01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

COMERCIO INTERNACIONAL: OPTIMIZACION, DUALIDAD Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD

PRESENTADA POR:

DORA ELENA LEDESMA CARRION

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERIA (INVESTIGACION DE OPERACIONES)

DIRIGIDA POR:

DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA 1997

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México el haberme dado la oportunidad de ocupar un lugar en sus aulas. Al Dr. Francisco Venegas Martínez por la dirección de este trabajo de tesis así como su constante apoyo y motivación hasta llevarla al cabo. Al M.I. Héctor Ruíz por su asesoría y ayuda en el uso del procesador de texto PCTEX, la elaboración de las gráficas, y la revisión del presente trabajo. Al M.I. Fernando Cruz A. por la revisión, crítica y comentarios. A mis sinodales, los Doctores Sergio Fuentes Maya y Manuel Ordorica Mellado, y a los M.I. Rubén Tellez Sánchez y Jaime F. Gómez Vega. A mi familia por su apoyo, respeto y amor. A mis maestros, compañeros y alumnos por enseñarme algo nuevo cada día. A mis amigos por su apoyo sin condiciones.

...la ignorancia engendra violencia.

INDICE

INTRODUCCION

El presente trabajo es una aplicación de la Teoría de Optimización en el campo de la Economía, en el área del Comercio Internacional. Aquí, se presentan y resuelven los problemas primal y dual del consumidor y del productor. El problema primal para el consumidor es el de maximizar su utilidad sujeta a su presupuesto; el problema dual para el consumidor es el de minimizar su gasto dada cierta utilidad. En el caso del primal para el productor es el de maximizar su producción sujeta a los costos y dotaciones; y su problema dual es el de minimizar los gastos de producción restringidos a su producción y a sus dotaciones. Al juntar ambos problemas, para el productor, se llega al de maximizar sus beneficios restringidos a la función de producción y a las dotaciones. Al resolver los problemas primal y dual del consumidor se obtienen las demandas de Marshall y de Hicks, respectivamente. Al resolver los del productor se obtienen las demandas que maximizan producción y las que minimizan gastos, respectivamente, y si consideramos el problema de maximizar beneficios se encuentran las demandas derivadas. Los problemas de maximización y minimización se resuelven a partir de las condiciones de Kuhn-Tucker. Al derivar totalmente las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker se procede al análisis de sensibilidad, también llamado estática comparativa, en donde la variación de alguna de las variables exógenas afecta a las variables endógenas. De este análisis se pueden identificar los efectos ingreso y sustitución. Además se obtienen las relaciones entre dichas demandas, las cuales son las llamadas específicamente ecuaciones de Slustky para el caso del consumidor. En particular estaremos interesados en funciones de utilidad y de producción del tipo Cobb-Douglas.

La estructura de la tesis es como sigue: En el capítulo 1 aparecen la teoría que fundamenta la optimización, así como la motivación a relacionarla con la teoría económica. En el capítulo 2, se presenta y resuelve el modelo más simple con un factor (trabajo) y una economía cerrada. Para luego abrirla usando el modelo Ricardiano. En el capítulo 3, se estudia la función de producción para una cierta tecnología que depende de dos factores (trabajo y capital). Para el caso de una economía cerrada que luego se abre para obtener beneficios por comerciar. En el capítulo 4, se extiende el problema a m factores y j bienes, resolviéndose para dos factores dos bienes (modelo 2×2). Primero para una economía cerrada y luego a una abierta. Finalmente, el capítulo 5 incluye un conjunto de conclusiones. Aquí, se mencionan también las limitaciones y ventajas de los modelos, técnicas y herramientas desarrolladas en este trabajo de tesis. Uno de los resultados que se obtienen de los modelos analizados es que el comerciar siempre trae consigo beneficios para ambas economías y de aquí el interés de su estudio.

CAPITULO 1

1.1 OPTIMIZANDO EN ECONOMIA

El problema básico en economía es la distribución de los recursos escasos entre fines competitivos. Por ejemplo, para un consumidor dadas sus preferencias (función de utilidad) debe escoger qué y cuánto adquirir de determinado bien dado su presupuesto (restricción presupuestal) para obtener su máxima satisfacción posible; para el caso de una empresa sería maximizar la producción de algún bien sujeta a sus costos de producción; para el gobierno podría ser obtener el beneficio máximo posible restringido a la recaudación fiscal y pago de su burocracia entre otros.

Hablando desde el punto de vista de la economía, las variables del problema a optimizar son *instrumentos*, en las cuales el problema esta sintetizado; la función a ser maximizada (o minimizada) es la *función objetivo*, la cual representa las metas o fines; y las *restricciones* a dichas metas resumen la escases de recursos. El conjunto de instrumentos que satisfacen todas las restricciones se conoce como *conjunto de oportunidades*. Resolver el problema es establecer el conjunto de oportunidades que maximizan (o minimizan) la función objetivo.

Resolver problemas de optimización incluyendo todos los puntos de vista (consumidor-productor-gobierno) es complejo, por lo que el problema global puede ser analizado desde el punto de vista de cada participante y luego integrarlo para tener una perspectiva lo más amplia posible. Los economistas hablan de dos corrientes: la clásica y la neoclásica, la tabla 1.1 resume las corrientes desde cada punto de vista.

Hay que hacer notar que en el presente trabajo sólo se considerará la teoría neoclásica. Tampoco se considerarán los sindicatos y el gobierno.

TABLA 1.1		
TEORIA	CLASICA	NEOCLASICA
	Teoría del valor.	Teoría de la utilidad.
	Proletariado y burguesía.	Capital y trabajo.
	Plusvalia.	Beneficios.
	Distribución de la riqueza.	Consumo.

1.2 OPTIMIZACION

Matemáticamente el problema consiste en determinar los valores que maximicen (minimicen) una función dada sujeta a un conjunto de restricciones.

1.2.1 PLANTEAMIENTO FORMAL DEL PROBLEMA

Sea $\mathbf{x}$ el vector de variables a determinar o endógenas, es decir,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

El vector (1.1) se dice que es *factible* si satisface todas las restricciones del problema, y el conjunto de todos los vectores factibles es el *conjunto de oportunidades* $\mathcal{X}$. El problema es determinar el vector $\mathbf{x}$ que pertenezca a $\mathcal{X}$ y que maximize (o minimize) una función objetivo con derivada continua

$$F = F(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

El problema general de programación matemática es,

$$\begin{aligned} &\max_{x} \quad F(\mathbf{x}) \\ &\text{s.a.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Maximizar $F(\mathbf{x})$ es equivalente a maximizar $a+bF(\mathbf{x})$, $b>0$, o a minimizar $a+bF(\mathbf{x})$, $b<0$, constantes multiplicativas positivas o constantes aditivas en la función objetivo del problema no afectan la solución óptima, mientras que constantes multiplicativas negativas pueden ser usadas para convertir problemas de maximización a problemas de minimización y viceversa.

Casos importantes del problema de programación matemática general son los de programación clásica, programación no-lineal y programación lineal. Aquí nos interesa el caso no-lineal donde las restricciones son de dos tipos:

1) las de desigualdad

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &\leq b_1, \\ g_2(\mathbf{x}) &\leq b_2, \\ &\vdots \\ g_m(\mathbf{x}) &\leq b_m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i = 1, 2, .., m$, son funciones con derivadas continuas. En forma matricial

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} . ; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

y

2) de no-negatividad:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \tag{1.6}$$

por lo que el problema no-lineal queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\max_x \quad F(\mathbf{x}) \\ &\text{s.a.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Además si la función objetivo es de forma lineal, esto es,

$$F(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \tag{1.8}$$

con

$$\mathbf{c} = (c_1 \quad c_2 \quad ... \quad c_n), \tag{1.9}$$

y las restricciones del tipo desigualdad son lineales, *i.e.*,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned} \tag{1.10}$$

En forma matricial

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

con lo que el problema con función objetivo y restricciones del tipo desigualdad de forma lineal se establece de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max_{x} \quad & F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx}, \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

De aquí en adelante se entenderá que el producto de los vectores es del tipo interior o escalar, a menos que se especifique lo contrario. El vector $\mathbf{x}$ es un vector columna y el vector $\boldsymbol{\lambda}$ será un vector renglón, como más adelante se especificará.

1.2.2 TIPOS DE MAXIMOS, EL TEOREMA DE WEIERSTRASS, Y EL TEOREMA LOCAL-GLOBAL

En el problema general de programación matemática (1.3), un vector $\mathbf{x}^*$ es un máximo global, si es factible y con él la función objetivo toma un valor máximo, esto es,

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \ \text{ y } \ F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \tag{1.13}$$

Un máximo global $\mathbf{x}^*$ es un máximo global estricto si (1.13) se cumple con desigualdad estricta, es decir, el que tomaría con

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \ \ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{1.14}$$

El teorema de Weierstrass da condiciones suficientes para la existencia de un máximo global. Si el conjunto de vectores factibles $\mathcal{X}$ es compacto (*i.e.*, cerrado y acotado, donde $\mathcal{X} \in E^n$, E^n espacio euclideano $n-$*dimensional*) y no vacío, y la función objetivo $F(\mathbf{x})$ es continua sobre $\mathcal{X}$, entonces $F(\mathbf{x})$ tiene un máximo global. La prueba de éste teorema se sigue del hecho de que una función continua definida sobre un conjunto compacto tiene una imagen compacta, *i.e.*, el conjunto de números reales

$$F(\mathcal{X}) = \{z \in E | z = F(\mathbf{x}) \ \text{ para alguna } \ x \in \mathcal{X}\} \tag{1.15}$$

es compacto, y todo conjunto compacto de números reales contiene a su supremo. Entonces, si F^* es la mínima cota superior de $F(\mathcal{X})$, luego entonces hay un $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ que satisface $F(\mathbf{x}^*) = F^*$. Como $F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}^*)$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, el punto $\mathbf{x}^*$ es un máximo global.

Por otro lado, $\mathbf{x}^*$ es un máximo local si es factible y el valor de la función objetivo es mayor o igual al obtenido por cualquier otro vector factible suficientemente cercano:

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \ \text{ y } \ F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap \mathcal{N}_\epsilon(\mathbf{x}^*), \tag{1.16}$$

donde $\mathcal{N}_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ es una $\epsilon-$*vecindad* de $\mathbf{x}^*$ para alguna $\epsilon > 0$, esto es, una vecindad de radio $\epsilon > 0$ centrada en $\mathbf{x}^*$. Entonces, el conjunto de $\mathbf{x}$ es tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^*)^2} < \epsilon.$$

Un máximo local $\mathbf{x}^*$ es un máximo local estricto si el valor de la función objetivo en $\mathbf{x}^*$ excede a cualquier otro vector factible suficientemente cercano, es decir,

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap \mathcal{N}_\epsilon(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{1.17}$$

Obviamente un máximo global es un máximo local pero el inverso no se cumple.

Un segundo teorema fundamental de la programación matemática es el teorema local-global, que da condiciones suficientes para que un máximo local sea un máximo global. Si el conjunto de puntos factibles $\mathcal{X}$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío y $F(\mathbf{x})$ es una función continua que es cóncava sobre $\mathcal{X}$, entonces un máximo local es un máximo global; y el conjunto de puntos en el cual el máximo es obtenido es convexo. Si además se supone que $F(\mathbf{x})$ es estrictamente cóncava estonces la solución es única, *i.e.*, hay un máximo global estricto (único). Como el conjunto de puntos factibles es convexo, cualquier punto entre dos puntos factibles es también factible, y como la función objetivo es estrictamente cóncava la recta que conecta dos puntos sobre la curva se desliza por debajo de la curva. Luego, los puntos factibles a la derecha del máximo local estricto $(\mathbf{x}^*)$ digamos $\mathbf{x}^1$, no puede ser un máximo global ya que existen puntos factibles entre ellos tales como $\mathbf{x}^2$ para los cuales $F(\mathbf{x}^2) > F(\mathbf{x}^1)$. Condiciones similares se mantienen para puntos factibles a la izquierda de $\mathbf{x}^*$. Entonces el máximo local estricto en $\mathbf{x}^*$ debe ser el único máximo global estricto.

1.2.3 PROGRAMACION NO-LINEAL SIN RESTRICCIONES

Como se recordará el problema no-lineal viene expresado por la ecuación (1.7). En el caso de no haber restricciones, el problema se reduce a maximizar (o minimizar) F sujeta a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, esto es,

$$\begin{aligned} &\max_{x} \quad F(\mathbf{x}), \\ &\text{s.a.} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Supongamos que existe un máximo local en $\mathbf{x}^*$ luego, para todo punto en la vecindad:

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}^* + h\Delta\mathbf{x}), \tag{1.19}$$

donde $h \in \mathbb{R}_+$, y $h << 1$ y $\Delta\mathbf{x}$ es una dirección de desplazamiento en E^n. Además, si F es dos veces diferenciable con derivadas continuas, se puede expander en serie de Taylor, esto es,

$$F(\mathbf{x}^* + h\Delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + h\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2!}h^2(\Delta\mathbf{x})'\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^* + \theta h\Delta\mathbf{x})(\Delta\mathbf{x}), \tag{1.20}$$

donde

$$0 < \theta < 1, \tag{1.21}$$

la comilla denota transpuesta y

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right), \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Reescribiendo (1.20), se obtiene

$$\begin{aligned} F(x_1^* + h\Delta x_1, ..., x_n^* + h\Delta x_n) &= F(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) + \\ &+ h\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)\Delta x_j + \\ &+ \frac{1}{2!}h^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(x_1^* + \theta h\Delta x_1, ..., x_n^* + \theta h \Delta x_n)\Delta x_j \Delta x_k. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Combinando (1.19) y (1.20) se llega a la desigualdad fundamental:

$$h\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2!}h^2(\Delta\mathbf{x})'\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^* + \theta h \Delta\mathbf{x})(\Delta\mathbf{x}) \leq 0, \tag{1.25}$$

la cual es una condición necesaria para un máximo local en $\mathbf{x}^*$.

