 (más específicamente, en la intersección de dicho plano con \mathcal{B}). De tal forma que todo punto sobre la barra está ubicado por el vector:

$$\tilde{p}(X, t) = \mathbf{r}(s, t) + \varphi_1(X)\mathbf{d}_1(s, t) + \varphi_2\mathbf{d}_2(s, t)$$

(donde las funciones φ_1 y φ_2 constituyen parte del modelo propuesto).

La deformación de la barra está dominada por las ecuaciones de movimiento, esto es, las ecuaciones para las fuerzas y torcas. Dado que nosotros estudiaremos únicamente los estados de equilibrio estático, estas ecuaciones se transforman en las ecuaciones de equilibrio (haciendo todas las derivadas temporales en las ecuaciones de movimiento iguales a cero) resultando en:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}' + \mathbf{l} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es la fuerza de contacto, \mathbf{f} la fuerza de cuerpo, \mathbf{m} es la torca de contacto y \mathbf{l} es la torca externa o de cuerpo.

El objetivo es el de encontrar el lugar que ocupan los puntos materiales después de la deformación, es decir, el vector p . Ahora, dada la definición de p (y puesto que las funciones φ_i son conocidas de alguna forma) para lograr el objetivo es necesario encontrar el vector \mathbf{r} junto con la orientación de los vectores directores.

Como se definieron las variables de esfuerzo $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ por las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s &= v_1\mathbf{d}_1 + v_2\mathbf{d}_2 + v_3\mathbf{d}_3 \\ \partial_s\mathbf{d}_l &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{d}_l, \quad l = 1, 2, 3; \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{d}_1 + u_2\mathbf{d}_2 + u_3\mathbf{d}_3, \end{aligned}$$

el problema anterior se puede plantear como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en s (t fijo) dado por:

$$\partial_s \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & u_3 \mathbf{I} & -u_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -u_3 \mathbf{I} & \mathbf{0} & u_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ u_2 \mathbf{I} & -u_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ v_1 \mathbf{I} & v_2 \mathbf{I} & v_3 \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} ;$$

cuya solución dependerá de que se puedan determinar las variables de esfuerzo.

Con esta finalidad se tienen las ecuaciones constitutivas, las cuales describen de alguna manera la respuesta del material. Estas se basan en la descomposición de \mathbf{n} y \mathbf{m} según la base de vectores directores como:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{m} &= m_1 \mathbf{d}_1 + m_2 \mathbf{d}_2 + m_3 \mathbf{d}_3 \end{aligned} ,$$

donde:

$$n_l(s, t) = \hat{n}_l(U(s, t), V(s, t), s) \quad ; \quad m_l(s, t) = \hat{m}_l(U(s, t), V(s, t), s) .$$

Substituyendo lo anterior en las ecuaciones de equilibrio, transformamos tal sistema de ecuaciones diferenciales en uno para las variables de esfuerzo, cuya solución permitiría, en principio, resolver el sistema para los vectores directores y para \mathbf{r} .

Precisamente en este punto entra en juego la condición de monotonicidad estricta sobre la función Φ definida en la sección 2.10 (generalización de las condiciones de monotonicidad) y la hipótesis de coercibilidad (generalización de las condiciones de crecimiento); ya que éstas dan como resultado la invertibilidad global del mapeo $(U, V) \longrightarrow (m, n)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, lo cual permite tratar a las ecuaciones de equilibrio como un sistema para \mathbf{m} y \mathbf{n} , más sencillo de resolver, que el que se tendría para U y V .

Resolviendo para \mathbf{m} y \mathbf{n} e invirtiendo se obtienen entonces U y V , que a su vez serían substituidas en el sistema de ecuaciones para los vectores directores y para \mathbf{r} ; encontrando así finalmente al vector \mathbf{p} .

Capítulo 3

Deformación de barras en un plano

En el capítulo anterior se presentó el caso de la deformación de barras en el espacio. En este capítulo se supondrá que el objeto se deforma de una manera tal, que su movimiento estará siempre restringido a un plano, y se verá qué simplificaciones representa esta restricción, en términos de las ecuaciones de equilibrio y el número de variables de esfuerzo y de funciones constitutivas.

Las hipótesis sobre la barra (delgada, elástica, etc), así como el tratamiento del problema, siguen las mismas líneas que en la sección anterior: las primeras dos secciones se encargan de caracterizar la estructura interna de la barra para este caso particular de deformación, poniendo de relieve que ahora uno de los vectores directores está siempre fijo (\mathbf{D}_2 y su correspondiente después de la deformación \mathbf{d}_2). Acto seguido, en la sección 3.3, se escriben de nuevo las variables de esfuerzo para saber las consecuencias de la determinación de la base de vectores directores. Aprovechando la ventaja que representa la simplificación plana, se reescriben las restricciones de la deformación y se definen nuevas cantidades en términos geométricos. La sección 3.5 es de suma importancia, pues se trata con detalle las consecuencias del movimiento restringido al plano, a saber, que las torcas \mathbf{m} y \mathbf{l} son verticales, lo cual lleva a hipótesis adicionales sobre las funciones φ_1 y φ_2 y que apenas se mencionaron en el capítulo anterior; terminando con la expresión explícita para las ecuaciones de equilibrio (las cuales se reducen a tres). Las secciones 3.6, 3.7 y 3.8 son una transcripción directa de sus correspondientes en el capítulo II. En ellas se aprecia la simplificación del modelo: las ecuaciones constitutivas son tres; es importante no perder de vista las hipótesis de monotonicidad y de crecimiento, pues aquí se prestan a una interpretación física más directa, además de que serán usadas en el capítulo IV. La sección 3.9 sobre las condiciones de paridad e iniciales es fundamental, pues a menudo se volverá a ella en distintos cálculos a lo largo del capítulo siguiente; es importante tenerla en mente. Por último, la sección 3.10 es un adelanto de la formulación integral de las

ecuaciones de equilibrio y que se hará también en el próximo capítulo; en donde además se justificará el planteamiento del problema como uno de punto fijo. La razón de incluir tal sección ahora, es sólo para poner de relieve la aplicación de dichos métodos bajo formas más generales de la fuerza de cuerpo f .

3.1 Estructura interna de una barra en su estado de referencia

Como antes, se tendrá como estado inicial de la barra, aquél en el que ésta se encuentra libre de fuerzas aplicadas. Este tipo de deformación en un plano supone que, con respecto al plano horizontal $\langle \hat{i}, \hat{j} \rangle$ (por mencionar alguno), la barra es simétrica y, más aún, que dicha simetría será conservada *en todo momento*.

Tal hipótesis restringe el tipo de fuerzas que actúan sobre la barra: estas están condicionadas a *no romper la "simetría horizontal" de la configuración inicial*.

La región B_0 (definida en el capítulo anterior), es en este caso la región ocupada por los puntos en la intersección de la barra con el plano horizontal $\langle \hat{i}, \hat{j} \rangle$; a tal región se le llamará la sección longitudinal de referencia (de la barra). (ver figura 1)

La curva suave C_0 que se identificó dentro de B_0 como el eje de la barra, está descrita por el vector $\mathbf{R}(s)$, tal que $\mathbf{R} : s \in [0, l] \rightarrow \mathbf{R}(s) \in \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle$. Como antes, C_0 se escoge

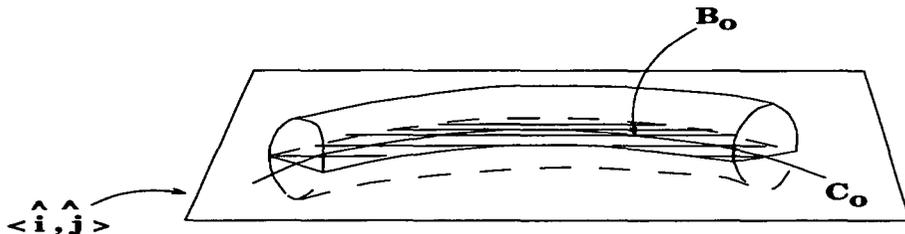


Figura 3.1: *Sección longitudinal de referencia.*

de manera tal que represente la forma de la barra en su estado inicial, así que B_0 pueda

considerarse como un ensanchamiento de ella, (C_o puede ser la línea de los centros de las secciones transversales $B_o(s)$, una curva sobre ∂B_o , etc).

Para los vectores directores en el estado de referencia se escogerá:

$$\mathbf{D}_1(s) = -\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{R}'(s) \quad , \quad \mathbf{D}_2(s) = -\hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \mathbf{D}_3(s) = \mathbf{R}'(s) \quad .$$

(ver figura 2)

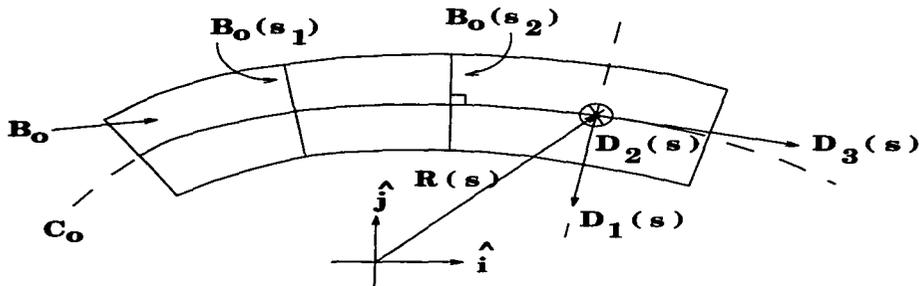


Figura 3.2: Vectores directores en la configuración de referencia.

3.2 Estructura de una barra en su estado deformado

Como resultado de la acción de fuerzas y torcas, la barra se deforma. Como antes $\mathbf{r}(s,t)$ es el vector de posición de los puntos sobre C , el eje de la barra en su estado deformado. Es claro que $\mathbf{r} : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \ni (s,t) \rightarrow \mathbf{r}(s,t) \in \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}} \rangle$.

Asumiendo la hipótesis de deformación plana (cap.II, sec. 2.5: $\bar{\rho}' = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(X) \mathbf{d}_1(s,t)$), $\mathbf{d}_1(s,t)$ será el vector que junto con $\mathbf{d}_2(s,t) = -\hat{\mathbf{k}}$ definen la orientación de la sección transversal $B(s)$. Por consiguiente se tiene que: $\mathbf{d}_3(s,t) \equiv \mathbf{d}_1(s,t) \wedge \mathbf{d}_2(s,t) = -\mathbf{d}_1(s,t) \wedge \hat{\mathbf{k}}$; de tal forma que $\{\mathbf{d}_1\}$ es una base ortonormal para E^3 , en cada punto de C .

Aprovechando la simplificación del movimiento plano, se escribirá:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(s, t) &= \cos \theta(s, t) \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(s, t) \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{d}_3(s, t) &= -\sin \theta(s, t) \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta(s, t) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

(ver figura 3). Por compatibilidad con las condiciones de arriba, si se conviene en llamar

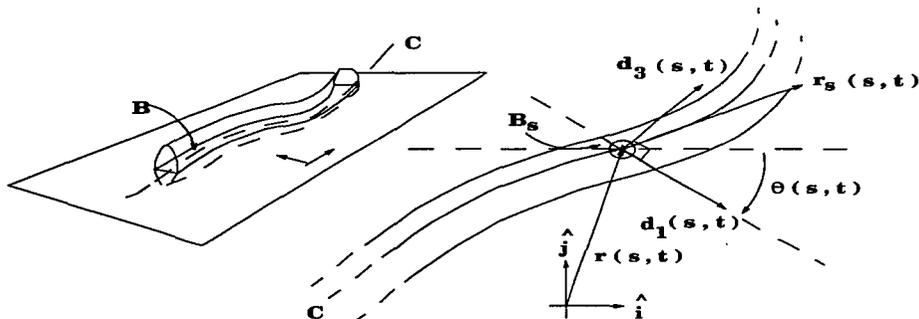


Figura 3.3: Configuración en el estado deformado.

$\theta(s, 0) = \theta_o(s)$ tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(s) &= \mathbf{d}_1(s, 0) = \cos \theta_o(s) \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta_o(s) \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{D}_3(s) &= \mathbf{d}_3(s, 0) = -\sin \theta_o(s) \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta_o(s) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

De donde:

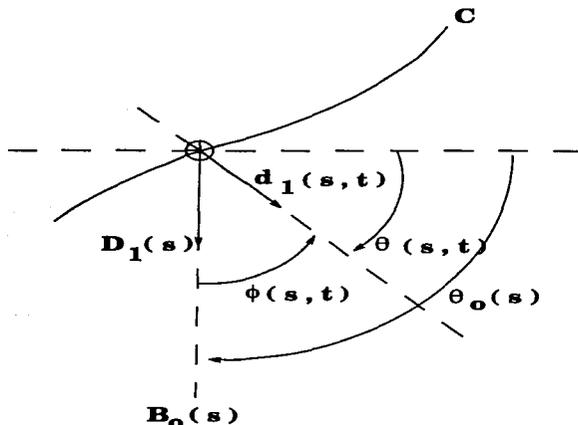
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} &= \cos \theta_o(s) \mathbf{D}_1(s) - \sin \theta_o(s) \mathbf{D}_3(s) \\ \hat{\mathbf{j}} &= \sin \theta_o(s) \mathbf{D}_1(s) + \cos \theta_o(s) \mathbf{D}_3(s) \end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_3 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(s, t) &= \cos \phi(s, t) \mathbf{D}_1(s, t) + \sin \phi(s, t) \mathbf{D}_3(s, t) \\ \mathbf{d}_3(s, t) &= -\sin \phi(s, t) \mathbf{D}_1(s, t) + \cos \phi(s, t) \mathbf{D}_3(s, t) \end{aligned}$$

en donde $\phi(s, t) = \theta(s, t) - \theta_o(s, t)$ es la diferencia entre los ángulos de inclinación que tiene la sección transversal después (B_s) y antes ($B_o(s)$) de la deformación (en el punto s al tiempo t). (ver figura 4)

No hace ninguna diferencia el trabajar con el ángulo $\theta(s, t)$ o con el ángulo $\phi(s, t)$. Aquí se escogerá trabajar con este último, ya que no depende directamente del sistema de ejes coordinados escogidos, sino que es una cantidad intrínseca de la deformación.

Figura 3.4: Definición del ángulo $\phi(s)$.

3.3 Las variables de esfuerzo

Teniendo en cuenta que se escogió $\mathbf{d}_2(s, t) = -\hat{\mathbf{k}}$ y usando cualquiera de las descomposiciones que se dieron para \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_3 (en términos de \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_3 o en términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$) es fácil ver que:

$$\begin{aligned}\partial_s \mathbf{d}_1(s, t) &= \tilde{\mu}(s, t) \mathbf{d}_3(s, t) \\ \partial_s \mathbf{d}_2(s, t) &= \mathbf{0} \\ \partial_s \mathbf{d}_3(s, t) &= -\tilde{\mu}(s, t) \mathbf{d}_1(s, t)\end{aligned}$$

donde $\tilde{\mu}(s, t) \equiv \partial_s \theta(s, t)$. Ahora, en el capítulo anterior se definió (sec. 2.5) $\mathbf{u}(s, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$, entonces se tenía que $\partial_s \mathbf{d}_i(s, t) = \mathbf{u}(s, t) \wedge \mathbf{d}_i(s, t)$. De manera que desarrollando para este caso se obtendrá:

$$\begin{aligned}\partial_s \mathbf{d}_1(s, t) &= -u_2(s, t) \mathbf{d}_3(s, t) + u_3(s, t) \mathbf{d}_2(s, t) \\ \partial_s \mathbf{d}_2(s, t) &= u_1(s, t) \mathbf{d}_3(s, t)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$u_2(s, t) = -\tilde{\mu}(s, t) \quad , \quad u_3(s, t) \equiv 0$$

$$u_1(s, t) \equiv 0$$

Análogamente para las derivadas temporales, únicamente cambiando $\bar{\mu}$ por $\dot{\mu} \equiv \partial_t \theta$:

$$\begin{aligned} w_1(s, t) &= w_3(s, t) \equiv 0 \\ w_2(s, t) &= -\dot{\mu}(s, t) \end{aligned}$$

Por otra parte, dada la planaridad de la deformación, $\mathbf{r}_s \in \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle$. Así que en la descomposición $\mathbf{r}_s(s, t) = \sum_{i=1}^2 v_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$:

$$v_2(s, t) \equiv 0.$$

De hecho, como para la configuración de referencia se escogió $\mathbf{R}'(s) = \mathbf{D}_3(s)$, se tendrá:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= V_2(s) \equiv 0 \\ V_3(s) &= 1. \end{aligned}$$

Lo anterior siempre se cumple tanto para deformaciones en el espacio como planas, y sea cual sea la configuración inicial o de referencia de la barra.

Para el caso plano en particular, siguiendo los mismo pasos que antes cuando se calculó \mathbf{D}_1 , se encuentra que, definiendo $\bar{\mu}_o(s) \equiv \theta'_o(s)$:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= U_3(s) \equiv 0 \\ U_2(s) &= -\bar{\mu}_o(s). \end{aligned}$$

Dado que para la deformación plana los vectores \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_3 son los que llevan el peso de la descripción, se harán los siguientes cambios para simplificar la notación:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(s) &\equiv \mathbf{A}(s) & \mathbf{d}_1(s, t) &\equiv \mathbf{a}(s, t) \\ \mathbf{D}_3(s) &\equiv \mathbf{B}(s) & \mathbf{d}_3(s, t) &\equiv \mathbf{b}(s, t) \\ V_1(s) &\equiv \eta_o(s) \equiv 0 & v_1(s, t) &\equiv \eta(s, t) \\ V_3(s) &\equiv \nu_o(s) \equiv 0 & v_3(s, t) &\equiv \nu(s, t) \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) &= \cos \theta_o(s) \hat{i} + \sin \theta_o(s) \hat{j} & \mathbf{a}(s, t) &= \cos \theta(s, t) \hat{i} + \sin \theta(s, t) \hat{j} \\ & & &= \cos \phi(s, t) \mathbf{A}(s) + \sin \phi(s, t) \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}(s) &= -\sin \theta_o(s) \hat{i} + \cos \theta_o(s) \hat{j} & \mathbf{b}(s, t) &= -\sin \theta(s, t) \hat{i} + \cos \theta(s, t) \hat{j} \\ & & &= -\sin \phi(s, t) \mathbf{A}(s) + \cos \phi(s, t) \mathbf{B}(s) \end{aligned}$$

\mathbf{A} y \mathbf{a} son los vectores que determinan la orientación de las secciones transversales, mientras que \mathbf{B} y \mathbf{b} son los vectores perpendiculares a las secciones transversales. Por último:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(s) &= \mathbf{B}(s) \\ \partial_s \mathbf{r}(s, t) &= \eta(s, t) \mathbf{a}(s, t) + \nu(s, t) \mathbf{b}(s, t) \end{aligned}$$

Entonces las variables de esfuerzo a considerar son: η , ν y $\bar{\mu} = \partial_s \phi + \theta'_o$ (todas las demás son cero).

3.4 Constricciones de la deformación

Para este caso, el vector de posición relativo \vec{p}' resulta ser:

$$\vec{p}'(X, t) = \varphi_1(X)\mathbf{a}(s, t) - \varphi_2(X)\hat{\mathbf{k}} ,$$

y por lo tanto:

$$\vec{Z}(X) \equiv \vec{p}(X, 0) = \mathbf{R}(s) + \varphi_1(X)\mathbf{A}(s) - \varphi_2(X)\hat{\mathbf{k}}$$

La condición de preservación de la orientación (las secciones transversales B_s no pueden ser coplanares a $\mathbf{r}_s \forall s \in [0, l], t \geq 0$) se lee como:

$$\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{b} = \nu > 0 \quad \forall s \in [0, l], t \geq 0 ,$$

y por lo tanto el estiramiento en el punto s al tiempo t ($e(s, t)$) es siempre positivo:

$$e(s, t) = \sqrt{\eta^2(s, t) + \nu^2(s, t)} > 0 \quad \forall s \in [0, l], t \geq 0 .$$

La generalización de esta condición (ver sección 2.5) es:

$$\nu > V(\bar{\mu}, s)$$

El conjunto de puntos para el cual esto es cierto es la intersección de $\mathcal{N}(s)$ con el plano $u_1 = 0$.

Nótese que en realidad la variable de esfuerzo u_2 es $-\bar{\mu}$, sin embargo siempre es posible definir una $\bar{u}_2 = -u_2$ y tomarla como la variable de esfuerzo; es decir; el signo negativo no es especialmente importante y por lo tanto no se tomará en cuenta.

Por otro lado, aquí es fácil interpretar la medida de la deformación pura que se dio en la sección de las deformaciones básicas:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{r}_s\|} &= \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \nu^2}} \\ &= \cos \psi , \end{aligned}$$

donde ψ es el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{r}_s . Si llamamos a β el ángulo entre \mathbf{b} y \mathbf{r}_s , entonces $\psi = \frac{\pi}{2} - \beta$; por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{r}_s\|} &= \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \nu^2}} \\ &= \sin \beta . \end{aligned}$$

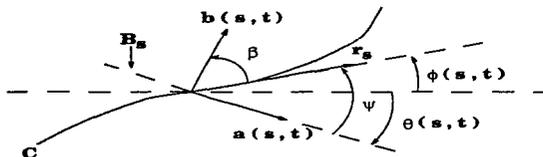


Figura 3.5: Interpretación de la medida de deformación pura.

Ahora, $\frac{\pi}{2}$ es el ángulo entre $\mathbf{R}'(s)$ y $\mathbf{A}(s)$, así que la medida de deformación pura se puede interpretar como una medida de la diferencia entre los ángulos que forman las secciones transversales y el vector tangente, antes ($\frac{\pi}{2}$) y después (ψ) de la deformación (ver figura 5).

Observación: Cálculo de la curvatura de C

Si llamamos a σ la longitud de arco de la barra en su estado deformado:

$\sigma(s, t) = \int_0^s \|\mathbf{r}_s(\xi, t)\| d\xi$. De la figura 5 tenemos que $\phi(s, t) = \psi(s, t) + \theta(s, t)$; por lo tanto, la curvatura de la barra en el estado deformado es:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\phi}{d\sigma} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial s} \frac{ds}{d\sigma} \\ &= \frac{\partial_s \phi}{\|\mathbf{r}_s\|} \\ &= \frac{\partial_s \psi + \bar{\mu}}{\|\mathbf{r}_s\|} \end{aligned}$$

Como ya era claro, $\bar{\mu}$ no es la curvatura, pero sí toma parte de ella. Para apreciar más el significado de $\bar{\mu}$, véase los siguientes ejemplos:

Deformación inflacionaria : Considérese una barra en forma de anillo con radio ρ_0 en su estado de referencia y que se expande conservando su forma hasta alcanzar un radio ρ_1 y permaneciendo así en equilibrio (figura 6). Se tiene entonces que en el estado de referencia,

$$C_0 : \rho_0(\cos(\mu s)\mathbf{i} + \sin(\mu s)\mathbf{j}) \equiv \mathbf{R}(s), \mathbf{A}(s) = \mathbf{R}(s)/\rho_0,$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{A}(s) \wedge (-\hat{\mathbf{k}}) = -\sin(\mu s)\mathbf{i} + \cos(\mu s)\mathbf{j}. \text{ Por lo tanto,}$$

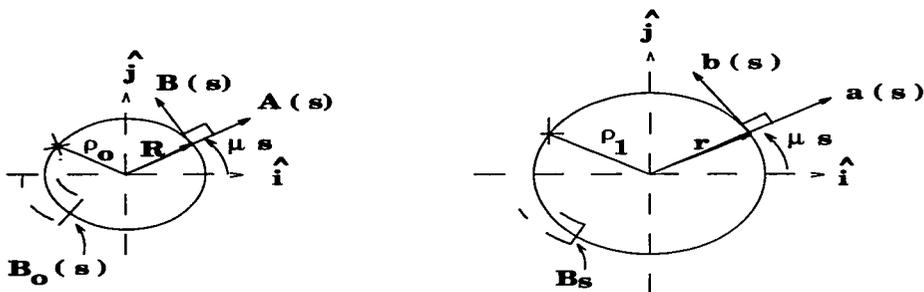
$$\bar{\mu}_0(s) = \theta'_0(s) = \frac{d}{ds}(\mu s) = \mu. \text{ Para el estado deformado se tiene que}$$

$$C : \rho_1(\cos(\mu s)\mathbf{i} + \sin(\mu s)\mathbf{j}) \equiv \mathbf{r}(s), \mathbf{a}(s) = \mathbf{r}(s)/\rho_1,$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{a}(s) \wedge (-\hat{\mathbf{k}}) = -\sin(\mu s)\mathbf{i} + \cos(\mu s)\mathbf{j};$$

$$\text{y por lo tanto } \bar{\mu}(s) = \theta'(s) = \frac{d}{ds}(\mu s) = \mu.$$

De manera que en este tipo de deformación la curvatura cambia, (de $\kappa_0 = 1/\rho_0$ a $\kappa_1 = 1/\rho_1$), pero la variable de esfuerzo $\bar{\mu}$ permanece igual en ambos estados.

Figura 3.6: *Deformación inflacionaria.*

Nótese que si en lugar de usar $\bar{\mu}$ como la variable de esfuerzo, se hubiera usado $\phi'(s) = \frac{d}{ds}(\theta(s) - \theta_0(s))$ (sec. 2), se tendría que $\phi'(s) = \mu - \mu = 0$.

Deformación por doblamiento (flexión pura): (refiérase a la sección de las deformaciones básicas del capítulo anterior).

Supóngase que la configuración de referencia es una barra estirada sobre el eje \hat{j} , de longitud l :

$$C_0 : s\hat{j} \equiv \mathbf{R}(s) \quad ; \quad 0 \leq s \leq l \\ \mathbf{A} = \hat{i} \quad , \quad \mathbf{B}(s) = \hat{j}$$

(ver figura 7). Como $\mathbf{A}(s) = \cos \theta_0(s)\hat{i} + \sin \theta_0(s)\hat{j}$, entonces $\theta_0(s) \equiv 0$, y por lo tanto $\bar{\mu}_0 = 0$. Ahora la barra es doblada en un círculo permaneciendo así en equilibrio. El doblamiento se hace sin que la barra sufra cambios en su longitud. El estado deformado de la barra es entonces:

$$C : \rho(\cos(\mu s)\hat{i} + \sin(\mu s)\hat{j}) \equiv \mathbf{r}(s) \\ \mathbf{A}(s) = \frac{\mathbf{r}(s)}{\rho} \quad , \quad \mathbf{B}(s) = -\sin(\mu s)\hat{i} + \cos(\mu s)\hat{j} \quad .$$

Por lo tanto, $\theta(s) = \mu s$, así que $\bar{\mu} = \theta'(s) = \mu$.

Por otra parte, como la barra no cambió su longitud, ρ está dada por:

$$l(C) = \int_0^l \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi \\ = 2\pi\rho \\ = l \quad (\text{por hipótesis}) \quad .$$

Nótese que aquí $\phi'(s) = \theta'(s) = \mu$.

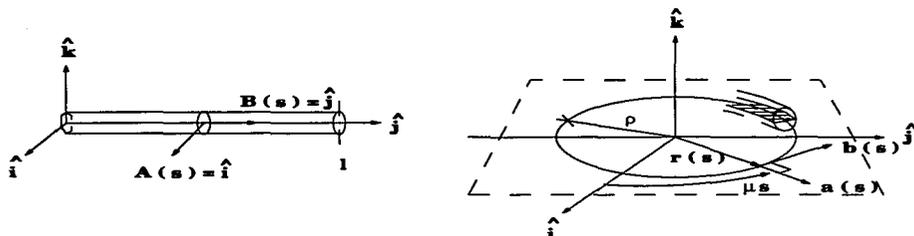


Figura 3.7: Deformación por doblamiento puro.

De manera que en este caso $\bar{\mu}$ y la curvatura cambiaron (la primera de cero a μ y la segunda de cero a $1/\rho$). De $\bar{\mu}$ se dice que aísla los efectos de doblamiento de los cambios en la curvatura asociados con estiramiento.

3.5 Ecuaciones de equilibrio

Este trabajo se concentrará en el estudio de los estados de equilibrio de una barra, bajo la acción de torcas y fuerzas. Las ecuaciones que gobiernan dichos estados ya fueron obtenidas en la sección 2.3 del capítulo anterior y son:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' + \mathbf{f} &= 0 \\ \mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}' + \mathbf{l} &= 0 \end{aligned}$$

Por hipótesis la fuerza de cuerpo \mathbf{f} es siempre horizontal ($\mathbf{f}(s) \in \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle \forall s \in [0, l]$). También en la sección arriba mencionada se obtuvo la expresión para \mathbf{f} en términos de la fuerza por unidad de masa sobre los puntos de $\mathcal{B}_{[a,b]}$, a saber: $\mathbf{f}(s) = \int_{\mathcal{B}_s} \bar{\rho}(X) \bar{\mathbf{F}}(X) j(X) dX_s$; por lo tanto la hipótesis sobre la planaridad de \mathbf{f} equivale a pedir que $\bar{\mathbf{F}}(X) \in \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle \forall X : \bar{\mathbf{Z}}(X) \in \mathcal{B}_o$, o bien $\bar{\mathbf{F}}(X) = \bar{F}_1(X) \mathbf{a}(s) + \bar{F}_2(X) \mathbf{b}(s)$. Como consecuencia inmediata, ya que $\mathbf{n}(s) = \int_{\mathcal{B}_s} \bar{\rho}(X) \bar{\mathbf{F}}(X) j(X) dX_s$, se tiene que: $\mathbf{n}(s) \in \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle \forall s \in [0, l]$.

Por otra parte, se recordará que $\mathbf{l}(s)$ y $\mathbf{m}(s)$ son torcas alrededor del punto $\mathbf{r}(s)$. Parte de la hipótesis de la deformación plana consiste en suponer que:

$$\mathbf{l}(s), \mathbf{m}(s) \in \langle \hat{\mathbf{k}} \rangle \quad \forall s \in [0, l]$$

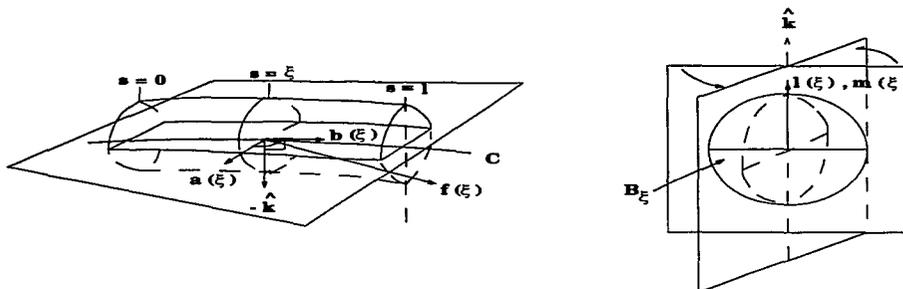


Figura 3.8: La sección transversal B_ξ gira verticalmente por la acción de la torca de cuerpo $l(\xi)$ y la torca de contacto $m(\xi)$.

(ver figura 8). Escribiendo entonces a $l(s)$ y a $m(s)$ en términos de $\bar{p}'(X)$, se verán a continuación las implicaciones de lo anterior:

$$\begin{aligned} l(s) &= \int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{p}'(X) \wedge \bar{F}(X) j(X) dX_s \\ &= \int_{B_s} \bar{\rho}(X) (\varphi_1(X) a(s) - \varphi_2(X) \hat{k}) \wedge (\bar{F}_1(X) a(s) + \bar{F}_2(X) b(s)) j(X) dX_s \\ &= \underbrace{\left(\int_{B_1} \bar{\rho}(X) \varphi_2(X) \bar{F}_2(X) j(X) dX_s \right)}_{\gamma_2} \hat{a} - \underbrace{\left(\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \varphi_2(X) \bar{F}_1(X) j(X) dX_s \right)}_{\gamma_1} b + \\ &\quad + \left(\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \varphi_1(X) \bar{F}_2(X) j(X) dX_s \right) \hat{k} . \end{aligned}$$

La expresión para $m(s)$ es exactamente igual, teniéndose en cuenta que son de naturaleza distinta. La fuerza que aparece en $l(s)$ es una fuerza externa o de cuerpo, mientras que la fuerza que se pondría en $m(s)$ corresponde a una fuerza del tipo superficial o de contacto, ya que proviene de los segmentos de barra adyacentes B_s (ver la definición dada para estas fuerzas en la sección antes citada). Para tener en cuenta este hecho, se escribirá $\bar{F}_s(X)$ en $m(s)$:

$$\begin{aligned} m(s) &= \int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{p}'(X) \wedge \bar{F}_s(X) j(X) dX_s \\ &= \gamma_2^s \hat{a} - \gamma_1^s b + \left(\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \varphi_1(X) \bar{F}_2^s(X) j(X) dX_s \right) \hat{k} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, las hipótesis sobre el movimiento constreñido a un plano implican que:

$$\gamma_i = \gamma_i^s = 0 \quad \forall s \in [0, l] .$$

Se examinarán ahora más de cerca las implicaciones anteriores.

Recuérdese que se ha supuesto que la barra conservará la simetría horizontal en todas las deformaciones que realiza; por lo tanto, \mathcal{B}_s es simétrica con respecto al plano $\langle 1, j \rangle$. Si por \mathcal{B}_s^+ se entiende la parte superior al plano horizontal de \mathcal{B}_s y por \mathcal{B}_s^- la inferior, se tendrá que: $\mathcal{B}_s = \mathcal{B}_s^+ \cup \mathcal{B}_s^-$, luego resulta que se puede escribir:

$$\gamma_l(s) = \int_{\mathcal{B}_s^+} \bar{\rho}(X) \varphi_2(X) \bar{F}_l(X) j(X) dX_s + \int_{\mathcal{B}_s^-} \bar{\rho}(X) \varphi_2(X) \bar{F}_l(X) j(X) dX_s,$$

(similantemente para γ_l^s). Ahora supóngase que X^+ son las coordenadas curvilíneas de un punto sobre \mathcal{B}_s^+ . Dada la simetría de \mathcal{B}_s , la imagen de este punto con respecto al plano horizontal pertenece a \mathcal{B}_s^- ; llámese a las coordenadas curvilíneas de tal punto X^- .

Una buena suposición sobre los integrandos en γ_l y γ_l^s para hacerlas cero, podría ser pedir que: $\bar{\rho}(X^+) = \bar{\rho}(X^-)$, $\bar{F}_l(X^+) = \bar{F}_l(X^-)$, $\varphi_2(X^+) = -\varphi_2(X^-)$; $j(X^+) = j(X^-)$ (análogamente $\bar{F}_l^s(X^+) = -\bar{F}_l^s(X^-)$).

De esta forma $\int_{\mathcal{B}_s^+} \bar{\rho} \varphi_2 \bar{F}_l j dX_s = -\int_{\mathcal{B}_s^-} \bar{\rho} \varphi_2 \bar{F}_l j dX_s$ y en consecuencia $\gamma_l(s) = 0$ ($\gamma_l^s(s) = 0$).

Al menos físicamente, es razonable pedir la paridad de las fuerzas aplicadas con respecto al plano horizontal; ya que así no se crearía un desequilibrio que haría girar a las secciones transversales con respecto a un eje horizontal. De ser impares las fuerzas aplicadas, es claro geoméricamente predecir torcas horizontales (ver figura 9).

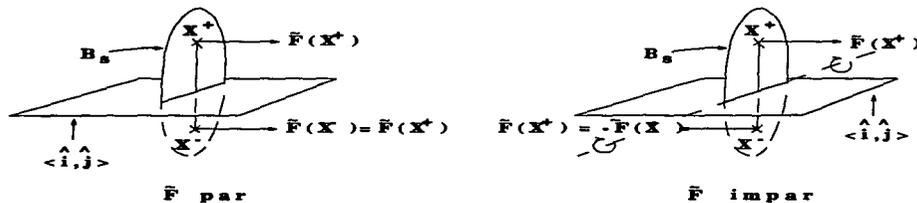


Figura 3.9: $\gamma_l = \gamma_l^s = 0$.