Si $\mathbf{x}^*$ es solución interior, $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$, entonces (1.25) debe ser válida para todas las direcciones $\Delta\mathbf{x}$. Si se supone que una de las componentes se encuentra en la frontera, digamos, x_j^* y además todas las otras variaciones son nulas, (1.25) implica que, como en x_j^* la única dirección posible es para la cual $\Delta x_j \geq 0$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\Delta x_j \leq 0. \tag{1.26}$$

La desigualdad fundamental (1.25) requerirá como una condición de primer orden que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \leq 0 \ \text{ si } \ x_j^* = 0. \tag{1.27}$$

Entonces, mientras las primeras derivadas con respecto a x_j necesariamente se anulan en una solución interior ($x_j^* > 0$), en una solución frontera ($x_j^* = 0$) las primeras derivadas necesariamente son menores o igual a cero. Y como una u otras soluciones se anulan, su producto es cero, esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)x_j^* = 0. \tag{1.28}$$

Generalizando, se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)x_j^* = 0, \tag{1.29}$$

donde cada término de la suma es nulo. De aquí un máximo local en $\mathbf{x}^*$ está caracterizado por las $(2n+1)$ condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) &\leq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* &= 0, \\ \mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Las condiciones anteriores implican que la derivada parcial de primer orden se anula si el instrumento es positivo, y si es no-positiva el instrumento es cero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = 0 \ \text{ si } \ x_j^* > 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \leq 0 \ \text{ si } \ x_j^* = 0, \\ \qquad j = 1, 2, .., n. \end{cases} \tag{1.31}$$

1.2.4 TEOREMA DEL HIPERPLANO DE SEPARACION

Si los conjuntos convexos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son además ajenos, *i.e.*, si no tienen puntos en común, **entonces siempre es posible encontrar un hiperplano que pase entre los dos conjuntos** (ver figura 1.1). Sea la ecuación de este hiperplano en $\mathbb{R}_2$, $P_1x_1 + P_2x_2 = k$. Como $\mathcal{S}_2$ se encuentra, por ejemplo, arriba de este plano, para todo x_1^2, $x_2^2 \in \mathcal{S}_2$, $P_1x_1^2 + P_2x_2^2 \geq k$. Similarmente, para toda x_1^1, $x_2^1 \in \mathcal{S}_1$, $P_1x_1^1 + P_2x_2^1 \leq k$. De aquí, el teorema del hiperplano separante dice que si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son conjuntos ajenos y convexos en un espacio $n-$*dimensional*, existen escalares P_1, P_2,..., P_n, no todos cero, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i^1 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2, \quad \forall \mathbf{x}^1 \in \mathcal{S}_1, \quad \mathbf{x}^2 \in \mathcal{S}_2.$$

El teorema también es válido si los conjuntos se intersectan en un sólo punto, esto es, $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son tangentes entre si.

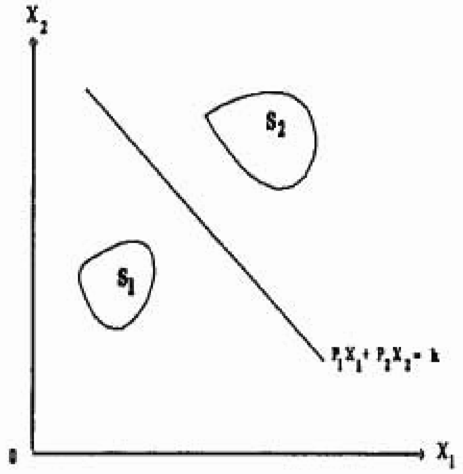

FIGURA 1.1. Teorema del hiperplano de separación. $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ dos conjuntos convexos y ajenos.

La prueba de que si $F(\mathbf{x})$ y $g_i(\mathbf{x})$ son funciones cóncavas entonces

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = F(\mathbf{x}^*),$$

donde $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de maximización, está basado es este teorema.

1.2.5 PROGRAMACION NO-LINEAL CON RESTRICCIONES

Considere el siguiente problema:

$$\begin{cases} \max \; F(x_1, x_2), \\ \text{s.a.} \;\; g(x_1, x_2) = b. \end{cases} \tag{1.32}$$

Supóngase que existe una solución local en $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)'$, y que en ese punto una de las derivadas parciales de la restricción no se anula, por ejemplo

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) \neq 0. \tag{1.33}$$

Dada (1.33) la diferencial total de la restricción,

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0, \tag{1.34}$$

la cual puede ser escrita en una vecindad de $\mathbf{x}^*$ como:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}, \tag{1.35}$$

resolviendo para x_2 en función de x_1, se sigue

$$x_2 = h(x_1), \quad \text{donde} \quad \frac{dh}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}. \tag{1.36}$$

El poblema puede entonces ser reescrito como un problema sin restricción en la variable x_1, esto es,

$$\max \quad H(x_1) = F(x_1, h(x_1)). \tag{1.37}$$

Utilizando (1.36) la condición de primer orden para un máximo local es:

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dh}{dx_1} = 0. \tag{1.38}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0. \tag{1.39}$$

Si se hubiera puesto en terminos de x_2:

$$x_1 = s(x_2), \quad \text{donde} \quad \frac{ds}{dx_2} = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial g/\partial x_2}{\partial g/\partial x_1}, \tag{1.40}$$

el poblema podría entonces haberse reescrito como un problema sin restricción en la variable x_2, esto es,

$$\max \quad S(x_2) = F(s(x_2), x_2). \tag{1.41}$$

Utilizando (1.40) la condición de primer orden para un máximo local es:

$$\frac{dS}{dx_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{ds}{dx_2} = 0. \tag{1.42}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F/\partial x_1}{\partial g/\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0. \tag{1.43}$$

De (1.39) ó (1.43) se llega a que

$$\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial g/\partial x_1} = \frac{\partial F/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2},$$

por lo que

$$\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_2} = \frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}. \tag{1.44}$$

Cada curva de nivel de F toma la forma $F(x_1, x_2) =$ constante, así de la forma diferencial

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 = 0, \tag{1.45}$$

se sigue que en la curva de nivel

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{nivel} = -\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_2}, \tag{1.46}$$

y de (1.34) la pendiente de la restricción es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{restric.} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}. \tag{1.47}$$

La condición de primer orden para un máximo, (1.44), implica

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{nivel} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{restric.}. \tag{1.48}$$

Obsérvese que las condiciones necesarias (1.39) ó (1.43) más la restricción original pueden ser obtenidas como las condiciones para un punto crítico de la función:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda(b - g(x_1, x_2)), \tag{1.49}$$

siendo

$$\lambda = \frac{\partial F/\partial x_j}{\partial g/\partial x_j}, \quad j = 1, 2,$$

y las condiciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2; \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2) = 0. \tag{1.51}$$

La variable λ se le denomina el multiplicador de Lagrange y $\mathcal{L}$ la función lagrangiana o Lagrangiano.

Si ahora tomamos el problema (1.6) y se procede análogamente, esto es, se supone que hay solución local en $\mathbf{x}^*$ y que las restricciones satisfacen que la matriz jacobiana es no singular o de rango completo. Sea

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

y $\mathbf{x}^2$ en función de $\mathbf{x}^1$, esto es,

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}^1), \tag{1.53}$$

donde $\mathbf{h}$ es un vector columna de m funciones. El problema puede entonces ser escrito como

$$\max \quad H(\mathbf{x}^1) = F(\mathbf{x}^1, \mathbf{h}(\mathbf{x}^1)), \tag{1.54}$$

y la condición necesaria para un máximo local es

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^2}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^1} = \mathbf{0}, \tag{1.55}$$

donde $\partial H/\partial \mathbf{x}^1$ es un vector de $(1 \times (n-m))$ y $\partial \mathbf{h}/\partial \mathbf{x}^1$ es una matriz de $(m \times (n-m))$. Como las restricciones pueden ser escritas como una identidad, *i.e.*,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^1, \mathbf{h}(\mathbf{x}^1)) \equiv \mathbf{b}, \tag{1.56}$$

diferenciando

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^1} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^1} = \mathbf{0}, \tag{1.57}$$

además

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^1} = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^1}\right), \tag{1.58}$$

y (1.55) puede escribirse como

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^1} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^1} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^2}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^1}\right) = \mathbf{0}, \tag{1.59}$$

por lo que también

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^2}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\right) = \mathbf{0}, \tag{1.60}$$

y estableciendo

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^2}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)^{-1} = (\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \dots \;\; \lambda_m), \tag{1.61}$$

las condiciones necesarias (1.59) y (1.60) pueden ser escritas como

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{0}. \tag{1.62}$$

Estas condiciones necesarias junto con las restricciones iniciales pueden ser obtenidas diferenciando la función:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, \dots, x_n)).\end{aligned} \tag{1.63}$$

El paso final es encontrar el punto $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ en el cual todas las primeras derivadas parciales del Lagrangiano se anulen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

El primer conjunto de n ecuaciones establecen que el vector gradiente de la función objetivo debe ser igual al vector de multiplicadores de Lagrange multiplicado por el Jacobiano de las restricciones, esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\lambda}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*), \tag{1.65}$$

ó

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*), \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.66}$$

Las restantes m condiciones son simplemente las restricciones, esto es,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b}. \tag{1.67}$$

Simultáneamente al resolver las $m+n$ ecuaciones en (1.64) se obtienen las n variables endógenas

$$\mathbf{x}^* = (x_1^* \;\; x_2^* \;\; ... \;\; x_n^*)',$$

y los m multiplicadores de Lagrange

$$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^* \;\; \lambda_2^* \;\; ... \;\; \lambda_m^*).$$

Al suponer que se cumplen las condiciones de suficiencia, las variables endógenas $\mathbf{x}^*$ son una solución local al problema, como puede ser visto heurísticamente por el hecho de que las restricciones son satisfechas y que las $\mathbf{x}^*$ maximizan el Lagrangiano, el cual, en el punto $(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$, es simplemente el valor de la función objetivo:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = F(\mathbf{x}^*), \tag{1.68}$$

donde las restricciones se satisfacen.

Para una interpretación geométrica de las $m+n$ condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\lambda}^* \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*), \end{cases} \tag{1.69}$$

note que si la $i-$*ésima* restricción está definida como:

$$\{\mathbf{x} \in E^n | g_i(\mathbf{x}) = b_i\}, \tag{1.70}$$

entonces, el vector gradiente de la $i-$*ésimo* restricción

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right), \tag{1.71}$$

la cual es el $i-$*ésimo* renglón de la matriz Jacobiana $\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}$, es ortogonal a la curva donde, al derivar

$$dg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{1.72}$$

La condiciones (1.69) establecen que $\mathbf{x}^*$ pertenece al conjunto de puntos factibles $\mathcal{X}$ y que en $\mathbf{x}^*$ la dirección de crecimiento (el vector gradiente de la función objetivo) es una combinación ponderada de las normales de las restricciones (los vectores gradiente de las restricciones), y los ponderadores son los multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Las condiciones (necesarias) de segundo orden establecen que la matriz Hessiana de las derivadas parciales de segundo orden del Lagrangiano con respecto a las variables endógenas

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \tag{1.73}$$

debe ser definida negativa o semidefinida negativa cuando se evalúa en el máximo local $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ cuando

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)d\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{1.74}$$

Si la matriz Hessiana es definida negativa entonces las condiciones de primer orden (1.69) son suficientes para un máximo local.

1.3 CONDICIONES KUHN-TUCKER

Considere el siguiente problema de programación no-lineal

$$\begin{aligned} \max_{x} \ & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Las restricciones en desigualdad pueden ser convertidas en igualdades agregando variables de holgura:

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (s_1 \ \ldots \ s_m)', \tag{1.76}$$

por lo que (1.61) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \max_{x} \ & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

La función Lagrangiana será

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}), \tag{1.78}$$

y las condiciones de primer orden para un máximo local son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \leq \mathbf{0}; \tag{1.79a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{x} = 0; \tag{1.79b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \tag{1.79c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}; \tag{1.79d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = -\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}; \tag{1.79e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}}\mathbf{s} = -\boldsymbol{\lambda}\mathbf{s} = 0; \tag{1.79f}$$

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \tag{1.79g}$$

donde todas las variables, funciones y derivadas se evaluan en $\mathbf{x}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$ y $\mathbf{s}^*$. Eliminando el vector de las variables de holgura, $\mathbf{s}$ reemplazándolo por $\mathbf{b}-\mathbf{g}(\mathbf{x})$ se obtienen las *condiciones Kuhn-Tucker:*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \leq \mathbf{0}; \\
\left(\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{x} = 0; \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \\
\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = \mathbf{0}; \\
\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}; \\
\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) = 0; \\
\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.
\end{cases} \tag{1.80}
$$

Las mismas funciones resultarian de haber definido el Lagrangiano (1.78) como

$$
\mathcal{L} = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})). \tag{1.81}
$$

Las condiciones Kuhn-Tucker son entonces:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^*\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}; \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^*\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\right)\mathbf{x}^* = 0; \\
\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}; \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}; \\
\boldsymbol{\lambda}^*\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) \geq 0; \\
\boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}.
\end{cases} \tag{1.82}
$$

ó

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \tag{1.83a}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) x_j = 0; \tag{1.83b}
$$

$$
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n; \tag{1.83c}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\cdot) \geq 0; \tag{1.83d}
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\cdot)) \geq 0; \tag{1.83e}
$$

$$
\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \tag{1.83f}
$$

evaluadas en $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$.

Estas condiciones son necesarias y suficientes para un máximo local (estricto) si la función objetivo es cóncava (estricta) y las restricciones son convexas. De (1.79b) se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \ \text{ y/o } \ x_j = 0; \ \ j = 1, 2, ..., n, \tag{1.84}$$

donde la primera expresión matemática en (1.84) es denominada como condición marginal. Además,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ \text{ si } \ x_j^* > 0, \\ x_j^* = 0, \ \text{ si } \ \dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} < 0. \end{array}\right. \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.85}$$

Similarmente para (1.83d) y (1.83f)

$$\lambda_i = 0 \ \text{ y/o } \ g_i(\mathbf{x}^*) = b_i; \ \ i = 1, 2, ..., m, \tag{1.86}$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} g_i(\mathbf{x}^*) = b_i \ \text{ si } \ \lambda_i^* > 0 \\ \lambda_i^* = 0 \ \text{ si } \ g_i(\mathbf{x}^*) < b_i \end{array}\right. \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{1.87}$$

Las condiciones (1.85) y (1.87) son conocidas como *condiciones de holguras complementaria.*

1.4 TEOREMA DE KUHN-TUCKER

La aproximación Kuhn-Tucker al problema de programación no-lineal establecido en (1.75), esto es

$$\begin{aligned} \max_{x} \ & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.75}$$

y la introducción de la función Lagrangiana (1.81)

$$\mathcal{L} = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})). \tag{1.81}$$

nos llevaron a las condiciones Kuhn-Tucker

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathbf{0}, & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \geq \mathbf{0}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* = 0, & \boldsymbol{\lambda}^* \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* = 0, \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, & \boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.88}$$

Notando que la dirección de las desigualdades y las condiciones (1.30) para un máximo, $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto silla del Lagrangiano, ya que la maximización relativamente recae en la no negatividad de las variables o instrumentos y la minimización en los multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \quad \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. \tag{1.89}$$

El problema de encontrar vectores no-negativos $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ que satisfagan (1.89) es conociendo el *problema punto silla*.

De acuerdo al teorema Kuhn-Tucker, $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de programación no-lineal si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ resuelve el problema punto silla y bajo ciertas condiciones, $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de programación no-lineal solamente si existe un $\boldsymbol{\lambda}^*$ para el cual $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ resuelve el problema punto silla.

De acuerdo a la primera parte del teorema, si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto silla como en (1.89) entonces $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de programación no-lineal. Suponiendo que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto silla, como $\mathbf{x}^*$ maximiza el Lagrangiano (relativo a toda $\mathbf{x} \geq 0$):

$$F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \leq F(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)). \tag{1.90}$$

y como $\boldsymbol{\lambda}^*$ minimiza:

$$F(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) \leq F(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)). \tag{1.91}$$

La última desigualdad puede ser escrita

$$(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \tag{1.92}$$

y como los componentes de λ pueden ser arbitrariamente grandes, se sigue que $\mathbf{x}^*$ debe satisfacer la restricción en desigualdad:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}. \tag{1.93}$$

Por otro lado, escogiendo $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ en (1.92), notándose que $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$ y $\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}$ se sigue que:

$$\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)) = 0. \tag{1.94}$$

Reescribiendo (1.90) usando (1.94)

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.95}$$

Como $\boldsymbol{\lambda}^*$ es no-negativa, si $\mathbf{x}$ es factible entonces

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}), \tag{1.96}$$

así $\mathbf{x}^*$ maximiza $F(\cdot)$ resolviendo el problema de programación no-lineal. La suficiencia ("si") del teorema Kuhn-Tucker, no requiere supuestos especiales acerca de las funciones $F(\cdot)$ y $\mathbf{g}(\cdot)$.

La necesaria ("solamente si") del teorema Kuhn-Tucker requiere ciertos supuestos a-cerca de $F(\cdot)$ y $\mathbf{g}(\cdot)$. Esta parte del teorema es válida si se asume que la función $F(\cdot)$ es cóncava, las $\mathbf{g}(\cdot)$ son convexas, y que existe un punto en el conjunto de oportunidades el cual satisface todas las restricciones de desigualdad como las desigualdades estrictas, *i.e.*, existe $\mathbf{x}^0$ tal que $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) < \mathbf{b}$. Bajo estos supuestos $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de programación no-lineal

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0},\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b},\quad \text{si } F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}. \tag{1.97}$$

Ahora defínanse dos conjuntos de dimensión $(m+1)$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \text{ para alguna } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \tag{1.98a}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}^*) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}, \tag{1.98b}$$

donde a_0 y b_0 son escalares, y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores renglón *m−dimensionales*. Como $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema de programación no-lineal los dos conjuntos, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, son ajenos, así, por el teorema del hiperplano que separa conjuntos convexos ajenos existe un vector renglón $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$ no zero, donde λ_0 es un escalar y $\boldsymbol{\lambda}$ es un vector $(1 \times m)$, tal que

$$(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \leq (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \forall \begin{pmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \begin{pmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}. \tag{1.99}$$

De la definición de $\mathcal{B}$ se tiene que $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$ es un vector no-negativo y como $(F(\mathbf{x}^*), \mathbf{0})$ se encuentra en la frontera de $\mathcal{B}$:

$$\lambda_0 F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \leq \lambda_0 F(\mathbf{x}^*) \quad \forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.100}$$

A causa de que $y_0 > 0$, si $y_0 = 0$ luego en (1.100) $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \leq 0 \;\; \forall \;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y la no-negatividad de $\boldsymbol{\lambda}$ contradice la existencia de un $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) < \mathbf{b}$. Pero si $y_0 > 0$ entonces ambos lados de (1.100) pueden ser divididos por y_0 para obtener

$$F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \leq F(\mathbf{x}^*) \;\; \forall \;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

donde

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \frac{1}{y_0}\boldsymbol{\lambda} \geq 0. \tag{1.101}$$

En particular, si $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ entonces:

$$\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \leq 0, \tag{1.102}$$

pero, como $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\lambda}^*(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) = 0. \tag{1.103}$$

Entonces, definiendo el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})), \tag{1.104}$$

de (1.101), (1.103), y la no-negatividad de $\boldsymbol{\lambda}$ se llega a que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto silla para $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ para $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ dando lugar a la condición necesaria ("solamente si") del teorema Kuhn-Tucker. Por lo tanto, bajo el supuesto de que $\mathbf{x}^*$ resuelve (1.75) si y solamente si existe un $\boldsymbol{\lambda}^*$ tal que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ resuelve el problema punto silla (1.89).

Ahora considerar (1.89) con el supuesto de que F y $\mathbf{g}$ son diferenciables. La primera parte del problema punto silla es la maximización de $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$ escogiendo $\mathbf{x}$ no-negativas. Utilizando los resultados (1.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &\leq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{x}^* &= 0, \\ \mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.105}$$

La segunda parte de (1.89), la minimización de $\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda})$ escogiendo multiplicadores de Lagrange no-negativos da lugar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &\geq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) &= 0, \\ \boldsymbol{\lambda}^* &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.106}$$

Estos dos conjuntos de condiciones son las de Kuhn-Tucker (1.88).

1.5 EL PROBLEMA DUAL DE PROGRAMACION NO-LINEAL

Considerar el siguiente problema primal de programación no-lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0; \quad i = 1, 2, ..., m, \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0; \quad i = 1, 2, ..., l, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{1.107}$$

El problema dual Lagrangiano es

$$\begin{aligned} \max \quad & G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.108}$$

donde

$$G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf\{F(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

Note que la función dual Lagrangiana G puede tomar valores de $-\infty$ para algún vector $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$. En la expresión para $G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, las restricciones $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ y $h_i(\mathbf{x}) = 0$ han sido incorporadas en la función objetivo usando los multiplicadores de Lagrange λ_i y μ_i. Nótese también que el multiplicador λ_i asociado con la restricción en desigualdad $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ es no-negativa, mientras el multiplicador μ_i asociado con la restricción en igualdad $h_i(\mathbf{x}) = 0$ no tiene restricción en el signo. Retomando la notación de las secciones anteriores

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}), \\ \text{s.a.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.109}$$

para el problema primal. Para el dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \\ \text{donde} \quad & G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf\{F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}. \end{aligned} \tag{1.110}$$

Teorema (débil de dualidad) 1.1 Sea $\mathbf{x}$ una solución factible para el problema primal (1.109), esto es, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, y $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. También sea $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ una solución factible para el problema dual (1.110), esto es, $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Entonces $F(\mathbf{x}) \geq G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$.

Prueba

Por definición de G, y como $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, se tiene

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= \inf\{F(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{X}\} \\ &\leq F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, y $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Lo que completa la prueba.

Corolario 1.1

$$\inf\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \geq \sup\{G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}.$$

Corolario 1.2

Si $F(\bar{\mathbf{x}}) \leq G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$, donde $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ y $\bar{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ resuelve los problemas primal y dual, respectivamente.

Corolario 1.3

Si $\inf\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = -\infty$, entonces $G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = -\infty$ para cada $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$.

Corolario 1.4

Si $\sup\{G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\} = \infty$, entonces el problema primal no tiene solución factible.

Lemma 1.1

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto convexo no vacío en E^n. Sean $\alpha : E^n \to E^1$ y $\mathbf{g} : E^n \to E^m$ convexas, y sea $\mathbf{h} : E^n \to E^l$ afín; esto es, $\mathbf{h}$ es de la forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Si el *Sistema 1* no tiene solución $\mathbf{x}$, entonces el *Sistema 2* tiene una solución $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$. El inverso es válido si $\lambda_0 > 0$.

$$\begin{aligned} &\textit{Sistema 1}: \ \alpha(\mathbf{x}) < 0, \ \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \ \ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \text{ para alguna } \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\ &\textit{Sistema 2}: \ \lambda_0\alpha(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \ge 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\ &\qquad\qquad (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \ge \mathbf{0}, \ \ (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \ne \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Suponga que el *Sistema 1* no tiene solución, y considere el siguiente conjunto:

$$\mathcal{D} = \{(p, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : p > \alpha(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{q} \ge \mathbf{g}(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{r} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \ \text{ para alguna } \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

Como $\mathcal{X}$, α, y $\mathbf{g}$ son convexas y $\mathbf{h}$ es afín, $\mathcal{D}$ es convexo. Como el *Sistema 1* no tiene solución, entonces $(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \notin \mathcal{D}$. Por lo que existe $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ no cero tal que

$$\lambda_0 p + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{r} \ge 0 \ \text{ para cada } \ (p, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \in cl\mathcal{D}, \tag{1.111}$$

para un $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ fijo. Como p y $\mathbf{q}$ pueden ser arbitrariamente grandes, (1.111) es válida solamente si $\lambda_0 \ge 0$ y $\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}$. Además, $(p, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = [\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x})] \in cl\mathcal{D}$. De (1.111) se obtiene

$$\lambda_0\alpha(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \ge 0.$$

Como la desigualdad de arriba es verdadera para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, el *Sistema 2* tiene solución.

Para demostrar el inverso, suponga que el *Sistema 2* tiene una solución $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ tal que $\lambda_0 > 0$ y $\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}$, que satisface

$$\lambda_0\alpha(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \ge 0 \ \text{ para cada } \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. De la desigualdad de arriba, como $\boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}$, se concluye que $\lambda_0\alpha(\mathbf{x}) \ge 0$. Como $\lambda_0 > 0$, $\alpha(\mathbf{x}) \ge 0$, y de aquí el *Sistema 1* no tiene solución.

Teorema (fuerte de dualidad) 1.2 Sean $\mathcal{X}$ un conjunto convexo no vacío en E^n, $F : E^n \to E^1$ y $\mathbf{g} : E^n \to E^m$ convexos, y $\mathbf{h} : E^n \to E^l$ afín; esto es, $\mathbf{h}$ es de la forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Existe un $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, y $\mathbf{0} \in \text{int}\mathbf{h}(\mathcal{X})$, donde $\mathbf{h}(\mathcal{X}) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$. Entonces

$$\inf\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \sup\{G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}\} \tag{1.112}$$

Además, si el inf es finito, entonces el $\sup\{G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}\}$ está en $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \ge \mathbf{0}$. Si el inf está en $\bar{\mathbf{x}}$, entonces $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Prueba

Sea $\gamma = \inf\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$. Si $\gamma = -\infty$, entonces por el corolario 1.3 del teorema 1.1, el $\sup\{G(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\lambda} \ge \mathbf{0}\} = -\infty$ y de aquí (1.112) es válida. Si suponemos que γ es finita, y se considera el siguiente sistema:

$$F(\mathbf{x}) - \gamma < 0, \ \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}, \ \ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$

por definición de γ, este sistema no tiene solución. De aquí por el lemma 1.1 existe un vector no cero $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ con $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbf{0}$ tal que

$$\lambda_0[F(\mathbf{x}) - \gamma] + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \tag{1.113}$$

Primero se muestra que $\lambda_0 > 0$. Por contradicción, suponga que $\lambda_0 = 0$. Existe un $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Sustituyendo en (1.113), se sigue que $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) \geq 0$. Como $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) \geq 0$ es posible solamente si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Pero como (1.113), $\lambda_0 = 0$ y $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, la cual implica que $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Pero como $\mathbf{0} \in \operatorname{int} \mathbf{h}(\mathcal{X})$, se puede escoger una $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\delta\boldsymbol{\lambda}$, donde $\delta > 0$. Además, $0 \leq \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\delta\|\boldsymbol{\lambda}\|^2$, lo que implica que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. Entonces, se ha mostrado que $\lambda_0 = 0$ implica que $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}$, lo cual es imposible. De esto, $\lambda_0 > 0$. Dividiendo (1.113) por λ_0 y denotando $\boldsymbol{\lambda}/\lambda_0$ y $\boldsymbol{\mu}/\lambda_0$ por $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ y $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, respectivamente, se llega a

$$F(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq \delta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}. \tag{1.114}$$

Esto muestra que $G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \inf\{F(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} \geq \delta$. Del teorema 1.1 $G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \delta$, y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ resuelve el problema dual.

Para completar la prueba, suponga que $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución óptima para el problema primal, esto es, $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, y $F(\bar{\mathbf{x}}) = \delta$. De (1.114), siendo $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, se obtiene $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0$. Como $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, lo que completa la prueba.