En cuanto a las ecuaciones de equilibrio, descompondremos las fuerzas y torcas en términos de la base de vectores directores:

$$\mathbf{n}(s) = H(s)\mathbf{a}(s) + N(s)\mathbf{b}(s), \quad \mathbf{m}(s) = M(s)\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{l}(s) = l(s)\hat{\mathbf{k}}.$$

Comparando con la descomposición en la sección nueve del capítulo anterior ($\mathbf{n}(s, t) = \sum_{i=1}^3 n_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$, $\mathbf{m}(s, t) = \sum_{i=1}^3 m_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t)$), se tiene que en el caso de la deformación plana: $n_1 = H$, $n_2 = 0$, $n_3 = N$, $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = M$.

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} H' - \bar{\mu}N + \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} &= 0 \\ N' + \bar{\mu}H + \mathbf{f} \cdot \mathbf{b} &= 0 \\ \eta N - \nu H + M' + l &= 0 \end{aligned}$$

De manera que tenemos tres ecuaciones diferenciales para determinar $\eta, \nu, \bar{\mu}$ (y así obtener \mathbf{r}' , e integrando solamente, \mathbf{r}). \mathbf{f} se supone conocida, lo mismo que l . Para H, N, M se tienen las ecuaciones constitutivas, las cuales forman parte del modelo y por lo mismo de ellas se tiene cierta información.

3.6 Ecuaciones constitutivas

Para este caso, las ecuaciones constitutivas toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned} H(s) &= \hat{H}(\eta(s), \nu(s), \bar{\mu}(s), s) \quad , \quad N(s) = \hat{N}(\eta(s), \nu(s), \bar{\mu}(s), s) \\ M(s) &= \hat{M}(\eta(s), \nu(s), \bar{\mu}(s), s) \end{aligned}$$

y su dominio está restringido a pedir que $\nu(s) > 0 \forall s \in [0, l]$. En adelante se supondrá que estas funciones son continuamente diferenciables.

3.7 Condiciones de monotonicidad

En lugar de pedir las cuatro condiciones de monotonicidad discutidas en la sección 2.9, se supondrá la condición más general:

$$\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \bar{\mu})} \quad \text{definida positiva,}$$

la cual, como ya se demostró, encierra las condiciones requeridas.

En este caso en particular, las condiciones de monotonicidad se reducen a 3:

- (1) Un incremento en la tensión $\tau = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' / \|\mathbf{r}'\|$ acompaña un incremento en el estiramiento $e \equiv \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{\eta^2 + \nu^2}$:

$$\tau = \hat{H}(e \cos \psi, e \sin \psi, \bar{\mu}, s) \cos \psi + \hat{N}(e \cos \psi, e \sin \psi, \bar{\mu}, s) \sin \psi ;$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \tau}{\partial e} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} \hat{H}_\eta & \hat{H}_\nu \\ \hat{N}_\eta & \hat{N}_\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} > 0 \quad \forall s \in [0, l] .$$

- (2) Un incremento en la fuerza de deformación pura H , acompaña un incremento en la variable de esfuerzo de deformación pura η :

$$\hat{H}_\eta(\cdot, \nu, \bar{\mu}, s) > 0 .$$

- (3) Un incremento en la torca de doblamiento M , acompaña un incremento en el esfuerzo de flexión $\bar{\mu}$:

$$\hat{M}_{\bar{\mu}}(\eta, \nu, \cdot, s) > 0 .$$

Definiendo:

$$\Phi(\underbrace{\eta_2, \nu_2, \bar{\mu}_2}_2; \underbrace{\eta_1, \nu_1, \bar{\mu}_1}_1) \equiv [\hat{M}(2, s) - \hat{M}(1, s)](\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1) + [\hat{H}(2, s) - \hat{H}(1, s)](\eta_2 - \eta_1) + [\hat{N}(2, s) - \hat{N}(1, s)](\nu_2 - \nu_1) ,$$

la generalización de las condiciones anteriores para el caso no diferenciable es:

$$\Phi(2, 1) > 0 \quad \forall (2), (1) \in \mathcal{N}(s) : (2) \neq (1) .$$

3.8 Condiciones de crecimiento

De acuerdo con el principio constitutivo general de la sección 2.10 (y con la condición $\nu > 0$), las condiciones de crecimiento sobre las funciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\cdot, \nu, \bar{\mu}, s) &\longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \eta \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } \eta \rightarrow -\infty \end{cases} \\ \hat{N}(\eta, \cdot, \bar{\mu}, s) &\longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \nu \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } \nu \rightarrow 0^+ \end{cases} \\ \hat{M}(\eta, \nu, \cdot, s) &\longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \bar{\mu} \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } \bar{\mu} \rightarrow -\infty \end{cases} . \end{aligned}$$

Para el caso más general, $\nu > V(\bar{\mu}, s)$ las condiciones para \hat{N} y \hat{M} serían:

$$\hat{N}(\eta, \cdot, \bar{\mu}, s) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \nu \longrightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } \nu \longrightarrow V(\bar{\mu}, s) \end{cases}$$

$$\hat{M}(\eta, \nu, \cdot, s) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \bar{\mu} \longrightarrow \sup\{\bar{\mu} : \nu > V(\bar{\mu}, s)\} \equiv \mu^* \\ -\infty & \text{si } \bar{\mu} \longrightarrow \inf\{\bar{\mu} : \nu > V(\bar{\mu}, s)\} \equiv \mu_* \end{cases}$$

(ver fig 10). Por otro lado, escribiendo en forma explícita las derivadas totales con

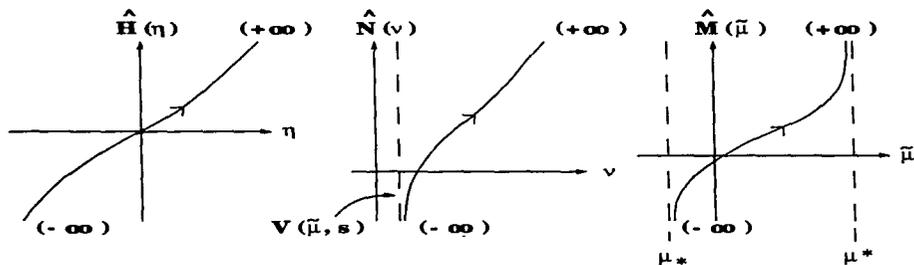


Figura 3.10: Crecimiento de las funciones constitutivas, como función de sus respectivas variables de esfuerzo asociadas.

respecto a s en las ecuaciones de equilibrio y escribiéndolas a manera de sistema, se tiene que:

$$\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \bar{\mu})} \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \bar{\mu} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{N} \\ 0 & 0 & -\hat{H} \\ -\hat{N} & \hat{H} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} + \partial_s \hat{H} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{b} + \partial_s \hat{N} \\ l + \partial_s \hat{M} \end{bmatrix}.$$

Con las condiciones de crecimiento, la hipótesis de coercibilidad mencionada en el capítulo anterior se satisface, así que se tendrá la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \bar{\mu}) \longrightarrow (\hat{M}, \hat{N}, \hat{H})$, con las funciones constitutivas análogas: $\eta = \hat{\eta}(H(s), N(s), M(s), s)$, $\nu = \hat{\nu}(H(s), N(s), M(s), s)$, $\bar{\mu} = \hat{\bar{\mu}}(H(s), N(s), M(s), s)$ y el sistema de ecuaciones asociado:

$$\begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{N} \\ \hat{M} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\bar{\mu}} & 0 \\ -\hat{\bar{\mu}} & 0 & 0 \\ \hat{\nu} & -\hat{\eta} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{b} \\ l \end{bmatrix}.$$

3.9 Condiciones de paridad e iniciales

Sea una barra inicialmente recta, que sufre una deformación pura (ver “deformaciones básicas”, capítulo anterior). Se asumirá que no hay ninguna diferencia en realizar la deformación en un sentido o en el otro (ver figura 11). Por lo tanto, cambiando η por

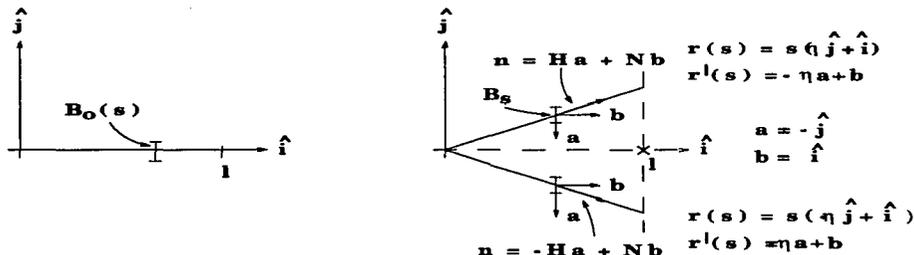


Figura 3.11: Condiciones de paridad sobre las funciones constitutivas.

$-\eta$, resulta que H cambia a $-H$, mientras que N permanece igual. En cuanto a \mathbf{m} , a partir de su definición y de las hipótesis de simetrías discutidas en la sección cinco de este capítulo, se tiene que: $\mathbf{m} = [\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \varphi_1(X) \bar{F}_s^b(X) j(X) dX_s] \hat{\mathbf{k}}$; sin embargo, la componente \bar{F}_s^b de la fuerza de contacto se mantiene igual si se cambia η por $-\eta$, y por lo tanto M tampoco cambia. En resumen, se tendrán las siguientes condiciones de paridad:

$$\begin{aligned} \hat{H}(-\eta, \nu, \bar{\mu}, s) &= -\hat{H}(\eta, \nu, \bar{\mu}, s) & \hat{N}(-\eta, \nu, \bar{\mu}, s) &= \hat{N}(\eta, \nu, \bar{\mu}, s) \\ \hat{M}(-\eta, \nu, \bar{\mu}, s) &= \hat{M}(\eta, \nu, \bar{\mu}, s) \end{aligned}$$

Ahora bien, en la configuración de referencia $\nu = 1$ (la barra no ha sufrido cambios en su longitud), $\eta = 0$ (no ha habido deformación) y $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$. Como se tomó a tal estado libre de fuerzas y torcas, se tendrán, además las siguientes condiciones iniciales:

$$\hat{N}(0, 1, \bar{\mu}_0, s) = \hat{M}(0, 1, \bar{\mu}_0, s) = 0 \quad \forall s \in [0, l], \bar{\mu}_0 \in \mathbb{R}$$

(nótese que dada la imparidad de \hat{H} en η , la condición inicial sobre \hat{H} se satisface automáticamente).

En [Ant] el lector encontrará que las condiciones de paridad sobre $\hat{H}, \hat{N}, \hat{M}$ ($\hat{H}(\cdot, \nu, \mu)$ impar; $\hat{N}(\cdot, \nu, \mu)$, $\hat{M}(\cdot, \nu, \mu)$ pares), viene de suponer que las secciones

transversales de la barra (i.e. $B(s)$) poseen ciertas propiedades de simetría, que hacen que no sea más fácil o más difícil que la barra sufra una deformación pura o un doblamiento puro en una dirección, que en la dirección opuesta.

Para el caso de barras que se deforman en el plano y cuya configuración de referencia es prismática (i.e., $s \in [0, l]$, $x_1 \in [-h, h]$, $x_3 \in (-\infty, \infty)$), la justificación de las condiciones de paridad puede verse en [A&C]; sin embargo, ahí está hecho tomando la fuerza de cuerpo (\mathbf{f}) igual a cero. Para el caso de un cuerpo bidimensional, véase [A&R]. En los dos artículos mencionados, el enfoque es un poco distinto que el hasta ahora abordado, ya que se emplean elementos más sutiles de la teoría de la elasticidad, como por ejemplo los *vectores de tracción de Piola-Kirchhoff*. Por medio de estos vectores se reescriben las ecuaciones de equilibrio y se definen otras funciones constitutivas que precederán a \hat{H} , \hat{N} y \hat{M} , y que forman las componentes del segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff, que a su vez, dependen de las componentes del tensor de deformación de Green (este último de naturaleza semejante al gradiente de deformación mencionado en la sección 2.2).

3.10 Integración de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio tal y como aparecen en la sección cinco, presentan la ventaja de poderse integrar inmediatamente, para H , N y M en función de η , ν y μ . Con este fin, defínase $\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} (s)$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(s) = - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{b} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} (s)$, entonces podemos reescribir tales ecuaciones como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(s) - \tilde{\mu}(s)\mathbf{J}\mathbf{H} &= \mathbf{f}(s) \\ M'(s) - \mathbf{H}'(s)\mathbf{J}\mathbf{B}(s) &= -l(s) \end{aligned}$$

Para resolver las primeras ecuaciones el lector puede proceder como quiera:

(i) Dado que es obvio que:

$(-\tilde{\mu}(s)\mathbf{J})(-\int^s \tilde{\mu}(t)\mathbf{J} dt) = (-\int^s \tilde{\mu}(s)\mathbf{J} dt)(-\tilde{\mu}(s)\mathbf{J})$; i.e.; la matriz del sistema conmuta con su integral. Por lo tanto $\exp(\int^s \tilde{\mu}(t) dt \mathbf{J})$ resulta ser una matriz fundamental para el problema, y el resto es resolver empleando variación de parámetros.

(ii) Teniendo en mente que $\Psi(s) = \cos a(s)$ y $\Xi(s) = \sin a(s)$ satisfacen la ecuación $y'' - \frac{a''}{a'}y' + a'^2y = 0$, y obteniendo dos ecuaciones de segundo orden para H y N , se concluye que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^i(s) &= (\cos(\int^s \tilde{\mu}(t) dt), -\sin(\int^s \tilde{\mu}(t) dt)) \\ \mathbf{H}_2^i(s) &= (\sin(\int^s \tilde{\mu}(t) dt), \cos(\int^s \tilde{\mu}(t) dt)) \end{aligned}$$

son dos soluciones linealmente independientes para el problema homogéneo.

En cualquier caso, se tendrá como solución para las dos primeras ecuaciones:

$$H(s) = \tilde{\Omega}(s)H_0 + \tilde{\Omega}(s) \int_0^s \Omega'(\xi)f(\xi) d\xi$$

donde:

$$\tilde{\Omega}(s) = \begin{bmatrix} \cos(\int_0^s \tilde{\mu}(\xi) d\xi) & \sin(\int_0^s \tilde{\mu}(\xi) d\xi) \\ -\sin(\int_0^s \tilde{\mu}(\xi) d\xi) & \cos(\int_0^s \tilde{\mu}(\xi) d\xi) \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_0 \\ N_0 \end{bmatrix} \quad \text{la condición inicial (en } s = 0 \text{)} .$$

Luego para M solamente integrando:

$$M(s) = M_0 + \int_0^s H'(\xi)JB(\xi) d\xi - \int_0^s l(\xi) d\xi$$

(M_0 la condición en $s = 0$). Estos cálculos se usarán en el siguiente capítulo.

Todas las constantes de integración están sujetas a las condiciones que se tengan sobre los extremos de la barra, y que hasta ahora no se han mencionado; este punto se tratará directamente en el problema del siguiente capítulo, el cual fué el que nos trajo hasta este punto en primer lugar.

Capítulo 4

Deformación de un anillo en el plano horizontal

Este capítulo constituye la parte principal de este trabajo. Una vez que se tiene claro el modelo y las constricciones que implican la deformación de una barra constreñida a moverse sobre un plano, se aplican todos los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores, a un anillo de radio unitario simétrico con respecto al plano horizontal, cuando sobre éste actúa una fuerza de presión hidrostática uniforme. Las dos primeras secciones tienen que ver con la descripción del anillo antes y después de ser sometido a tal fuerza; en la segunda sección se introducen tres nuevas ecuaciones, que junto con las ecuaciones de equilibrio constituyen el conjunto completo de ecuaciones del anillo. Las secciones 4.4, 4.5 y 4.6 vienen a completar el marco de las hipótesis del modelo. En la sección 4.7 se escribe explícitamente el conjunto completo de ecuaciones y se adopta una terminología, misma que será empleada en todo el resto del trabajo. La sección 4.9 expone las propiedades del conjunto de ecuaciones, y que se denominan simetrías; de hecho este podría ser otro enfoque para hacer el análisis del problema y que se encuentra tratado en [Hea], sobre cuyo trabajo se basa el nuestro. En la sección 4.9 se encuentran las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones, usando dos métodos: el llamado 'método directo' o aquél que usa las propiedades de tal sistema. En la sección 4.10 se encuentra que las soluciones triviales corresponden a configuraciones circulares de radio más pequeño. La sección 4.11 es muy importante, pues en ella se integra el sistema de ecuaciones y se intenta dar al problema una formulación en términos de encontrar los puntos fijos de cierto mapeo. Al mismo tiempo se trata el problema de las condiciones iniciales (constantes de integración), mismo que no había sido expuesto con claridad anteriormente, y del cual se desprenden las condiciones de periodicidad que deben satisfacer las soluciones al conjunto de ecuaciones. De manera aislada, en esa sección se encuentran las cantidades conservadas, esta parte del trabajo no vuelve a ser usada después. Las dos últimas partes

de la sección 4.11 tienen relevancia, la primera, sobre el comportamiento de las funciones constitutivas, la segunda (como se verá después) sobre las ramas de soluciones que bifurcan a partir de la solución trivial. En la sección 4.12 se comienza con el estudio del problema, abordándolo de la manera usual, esto es, primero linealizando, reescribiendo el sistema de ecuaciones como uno de primer orden en el cual los términos cuadráticos han sido separados, y segundo, estudiando el núcleo del operador lineal en términos del cual se ha reescrito la linealización (sección 4.13). Es importante subrayar que en esta sección se dejan de lado, por un momento, dos de las ecuaciones del conjunto total, mismas que volverán a jugar un papel importante después. En la sección 4.14 se especifica el espacio dentro del cual se buscarán las soluciones al problema reducido, definido en la sección anterior, y que consisten básicamente en ciertas propiedades de paridad que deben satisfacer los elementos de dicho espacio. La búsqueda sobre este espacio está justificada por el hecho de que en él es posible reducir el núcleo del operador de la linealización (\mathcal{A}). La sección siguiente, 4.15 es la última en la que se hace una hipótesis adicional sobre las funciones constitutivas, esto con la finalidad de definir el conjunto de puntos singulares del problema. Con el objeto de conocer más sobre los espacios de funciones involucrados en la linealización, se introduce la sección 4.16, de mucha importancia para todo el trabajo posterior. La sección 4.17 se introduce de forma un tanto aislada del resto del trabajo, bajo pretexto de que el lector familiarizado con los métodos empleados en problemas no lineales que presentan bifurcación, vea que es posible su aplicación en este caso. Para terminar con la idea introducida en la sección anterior, en la sección 4.18 se introduce la ecuación de bifurcación del problema, junto con la prueba de que, *localmente*, el problema efectivamente presenta bifurcación de soluciones con una cierta periodicidad, a partir de la solución trivial. Para cerrar con la parte local, se prueba en la sección 4.19 la no existencia de ramas que bifurquen a partir de un valor de cero intensidad de fuerza; por fin es que las dos ecuaciones ignoradas desde la sección 4.12 cobran un sentido algo más que el que se les adjudicaba en términos de la descripción geométrica del problema. La última sección, 4.20, aborda la continuación de las ramas que se obtuvieron en la sección anterior: estudio de bifurcación global.

4.1 Configuración de referencia

Supongamos que la configuración de referencia de una barra es un anillo de sección transversal circular, es decir, con forma toroidal y simétrico con respecto al plano horizontal $\langle \hat{i}, \hat{j} \rangle$. Como eje del anillo escogeremos a la *línea de los centros* de las secciones transversales y supondremos que dicha línea coincide con el círculo unitario con centro en el origen, C_1 . Dado que la configuración de referencia está caracterizada por el vector de posición de los puntos sobre el eje $\mathbf{R}(s)$, el vector de la sección transversal $\mathbf{A}(s)$ perpendicular al eje de la barra, y el vector $\mathbf{B}(s) = \mathbf{R}'(s)$: se tendrá que:

$$\begin{aligned} C_o &\equiv C_1 : \cos(s)\hat{i} + \sin(s)\hat{j} \equiv \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{A}(s) &= \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{B}(s) &= \mathbf{A}(s) \wedge (-\hat{k}) = -\sin(s)\hat{i} + \cos(s)\hat{j} \end{aligned} ,$$

donde $s \in R_{2\pi} \equiv R(\text{mod}2\pi)$, es la longitud de arco en el estado de referencia.

Por $s \in R_{2\pi}$ se entiende que $s \in [2\pi n, 2\pi(n+1))$, $n \in N \cup \{0\}$.

De manera que aquí $\tilde{\mu}_o \equiv \theta'_o(s) = 1$, ($\eta_o = 0$, $\nu_o = 1$, $U_2(s) = -1$). (ver figura 1)

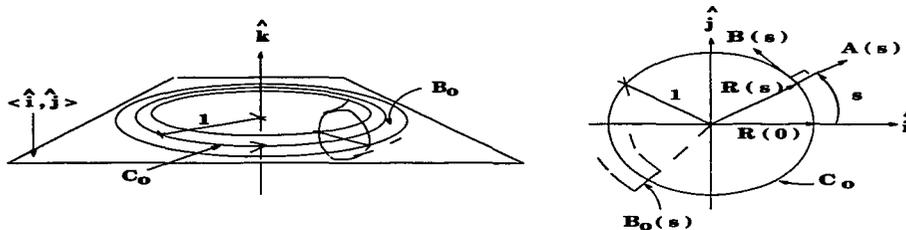


Figura 4.1: Geometría del estado de referencia.

4.2 Configuración deformada

Todas las hipótesis vistas en el capítulo anterior serán adoptadas aquí: la barra conserva la simetría con respecto al plano horizontal, todas las fuerzas involucradas son puramente

horizontales, todas las torcas involucradas son puramente verticales (como se vio en 3.5, esto equivale a considerar ciertas propiedades de simetría para las funciones la densidad de masa $\bar{\rho}$, φ_1 y φ_2 y la fuerza \bar{F}), la barra es elástica y no lineal en el sentido de que existen funciones constitutivas H, N y M , que dependen de manera no lineal de las variables de esfuerzo, la barra puede realizar todas las deformaciones vistas en 2.6 (excepto, claro está, la deformación por torsión pura, ya que involucra la aparición de torcas horizontales, las cuales son cero en nuestro modelo): estiramiento, doblamiento y deformación pura.

Para los vectores directores $\mathbf{a}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ del estado deformado, escogeremos la representación alternativa vista en 3.3, en términos del ángulo $\phi(s)$, que forman las secciones transversales $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{a}(s)$:

$$\mathbf{a}(s) = \cos \phi(s)\mathbf{A}(s) + \sin \phi(s)\mathbf{B}(s) \quad ; \quad \mathbf{b}(s) = -\sin \phi(s)\mathbf{A}(s) + \cos \phi(s)\mathbf{B}(s) ,$$

donde $\phi(s) \equiv \theta(s) - \theta_0(s)$, ($\theta(s)$ el ángulo que forman $\mathbf{a}(s)$ y el eje $\hat{\mathbf{i}}$).

Definamos $\mu(s) \equiv \phi'(s)$; dado que $\theta_0(s) = s$, tendremos que $\mu(s) = \tilde{\mu}(s) - 1$.

El eje C de la barra está descrito por el vector $\mathbf{r} : R_{2\pi} \ni s \rightarrow \mathbf{r}(s)$ y que se conviene en escribir:

$$\mathbf{r}(s) = r_1(s)\mathbf{a}(s) + r_2(s)\mathbf{b}(s) .$$

Derivando esta expresión con respecto a s y comparándola con la descomposición del vector tangente adoptada en 3.3: $\mathbf{r}'(s) = \eta\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$, se llega a que:

$$\mathbf{r}' = (r'_1 - \tilde{\mu}r_2)\mathbf{a} + (r'_2 + \tilde{\mu}r_1)\mathbf{b} ,$$

por lo tanto:

$$r'_1 - \tilde{\mu}r_2 - \eta = 0 \quad , \quad r'_2 + \tilde{\mu}r_1 - \nu = 0 \quad ;$$

o bien:

$$\begin{aligned} r'_1 - (1 + \mu)r_2 - \eta &= 0 \\ r'_2 + (1 + \mu)r_1 - \nu &= 0 \\ \phi' - \mu &= 0 . \end{aligned}$$

Estas últimas tres ecuaciones se denominan ecuaciones de esfuerzo-desplazamiento.

La configuración de la barra queda por lo tanto especificada si se conocen r_1, r_2 y ϕ , las cuales se obtienen integrando las relaciones de esfuerzo-desplazamiento en términos de η, ν y μ ; estas últimas serán escogidas como las variables de esfuerzo del problema. (ver figura 2)

Se suele definir a $R_{2\pi} \ni s \rightarrow (\mathbf{r}', \phi')$, como el campo de esfuerzos.

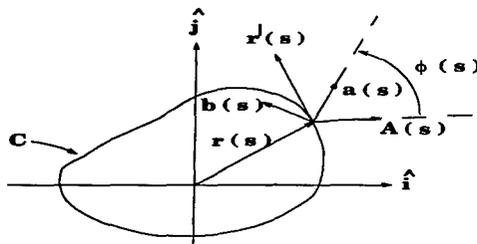


Figura 4.2: Geometría de la deformación.

4.3 La fuerza de cuerpo

Supongamos ahora que el anillo es sometido a una fuerza de presión hidrostática uniforme. El hecho de ser una fuerza de presión significa que actuará perpendicularmente al eje de la barra. Por otro lado, el hecho de ser uniforme quiere decir, en primer lugar, que la densidad de la fuerza externa F , según se definió en 2.3, es la misma para cualquier punto sobre B_s y que por lo tanto se puede escribir: $F = \|\vec{F}(s)\| \hat{\mathbf{k}} \wedge \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|}$. Sin embargo, la hipótesis de uniformidad va más lejos de suponer solamente esto, de la definición de la fuerza de cuerpo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(s) &= \int_{B_s} \bar{\rho} \vec{F} j(X) dX_s \\ &= \int_{B_s} \bar{\rho}(X) j(X) dX_s \frac{\|\vec{F}(s)\|}{\|\mathbf{r}'(s)\|} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r}'(s) \\ &= M(B_s) \frac{\|\vec{F}(s)\|}{\|\mathbf{r}'(s)\|} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r}'(s) \quad , \end{aligned}$$

donde $M(B_s)$ representa la masa de la sección transversal B_s . La hipótesis de uniformidad consiste en suponer que $M(B_s) \frac{\|\vec{F}\|}{\|\mathbf{r}'\|}$ es una constante λ para toda s . A λ se le conoce como la intensidad de la fuerza por unidad de longitud (deformada). Aquí se supondrá además que $\lambda \geq 0$. Por lo anterior, se puede entonces escribir:

$$\mathbf{f}(s) = \lambda \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r}'(s) \quad \forall s \in R_{2\pi} \quad (\lambda \geq 0)$$

(ver figura 3). Como una consecuencia inmediata de haber escogido a la fuerza de cuerpo de esta manera se tiene la siguiente:

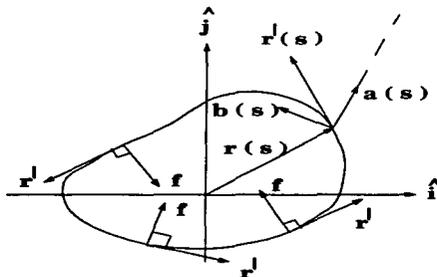


Figura 4.3: Acción de la fuerza de cuerpo sobre la barra.

Afirmación: Si se escoge a la línea de los centros como el eje de la barra y además la fuerza de cuerpo es una fuerza de presión hidrostática uniforme, entonces $l(s) \equiv 0$.

Prueba: Directamente de la definición de $l(s)$:

$$\begin{aligned} l(s) &= \int_{B_s} \rho p' \wedge F j(X) dX_s \\ &= \left[\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \bar{p}'(X) j(X) dX_s \right] \wedge \left[\|\bar{F}(s)\| \hat{k} \wedge \frac{r'}{\|r'\|} \right]. \end{aligned}$$

El primer término entre corchetes resulta ser la masa de B_s multiplicada por el vector de posición de su centro de masa. Sin embargo se escogió a $\bar{p}'(X)$, con origen precisamente en el centro de masa de B_s , (el eje de la barra es la línea de los centros). Por lo tanto:

$$l(s) = [0] \wedge \bar{F}(X) = 0$$

—□

Si se estuviera interesado en el caso dinámico (dependiente del tiempo), entonces:

$$\begin{aligned} q(s, t) &= \int_{B_s} \bar{p}'(X, t) \bar{\rho}(X) j(X) dX_s \\ &= 0 \end{aligned}$$

(el eje de la barra es la línea de los centros). Además, ya que $w_1 = w_3 \equiv 0$, $w_2 = -\bar{\mu}$ (sec. 3.3), y retomando la hipótesis sobre φ_2 : $\varphi_2(X^+) = -\varphi_2(X^-)$ (sec. 3.5), se tiene (ver sec. 2.5):

$$h(s, t) = \left[\int_{B_s} \bar{\rho} \varphi_1^2 j dX_s \right] \bar{\mu} k - \left[\int_{B_s} \bar{\rho}(X) \varphi_2 \varphi_1 j dX_s \right] \bar{\mu} a.$$

Suponiendo además que $\varphi_1(X^+) = \varphi_1(X^-)$ el término no vertical en \mathbf{h} (recuérdese que \mathbf{h} es el momento angular relativo al eje de la barra) se anula (nótese que esta hipótesis se pudo haber incluido en la sección 3.5, de habernos ocupado en esa ocasión de tal término). De cualquier forma, las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s + \mathbf{f} &= (\rho A)\mathbf{r}_{tt} \\ \mathbf{r}_s \wedge \mathbf{n} + \mathbf{m}_s &= \mathbf{h}_t \end{aligned}$$

4.4 Ecuaciones constitutivas

A diferencia de las ecuaciones constitutivas vistas en 3.6, el modelo de deformación empleado adoptará además la hipótesis de homogeneidad, que consiste en suponer que las ecuaciones constitutivas para las componentes de la torca y fuerzas de contacto no dependen explícitamente de s :

$$\begin{aligned} H(s) &= \hat{H}(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) \quad , \quad N(s) = \hat{N}(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) \\ M(s) &= \hat{M}(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) \end{aligned}$$

Cuyo dominio es $\{(\eta, \nu, \mu) : \eta, \mu \in \mathcal{R}, \nu \geq 0\}$.

4.5 Ecuaciones de equilibrio

Como $l = 0$, $\bar{\mu} = \mu + 1$ y las funciones constitutivas son homogéneas, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \hat{H}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) - (1 + \mu)\hat{N}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) - \lambda\nu &= 0 \\ \hat{N}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) + (1 + \mu)\hat{H}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) + \lambda\eta &= 0 \\ M'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) + \eta\hat{N}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) - \nu\hat{H}'(\eta(s), \nu(s), \mu(s)) &= 0 \end{aligned}$$

O bien, escrito en forma de sistema:

$$\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \mu)} \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \hat{N}' \\ -\lambda & 0 & -\hat{H}' \\ -\hat{N}' & \hat{H}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{N}' \\ -\hat{H}' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las condiciones de monotonicidad 3.7, crecimiento 3.8 (y por lo tanto la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \rightarrow (H, N, M)$), junto con las de paridad e iniciales 3.9, formarán parte del modelo.

Con la misma notación de la sección 3.10, el sistema de ecuaciones de equilibrio para H, N, M en términos de η, ν, μ queda:

$$\begin{aligned} H'(s) &= (1 + \mu)\mathbf{J}H(s) + \lambda\mathbf{J}B(s) \\ M'(s) &= H'(s)\mathbf{J}B(s) \end{aligned}$$

(con $\mathbf{l}(s) = 0$).

4.6 Condiciones generales sobre \hat{H} , \hat{N} y \hat{M} .

Además de las hipótesis antes mencionadas, se asumirán las siguientes tres:

- (1) $\hat{N}(\eta, 1, \mu) = 0 \forall (\eta, \mu) \in R^2$ (o bien, por la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \rightarrow (H, N, M)$: $\nu(H, 0, M) = 1 \forall (H, M) \in R^2$).

Aunque no es formal, es más fácil entender esta hipótesis desde el punto de vista unidimensional de la teoría de cuerdas:

Supongamos que el eje de la barra tiene la característica de *perfecta flexibilidad* que define a las cuerdas, esto es, que la segunda de las ecuaciones de equilibrio en 3.5 referente a las torcas es: $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} = 0$. (Esto resulta de definir matemáticamente a una cuerda como una sucesión de puntos materiales que no tiene grosor, por lo tanto $\tilde{\mathbf{p}}' = 0$ y en consecuencia $\mathbf{l}(s) = \mathbf{m}(s) \equiv 0$. De hecho, si vemos los términos \mathbf{q} y \mathbf{h} en las ecuaciones de movimiento, estos también resultarán ser nulos). Por lo tanto la fuerza de contacto es *tangente* en cada punto s de la línea de los centros.

Por otra parte, se recordará de la sección 2.9 que se definió a la tensión τ como la componente de la fuerza de contacto en la dirección tangente: $\tau \equiv \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$; entonces, para el caso de las cuerdas, \mathbf{n} es una fuerza puramente de tensión; i.e. $\mathbf{n} = N\mathbf{b}$ y $\mathbf{r}' = \nu\mathbf{b}$. Así que desde el punto de vista de las cuerdas, el estiramiento del eje de la barra está dado por ν ; si $\nu = 1$ el eje de la barra no ha cambiado su longitud y por lo mismo es natural pensar que la fuerza \mathbf{n} asociada con el cambio en la longitud es cero.

Con esta misma visión simplista es fácil entender que $\hat{H}(0, \nu, \mu) = 0$ $\forall (\nu, \mu) \in R^+ \times R$ (que resulta de la imparidad de \hat{H} en η): defínase una nueva

base $\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$, $\mathbf{e}_n = \frac{\hat{\mathbf{k}}\Delta\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$; por lo tanto $\mathbf{a} = \eta\mathbf{e}_t - \nu\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = \nu\mathbf{e}_t + \eta\mathbf{e}_n$; de aquí que $\mathbf{n} = (\eta H + \nu N)\mathbf{e}_t + (-\nu H + \eta N)\mathbf{e}_n$. Ahora, si \mathbf{n} ha de ser una fuerza de tensión, entonces $-\nu H + \eta N = 0$, como por hipótesis $\nu > 0$: $H = \frac{\eta}{\nu}N$; de donde $\eta = 0 \implies H = 0$.

$$(2) \quad \hat{M}(\eta, \nu, 0) = 0 \quad \forall (\eta, \nu) \in R \times R^+ \quad (\text{o bien } \hat{\mu}(H, N, 0) = 0 \quad \forall (H, N) \in R^2).$$

Un punto de vista unidimensional no ayudaría en este caso para comprender el significado de esta hipótesis, ya que solo nos diría que todas las torcas son cero. Sin embargo, podemos aprovechar el estudio de las deformaciones básicas vistas en 2.6, para recordar que μ es la variable de esfuerzo que participa del doblamiento. M es, por otra parte, una torca de doblamiento; de manera que intuitivamente es lógico pensar que si una de ellas es cero, lo mismo sucederá con la otra (es decir, si la torca de doblamiento M es igual a cero, su correspondiente variable de esfuerzo -el esfuerzo de flexión μ - es cero).

$$(3) \quad \hat{N}_\mu(0, \nu, 0) = 0 \quad \forall \nu > 0. \quad \text{La justificación de esta hipótesis no será clara, hasta la sección 11.}$$

4.7 El campo completo de ecuaciones del anillo

El conjunto completo de ecuaciones para el anillo está constituido por las ecuaciones de equilibrio y por las ecuaciones de esfuerzo-desplazamiento, para $r_1, r_2, \phi, \eta, \nu, \mu$. Dada la geometría del problema, las soluciones a dichas ecuaciones deben ser 2π -periódicas.