Teorema (del punto silla) 1.3 Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no vacío en E^n y sea $F : E^n \to E^1$, $\mathbf{g} : E^n \to E^m$ y $\mathbf{h} : E^n \to E^l$. Suponga que existe $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$, tal que

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \leq \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}), \tag{1.115}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y toda $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ con $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, donde $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Entonces $\bar{\mathbf{x}}$ y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ resuelven los problemas primal (1.109) y dual (1.110), respectivamente. Para el inverso, suponga que $\mathcal{X}$, F, y $\mathbf{g}$ son convexos y que $\mathbf{h}$ es afín; esto es, $\mathbf{h}$ es de la forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Luego, suponga que $\mathbf{0} \in \operatorname{int} \mathbf{h}(\mathcal{X})$ y que allí existe un $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ con $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Si $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución óptima del primal, entonces existe $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$, tal que (1.115) es válida.

Prueba

Suponga que existen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$, tal que (1.115) es válida. Como

$$F(\bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$$

para toda $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ y para toda $\boldsymbol{\mu} \in E^l$, así que $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Además, $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución factible del primal. También de $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ en la desigualdad de arriba, se sigue que $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0$. Como $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, entonces $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. De (1.115) para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ se obtiene

$$\begin{aligned} F(\bar{\mathbf{x}}) &= F(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \\ &= \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \\ &\leq \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \\ &= F(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.116}$$

Como (1.116) es válida para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, se sigue que $F(\bar{\mathbf{x}}) \leq G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$. Al notar que $\bar{\mathbf{x}}$ es factible para el primal y que $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$, del corolario 1.2 del teorema 1.1, se sigue que $\bar{\mathbf{x}}$ y $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ son óptimos para los problemas primal y dual, respectivamente.

Para el inverso, suponga que $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución óptima del primal. Por el teorema 1.2, existe $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ tal que $F(\bar{\mathbf{x}}) = G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Por definición de G, se tiene

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = G(\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \leq F(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \quad \text{para cada} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Pero como $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$,

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = F(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$

lo cual es la segunda desigualdad en (1.115). La primera desigualdad de (1.115) es válida al notar que $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, y $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Esto completa la prueba.

Teorema 1.4 Sea $\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, y considerar el problema primal (1.109) para minimizar $F(\mathbf{x})$ sujeta a $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$. Suponga que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{Q}$ satisface las condiciones de Kuhn-Tucker, esto es, existe $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ y $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ tales que

$$\begin{aligned} \nabla F(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \nabla \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.117}$$

Suponga que F, g_i para $i \in \mathcal{I}$ son convexos en $\bar{\mathbf{x}}$, donde $\mathcal{I} = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Además, si $\bar{\mu}_i \neq 0$, entonces h_i es afín. Luego, $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ satisface las condiciones punto silla

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \leq \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \tag{1.118}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ y para toda $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ con $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, donde $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Inversamente, suponga que $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int}\mathcal{X}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ satisface las condiciones punto silla (1.118). Entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es factible para el problema primal (1.109) y además, $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ satisface las condiciones Kuhn-Tucker (1.117).

Prueba

Suponga que $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{Q}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ satisface las condiciones Kuhn-Tucker (1.117). Por convexidad en $\bar{\mathbf{x}}$ de F y g_i para $i \in \mathcal{I}$, y como h_i es afín para $\bar{\mu}_i \neq 0$ se obtiene

$$F(\mathbf{x}) \geq F(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla F(\bar{\mathbf{x}})'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \tag{1.119}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geq g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \text{para} \quad i \in \mathcal{I}, \tag{1.120}$$

$$h_i(\mathbf{x}) = h_i(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, l;\ \bar{\mu}_i \neq 0, \tag{1.121}$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Multiplicando (1.120) por $\bar{\lambda}_i \geq 0$, (1.121) por $\bar{\mu}_i$, sumando (1.119) y de (1.117), se sigue de la definición de ϕ que $\phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \geq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. También, como $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, se sigue que $\phi(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ $\forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. De aquí $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ satisface las condiciones punto silla (1.118).

Para probar el inverso, suponga que $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ con $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int}\mathcal{X}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ satisface (1.118). Como $\phi(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leq \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$, $\forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ *y* $\boldsymbol{\mu}$. Así $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}'\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Esto muestra que $\bar{\mathbf{x}}$ es factible para el problema primal (1.109). Como $\phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \leq \phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, luego $\bar{\mathbf{x}}$ resuelve el problema para minimizar $\phi(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ sujeta a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Como $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}\,\mathcal{X}$, entonces $\nabla_x \phi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0}$, esto es $\nabla F(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \nabla \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}$, y de aquí (1.117) se mantiene. Esto completa la prueba.

El teorema (1.4) muestra que si $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto Kuhn-Tucker, bajo ciertos supuestos de convexidad, los multiplicadores de Lagrange en las condiciones Kuhn-Tucker también sirven como los multiplicadores en el criterio de punto silla. Inversamente, los multiplicadores en las condiciones punto silla son los multiplicadores de Lagrange de las condiciones Kuhn-Tucker. Además, el óptimo de las variables duales para el Lagrangiano del problema dual son precisamente los multiplicadores de Lagrange para las condiciones Kuhn-Tucker y también los multiplicadores para las condiciones punto silla.

1.6 LA FUNCION DE UTILIDAD

1.6.1 EL ANALISIS DE LA DEMANDA BASADO EN LA UTILIDAD

Para un precio dado, se puede fraccionar la demanda agregada en las cantidades demandadas por cada uno de los consumidores. Luego, para diferentes precios se puede expresar la curva de demanda agregada como la suma horizontal de las curvas de demanda de cada uno de los consumidores.

Un análisis da por resultado que la curva de demanda del individuo depende de sus preferencias, relativamente fijas. Además, se supone que el individuo persigue maximizar un fin único en su toma de decisiones. Esto implica que los diferentes bienes tienen alguna característica en común que permite compararlos entre sí. Dicha característica se denomina *utilidad*.

Sean X,Y,Z, etc., cantidades de diversos bienes que tienen algún elemento en común y que la magnitud de este es la utilidad, la cual depende de la cantidad de los diversos bienes. La *utilidad marginal* se define como la tasa de variación de la utilidad total cuando aumenta la cantidad de un bien mientras los otros permanecen constantes; por ejemplo naranjas, la utilidad marginal es la utilidad de la última naranja más la variación sufrida por la utilidad de las naranjas precedentes cuando se añade una a ellas. Enfatizando: Es la tasa de variación de la utilidad total para variaciones de una unidad en la cantidad, y no es la utilidad de la unidad marginal.

Una confusión fundamental consiste en no saber distinguir entre utilidad total y utilidad marginal. Otra dificultad, aunque menos importante, es la incapacidad para concretar unidades. Es obvio que existe una cantidad de agua que costaría más que una determinada cantidad de brillantes. Prescindiendo del problema de las unidades, lo que no vieron los economistas clásicos, y lo que la teoría de la utilidad marginal decreciente puso en evidencia, es que el factor decisivo en la determinación del precio es el aumento de utilidad debido a tener un poco más de agua o debido a tener algún brillante más. Por lo tanto, la utilidad marginal de los brillantes puede ser muy alta (porque los brillantes son más escasos) en relación a la utilidad marginal del agua (porque el agua es más abundante) y en consecuencia, el precio de los brillantes puede ser alto en relación al precio del agua; y sin embargo, la utilidad total del agua puede ser mucho mayor que la de los brillantes.

La solución de la paradoja anterior llevo a los neoclásicos a incorporar la demanda como un determinante del precio. Si bien es cierto que la utilidad marginal decreciente puede explicar la falta de especialización en el consumo, no se sigue de ello que tengamos que basarnos en ella para explicar o racionalizar esta observación.

Para obtener la función de demanda de un individuo partiendo de su función de utilidad y de las limitaciones impuestas por su presupuesto, supóngase que existe $U = U(X, Y, Z, ...)$ y que los precios P_x, P_y, P_z,... son conocidos y su ingreso es I. Sin una limitación en su presupuesto, el individuo continuaría aumentando su consumo de los bienes hasta que sus utilidades marginales sean nulas. Para simplificar se va a suponer que el individuo sabe como distribuir sus recursos, por ejemplo, su capacidad de trabajo. Por lo tanto la restricción presupuestal queda expresada como

$$XP_x + YP_y + ... = I,$$

Como hay que maximizar U sujeta a la restricción presupuestal se utiliza la teoría de la sección (1.5) llegando a que

$$\frac{U_x}{P_x} = \frac{U_y}{P_y} = ... = \lambda.$$

Lo anterior significa que la utilidad marginal de la cantidad del bien i que se puede comprar por j unidades monetarias tiene que ser igual a la de cada uno de los otros bienes. Esta utilidad marginal común por unidad monetaria es λ (el multiplicador de Lagrange) que es la utilidad marginal del ingreso, según Marshall.

Nota 1.2 El término utilidad marginal del ingreso es equívoco, pues sería mejor hablar de la utilidad marginal de la renta, para evitar confusión con la utilidad resultante de mantener saldos monetarios en efectivo.

Si se toman de dos en dos bienes se puede tener la siguiente relación por ejemplo:

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y},$$

donde el primer término representa la relación en la que el individuo está dispuesto a sustituir X por Y, mientras que el segundo término es la relación en que X puede sustituir a Y en el mercado. Conocida U se sustituye y se obtienen las cantidades de los bienes, *i.e.*, la curva de demanda. Si por ejemplo

$$U = \log X + \log Y, \qquad (1.122a)$$

la demanda viene dada por $X = \frac{I}{2P_x}$ y $Y = \frac{I}{2P_y}$; si

$$U = XY, \qquad (1.122b)$$

la demanda es $X = \frac{I}{2P_x}$ y $Y = \frac{I}{2P_y}$, *i.e.*, la misma. Donde (1.122a) se obtiene al aplicar la función logaritmo a (1.122b) y redefiniendo la función utilidad, *i.e.*, al aplicar una transformación monótona creciente a la función utilidad la demanda resultante es la misma, y esto es debido a que la utilidad es el orden de preferencias entre bienes pero no en cuánto más un bien es preferido a otro. Una característica de esta función de demanda es que se mantiene constante la cantidad de dinero gastada. Además las utilidades marginales de X

e Y para (1.122a) son independientes, ya que la utilidad marginal de X depende sólo de X y la de Y exclusivamente de Y. Nótese que estas utilidades marginales son decrecientes, *i.e.*,

$$U_x = \frac{1}{X}; \quad U_y = \frac{1}{Y}.$$

Para (1.122b) las utilidades marginales del bien en cuestión depende del otro, esto es,

$$U_x = Y; \quad U_y = X$$

por lo que la utilidad marginal, por ejemplo, de X se mantiene constante cuando X aumenta. Estas funciones difieren de las anteriores en dos sentidos: la utilidad marginal ya no es decreciente y existe dependencia entre ambos bienes. Sin embargo, la función de demanda engendrada por esta función de utilidad es la misma.

1.6.2 TEORIA DE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA

Las curvas de indiferencia representan las diferentes combinaciones de bienes, tal que representen el mismo nivel de satisfacción (utilidad). Supóngase un espacio de bienes cualquiera, XY, y considérese una combinación de X e Y, designada por P en este espacio. Este espacio se divide en cuatro cuadrantes (figura 1.2).

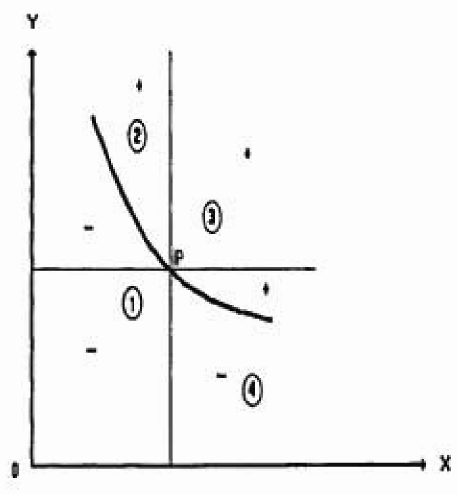

FIGURA 1.2 Curva de indiferencia. Los signos + y − representan la mayor o menor preferencia del consumidor

Suponga que el individuo prefiere más cantidad, de cada bien, a menos cantidad. Cualquier punto, por ejemplo en la región 3, es claramente preferible al punto P, puesto que aquel representa más cantidad de X o más de Y, o más de ambos. Por razones análogas, P es claramente preferible a cualquier punto de la región 1, puesto que P representa más cantidad de X o más de Y o más de ambos. Con respecto a los puntos de los cuadrantes 2 y 4 se puede imaginar qué preguntar al individuo cuyas preferencias se estan determinando, para ordenar cada uno de estos puntos en relación a P. Si prefiere aquel punto lo marcaremos con un signo + y si prefiere P lo marcaremos con −. De tal manera que se asignan signos + o un − a todos los puntos de las regiones 2 y 4. Habrá una línea divisoria entre los signos + y −; los puntos pertenecientes a esta divisoria representan combinaciones entre las cuales la elección le es indiferente, y a esta línea divisoria la podemos llamar *curva de indiferencia*. El supuesto de que prefiere más que a menos cantidad significa que la curva de indiferencia no puede atravesar los cuadrantes 1 y 3. Por lo tanto la curva de indiferencia nunca puede tener inclinación positiva y tiene que tenerla negativa en todos los puntos de la región de significado económico. Si bien dicha curva debe tener pendiente negativa en todos los puntos queda por saber si es cóncava o convexa hacia el origen, siendo que es más razonable que sea convexa. Partiendo de un punto distinto a P podríamos generar de la misma manera una curva de indiferencia distinta. En principio, por cada punto pasa una curva de indiferencia. El conjunto de curvas de indiferencia representa un mapa de los gustos del individuo.

Suponga que el individuo tiene un ingreso (o renta monetaria) I, que gasta en los bienes X e Y. Si lo gasta todo en Y puede comprar $\frac{I}{P_y}$ unidades de Y. Si lo hace para X, puede comprar $\frac{I}{P_x}$ unidades de X. La pendiente de esta curva es $\frac{P_x}{P_y}$, lo que significa que si el individuo compra una unidad menos de X, ahorra una unidad de dinero igual a P_x, y con esta cantidad puede comprar $\frac{P_x}{P_y}$ unidades de Y. Por lo que dicho cociente representa la relación en que se puede sustituir X por Y. La figura (1.3) muestra el área de combinaciones asequibles.

Superponiendo las dos líneas divisorias obtenidas el individuo nunca se quedará en la región de combinaciones asequibles ya que que tratará de quedar sobre ella, pues trata de obtener más. La intersección entre ambas curvas, la de indiferencia y la del presupuesto, que le dé lo máximo posible es el punto de equilibrio. De aquí se aprecia la convexidad de las curvas de indiferencia. Si fuese cóncava en toda su extensión, el punto de equilibrio se hallaría sobre uno de los ejes, *i.e.*, la gente se especializa al consumir. Por lo tanto se elimina este caso. Si la curva de indiferencia fuera parte cóncava y parte convexa, el individuo nunca se encontraría en situación de equilibrio en un punto del segmento cóncavo. Por lo tanto, la parte de la línea de indiferencia que tiene significado económico es siempre la convexa. Si la curvas de indiferencia son convexas hacia el origen, el punto de equilibrio es aquel en el cual la línea divisoria de las combinaciones asequibles es tangente a la curva de indiferencia.

En la curva de indiferencia si el individuo renuncia a una unidad de X perderá aproximadamente U_x unidades de utilidad. Por ello, para mantener al individuo sobre la misma curva de indiferencia es necesario darle $\frac{U_x}{U_y}$ unidades de Y. Por lo que el cociente anterior es la pendiente de la curva de indiferencia en el punto en cuestión. Para el punto de equilibrio

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{P_x}{P_y},$$

es la relación en que el individuo está dispuesto a sustituir X por Y y tiene que ser igual a la relación en que puede sustituirlos. Una cosa es lo que quiere y otra lo que puede tener.

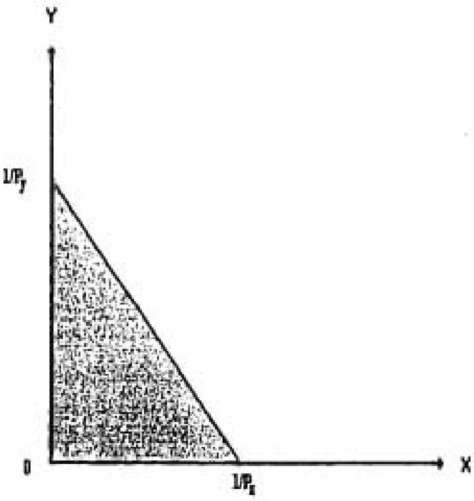

FIGURA 1.3 Area de combinaciones asequibles dado lo que gasta en cada bien el individuo.

1.6.3 CLASIFICACION IMPLICITA EN EL ANALISIS POR CURVAS DE INDIFERENCIA

El análisis del comportamiento del consumidor mediante curvas de indiferencia clasifica implícitamente todos los factores que lo afectan: 1)Bienes; 2)Factores que determinan las oportunidades (se condensan en la recta presupuestal) y; 3) Factores que determinan sus gustos (resumidos en las curvas de indiferencia). A continuación se ejemplificará.

Para una persona que está pensando el lugar dónde radicar se trata de un bien, el cual se representa en los ejes coordenados. Ya una vez establecido en algún lugar, es un factor de oportunidades puesto que afectará a los precios cuánto tiene que pagar por los diversos bienes y servicios, y también un factor de los gustos, pues puede afectar a la importancia que concede al abrigo de invierno frente al traje de baño o la calefacción frente al aire acondicionado.

Desde un punto de vista formal, todos estos aspectos pueden tenerse en cuenta tratando la localización regional como un bien representado sobre uno de los ejes. A cada localización regional corresponderá un corte dado a una superficie multidimensional de combinaciones asequibles y superficies de indiferencia. El corte correspondiente a una localización regional puede significar diferentes oportunidades y diferentes gustos que el corte correspondiente a otra. Pero aunque esto sea formalmente correcto, no impide que se cambie el punto de vista que interesa según el problema en cuestión.

1.6.4 OBTENCION DE LA CURVA DE DEMANDA A PARTIR DE LAS CURVAS DE INDIFERENCIA

Si se mantiene constante la renta monetaria y el precio, digamos de X, la recta que representa la relación entre los precios girará sobre un punto del eje. Para los diferentes precios de X se hallan las correspondientes cantidades demandadas de él obteniéndose la curva de demanda. En este tipo de curva la renta real varía al desplazarse a lo largo de la curva.

Es posible construir un tipo diferente de curva de demanda: Considérese el punto representativo de una combinación de bienes X_0, Y_0, y trácese una recta de presupuesto que pase por él. Un artificio para mantener constante la renta real es hacer girar la recta presupuestal sobre el punto. La ecuación de la recta es $P_xX_0 + P_yY_0 = I$. Esto equivale a mantener constante el poder adquisitivo del dinero. La manera usual de elaborar un índice de precios es calcular el coste (relativo) de una combinación específica de bienes. Por ejemplo, si la combinación de bienes es (X_0,Y_0) y si los precios en dos situaciones distintas (puede ser en tiempo o en lugar geográfico) son (P_x,P_y) y (P_x^f,P_y^f), el índice de precios en la segunda situación, en relación a la primera, es $\frac{P_x^f X_0+P_y^f Y_0}{P_x X_0+P_y Y_0}$. Pero si I es constante esta relación es igual a la unidad para todas las rectas presupuestales que pasan por (X_0,Y_0).

Los puntos de tangencia de estas rectas con las curvas de indiferencia originan una curva de demanda para la cual la "renta real "es constante, en el sentido de que el cociente de la renta monetaria y el índice de precios es constante.

Se podría obtener otro tipo de demanda considerando el conjunto de rectas presupuestales tangentes a una sola de las curvas de indiferencia. Las cantidades y precios relativos correspondientes proporcionarían una curva de demanda en la cual la renta real sería constante, en el sentido de proporcionar una utilidad fija.

Para distinguir las distintas construcciones de las curvas de demanda considerar el *efecto renta* y el *efecto sustitución* producidos por la variación de un precio cuando se mantienen constantes todos los demás y la renta monetaria también. Al considerar estos efectos se distinguirá entre los *efectos Slutsky*, que corresponden a la rotación de las rectas presupuestales sobre un punto (X_0,Y_0), y los *efectos Hicks*, que corresponden al conjunto de rectas presupuestales tangentes a una sola curva de indiferencia.

La ventaja de la medición de Slutsky, aunque en cierto sentido representa una aproximación, lo que no ocurre esto con la de Hicks, está en que puede ser computada directamente partiendo de hechos de mercado y conducta observable, a saber, de precios y cantidades compradas. La medición de Hicks no puede calcularse así pues requiere el conocimiento de las curvas de indiferencia. Cuanto menor sea la variación en el precio, es decir, cuanto más se aproxime ΔP_x a cero menos importante será la diferencia entre la medición de Slutsky y la de Hicks.

Estas dos mediciones nos lleva a obtener la curvas de demanda de dos distintos modos que presentan la propiedad de mantener constante la renta real. Se puede obtener la demanda utilizando la medición de Hicks para la variación de la renta real; esto equivaldría a elegir una curva de indiferencia. Para la utilidad U, obtenerla de la medición de Slutsky para la variación de la renta real, equivaldría a la rotación de una línea sobre un punto. Se podría decir que este último método es una manera de mantener constante la renta real aparente.

Observando la figura (1.4) se aclaran las diferencias entre estas tres curvas de demanda. En ella, como resultado de una variación en el precio del bien X, hay un desplazamiento de P a Q, o de X_1 a X_4. Este desplazamiento es el que lleva consigo la curva de demanda según se la define ordinariamente. Pero este desplazamiento, debido a una variación en el precio, es la combinación de un efecto renta y un efecto sustitución. Dicho desplazamiento se puede descomponer en dos: *i*) Siguiendo a Hicks, considerar el desplazamiento de P a S, o de X_1 a X_2, como el resultado de una variación en la relación de intercambio, o efecto sustitución. El desplazamiento de S a Q, o de X_2 a X_4 es el resultado de una variación en la renta. Por lo tanto

$$\underset{(X_4 - X_1)}{\text{Efecto total}} = \underset{(X_4 - X_2)}{\text{Efecto ingreso}} + \underset{(X_2 - X_1).}{\text{Efecto sustitucion}}$$

Este método es formalmente más puro que el que se indica a continuación, pero no se refiere a magnitudes observables.

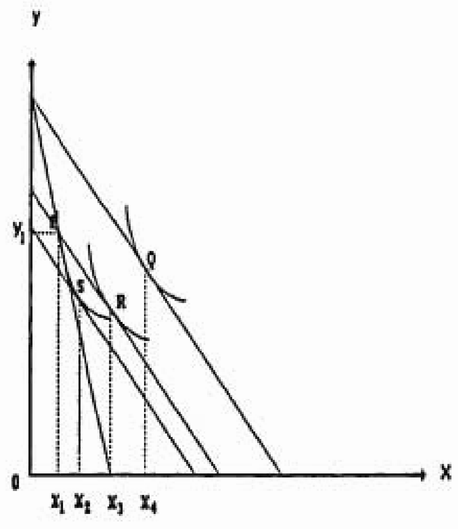

FIGURA 1.4. Efecto sustitución y efecto ingreso

ii) Altenativamente se pueden separar los efectos expresados por cantidades observables siguiendo a Slutsky. Cuando un individuo está en el punto P consume X_1 e Y_1 gastando todo su ingreso I a los precios P_x y P_y. Si el precio de X cambia de P_x a $P_x + \Delta P_x$ (en el caso de la figura, ΔP_x es negativo) y P_y no varía (haría falta $I + X_1 \Delta P_x$ para poder comprar la misma combinación que antes) se puede considerar la renta o ingreso $(I + X_1 \Delta P_x)$ y los precios $(P_x + \Delta P_x, P_y)$ como una variación del precio compensada respecto a la situación inicial, *i.e.*, como una variación del precio cuyos efectos sobre la renta real han sido neutralizados mediante una variación de la renta monetaria. Con esta variación del precio compensada, el individuo se trasladaría de P a R, o de X_1 a X_3.

Siguiendo a Slutsky se puede llamar a este efecto sustitución, y al desplazamiento de R a Q, o de X_3 a X_4, el efecto renta. Por lo tanto

$$\underset{(X_4 - X_1)}{\text{Efecto total}} = \underset{(X_4 - X_3)}{\text{Efecto ingreso}} + \underset{(X_3 - X_1).}{\text{Efecto sustitucion}}$$

Se advertirá que la diferencia entre el método de Hicks y el de Slutsky es igual a $(X_3 - X_2)$. La proposición fundamental formulada por Mosak es que al aproximarse ΔP_x a cero, la magnitud $(X_3 - X_2)$ se aproxima más rapidamente que cualquier otra diferencia. Es evidente que al aproximarse ΔP_x a cero, Q, R y S tienden a converger en el punto P. Esto quiere decir que $(X_4 - X_3)$, $(X_3 - X_1)$, $(X_4 - X_2)$ y $(X_2 - X_1)$ tienden a cero, lo mismo que $(X_3 - X_2)$ pero más rápido; esto implica que el valor de la renta monetaria que se necesita con el fin de mantener constante la renta real es una buena aproximación a la variación ideal de la renta monetaria, según Slutsky.

CAPITULO 2

2.1 PRODUCTIVIDAD EN EL TRABAJO Y VENTAJAS COMPARATIVAS, MODELO DE RICARDO

Los países recurren al comercio internacional básicamente por diferencias en tecnologías, dotaciones o preferencias. Como primer paso hacia el entendimiento de las causas y efectos del comercio, es útil considerar modelos simples en los que sólo una de estas diferencias esté presente. Un concepto esencial en estos modelos es el de **ventaja comparativa**.

Aunque la idea de ventaja comparativa es simple, puede ser un poco confusa si se establece en forma abstracta. El mejor camino para entender adecuadamente dicho concepto es a través de una serie de ejemplos. El primer modelo de ventaja comparativa que se basa en las diferencias en la productividad del trabajo, fue introducido por David Ricardo a principios del siglo XIX (*The Principles of Political Economy and Taxation, 1817*), y es conocido como modelo de Ricardo.

En una primera etapa examinaremos un modelo simple de una economía cerrada ($\mathcal{E}$) que produce dos bienes y tiene como único factor de producción al trabajo. Posteriormente veremos qué sucede cuando dos de tales economías comercian. Después, aplicaremos los resultados de este análisis para aclarar algunos malos entendidos en materia de política comercial. Finalmente, consideramos una extensión del modelo básico que incluye más bienes.

2.2 MODELO DE RICARDO

Para entender el papel que juega el concepto de ventaja comparativa en la determinación de qué y cuánto comerciar, comenzaremos con una economía, $\mathcal{E}$, que:

- es cerrada;
- consta de un sólo individuo (productor-trabajador-consumidor);
- produce dos bienes, y_1 y y_2;
- tiene como único factor de producción al trabajo, L = cantidad disponible de trabajo en $\mathcal{E}$;

- las funciones de producción son lineales, $y_i = L_i/a_{Li}$, $i = 1, 2$, donde a_{Li} = cantidad de trabajo requerido para producir una unidad de y_i y $L_1+L_2 = L$. Además presentan rendimientos constantes a escala †;
- las industrias son competitivas (toman el precio P_i del bien y_i como dado) y tienen beneficios normales (cero);
- pleno empleo, $L_1 + L_2 = a_{L1}y_1 + a_{L2}y_2 = L$;
- existe perfecta movilidad del trabajo.

La tecnología de $\mathcal{E}$ queda resumida por la productividad del trabajo de cada industria.