Para escribir el conjunto completo de ecuaciones en una forma más manejable, y adentrarnos en la notación empleada en el resto del trabajo, se definirá el vector:

$$\mathbf{y} \equiv (r_1, r_2, \phi, \eta, \nu, \mu) .$$

Considérese ahora el espacio de todas las funciones vectoriales en R^6 , 2π -periódicas y continuamente diferenciables, denotado por $(C_{2\pi}^1)^6$. La norma natural para este espacio está definida por:

$$\| \cdot \|_1 : (C_{2\pi}^1)^6 \ni \mathbf{y} \longrightarrow \| \mathbf{y} \|_1 \equiv \| \mathbf{y} \|_0 + \| \mathbf{y}' \|_0 ,$$

donde $\|\cdot\|_0$ es la norma del supremo (máximo en este caso, y también llamada la norma de la continuidad uniforme):

$$\|u\|_0 \equiv \max_{s \in R_{2\pi}} \|u(s)\|$$

($\|\cdot\|$ la norma usual euclidiana). Así, $((C_{2\pi}^1)^6, \|\cdot\|_1)$ resulta ser un espacio de Banach.

Defínase ahora el conjunto $\mathcal{O} \equiv \{y \in (C_{2\pi}^1)^6 : \nu > 0\} \times R^+$. Sea el mapeo $h : \mathcal{O} \ni (y, \lambda) \rightarrow h(y, \lambda) \in (C_{2\pi}^2)^6$, cuyas componentes son las ecuaciones de equilibrio y las de esfuerzo-desplazamiento, en ese orden. Entonces, el conjunto completo de ecuaciones está dado por: $h(y, \lambda) = 0$.

$$h(y, \lambda) = \begin{bmatrix} \hat{H}'(\eta, \nu, \mu) - (1 + \mu)\hat{N}'(\eta, \nu, \mu) - \lambda\nu \\ \hat{N}'(\eta, \nu, \mu) + (1 + \mu)\hat{H}'(\eta, \nu, \mu) + \lambda\eta \\ \hat{M}'(\eta, \nu, \mu) + \eta\hat{N}'(\eta, \nu, \mu) - \nu\hat{H}'(\eta, \nu, \mu) \\ r'_1 - (1 + \mu)r_2 - \eta \\ r'_2 + (1 + \mu)r_1 - \nu \\ \phi' - \mu \end{bmatrix}.$$

4.8 Simetría del sistema de ecuaciones

Como por hipótesis las funciones constitutivas $\hat{H}, \hat{N}, \hat{M}$ no dependen explícitamente de s , y además η, ν, μ son 2π -periódicas; es natural pensar que el conjunto de las ecuaciones es invariante bajo rotaciones. Esto es, que si se rota al anillo en su configuración de referencia, esperamos obtener las mismas ecuaciones de equilibrio que se obtendrían si tal rotación no se hubiera hecho; es decir, que inicialmente el grupo especial de transformaciones ortogonales $SO(2)$ es el grupo de simetrías para el problema.

Los elementos de $SO(2)$ son matrices de rotación; $\mathbf{T} \in SO(2) \Leftrightarrow \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$, $|\mathbf{T}| = 1$.

Sin embargo, supondremos todavía más, esto es, que el grupo completo de simetrías del círculo $O(2)$, coincide con el grupo de simetrías del problema; en otras palabras, el anillo posee propiedades invariantes bajo rotaciones así como reflexiones en el plano.

Supongamos que rotamos al anillo un ángulo g . Geométricamente esto equivale a cambiar s por $s + g$ en la configuración de referencia. Si ahora se somete a la fuerza de cuerpo \mathbf{f} , se espera obtener la misma configuración que antes, pero rotada un cierto ángulo. Así que en este caso el efecto de esta transformación equivale a tener $r_l(s) \rightarrow r_l(s + g)$ ($l = 1, 2$), $\phi(s) \rightarrow \phi(s + g)$, $\eta(s) \rightarrow \eta(s + g)$, $\nu(s) \rightarrow \nu(s + g)$, $\mu(s) \rightarrow \mu(s + g)$ (ver figura 4). Ahora supóngase que se ha hecho una reflexión de los

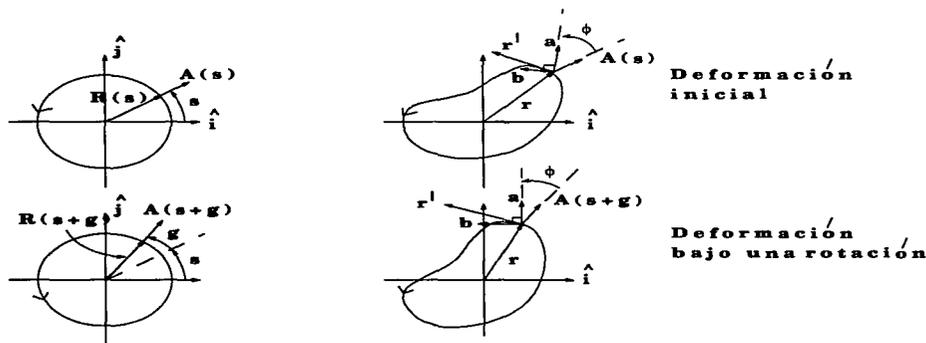


Figura 4.4: Efecto de la rotación de los puntos del anillo sobre la deformación.

puntos sobre el anillo, con respecto a algún eje. Como las reflexiones cambian el sentido de los ángulos, si ϕ era el ángulo entre $\mathbf{a}(s)$ y $\mathbf{A}(s)$ antes de hacer la transformación, después de hacerla será $-\phi$. Sea ω el ángulo entre $\mathbf{r}(s)$ y $\mathbf{a}(s)$; por lo tanto, si $\mathbf{r} = r_1\mathbf{a} + r_2\mathbf{b}$, se tendrá que $r_1 = \|\mathbf{r}\| \cos \omega$, $r_2 = \|\mathbf{r}\| \sin \omega$. De manera que al hacer la reflexión y cambiar ω por $-\omega$, resulta entonces que r_2 cambia por $-r_2$. Con este mismo argumento, si $\mathbf{r}' = \eta\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$, al hacer la reflexión habría que cambiar ν por $-\nu$, quedando $\mathbf{r}' = \eta\mathbf{a} - \nu\mathbf{b}$; sin embargo, se quiere conservar la misma orientación para el eje de la barra, la cual se invierte bajo la reflexión, por lo tanto habría que tomar el negativo de \mathbf{r}' : $\mathbf{r}' = -\eta\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$; de manera que el efecto sobre η equivalió a multiplicarla por menos.

Por otro lado, una reflexión con respecto a un eje cualquiera de un anillo, puede pensarse como una reflexión con respecto al eje horizontal, seguida de una rotación. Esto equivale a cambiar s por $g - s$ en el argumento de las variables que integran el vector \mathbf{y} definido en la sección anterior (g el ángulo de rotación). Por último, después de hacer la transformación: $\mu(g - s) = \frac{d}{ds}(-\phi(g - s)) = \frac{d\phi}{d(g - s)}$ y por lo tanto μ permanece invariante.

De lo anterior, el efecto completo de la reflexión resulta ser:

$$r_1(s) \rightarrow r_1(g-s), \quad r_2(s) \rightarrow -r_2(g-s), \quad \phi(s) \rightarrow -\phi(g-s), \quad \eta(s) \rightarrow -\eta(g-s), \\ \nu(s) \rightarrow \nu(g-s), \quad \mu(s) \rightarrow \mu(g-s).$$

Resumiendo, la forma en la que actúan los elementos T_g de $O(2)$ (rotaciones $-SO(2)$ - y reflexiones) sobre las funciones $y \in (C_{2\pi}^1)^6$ está dada por:

$$[T_g y](s) = \begin{cases} y(s+g) \cong & SO(2) \\ E y(g-s) \cong & O(2)/SO(2) \end{cases} \quad \forall g \in R_{2\pi},$$

donde $y = (r_1, r_2, \phi, \eta, \nu, \mu)$ y $E : y \rightarrow (r_1, -r_2, -\phi, -\eta, \nu, \mu)$. Obsérvese que, como ν permanece del mismo signo, es claro que $T_g(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O} \quad \forall g \in R_{2\pi}$.

La simetría del sistema de ecuaciones queda expresada mediante la siguiente

Afirmación: El mapeo $h : \mathcal{O} \rightarrow (C_{2\pi}^0)^6$ es equivariante bajo $T_g \in O(2)$; es decir:

$$h(T_g y, \lambda) = T_g h(y, \lambda).$$

Prueba: Para $T_g \in SO(2)$ el resultado es inmediato, ya que el conjunto de ecuaciones es un sistema autónomo; luego $\left[\frac{d}{ds}\right] = \left[\frac{d}{d(s+g)}\right]$, y por lo tanto es obvio que $T_g h(y, \lambda) = h(T_g y, \lambda)$.

Para $T_g \in O(2)/SO(2)$: $\left[\frac{d}{ds}\right] = -\left[\frac{d}{d(s-g)}\right]$; llamemos entonces $[\cdot]' \equiv \left[\frac{d}{ds}\right]$, $[\cdot] \equiv \left[\frac{d}{d(g-s)}\right]$; así:

$$h(T_g y, \lambda) = \begin{bmatrix} -\dot{H}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ -(1 + \mu(g-s))\dot{N}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \lambda\nu(g-s) \\ -\dot{N}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ +(1 + \mu(g-s))\dot{H}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \lambda\eta(g-s) \\ -\dot{M}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \eta(g-s)\dot{N}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ -\nu(g-s)\dot{H}(-\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) \\ -\dot{r}_1(g-s) + (1 + \mu(g-s))r_2(g-s) + \eta(g-s) \\ \dot{r}_2(g-s) + (1 + \mu(g-s))r_1(g-s) - \nu(g-s) \\ \dot{\phi}(g-s) - \mu(g-s) \end{bmatrix}$$

$$T_g h(y, \lambda) = \begin{bmatrix} \dot{H}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ -(1 + \mu(g-s))\dot{N}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \lambda\nu(g-s) \\ -\dot{N}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ -(1 + \mu(g-s))\dot{H}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \lambda\eta(g-s) \\ -\dot{M}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) - \eta(g-s)\dot{N}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) + \\ + \nu(g-s)\dot{H}(\eta(g-s), \nu(g-s), \mu(g-s)) \\ -\dot{r}_1(g-s) + (1 + \mu(g-s))r_2(g-s) + \eta(g-s) \\ \dot{r}_2(g-s) + (1 + \mu(g-s))r_1(g-s) - \nu(g-s) \\ \dot{\phi}(g-s) - \mu(g-s) \end{bmatrix}$$

Como $\dot{H}(\cdot, \nu, \mu)$ es impar; $\dot{N}(\cdot, \nu, \mu)$, $\dot{M}(\cdot, \nu, \mu)$ son pares, se tiene que las dos expresiones de arriba coinciden y por lo tanto h es equivariante bajo $T_g \in O(2)$

— □

Por $O(2)/SO(2)$ entiéndase el grupo cociente o grupo factor de $O(2)$ por $SO(2)$.

Sólo tiene caso hablar de grupo cociente cuando uno de los dos grupos involucrados es un subgrupo normal del otro:

Definición: Sea G un grupo y N un subgrupo de G . Se dice que N es un *subgrupo normal* de G , si toda clase lateral derecha de los elementos de N en G , es también una clase lateral izquierda; o equivalentemente; N es un subgrupo normal de G , y para toda $g \in G$ y $n \in N$, resulta que $gng^{-1} \in N$.

En nuestro caso es obvio que $SO(2)$ es un subgrupo normal de $O(2)$; si $g \in O(2)$, puede ser una reflexión

$\left(g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv g_x, g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv g_y, \text{ etc.} \right)$ o puede ser una matriz de rotación por un cierto ángulo; en tal caso $|g| = \pm 1$. Por otra parte, si $f \in SO(2)$, f es una matriz de rotación tal que $|f| = 1$. En todo caso $\bar{f} \equiv gfg^{-1}$ satisface $|\bar{f}| = |g| |f| |g^{-1}| = |f| = 1$, por lo tanto $\bar{f} \in SO(2)$; i.e.; $SO(2)$ es un subgrupo normal de $O(2)$.

4.9 Existencia de soluciones con simetría radial

A continuación se dan dos métodos para obtener soluciones triviales o independientes de s , que resultan ser configuraciones en las que el anillo tiene simetría circular (o radial). Más aún, el primer método nos dice que estas soluciones son las únicas soluciones triviales que poseen dicha propiedad.

(i) Método directo: De hecho, esta es la forma más natural para encontrar soluciones triviales (ver [A&D]), esto es, vía el teorema de la función implícita.

Para buscar soluciones independientes de s , simplemente se iguala a cero todas las derivadas en las ecuaciones del anillo, de donde:

$$\begin{bmatrix} -(1 + \bar{\mu})\hat{N}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) - \lambda\bar{\nu} \\ (1 + \bar{\mu})\hat{H}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) + \lambda\bar{\eta} \\ \bar{\eta}\hat{N}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) - \bar{\nu}\hat{H}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) \\ -(1 + \bar{\mu})\bar{r}_2 - \bar{\eta} \\ (1 + \bar{\mu})\bar{r}_1 - \bar{\nu} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} = 0 .$$

Substituyendo $\bar{\mu} = 0$ en la cuarta y quinta ecuaciones se tiene que:

$$\bar{r}_2 = -\bar{\eta} \quad , \quad \bar{r}_1 = \bar{\nu} .$$

Después, la tercera ecuación es claramente múltiplo de las dos primeras; por lo tanto el sistema se reduce a resolver:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\eta}, \bar{\nu}; \lambda) &\equiv \hat{N}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, 0) + \lambda\bar{\nu} = 0 \\ \chi(\bar{\eta}, \bar{\nu}; \lambda) &\equiv \hat{H}(\bar{\eta}, \bar{\nu}, 0) + \lambda\bar{\eta} = 0 . \end{aligned}$$

De aquí, ya sea que se quiera utilizar directamente el teorema de la función implícita para las dos ecuaciones anteriores al mismo tiempo (ver [Cou], cap.3), o trabajando con cada una de ellas por separado, el resultado es directo:

$$\chi(0, \bar{\nu}, \lambda) = \hat{H}(0, \bar{\nu}, 0) = 0 \quad (\lambda, \bar{\nu} \text{ fijos}) , \quad \chi_{\eta}(0, \bar{\nu}, \lambda) = \hat{H}(0, \bar{\nu}, 0) + \lambda \neq 0$$

(pues por hipótesis $\lambda \geq 0$, $\hat{H}_{\eta} > 0$); por lo tanto el teorema de la función implícita nos dice que es posible resolver de manera *única* para η en función de λ y $\bar{\nu}$. Pero por otro lado es obvio que $\bar{\eta} \equiv 0$ es solución de $\chi(\bar{\eta}, \bar{\nu}, \lambda) = 0 \quad \forall \bar{\nu}, \lambda \in \mathbb{R}^+$; así que por la unicidad, *no* hay otra posibilidad.

Entonces todo se reduce a resolver la ecuación:

$$\varphi(0, \bar{\nu}, \lambda) \equiv \hat{N}(0, \bar{\nu}, 0) + \lambda\bar{\nu} = 0 .$$

Por las condiciones generales 4.6, $\varphi(0, 1, 0) = 0$; luego, $\varphi_{\nu}(0, 1, 0) = \hat{N}_{\nu}(0, 1, 0) > 0$ por hipótesis. Por lo tanto, existe una única representación $\bar{\nu} = \psi(\lambda)$, para $\bar{\nu} \sim 1$, $\lambda \sim 0$; además $\psi(\lambda)$ es diferenciable:

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= -\frac{\varphi_{\lambda}}{\varphi_{\nu}} \\ &= -\frac{\bar{\nu}}{\hat{N}_{\nu}(0, \bar{\nu}, 0) + \lambda} . \end{aligned}$$

Obsérvese que $\psi' < 0$ ($\nu > 0, \mathcal{N}_\nu > 0, \lambda \geq 0$); de hecho si se integra la expresión anterior $\left(\frac{\psi'}{\psi}(\lambda) = -\frac{1}{\mathcal{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0) + \lambda}\right)$ se tiene:

$$\bar{\psi} \equiv \psi(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda \frac{dt}{\mathcal{N}_\nu(0, \psi(t), 0) + t}}.$$

Es decir $\psi(\lambda)$ es una exponencial decreciente, $\psi(0) = 1$, y por lo mismo, la parametrización es válida $\forall \lambda > 0$ y no solamente para $\lambda \sim 0$. Obsérvese que $\psi(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0^+$.

De lo anterior resulta que $\bar{y}^* = (\psi(\lambda), 0, \phi^*, 0, \psi(\lambda), 0)$ es una solución estacionaria (independiente de s), del problema homogéneo $h(y, \lambda) = 0$, donde $\phi^* = cte$ arbitraria.

- (ii) Proyección sobre un espacio invariante bajo T_g : Una de las ventajas que constituye el encontrar el grupo de simetrías del sistema de ecuaciones, consiste en que permite sistematizar la búsqueda de soluciones al problema homogéneo $h(y, \lambda) = 0$. Así, por ejemplo, como $O(2)$ resulta ser el grupo de simetrías del sistema de ecuaciones para el anillo, buscaremos primero aquellas soluciones que tienen la misma simetría.

Por lo menos intuitivamente la existencia de tales soluciones es factible, pues correspondería a configuraciones en las cuales el anillo mantiene su forma circular, (ver sección siguiente).

De manera que si buscamos soluciones con simetría circular, estas deben ser invariantes bajo la representación T_g inducida por $O(2)$ y definida en la sección anterior. La proyección sobre tal espacio invariante o de puntos fijos está dada por:

$$P_y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(s+g) dg + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E y(g-s) dg \right],$$

(véase la parte correspondiente en el primer capítulo); es decir, es el promedio de la acción T_g sobre todas las posibles g ($g \in R_{2\pi}$) pesado por el tamaño del conjunto al cual pertenece g : 2π .

Es fácil entender por qué P , definida de la forma como se hizo arriba, es una proyección, si pensamos en $y(s)$ escrita en su serie de Fourier:

$$y(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i e^{is} \quad ; \quad y_i(\tau_{1,i}, \tau_{2,i}, \phi_i, \eta_i, \nu_i, \mu_i) \text{ los coeficientes de Fourier.}$$

Así resulta que: $P_y = \frac{1}{2}(y_0 + E y_0) = (\tau_0^y, 0, 0, 0, \nu_0, \mu_0)$, es decir, sólo los términos constantes del desarrollo de Fourier para τ_1, ν, μ . De manera que la forma en la que opera T_g sobre P_y es como la identidad (ver abajo).

La demostración de que P nos da la proyección sobre el conjunto de puntos fijos bajo T_g es directa a partir de la definición y 2π -periodicidad de los elementos que

conforman y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(s+g) dg &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_1(s+g) dg, \dots, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(s+g) dg \right) \\ &= (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) ; \end{aligned}$$

donde la barra superior indica el promedio de las funciones sobre el círculo ($\mathcal{R}_{2\pi}$). Análogamente: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Ey(g-s) dg = (\bar{r}_1, -\bar{r}_2, -\bar{\phi}, -\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu})$. Juntando estos dos últimos resultados:

$$\begin{aligned} Py &= \frac{1}{2\pi} [(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\phi}, \bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) + (\bar{r}_1, -\bar{r}_2, -\bar{\phi}, -\bar{\eta}, \bar{\nu}, \bar{\mu})] \\ &= (\bar{r}_1, 0, 0, 0, \bar{\nu}, \bar{\mu}) . \end{aligned}$$

Así que Py es un vector independiente de s y por lo mismo es obvio que $T_g Py = Py$, para $T_g \in SO(2)$. Por otra parte, dado que la 2a, 3a, y 4a componentes de Py son cero, también $T_g Py = Py$ para $g \in O(2)/SO(2)$. Entonces Py es un punto fijo de T_g , y $P^2 y = P(Py) = Py$ (es decir, se trata de un operador de proyección).

Ahora llamemos $\bar{y} \equiv Py$. Substituyendo en el conjunto de ecuaciones del anillo, se llega exactamente al mismo resultado del método anterior:

$$\bar{\mu} = 0 \quad , \quad \bar{r}_1 = \bar{\nu} \quad , \quad \hat{N}(0, \bar{\nu}, 0) + \lambda \bar{\nu} = 0 \quad ;$$

con la excepción de que aquí se obtiene directamente $r_2 = 0 = \eta$, $\phi \equiv 0$ (y no igual a una constante como lo fue anteriormente).

Nótese que la solución del caso directo $\bar{y}^* = (\psi(\lambda), 0, \phi^*, 0, \psi(\lambda), 0)$, no sería invariante bajo T_g , ya que en este caso $\phi = \phi^*$, la cual puede ser distinta de cero.

Por lo tanto, por este camino se obtiene que $\bar{y} = (\psi(\lambda), 0, 0, 0, \psi(\lambda), 0)$ es una solución trivial.

4.10 Interpretación de las soluciones triviales

Es fácil ver que las soluciones obtenidas por el segundo método (caso particular del primero con $\phi^* = 0$), resultan ser aquellas barras cuya configuración está dada por:

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = \psi(\lambda)\mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{r}'(s) = \psi(\lambda)\mathbf{b} \\ \mathbf{a} = \mathbf{A} \quad \quad \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{B} \end{array}$$

es decir, configuraciones circulares cuyos radios disminuyen exponencialmente conforme la intensidad de la fuerza de presión $\mathbf{f}(\lambda)$ aumenta de magnitud. Se necesitaría de una intensidad infinita para lograr la compresión total.

Por otro lado, las soluciones obtenidas por el primer método únicamente difieren en $\phi = \phi^*$ (cte), así que los vectores directores para este caso resultan ser:

$$\mathbf{a} = \cos \phi^* \mathbf{A} + \sin \phi^* \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{b} = -\sin \phi^* \mathbf{A} + \cos \phi^* \mathbf{B}$$

es decir, una rotación de la base $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ por el mismo ángulo ϕ^* (en cada punto). Ciertamente: recuérdese que $\mathbf{A}(s) = \mathbf{R}(s) = \cos(s)\hat{i} + \sin(s)\hat{j}$; $\mathbf{B}(s) = -\sin(s)\hat{i} + \cos(s)\hat{j}$ (ver 4.1). En términos de \hat{i} , \hat{j} :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(s) &= (\cos \phi^* \cos(s) - \sin \phi^* \sin(s))\hat{i} + (\cos \phi^* \sin(s) + \sin \phi^* \cos(s))\hat{j} \\ &= \cos(\phi^* + s)\hat{i} + \sin(\phi^* + s)\hat{j} \quad , \end{aligned}$$

(similar para $\mathbf{b}(s)$). Físicamente esto corresponde a la solución (ii) pero rotada, así que básicamente se puede decir que son las mismas.

De aquí en adelante se convendrá en llamar a la solución obtenida por (ii), $\bar{\mathbf{y}} = (\psi(\lambda), 0, 0, 0, \psi(\lambda), 0)$, la solución trivial. En esta situación el anillo solamente se ha encogido en tamaño con respecto a la configuración inicial o de referencia ($\lambda = 0$) (ver figura 5).

4.11 Formulación integral del problema

4.11.1 Sistema integral

Con la misma notación empleada en la sección 4.5, si definimos el vector

$\mathbf{r}(s) \equiv \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} (s)$, el conjunto completo de ecuaciones del anillo se puede escribir como:

$$\begin{cases} \text{ecuaciones de equilibrio} & \begin{cases} \mathbf{H}'(s) - (1 + \mu(s))\mathbf{J}\mathbf{H}(s) - \lambda\mathbf{J}\mathbf{B}(s) = 0 \\ \mathbf{M}'(s) - \mathbf{H}'(s)\mathbf{J}\mathbf{B}(s) = 0 \end{cases} \\ \text{relaciones de esfuerzo-desplazamiento} & \begin{cases} \mathbf{r}'(s) - (1 + \mu(s))\mathbf{J}\mathbf{r}(s) - \mathbf{B}(s) = 0 \\ \phi'(s) - \mu(s) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

En todo caso, cada uno de los sistemas anteriores es de la forma:

$$\mathbf{X}'(s) = \mathbf{A}(s)\mathbf{X}(s) + \mathbf{F}(s) \quad .$$

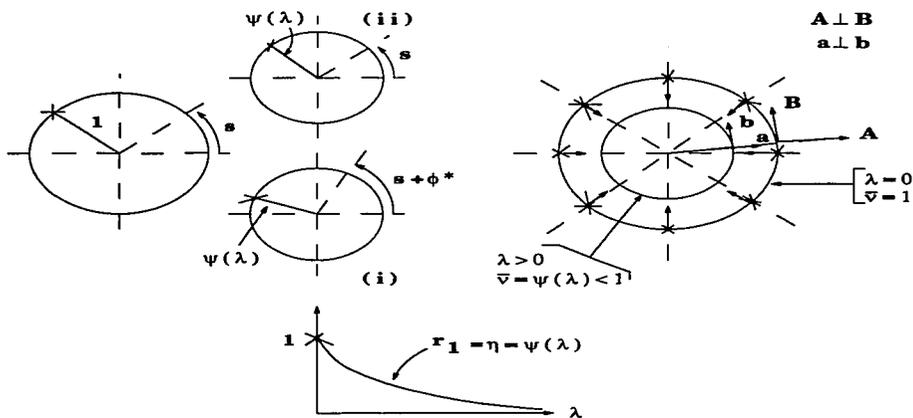


Figura 4.5: Soluciones triviales para el sistema de ecuaciones del anillo.

En realidad $\mathbf{A}(s) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}(s), M(s))$, ya que, dada la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \rightarrow (H, N, M)$, las funciones constitutivas $H = \hat{H}(\eta, \nu, \mu), \dots$ tienen su contraparte $\eta = \hat{\eta}(H, N, M), \dots$. Por lo tanto, $\mathbf{A}(s) \equiv (1 + \mu(s))\mathbf{J} = (1 + \hat{\mu}(H(s), N(s), M(s)))\mathbf{J} \equiv \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}(s), M(s))$.

Viendo entonces este problema como un problema lineal, puede resolverse encontrando una solución al problema homogéneo $\mathbf{X}'(s) = \mathbf{A}(s)\mathbf{X}(s)$. Ahora bien, esto ya se hizo en la sección 3.10; aquí solamente se reemplazará $\bar{\mu}(s) = 1 + \mu(s)$, $f(s) = \lambda\mathbf{J}\mathbf{B}(s)$, así que:

$$\Omega(s) = \begin{bmatrix} \cos(s + \int_0^s \mu) & \sin(s + \int_0^s \mu) \\ -\sin(s + \int_0^s \mu) & \cos(s + \int_0^s \mu) \end{bmatrix}$$

resulta ser una matriz fundamental para el sistema, (obsérvese que $\mathbf{J}\Omega = \Omega\mathbf{J}$). La siguiente descomposición de Ω será usada más adelante:

$$\Omega(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{bmatrix}}_{\Omega_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\int_0^s \mu) & \sin(\int_0^s \mu) \\ -\sin(\int_0^s \mu) & \cos(\int_0^s \mu) \end{bmatrix}}_{\Omega_\mu} ;$$

además, un cálculo directo muestra que $\Omega(s) = \Omega_0 \Omega_\mu = \Omega_\mu \Omega_0$; también $\Omega(0) = \mathbf{I}$; $\Omega^{-1} = \Omega'$, $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}'$. Por lo tanto, resolviendo por variación de parámetros para \mathbf{H} y \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \Omega(s)\mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{J}\Omega(s) \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt \\ \mathbf{r}(s) &= \Omega(s)\mathbf{r}_0 + \Omega(s) \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt \end{aligned}$$

Integrando ahora para ϕ y M :

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \phi_0 + \int_0^s \mu(t) dt \\ M(s) &= M_0 + \int_0^s \mathbf{H}'(t)\mathbf{J}\mathbf{B}(t) dt \\ &= M_0 + \int_0^s [\Omega(t)\mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{J}\Omega(t) \int_0^t \Omega'(\xi)\mathbf{B}(\xi) d\xi]' \mathbf{J}\mathbf{B}(t) dt \\ &= M_0 + \int_0^s \mathbf{H}_0' \Omega'(t) \mathbf{J}\mathbf{B}(t) dt + \lambda \int_0^s \left[\int_0^t \Omega'(\xi)\mathbf{B}(\xi) d\xi \right]' \Omega'(t) \mathbf{J}' \mathbf{J}\mathbf{B}(t) dt \end{aligned}$$

Como $\Omega\mathbf{J} = \mathbf{J}\Omega$: $\int_0^s \mathbf{H}_0' \Omega'(t) \mathbf{J}\mathbf{B}(t) dt = \mathbf{H}_0' \mathbf{J} \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt$, y simplificando:

$$\begin{aligned} M(s) &= M_0 + \mathbf{H}_0' \mathbf{J} \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt + \lambda \int_0^s \left[\int_0^t \Omega'(\xi)\mathbf{B}(\xi) d\xi \right]' \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt \\ &= M_0 + [\mathbf{J} \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt]' \mathbf{H}_0 + \lambda \int_0^s \left[\int_0^s \Omega'(\xi)\mathbf{B}(\xi) d\xi \right]' \frac{d}{dt} \left[\int_0^s \Omega'(\xi)\mathbf{B}(\xi) d\xi \right] dt \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{A}(s) \equiv \int_0^s \Omega'(t)\mathbf{B}(t) dt$, entonces:

$$M(s) = M_0 + [\mathbf{J}\mathbf{A}(s)]' \mathbf{H}_0 + \lambda \int_0^s \mathbf{A}'(t) \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) dt$$

Integrando por partes se tiene que $2 \int_0^s \mathbf{A}'(t) \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) dt = \|\mathbf{A}(s)\|^2$, por lo tanto:

$$M(s) = M_0 + [\mathbf{J}\mathbf{A}(s)]' \mathbf{H}_0 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{A}(s)\|^2$$

En resumen, el sistema de ecuaciones diferenciales $h(y, \lambda) = 0$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \Omega(s)\mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{J}\Omega(s)\mathbf{A}(s) \\ M(s) &= M_0 + (\mathbf{J}\mathbf{A}(s))' \mathbf{H}_0 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{A}(s)\|^2 \\ \mathbf{r}(s) &= \Omega(s)\mathbf{r}_0 + \Omega(s)\mathbf{A}(s) \\ \phi(s) &= \phi_0 + \int_0^s \mu(t) dt \end{aligned}$$

que resulta ser una expresión para H, N, M, r_1, r_2, ϕ (o bien para $\eta, \nu, \mu, r_1, r_2, \phi$) en forma implícita, dada la dependencia de \mathbf{A} en η, ν y estas a su vez de H, N, M . Dada la geometría del problema, el sistema integral anterior debe satisfacer la condición de 2π -periodicidad, $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}(2\pi), \dots$

4.11.2 Cantidades conservadas

Del conjunto completo de ecuaciones del anillo $h(y, \lambda) = 0$, (sec. 4.7), se obtiene la siguiente integral primera: multiplicando la primera ecuación por \hat{H} y sumando la segunda multiplicada por \hat{N} , se tiene que $\hat{H}\hat{H}' + \hat{N}\hat{N}' - \lambda\nu\hat{H} + \lambda\eta\hat{N} = 0$, es decir:

$$\frac{1}{2}(\hat{H}^2 + \hat{N}^2)' - \lambda(\nu\hat{H} - \eta\hat{N}) = 0 ;$$

pero por la tercera ecuación, $\nu\hat{H} - \eta\hat{N} = \hat{M}'$, por lo tanto $\frac{1}{2}(\hat{H}^2 + \hat{N}^2)' - \lambda\hat{M}' = 0$, e integrando:

$$\hat{H}^2 + \hat{N}^2 - 2\lambda\hat{M} = \kappa_0 \quad (\text{cte.})$$

Esta es una cantidad conservada, independientemente de que se trate de un anillo, es decir, para cualquier barra elástica y no lineal confinada a moverse en un plano, bajo la acción de una fuerza externa de presión hidrostática uniforme.

En términos de la fuerza de contacto $\mathbf{n} = H\mathbf{a} + N\mathbf{b}$:

$$\|\mathbf{n}\|^2 - 2\lambda\hat{M} = \kappa_0 .$$

En términos de H, N y M la ecuación corresponde a la de un paraboloido. Suponiendo que $\kappa_0 > 0$, el vector $(H, N, M)'(s)$ describe una curva sobre dicho paraboloido, como se muestra en la figura 6. El caso $\lambda < 0$ representa la situación del anillo sometido a fuerzas expansivas (explotando). En este trabajo tal caso no será considerado, y más adelante se verá por qué.

Vale la pena hacer un comentario más sobre las ecuaciones del anillo: es fácil a partir de las mismas ver lo siguiente:

$$\eta\hat{H}' + \nu\hat{N}' = (1 + \mu)\eta\hat{N} + \lambda\nu\eta - (1 + \mu)\nu\hat{H} - \lambda\eta\nu = (1 + \mu)(\eta\hat{N} - \nu\hat{H}) = -(1 + \mu)\hat{M}' . \text{ Por lo tanto:}$$

$$\eta\hat{H}' + \nu\hat{N}' + (1 + \mu)\hat{M}' = 0 .$$

Esto también lo podemos poner como $(\eta, \nu, 1 + \mu) \cdot (H', N', M') = 0$, es decir, que tales vectores son perpendiculares, así que de conocer el espacio fase de alguna de estas dos ternas, el espacio fase de la otra ya es en cierta forma conocido.

4.11.3 Condiciones necesarias, soluciones 2π -periódicas

Una vez visto el sistema integral de ecuaciones, se pasa al conjunto de condiciones que estas deben de satisfacer, en términos de H, N, M, r_1, r_2, ϕ , pidiendo que sean 2π -periódicas.

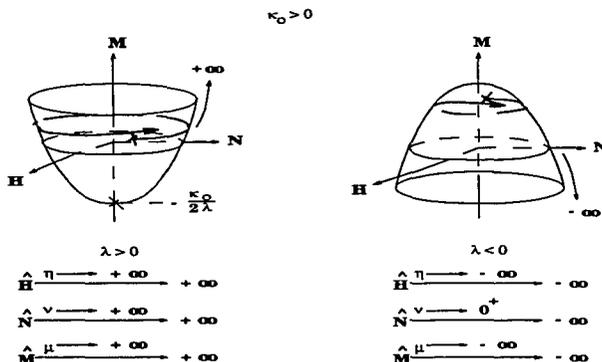


Figura 4.6: Según la integral primera $\hat{H}^2 + \hat{N}^2 - 2\lambda\hat{M} = \kappa_o$, H, N, M se mueven sobre un paraboloid.

De la ecuación para ϕ : $\phi(2\pi) = \phi_o$, es decir:

$$\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0 .$$

Haciendo lo mismo ahora para r : $r(2\pi) = r_o$, lo cual lleva al cumplimiento de la condición:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}(2\pi)]r_o = \mathbf{\Omega}(2\pi)\mathbf{A}(2\pi) .$$

Sin embargo, ya que $\mathbf{\Omega}(s) = \mathbf{\Omega}_o(s)\mathbf{\Omega}_\mu(s)$ (subsección 1.1.1), y dada la condición previa sobre μ , se tiene que $\mathbf{\Omega}(2\pi) = \mathbf{I}$, así que la condición arriba escrita se simplifica en:

$$\mathbf{A}(2\pi) = 0 .$$

Para H_o ($H(2\pi) = H_o$) se obtiene la misma condición. Con esto se tiene automáticamente que $M(2\pi) = M_o$, así que la condición sobre la integral de μ y sobre \mathbf{A} resultan ser condiciones necesarias para la 2π -periodicidad de H, N, M, r_1, r_2, ϕ (o equivalentemente, de $\eta, \nu, \mu, r_1, r_2, \phi$).