2.2.1 CURVA DE POSIBILIDADES DE PRODUCCION

De las definiciones anteriores, el trabajo necesario para producir y_i unidades del bien i es $a_{Li}y_i$. Y como la oferta total de trabajo es L, los límites de producción estan definidos por la desigualdad

$$a_{L1}y_1 + a_{L2}y_2 \leq L, \tag{2.1}$$

para los bienes producidos. La igualdad determina la frontera de posibilidades de producción (FPP). Cuando la FPP es una línea recta,ver figura (2.1), el costo de oportunidad de producir y_1 en términos de y_2 es constante. El costo de oportunidad es el número de unidades del bien 2 que no se produjeron dado que se produjo una unidad extra del bien 1. En este caso, para producir otra unidad del bien 1 se requerirá a_{L1} horas-hombre. Cada una de estas horas-hombre podrían cambiarse para producir $\frac{1}{a_{L2}}$ unidades del bien 2, entonces el costo de oportunidad del bien 1 en términos del bien 2 es $\frac{a_{L1}}{a_{L2}}$. Cuando existe solamente un factor de producción la curva de posibilidades de producción es simplemente una línea recta. Debido a la limitación de la fuerza de trabajo en $\mathcal{E}$, si se quiere producir más de un bien se debe sacrificar la producción del otro. La razón de cambio de la producción de un bien por otro recibe el nombre de tasa marginal de transformación de y_1 por y_2, ($TMT_{1,2}$), y es la pendiente de la FPP. En este caso $TMT_{1,2} = \mathrm{d}y_2/\mathrm{d}y_1 = a_{L1}/a_{L2}$ que es el costo de oportunidad de producir y_1 en términos de y_2.

---

† Sea $y=F(L)$. Para una economía $\mathcal{E}$ que produce dos bienes se tiene

$$y_i=F(L_i) \quad para \quad i=1,2.$$

Si $F(L_i)=\frac{L_i}{a_{Li}}$ entonces $y_i(L_i)=\frac{L_i}{a_{Li}}$. Sabemos que si y_i es lineal de grado k entonces

$$F(\lambda L)=\lambda^k F(L),$$

es decir

$$y_i(\lambda Li)=\lambda^k F(Li)=\lambda^k \frac{Li}{a_{Li}},$$

por lo tanto

$$y_i(\lambda Li)=\lambda^k \frac{Li}{a_{Li}} \Leftrightarrow k=1.$$

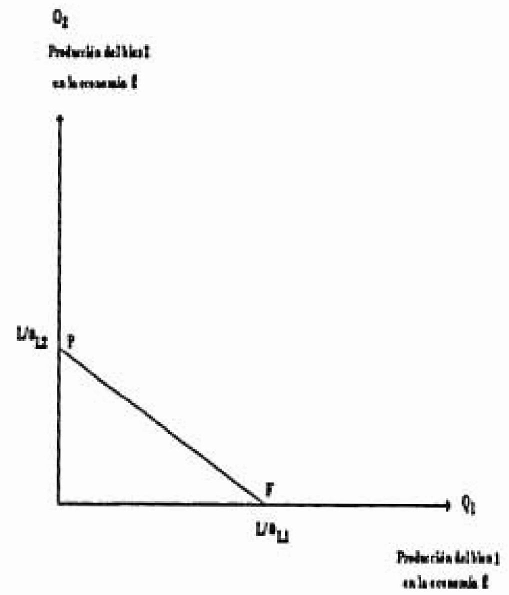

FIGURA 2.1. Curva de posibilidades de producción $\mathcal{E}$. La línea FP muestra la máxima cantidad de y_1 que puede producirse dada alguna producción de y_2, y viceversa.

2.2.2 PRECIOS RELATIVOS Y OFERTA

La curva de posibilidades de producción muestra las diferentes combinaciones de bienes que la economía puede producir. Con el propósito de determinar cuánto de dichos bienes la economía va a producir, es necesario examinar los precios. Específicamente, necesitamos conocer los precios relativos de los dos bienes, el precio de un bien en términos del otro.

Si las industrias son competitivas y los beneficios normales, entonces

$$0 = \Pi = P_i y_i - W_i L_i = P_i y_i - W_i a_{Li} y_i,$$

donde Π es el beneficio, W_i es el salario y las demás variables se definen como antes. Recordando que $y_i = \frac{L_i}{a_{Li}}$, entonces

$$W_i = \frac{P_i}{a_{Li}}.$$

Debido a la perfecta movilidad del trabajo, las ofertas de y_1 y y_2 serán determinadas por el sector que pague un mejor salario.

Sean P_1 y P_2 los precios de los bienes producidos y_1 y y_2 respectivamente. Se requieren a_{L1} horas-hombre para producir una unidad de y_1 y suponiendo que no hay preferencias, el salario por hora en el sector que produce y_1 será igual al valor de lo que un trabajador pueda producir en una hora, $\frac{P_1}{a_{L1}}$, ya que lo que produce en una hora es $\frac{1}{a_{L1}}$. Análogamente para el otro bien.

Los salarios en el sector que produce y_1 será mayor si $\frac{P_1}{P_2} > \frac{a_{L1}}{a_{L2}}$, ya que el precio de lo que se produce en una hora es $\frac{P_1}{a_{L1}} > \frac{P_2}{a_{L2}}$. Debido a que se quiere trabajar en la industria que más pague, la economía se especializará en la producción y_1 si $\frac{P_1}{P_2} > \frac{a_{L1}}{a_{L2}}$; lo hará en la de y_2 si $\frac{P_1}{P_2} < \frac{a_{L1}}{a_{L2}}$, y solamente cuando $\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_{L1}}{a_{L2}}$ se producirán ambos bienes. En ausencia de comercio internacional, la economía casera tendría que producir ambos bienes por sí misma, produciendo al mismo tiempo ambos cuando el precio relativo iguale a la unidad de trabajo relativo.

Proposición 2.1 *La economía se especializará en la producción de y_1 si el precio relativo de y_1 en términos de y_2, P_1/P_2, excede su costo de oportunidad a_{L1}/a_{L2}; se especializará en la producción de y_2 si el precio relativo de y_1 es menor que su costo de oportunidad*

En autarquía, la economía $\mathcal{E}$ desearía producir ambos bienes por sí misma. Sin embargo, ésta producirá ambos bienes solamente si el precio relativo de y_1 es justamente igual al costo de oportunidad. De aquí se desprende el siguiente resultado

Proposición 2.2 *En autarquía, los precios relativos de los bienes son iguales al costo de oportunidad.*

Retomando el supuesto de beneficios normales,

$$\begin{aligned}\pi_i = 0 = P_i y_i - W_i L_i \\ &= P_i \frac{L_i}{a_{Li}} - W_i L_i \\ &= (\frac{P_i}{a_{Li}} - W_i) L_i\end{aligned}$$

de lo que se tienen tres casos, de los cuales se construye la gráfica de abajo, figura (2.2):

- si $L_i \neq 0$ y $L_i < \infty$ (recuerde el supuesto de pleno empleo y perfecta movilidad en el trabajo) entonces $W_i = \frac{P_i}{a_{Li}}$, lo que genera la sección 1 de la curva;
- si $L_i = L$, $W_i = \frac{P_i}{a_{Li}}$. Si sólo produzco, por ejemplo cocos, ya no hay competencia entonces $W_i \to 0$. Sección 2 de la curva;
- si $L_i = 0$, $W_i \neq \frac{P_i}{a_{Li}}$. Los cocos son raros por lo que producirlos implica pagar salarios altos para hacerlo atractivo. Sección 3 de la curva.

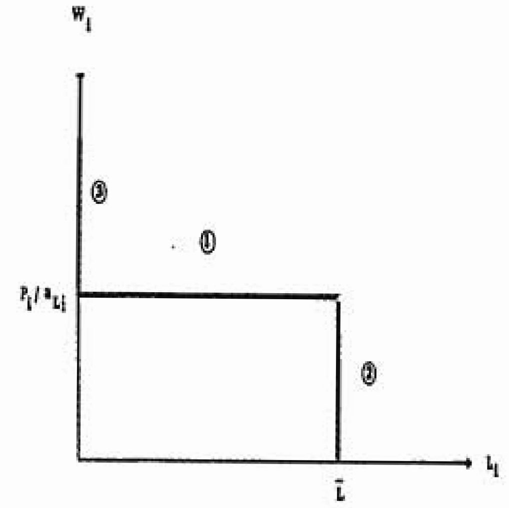

FIGURA 2.2 Comportamiento del salario respecto a la fuerza de trabajo para una economía cerrada.

Para construir la gráfica de la oferta del bien y_i debemos partir otra vez de los beneficios normales, así

$$
\begin{aligned}
\pi_i = 0 &= P_i y_i - W_i L_i \\
&= P_i y_i - \frac{p_i}{a_{Li}} L_i \\
&= (y_i - \frac{L_i}{a_{Li}}) P_i
\end{aligned}
$$

Procediendo de la misma manera que antes, se tienen 3 casos, figura (2.3):

- si $P_i = 0$, $y_i \neq L_i/a_{Li}$. El precio del producto y_i cae a cero y sin embargo se sigue produciendo, por lo que se guarda hasta recuperar su valor o darlo a beneficencia a cambio de algo, lo que le da cierto valor;
- si $P_i \neq 0$, $y_i = L_i/a_{Li}$. Es cuando el producto sale al mercado y lo hace con cierto valor fijo, produciéndose a un ritmo de L_i/a_{Li} (sección 1 de la curva). Como la producción esta acotada, por el supuesto de pleno empleo, se llegará a la especialización de este producto, y la cota es $y_i = L/a_{Li}$ incrementándose el precio del producto (sección 3 de la curva); y como también el producto antes de salir al mercado se ha almacenado pasando de un valor nulo al valor de mercado fijado para su salida, se justifica la sección 2 de la curva.

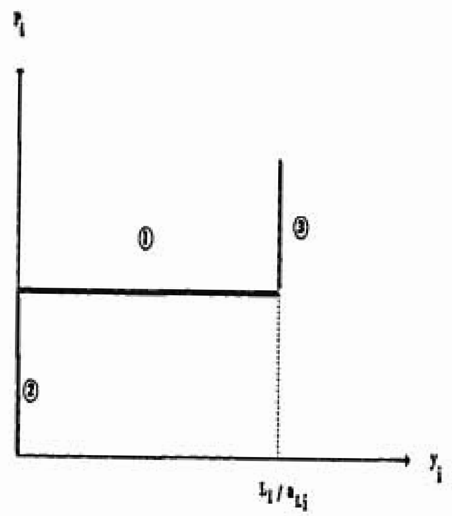

FIGURA 2.3 Comportamiento del precio del producto respecto a su producción, i.e., la oferta del bien y_i en una economía cerrada.

En autarquía se producen los dos bienes y las gráficas de los dos productos, y_1 y y_2, de los salarios nominales que se pagan en cada sector versus la fuerza laboral en cada uno de ellos se muestran a continuación. Figuras (2.4a, 2.4b y 2.4c).

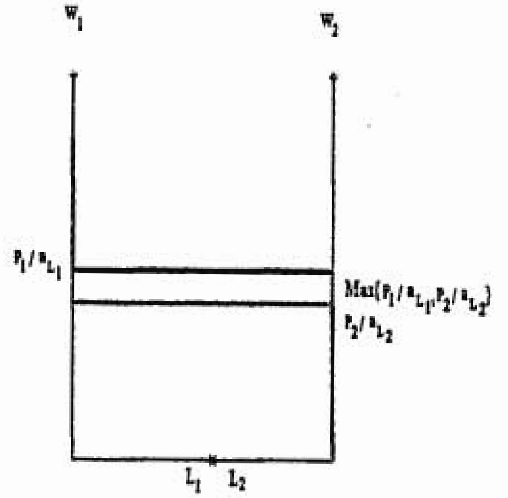

FIGURA 2.4a Comportamiento del salario respecto a la fuerza de trabajo para una economía cerrada para cada sector. Aquí $W_1 = P_1/a_{L1} > P_2/a_{L2} = W_2$

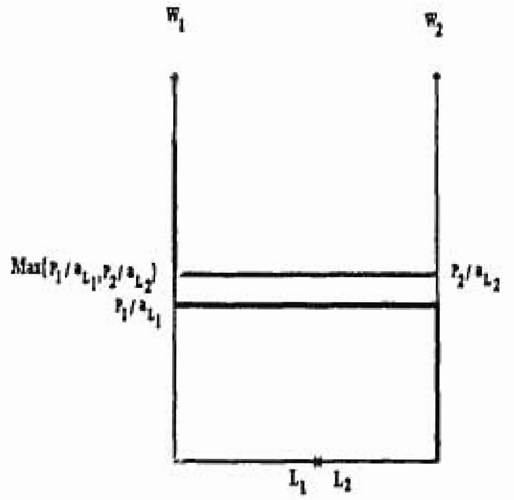

FIGURA 2.4b Comportamiento del salario respecto a la fuerza de trabajo para una economía cerrada para cada sector. Aquí $W_1 = P_1/a_{L1} < P_2/a_{L2} = W_2$

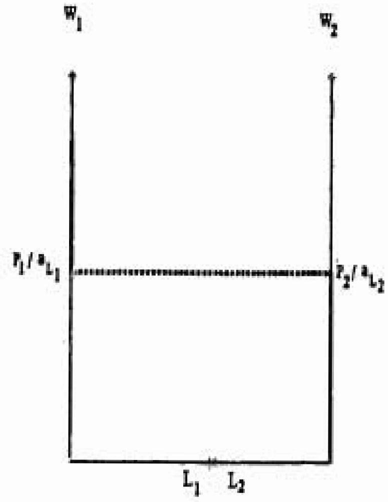

FIGURA 2.4c Comportamiento del salario respecto a la fuerza de trabajo para una economía cerrada para cada sector. Aquí $W_1 = P_1/a_{L1} = P_2/a_{L2} = W_2$

2.2.3 RESTRICCION PRESUPUESTAL DEL CONSUMIDOR

La restricción presupuestal del consumidor, RPC, está dada por:

$$P_1c_1 + P_2c_2 = WL, \tag{2.2}$$

y como consume todo lo que se produce, la FPP, la frontera de posibilidades de producción, coincide con la RPC, o lo que es lo mismo, la tasa marginal de transformación es igual a la tasa marginal de sustitución en autarquía.