Obsérvese que de la expresión para $H(s)$ se puede despejar:

$$\mathbf{\Omega}(s)\mathbf{A}(s) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{J}^t [H(s) - \mathbf{\Omega}(s)H_o] .$$

Substituyendo en r : $r(s) = \Omega(s)r_0 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{J}^t[H(s) - \Omega(s)H_0]$, o bien,

$$[r(s) - \Omega(s)r_0] = \frac{1}{\lambda} \mathbf{J}^t[H(s) - \Omega(s)H_0].$$

Lo que se tiene es que, como es natural, la fuerza de contacto $\mathbf{n} = Ha + Nb$, determina la forma del anillo (i.e. r_1 y r_2). Por supuesto, la fuerza externa o de cuerpo \mathbf{f} y la fuerza de contacto están relacionadas por: $\mathbf{n}' + \mathbf{f} = \mathbf{0}$ (ver 2.3).

Se podría entonces decir que $r(s)$ está subordinada a determinar $H(s)$.

Por último, y con el objeto de utilizarlo más adelante, se escribe explícitamente la condición $A(2\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^s \Omega^t(t) \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} (t) dt \\ &= \int_0^s \Omega_0^t(t) \Omega_\mu^t(t) \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} (t) dt. \end{aligned}$$

Si ahora se llama $\begin{bmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix} \equiv \Omega_\mu^t(t) \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix}$, entonces lo anterior se puede reescribir como:

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \bar{\eta} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix} (t) dt = \mathbf{0};$$

es decir que $(\bar{\eta}, \bar{\nu})^t$ es ortogonal en $L_2[0, 2\pi]$ a $(\cos(s), -\sin(s))^t$ y $(\sin(s), \cos(s))^t$.

Es importante subrayar que, en términos de las variables que participan de las ecuaciones del anillo ($h(y, \lambda) = 0$); i.e. $y = (r_1, r_2, \phi, \eta, \nu, \mu)$, las soluciones con periodo 2π estarán determinadas módulo las constantes ϕ_0, r_1^0, r_2^0 ($r_0 = (r_1^0, r_2^0)^t$), o bien, módulo $(\Omega(s)r_0, \phi_0, 0, 0, 0)^t$. Por otra parte, en la subsección 11.7 se volverá a abordar el tema de la relación que guardan M_0 con $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$ y H_0 con $A(2\pi) = 0$ y que por el momento se deja sin investigar.

4.11.4 Condiciones necesarias, soluciones $\frac{2\pi}{n}$ -periódicas

Parte del estudio del problema de este trabajo consiste no solamente en determinar la bifurcación de soluciones con periodicidad 2π a partir de la solución trivial \bar{y} , sino también (y aprovechando la propiedad de equivarianza vista en 4.8) la bifurcación de soluciones con periodo $\frac{2\pi}{n}$ (n un número natural). Esto lleva a trabajar el mismo conjunto de ecuaciones, pero bajo condiciones distintas y que se verán a continuación.

Siguiendo los mismos pasos que en la subsección anterior, de la ecuación para ϕ , la condición $\phi(\frac{2\pi}{n}) = \phi_0$ implica que:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0 .$$

De igual forma, $r(\frac{2\pi}{n}) = r_0$ implica que

$[\mathbf{I} - \Omega(\frac{2\pi}{n})]r_0 = \Omega(\frac{2\pi}{n}) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Omega^t(t)B(t) dt$. Otra vez, ya que $\Omega(\frac{2\pi}{n}) = \Omega_0(\frac{2\pi}{n})\Omega_\mu(\frac{2\pi}{n})$ y dada la condición actual sobre μ , se tiene que $\Omega_\mu(\frac{2\pi}{n}) = \mathbf{I}$, entonces:

$$r_0 = [\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n})]^{-1} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) .$$

Es sencillo ver que

$$[\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n})]^{-1} = \frac{1}{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{n}))} [\mathbf{I} - \Omega_0^t(\frac{2\pi}{n})] ,$$

y por lo tanto conmuta con \mathbf{J} .

Así que, a diferencia del caso 2π -periódico, para este tipo de periodicidad, las constantes r_1^2 y r_2^2 no son arbitrarias, sino que están sujetas a la condición anterior.

Similarmente para las constantes H_0 y N_0 :

$$H_0 = \lambda [\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n})]^{-1} \mathbf{J} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) .$$

Así que en este caso, el sistema integral de la subsección 11.1 queda como:

$$H(s) = \lambda \mathbf{J} \Omega(s) [(\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) + A(s)]$$

$$r(s) = \Omega(s) [(\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) + A(s)]$$

$$\phi(s) = \phi_0 + \int_0^s \mu(t) dt$$

$$M(s) = M_0 + \frac{\lambda}{2} [2A^t(s)(\mathbf{I} - \Omega_0(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) + \|A(s)\|^2] .$$

Por lo tanto, aparentemente, solo M_0 y ϕ_0 quedan como constantes independientes en el sentido de que parecen no estar subordinadas al cumplimiento de alguna condición adicional. En la subsección 11.7 se verá que esto no es del todo cierto, pues M_0 está sujeta a la condición $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0$.

En el caso $\lambda = 0$, $H(s) \equiv 0$ y $M(s) \equiv M_o$. Pero entonces, de las condiciones generales 4.6 y la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \rightarrow (H, N, M)$, se tiene que $H \equiv 0 \implies \eta \equiv 0$; ν, μ arbitrarias. Además $N \equiv 0 \implies \nu \equiv 1$; por último y como $M \equiv M_o$, se tendría que $\mu = \mu_o$ (cte); pero si tomamos en cuenta la condición integral $\int_0^{2\pi} \mu = 0$, esto lleva a $\mu_o = 0$; lo cual por la condición general (2) dá finalmente $M \equiv 0$.

Lo anterior concuerda con la discusión dada en 3.4 (condiciones de paridad e iniciales): la única fuerza externa o de cuerpo que actúa sobre el anillo es $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}'(s)$; cuando $\lambda = 0$ no hay ninguna fuerza actuando, a tal configuración se le convino en llamar la configuración de referencia; en ella H, N y M son cero (el anillo se encuentra libre de torcas y fuerzas aplicadas) y por lo tanto $\eta = 0$, $\nu = 1$, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_o$ (cte); (aquí se está encontrando además que $\tilde{\mu}_o = 1$, pues $\tilde{\mu}_o = 1 + \tilde{\mu}_o$ y $\mu_o = 0$).

En realidad, dado que hemos supuesto que $\mu(s)$ es lo suficientemente regular como para satisfacer las hipótesis del teorema del valor intermedio, la condición $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$, implica que existe un s_o , $0 \leq s_o \leq \frac{2\pi}{\pi}$, tal que $\mu(s_o) = 0$. Ya que $y(s+g)$ sigue siendo solución del problema homogéneo ($g \in R_{2\pi}$), (lo cual es consecuencia de la propiedad de equivarianza de h), podemos suponer que $\mu(0) = 0$, y de aquí que $M(0) \equiv \dot{M}(\eta(0), \nu(0)\mu(0)) = \dot{M}(\eta(0), \nu(0), 0) = 0$ (condición general 2); es decir:

$$M_o = 0 .$$

En la subsección 11.7 se volverá sobre el tema de la "elección" de la constante M_o .

Se llama ahora la atención al siguiente hecho:

Dado que se definió $\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} = \Omega_\mu(s) \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix}$, es claro que si η y ν tienen periodo $\frac{2\pi}{n}$ y $\int_0^{2\pi} \mu = 0$, $\tilde{\eta}$ y $\tilde{\nu}$ también son del mismo periodo, así que tienen un desarrollo en series de Fourier de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(s) &= \frac{\tilde{\eta}_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k \cos(kns) + \tilde{\eta}_k \sin(kns)) \\ \tilde{\nu}(s) &= \frac{\tilde{\nu}_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k \cos(kns) + \tilde{\nu}_k \sin(kns)) . \end{aligned}$$

Entonces, dada la ortogonalidad de las bases $\{\cos(knt), \sin(knt)\}$ la condición $A(2\pi) = 0$ se satisface automáticamente:

$$\begin{aligned} A(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \Omega_o(t) \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} (t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} (t) dt \\ &= 0 . \end{aligned}$$

De antemano se sabía que esto se debía satisfacer ya que las soluciones con periodo $\frac{2\pi}{n}$ también tienen periodo 2π .

En conclusión para el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico ($n > 1$) se tiene la condición $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0$; las constantes r_0 y H_0 quedan determinadas a partir de $A(\frac{2\pi}{n})$, mientras que ϕ_0 es la única que no queda condicionada como las anteriores (es el ángulo que forman los vectores \mathbf{A} y \mathbf{a} en $s = 0$).

4.11.5 Cotas sobre H , N , M

De las expresiones integrales para H y M es sencillo ver que se tienen las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \begin{aligned} |H(s)| \\ |N(s)| \end{aligned} &\leq c_1(\lambda, n)(|\eta|_0 + |\nu|_0) \\ |H(s)| &\leq c_2(\lambda, n)(|\eta|_0^2 + |\nu|_0^2) \end{aligned}$$

de hecho, usando la norma de la continuidad uniforme ($|\cdot|_0 \equiv \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} |\cdot|$), se puede encontrar que una expresión para las constantes de arriba es:

$$\begin{aligned} c_1(\lambda, n) &= 2\pi\lambda \left[\frac{1}{n} \left(1 + \left| \frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{1 - \cos(\frac{2\pi}{n})} \right| \right) + 2 \right] \\ c_2(\lambda, n) &= 8\pi^2\lambda \left[2 + \left| \frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{1 - \cos(\frac{2\pi}{n})} \right| \right] \end{aligned}$$

Nótese que $\left| \frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{1 - \cos(\frac{2\pi}{n})} \right|$ no está acotada conforme $n \rightarrow \infty$.

Consecuencias:

- (1) De la desigualdad para $|N(s)|$ se observa que no puede darse el caso $\nu \rightarrow 0^+$, ya que entonces $N \rightarrow -\infty$ (por las condiciones de crecimiento); pero esto no es compatible con la cota dada arriba para N . Así que debe existir una función $\epsilon(|\lambda|, |\eta|_0, |\nu|_0) > 0$ tal que $\nu \geq \epsilon$.
- (2) Según se obtiene de la desigualdad para $|M(s)|$, si λ, η, ν son fijas, automáticamente $|M(s)|$ estaría acotada por una cantidad finita. Entonces, dada la conexión entre $M(s)$ y $\mu(s)$, ($M \xrightarrow{\mu \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$), se tendrá que también en tal caso $|\mu(s)|$ está acotada por una cantidad finita, que depende de $\lambda, |\eta|_0, |\nu|_0$, es decir: $|\mu|_0 \leq \mathcal{J}(\lambda, |\eta|_0, |\nu|_0)$.

4.11.6 No existencia de ceros dobles para $\eta(s) \neq 0$

El siguiente resultado será de mucha utilidad cuando se estudie la bifurcación de ramas a partir de la solución trivial.

Escribiendo de nuevo las ecuaciones de equilibrio:

$$H' - (1 + \mu)N - \lambda\nu = 0 \quad , \quad N' + (1 + \mu)H + \lambda\eta = 0 \quad , \quad M' - (\nu H - \eta N) = 0 \quad .$$

Ya se mencionó que este sistema puede verse como uno para H, N y M , o bien, para η, ν, μ . Supóngase que existe una solución $\eta(s)$ tal que tiene un cero doble en $s = s_0$: $\eta(s_0) = \eta'(s_0) = 0$. Esto implicaría, claro está, que $H(s_0) = 0$; de aquí que $N'(s_0) = 0$ según la segunda ecuación, y $M'(s_0) = 0$ según la tercera ecuación. Además, ya que $\hat{H}' = \hat{H}_\eta \eta' + \hat{H}_\nu \nu' + \hat{M}_\mu \mu'$ y como \hat{H}_ν, \hat{H}_μ son impares en η (consecuencia de la imparidad de $\hat{H}(\cdot, \nu, \mu)$), entonces $H'(s_0) = 0$.

Luego, en el mismo punto $s = s_0$, la primera ecuación se reduciría a:

$$((1 + \mu)N + \lambda\nu) |_{s=s_0} = 0 \quad .$$

Por otro lado, visto el sistema en términos de H, N, M , es claro que el caso estacionario $(H, N, M) \equiv (0, N_0, M_0)$ satisface las tres implicaciones mencionadas al principio ($H(s_0) = 0, N'(s_0) = 0, M'(s_0) = 0$), con las mismas condiciones iniciales. Entonces, debido a la unicidad de la solución al problema de valores iniciales, H, N, M son constantes, y por lo tanto η, ν y μ también son constantes. Más aún, por la condición de $\frac{2\pi}{n}$ -periodicidad: $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0, \mu = \mu_0 \equiv 0$, y por consiguiente $M \equiv 0$. Así que el caso estacionario resulta ser solución siempre y cuando N_0 y $\nu = \nu_0$ satisfagan la ecuación $N_0 + \lambda\nu_0 = 0$ (o bien, $N(0, \nu_0, 0) + \lambda\nu_0 = 0$). Sin embargo, en la sección 4.9 se demostró que esta ecuación tiene una única solución $\nu_0 = \psi(\lambda)$ via el teorema de la función implícita.

Así bien, se acaba de ver que la única solución con las propiedades de η arriba mencionadas ($\eta(s_0) = \eta'(s_0) = 0$), es $(\eta, \nu, \mu) = (0, \psi(\lambda), 0)$ (o bien: $(H, N, M) = (0, N(0, \psi(\lambda), 0), 0)$). En otras palabras, solamente la solución trivial $\eta \equiv 0$ tiene la propiedad de tener ceros dobles.

4.11.7 Planteamiento en términos de un problema de punto fijo

Ya se vió en la subsección 11.3 que las condiciones $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt$ y $A(2\pi) = \mathbf{0}$ son necesarias para la 2π -periodicidad de H, N y M en el sistema integral

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} (s) &= \Omega(s) \begin{bmatrix} H_o \\ N_o \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{J} \Omega(s) A(s) \\ M(s) &= M_o + (\mathbf{J} A(s))^t \left[\begin{bmatrix} H_o \\ N_o \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2} \|A(s)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

De igual forma para r_1 y r_2 .

Par el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico, $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0$ resultaba ser condición necesaria para que el sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} (s) &= \lambda \mathbf{J} \Omega(s) \left[(\mathbf{I} - \Omega_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \Omega_o(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) + A(s) \right] \\ M(s) &= M_o + \frac{\lambda}{2} [2A^t(s) (\mathbf{I} - \Omega_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \Omega_o(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n}) + \|A(s)\|^2] \end{aligned}$$

tenga la periodicidad requerida.

Ahora se verán con más cuidado las condiciones antes mencionadas.

Llámesese a $\mathcal{F} : (\eta, \nu, \mu) \longrightarrow (H, N, M)$ el mapeo tal que $\mathcal{F}(\eta, \nu, \mu) = (\hat{H}(\eta, \nu, \mu), \hat{N}(\eta, \nu, \mu), \hat{M}(\eta, \nu, \mu))$; por hipótesis su inversa existe y está dada por $\mathcal{F}^{-1} : (H, N, M) \longrightarrow (\eta, \nu, \mu)$; $\mathcal{F}^{-1}(H, N, M) = (\hat{\eta}(H, N, M), \hat{\nu}(H, N, M), \hat{\mu}(H, N, M))$.

Es claro que para el caso 2π -periódico, el lado derecho del sistema integral para H, N, M depende de $H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu$. Teniendo en cuenta esta dependencia, bien se podría escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(H, N, M) &\equiv (\hat{\eta}, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \\ &= (\hat{\eta}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu), \hat{\nu}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu), \hat{\mu}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu)) \end{aligned}$$

La expresión anterior, define un problema de punto fijo para η, ν, μ .

Lema: Existe una única $M_o = M_o^*(H_o, N_o, \eta, \nu, \mu)$, continua, tal que $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$, o bien, $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0$.

Prueba: De la expresión integral para $M(s)$, fijando η, ν, μ y para H_o y N_o dadas, es claro que $M(s) \xrightarrow{M_o \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$. Como μ es la variable de esfuerzo asociada a M , por las condiciones de crecimiento se tendrá que $\check{\mu}(H_o, N_o, \cdot, \eta, \nu, \mu) \xrightarrow{M_o \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$. De aquí que el funcional

$$J(H_o, N_o, M_o) \equiv \int_0^{2\pi} \check{\mu}(H_o, N_o, M_o, \eta(t), \nu(t), \mu(t)) dt$$

también satisface $J(H_o, N_o, \cdot) \xrightarrow{M_o \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$, y de aquí que exista cuando menos un M_o^* tal que $J(H_o, N_o, M_o^*) = 0$.

De hecho, tal M_o^* es único: escribáse $\mu = \hat{\mu}(H, N, M) = \hat{\mu}(H, N, \check{M}(\eta, \nu, \mu, H_o, N_o, M_o))$ (en la expresión integral para H y N no entra M_o); entonces, $\mu_{M_o} = \hat{\mu}_{,M} M_{M_o} = \hat{\mu}_M$ (M depende linealmente de M_o). Por otro lado, como $M_\mu > 0$, $\mu_M > 0$ (por la invertibilidad del mapeo \mathcal{F}), y de aquí que existe una única $M_o^* = M_o^*(H_o, N_o, \eta, \nu, \mu)$ tal que $\check{\mu}(H_o, N_o, M_o^*, \eta, \nu, \mu) = 0$, de donde se obtiene que $J(H_o, N_o, M_o^*) = 0$, probando el lema. De hecho se tiene más, pues arriba se ha visto que $\check{\mu}(H_o, N_o, M_o^*, \eta, \nu, \mu) = 0$ satisface las hipótesis del teorema de la función implícita, y por consiguiente $M_o^*(H_o, N_o, \eta, \nu, \mu)$ es continua y diferenciable con respecto a sus argumentos. \square

Para el caso 2π -periódico se debe mostrar además que existen constantes H_o y N_o tales que $A(2\pi) = 0$, este punto será tocado nuevamente en la sección 14, una vez que se caracterize el espacio de soluciones al conjunto completo de ecuaciones del anillo.

En este trabajo se supondrá que existen (H_o, N_o, M_o) únicas, que dependen continuamente de (η, ν, μ) , tales que $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$ y $A(2\pi) = 0$; entonces el sistema integral se puede plantear como un problema de punto fijo en $(C_{2\pi}^2)^3$, para $\eta = \check{\eta}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu)$, $\nu = \check{\nu}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu)$, $\mu = \check{\mu}(H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu)$. Como ya se vió, esto está bien justificado al menos para el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico ($n > 1$), pues las constantes H_o y N_o ya están determinadas, a través de $A(\frac{2\pi}{n})$.

Por último se hace notar lo siguiente, que será de utilidad para el estudio posterior: Sea una sucesión $\{H_o^n, N_o^n, M_o^n, \eta^n, \nu^n, \mu^n\}$; entonces, por lo visto en la subsección 11.5, H, N, M también son acotadas, y de hecho uniformemente, al evaluar en dicha sucesión; lo mismo se puede decir de H', N', M' directamente de las ecuaciones de equilibrio.

Atendiendo ahora a la parametrización $(\eta, \nu, \mu) = (\check{\eta}, \check{\nu}, \check{\mu})(H, N, M)$, lo visto arriba nos dice que las ecuaciones constitutivas asociadas evaluadas en tales valores de H, N, M están acotadas; es decir, que $(\check{\eta}, \check{\nu}, \check{\mu}) \equiv (\check{\eta}, \check{\nu}, \check{\mu})(H_o, N_o, M_o, \eta^n, \nu^n, \mu^n)$ es una sucesión acotada. Por lo tanto, (principio de Weierstrass), existe una subsucesión convergente

$(\check{\eta}_{nj}, \check{\nu}_{nj}, \check{\mu}_{nj})$; es decir: el mapeo $(\check{\eta}, \check{\nu}, \check{\mu})$ es compacto. De manera que el problema de punto fijo se puede escribir como un problema de encontrar los ceros de

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \check{\eta} \\ \check{\nu} \\ \check{\mu} \end{bmatrix} (H_o, N_o, M_o, \eta, \nu, \mu) = 0$$

(identidad - compacto).

4.12 Reducción y linearización del sistema de ecuaciones

Como se vió en toda la sección anterior, el conjunto completo de ecuaciones del anillo: $h(y, \lambda) = 0$; $h: \mathcal{O} \ni (y, \lambda) \rightarrow h(y, \lambda) \in (C_{2\pi}^2)^6$, resulta ser integrable, obteniendo relaciones para H, N, M, r_1, r_2, ϕ , en términos de η, ν, μ ; lo cual permitió el planteamiento del problema como uno de punto fijo.

En la subsección 11.3 se hizo notar que $r(s)$ está subordinada a encontrar $H(s)$ y por tal razón prescindiremos por un tiempo de las ecuaciones para r_1 y r_2 . Se podría pensar, por el mismo argumento dado entonces, en dejar las ecuaciones para $r(s)$ y olvidar por un tiempo aquellas para $H(s)$; sin embargo recuérdese que existe una conexión muy importante entre H, N, M y η, ν, μ por lo cual es conveniente conservarlas en todo momento. Cuando se analice la bifurcación local de soluciones a partir de la trivial \bar{y} , resaltará la importancia de las relaciones de esfuerzo-desplazamiento (y por ende de r_1 y r_2); así que todas y cada una de las funciones que participan en el problema del anillo horizontal, juegan un papel importante en su momento.

A pesar de que es común encontrar el tratamiento del problema basándose únicamente en las ecuaciones de equilibrio (ver [Ant] cap. IV), se conservará la ecuación para ϕ : $\phi' - \mu = 0$, pues de ella se obtuvo la importante condición $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$ (o bien $\int_0^{2\pi} \mu(t) dt = 0$), y que caracteriza al conjunto solución.

Por lo tanto, si se define el mapeo $h_1: \mathcal{O}_1 \ni (y, \lambda) \rightarrow h_1(y_1, \lambda) \in (C_{2\pi}^0)^4$, donde $y_1 \equiv (\phi, \eta, \nu, \mu)$, $\mathcal{O}_1 \equiv \{y_1 \in (C_{2\pi}^1)^4 : \nu > 0\} \times R^+$; el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$h_1(y, \lambda) \equiv \begin{bmatrix} \hat{H}'(\eta, \nu, \mu) - (1 + \mu)\hat{N}(\eta, \nu, \mu) - \lambda\nu \\ \hat{N}'(\eta, \nu, \mu) + (1 + \mu)\hat{H}(\eta, \nu, \mu) + \lambda\eta \\ \hat{M}'(\eta, \nu, \mu) + \eta\hat{N}(\eta, \nu, \mu) - \nu\hat{H}(\eta, \nu, \mu) \end{bmatrix} = 0$$

Como ya se demostró en la sección 4.9, este sistema cuenta con la solución trivial $\bar{y}_1 \equiv (0, 0, \psi(\lambda), 0)$. Ahora nos hacemos la pregunta que de manera general se hace con problemas no lineales de este tipo: una vez que se ha verificado la existencia de soluciones triviales (que constituyen estados circulares), ¿será posible que existan soluciones no triviales que bifurquen a partir de ella? Esto es, nos preguntamos por la posibilidad de que una vez que el anillo se somete a la fuerza de presión hidrostática uniforme $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}'$, su estado evolucione de uno con configuración circular a otro de configuración cualquiera.

Para contestar a esta pregunta, se linearizará alrededor de la solución trivial \bar{y}_1 , definiendo primero el mapeo:

$$f(x, \lambda) \equiv h_1(\bar{y}_1 + x, \lambda)$$

es decir; $f: C_{>} \times R^+ \ni (x, \lambda) \longrightarrow f(x, \lambda) \in (C_{2\pi}^0)^4$; donde $x^t \equiv (x_1, \dots, x_4)$, $C_{>} \equiv \{x \in (C_{2\pi}^1)^4 : x_3 > -\psi(\lambda), \forall s \in R_{2\pi}\}$.

Entonces, la linearización alrededor de la solución trivial viene dada por:

$$f(x, \lambda) = f(0, \lambda) + D_x f(0, \lambda)x - g(x, \lambda) ,$$

donde $D_x f(0, \lambda) : (C_{2\pi}^1)^4 \longrightarrow (C_{2\pi}^0)^4$ es la derivada de Fréchet de f en el punto $(0, \lambda)$; $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$. Obviamente $f(0, \lambda) = h_1(\bar{y}_1, \lambda) = 0$, y el problema $f(x, \lambda) = 0$ consiste en resolver:

$$D_x f(0, \lambda)x - g(x, \lambda) = 0 .$$

Supongamos por un momento que $D_x f(0, \lambda)$ fuese invertible, entonces el problema anterior es equivalente a:

$$x - [D_x f(0, \lambda)]^{-1}g(x, \lambda) = 0 .$$

Esta ecuación puede resolverse de manera única para $x = \hat{x}(\lambda)$ via el teorema de la función implícita (por iteraciones de $x_{n+1} = (D_x f(0, \lambda))^{-1}g(x_n, \lambda)$, ver [Nir1] cap. VII). Pero como $(0, \lambda)$ es solución, por unicidad, no puede haber otra solución distinta de esta. De lo anterior se concluye que una condición *necesaria* para la bifurcación de soluciones a partir de la trivial, es la *no invertibilidad de $D_x f(0, \lambda)$* . A los puntos λ_* para los cuales suceda lo anterior se les llama puntos singulares.

En detalle, la linearización de f alrededor de la solución trivial $(0, \lambda)$ es de la forma siguiente:

Primera ecuación:

$$x'_1 - x_4 .$$

Segunda ecuación:

$$\frac{d}{ds}[\hat{H}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{H}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{H}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{H}(x_i, x_j)] - (1+x_4)[\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{N}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{N}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{N}(x_i, x_j)] - \lambda(\psi(\lambda) + x_3) .$$

Tercera ecuación:

$$\frac{d}{ds}[\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{N}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{N}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{N}(x_i, x_j)] + (1+x_4)[\hat{H}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{H}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{H}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{H}(x_i, x_j)] + \lambda x_2 .$$

Cuarta ecuación:

$$\frac{d}{ds}[\hat{M}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{M}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{M}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{M}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{M}(x_i, x_j)] + x_2[\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{N}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{N}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{N}(x_i, x_j)] - (\psi(\lambda) + x_3)[\hat{H}(0, \psi(\lambda), 0) + \hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x_2 + \hat{H}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x_3 + \hat{H}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x_4 + \mathbf{H}(x_i, x_j)] .$$

Las expresiones anteriores se simplifican enormemente si tomamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\cdot, \nu, \mu) \text{ impar} &\implies \hat{H}(0, \nu, \mu) = 0 \implies \hat{H}_\nu(0, \nu, \mu) = \hat{H}_\mu(0, \nu, \mu) = 0 . \\ \hat{N}(\cdot, \nu, \mu) \text{ par} &\implies \hat{N}_\eta(\cdot, \nu, \mu) \text{ impar} \implies \hat{N}_\eta(0, \nu, \mu) = 0 . \\ \hat{M}(\eta, \nu, 0) = 0 &\implies \hat{M}_\eta(\eta, \nu, 0) = \hat{M}_\nu(\eta, \nu, 0) = 0 . \end{aligned}$$

También se usará el resultado obtenido en la sección 4.9: $\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) = -\lambda\psi(\lambda)$; y la condición general (3) (sec. 4.6): $N_\mu(0, \nu, 0) = 0 \forall \nu > 0$ (nótese que entonces el propósito de tal condición es el de que solamente los elementos en la diagonal de $\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \mu)}$ participen de la linearización). Tomando en cuenta estas condiciones, las expresiones anteriores quedan en:

Primera ecuación:

$$x'_4 - x_4$$

Segunda ecuación:

$$\hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0)x'_2 - [\hat{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0) + \lambda]x_3 + \lambda\psi(\lambda)x_4 - g_2(x, \lambda) .$$

Tercera ecuación:

$$\hat{N}_\nu(0, \psi(\lambda), 0)x'_3 + [\hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0) + \lambda]x_2 - g_3(x, \lambda) .$$

Cuarta ecuación:

$$\hat{M}_\mu(0, \psi(\lambda), 0)x'_4 - \psi(\lambda)[\hat{H}_\eta(0, \psi(\lambda), 0) + \lambda]x_2 - g_4(x, \lambda) .$$

Para el conjunto completo de ecuaciones, la linearización de $h(\bar{y} + (\bar{r}_1, \bar{r}_2, x_1, x_2, x_3, x_4))$ alrededor de la solución trivial está dada por las cuatro ecuaciones vistas arriba, mas aquellas para r_1 y r_2 :

Para r_1 :

$$\frac{d}{ds}[\psi(\lambda) + \bar{r}_1] - (1+x_4)\bar{r}_2 - x_2$$

$$\sim \bar{r}'_1 - \bar{r}_2 - x_2 .$$

Para r_2 :

$$\begin{aligned} & \bar{r}'_2 + (1 + x_4)(\psi(\lambda) + \bar{r}_1) - (\psi(\lambda) + x_3) \\ & \sim \bar{r}'_2 + \bar{r}_1 - x_3 + \psi(\lambda)x_4. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se usarán más adelante.

Nótese que entonces se puede escribir:

$$f(x, \lambda) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \hat{H}_\eta^o & & 0 \\ & & \hat{N}_\nu^o & \\ & 0 & & \hat{M}_\mu^o \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}(\lambda)} x' - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \hat{N}_\nu^o + \lambda & -\lambda\psi \\ 0 & -(\hat{H}_\eta^o + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \psi(\hat{H}_\eta^o + \lambda) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}(\lambda)} x - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}}_{g(x, \lambda)} (x, \lambda),$$

donde $(\hat{H}_\eta^o, \hat{N}_\nu^o, \hat{M}_\mu^o) \equiv (\hat{H}_\eta, \hat{N}_\nu, \hat{M}_\mu)(0, \psi(\lambda), 0)$. Es decir que se tiene:
 $D_x f(0, \lambda)x = \hat{\mathbf{A}}(\lambda)x' - \hat{\mathbf{B}}(\lambda)x$.

Para simplificar todo el estudio posterior, escribiremos el problema $f(x, \lambda) = 0$ en su forma linealizada, de la forma equivalente:

$$x' - \mathbf{B}(\lambda)x - G(x, \lambda) = 0,$$

donde $\mathbf{B} = (b_{ij})$ es la matriz de 4×4 dada por: $b_{1,4} = 1$, $b_{2,3} = \frac{\hat{N}_\nu^o + \lambda}{\hat{H}_\eta^o} \equiv a(\lambda)$,
 $b_{2,4} = -\frac{\lambda\psi}{\hat{H}_\eta^o} \equiv b(\lambda)$, $b_{3,2} = -\frac{\hat{H}_\eta^o + \lambda}{\hat{N}_\nu^o} \equiv c(\lambda)$, $b_{4,2} = \psi \frac{\hat{H}_\eta^o + \lambda}{\hat{M}_\mu^o} \equiv d(\lambda)$, con todas sus componentes restantes cero. Además $G^t(x, \lambda) = (0, \frac{g_2}{\hat{H}_\eta^o}, \frac{g_3}{\hat{N}_\nu^o}, \frac{g_4}{\hat{M}_\mu^o})$; ($G = o(\|x\|)$).

Como $\mathbf{B}(\lambda)$ es una matriz constante para λ fijo, $e^{\mathbf{B}(\lambda)s}$ es una matriz fundamental del sistema y por lo tanto se puede dar una solución para x en forma implícita, usando el método de variación de parámetros:

$$x(s) = e^{\mathbf{B}(\lambda)s} x(0) + e^{\mathbf{B}(\lambda)s} \int_0^s e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} G(x(t), \lambda) dt.$$

4.13 Núcleo de $D_x f(0, \lambda)$

Defínase al operador $\mathcal{A}(\lambda) \equiv []' - \mathbf{B}(\lambda)[]$.

Si $N(D_x f(0, \lambda)) \equiv \{x \in (C_{2\pi}^1)^4 : D_x f(0, \lambda)x = 0\}$ es el núcleo de la derivada de Fréchet de f , se acaba de ver al final de la sección anterior que

$x \in N(D_x f(0, \lambda)) \iff \mathcal{A}x = 0$; es decir, que la matriz fundamental $e^{\mathbf{B}(\lambda)s}$ consta, por columnas, de los elementos en $N(D_x f(0, \lambda))$.

El cálculo de una matriz fundamental para $\mathcal{A}x = 0$ no es complicado. Por ejemplo, procediendo por el método de valores y vectores propios se tiene que el polinomio característico $p(\gamma)$ asociado es:

$$\begin{aligned} p(\gamma) \equiv |\mathbf{B}(\lambda) - \gamma\mathbf{I}| &= \det \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & a & b \\ 0 & c & -\gamma & 0 \\ 0 & d & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \\ &= \gamma^2[\gamma^2 - (ac + db)] \end{aligned}$$

Ahora:

$$ac + bd = -(1 + \frac{\lambda}{H_g})(1 + \frac{\lambda}{N_g}) - \lambda\psi^2(1 + \frac{\lambda}{H_g}) = -(1 + \frac{\lambda}{N_g})(1 + \frac{\lambda}{N_g} + \frac{\lambda\psi^2}{M_g^2}) \equiv -q(\lambda)$$

Es claro que $q(\lambda)$ es estrictamente positiva (de hecho $q(0) = 1$). Entonces se puede escribir el polinomio característico como $p(\gamma) = \gamma^2(\gamma^2 + q(\lambda))$; por lo cual $\gamma = 0$ resulta ser una raíz doble, mientras que las otras dos son complejas conjugadas: $\gamma_1 = i\sqrt{q} = \bar{\gamma}_2$.

No es difícil ver que una buena elección para vector propio asociado con la raíz $\gamma = 0$, a la vez que solución del sistema es: $X_1^t = (1, 0, 0, 0)$.

Dado que $\gamma = 0$ es una raíz doble, la otra solución asociada a dicho valor puede obtenerse mediante el siguiente razonamiento (ver [Br] cap. 10): Como $e^{\mathbf{B}(\lambda)s}$ es una matriz fundamental para el sistema homogéneo $\mathcal{A}x = 0$, $W(s) = e^{\mathbf{B}(\lambda)s}W_0$ (W_0 vector constante) es una combinación lineal de soluciones fundamentales y por lo tanto es solución. Ahora, podemos reescribir a $W(s)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} W(s) &= e^{(\mathbf{B}(\lambda) - \gamma\mathbf{I})s + \gamma s\mathbf{I}}W_0 \\ &= e^{\gamma s}e^{(\mathbf{B}(\lambda) - \gamma\mathbf{I})s}W_0 \\ &= e^{\gamma s}[\mathbf{I} + (\mathbf{B}(\lambda) - \gamma\mathbf{I})s + \frac{1}{2!}(\mathbf{B}(\lambda) - \gamma\mathbf{I})^2s^2 + \dots]W_0 \end{aligned}$$

En general, si $\gamma = \gamma_* \neq 0$ es una raíz de multiplicidad igual a dos, se escogerá W_0 de tal manera que $(\mathbf{B}(\lambda) - \gamma_*\mathbf{I})W_0 \neq 0$, pero tal que $(\mathbf{B}(\lambda) - \gamma_*\mathbf{I})^2W_0 = 0$ (para multiplicidades mayores el proceso es análogo, cuidando de encontrar todos los generadores del espacio de vectores W_0 que satisfacen dicha propiedad).

$$\text{Para este caso en el que } \gamma_* = 0, \text{ se tiene que } \mathbf{B}^2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & q(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac & cb \\ 0 & 0 & da & db \end{bmatrix}$$

Escogiendo $W_0^t = (0, 0, -\frac{b}{a}, 1)$ se tiene que $\mathbf{B}^2(\lambda)W_0 = 0$, así que la otra solución que

corresponde a este valor propio está dada por:

$$\begin{aligned} X_2^t(s) &= [\mathbf{I} + \mathbf{B}(\lambda)s]W_0 \\ &= (s, 0, -\frac{b}{a}, 1) . \end{aligned}$$

Para $\gamma_2 = -i\sqrt{q}$, el vector propio correspondiente es solución de la ecuación vectorial:

$$(\mathbf{B}(\lambda) + i\sqrt{q}\mathbf{I})x = \begin{bmatrix} i\sqrt{q} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i\sqrt{q} & a & b \\ 0 & c & \sqrt{q} & 0 \\ 0 & d & 0 & i\sqrt{q} \end{bmatrix} x = 0 .$$

Es fácil ver que de las cuatro ecuaciones arriba, la segunda multiplicada por $-i\sqrt{q}$ resulta ser la tercera multiplicada por a mas la cuarta multiplicada por b . Descartando entonces alguna de las tres últimas ecuaciones, resulta que

$W_0^t = (1, -\frac{a}{d}, -i\frac{c}{d}\sqrt{q}, -i\sqrt{q})$ es un vector que genera la solución compleja:

$$\begin{aligned} X(s) &= e^{-i\sqrt{q}s} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a}{d} \\ -i\frac{c}{d}\sqrt{q} \\ -i\sqrt{q} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \sqrt{q}s \\ -\frac{a}{d} \cos \sqrt{q}s \\ -\frac{c}{d}\sqrt{q} \sin \sqrt{q}s \\ -\sqrt{q} \sin \sqrt{q}s \end{bmatrix}}_{X_3(s)} - i \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \sqrt{q}s \\ \frac{a}{d} \sin \sqrt{q}s \\ \sqrt{q} \cos \sqrt{q}s \\ -\sqrt{q} \cos \sqrt{q}s \end{bmatrix}}_{X_4(s)} ; \end{aligned}$$

X_3 y X_4 son dos soluciones reales linealmente independientes y con ellas se completa la búsqueda de las soluciones al problema homogéneo (porque $\mathbf{B}(\lambda)$ es una matriz real y el mismo resultado se obtendría para el valor propio conjugado).

Por lo tanto:

$$\Gamma(s) \equiv \begin{bmatrix} 1 & s & \cos \sqrt{q}s & \sin \sqrt{q}s \\ 0 & 0 & -\frac{a}{d} \cos \sqrt{q}s & -\frac{a}{d} \sin \sqrt{q}s \\ 0 & -\frac{b}{a} & -\frac{c}{d}\sqrt{q} \sin \sqrt{q}s & \frac{c}{d}\sqrt{q} \cos \sqrt{q}s \\ 0 & 1 & -\sqrt{q} \sin \sqrt{q}s & \sqrt{q} \cos \sqrt{q}s \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz fundamental.}$$

Usando que $ac + bd = -q$ es fácil ver que $|\Gamma(s)| = \frac{q^2\sqrt{q}}{a^2d^2} \neq 0$.

La conexión entre $\Gamma(s)$ y $e^{\mathbf{B}(\lambda)s}$ está dada por:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{B}(\lambda)s} &= \Gamma(s)\Gamma^{-1}(0) \\ &= \Gamma(s) \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{da}{q} & -\frac{ac}{q} \\ 0 & -\frac{d}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{da}{q\sqrt{q}} & -\frac{db}{q\sqrt{q}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{q}(1 - \cos\sqrt{q}s) & \frac{da}{q}(s - \frac{\sin\sqrt{q}s}{\sqrt{q}}) & -\frac{1}{q}(acs + \frac{db}{\sqrt{q}}\sin\sqrt{q}s) \\ 0 & \cos\sqrt{q}s & \frac{a}{\sqrt{q}}\sin\sqrt{q}s & \frac{b}{\sqrt{q}}\sin\sqrt{q}s \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{q}}\sin\sqrt{q}s & 1 + \frac{ac}{q}(1 - \cos\sqrt{q}s) & \frac{sb}{q}(1 - \cos\sqrt{q}s) \\ 0 & \frac{d}{q}\sin\sqrt{q}s & \frac{da}{q}(1 - \cos\sqrt{q}s) & 1 + \frac{db}{q}(1 - \cos\sqrt{q}s) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.14 Soluciones con la simetría del diedro D_n , o $\frac{2\pi}{n}$ -periódicas

Como se acaba de ver, la existencia de soluciones para el problema reducido $f(x, \lambda) = 0$, desprendiéndose a partir de la solución trivial $(0, \lambda)$ es factible, dado que $N(\mathcal{A})$ (o bien, dado que $N(D_x(0, \lambda))$) es no trivial; de hecho es de dimensión igual a cuatro. Sin embargo, en la práctica un núcleo de dimensión tan alta resulta complicar el estudio de bifurcación ($\dim N(\mathcal{A}) > 2$ ya es suficiente). En estos casos se busca reducir tal dimensión, y la manera de hacerlo es restringiendo la búsqueda de soluciones, a un espacio que tenga alguna propiedad en particular.

Por ejemplo, supongamos por un momento que $q(\lambda_n) = n^2$, $n \in N$; entonces la cuarta columna en $\Gamma(s)$ es:

$$U_n^t(s) \equiv (\sin(ns), -\frac{n^2}{d_o}\sin(ns), \frac{c_o n}{d_o}\cos(ns), n \cos(ns)) \quad ,$$

(a_o, b_o, c_o, d_o tales que $a_o c_o - b_o d_o = -q(\lambda_n) = -n^2$). Si ahora se recuerda la forma en la que actúan las representaciones T_g de $O(2)$ definidas en la sección 4.8, sobre $y \in (C_{\frac{1}{2\pi}}^1)^6$ (de hecho solo necesitamos las cuatro últimas componentes); y se toma $g = \frac{2\pi j}{n}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), se tiene que:

$$T_g U_n(s) = \begin{cases} U_n^t(s + \frac{2\pi j}{n}) &= (\sin(ns + 2\pi j), -\frac{n^2}{d_o}\sin(ns + 2\pi j), \frac{c_o n}{d_o}\cos(ns + 2\pi j), \\ & n \cos(ns + 2\pi j)) \\ &= U_n^t(s) \\ E U_n^t(\frac{2\pi j}{n} - s) &= (-\sin(-ns + 2\pi j), \frac{n^2}{d_o}\sin(-ns + 2\pi j), \\ & \frac{c_o n}{d_o}\cos(-ns + 2\pi j), n \cos(-ns + 2\pi j)) \\ &= U_n^t(s) \end{cases}$$

Es decir, U_n resulta ser invariante bajo T_g cuando $g = \frac{2\pi i}{n}$. Es claro que U_n es la única de las columnas de Γ que goza de dicha propiedad.

El conjunto de representaciones T_g para las cuales g es de la forma anterior constituye el llamado grupo de simetrías del diedro y se denota por D_n . Este grupo es obviamente un subgrupo de $O(2)$.

Motivados por esta observación, buscaremos soluciones al problema completo $f(x, \lambda) = 0$ que posean esta simetría tan particular, ya que sobre dicho conjunto $\dim(D_x f(0, \lambda)) = 1$; esto es siempre que λ_n sea tal que $q(\lambda_n) = n^2$, cuya discusión se dejará para la sección siguiente.

Dada la linealidad de T_g , el conjunto de soluciones con simetría D_n , (si en verdad lo hay), es un subespacio lineal de $(C_{2\pi}^1)^4$.

De manera similar a como se definió la proyección P sobre el espacio de puntos fijos de T_g para $g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ (sec. 4.9), se definirá ahora la proyección P_n sobre el espacio de puntos fijos de T_g , para $g = \frac{2\pi i}{n}$:

$$\begin{aligned} P_n x &\equiv \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} [x(s + \frac{2\pi j}{n}) + Ex(\frac{2\pi j}{n} - s)] \\ &\equiv u(s) \quad ; \end{aligned}$$

para $u^t(s) = (u_1(s), \dots, u_4(s))$; $x \in (C_{2\pi}^1)^4$.

Antes de probar que efectivamente P_n es una proyección sobre el espacio deseado, hacemos las siguientes

Observaciones:

(a) Si $x^t = (x_1, \dots, x_4)$, entonces:

$$u_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} [x_i(s + \frac{2\pi j}{n}) + x_i(\frac{2\pi j}{n} - s)] & i = 3, 4 \\ \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} [x_i(s + \frac{2\pi j}{n}) - x_i(\frac{2\pi j}{n} - s)] & i = 1, 2 \end{cases} \quad ;$$

así que $u_i(s) = u_i(-s)$ para $i = 3, 4$; $-u_i(s) = u_i(-s)$ para $i = 1, 2$.

(b) Dada la 2π -periodicidad de las x_i 's; $u_i(s + \frac{2\pi}{n}) = u_i(s)$ para $i = 1, \dots, 4$.

Ahora, $u \equiv P_n x$, entonces $u(s + \frac{2\pi}{n}) = u(s)$ (por la observación (b)).

Luego, $Eu(\frac{2\pi}{n} - s) = (-u_1(-s), -u_2(-s), u_3(-s), u_4(-s)) = u(s)$ (por la observación (a)).

Por lo tanto, u así definida es un punto fijo de las representaciones inducidas por el grupo de simetrías de D_n .

Por último, $P_n = P_n^2$;
si $u = P_n x$, entonces

$$\begin{aligned} P_n u &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} [u(s + \frac{2\pi j}{n}) + Eu(\frac{2\pi j}{n} - s)] \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} 2u(s) \\ &= u(s) \end{aligned}$$

Entonces P_n es efectivamente una proyección sobre el subespacio de $(C_{2\pi}^1)^4$ de puntos fijos de D_n y al cual se llamará $(B_{\frac{1}{2n}}^1)^4$. Como se hizo notar antes, las funciones

$u^t = (u_1, \dots, u_4) \in (B_{\frac{1}{2n}}^1)^4$ satisfacen: u_1, u_2 impares; u_3, u_4 pares.

Ahora bien:

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) &= \begin{bmatrix} u'_1 - u_4 \\ \hat{H}'(u_2, \psi + u_3, u_4) - (1 + u_4)\hat{N}(u_2, \psi + u_3, u_4) - \lambda(\psi + u_3) \\ \hat{N}'(u_2, \psi + u_3, u_4) + (1 + u_4)\hat{H}(u_2, \psi + u_3, u_4) - \lambda u_2 \\ \hat{M}'(u_2, \psi + u_3, u_4) + u_2\hat{N}(u_2, \psi + u_3, u_4) - (\psi + u_3)\hat{H}(u_2, \psi + u_3, u_4) \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} (s) \end{aligned}$$

Entonces, en tal espacio se tiene que $\eta = u_2$ es impar, $\nu = \psi + u_3$ y $\mu = u_4$ son pares.

Para el conjunto completo de variables del sistema de ecuaciones del anillo, recuérdese que se definió $y = (r_1, r_2, \phi, \eta, \nu, \mu)$ (sección 4.7). Ya se vió en la sección 4.8 la forma en la que actúa la representación T_y sobre y . La proyección sobre el espacio de puntos fijos es la misma que la que se dió antes de las observaciones, substituyendo x por $\bar{x} \equiv (\bar{r}_1, \bar{r}_2, x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ¹. Entonces, definiendo $\bar{u} \equiv P\bar{x} = (\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, u_3, u_4)^t$, se demuestra al igual que como se hizo para las u_i 's, que ρ_1 es par, mientras que ρ_2 es impar, de

¹Aquí la barra superior no indica el promedio de dicha cantidad

donde $r_1 = \psi + \rho_1$ es par y $r_2 = \rho_2$ es impar; (como $\phi = u_1$, entonces ϕ es impar).

En este caso se habla del espacio $(B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^6$ cuyos elementos \bar{u} son tales que sus componentes tienen las propiedades de paridad arriba mencionadas y periodo $\frac{2\pi}{n}$. Restringiendo entonces la búsqueda de soluciones al problema completo sobre este espacio, la linealización del conjunto de ecuaciones tiene la siguiente expresión:

$$\bar{u} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\psi(\lambda) \\ & & \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{B}(\lambda) & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} ,$$

Lo cual escribimos como: $\bar{A}u - \bar{G} = 0$. Para $\lambda = \lambda_{kn}$ tal que $q(\lambda) = (kn)^2$, $\dim \mathcal{N}(\bar{A}) = 1$ sobre $(B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^6$, y es fácil ver que el generador en este caso es:

$$U_{kn}^- = (\xi_1 \cos(kns), \xi_2 \sin(kns), \sin(kns), -\frac{(kn)^2}{d_o} \sin(kns), \frac{c_o kn}{d_o} \cos(kns), -kn \cos(kns))^t ,$$

$$\text{donde } \xi_1 = \frac{\psi + \frac{kn}{d_o}(c_o - d_o)}{1 - (kn)^2} \text{ y } \xi_2 = \left[-\frac{kn}{1 - (kn)^2}(\psi + \frac{kn}{d}(c_o - d_o)) + \frac{(kn)^2}{d_o} \right] .$$

Con esas propiedades se demuestra la siguiente

Afirmación: H es impar, N y M son pares; (de donde H' es par, N' y M' son impares).

Prueba: Usando la misma notación de las secciones precedentes, sea $\mathbf{JA}(s) \equiv (a_1(s), a_2(s))^t$; dado que $\Omega(-s) \stackrel{\mu \text{ PAR}}{=} \Omega^t(s)$, un cálculo directo muestra que a_1 es impar, mientras que a_2 es par:

$$\begin{aligned} \mathbf{JA}(-s) &= \mathbf{J} \int_0^{-s} \Omega^t(t) \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} (t) dt \\ &= -\mathbf{J} \int_0^s \Omega(t) \begin{bmatrix} -\eta \\ \nu \end{bmatrix} (t) dt \\ &= -\int_0^s \Omega(t) \begin{bmatrix} \nu \\ \eta \end{bmatrix} (t) dt \\ &= -\int_0^s \begin{bmatrix} \nu \cos(t + f_0^t \mu) + \eta \sin(t + f_0^t \mu) \\ -\nu \sin(t + f_0^t \mu) + \eta \cos(t + f_0^t \mu) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^s \begin{bmatrix} -\nu \cos(t + f_0^t \mu) - \eta \sin(t + f_0^t \mu) \\ \nu \sin(t + f_0^t \mu) - \eta \cos(t + f_0^t \mu) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathbf{JA}(s) &= \int_0^s \Omega^t(t) \begin{bmatrix} \nu \\ -\eta \end{bmatrix} (t) dt \\ &= \int_0^s \begin{bmatrix} \nu \cos(t + \int_0^t \mu) + \eta \sin(t + \int_0^t \mu) \\ \nu \sin(t + \int_0^t \mu) - \eta \cos(t + \int_0^t \mu) \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Lo cual prueba lo dicho anteriormente.

Ahora bien, si tomamos $H_o = 0$, los resultados de arriba llevan a probar finalmente lo que se quiere mostrar; es decir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} (-s) &= \Omega^t(s) \begin{bmatrix} 0 \\ N_o \end{bmatrix} + \lambda \Omega^t(s) \begin{bmatrix} -a_1(s) \\ a_2(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -N_o \sin(s + \int_0^s \mu) + \lambda[-a_1(s) \cos(s + \int_0^s \mu) - a_2(s) \sin(s + \int_0^s \mu)] \\ N_o \cos(s + \int_0^s \mu) + \lambda[-a_1(s) \sin(s + \int_0^s \mu) + a_2(s) \cos(s + \int_0^s \mu)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} (s) &= \Omega(s) \begin{bmatrix} 0 \\ N_o \end{bmatrix} + \lambda \Omega(s) \begin{bmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_o \sin(s + \int_0^s \mu) + \lambda[a_1(s) \cos(s + \int_0^s \mu) + a_2(s) \sin(s + \int_0^s \mu)] \\ N_o \cos(s + \int_0^s \mu) + \lambda[-a_1(s) \sin(s + \int_0^s \mu) + a_2(s) \cos(s + \int_0^s \mu)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} M(-s) &= M_o + (-a_1(s), a_2(s)) \begin{bmatrix} 0 \\ N_o \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2}(a_1^2(s) + a_2^2(s)) \\ &= M(s), \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la afirmación del principio.

—□

De manera que los resultados que se obtienen a partir del sistema integral sobre la paridad de las funciones H, N y M , coinciden con los que se obtienen si directamente se emplean las condiciones de paridad vistas en 3.9.

Por último, si η es impar y ν, μ son pares como se asumió arriba, dado que $\mathbf{A}^t(2\pi) = (\int_0^{2\pi} (\eta \cos(t + \int_0^t \mu) - \nu \sin(t + \int_0^t \mu)), \int_0^{2\pi} (\eta \sin(t + \int_0^t \mu) + \nu \cos(t + \int_0^t \mu)))$, la condición $\mathbf{A}(2\pi) = 0$ se reduce a: $\int_0^{2\pi} (\eta \sin(t + \int_0^t \mu) + \nu \cos(t + \int_0^t \mu)) = 0$ (la otra entrada

es igual a cero). Con esto se cierra el pendiente que se había dejado en la subsección 11.7, sobre dicha condición.

Con los resultados de arriba, se puede verificar de la misma manera que f_1, f_2 son pares, mientras que f_3, f_4 son impares.

Por lo tanto, si se llama al conjunto

$$\Theta \equiv \{u \in (B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4 : u_3 > -\psi(\lambda) \forall s \in R_{2\pi}\} \times R^+ ,$$

el problema reducido (no linearizado) $f(u, \lambda) = 0$ es tal que

$$f : \Theta \longrightarrow (E_{\frac{2}{\pi}}^2)^4 ,$$

donde $(E_{\frac{2}{\pi}}^2)^4 \equiv \{u \in (C_{\frac{2}{\pi}}^2)^4 : u_1, u_2 \text{ son pares; } u_3, u_4 \text{ son impares}\} .$

4.15 Crecimiento de $q(\lambda)$

En la sección anterior se vió la posibilidad de obtener ramas de soluciones (u, λ) en Θ , a partir de la solución trivial $(0, \lambda)$, en el punto $(0, \lambda_*)$, toda vez que λ_* satisfaga la ecuación $q(\lambda_*) = n^2$.

Ya se sabe que $q(\lambda) = [1 + \frac{\lambda}{H_g^2}][1 + \frac{\lambda}{N_g^2} + \frac{\lambda\psi^2}{M_g^2}]$, es tal que $q(\lambda) > 0$, $q(0) = 1$ y que de hecho $q(\lambda) > 1$ ($\lambda > 0$). Así que dependiendo del comportamiento de q , existirán o no valores de λ para los cuales $q(\lambda) = n^2$ tenga solución (n dado). Por ejemplo, si $q(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} q_\infty < \infty$, el conjunto de valores característicos estaría confinado dentro de un cierto intervalo finito. (ver figura 7)

Si la configuración de referencia no fuera un anillo sino, por ejemplo, un arco de circunferencia de radio unitario y longitud 2α , confinado a deformarse entre dos paredes que forman un ángulo igual a 2α ($0 < \alpha < \pi$); en lugar de hablar de condiciones de periodicidad, el problema está sujeto a *condiciones de frontera* (los extremos sujetos a bloques que se deslizan sobre las paredes, con tres formas posibles de sujetarlos: a) ambos extremos están clavados, b) un extremo está clavado y el otro soldado, c) ambos extremos están soldados).

Si tales condiciones son las mismas en ambos extremos, se tendría que $q(\lambda) = (\frac{n\pi}{\alpha})^2$ es la condición que debe satisfacer q para tener soluciones periódicas, (ver [A&D]).

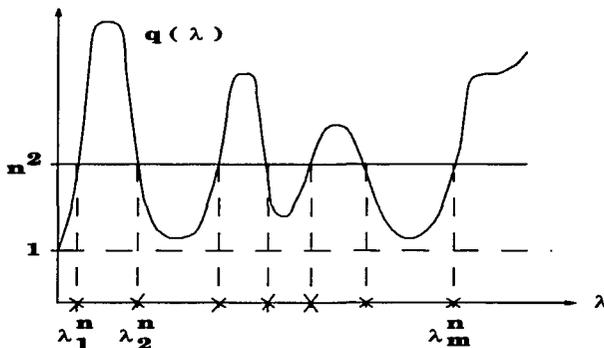


Figura 4.7: $\{\lambda_j^n\}$ es el conjunto de valores de la intensidad de la fuerza de presión para los cuales $q(\lambda) = n^2$, y por lo tanto es posible tener soluciones no triviales $u \in (B_{\frac{1}{2n}}^1)^4$, que partan del punto $(0, \lambda_j^n)$. A estos puntos se les llama puntos de bifurcación.

Por lo tanto, investigar el crecimiento de $q(\lambda)$ ($\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = ?$), es importante para todo el estudio posterior.

Con esta finalidad, se hará uso de las propiedades de ψ : $\psi(\lambda)$ es positiva, decreciente (i.e. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi(\lambda) = 0$), $\psi(0) = 1$; además de la hipótesis de crecimiento $\hat{N}(\eta, \cdot, \mu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0^+} -\infty$.

Con base en lo anterior, vamos a suponer que para $\nu = \psi(\lambda) \sim 0^+$, $\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) \sim \frac{1}{\psi^{\beta}(\lambda)}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Así que $\hat{N}_\nu^0 \sim \frac{1}{\psi^{\beta}(\lambda)}$ para $\lambda \rightarrow +\infty$. Por otra parte, como se vió en la sección 4.9, $\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0) + \lambda \psi(\lambda) = 0$; es decir; $\lambda = -\frac{\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0)}{\psi(\lambda)}$, de donde $\lambda \sim \frac{1}{\psi^{\beta+1}}$, para $\psi \sim 0^+$. Juntando estos resultados se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{\hat{N}_\nu^0} &= \frac{\psi^{\beta+1}}{\beta \psi^{\beta+1}} \\ &= \frac{1}{\beta} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el crecimiento de $q(\lambda)$ está dictado por los términos $\frac{\lambda}{H_\eta^2}$ y $\frac{\lambda \psi^2}{M_\rho^2}$. De hecho, el último término puede escribirse como $-\frac{\hat{N}(0, \psi(\lambda), 0)}{M_\rho^2} \psi \sim \frac{1}{\psi^{\beta-1} M_\rho^2}$ ($\psi \sim 0^+$). Así que se

puede decir que la distribución de los valores característicos está dictada básicamente por \hat{H}_η° y \hat{M}_μ° .

En [A&R] se estudia este caso para un cuerpo elástico bidimensional; es decir; cuando $\hat{p}(X) = \mathbf{r}(s) + \varphi(X)\mathbf{a}(s)$ (ver sección 2.3). En tal situación, reescribiendo la fuerza de contacto $\mathbf{n}(s)$ y la torca de contacto $\mathbf{m}(s)$, se demuestra que $\hat{M}_\mu^\circ = \frac{\mathbf{h}^2(s)}{3}\hat{N}_\nu^\circ$, en donde $\mathbf{h}(s)$ es una función positiva que mide el radio de la sección transversal \mathcal{B}_s (en el caso bidimensional, una línea). De manera que, volviendo a emplear la estimación para \hat{N}_ν° ($\lambda \rightarrow +\infty$) de arriba, se tendrá que en el caso bidimensional, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \psi^\circ}{\hat{M}_\mu^\circ} = 0$; entonces el comportamiento de $q(\lambda)$ para $\lambda \rightarrow +\infty$ estaría determinado principalmente por \hat{H}_η° .

En conclusión, de la discusión anterior resulta que no se ha dado la información suficiente para determinar el comportamiento de $q(\lambda)$; por lo tanto se asumirá de ahora en adelante la siguiente

Hipótesis: $q(\lambda)$ es una función estrictamente creciente, con $q(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty$.

En otra notación, la hipótesis dice que: $q'(\lambda) > 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. Fíjese que $q'(\lambda)$ involucra las segundas derivadas de las funciones constitutivas $\hat{H}, \hat{N}, \hat{M}$, sobre las cuales no se tiene información alguna.

Si $q(\lambda)$ es una función estrictamente creciente, se tiene que para cada $n = 1, 2, \dots$ siempre existe una única λ_n tal que $q(\lambda_n) = n^2$.

Para terminar, hacemos la observación de que, en el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico ($n > 1$), la hipótesis sobre q implica que habrá más de un valor de λ para el cual $N(\mathcal{A})$ no solamente tenga dimensión igual a uno, sino la periodicidad requerida; por ejemplo, esto sucederá cada vez que $q = (nk)^2$, $k \in \mathbb{N}$, (hasta ahora siempre se había puesto $k = 1$). Esto da lugar a la posibilidad de que el anillo adopte configuraciones con la periodicidad $\frac{2\pi}{n}$, en repetidas ocasiones, conforme la intensidad λ de la fuerza aumenta. (ver fig 8)

Para concluir con esta sección, se da un ejemplo de funciones constitutivas que satisfacen las condiciones de paridad y crecimiento 3.8 y 3.9, junto con las condiciones generales 4.6; además $q(\lambda)$ resulta ser estrictamente creciente.

Sean $H = \eta$, $N = \log \nu$, $M = \mu$, entonces
 $q(\lambda) \equiv (1 + \frac{\lambda}{\hat{H}_\eta^\circ})(1 + \frac{\lambda}{\hat{N}_\nu^\circ} + \frac{\lambda \psi^\circ}{\hat{M}_\mu^\circ}) = (1 + \lambda)(1 + \lambda \psi + \lambda \psi^2)$.

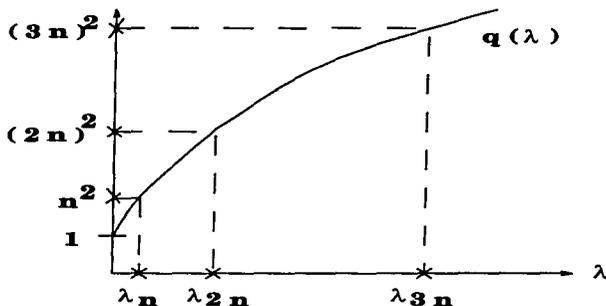


Figura 4.8: La bifurcación de soluciones con periodo $\frac{2\pi}{n}$ a partir de la solución trivial $(0, \lambda)$, es factible en más de una ocasión, cada vez que λ sea tal que $q(\lambda) = (kn)^2$.

Es claro que $q(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \infty$. Ahora, si se desarrolla $q(\lambda)$:

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= 1 + \lambda\psi + \lambda\psi^2 + \lambda + \lambda^2\psi + (\lambda\psi)^2 \\ &= 1 + (\lambda\psi) + \lambda(1 + \psi^2) + \lambda(\lambda\psi) + (\lambda\psi)^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$q'(\lambda) = (\lambda\psi)' + [\lambda(1 + \psi^2)]' + \lambda\psi + \lambda(\lambda\psi)' + 2\lambda\psi(\lambda\psi)' .$$

Otra vez, de la sección 4.9 se obtuvo que $\psi' = -\frac{\psi}{N\psi + \lambda}$ y $\lambda\psi + \tilde{N}(0, \psi, 0) = 0$. Substituyendo por las funciones constitutivas de este ejemplo, las expresiones anteriores quedan: $\psi' = -\frac{\psi^2}{1 + \lambda\psi}$ y $\lambda\psi + \log \psi = 0$, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} (\lambda\psi)' &= -\frac{\psi'}{\psi} \\ &= \frac{\psi}{1 + \lambda\psi} > 0 ; \\ (\lambda(1 + \psi^2))' &= 1 + \psi^2 + 2\lambda\psi\psi' \\ &= 1 + \psi^2 - \frac{2\lambda\psi^3}{1 + \lambda\psi} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda\psi} [1 + \lambda\psi + \psi^2 + \lambda\psi^3 - 2\lambda\psi^3] \\ &= \frac{1}{1 + \lambda\psi} [1 + \psi^2 + \lambda\psi(1 - \psi^2)] > 0 , \text{ ya que } \psi \leq 1 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los términos en $q'(\lambda)$ son positivos, es decir, q es creciente.

4.16 Caracterización de $R(\mathcal{A})$

Como ya se ha visto (sec. 4.12 y siguientes), el problema reducido $f(u, \lambda) = 0$, sobre el espacio $(B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4$, es equivalente a encontrar u que satisfaga la ecuación:

$$u' - \mathbf{B}(\lambda)u - \mathbf{G}(u, \lambda) = 0,$$

y la cual se escribía de la forma: $\mathcal{A}u - \mathbf{G} = 0$, es decir, $\mathbf{G} \in R(\mathcal{A})$, en esta sección se estudiará a este espacio.

De hecho, u satisface la relación:

$$u(s) = e^{\mathbf{B}(\lambda)s}u(0) + e^{\mathbf{B}(\lambda)s} \int_0^s e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} \mathbf{G}(u(t), \lambda) dt.$$

Desarrollando con cuidado la expresión anterior, es fácil ver que u cumple con las propiedades de periodicidad que deben de tener los elementos de $(B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4$ ($u^t = (u_1, u_2, u_3, u_4)$; u_1, u_2 impares; u_3, u_4 pares).

Como se desea encontrar $u \in (B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4$, tómesese $u^t(0) = (0, 0, \alpha, \beta)$.

Ahora, \mathbf{G} está definida a partir de g (sec. 4.12), y por lo tanto tiene las propiedades de paridad de los elementos en $(E_{\frac{0}{2\pi}}^0)^4$ vistas en la sección 4.14: $\mathbf{G}^t = (g_1, g_2, g_3, g_4)$, g_1, g_2 pares, g_3, g_4 impares. Así pues, de la expresión para $e^{-\mathbf{B}(\lambda)s}$ dada en 4.13 se vé rápidamente que:

$$e^{-\mathbf{B}(\lambda)s} \mathbf{G}(u(s), \lambda) = \begin{bmatrix} g_1 + \frac{d}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))g_2 - \frac{da}{q}(s - \frac{\sin(\sqrt{q}s)}{\sqrt{q}})g_3 + \frac{1}{q}(acs + \frac{db}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s))g_4 \\ \cos(\sqrt{q}s)g_2 - \frac{a}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)g_3 - \frac{b}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)g_4 \\ -\frac{c}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)g_2 + [1 + \frac{aa}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))]g_3 + \frac{cb}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))g_4 \\ -\frac{d}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)g_2 + \frac{da}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))g_3 + [1 + \frac{db}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))]g_4 \end{bmatrix} \\ = (\text{par}, \text{par}, \text{impar}, \text{impar})^t.$$

Por lo tanto $\int_0^s e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} \mathbf{G}(u(t), \lambda) dt = (\text{impar}, \text{impar}, \text{par}, \text{par})^t$, de donde es inmediato que:

$$e^{\mathbf{B}(\lambda)s} \int_0^s e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} \mathbf{G}(u(t), \lambda) dt = (\text{impar}, \text{impar}, \text{par}, \text{par})^t.$$

Por otro lado:

$$e^{\mathbf{B}(\lambda)s} u(0) = \begin{bmatrix} \frac{da}{q}(s - \frac{\sin(\sqrt{q}s)}{\sqrt{q}})\alpha - \frac{1}{q}(acs + \frac{db}{q} \sin(\sqrt{q}s))\beta \\ \frac{a}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)\alpha + \frac{b}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s)\beta \\ (1 + \frac{aa}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s)))\alpha + \frac{cb}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))\beta \\ \frac{da}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))\alpha + [1 + \frac{db}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))]\beta \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{impar} \\ \text{impar} \\ \text{par} \\ \text{par} \end{bmatrix}$$

Con esto queda confirmada la consistencia de la expresión implícita para u dada por el método de variación de parámetros, con las propiedades de paridad del espacio dominio $(B_{\frac{1}{2}\pi}^1)^4$.