El problema a resolver para el consumidor se resume en la maximización de su utilidad restringida a su presupuesto. En ecuaciones

$$\begin{aligned} &\text{Max} \;\; U(c_1, c_2), \\ &\text{s.a.} \;\; P_1c_1 + P_2c_2 \leq WL, \end{aligned} \tag{2.3}$$

siendo c_1 y c_2 lo que consume de y_1 y y_2 respectivamente, y $U(c_1, c_2)$ la función utilidad del consumidor. Resolviendo (2.3):

Sea

$$\mathcal{L} = U + \lambda(WL - P_1c_1 - P_2c_2), \tag{2.4}$$

siendo $\mathcal{L}$ el lagrangiano.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = U_1 - \lambda P_1 \leq 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = U_2 - \lambda P_2 \leq 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = WL - P_1c_1 - P_2c_2 \geq 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1}c_1 = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2}c_2 = 0, \tag{2.9}$$

$$\lambda \geq 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda(WL - P_1c_1 - P_2c_2) = 0, \tag{2.11}$$

las ecuaciones (2.5) a (2.11) son las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden. De (2.8)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1}c_1 = (U_1 - \lambda P_1)c_1 = 0,$$

de la que se tienen tres casos

$$U_1 - \lambda P_1 = 0; \;\; c_1 > 0, \tag{2.12}$$

$$U_1 - \lambda P_1 < 0; \quad c_1 = 0, \tag{2.13}$$

$$U_1 - \lambda P_1 = 0; \quad c_1 = 0, \tag{2.14}$$

de (2.9)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} c_2 = (U_2 - \lambda P_2) c_2 = 0,$$

de la que se tienen tres casos

$$U_2 - \lambda P_2 = 0; \quad c_2 > 0, \tag{2.15}$$

$$U_2 - \lambda P_2 < 0; \quad c_2 = 0, \tag{2.16}$$

$$U_2 - \lambda P_2 = 0; \quad c_2 = 0, \tag{2.17}$$

de (2.11)

$$\lambda = 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 \geq 0, \tag{2.18}$$

$$\lambda \geq 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0, \tag{2.19}$$

$$\lambda = 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0, \tag{2.20}$$

de (2.12) y (2.5)

$$U_1 - \lambda P_1 = 0; \quad c_1 > 0, \tag{2.21}$$

de (2.13) y (2.5)

$$U_1 - \lambda P_1 < 0; \quad c_1 = 0, \tag{2.22}$$

de (2.14) y (2.5)

$$U_1 - \lambda P_1 = 0; \quad c_1 = 0, \tag{2.23}$$

de (2.15) y (2.6)

$$U_2 - \lambda P_2 = 0; \quad c_2 > 0, \tag{2.24}$$

$$U_2 - \lambda P_2 < 0; \quad c_2 = 0, \tag{2.25}$$

$$U_2 - \lambda P_2 = 0; \quad c_2 = 0, \tag{2.26}$$

de (2.18) y (2.7)

$$\lambda = 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 > 0, \tag{2.27}$$

de (2.19) y (2.7)

$$\lambda > 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0, \tag{2.28}$$

de (2.20) y (2.7)

$$\lambda = 0; \quad WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0, \tag{2.29}$$

si se quiere encontrar una solución interior, *i.e.*, que no se especializa en el consumo, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ y $\lambda > 0$, por lo que se escogen (2.21), (2.24) y (2.28), quedando

$$\begin{cases} U_1 - \lambda P_1 = 0 \\ U_2 - \lambda P_2 = 0 \\ WL - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

De las ecuaciones (2.30) se obtiene

$$U_1 = \frac{P_1}{P_2}U_2, \tag{2.31}$$

y derivando cada una de las ecuaciones (2.30)

$$\left.\begin{aligned} d(U_1 - \lambda P_1) &= U_{11}dc_1 + U_{12}dc_2 - P_1 d\lambda - \lambda dP_1 = 0 \\ d(U_2 - \lambda P_2) &= U_{21}dc_1 + U_{22}dc_2 - P_2 d\lambda - \lambda dP_2 = 0 \\ d(WL - P_1c_1 - P_2c_2) &= -P_1dc_1 - c_1dP_1 - P_2dc_2 - c_2dP_2 + LdW + WdL = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

ordenando las ecuaciones (2.32) de manera matricial, siendo variables endógenas c_1, c_2 y λ, y las exógenas P_1, P_2, W y L.

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_1 \\ \lambda dP_2 \\ c_1dP_1 + c_2dP_2 - LdW - WdL \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

de (2.30) $P_1 = U_1/\lambda$ y $P_2 = U_2/\lambda$. El determinante del sistema es

$$\Delta = -\frac{1}{\lambda^2}[U_{11}U_2^2 + U_{22}U_1^2 - U_1U_2(U_{12} + U_{21})]. \tag{2.34}$$

y definiendo

$$B = U_{11}U_2^2 + U_{22}U_1^2 - U_1U_2(U_{12} + U_{21}), \qquad 2.35)$$

la solución para dc_1 es

$$\begin{aligned} dc_1 = \frac{1}{\lambda\Delta}\{&[-U_2^2 - U_{12}U_2c_1 + U_1U_{22}c_1] \ \ dP_1 \ + \\ &[-U_{12}U_2c_2 + U_1U_2 + U_1U_{22}c_2] \ \ dP_2 \ + \\ &[U_{12}U_2c_2 - U_1U_{22}]L \ \ dW \ + \\ &[U_{12}U_2 - U_1U_{22}]W \ \ dL\}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

como

$$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial c_1}{\partial P_2}dP_2 + \frac{\partial c_1}{\partial W}dW + \frac{\partial c_1}{\partial L}dL, \tag{2.37}$$

comparando (2.36) con (2.37) y usando (2.35) tenemos

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[-U_2^2 + (-U_{12}U_2 + U_1U_{22})c_1] \\ \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[U_1U_2 + (-U_{12}U_2 + U_1U_{22})c_2] \\ \left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[(U_{12}U_2 - U_1U_{22})L] \\ \left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[(U_{12}U_2 - U_1U_{22})W]. \end{aligned}\right\} \tag{2.38a}$$

De las dos últimas ecuaciones de (2.38) se llega a

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = \frac{L}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right). \tag{2.39}$$

De la primera ecuación de (2.38) y de (2.39) se obtiene

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \frac{\lambda}{B}U_2^2 - \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{\lambda}{B}U_2^2 - \frac{c_1}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right). \tag{2.40}$$

De la segunda ecuación de (2.38a) y de (2.39) se obtiene

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = -\frac{\lambda}{B}U_1U_2 - \frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = -\frac{\lambda}{B}U_1U_2 - \frac{c_2}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right). \tag{2.41}$$

Resumiendo y considerando que $\lambda = U_1/P_1 = U_2/P_2$, (2.40) y (2.41) toman la forma

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = \frac{L}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right), \tag{2.42a}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_1} - \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_1} - \frac{c_1}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right), \tag{2.42b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_2} - \frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_2} - \frac{c_2}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right). \tag{2.42c}$$

Procediendo de manera análoga para dc_2 se llega a

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[-U_2U_1 - (-U_{21}U_1 + U_2U_{11})c_1] \\
\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[-U_1^2 + (-U_{21}U_1 + U_2U_{11})c_2] \\
\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[(U_{21}U_1 - U_2U_{11})L] \\
\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) &= -\frac{\lambda}{B}[(U_{21}U_1 - U_2U_{11})W].
\end{aligned}\right\} \tag{2.38b}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = \frac{L}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right), \tag{2.43a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_2U_1^2}{P_1} + \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_2U_1^2}{P_1} + \frac{c_1}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right), \tag{2.43b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_2U_1^2}{P_2} - \frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_2U_1^2}{P_2} - \frac{c_2}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right). \tag{2.43c}$$

Los conjuntos de ecuaciones (2.42) y (2.43) son denominadas **demandas marshallianas.**

Si ahora se resolviera el *problema dual*, esto es,

$$\begin{aligned} &\text{Min } \; P_1h_1 + P_2h_2, \\ &\text{s.a. } \; U(h_1, h_2) = U_o, \end{aligned} \tag{2.44}$$

procediendo de la misma manera que en el problema primal buscando solución interior, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = P_1h_1 + P_2h_2 + \mu(U_o - U),$$

siendo μ el multiplicador de Lagrange. Derivando parcialmente y aplicando condiciones Kuhn-Tucker de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} = P_1 - \mu U_1 = 0, \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} = P_2 - \mu U_2 = 0, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = U_o - U = 0. \tag{2.47}$$

De (2.45) y (2.46) se tiene que

$$\mu = \frac{P_1}{U_1} = \frac{P_2}{U_2}. \tag{2.48}$$

Diferenciando (2.45), (2.46) y (2.47)

$$\left.\begin{aligned} d(P_1 - \mu U_1) = dP_1 - \mu(U_{11}dh_1 + U_{12}dh_2) - U_1 d\mu = 0, \\ d(P_2 - \mu U_2) = dP_2 - \mu(U_{21}dh_1 + U_{22}dh_2) - U_2 d\mu = 0, \\ d(U_o - U) = dU_o - U_1dh_1 - U_2dh_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

ordenando las ecuaciones (2.49) de manera matricial, siendo variables endógenas h_1, h_2 y μ, y las exógenas P_1, P_2 y U_o .

$$\begin{pmatrix} \mu U_{11} & \mu U_{12} & U_1 \\ \mu U_{21} & \mu U_{22} & U_2 \\ U_1 & U_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dP_1 \\ dP_2 \\ dU_o \end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta\Delta = \mu[-U_{11}U_2^2 - U_{22}U_1^2 + U_1U_2(U_{12} + U_{21})]. \tag{2.51}$$

y definiendo

$$BB = -U_{11}U_2^2 - U_{22}U_1^2 + U_1U_2(U_{12} + U_{21}), \tag{2.52}$$

la solución para dh_1 es

$$dh_1 = \frac{1}{\Delta\Delta}\{[-U_2^2]\ dP_1\ + \\ [U_1U_2]\ dP_2\ + \\ [U_{12}U_2 - U_1U_{22}]\mu\ \ dU_o\}, \tag{2.53}$$

como

$$dh_1 = \frac{\partial h_1}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial h_1}{\partial P_2}dP_2 + \frac{\partial h_1}{\partial U_o}dU_o, \tag{2.54}$$

comparando (2.53) con (2.54)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) &= -\frac{1}{\mu BB}U_2^2, \\ \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) &= \frac{1}{\mu BB}U_1U_2, \\ \left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right) &= -\frac{1}{\mu BB}[(U_{12}U_2 - U_1U_{22})\mu]. \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

De (2.48) se llega a

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_1}, \tag{2.56a}$$

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_1U_2^2}{P_2}, \tag{2.56b}$$

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right) = -\frac{1}{B}(U_{12}U_2 - U_1U_{22}). \tag{2.56c}$$

Procediendo de manera análoga para dh_2 se llega a

$$dh_2 = \frac{1}{\Delta\Delta}\{[U_1U_2]\ dP_1\ + \\ [-U_1^2]\ dP_2\ + \\ [U_{21}U_1 - U_2U_{11}]\mu\ \ dU_o\}, \tag{2.57}$$

como

$$dh_2 = \frac{\partial h_2}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial h_2}{\partial P_2}dP_2 + \frac{\partial h_2}{\partial U_o}dU_o, \tag{2.58}$$

comparando (2.57) con (2.58)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) &= \frac{1}{\mu BB}U_1U_2, \\ \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) &= -\frac{1}{\mu BB}U_1^2, \\ \left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right) &= \frac{1}{\mu BB}[(U_{21}U_1 - U_2U_{11})\mu]. \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

De (2.48) se llega a

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) = -\frac{1}{B}\frac{U_2 U_1^2}{P_1}, \qquad (2.60a)$$

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{B}\frac{U_2 U_1^2}{P_2}, \qquad (2.60b)$$

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right) = -\frac{1}{B}(U_{21}U_1 - U_2 U_{11}). \qquad (2.60c)$$

Los conjuntos de ecuaciones (2.56) y (2.60) son denominadas **demandas hicksianas**.

De (2.42b) y (2.56a)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = -\frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) = -\frac{c_1}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right). \qquad (2.61)$$

De (2.42c) y (2.56b)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = -\frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) = -\frac{c_2}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right). \qquad (2.62)$$

De (2.43b) y (2.60a)

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) = \frac{c_1}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) + \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right). \qquad (2.63)$$

De (2.43c) y (2.60b)

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = -\frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) = -\frac{c_2}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) + \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right). \qquad (2.64)$$

De (2.42a) y (2.56c)

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right) = \frac{1}{\lambda W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{\lambda L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right). \qquad (2.65)$$

De (2.43a) y (2.60c)

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right) = \frac{1}{\lambda W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = \frac{1}{\lambda L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right). \qquad (2.66)$$

De (2.65) y (2.66)

$$\frac{\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right)}{\left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right)}. \tag{2.67}$$

La relaciones (2.61) a (2.67) se denominan **relaciones de Slustky**.