$u(s)$ debe satisfacer además, las condiciones de periodicidad buscadas: 2π -periódica (pues así lo demanda la geometría del problema) y $\frac{2\pi}{n}$ -periodicidad, si la solución ha de estar en $(B_{\frac{1}{2}\pi}^1)^4$. Si por T se entiende el periodo de u ($T = 2\pi$ o $T = \frac{2\pi}{n}$), la condición de periodicidad requerida se traduce en:

$$(\mathbf{I} - e^{\mathbf{B}(\lambda)T})u(0) = e^{\mathbf{B}(\lambda)T} \int_0^T e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} G(u(t), \lambda) dt .$$

Desarrollando explícitamente al primer término:

$$(\mathbf{I} - e^{\mathbf{B}(\lambda)T})u(0) = \begin{bmatrix} -\frac{T\alpha}{q}(d\alpha - c\beta) + \frac{d}{q\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) \\ -\frac{1}{\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) \\ -\frac{c}{q}(a\alpha + b\beta)(1 - \cos(\sqrt{q}T)) \\ -\frac{d}{q}(a\alpha + b\beta)(1 - \cos(\sqrt{q}T)) \end{bmatrix} .$$

Si ahora se ve a G como un elemento en $R(\mathcal{A})$ y se le describe en su serie de Fourier:

$$G(u(s), \lambda) = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} g_{1,m}(\lambda) \cos(\frac{2\pi}{T}ms) \\ \sum_{m=0}^{\infty} g_{2,m}(\lambda) \cos(\frac{2\pi}{T}ms) \\ \sum_{m=0}^{\infty} g_{3,m}(\lambda) \sin(\frac{2\pi}{T}ms) \\ \sum_{m=0}^{\infty} g_{4,m}(\lambda) \sin(\frac{2\pi}{T}ms) \end{bmatrix} ,$$

se tiene entonces que:

$$\int_0^T e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} G(u(t), \lambda) dt = \begin{bmatrix} Tg_{1,0} + T\frac{d}{q}g_{2,0}(\lambda) - \frac{da}{q} \int_0^T s g_3 + \int_0^T \frac{aca}{q} g_4 + \\ - \frac{d}{q} [\int_0^T (g_2 \cos(\sqrt{q}s) - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \sin(\sqrt{q}s) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \sin(\sqrt{q}s))] \\ \int_0^T [g_2 \cos(\sqrt{q}s) - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \sin(\sqrt{q}s) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \sin(\sqrt{q}s)] \\ \int_0^T [-\frac{c}{\sqrt{q}} g_2 \sin(\sqrt{q}s) + (1 + \frac{ac}{q})(1 - \cos(\sqrt{q}s))] g_3 + \\ \frac{cb}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s)) g_4 \\ \int_0^T [-\frac{d}{\sqrt{q}} g_2 \sin(\sqrt{q}s) + \frac{da}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))] g_3 + \\ (1 + \frac{db}{q}(1 - \cos(\sqrt{q}s))) g_4 \end{bmatrix} .$$

Si ahora se usa que $\int_0^T g_3 = \int_0^T g_4 = 0$, la expresión anterior se reduce a:

$$\int_0^T e^{-\mathbf{B}(\lambda)t} G(u(t), \lambda) = \begin{bmatrix} Tg_{1,0} + \frac{dT}{q}g_{2,0} - \frac{da}{q} \int_0^T g_3 s + \frac{ac}{q} \int_0^T g_4 s - \frac{d}{q} (\int_0^T (g_2 \cos(\sqrt{q}s) + \\ - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \sin(\sqrt{q}s) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \sin(\sqrt{q}s))) \\ \int_0^T (g_2 \cos(\sqrt{q}s) - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \sin(\sqrt{q}s) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \sin(\sqrt{q}s)) \\ c \int_0^T (-\frac{2c}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s) - \frac{a}{q} g_3 \cos(\sqrt{q}s) - \frac{b}{q} g_4 \cos(\sqrt{q}s)) \\ d \int_0^T (-\frac{2d}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}s) - \frac{a}{q} g_3 \cos(\sqrt{q}s) - \frac{b}{q} g_4 \cos(\sqrt{q}s)) \end{bmatrix}$$

$$\equiv (z_0(T) - \frac{d}{q}z_1(T), z_1(T), cz_2(T), dz_2(T))^t .$$

Entonces:

$$e^{\mathbf{B}(\lambda)T} \int_0^T e^{-\mathbf{B}(\lambda)s} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} z_0(T) - \frac{d}{q}z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{d}{q\sqrt{q}}(ca + db) \sin(\sqrt{q}T)z_2(T) \\ z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) + \frac{1}{\sqrt{q}}(ac + db)z_2(T) \sin(\sqrt{q}T) \\ \frac{c}{\sqrt{q}}z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + (c + \frac{c}{q}(ac + db)(1 - \cos(\sqrt{q}T)))z_2(T) \\ \frac{d}{\sqrt{q}}z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + (1 + \frac{1}{q}(ac + db)(1 - \cos(\sqrt{q}T)))dz_2(T) \end{bmatrix}$$

Recordando que se definió $-q(\lambda) = (ac + db)$ (sec. 4.13), la condición de periodicidad se escribe finalmente como:

$$\begin{bmatrix} -\frac{T\alpha}{q}(d\alpha - c\beta) + \frac{d}{q\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) \\ -\frac{1}{\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) \\ -\frac{c}{q}(a\alpha + b\beta)(1 - \cos(\sqrt{q}T)) \\ -\frac{d}{q}(a\alpha + b\beta)(1 - \cos(\sqrt{q}T)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0(T) - \frac{d}{q}z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{d}{q\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}T)z_2(T) \\ z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) - \sqrt{q}z_2(T) \sin(\sqrt{q}T) \\ \frac{c}{\sqrt{q}}z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + cz_2(T) \cos(\sqrt{q}T) \\ \frac{d}{\sqrt{q}}z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + dz_2(T) \cos(\sqrt{q}T) \end{bmatrix}$$

La tercera y cuarta ecuaciones del sistema anterior son múltiplos una de la otra. Ahora, de la segunda ecuación se tiene, multiplicando por $-\frac{d}{q}$:

$$\frac{d}{q\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) = -\frac{d}{q}z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) + \frac{d}{\sqrt{q}}z_2(T) \sin(\sqrt{q}T) ,$$

substituyendo después en la primera, el sistema queda reducido a:

$$\begin{aligned} -\frac{T\alpha}{q}(d\alpha - c\beta) &= z_0(T) && \longrightarrow \text{I} \\ -\frac{1}{\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta) \sin(\sqrt{q}T) &= z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) - \sqrt{q}z_2(T) \sin(\sqrt{q}T) && \longrightarrow \text{II} \\ -\frac{1}{\sqrt{q}}(a\alpha + b\beta)(1 - \cos(\sqrt{q}T)) &= z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + \sqrt{q}z_2(T) \cos(\sqrt{q}T) && \longrightarrow \text{III} \end{aligned}$$

Desarrollando el lado derecho de **II**:

$$\begin{aligned} z_1(T) \cos(\sqrt{q}T) - \sqrt{q}z_2(T) \sin(\sqrt{q}T) &= \\ \int_0^T [g_2 \cos(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{c}{\sqrt{q}}g_3 \sin(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{b}{\sqrt{q}}g_4 \sin(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T) + \\ g_2 \sin(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T) + \frac{c}{\sqrt{q}}g_3 \cos(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T) + \frac{b}{\sqrt{q}}g_4 \cos(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T)] ds \\ = \int_0^T [g_2 \cos(\sqrt{q}(T-s)) + \frac{c}{\sqrt{q}}g_3 \sin(\sqrt{q}(T-s)) + \frac{b}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(T-s))] ds \\ \stackrel{\xi=T-s}{=} \int_0^T [g_2(T-\xi) \cos(\sqrt{q}\xi) + \frac{c}{\sqrt{q}}g_3(T-\xi) \sin(\sqrt{q}\xi) + \frac{b}{\sqrt{q}}g_4(T-\xi) \sin(\sqrt{q}\xi)] d\xi \\ = \int_0^T [g_2(\xi) \cos(\sqrt{q}\xi) - \frac{c}{\sqrt{q}}g_3(\xi) \sin(\sqrt{q}\xi) - \frac{b}{\sqrt{q}}g_4(\xi) \sin(\sqrt{q}\xi)] d\xi \\ = z_1(T) . \end{aligned}$$

Análogamente para el lado derecho de **III**:

$$z_1(T) \sin(\sqrt{q}T) + \sqrt{q}z_2(T) \cos(\sqrt{q}T) =$$

$$\int_0^T [g_2 \cos(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T) - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \sin(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \sin(\sqrt{q}s) \sin(\sqrt{q}T) + \\ -g_2 \sin(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{a}{\sqrt{q}} g_3 \cos(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T) - \frac{b}{\sqrt{q}} g_4 \cos(\sqrt{q}s) \cos(\sqrt{q}T)] \\ \xi = \frac{T-s}{\sqrt{q}} - \sqrt{q} \int_0^T [-\frac{2z_1(\xi)}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}\xi) - \frac{a}{q} g_3(\xi) \cos(\sqrt{q}\xi) - \frac{b}{q} g_4(\xi) \cos(\sqrt{q}\xi)] d\xi \\ = -\sqrt{q} z_2(T)$$

Juntando los dos resultados anteriores, se tiene que el lado derecho de las ecuaciones **II** y **III** es equivalente al sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 + \cos(\sqrt{q}T) & -\sin(\sqrt{q}T) \\ \sin(\sqrt{q}T) & 1 + \cos(\sqrt{q}T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(T) \\ \sqrt{q} z_2(T) \end{bmatrix} = 0 .$$

Obviamente, el determinante del sistema de la matriz anterior es cero, de donde se tiene que **II** y **III** resultan ser equivalentes (multiplíquese **II** por $(1 - \cos(\sqrt{q}T))$), luego, restándole **III** multiplicada por $(\sin(\sqrt{q}T))$ y usando el sistema de 2×2 de arriba el resultado dá cero).

Por consiguiente, la condición de periodicidad se reduce a dos ecuaciones para α y β :

$$\begin{aligned} d\alpha - c\beta &= -\frac{q}{T} z_0(T) \\ \sin(\sqrt{q}T)(a\alpha + b\beta) &= -\sqrt{q} z_1(T) . \end{aligned}$$

Si $q \neq (kn)^2$, α y β están bien determinadas:

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{q z_0(T)}{T} \\ \frac{\sqrt{q} z_1(T)}{\sin(\sqrt{q}T)} \end{bmatrix} .$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ -a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z_0(T)}{T} \\ \frac{z_1(T)}{\sqrt{q} \sin(\sqrt{q}T)} \end{bmatrix} .$$

Además, se sabe que para este caso (sec. 4.13), aunque el generador de $N(\mathcal{A})$, U_n , tiene las propiedades de paridad de los elementos en $(B_{\frac{1}{2n}})^4$, no así para la periodicidad.

En conclusión: sobre el espacio $(B_{\frac{1}{2n}})^1$ y en el caso $q \neq (kn)^2$, $N(\mathcal{A}) = 0$; así que no es posible tener bifurcación a partir de la solución trivial.

Si $q = (kn)^2$, $(a(\lambda_{kn}) \equiv a_0 \dots)$ se puede ver directamente a partir de su definición, o bien del sistema para a_1 y a_2 dado con anterioridad, que $z_2(T) \equiv 0$.

A partir de la definición:

$$z_2(T) = \int_0^T \left[-\frac{1}{kn} g_2(s) \sin(kns) - \frac{a_o}{(kn)^2} g_3(s) \cos(kns) - \frac{b_o}{(kn)^2} g_4(s) \cos(kns) \right] ds .$$

Dados los desarrollos de Fourier para g_2 (cosenos), g_3 (senos), g_4 (senos); la integral anterior se anula.

Viéndolo a partir del sistema para $a_1(T)$ y $a_2(T)$:

$$\begin{bmatrix} (\cos(knT) - 1)z_1(T) - knz_2(T) \sin(knT) \\ \sin(knT)z_1(T) + (1 + \cos(knT))knz_2(T) \end{bmatrix} = 0 ,$$

pero como $T = 2\pi$ o $T = \frac{2\pi}{n}$, $\sin(knT) = 0$, $\cos(knT) = 1$, de donde se sigue el resultado.

Las condiciones de periodicidad se reducen ahora a:

$$\begin{aligned} d\alpha - c\beta &= -\frac{(kn)^2}{T a_o} z_o(T) \\ 0 &= -knz_1(T) \end{aligned} ,$$

y de aquí se tiene la condición: $\underline{z_1(T) = 0}$.

Veamos ahora con más detalle la condición anterior. De la definición de z_1 :

$$z_1(T) = \int_0^T [g_2(s) \cos(kns) - \frac{a_o}{kn} g_3(s) \sin(kns) - \frac{b_o}{kn} g_4(s) \sin(kns)] ds .$$

Usando de nuevo la representación de los g_i 's en su serie de Fourier e integrando, se tiene que la condición anterior se reduce a:

$$g_{2,k} - \frac{a_o}{kn} g_{3,k} - \frac{b_o}{kn} g_{4,k} = 0 .$$

Si se define al vector

$$\mathbf{V}_{kn}(s) \equiv (0, \cos(kns), -\frac{a_o}{kn} \sin(kns), -\frac{b_o}{kn} \sin(kns))^t .$$

la igualdad anterior resulta escribirse como

$$\langle \mathbf{G}(u(s), \lambda_{kn}), \mathbf{V}_{kn}(s) \rangle = 0 ;$$

(λ_{kn} tal que $q(\lambda_{kn}) = (kn)^2$).

Ahora, recuérdese que \mathbf{G} está definida por $\mathcal{A}(\lambda)u = \mathbf{G} \in R(\mathcal{A})$ (ecuación al principio de esta sección); de manera que la condición de periodicidad para el caso $q = (kn)^2$, resulta dar una característica muy importante sobre $R(\mathcal{A})$, a saber:

$$R(\mathcal{A}) \perp_{L_2} \mathbf{V}_{kn}$$

(i.e. el rango del operador \mathcal{A} es perpendicular en L_2 al espacio generado por el vector \mathbf{V}_{kn}). Todo lo anterior sigue siendo válido incluso para $k = n = 1$, es decir, $q = 1$.

4.17 Reducción de Ljapunov-Schmidt

El objeto de esta sección consiste en mostrar que el método de reducción de Ljapunov-Schmidt para el problema $f(x, \lambda) = 0$ está bien justificado en este caso. Aunque la forma en la que se abordará el problema será en términos de las bases de Fourier apropiadas para cada espacio, creemos que esta sección es interesante pues muestra que es válido proceder cómo el lector lo haría en un primer impulso, guiado por una lectura rápida de los métodos adoptados en problemas no lineales que presentan bifurcación (ver [Nir1] cap. VII, [Nir2] cap. II, [Ize] cap. I).

En la sección 4.12 nos avocamos al estudio del problema homogéneo reducido $f(u, \lambda) = 0$, donde $f : \Theta \rightarrow (E_{\frac{1}{2n}}^1)^4$. Linearizando alrededor de la solución trivial, este problema se escribía como:

$$D_u f(0, \lambda)u - g(u, \lambda) = 0,$$

para $g = o(\|u\|)$. O bien, de manera equivalente como:

$$u' - \mathbf{B}(\lambda)u - G(u, \lambda) = 0.$$

Usando la definición del operador \mathcal{A} dada en la sección 4.13, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\mathcal{A}(\lambda_{kn})u - \mathbf{T}(\lambda)u - G(u, \lambda) = 0,$$

donde λ_{kn} satisface $q(\lambda_{kn}) = (kn)^2$, y $\mathbf{T}(\lambda) \equiv \mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda_{kn})$; (recuérdese que $G = o(\|u\|)$).

Resulta obvio que \mathcal{A} y $\mathbf{T}(\lambda)$ son operadores lineales y continuos. De hecho, si se define la norma de una matriz \mathbf{E} con componentes E_{ij} como $\|\mathbf{E}\| \equiv \max_{i,j} |E_{ij}|$ es fácil demostrar que \mathcal{A} y $\mathbf{T}(\lambda)$ no solamente son continuos, sino acotados:

$\mathbf{T}(\lambda)$ continuo : Sean $u_1, u_2 \in (E_{\frac{1}{2n}}^1)^4$, entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(\lambda)u_1 - \mathbf{T}(\lambda)u_2|_o &= \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|(\mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda_{kn}))(u_1 - u_2)\| \\ &\leq \|\mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda_{kn})\| \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \|\mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda_{kn})\| (\max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|u_1 - u_2\| + \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|u_1' - u_2'\|). \end{aligned}$$

El segundo término entre paréntesis del lado derecho es justamente $|u_1 - u_2|_1$. Así que tomando u_1 y u_2 suficientemente cercanas en la norma $| \cdot |_1$ (de hecho solo se necesita que sean cercanas en la norma de la continuidad uniforme) se tiene que la continuidad de $\mathbf{T}(\lambda)$ es evidente, cuya norma resulta estar acotada por $\|\mathbf{B}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda_{kn})\|$.

$\mathcal{A}(\lambda_{kn})$ es continuo :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2|_0 &= \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|u_1' - \mathbf{B}(\lambda_{kn})u_1 - u_2' + \mathbf{B}(\lambda_{kn})u_2\| \\ &= \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|(u_1 - u_2)' - \mathbf{B}(\lambda_{kn})(u_1 - u_2)\| \\ &\leq \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} (\|(u_1 - u_2)'\| + \|\mathbf{B}(\lambda_{kn})\| \|u_1 - u_2\|) \\ &\leq (1 + \|\mathbf{B}(\lambda_{kn})\|) (\max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|(u_1 - u_2)'\| + \max_{[0, \frac{2\pi}{n}]} \|u_1 - u_2\|) \\ &\leq (1 + \|\mathbf{B}(\lambda_{kn})\|) |u_1 - u_2|_1 \quad . \end{aligned}$$

Así que $\mathcal{A}(\lambda_{kn})$ es continuo, con norma acotada por $(1 + \|\mathbf{B}(\lambda_{kn})\|)$.

Obsérvese que por la definición de $\mathbf{T}(\lambda)$ se tiene automáticamente que $\|\mathbf{T}(\lambda)\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_{kn}} 0$. Más aún, de la definición de $\mathbf{B}(\lambda)$ dada en la sección 4.12, se tiene que es suficiente que H, N, M sean C^2 para tener que ψ y por consiguiente \mathbf{T} sean también C^1 como funciones de λ . Con estas mismas hipótesis de diferenciabilidad sobre las funciones constitutivas es fácil ver, a partir de la acotación en la sección 4.12, que $Df(0, \lambda)$ es continua con respecto a λ , y está bien definida para cada u y λ ($f : (B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4 \times R \rightarrow (E_{\frac{2\pi}{n}}^2)^4$). Además, con el mismo procedimiento que se empleó con \mathcal{A} y $\mathbf{T}(\lambda)$, $Df(0, \lambda)$ también está acotada.

Ahora, sobre $(B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4$, $N(\mathcal{A}(\lambda_{kn}))$ tiene dimensión igual a uno y su generador es U_{kn} .

Más aún, $(B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4$ es un espacio de Banach con la norma $|\cdot|_1$ y como $\dim N(\mathcal{A}(\lambda_{kn})) = 1$, existe una proyección P sobre $N(\mathcal{A}(\lambda_{kn}))$ (ver [Nir2], p. 64, problema 1). Esta proyección puede definirse de varias formas; por ejemplo; si por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se denota al producto interno en $(B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4$, el producto interno entre dos elementos u_1, u_2 de tal espacio está dado por:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \equiv \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} u_1' u_2' \quad ;$$

entonces se podría definir la proyección $P : (B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4 \rightarrow N(\mathcal{A})$ como:

$$Pu = \frac{\langle u, U_{kn} \rangle}{\langle U_{kn}, U_{kn} \rangle} U_{kn} \quad .$$

De aquí que se tenga la descomposición:

$$(B_{\frac{2\pi}{n}}^1)^4 = N(\mathcal{A}) \oplus B_2 \quad ;$$

B_2 es el complemento de $N(\mathcal{A})$ y es cerrado (ver, por ejemplo, [Rud], teo. 5.16).

Lo mismo puede hacerse para $(E_{\frac{2\pi}{n}}^0)^4$ (espacio de Banach bajo la norma de la convergencia uniforme $|\cdot|_0$), pues ya se vió que $R(\mathcal{A}(\lambda_{kn})) \perp_{L_2} < V_{kn} \equiv E_2$ (sección anterior).

Entonces, defínase la proyección $\tilde{Q} : (E_{\frac{2\pi}{n}}^0)^4 \rightarrow E_2$, de manera análoga a como se definió la proyección P , pero ahora usando el vector V_{kn} . De esta forma resulta que $Q \equiv \mathbf{I} - \tilde{Q}$ es una proyección sobre $R(\mathcal{A})$, así que se tiene la descomposición:

$$(E_{\frac{2\pi}{n}}^0)^4 = E_2 \oplus R(\mathcal{A})$$

(E_2 y $R(\mathcal{A})$ cerrados).

La existencia del pseudo-inverso K de $\mathcal{A} |_{B_2}$, es una aplicación directa del lema 4 sec. 6.1 en [Nirl].

En conclusión, se tiene el diagrama de la figura 9. Además, según la definición en el

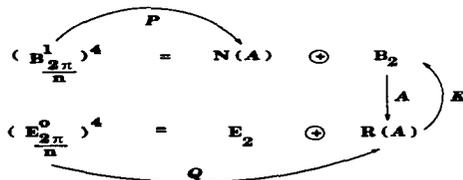


Figura 4.9: Descomposición de los espacios $(B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4$ y $(E_{\frac{1}{2\pi}}^0)^4$.

capítulo I, \mathcal{A} es un operador de Fredholm de índice igual a cero. $(\dim N(\mathcal{A}) - \text{codim} R(\mathcal{A}) = \dim N(\mathcal{A}) - \dim E_2 = 1 - 1)$.

Por todo lo anterior, la reducción de Ljapunov-Schmidt está bien justificada y por lo tanto es factible la obtención de una ecuación de bifurcación:

Descomponiendo a u en la forma $u = \underbrace{\alpha U_{kn}}_{\in N(\mathcal{A}(\lambda))} + \underbrace{w}_{\in B_2}$ y proyectando la ecuación $\mathcal{A}(\lambda_{kn})u - \mathbf{T}(\lambda)u - G(u, \lambda)$ sobre $R(\mathcal{A}(\lambda_{kn}))$ y E_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda_{kn})w - Q\mathbf{T}(\lambda)(\alpha U_{kn} + w) - QG(\alpha U_{kn} + w, \lambda) &= 0 && \text{(sobre } R(\mathcal{A}(\lambda_{kn}))\text{)} \\ -(\mathbf{I} - Q)\mathbf{T}(\lambda)(\alpha U_{kn} + w) - (\mathbf{I} - Q)G(\alpha U_{kn} + w, \lambda) &= 0 && \text{(sobre } N(\mathcal{A}(\lambda_{kn}))\text{)} \end{aligned}$$

Usando el pseudo-inverso \mathcal{K} de \mathcal{A} sobre B_2 , la primera de las ecuaciones de arriba se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} w - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)(\alpha U_{k_n} + w) - \mathcal{K}QG(\alpha U_{k_n}, \lambda) &= 0 \\ (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T})w &= \alpha\mathcal{K}Q\mathbf{T}U_{k_n} + \mathcal{K}QG \end{aligned}$$

Ahora, para $\lambda \sim \lambda_{k_n}$, $\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)$ resulta ser una pequeña perturbación de la identidad, por lo tanto es invertible, y su inverso está dado por la serie $(\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T})^{-1} = \mathbf{I} + \mathcal{K}Q\mathbf{T} + (\mathcal{K}Q\mathbf{T})^2 + \dots$, entonces:

$$w = (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T})^{-1}\mathcal{K}Q(\alpha\mathbf{T}U_{k_n} + G(\alpha U_{k_n} + w))$$

Ahora, como $G = Au - Tu$ y dada la continuidad de \mathcal{A} y \mathbf{T} , G es C^1 y $|G(u, \lambda)|_{\rho \leq c} \leq c|u|_1^2$, así que la ecuación de arriba se puede resolver para w de manera única y diferenciable en términos de α y λ : $w = \hat{w}(\alpha, \lambda)$ usando un argumento de contracción, con $|w|_1 \leq k(|\alpha(\lambda - \lambda_{k_n})| + \alpha^2)$. (ver referencia en la parte correspondiente del capítulo I).

Substituyendo en la ecuación restante sobre el $N(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{I} - Q)\mathbf{T}(\lambda)(\alpha U_{k_n} + (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q(\alpha\mathbf{T}(\lambda)U_{k_n} + G(\alpha U_{k_n} + w))) + \\ &\quad - (\mathbf{I} - Q)G(\alpha U_{k_n} + w) = 0 \\ &-(\mathbf{I} - Q)\mathbf{T}(\lambda)[(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))\alpha U_{k_n} + (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}QG(\alpha U_{k_n} + w)] + \\ &\quad - (\mathbf{I} - Q)G(\alpha U_{k_n} + w) = 0 \\ &-(\mathbf{I} - Q)\mathbf{T}(\lambda) \underbrace{[\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda)]}_{= (\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}} \alpha U_{k_n} + \\ &\quad - (\mathbf{I} - Q) \underbrace{[\mathbf{T}(\lambda)(\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T}(\lambda))^{-1}\mathcal{K}Q + \mathbf{I}]}_{= (\mathbf{I} - \mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q)^{-1}\mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q} G(\alpha U_{k_n} + w) = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo $B(\lambda) \equiv -(\mathbf{I} - Q)\mathbf{T}(\lambda)(\mathbf{I} - \mathcal{K}Q\mathbf{T})^{-1}P$ y $g(\alpha, \lambda) \equiv -(\mathbf{I} - Q)(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}Q)^{-1}\mathbf{T}(\lambda)\mathcal{K}QG$, se tiene la siguiente ecuación sobre $N(\mathcal{A})$:

$$B(\lambda)\alpha U_{k_n} - g(\alpha, \lambda) = 0 \quad \text{ecuación de bifurcación.}$$

Es claro que en este caso en particular $B(\lambda)$ es un número ($\dim N(\mathcal{A}(\lambda_{k_n})) = 1$), tal que $B(\lambda_{k_n}) \equiv 0$, (ya que $\mathbf{T}(\lambda_{k_n}) \equiv 0$). Por otro lado, $g(\alpha, \lambda)$ es una función C^1 , y dado que se trata de la parte no lineal: $|g(\alpha, \lambda)| \leq c\alpha^2$.

Finalmente, si se escribe la ecuación de bifurcación como:

$$\underbrace{b(\lambda)}_{B(\lambda)U_{k_n}} + \underbrace{g(\alpha, \lambda)}_{\mathcal{E}(\alpha, \lambda)} = 0 \quad ;$$

donde $g(\alpha, \lambda)$ es C^1 y $g(0, \lambda) = 0$; entonces, si $b'(\lambda_{kn}) \neq 0$, la ecuación anterior se puede resolver para λ en función de α para $\lambda \sim \lambda_{kn}$, $\lambda = \hat{\lambda}(\alpha)$ con $\hat{\lambda}(0) = \lambda_{kn}$ de manera única; es decir, obteniendo una sola rama de bifurcación en los puntos donde $\mathcal{A}(\lambda)$ no es invertible.

4.18 Ecuación de bifurcación

La reducción de Ljapunov-Schmidt y la obtención de la ecuación de bifurcación se pueden plantear de una manera más natural que la que se propone en la sección anterior (descomponiendo la ecuación $f(u, \lambda) = 0$ en una parte para $N(\mathcal{A})$ y otra para B_2 , definiendo el pseudo-inverso, etc); esto es, usando las bases de Fourier apropiadas para cada espacio, y encontrando un método para determinar los coeficientes. Esto permitirá hacer explícitos los cálculos al final de la sección anterior; es decir, obtener expresiones precisas para $\mathbf{T}(\lambda)$, \mathcal{K} , $\mathcal{B}(\lambda)$ y la ecuación de bifurcación. Como la existencia y la unicidad de la rama que bifurca a partir de $\lambda = \lambda_{kn}$, $u = \alpha U_{kn} + \hat{w}(\alpha, \hat{\lambda}(\alpha))$ está justificada por el método de reducción de Ljapunov-Schmidt; lo mismo se puede decir acerca de la convergencia de las series de Fourier propuestas para u cerca de los puntos de bifurcación.

Se recuerda al lector que la expresión para G se dió en la sección 4.12, ahí se vió que la primera de sus entradas era cero (esto viene de que la ecuación diferencial para ϕ ya está linearizada). Entonces, como $u \in (B_{\frac{1}{2\pi}}^1)^4$ y $G \in (E_{\frac{0}{2\pi}}^0)^4$, se tienen las siguientes expresiones para ellas:

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, u_3, u_4)^t \\ &= (\Sigma_m u_{1,m}(\lambda) \sin(mns), \Sigma_m u_{2,m}(\lambda) \sin(mns), \Sigma_m u_{3,m}(\lambda) \cos(mns), \Sigma_m u_{4,m}(\lambda) \cos(mns))^t \\ G &= (0, g_2, g_3, g_4)^t \\ &= (0, \Sigma_m g_{2,m}(\lambda) \cos(mns), \Sigma_m g_{3,m}(\lambda) \sin(mns), \Sigma_m g_{4,m}(\lambda) \sin(mns))^t \end{aligned}$$

Substituyendo en la ecuación diferencial linearizada para u y G , $u' - \mathbf{B}(\lambda)u - G(u, \lambda) = 0$ se tiene la siguiente relación para los coeficientes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} mn & 0 & 0 & -1 \\ 0 & mn & -a & -b \\ 0 & -c & -mn & 0 \\ 0 & -d & 0 & -mn \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{mn}(\lambda)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,m}(\lambda) \\ u_{2,m}(\lambda) \\ u_{3,m}(\lambda) \\ u_{4,m}(\lambda) \end{bmatrix}}_{U_m(\lambda)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g_{2,m}(\lambda) \\ g_{3,m}(\lambda) \\ g_{4,m}(\lambda) \end{bmatrix}}_{G_m(\lambda)} \quad \text{para } m = 1, 2, \dots$$

Es sencillo ver que:

$$|\mathbf{A}_{mn}| \underset{ac+db=-q}{=} mn[(mn)^3 + camn + dbmn] \\ (mn)^2[(mn)^2 - q]$$

Así que, para $q(\lambda) = (kn)^2 \neq (mn)^2$, la relación es invertible, obteniéndose

$$U_m(\lambda) = (A_{mn})^{-1}(\lambda)G_m(\lambda). \text{ Obsérvese que para } m = 0: u_{1,0} = u_{2,0} = 0, u_{3,0}(\lambda) = -\frac{g_{2,0}(\lambda)}{q}, u_{4,0} = 0.$$

Ahora, recuérdese que G se definió a partir de los términos de segundo orden y mayores de la linearización de $f(u, \lambda) = 0$ (sec. 4.12). Por lo tanto, al substituir las series de Fourier de los u_i 's, se tendría que a su vez, los coeficientes de Fourier $g_{i,m}(\lambda)$ son función de los coeficientes $u_{i,m}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$; entonces la siguiente notación es válida:

$$g_{i,m}(\lambda) = \hat{g}_{i,m}(u_{1,0}, \dots, u_{1,m}, \dots, u_{4,0}, \dots, u_{4,m}, \dots, \lambda) ;$$

o bien:

$$G_m(\lambda) = \hat{G}_m(U_0(\lambda), \dots, U_m(\lambda), \dots, \lambda) .$$

Así que la ecuación para los coeficientes u_i queda:

$$U_m(\lambda) - (A_{mn})^{-1}\hat{G}_m(U_0(\lambda), \dots, U_m(\lambda), \dots, \lambda) = 0 .$$

La ecuación anterior puede resolverse encontrando una única expresión diferenciable para cada grupo de coeficientes U_m ($m \neq k$) vía el teorema de la función implícita, en términos de U_k y de λ ; esto es: $U_m = \hat{U}_m(U_k, \lambda)$. Además, dado que $G = o(\|u\|)$ se tiene que $\hat{U}_m = o(U_k)$.

Entonces, expresando a u en su serie de Fourier, se acaba de ver que todos los coeficientes estarán en función solamente de cuatro de ellos ($U_k = (u_{1,k}, u_{2,k}, u_{3,k}, u_{4,k})^t$) y de λ ; así que el problema de determinar dicho desarrollo consiste en encontrar estos cuatro números, que corresponden al índice para el cual A_{mn} no es invertible.

Hasta este punto, el problema de encontrar u se puede entonces resumir mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u(s, \lambda) &= \sum_m \begin{bmatrix} u_{1,m} \sin(mns) \\ u_{2,m} \sin(mns) \\ u_{3,m} \cos(mns) \\ u_{4,m} \cos(mns) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{1,k} \sin(kns) \\ u_{2,k} \sin(kns) \\ u_{3,k} \cos(kns) \\ u_{4,k} \cos(kns) \end{bmatrix} + \sum_{m \neq k} \begin{bmatrix} u_{1,m} \sin(mns) \\ u_{2,m} \sin(mns) \\ u_{3,m} \cos(mns) \\ u_{4,m} \cos(mns) \end{bmatrix} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{Y \\ \in N(A)}} + \sum_{\substack{Z \\ \in B_2}} + \sum_{m \neq k} \left[\underbrace{\hspace{10em}}_{\in B_2} \right]} \end{aligned}$$

Como la descomposición de arriba lo muestra, el primer término del lado derecho, debe tener una representación en función del generador de $N(\mathcal{A})$, U_{kn} ; o lo que es lo mismo, debe existir una relación entre sus coeficientes y los de U_{kn} . Así que vamos a escoger una base para R^4 de la forma siguiente:

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \frac{d_o}{kn} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{(kn)^2}{d_o} \\ \frac{c_o kn}{d_o} \\ kn \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(recuérdese que $a_o \equiv a(\lambda_{kn})$, ... tal que $q(\lambda_{kn}) = (kn)^2$). Υ_2 es entonces proporcional a los coeficientes de U_{kn} .

Escribiendo entonces $U_k = \alpha_1 \Upsilon_1 + \alpha_2 \Upsilon_2 + \alpha_3 \Upsilon_3 + \alpha_4 \Upsilon_4$ y substituyendo en $A_{kn} U_k = G_k$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} kn \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -(kn)^2 - (a_o c_o + b d_o) \\ kn(c - c_o) \\ kn(d - d_o) \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -kn \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -b \\ 0 \\ -kn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{2,k} \\ g_{3,k} \\ g_{4,k} \end{bmatrix}.$$

Ahora, el lado derecho de la relación anterior, corresponde a los coeficientes de Fourier de un elemento en $(E_{\frac{0}{2n}}^0)^4$ (a saber, $(0, g_{2,k} \cos(kns), g_{3,k} \sin(kns), g_{4,k} \sin(kns))'$), que tiene una parte en E_2 , y por lo mismo tienen una expresión en términos de los coeficientes del generador de tal espacio, es decir, de V_{kn} (ver sec. 4.16). Escójase entonces otra base de R^4 , de la forma siguiente:

$$\Upsilon_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2^* = kn \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{d_o}{kn} \\ -\frac{d_o}{kn} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_4^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(Υ_2^* proporcional a los coeficientes de V_{kn}).

Entonces, proyectando la ecuación de arriba en estas bases:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 kn - \alpha_4 \\ \alpha_2((-kn)^2 - (a_o c_o + b d_o))kn - kn a_o(c - c_o) - kn b_o(d - d_o) + \\ + (a_o kn - a kn)\alpha_3 - (b kn - b_o kn)\alpha_4 \\ \alpha_2 kn(c - c_o) - \alpha_3 kn \\ \alpha_2 kn(d - d_o) - \alpha_4 kn \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ kn g_{2,k} - a_o g_{3,k} - b_o g_{4,k} \\ g_{3,k} \\ g_{4,k} \end{bmatrix}.$$

De aquí que: $\alpha_1 = \frac{\alpha_4}{kn}$, $\alpha_3 = \alpha_2(c - c_o) - \frac{g_{3,k}}{kn}$, $\alpha_4 = \alpha_2(d - d_o) - \frac{g_{4,k}}{kn}$.

Ahora; $g_{2,k}$, $g_{3,k}$, $g_{4,k}$ están en función de $u_{1,k}$, $u_{2,k}$, $u_{3,k}$, $u_{4,k}$ y λ ; o, dada la descomposición anterior, en función de α_1 , α_2 , α_3 , α_4 y λ . Así que las tres igualdades anteriores se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} kn\alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -g_{4,k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda) \frac{1}{kn} + \alpha_2(d - d_o) \\ -g_{3,k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda) \frac{1}{kn} + \alpha_2(c - c_o) \\ -g_{4,k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \lambda) \frac{1}{kn} + \alpha_2(d - d_o) \end{bmatrix} = 0.$$

De nueva cuenta, el teorema de la función implícita nos permite resolver para α_1 , α_3 , α_4 en función de α_2 y λ . Una vez que se tienen estas expresiones, se substituyen en la ecuación que se obtuvo para α_2 al proyectar sobre la base de vectores Υ_i , resultando:

$$-\alpha_2 kn((kn)^2 + ac_o + bd_o + a_o(c - c_o) + b_o(d - d_o)) - kn(\alpha_3(a - a_o) + \alpha_4(b - b_o)) = kng_{2,k} - a_o g_{3,k} - b_o g_{4,k}$$

$$-\alpha_2 kn((kn)^2 + ac_o + bd_o + a_o(c - c_o) + b_o(d - d_o)) - (\alpha_2 kn(a - a_o)(c - c_o) - g_{3,k}(a - a_o) + \alpha_2 kn(d - d_o)(b - b_o) - g_{4,k}(b - b_o)) = kng_{2,k} - a_o g_{3,k} - b_o g_{4,k}$$

$$-\alpha_2 kn((kn)^2 + bd_o + ac + b(d - d_o)) = kng_{2,k} - a_o g_{3,k} - b_o g_{4,k} - g_{3,k}(a - a_o) - g_{4,k}(b - b_o).$$

Simplificando y ya que $q(\lambda_{kn}) = (kn)^2$, la ecuación anterior queda entonces como:

$$-\alpha_2 kn(q(\lambda_{kn}) - q(\lambda)) = kng_{2,k} - ag_{3,k} - bg_{4,k};$$

en donde, de acuerdo a lo visto arriba, $g_{2,k}$, $g_{3,k}$, $g_{4,k}$ están en función de α_2 y λ . Esta es la celebrada ecuación de bifurcación de nuestro problema.

Nótese que de acuerdo con la definición de V_{kn} , el lado derecho es precisamente:

$$kn < G, V_{kn} >$$

Así que la ecuación de bifurcación también se puede expresar como:

$$q(\lambda) - q(\lambda_{kn}) = \frac{1}{\alpha_2} < G, V_{kn} >$$

Sobra decir que de acuerdo con la discusión del capítulo I, $\lambda = \lambda_{kn}$ es un punto de bifurcación, debido al cambio de signo en la ecuación (ver teorema correspondiente).

Más aún, por la definición de g , el lado derecho esta expresión resulta ser $\frac{1}{\alpha_2} o(\alpha_2^2)$; de hecho, ya que $q'(\lambda_{kn}) > 0$ por hipótesis (sec 4.15), se tiene que es posible resolver para

λ en términos de α_2 , localmente, cerca del punto $\lambda = \lambda_{kn}$. Se ha entonces probado el siguiente

Teorema: (Bifurcación local) *La ecuación de bifurcación para el problema reducido $f(u, \lambda) = 0$, $f : (B_{\frac{1}{2n}}^1)^4 \times R^+ \rightarrow (E_{\frac{2n}{n}}^0)^4$ es de la forma:*

$$q(\lambda) - q(\lambda_{kn}) = \frac{1}{\alpha_2} \langle G(\alpha_2, \lambda), V_{kn} \rangle ,$$

donde G son los términos de orden mayor o igual a dos en la linearización, y V_{kn} es el generador del complemento ortogonal del rango del operador \mathcal{A} en $(E_{\frac{2n}{n}}^0)^4$.

Además, el lado derecho resulta ser de segundo orden en α_2 , por lo cual puede resolverse para λ , localmente, en términos de α_2 , cerca de λ_{kn} .

Finalmente, u queda expresada como:

$$u(s) = \underbrace{\alpha_2 \frac{d_0}{kn} U_{kn}}_{\in N(\mathcal{A})} + \underbrace{\hat{w}(\alpha_2, \hat{\lambda}(\alpha_2))(s)}_{\in B_2} .$$

Dada la forma en la que se resolvió para las α_i 's, el término \hat{w} resulta ser $o(\alpha_2^2)$.

Se llama ahora la atención al siguiente hecho, con respecto a la ecuación de bifurcación:

$$\langle G, V_{kn} \rangle = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(knt) \\ -\frac{a}{kn} \sin(knt) \\ -\frac{b}{kn} \sin(knt) \end{bmatrix} dt ,$$

Como G representa los términos no lineales, en relación con los términos cuadráticos se tendrían que calcular integrales de la forma: $\int_0^{2\pi} \cos^i(knt) \sin^j(knt) dt$; $i, j = 0, 1, 2, 3$; todos los cuales son cero. Entonces, en realidad, $\langle G, V_{kn} \rangle$ es $o(\alpha_2^3)$.

4.19 Incorporación de las ecuaciones para $r(s)$

Hasta ahora se ha descartado el par de ecuaciones para r_1 y r_2 , en esta sección se verá cómo es que los resultados de la sección anterior se complementan al tomar en cuenta aquellas dos.

Se recuerda que r_1 y r_2 satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_1' - (1 + \mu)r_2 - \eta &= 0 \\ r_2' + (1 + \mu)r_1 - \nu &= 0 \end{aligned} ,$$

e integrando estas resultan en:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(s + \int_0^s \mu) & \sin(s + \int_0^s \mu) \\ -\sin(s + \int_0^s \mu) & \cos(s + \int_0^s \mu) \end{bmatrix}}_{\Omega(s) = \Omega_0(s)\Omega_\mu(s)} \begin{bmatrix} r_1^0 \\ r_2^0 \end{bmatrix} + \\ &\int_0^s \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(s + \int_0^t \mu) & \sin(s + \int_0^t \mu) \\ -\sin(s + \int_0^t \mu) & \cos(s + \int_0^t \mu) \end{bmatrix}}_{A(s)} \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} dt ; \end{aligned}$$

con las condiciones $A(2\pi) = 0$ para el caso 2π -periódico (sec. 4.11.3), y $r_0 = [I - \Omega_0(\frac{2\pi}{n})]^{-1} \Omega_0(\frac{2\pi}{n}) A(\frac{2\pi}{n})$ para el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico (sec. 4.11.4). La linearización del conjunto de ecuaciones diferenciales se obtuvo en la sección 4.12, dando como resultado:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1' - \bar{r}_2 - x_2 &= 0 \\ \bar{r}_2' + \bar{r}_1 - x_3 + \psi(\lambda)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

La parte homogénea para este sistema da como resultado que r_1 y r_2 satisfacen la ecuación del oscilador armónico, por lo tanto Ω_0 es una matriz fundamental para el sistema, cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \Omega_0 \begin{bmatrix} \bar{r}_1^0 \\ \bar{r}_2^0 \end{bmatrix} + \Omega_0 \int_0^s \Omega_0^t \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 - \psi x_4 \end{bmatrix} dt$$

Proyectando después sobre el espacio de puntos fijos de las transformaciones T_g ($g = \frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2, \dots$), esto es, sobre $(B_{\frac{2\pi}{n}})^6$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \Omega_0 \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} + \Omega_0 \int_0^s \Omega_0^t \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 - \psi u_4 \end{bmatrix} dt ,$$

en donde se usaron las propiedades de paridad de los elementos en tal espacio (sec. 4.14: ρ_1 par, ρ_2 impar, ...) para escoger las constantes de integración. Es fácil darse cuenta de que la expresión de arriba ciertamente satisface las propiedades de paridad que deben tener ρ_1 y ρ_2 .

En el caso $n = 1$ (i.e. 2π -periódico), u_2, u_3, u_4 deben satisfacer además, la linearización de la condición $A(2\pi) = 0$, esto es, si se define al funcional:

$$\mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(\tau) \equiv \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t + \int_0^t \tau u_4) & -\sin(t + \int_0^t \tau u_4) \\ \sin(t + \int_0^t \tau u_4) & \cos(t + \int_0^t \tau u_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau u_2 \\ \psi + \tau u_3 \end{bmatrix} dt ,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(\tau) &= \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(0) + \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(0)\tau + \dots \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix}}_{=0} dt + \\ &\quad \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^t u_4 \right) \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} dt + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} dt \right) \tau + \dots \end{aligned}$$

así que la linearización de tal condición queda:

$$\int_0^{2\pi} \left[-\psi \left(\int_0^t u_4 \right) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \Omega_0^t(t) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right] dt = 0 .$$

Ahora, como $u_2, u_3, u_4 \in (B_{2\pi}^1)^4$, se tienen los siguientes desarrollos:

$$u_2 = \sum_1^\infty u_{2,m} \sin(ms) \quad , \quad u_3 = \sum_0^\infty u_{3,m} \cos(ms) \quad , \quad u_4 = \sum_1^\infty u_{4,m} \cos(ms) ;$$

(recuérdese que por la condición $\int_0^{2\pi} \mu = 0$, es decir, $\int_0^{2\pi} u_4 = 0$, entonces $u_{4,0} = 0$). De aquí que $\int_0^t u_4 = \sum_1^\infty \frac{u_{4,m}}{m} \sin(mt)$. Substituyendo estas expresiones en la linearización de $A(2\pi) = 0$, se tiene:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(0) = \int_0^{2\pi} \left[-\psi(\lambda) \sum_1^\infty \frac{u_{4,m}}{m} \sin(mt) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_1^\infty u_{2,m} \sin(mt) \\ \sum_0^\infty u_{3,m} \cos(mt) \end{bmatrix} \right] dt = 0 .$$

Simplificando esta expresión se llega a que $-\psi(\lambda)\pi u_{4,1} + \pi u_{2,1} + \pi u_{3,1} = 0$, es decir:

$$-\psi(\lambda)u_{4,1} + u_{2,1} + u_{3,1} = 0 .$$

Ahora se verá que la condición anterior resulta ser la misma que se obtiene de pedir que el sistema integral para ρ_1 y ρ_2 tenga periodo 2π :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} (2\pi) &= \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} (2\pi) &= \underbrace{\Omega_0(2\pi)}_{=I} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\Omega_0(2\pi)}_{=I} \underbrace{\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_2 \cos(t) - (u_3 + \psi u_4) \sin(t) \\ u_2 \sin(t) + (u_3 - \psi u_4) \cos(t) \end{bmatrix} dt}_{\nu} , \end{aligned}$$

de donde se obtiene la condición $\mathcal{V} = 0$; pero resulta que:

$$\mathcal{V} = \pi(u_{2,1} + u_{3,1} - \psi u_{4,1})$$

$$\underset{A(2\pi)=0}{=} 0 \quad .$$

Por lo tanto, la linearización de la condición $A(2\pi) = 0$ dá la periodicidad de la expresión integral para ρ_1 y ρ_2 , los cuales tienen las propiedades de paridad de los elementos en $(B_{2\pi}^1)^6$.

Volvamos ahora a las ecuaciones diferenciales para ρ_1 y ρ_2 ,

$$\rho_1' - \rho_2 - u_2 = 0$$

$$\rho_2' + \rho_1 - u_3 + \psi(\lambda)u_4 = 0$$

y substituyendo sus expresiones en la base de Fourier apropiada, $\rho_1 = \sum_0^\infty \rho_{1,m} \cos(ms)$; $\rho_2 = \sum_0^\infty \rho_{2,m} \sin(ms)$, se tiene que:

$$\Sigma_1 - m\rho_{1,m} \sin(ms) - \Sigma_1 \rho_{2,m} \sin(ms) - \Sigma_1 u_{2,m} \sin(ms) = 0$$

$$\Sigma_1 m\rho_{2,m} \cos(ms) + \Sigma_0 \rho_{1,m} \cos(ms) - \Sigma_0 u_{3,m} \cos(ms) + \psi \Sigma_1 u_{4,m} \cos(ms) = 0 \quad ,$$

es decir,

$$\Sigma_1(-m\rho_{1,m} - \rho_{2,m} - u_{2,m}) \sin(ms) = 0$$

$$\Sigma_1(m\rho_{2,m} + \rho_{1,m} - u_{3,m} + \psi u_{4,m}) \cos(ms) - u_{3,0} + \rho_{1,0} = 0 \quad .$$

De aquí que se tenga que $\rho_{1,0} = u_{3,0}$, y el sistema

$$\begin{bmatrix} -m & -1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{1,m} \\ \rho_{2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2,m} \\ u_{3,m} - \psi(\lambda)u_{4,m} \end{bmatrix} \quad m \geq 1 .$$

Como puede verse $|a| = -(m^2 - 1)$; por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \rho_{1,m} \\ \rho_{2,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - m^2} \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,m} \\ u_{3,m} - \psi(\lambda)u_{4,m} \end{bmatrix} \quad m > 1 .$$

Mientras que para $m = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} -\rho_{1,1} - \rho_{2,1} &= u_{2,1} \\ \rho_{2,1} + \rho_{1,1} &= u_{3,1} - \psi(\lambda)u_{4,1} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad u_{3,1} - \psi(\lambda)u_{4,1} + u_{2,1} = 0$$

(otra vez la linearización de $A(2\pi) = 0$). De manera que ρ_1 y ρ_2 quedan relacionadas por $\rho_{1,1} + \rho_{2,1} = -u_{2,1}$ (es decir, que a diferencia de los demás coeficientes, uno de ellos no queda determinado de manera única).

En conclusión, la linearización de $A(2\pi) = 0$ también es la condición de periodicidad de ρ_1 y ρ_2 , así como una garantía de consistencia para encontrar los coeficientes en la expansión de Fourier de tales funciones.

Ahora nos concentraremos en la bifurcación de soluciones 2π -periódicas, cerca de $\lambda = 0$; esto es, cerca del caso $q(0) = (nk)^2 \equiv 1$. Volviendo entonces a la ecuación diferencial linearizada $u' - \mathbf{B}(\lambda)u - G(u, \lambda) = 0$, y substituyendo los desarrollos en series de Fourier de las componentes de u y G como en la sección 4.18 se tiene entonces que ($n = 1$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & -a & -b \\ 0 & -c & -m & 0 \\ 0 & -d & 0 & -m \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_m(\lambda)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,m}(\lambda) \\ u_{2,m}(\lambda) \\ u_{3,m}(\lambda) \\ u_{4,m}(\lambda) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_m(\lambda)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g_{2,m}(\lambda) \\ g_{3,m}(\lambda) \\ g_{4,m}(\lambda) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_m(\lambda)} \quad \lambda \sim 0 ;$$

también en aquella ocasión se obtuvo que $|\mathbf{A}_m| = m^2(m^2 - 1)$. De manera que para $m > 1$: $\mathbf{U}_m(\lambda) = \mathbf{A}_m^{-1}(\lambda)\mathbf{G}_m(\lambda)$, lo cual se sabe puede resolverse vía el teorema de la función implícita para $\mathbf{U}_m = \hat{\mathbf{U}}_m(U_1, \lambda)$; donde $\hat{\mathbf{U}}_m = o(U_1)$; $\mathbf{U}_m \sim 0$.

Nótese que para $m = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} u_{4,0} = 0 & (\text{ya se sabía}) \\ u_{3,0} = -\frac{g_{2,0}}{a} \end{cases}$$

Para $m = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a & -b \\ 0 & -c & -1 & 0 \\ 0 & -d & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{2,1} \\ g_{3,1} \\ g_{4,1} \end{bmatrix} .$$

Tomando la descomposición de \mathbf{U}_1 en la base $\{\Upsilon_i\}$ ($\mathbf{U}_1 = \alpha_1\Upsilon_1 + \alpha_2\Upsilon_2 + \alpha_3\Upsilon_3 + \alpha_4\Upsilon_4$); ya se demostró en la sección anterior que, substituyendo en la ecuación de arriba y proyectando sobre la base $\{\Upsilon^*\}$, el resultado es que pueden encontrarse expresiones para $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ en función de α_2 y λ vía el teorema de la función implícita, y que además para α_2 se tiene la ecuación de bifurcación:

$$-\alpha_2(1 - q(\lambda)) = g_{2,1} - ag_{3,1} - bg_{4,1} ;$$

la cual se resuelve para λ en función de α_2 de manera única y diferenciable; indicando la bifurcación a partir de $\lambda = 0$.

Hasta aquí no se ha dicho nada nuevo que no se hubiera discutido antes, excepto por la linealización de la condición $A(2\pi) = 0$ y que constituye una nueva relación para los coeficientes que corresponden al modo $m = 1$ de u . Es justamente este punto el que debe tomarse en cuenta: calculando de nueva cuenta el generador de $N(\mathcal{A}(0))$, ahora a partir de la relación $\mathbf{A}_m \mathbf{U}_m = 0$. Para $m \neq 1$ $\mathbf{U}_m = \mathbf{A}_m^{-1} 0 = 0$; para $m = 1$ se tiene:

$$\begin{array}{l} \dot{u}_{1,1} - \dot{u}_{4,1} = 0 \\ \ddot{u}_{2,1} - a_o \ddot{u}_{3,1} - b_o \ddot{u}_{4,1} = 0 \\ -c_o \ddot{u}_{2,1} - \ddot{u}_{3,1} = 0 \\ -d_o \ddot{u}_{2,1} - \ddot{u}_{4,1} = 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{u}_{1,1} = \dot{u}_{4,1} = -d_o \ddot{u}_{2,1} \\ \ddot{u}_{3,1} = -c_o \ddot{u}_{2,1} \end{array}$$

Por lo tanto, tomando $\ddot{u}_{2,1} = -\frac{\alpha}{d_o} (\alpha \in R)$, se tiene que

$\alpha \mathbf{U}_1^t \equiv \alpha (\sin(s), -\frac{1}{d_o} \sin(s), \frac{c_o}{d_o} \cos(s), \cos(s))$ (compárese con el resultado de la sección 4.14).

Ahora bien, $u \in (B_{2\pi}^1)^4$ sabemos que admite una descomposición $u(s) = \alpha \mathbf{U}_1(s) \oplus (u - \alpha \mathbf{U}_1(s))$; donde la condición $u_{3,1} - \psi(\lambda) u_{4,1} + u_{2,1} = 0$ debe satisfacerse para cada lado de la expresión anterior; en particular, para el lado izquierdo, y ya que $\psi(0) = 1$ (sec. 4.9):

$$\begin{array}{l} \dot{u}_{3,1} - \dot{u}_{4,1} + \ddot{u}_{2,1} = \alpha \left(\frac{c_o}{d_o} - 1 - \frac{1}{d_o} \right) \\ \text{sec. 4.13} \quad -\alpha \frac{\dot{M}_\mu(0, 1, 0)}{\dot{H}_\eta(0, 1, 0)} \left(\frac{\dot{H}_\eta(0, 1, 0)}{\dot{N}_\nu(0, 1, 0)} + \frac{\dot{H}_\eta(0, 1, 0)}{\dot{M}_\mu(0, 1, 0)} + 1 \right) \end{array}$$

Por hipótesis, los dos términos que multiplican a $-\alpha$ son estrictamente positivos; por lo tanto, la única posibilidad de satisfacer tal condición es tomando $\alpha \equiv 0$; pero en tal caso $\alpha \mathbf{U}_1^t \equiv 0$, de manera que $N(\mathcal{A}(0)) = \langle 0 \rangle$; es decir, $\dim N(\mathcal{A}(0)) = 0$ y en consecuencia $\mathcal{A}(0)$ resulta ser invertible sobre $(B_{2\pi}^1)^4$. Así que se ha probado el siguiente:

Lema: *La linealización de la condición $A(2\pi) = 0$ prohíbe la bifurcación de soluciones con periodo 2π ($n = 1$) a partir de $\lambda = 0$.*

4.20 Comportamiento de las ramas lejos de la solución trivial: bifurcación global

En la sección 4.18 se obtuvieron los resultados que corresponden a la existencia de ramas de soluciones no triviales cerca de la solución trivial, y que bifurcan a partir de ella;

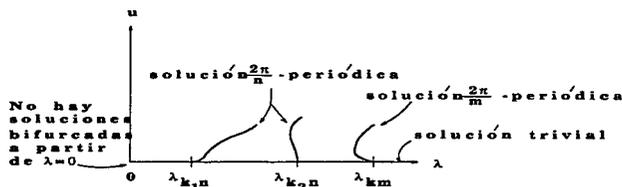


Figura 4.10: Resultados de bifurcación local.

cada vez que λ satisface la ecuación $q(\lambda) = n^2$. Más aún, dichas ramas tienen ciertas propiedades de periodicidad muy específicas.

En esta sección se discutirá el comportamiento de tales ramas lejos de la solución trivial, haciendo uso de las propiedades nodales de su componente η (o bien, de u_2) y de el teorema de bifurcación global, según se enunció en el primer capítulo (tercer teorema de la sección 1.4).

Recordamos al lector que los resultados de bifurcación local fueron obtenidos directamente, a partir de las ecuaciones de equilibrio y la relación $\phi' - \mu = 0$. En esta parte se explotarán los resultados de la sección 4.11; más concretamente, los del planteamiento en términos de un problema de punto fijo (secc. 4.11.7).

La formulación integral del problema consiste en reescribir el campo completo de las ecuaciones del anillo $h(y, \lambda) = 0$ (sec. 4.7) como el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} H &= \Omega H_0 + \lambda J \Omega A \\ M &= M_0 + (JA)' H_0 + \frac{\lambda}{2} \|A\|^2 \\ r &= \Omega r_0 + \Omega A \\ \phi &= \phi_0 + \int_0^s \mu \end{aligned}$$

También se vió que, dependiendo de las propiedades del espacio en donde se busca la solución al sistema anterior, se tienen distintas condiciones:

En el caso 2π -periódico, η , ν y μ se encuentran condicionadas por las ecuaciones $A(2\pi) = 0$ y $\int_0^{2\pi} \mu = 0$.

En el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico, estas condiciones se reducen a pedir que $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu = 0$, mientras que las constantes de integración H_0 y r_0 quedan determinadas automáticamente, en

función de $\mathbf{A}(\frac{2\pi}{n})$. Entonces el sistema integral queda escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \lambda \mathbf{J} \mathbf{\Omega} [(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}(\frac{2\pi}{n}) + \mathbf{A}(s)] \\ \mathbf{M}(s) &= \mathbf{M}_o + \frac{\lambda}{2} [2\mathbf{A}^t(s)(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}(\frac{2\pi}{n}) + \|\mathbf{A}(s)\|^2] \\ \mathbf{r}(s) &= \mathbf{\Omega}(s) [(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}(\frac{2\pi}{n}) + \mathbf{A}(s)] \\ \phi(s) &= \phi_o + \int_0^s \mu \quad . \end{aligned}$$

En la sección 4.11.7 se demostró que hay un único M_o , tal que $\int_0^{2\pi} \mu = 0$, o bien, $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu = 0$. Por otro lado, mientras que en el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico el problema de determinar las constantes H_o y M_o quedaba resuelto; en el caso 2π -periódico aún queda por resolver la determinación de tales constantes, a partir de la condición $\mathbf{A}(2\pi) = 0$; (en la sección 4.14 se vió que sobre el espacio $(B_{\frac{1}{2}\pi}^2)^4$ -donde ϕ y η son impares, mientras que ν y μ son pares- esta condición se reduce a pedir que: $\int_0^{2\pi} (\eta \sin(t + \int_0^t \mu) + \nu \cos(t + \int_0^t \mu)) dt = 0$. No se siguió adelante en esta línea, ya que la relación entre esta igualdad y H_o , N_o , no parece tan tratable como aquella para M_o y $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu = 0$).

Ahora bien, también en la sección antes citada se vió la posibilidad de escribir el problema integral, como uno de punto fijo, aprovechando que se tiene la invertibilidad del mapeo $\begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{F} \begin{bmatrix} H \\ N \\ M \end{bmatrix}$; pues permitía establecer el siguiente proceso iterativo:

caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico:

$$\begin{bmatrix} \eta_{n+1} \\ \nu_{n+1} \\ \mu_{n+1} \end{bmatrix} - F^{-1} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n(s) [(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}_n(\frac{2\pi}{n}) + \mathbf{A}_n(s)] \\ \mathbf{M}_o + \frac{\lambda}{2} [2\mathbf{A}_n^t(s)(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}_n(\frac{2\pi}{n}) + \|\mathbf{A}_n(s)\|^2] \\ \mathbf{\Omega}_n(s) [(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}))^{-1} \mathbf{\Omega}_o(\frac{2\pi}{n}) \mathbf{A}_n(\frac{2\pi}{n}) + \mathbf{A}_n(s)] \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

en donde $\mathbf{A}_n \equiv \int_0^s \mathbf{\Omega}^t(t) \begin{bmatrix} \eta_n \\ \nu_n \end{bmatrix} (t) dt$, y M_o se escoge de tal forma que $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu_{n+1}(t) dt = 0$; además $\mathbf{\Omega}_n = \mathbf{\Omega}_o \mathbf{\Omega}_{\mu n}$.

caso 2π -periódico:

$$\begin{bmatrix} \eta_{n+1} \\ \nu_{n+1} \\ \mu_{n+1} \end{bmatrix} - F^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_n \mathbf{H}_o + \lambda \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n \mathbf{A}_n \\ \mathbf{M}_o + (\mathbf{J} \mathbf{A}_n)^t \mathbf{H}_o + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{A}_n\|^2 \\ \mathbf{\Omega}_n \mathbf{H}_o + \lambda \mathbf{J} \mathbf{\Omega}_n \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

M_o se escoge de tal forma que $\int_0^{2\pi} \mu_{n+1} = 0$, $H_o = \begin{bmatrix} H_o \\ N_o \end{bmatrix}$ condicionada por $A_n(2\pi) = \int_0^{2\pi} \Omega_o^t \Omega_{\mu n}^t \begin{bmatrix} \eta_n \\ \nu_n \end{bmatrix} = 0$.

En ambos casos, el segundo término es un operador diferenciable y compacto (obviamente, la diferenciable proviene de la invertibilidad del mapeo F y de que se ha asumido que las funciones constitutivas son, por lo menos, C^2 , (sec. 4.17)). La diferencia substancial entre ellos, la constituye la condición $A(2\pi) = 0$ que se tiene para el caso de periodicidad 2π , pues involucra una relación no lineal entre η, ν y μ ; así que para propósitos de una formulación no muy complicada de punto fijo, es indispensable redefinir el espacio de trabajo, de tal manera que esta condición sea lineal. Esto ya es posible, como a continuación se explica.

Se recuerda al lector que en la sección 4.11.3 se definieron las variables

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} \equiv \Omega_{\mu}^t \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} ;$$

de manera que para el caso 2π -periódico, la condición $A(2\pi) = 0$, necesaria para la existencia de tales soluciones, se escribe como $\int_0^{2\pi} \Omega_o^t(t) \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} = 0$. Esta sí es una relación lineal entre las variables $\tilde{\eta}$ y $\tilde{\nu}$. En tal caso:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega_{\mu}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix} \Omega H_o + \lambda J \Omega A \\ M_o + (JA)^t H_o + \frac{1}{2} \|A_n\|^2 \end{bmatrix} = 0 .$$

Entonces, y sólo en ese caso, el problema de punto fijo será atacado, mediante el empleo de estas nuevas variables.

4.20.1 Propiedades nodales de las ramas bifurcadas

Se recuerda al lector que las variables de la linealización u_i 's, están relacionadas con ϕ, η, ν, μ de la siguiente forma:

$$(\phi, \eta, \nu, \mu) = (u_1, u_2, \psi + u_3, u_4) .$$

Al conexo más grande en el conjunto de soluciones no triviales se le llama continuo. Llamemos a R_n el continuo que bifurca a partir del valor $\lambda = \lambda_n$, en $(B_{2\pi}^1)^4 \times R$; y a \tilde{R}_n al continuo que bifurca en $(B_{\frac{2\pi}{2}}^1)^4 \times R$. Se demuestra ahora el siguiente

Lema: Si $(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda) \in R_n$; entonces, u_2 tiene $2n$ ceros en $[0, 2\pi)$. Análogamente, si $(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda) \in \tilde{R}_n$; entonces, u_2 tiene un cero en $(0, \frac{2\pi}{n})$.

Prueba: En la sección 4.18 se vió que, cerca del punto de bifurcación, las ramas son de la forma:

$$u(s) = \alpha_2 \frac{d_0}{n} U_n + \hat{w}(\alpha_2, \hat{\lambda}(\alpha_2))(s) ;$$

donde $U_n^t = (\sin(ns), -\frac{n^2}{d_0} \sin(ns), \frac{e_0 n}{d_0} \cos(ns), n \cos(ns))$ (sec. 4.14). Se tiene entonces que, cerca de la solución trivial: $u_2 = -n\alpha_2 \sin(ns) + \underbrace{\hat{w}_2(\alpha_2, \hat{\lambda}(\alpha_2))(s)}_{o(\alpha_2^2)}$; o bien,

$$\frac{u_2}{\alpha_2} = -n \sin(ns) + o(\alpha_2) \equiv v(\alpha_2, s) .$$

Ahora, $\sin(ns)$ tiene $2n$ ceros en $[0, 2\pi)$ y uno en $(0, \frac{2\pi}{n})$. Por otro lado, $v(0, \frac{k\pi}{n}) = 0$, y $\frac{\partial}{\partial \alpha} v(0, \frac{k\pi}{n}) = -n^2 \cos(k\pi) = (-1)^{k+1} n^2 \neq 0$. Por lo tanto, el teorema de la función implícita nos dice que existe una parametrización $s = \hat{s}(\alpha_2)$, $s \sim \frac{k\pi}{n}$ tal que $v(\alpha_2, \hat{s}(\alpha_2)) = 0$; para $\alpha_2 \sim 0$; lo que es lo mismo: $u_2(\alpha_2, \hat{s}(\alpha_2)) = 0$. Entonces, u_2 tiene un único cero cerca de $s = \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, 2n$; es decir, tiene $2n$ ceros cerca del punto de bifurcación. Ahora se verá que lo anterior sigue siendo cierto lejos de tal punto (asumiendo, por el momento, que la rama en cuestión continua lejos de la solución trivial).

Llámesese a $\mathcal{G}_n \equiv \{(u, \lambda) \in R_n : u_2 \text{ tiene } 2n \text{ ceros}\}$; arriba se acaba de ver que tal conjunto es no vacío.

Hacemos ahora el siguiente paréntesis, para aclarar un poco sobre el empleo de la notación: el conjunto de u_i 's se definió como una perturbación de la solución trivial \bar{y}_1 , con las propiedades de periodicidad correspondientes. Es decir: $(\phi, \eta, \nu, \mu) = (\bar{y}_1 + u) = (u_1, u_2, \psi + u_3, u_4)$; o sea que $\eta = u_2$. Ahora, en la sección 4.11.6 se demostró que $\eta(s)$ no posee ceros dobles para $\eta \neq 0$ y, en consecuencia, tampoco u_2 .

Se demuestra ahora que \mathcal{G}_n es abierto y cerrado, con la norma: $\|(u, \lambda)\|^2 = |u|_1^2 + |\lambda|^2$.

\mathcal{G}_n es abierto : Esto es claro a partir de examinar la componente u_2 . Si \tilde{u}_2 es vecino a $u_2 \in \mathcal{G}_n$, en la norma $|\cdot|_1$; esto quiere decir que \tilde{u}_2 es vecino a u_2 en C^1 , y por lo tanto tiene el mismo número de ceros que u_2 en $[0, 2\pi)$ (lo cuales, según se mencionó en la acotación anterior, son simples). Así que para toda u_2 , componente de alguna $u \in R_n$, se puede definir una vecindad alrededor de ella, con la norma $|\cdot|_1$, tal que está completamente contenida en \mathcal{G}_n ; y por lo tanto, \mathcal{G}_n es abierto.

\mathcal{G}_n es cerrado : Supóngase que $\{(u^k, \lambda^k)\}$ es una sucesión en \mathcal{G}_n , convergente en la norma descrita anteriormente, a (u, λ) ; por demostrar que este límite pertenece a \mathcal{G}_n .

La componente u_2 de el límite u tiene, a lo más, $2n$ ceros; si tuviera menos de esa cantidad, entonces algunos de ellos serían dobles; pero el único caso en el cual esto es posible es cuando $u_2 \equiv 0$ (otra vez, ver sec. 4.11.6). Pero en tal caso, la única posibilidad es que la sucesión converga al punto de bifurcación $(0, \lambda_n)$, demostrando que \mathcal{G}_n es cerrado, ya que entonces la única posibilidad es que u_2 tenga exactamente $2n$ ceros.

Entonces, dada la conexidad de R_n , $\mathcal{G}_n = R_n$, terminando la prueba del lema. \square

Observaciones:

1. La misma propiedad que posee u_2 de no tener ceros dobles indica que una rama que sale del punto $(0, \lambda_n)$ (λ_n tal que $q(\lambda_n) = n^2$), no puede regresar de nuevo a la solución trivial, por otro punto $(0, \lambda_m)$ ($m \neq n$); ya que esto implicaría un cambio en el número de ceros (de u_2) a lo largo de tal rama, es decir, la existencia de puntos dobles, imposible si $u_2 \not\equiv 0$. (ver figura 11)

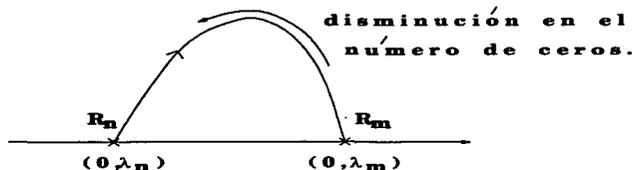


Figura 4.11: Un caso improbable: las ramas no pueden regresar a la solución trivial.

2. Dado que la solución con periodo $\frac{2\pi}{n}$ también es 2π periódica, \tilde{R}_n podría ser un subconjunto estricto de R_n .
3. Sea cual sea el diagrama de bifurcación que se tenga, sabemos que no puede cruzar del lado $\lambda < 0$, ya que para $\lambda = 0$ la única solución es la trivial: $u \equiv 0$.

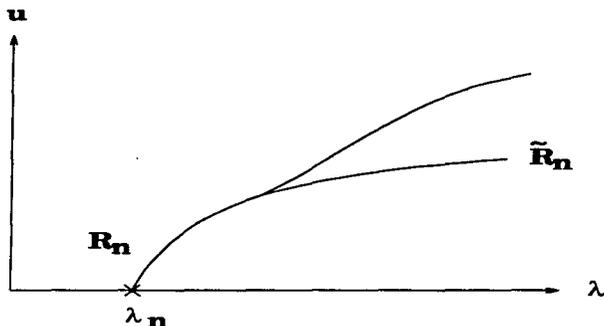


Figura 4.12: \tilde{R}_n podría ser un subconjunto de R_n .

4.20.2 Crecimiento de las ramas bifurcadas

Una vez que se ha demostrado que las ramas no pueden regresar a la solución trivial por otro punto de bifurcación, queda pendiente ver el crecimiento de las mismas; es decir, si en algún momento simplemente dejan de existir (si son acotadas), o si continúan indefinidamente (no acotadas). La forma en la que se estudiará este punto será demostrando el teorema de bifurcación global (ver I.1.4), viendo que el grado de cierto mapeo en un conjunto es no trivial, indicando entonces la bifurcación de ramas no acotadas a partir de la solución trivial (pues ya se descartó la posibilidad de que estas regresen).

Teorema: \tilde{R}_n , $n > 1$, es no acotado (y por lo tanto también R_n)

Prueba:

Supongamos que \tilde{R}_n es acotado; por lo tanto existe un abierto acotado Ω en $(B_{\frac{1}{n}}^1)^4 \times \mathbb{R}$ que lo contiene, de tal forma que no hay soluciones no triviales sobre $\partial\Omega$; y cerca del punto de bifurcación es de la forma de un producto: $|u| < 2\varepsilon$, $|\lambda - \lambda_n| < 2\rho$, y que llamaremos B_ε .

Entonces, como el mapeo $u - F^{-1}(H, N, M)$ se anula sobre $\partial\Omega$ sólo cuando $u = 0$, el grado:

$$\deg(u - \hat{F}^{-1}(u, \lambda), |u| < \varepsilon'; \Omega)$$

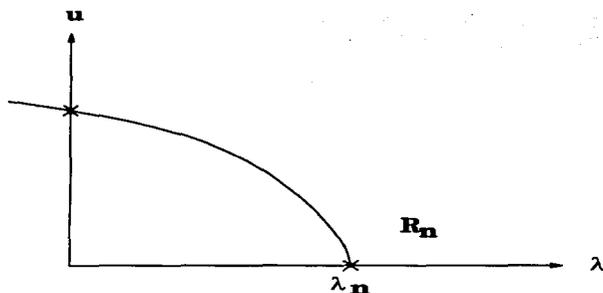


Figura 4.13: Otra situación improbable: las ramas no pueden cruzar del lado $\lambda < 0$.

está bien definido para toda ε' ; donde $\hat{F}^{-1}(u, \lambda) \equiv F^{-1}(\hat{H}(\eta, \nu, \mu), \hat{N}(\eta, \nu, \mu), \hat{M}(\eta, \nu, \mu); \lambda)$. Para ε' muy grande, dado que Ω es acotado, se tiene que $|u| - \varepsilon' < 0$ sobre Ω , por lo tanto el grado es cero.

Ahora, para $\varepsilon' < \varepsilon$, $\deg(u - \hat{F}^{-1}(u, \lambda), |u| - \varepsilon'; \Omega) = \deg(u - \hat{F}^{-1}(u, \lambda); B_\varepsilon)$, pues \tilde{K}_n no regresa a la solución trivial; por lo tanto, fuera de B_ε los ceros de $u - \hat{F}^{-1}(u, \lambda)$ están a una distancia mayor de 2ε de la solución trivial.

Tomando entonces $\varepsilon = \varepsilon'$; ε pequeño, $u - \hat{F}^{-1}(u, \lambda) = (\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u + G(u, \lambda)$. Sobre ∂B_ε , $|u| - \varepsilon = 0$, entonces $|\lambda| = 2\rho$; donde $\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda_n \pm 2\rho)$ es invertible, (lo cual se verá más adelante que se utilicen las bases de Fourier correspondientes), así que se puede hacer una deformación de G a cero.

Entonces:

$$\deg((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u, |u| - \varepsilon; B_\varepsilon) = \deg((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u, \rho^2 - |\lambda - \lambda_n|^2; B_\varepsilon)$$

mediante la deformación $\tau(|u| - \varepsilon) + (1 - \tau)(\rho^2 - |\lambda - \lambda_n|^2)$. Nótese que, para $|u| = 2\varepsilon$, si $(\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u = 0$ entonces $\lambda = \lambda_n$ y la deformación es positiva. Para $|\lambda - \lambda_n| = 2\rho$ se tiene que $u = 0$ y la deformación es negativa.

Por lo tanto, tomando a $B_{\pm\rho}$ una bola pequeña con centro en $u = 0$, $\lambda = \lambda_n \pm \rho$:

$$\begin{aligned} \deg((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u, |u| - \varepsilon; B_\varepsilon) &= \deg((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u, \rho - (\lambda - \lambda_n); B_\rho) + \\ &\quad \deg((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \lambda))u, \rho + (\lambda - \lambda_n); B_\rho) \\ &= \text{índice}((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, -\rho))u) - \text{índice}((\mathbf{I} - D\hat{F}^{-1}(0, \rho))u). \end{aligned}$$

Más adelante se verá que la diferencia de tales índices es no trivial, indicando que hay soluciones no triviales, en contradicción con el hecho de que \hat{R}_n es acotada. \square

4.20.3 Linearización del problema de punto fijo

En esta parte se dará la linearización del problema de punto fijo:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix} - F^{-1} \begin{bmatrix} \hat{H}(\eta, \nu, \mu) \\ \hat{N}(\eta, \nu, \mu) \\ \hat{M}(\eta, \nu, \mu) \end{bmatrix} = 0 ,$$

necesaria para terminar con la justificación del teorema de bifurcación global. Para ello, escribamos la ecuación de arriba como:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \nu \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\eta}(H, N, M) \\ \hat{\nu}(H, N, M) \\ \hat{\mu}(H, N, M) \end{bmatrix} = 0 .$$

Cuya solución trivial es $\eta = 0$ ($H = 0$), $\nu = \psi(\lambda)$ ($N = -\lambda\psi$), $\mu = 0$ ($M = 0$). Defínase entonces el funcional:

$$\mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(\tau) \equiv \begin{bmatrix} \tau u_2 \\ \psi + \tau u_3 \\ \tau u_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\eta}(\hat{H}(\tau, \psi + \tau u_3, \tau u_4), \dots) \\ \hat{\nu}(\hat{H}(\tau, \psi + \tau u_3, \tau u_4), \dots) \\ \hat{\mu}(\hat{H}(\tau, \psi + \tau u_3, \tau u_4), \dots) \end{bmatrix} .$$

La linearización viene dada a partir de la linearización para \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(\tau) = \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(0) + \frac{d}{d\tau} \mathcal{J}(u_2, u_3, u_4)(0)\tau + \dots .$$

No es difícil convencerse de que dicha linearización queda como:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \frac{\partial(\hat{\eta}, \hat{\nu}, \hat{\mu})}{\partial(H, N, M)} \begin{bmatrix} \frac{d\hat{H}}{d\tau} \\ \frac{d\hat{N}}{d\tau} \\ \frac{d\hat{M}}{d\tau} \end{bmatrix} (0) = 0 .$$

Dada la invertibilidad del mapeo $(\eta, \nu, \mu) \longrightarrow (H, N, M)$ y asumiendo la notación: $\frac{d\hat{H}}{d\tau}(0) \equiv X$, $\frac{d\hat{N}}{d\tau}(0) \equiv Y$, $\frac{d\hat{M}}{d\tau}(0) \equiv Z$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \left[\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \mu)} \right]_{(0, \psi, 0)}^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0 .$$

Más aún, ya que $\hat{H}(0, \nu, \mu) = 0 \Rightarrow \hat{H}_\nu^\circ = \hat{H}_\mu^\circ = 0$;
 $\hat{M}(\eta, \nu, 0) = 0 \Rightarrow \hat{M}_\eta^\circ = \hat{M}_\nu^\circ = 0$; $\hat{N}(-\eta, \nu, \mu) = \hat{N}(\eta, \nu, \mu) \Rightarrow \hat{N}_\nu(\cdot, \nu, \mu)$ impar, por lo tanto $\hat{N}_\eta(0, \psi, 0) = 0$, y ya que $\hat{N}_\mu(0, \psi, 0) = 0$ (ver sec. 4.6), es inmediato que:

$$\left[\frac{\partial(\hat{H}, \hat{N}, \hat{M})}{\partial(\eta, \nu, \mu)} \right]_{(0, \psi, 0)}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_\eta^\circ & & \\ & \hat{N}_\nu^\circ & \\ & & \hat{M}_\mu^\circ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{H}_\eta^\circ} & & \\ & \frac{1}{\hat{N}_\nu^\circ} & \\ & & \frac{1}{\hat{M}_\mu^\circ} \end{bmatrix} .$$

Por lo tanto se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{H}_\eta^\circ} & & \\ & \frac{1}{\hat{N}_\nu^\circ} & \\ & & \frac{1}{\hat{M}_\mu^\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0 .$$

Ahora se buscará obtener una expresión para X, Y, Z en términos de u_2, u_3 y u_4 . Para ello volvamos a las ecuaciones de equilibrio:

$$\hat{H}'(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) = (1 + \tau u_4) \hat{N}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) + \lambda(\psi + \tau u_3)$$

$$\hat{N}'(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) = -(1 + \tau u_4) \hat{H}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) - \lambda \tau u_2$$

$$\hat{M}'(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) = -\tau u_2 \hat{N}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) + (\psi + \tau u_3) \hat{H}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4)$$

Linearizando las expresiones anteriores (y evaluando en $\tau = 0$) se llega a que:

$$\begin{bmatrix} \hat{H}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) + \dots \\ \hat{N}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{N}(0, \psi, 0) + \dots \\ \hat{M}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{M}(0, \psi, 0) + \dots \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \hat{N}(0, \psi, 0) + \lambda\psi + u_4 \hat{N}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{N}(0, \psi, 0) + \lambda u_3 + \dots \\ -\hat{H}(0, \psi, 0) - u_4 \hat{H}(0, \psi, 0) - \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) - \lambda u_2 + \dots \\ -u_2 \hat{N}(0, \psi, 0) + \psi \hat{H}(0, \psi, 0) + \psi \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) + u_3 \hat{H}(0, \psi, 0) \dots \end{bmatrix}$$

Ahora, usando de nueva cuenta que $\hat{N}(0, \psi, 0) + \lambda\psi = 0$ y que $\hat{H}(0, \psi, 0) = \hat{M}(0, \psi, 0) = 0$; la igualdad de arriba se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) \\ -\lambda\psi + \frac{d}{d\tau} \hat{N}(0, \psi, 0) \\ \frac{d}{d\tau} \hat{M}(0, \psi, 0) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\lambda\psi + \lambda\psi - \lambda\psi u_4 + \frac{d}{d\tau} \hat{N}(0, \psi, 0) + \lambda u_3 \\ -\frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) - \lambda u_2 \\ \lambda\psi u_2 + \psi \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0) \end{bmatrix} ,$$

simplificando y con la notación propuesta con anterioridad, este sistema se escribe como:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} Y + \lambda(u_3 - \psi u_4) \\ -X - \lambda u_2 \\ \psi X + \lambda\psi u_2 \end{bmatrix} \\ = \left[\mathbf{J} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_3 - \psi u_4 \\ -u_2 \end{bmatrix} \right]$$

Llamamos la atención al siguiente hecho, que se sigue de la linealización de H, N, M :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{H}(0, \psi, 0)\tau + \dots \\ \hat{N} &= \hat{N}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{N}(0, \psi, 0)\tau + \dots \\ \hat{M} &= \hat{M}(0, \psi, 0) + \frac{d}{d\tau} \hat{M}(0, \psi, 0)\tau + \dots\end{aligned}$$

Entonces X, Y, X tienen las mismas propiedades de paridad de H, N y M respectivamente; es decir, X impar, Y y Z pares.

El sistema anterior se puede integrar fácilmente para obtener:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}(s) &= \Omega_0(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_0 \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{J} \Omega_0(s) \int_0^s \Omega_0^t(t) \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 - \psi(\lambda)u_4 \end{bmatrix} dt \\ Z(s) &= \tilde{Z}_0 + \psi(\lambda) \int_0^s (X + \lambda u_2) dt \quad ,\end{aligned}$$

(en donde se usó la imparidad de X para ajustar a cero la constante de integración correspondiente). Ahora se analizará el sistema integral, para el caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico ($n > 1$) y para el caso 2π -periódico por separado.

Caso $\frac{2\pi}{n}$ -periódico

La condición de $\frac{2\pi}{n}$ -periodicidad para X, Y ; $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \left(\frac{2\pi}{n}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_0 \end{bmatrix}$, se traduce en:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_0 \end{bmatrix} = \lambda \mathbf{J} [\mathbf{I} - \Omega_0 \left(\frac{2\pi}{n}\right)]^{-1} \Omega_0 \left(\frac{2\pi}{n}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Omega_0^t(t) \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) - \psi(\lambda)u_4(t) \end{bmatrix} dt \quad .$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}(s) &= \lambda \mathbf{J} \Omega_0(s) [\mathbf{I} - \Omega_0 \left(\frac{2\pi}{n}\right)]^{-1} \Omega_0 \left(\frac{2\pi}{n}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Omega_0^t(t) \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) - \psi(\lambda)u_4(t) \end{bmatrix} dt + \\ &\quad \lambda \mathbf{J} \Omega_0(s) \int_0^s \Omega_0^t(t) \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) - \psi(\lambda)u_4(t) \end{bmatrix} dt \quad .\end{aligned}$$

De la misma forma, para $Z(s)$:

$$Z \left(\frac{2\pi}{n}\right) = Z_0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (X + \lambda u_2) dt = 0 \quad .$$

Sin embargo, esta condición se satisface automáticamente, si se tiene que X y u_2 son $\frac{2\pi}{n}$ -periódicas y además impares (sustituya las series correspondientes).

Por otra parte, ya se ha dicho anteriormente que, el caso con este tipo de periodicidad está condicionado, además, por el cumplimiento de $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mu(t) dt = 0$; es decir, por: $\int_0^{\frac{2\pi}{n}} u_4(t) dt = 0$. Ahora, según se vió de la linealización que relaciona a u_2, u_3 y u_4 con X, Y y Z , se tiene que $u_4 = \frac{Z}{M_2}$; así que la condición anterior se reescribe como:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}} Z(t) dt = 0 \quad ,$$

y la determinación de la constante \tilde{Z}_0 debe hacerse teniendo en cuenta tal condición.

Entonces, del hecho de que la integral anterior sea cero, se tiene que la serie de Fourier para Z es tal que no cuenta con término constante, por lo tanto se tienen los siguientes desarrollos para u_2, u_3, u_4, X, Y, Z , si la solución ha de ser una que tenga las propiedades de paridad y periodicidad antes citadas:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(nks) \quad , \quad Y = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \cos(nks) \quad , \quad Z = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cos(nks) \\ u_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{2,k} \sin(nks) \quad , \quad u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3,k} \cos(nks) \quad , \quad u_4 = \sum_{k=1}^{\infty} u_{4,k} \cos(nks) \end{aligned}$$

Si ahora se substituyen estas expresiones en la ecuación diferencial para X, Y, Z se tendrá, para cada modo, el siguiente arreglo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} nk & -1 & 0 \\ 1 & -nk & 0 \\ \psi & 0 & -nk \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{nk}} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_{3,k} - \psi u_{4,k} \\ -u_{2,k} \\ \psi u_{2,k} \end{bmatrix} \quad .$$

Obsérvese que $|\mathbf{X}_{nk}| = nk((nk)^2 - 1)$; el cual no es cero pues estamos en el caso $n > 1$. De aquí que:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{nk((nk)^2 - 1)} \begin{bmatrix} (nk)^2 & -nk & 0 \\ nk & -(nk)^2 & 0 \\ -\psi nk & \psi & 1 - (nk)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\psi \\ -1 & 0 & 0 \\ \psi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} \quad (n > 1) \quad .$$

Ahora sí, haciendo lo mismo para la linealización que se tenía al principio, y substituyendo las expresiones para los coeficientes de Fourier de X, Y y Z , se tiene que:

$$\begin{bmatrix} u_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{nk((nk)^2 - 1)} \begin{bmatrix} \frac{1}{H_2} \\ \frac{1}{N_2} \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (nk)^2 & -nk & 0 \\ nk & -(nk)^2 & 0 \\ -\psi nk & \psi & 1 - (nk)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\psi \\ -1 & 0 & 0 \\ \psi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Simplificando:

$$\frac{1}{(nk)^2-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{H}_\eta^0} & & \\ & \frac{1}{\hat{N}_\nu^0} & \\ & & \frac{1}{\hat{M}_\mu^0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{H}_\eta^0((nk)^2-1) - \lambda & -\lambda nk & \psi \lambda nk \\ -\lambda nk & \hat{N}_\nu^0((nk)^2-1) - \lambda & \psi \lambda \\ \psi \lambda nk & \psi \lambda & \hat{M}_\mu^0((nk)^2-1) - \psi^2 \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} u_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} = 0$$

Ahora bien, con mucha paciencia y cuidado el lector puede corroborar que si se define el determinante $\Delta \equiv \left| \frac{1}{(nk)^2-1} \mathbf{A} \mathbf{B} \right|$, entonces:

$$\Delta = \frac{(nk)^2 - q(\lambda)}{(nk)^2 - 1} ;$$

donde $q(\lambda) \sim n^2$ cerca del punto de bifurcación $(0, \lambda_n)$ ($q(\lambda_n) = n^2$).

Por lo tanto, para todos los modos $k \neq 0, 1$, podemos hacer una deformación de λ de la forma $\lambda \rightarrow \tau \lambda$, obteniendo matrices para estos modos con determinante $\frac{(nk)^2 - q(\tau \lambda)}{(nk)^2 - 1}$ (las cuales, para $\tau = 0$ se reducen a la identidad), donde $q(\tau \lambda) \leq (kn)^2$ (recuérdese que se supuso que $q(\lambda)$ es creciente); es decir, todas son matrices de determinante positivo.

Para el modo $k = 0$, dado que $Z_0 = u_{4,0} = 0$, esta matriz se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{H}_\eta^0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{N}_\nu^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{H}_\eta^0 + \lambda & 0 \\ 0 & \hat{N}_\nu^0 + \lambda \end{bmatrix} ,$$

cuyo determinante también es positivo.

Por lo tanto, el índice que se dejó pendiente para este caso, depende únicamente del modo $k = 1$, para el cual, el determinante es:

$$\Delta = \frac{n^2 - q(\lambda)}{n^2 - 1} ;$$

cuyo signo es positivo para $\lambda < \lambda_n$ y negativo para $\lambda > \lambda_n$; es decir, la diferencia de los índices es 2, dando por consiguiente la bifurcación de ramas no acotadas con esta periodicidad.

Caso 2π -periódico

Ya se había dicho (ver acotación antes de la primera subsección) que el problema de punto fijo para este tipo de periodicidad se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega_{\mu}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix} \hat{H} \\ \hat{N} \\ \hat{M} \end{bmatrix} .$$

Ahora vamos a repetir lo que se hizo para el caso anterior, primero linearizando y encontrando al final una ecuación para los coeficientes de Fourier de los distintos modos de $\tilde{\eta}$, $\tilde{\nu}$, μ .

Para hacer la linearización, primero debemos saber (para estas nuevas variables) alrededor de qué punto es que debe hacerse y después definir variables análogas a u_2, u_3 y u_4 ; pero esto es sencillo: escribiendo $\eta = \tau u_2$, $\nu = \psi + \tau u_3$, $\mu = \tau u_4$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} = \Omega_{\mu}^t \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} = \Omega_{\tau u_4}^t \begin{bmatrix} \tau u_2 \\ \psi + \tau u_3 \end{bmatrix} ,$$

por lo tanto, para $\tau = 0$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} ;$$

así que las variaciones para $\tilde{\eta}$ y $\tilde{\nu}$ se calculan a partir de:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau \tilde{u}_2 \\ \psi + \tau \tilde{u}_3 \end{bmatrix} &= \Omega_{\tau u_4}^t \begin{bmatrix} \tau u_2 \\ \psi + \tau u_3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} + \left(\int_0^s u_4 \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} + \mathbf{I} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Big|_0^s \tau ; \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi \left(\int_0^s u_4 \right) + u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} .$$

Obsérvese que, ya que se está buscando a u_2, u_3 y u_4 con las propiedades de periodicidad y paridad del espacio $(B_{2\pi}^t)^4$; es decir, u_2 impar y u_3, u_4 pares (por lo tanto $\int_0^t u_4$ impar); se tiene que \tilde{u}_2 también debe ser 2π -periódica e impar.

Entonces, la linearización viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \tau \bar{u}_2 \\ \psi + \tau u_3 \\ \tau u_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega_0^t u_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix} \hat{H}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) \\ \hat{N}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) \\ \hat{M}(\tau u_2, \psi + \tau u_3, \tau u_4) \end{bmatrix} = 0 ;$$

de donde fácilmente se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^s u_4 & 0 \\ \int_0^s u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{H_0^s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0 .$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 - \psi \int_0^s u_4 - \frac{X}{H_0^s} &= 0 \\ u_3 - \frac{Y}{N_0^s} &= 0 \\ u_4 - \frac{Z}{M_0^s} &= 0 . \end{aligned}$$

Ahora bien, el problema para este caso cuenta con las condiciones necesarias $\int_0^{2\pi} \mu = 0$ y $A(2\pi) = 0$. En términos de las variables \bar{u}_2, u_3 y u_4 , la primera de estas condiciones se lee: $\int_0^{2\pi} u_4 = 0$; pero según se vió arriba, esta condición es equivalente a:

$$\int_0^{2\pi} Z = 0 .$$

Por otra parte, para la segunda condición, según se vé de arriba, esta se puede reescribir como:

$$\int_0^{2\pi} \Omega_0^t \begin{bmatrix} \psi \int_0^t u_4 - \frac{X}{H_0^s} \\ -\frac{Y}{N_0^s} \end{bmatrix} = 0 .$$

Ahora, aprovechando que ya se hizo la linearización de las ecuaciones de equilibrio para el caso anterior, para este caso, en vista de que $u_2 = \bar{u}_2 + \psi \int_0^s u_4$, se obtiene simplemente substituyendo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{J} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 + \psi \int_0^s u_4 \\ u_3 - \psi u_4 \end{bmatrix} \\ \psi X + \lambda \psi (\bar{u}_2 + \psi \int_0^s u_4) \end{bmatrix} ;$$

de donde se tiene, tomando en cuenta que se busca $X_o = 0$, e integrando que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \Omega_o \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_o \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{J} \Omega_o \int_0^s \Omega_o^t \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 + \psi \int_0^t u_4 \\ u_3 - \psi u_4 \end{bmatrix} dt \\ Z &= \tilde{Z}_o + \psi \int_0^s (X + \lambda(\tilde{u}_2 + \int_0^t u_4)) dt . \end{aligned}$$

Ahora, la condición de 2π -periodicidad de X, Y se traduce en:

$$\int_0^{2\pi} \Omega_o^t \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ u_3 \end{bmatrix} dt + \psi \int_0^{2\pi} \Omega_o^t \begin{bmatrix} \int_0^t u_4 \\ u_4 \end{bmatrix} dt = 0 .$$

El primer término es cero pues viene de la linealización de $A(2\pi) = 0$, en las variables $\tilde{\eta}, \tilde{\nu}$. En cuanto al segundo término, desarrollándolo se tiene que en realidad ya es cero:

$$\begin{aligned} \psi \int_0^{2\pi} \Omega_o^t \begin{bmatrix} \int_0^t u_4 \\ u_4 \end{bmatrix} dt &= \psi \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} (\int_0^s u_4) \cos(t) - u_4 \sin(t) \\ (\int_0^s u_4) \sin(t) + u_4 \cos(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \psi \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} (\int_0^t u_4) \sin(t) \\ -(\int_0^t u_4) \cos(t) \end{bmatrix}' dt \\ &= \psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la 2π -periodicidad de X, Y se deriva de la linealización de $A(2\pi) = 0$.

En cuanto a Z la condición $Z(2\pi) = \tilde{Z}_o$, esta dá como resultado que:

$$\int_0^{2\pi} (X + \lambda(\tilde{u}_2 + \int_0^t u_4)) dt = 0 .$$

La cual se satisface automáticamente, una vez que se tiene la 2π -periodicidad e imparidad de X, \tilde{u}_2 y $\int_0^s u_4$.

Por último, se advierte que las constantes \tilde{Y}_o y \tilde{Z}_o deben determinarse, la primera a partir de $A(2\pi) = 0$ y la segunda de $\int_0^{2\pi} Z dt = 0$.

Proponiendo entonces los desarrollos de Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= \sum_1^{\infty} \tilde{u}_{2,k} \sin(ks) , & u_3 &= \sum_0^{\infty} u_{3,k} \cos(ks) , & u_4 &= \sum_1^{\infty} u_{4,k} \cos(ks) \\ X &= \sum_1^{\infty} X_k \sin(ks) , & Y &= \sum_0^{\infty} Y_k \cos(ks) , & Z &= \sum_1^{\infty} Z_k \cos(ks) , \end{aligned}$$

se tiene, volviendo a la condición $A(2\pi) = 0$

$$\begin{aligned} A(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \Omega_o^t \begin{bmatrix} \tau \tilde{u}_2 \\ \psi + \tau u_3 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Omega_o^t \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ u_3 \end{bmatrix} dt . \end{aligned}$$

Empleando entonces los desarrollos para \tilde{u}_2 y u_3 , la condición anterior se reduce a una sola ecuación (la primera componente se satisface automáticamente):

$$\pi(\tilde{u}_{2,1} + u_{3,1}) = 0 ; \text{ es decir , } \tilde{u}_{2,1} + u_{3,1} = 0 .$$

Substituyendo en la ecuación diferencial para X, Y y Z se tiene, para cada modo, el siguiente arreglo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \\ -\psi & 0 & -k \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_k} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & -\lambda\psi \\ -\lambda & 0 & -\frac{\lambda\psi}{k} \\ \lambda\psi & 0 & \frac{\lambda\psi^2}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} ;$$

vemos que $|\mathbf{X}_k| = k(k^2 - 1) \neq 0$ para $k \neq 1$.

Para el modo $k = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} X_1 - Y_1 &= \lambda(u_{3,1} - \psi u_{4,1}) \\ X_1 - Y_1 &= -\lambda(\tilde{u}_{2,1} + \psi u_{4,1}) \\ -\psi X_1 - Z_1 &= \lambda(\psi \tilde{u}_{2,1} + \psi^2 u_{4,1}) \end{aligned} ,$$

de donde las dos primeras ecuaciones se cumplen, siempre y cuando $\lambda(u_{3,1} + \tilde{u}_{2,1}) = 0$, lo cual ya es cierto por la condición $A(2\pi) = 0$. Entonces, para los modos $k \geq 1$ se tendrá que:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} \begin{bmatrix} k^2 & -k & 0 \\ k & -k^2 & 0 \\ -\psi k & \psi & 1 - k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda & -\lambda\psi \\ -\lambda & 0 & -\frac{\lambda\psi}{k} \\ \lambda\psi & 0 & \frac{\lambda\psi^2}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} ,$$

y simplificando:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \frac{\lambda}{k^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & k & \psi(\frac{1}{k} - k) \\ k & 1 & 0 \\ -\psi k & -\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} .$$

Para $k = 1$, haremos lo siguiente para expresar a X_1, Y_1 y Z_1 , en términos de los coeficientes $\tilde{u}_{2,1}, u_{3,1}$ y $u_{4,1}$: utilizando la expresión para $A(2\pi)$ en términos de X, Y y $\int_0^s u_4$ e integrando se tiene, para la segunda componente:

$$\frac{X_1}{H_0^s} + \frac{Y_1}{N_0^s} - \psi u_{4,1} = 0 .$$

Juntando entonces con la primera de las ecuaciones para X_1, Y_1 de arriba:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_0^s} & \frac{1}{N_0^s} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi u_{4,1} \\ \lambda(u_{3,1} - \psi u_{4,1}) \end{bmatrix} ,$$

y despejando:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{H_0^*} + \frac{1}{N_0^*}} \begin{bmatrix} \psi u_{4,1}(1 - \frac{\lambda}{N_0^*}) + \frac{\lambda u_{3,1}}{N_0^*} \\ \psi u_{4,1}(1 + \frac{\lambda}{H_0^*}) - \frac{\lambda u_{3,1}}{H_0^*} \end{bmatrix}$$

Substituyendo después en la ecuación para Z_1 :

$$Z_1 = -\psi \left[\frac{\psi u_{4,1}(1 + \frac{\lambda}{H_0^*})}{\frac{1}{H_0^*} + \frac{1}{N_0^*}} + \frac{\lambda N_0^*}{H_0^* + N_0^*} \bar{u}_{2,1} \right]$$

Ahora que ya se tienen los coeficientes X_k, Y_k, Z_k , regresamos de nueva cuenta a la linealización de $\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega_{\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F^{-1} \begin{bmatrix} H \\ N \\ M \end{bmatrix} = 0$:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{2,k} + \psi \frac{u_{4,k}}{k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{k^2 - 1} \begin{bmatrix} \frac{1}{H_0^*} & & \\ & \frac{1}{N_0^*} & \\ & & \frac{1}{M_0^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & \psi(\frac{1}{k} - k) \\ k & 1 & 0 \\ -\psi k & -\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} = 0$$

Simplificando la expresión anterior se llega a que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda}{H_0^*(1-k^2)} & \frac{\lambda k}{H_0^*(1-k^2)} & \frac{\psi}{k}(1 + \frac{\lambda}{H_0^*}) \\ \frac{\lambda k}{N_0^*(1-k^2)} & 1 + \frac{\lambda}{N_0^*(1-k^2)} & 0 \\ -\frac{\lambda \psi k}{M_0^*(1-k^2)} & -\frac{\lambda \psi}{M_0^*(1-k^2)} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \bar{u}_{2,k} \\ u_{3,k} \\ u_{4,k} \end{bmatrix} = 0$$

Pedimos al lector un último esfuerzo de paciencia y dedicación para comprobar que:

$$|\mathbf{B}| = \frac{k^2 - q(\lambda)}{k^2 - 1}$$

Pensemos ahora en la situación en que $q(\lambda) \sim 1$. Si se toma como para el caso anterior una deformación $\lambda \rightarrow \tau\lambda$ y deformando después el término (1,3), $\frac{\psi}{k}$, es claro que la matriz \mathbf{B} se puede llevar a la identidad. Así que las matrices asociadas con $k \geq 2$ tienen determinante positivo, cuando $\lambda \sim 0^+$.

Obsérvese que para el caso $k=0$, como $u_{4,0} = Z_0 \equiv 0$, el arreglo anterior se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda}{H_0^*} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\lambda}{N_0^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = 0$$

cuyo determinante sigue siendo positivo.

Ahora, para el caso $k = 1$ se tiene (ya que $\tilde{u}_{2,1} + u_{3,1} = 0$; y dado que la tercera ecuación es consistente):

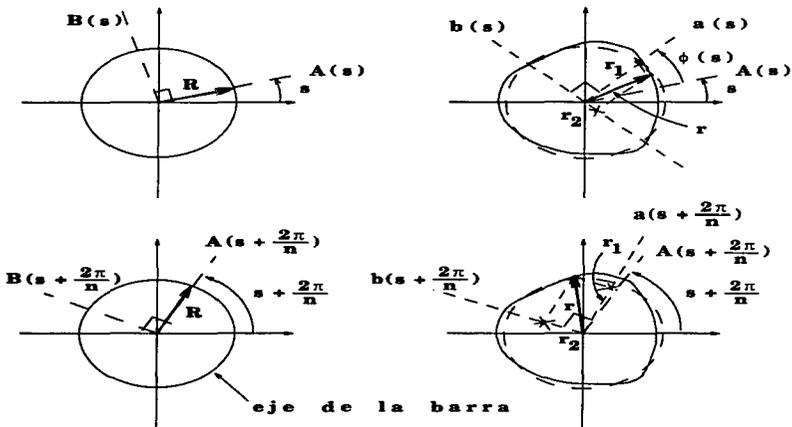
$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda}{H\tilde{q} + N\tilde{q}} & \psi \left(1 + \frac{\lambda - \tilde{N}\tilde{q}}{H\tilde{q} + N\tilde{q}} \right) \\ \psi \lambda \frac{\tilde{N}\tilde{q}}{M\tilde{q}(H\tilde{q} + N\tilde{q})} & 1 + \psi^2 \frac{\tilde{N}\tilde{q}(H\tilde{q} + \lambda)}{N\tilde{q}(H\tilde{q} + N\tilde{q})} \end{bmatrix} ;$$

cuyo determinante resulta ser $\frac{H\tilde{q}\tilde{N}\tilde{q}}{H\tilde{q} + N\tilde{q}} \left(\frac{q(\lambda) - 1}{\lambda} \right)$. Nótese que haciendo $\lambda \rightarrow 0^+$, la parte entre paréntesis tiene a la derivada de $q(\lambda)$ en $\lambda = 0$; dado que por hipótesis $q(\lambda)$ es creciente, este límite es positivo.

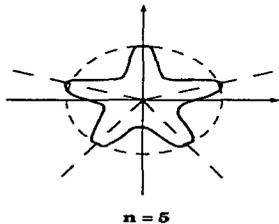
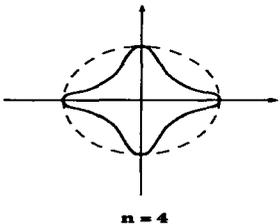
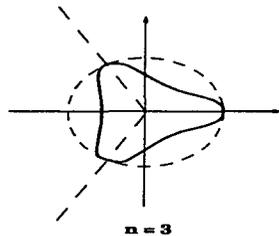
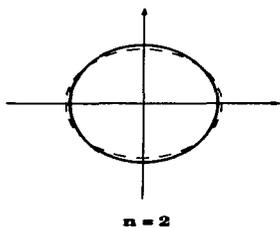
Así que, una vez cubiertos todos los casos para k , volvemos a obtener lo que se afirmaba al principio de esta parte: *no hay bifurcación de soluciones no triviales en $(B_{2\pi}^1)^4$ a partir de $\lambda = 0$* . Como puede verse, la condición $\tilde{u}_{2,1} + u_{3,1} = 0$, que posee el espacio de las soluciones buscadas $\tilde{\eta}$ y $\tilde{\nu}$, fué de crucial importancia para este caso en particular.

Por otra parte, si ahora $\lambda \sim \lambda_n$ (tal que $q(\lambda_n) = 0$, el determinante antes calculado resulta ser negativo para $k < n$, excepto para los casos $k = 0, 1$ en donde es positivo. De manera que, para $\lambda \sim \lambda_n$, $\lambda < \lambda_n$ el índice resulta ser $(-1)^{n-2}$, (pues hay $n - 2$ casos en que se obtienen matrices con determinante negativo: $2, \dots, n - 1$); mientras que para $\lambda \sim \lambda_n$, $\lambda > \lambda_n$ el índice es $(-1)^{n-1}$. Por lo tanto, al pasar de un lado a otro de λ_n , el índice cambia en $2(-1)^n$; indicando existencia de ramas no acotadas de soluciones en $(B_{2\pi}^2)^4$ que bifurcan a partir de la solución trivial, desde el punto $(0, \lambda_n)$.

Finalmente mostramos al lector un dibujo de la configuración que tiene el eje de la barra de las distintas soluciones cuya existencia se ha demostrado, para los casos $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.



Soluciones Simétricas:



Conclusiones

1. En la parte que concierne a la bifurcación local de soluciones, se obtuvo un poco más de información que la sola prueba de la existencia de soluciones no triviales, que nacen de la solución trivial. Por ejemplo, se estableció que, cerca de un punto de bifurcación, estas ramas son curvas. Más aún, dada la propiedad de la componente η de no tener ceros dobles, fué como se logró justificar que las ramas no pueden cruzar el eje $\lambda = 0$. Por otro lado, se dió una prueba de la imposibilidad de tener bifurcación a partir del estado $\lambda = 0$, y que constituye uno de los resultados más importantes que no se obtuvieron en el artículo de Healey.
2. La parte sobre bifurcación global también cuenta con resultados que no sólo se limitan a justificar el comportamiento de las ramas, lejos de la solución trivial. También se vió cómo es que las propiedades nodales de η no permiten que las ramas regresen a otro punto de bifurcación distinto, dejando como única alternativa, la existencia de ramas no acotadas. Además, se incluyó otra prueba, de la no existencia de soluciones no triviales, a partir de $\lambda = 0$.
3. Sin embargo, hay muchos puntos que no se trataron. Por ejemplo, todavía está por determinar, si las ramas, lejos de la solución trivial, siguen siendo curvas con una parametrización como la que tienen cerca de la solución trivial. Por otro lado, habría sido de mucha ayuda encontrar *cotas a priori* de las soluciones, y así poder determinar el número de estados posibles, correspondientes a un determinado valor de λ . Otro aspecto importante a tratar, habría sido el de determinar la *estabilidad de las ramas obtenidas*. Además, en lo que toca a bifurcación local, falta determinar la *convexidad de las ramas*; esto es, si se trata de bifurcación subcrítica, supercrítica o transcítica.
4. Faltó también un estudio de bifurcación de soluciones a partir de las ramas ya obtenidas, y que pudieran ya no gozar de las propiedades del espacio $(B_{\frac{1}{2}\pi}^1)^4$.
5. En la misma línea del punto anterior, queda por hacer un estudio de bifurcación sin restringirse a ningún espacio en particular; esto es, bifurcación de soluciones no necesariamente simétricas.
6. Los puntos a tratar sugeridos arriba, no son fáciles y no estaba contemplado cubrirlos cuando se comenzó con este trabajo. La idea desde un principio, siempre fué la de proveer otra forma de abordar el problema y sacar los mismos resultados que los del artículo de Healey (en este último aspecto, el objetivo su cumplió por encima de lo que se esperaba). En lo personal encuentro el enfoque propuesto en este trabajo, más accesible que el del artículo antes mencionado, para quienes apenas comienzan a estudiar los métodos y las herramientas de la teoría bifurcación (como es mi caso).

Referencias

- [Ant] ANTMAN, Stuart S. Nonlinear Problems of Elasticity. Springer-Verlag. Applied Mathematical Sciences 107. 1995.
- [A&C] ANTMAN, Stuart S. & CARBONE, Ernest R. Shear and necking instabilities in nonlinear elasticity. Journal of Elasticity, Vol. 7, No. 2, April 1977. pp. 125-151.
- [A&D] ANTMAN, Stuart S. & DUNN, Ernest J. Qualitative behavior of buckled nonlinearly elastic arches. Journal of Elasticity, Vol 10, No. 3, July 1980. pp. 225-239.
- [A&R] ANTMAN, Stuart S. & ROSENFELD, Gerald. Global behavior of buckled states of nonlinearly elastic rods. SIAM REVIEW, Vol 20, No 3, July 1978. pp. 513-566.
- [Ber] BERGER, Melvyn S. Nonlinearity and functional analysis. Academic Press. 1977.
- [Br] BRAUN, Martin. Differential equations and their applications. Springer-Verlag. 1975.
- [Ciar] CIARLET, Philippe G. Mathematical elasticity. Vol I.: Three-dimensional elasticity. North-Holland. 1988.
- [Cod] CODDINGTON, Earl A. & LEVINSON, Norman. McGraw-Hill book co. 1955.
- [Cou] COURANT, Richard & FRITZ, John. Introduction to calculus and analysis. Vol 2. Springer-Verlag. 1989.
- [GSS] GOLUBITSKY, Martin - STEWART, Ian - SCHAEFFER, David G. Singularities and groups in bifurcation theory. Vol II. Springer-Verlag. Applied Mathematical Sciences 69. 1988.
- [Hea] HEALEY, Timothy J. Global bifurcation and continuation in the presence of symmetry with an application to solid mechanics. SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 19, No. 4, July 1988. pp. 824-840.
- [Ize1] IZE, Jorge. Topological bifurcation. Reportes de investigación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Vol 3, No. 34, Noviembre 1993. UNAM. (Publicado en Topological nonlinear analysis. PNLDE Vol 15. Birkhauser, 1995. pp. 341-463).
- [Ize2] IZE, Jorge. Teoría de bifurcación. Comunicaciones técnicas del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. Serie verde: notas, No. 19. Septiembre 1981. UNAM.

- [**Nir1**] NIRENBERG, Louis. Functional analysis. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University. 1975.
- [**Nir2**] NIRENBERG, Louis. Topics in nonlinear functional analysis. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University. 1974.
- [**Nov**] NOVOZHILOV, V.V. Theory of elasticity. Pergamon Press. 1961.
- [**Smo**] SMOLLER, Joel. Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag. Grundlehren der mathematischen wissenschaften 258. 1983.
- [**VeU**] VEUBEKE DE, Fraejis B.M. A course in elasticity. Springer-Verlag. 1979.