Si por *ejemplo* la función de utilidad U fuera de tipo *Cobb-Douglas* se tendría

$$U(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta}; \quad \alpha, \quad \beta \quad > 0 \tag{2.68}$$

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial c_1} = \alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta}; \tag{2.69a}$$

$$U_2 = \frac{\partial U}{\partial c_2} = \beta c_1^{\alpha} c_2^{\beta-1}; \tag{2.69b}$$

$$U_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial c_2 \partial c_1} = \alpha\beta c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta-1}; \tag{2.69c}$$

$$U_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2} = \alpha\beta c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta-1}; \tag{2.69d}$$

$$U_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 c_1} = \alpha(\alpha-1) c_1^{\alpha-2} c_2^{\beta}; \tag{2.69e}$$

$$U_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 c_2} = \beta(\beta-1) c_1^{\alpha} c_2^{\beta-2}. \tag{2.69f}$$

Sustituyendo en (2.35)

$$\begin{aligned} B =& [\alpha(\alpha-1)c_1^{\alpha-2}c_2^{\beta}][\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}]^2 + [\beta(\beta-1)c_1^{\alpha}c_2^{\beta-2}][\alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}]^2 - \\ & [\alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}][\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}][\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1} + \alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}] \\ =& [-\alpha\beta(\alpha+\beta)c_1^{3\alpha-2}c_2^{3\beta-2}] < 0, \end{aligned} \tag{2.70}$$

ya que c_1, c_2, α y β son positivos. Así pues

$$\Delta > 0,$$

esto es, la función utilidad es cóncava, por lo que existe un máximo. Luego

$$\begin{aligned} U_{12}U_2 - U_1U_{22} &= [\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}][\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}] - [\alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}][\beta(\beta-1)c_1^{\alpha}c_2^{\beta-2}] \\ &= \alpha\beta c_1^{2\alpha-1}c_2^{2\beta-2} > 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

y

$$\begin{aligned} -U_{11}U_2 + U_1U_{21} &= -[\alpha(\alpha-1)c_1^{\alpha-2}c_2^{\beta}][\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}] + [\alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}][\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}] \\ &= \alpha\beta c_1^{2\alpha-2}c_2^{2\beta-1}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) < 0; \quad \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = 0; \\ \left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) < 0.\end{array}\right\} \tag{2.73}$$

Procediendo de manera análoga para $U = U(h_1, h_2) = h_1^\gamma h_2^{-\delta}$ se llega a

$$\begin{aligned} U_{12}U_2 - U_1U_{22} &= [\gamma\delta h_1^{\gamma-1}h_2^{\delta-1}][\delta h_1^\gamma h_2^{\delta-1}] - [\gamma h_1^{\gamma-1}h_2^\delta][\delta(\delta-1)h_1^\gamma h_2^{\delta-2}] \\ &= \gamma\delta h_1^{2\gamma-1}h_2^{2\delta-2} > 0 \end{aligned} \tag{2.74}$$

y

$$\begin{aligned} -U_{11}U_2 + U_1U_{21} &= -[\gamma(\gamma-1)c_1^{\gamma-2}h_2^\delta][\delta h_1^\gamma h_2^{\delta-1}] + [\gamma h_1^{\gamma-1}h_2^\delta][\gamma\delta h_1^{\gamma-1}h_2^{\delta-1}] \\ &= \gamma\delta h_1^{2\gamma-2}h_2^{2\delta-1}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) < 0; \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) > 0; \\ \left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) < 0.\end{array}\right\} \tag{2.76}$$

Además, de las relaciones de Slustky

$$\frac{\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_o}\right)}{\left(\frac{\partial h_2}{\partial U_o}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right)} > 0 \tag{2.77}$$

y

$$\frac{\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right)} < 0. \tag{2.78}$$

2.2.4 CONSISTENCIA DE LAS PROPOSICIONES 2.1 Y 2.2 CON LA MAXIMIZACION DEL PNB

El comportamiento del producto nacional bruto, r, de una economía cerrada tipo ricardiana puede ser deducido al resolver el problema de maximización de la producción total de la economía sujeta a la restricción laboral, esto es

$$\left\{\begin{array}{l} max \quad P_1y_1 + P_2y_2, \\ \text{s.a.} \quad a_{L1}y_1 + a_{L2}y_2 \leq L. \end{array}\right. \tag{2.79}$$

Recordando que $y_1 = L_1/a_{L1}$, $y_2 = L_2/a_{L2}$ y $L = L_1 + L_2$. Además se sabe que hay especialización, esto es, $y_1 = 0$ ó $y_2 = 0$. Y en autarquía, $y_1 \neq 0$ y $y_2 \neq 0$. Hay pleno empleo por lo que y_1 y y_2 pueden ser escritas como

$$y_1 = \frac{\alpha L}{a_{L1}}, \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{(1-\alpha)L}{a_{L2}}, \quad \text{con} \quad \alpha\epsilon[0,1], \tag{2.80}$$

siendo α otra vez un parámetro. Sustituyendo (2.80) en (2.79) el problema se reduce a

$$\max\left\{ \alpha L \left(\frac{P_1}{a_{L1}} - \frac{P_2}{a_{L2}}\right) + \frac{P_2}{a_{L2}} L. \right\} \tag{2.81}$$

Note que aquí $r = r(P_1, P_2, L)$. Ahora bien, $\left(\frac{P_1}{a_{L1}} - \frac{P_2}{a_{L2}}\right) < 0$ el nivel de producción estaría por debajo del nivel inicial $\frac{P_2}{a_{L2}}L$ así que para maximizar (2.81) se requiere que $\alpha = 0$, por lo que hay especialización en el sector de la industria de y_2 con $y_2 = L/a_{L2}$; si $\left(\frac{P_1}{a_{L1}} - \frac{P_2}{a_{L2}}\right) > 0$ (2.81) maximiza cuando $\alpha = 1$ (ya que α toma valores entre 0 y 1), por lo que hay especialización en el sector de la industria de y_1 con $y_1 = L/a_{L1}$; y para $\left(\frac{P_1}{a_{L1}} - \frac{P_2}{a_{L2}}\right) = 0$ permanece en el nivel inicial $\frac{P_2}{a_{L2}}L$ con $\alpha\epsilon[0,1]$, esto es, en autarquía la producción en los dos sectores viene dada por (2.80). Una esquematización de esto aparece en la gráfica de la figura 2.5.

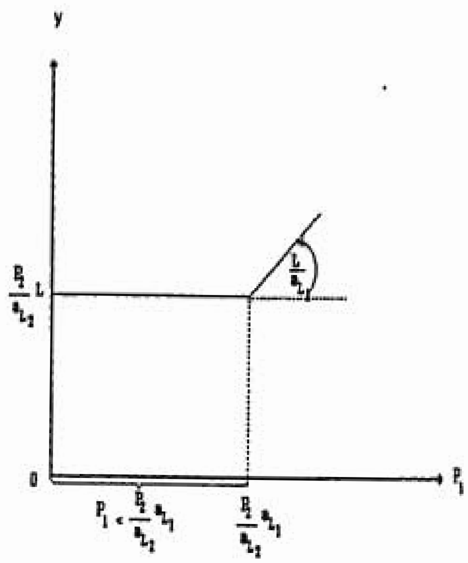

FIGURA 2.5 Comportamiento del PNB respecto al P_1 para una economía cerrada de tipo ricardiano.

2.3 COMERCIO INTERNACIONAL CON UN FACTOR

Para describir los patrones y efectos del comercio entre dos países cuando cada uno tiene solamente un factor de producción es simple. Sin embargo, las implicaciones de este análisis pueden ser sorprendentes, y con frecuencia aquellas economías que no han pensado en el comercio internacional entran en conflicto con el sentido común. Incluso, estos simples modelos de comercio pueden ofrecer alguna guía importante sobre los beneficios de la competencia internacional.

Antes de discutir sobre estos asuntos. Suponga que hay dos países. Uno que llamaremos *doméstico* ($\mathcal{E}$), y al otro lo llamaremos *exterior* ($\mathcal{E}^*$). Cada uno de estos países tiene un factor de producción (trabajo) y producen ambos bienes, digamos, queso (y_1) y vino (y_2). Como antes, denotamos a la fuerza de trabajo de $\mathcal{E}$ con L y a las unidades de trabajo de $\mathcal{E}$ en la producción de queso y vino con a_{L1} y a_{L2} respectivamente. Para $\mathcal{E}^*$ usaremos un notación conveniente, cuando hagamos referencia a algún aspecto en $\mathcal{E}^*$ usaremos el mismo símbolo que usaremos para $\mathcal{E}$, pero con un asterisco. Así la fuerza de trabajo de $\mathcal{E}^*$ será denotada por L^*; las unidades de trabajo requeridas para $\mathcal{E}^*$ en queso y vino serán denotadas por a^*_{L1} y a^*_{L2}, respectivamente, y así sucesivamente.

En general las unidades de trabajo requeridas pueden seguir cualquier patrón. Por ejemplo, la economía $\mathcal{E}$ padría ser menos productiva que la $\mathcal{E}^*$ en vino pero más productiva en queso, o viceversa. Por el momento, haremos la suposición arbitraria:

$$a_{L1}/a_{L2} < a^*_{L1}/a^*_{L2} \tag{2.82}$$

o equivalentemente,

$$a_{L1}/a^*_{L1} < a_{L2}/a^*_{L2}. \tag{2.83}$$

En palabras, suponiendo que la razón entre unidades de trabajo requeridas en queso y vino es menor en $\mathcal{E}$ que en $\mathcal{E}^*$. Resumiendo, podemos decir que la productividad relativa en $\mathcal{E}$ en queso es más alta que en vino. En este caso diremos que $\mathcal{E}$ tiene una ventaja competitiva en la producción de queso.

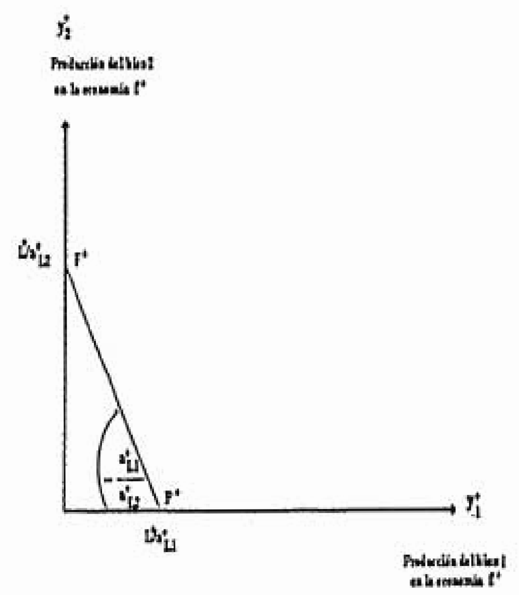

FIGURA 2.6. Frontera de posibilidades de producción $\mathcal{E}^*$. Debido a que la unidad de trabajo requerida en $\mathcal{E}^*$ en queso es más alta que en $\mathcal{E}$, su frontera de posibilidades de producción es más empinada.

Un aspecto notable de la definición de ventaja comparativa es que involucra las cuatro unidades de trabajo requeridas $(a_{L1}, a_{L2}, a^*_{L1}, a^*_{L2})$, no solo dos. Podemos pensar que lo que determina quien producirá queso, de los dos países es la capacidad en unidades de trabajo requeridas en la producción de queso, a_{L1} y a^*_{L1}. Si $a_{L1} > a^*_{L1}$, el trabajo en $\mathcal{E}$ es más eficiente que en $\mathcal{E}^*$ en la producción de queso. Esta es una situación donde la $\mathcal{E}$ tiene una **ventaja comparativa** en la producción de queso, que estudiaremos en un momento, sin embargo, no podremos determinar el patrón de comercio con ventaja absoluta. Una de las fuentes de error en la discusión de comercio internacional es la confusión de ventaja comparativa con ventaja absoluta.

Dada la fuerza de trabajo y las unidades de trabajo requeridas en los dos países, podremos graficar la frontera de posibilidades de producción para cada país. Ya se hizo esto para la $\mathcal{E}$, la gráfica de FPP en la Figura 2.1. La frontera de posibilidades de producción para la $\mathcal{E}^*$ es mostrada como FPP^* en la Figura 2.6. Dado nuestro supuesto acerca de la unidad relativa de trabajo requerido, la frontera de posibilidades de producción para la $\mathcal{E}^*$ es más empinada que la de $\mathcal{E}$.

En ausencia de comercio (autarquía) los precios relativos del queso (y_1) y vino (y_2) en cada país estará determinado por la unidad relativa de trabajo requerida. Así , en la $\mathcal{E}$ el precio relativo del queso podrá ser a_{L1}/a_{L2}; en la $\mathcal{E}^*$ será a^*_{L1}/a^*_{L2}.

Una vez permitida la posibilidad de comercio internacional, los precios ya no son determinados por consideraciones meramente de $\mathcal{E}$. Si el precio relativo del queso es más alto en $\mathcal{E}^*$ que en $\mathcal{E}$, será de mayor beneficio cambiar queso de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}^*$ y cambiar vino de $\mathcal{E}^*$ a $\mathcal{E}$. Esto no puede seguir indefinidamente; $\mathcal{E}$ podrá exporta suficiente queso, y $\mathcal{E}^*$ suficiente vino, tal que se igualen los precios relativos. Así que necesitamos determinar el precio relativo del queso en el mundo después de comerciar.

2.3.1 DETERMINACION DEL PRECIO RELATIVO DESPUES DEL COMERCIO

Los precios de los bienes comerciados internacionalmente, como otros precios, son determinados por la oferta y demanda. En una exposición de ventaja comparativa, podemos aplicar un análisis cuidadoso de oferta y demanda. En algunos contextos, tales como en los análisis de política comercial, esto es aceptable para enfocarnos solamente en la oferta y demanda en un simple mercado. En la asignación de impuestos el efecto sobre las cuotas importadas de azúcar en U.S., por ejemplo, es razonable para usar **análisis de equilibrio parcial**, esto es, estudiar un simple mercado, el mercado del azúcar. Cuando estudiamos ventajas comparativas, es crucial conservar el sentido de la relación entre mercados (en nuestro ejemplo los mercados para el queso y vino). Como la economía $\mathcal{E}$ exporta solamente queso y en cambio importa vino, y la economía $\mathcal{E}^*$ exporta vino a cambio de queso, puede ser engañoso observar los mercados del queso y vino aislados. Cuál es la necesidad de un **análisis de equilibrio general** que toma en cuenta el vínculo entre dos mercados.

Un camino útil para conservar el sentido de dos mercados es enfocarnos sobre las cantidades de queso y vino ofertadas y demandadas , esto es, sobre el número de libras de queso ofrecidas o demandadas divididas por el número de galones de vino ofrecido o demandado.

La Figura 2.7 muestra la oferta y demanda mundial para el queso relativo al vino como función del precio del queso relativo al del vino. La **curva de demanda relativa** es indicada por RD; la **curva de oferta relativa** es indicada por RS. El equilibrio general del mundo requiere que la oferta relativa sea igual a la demanda relativa, y así el precio mundial relativo esta determinado por la intersección de RD y RS.

La característica notable de la Figura 2.7 esta en que tiene la forma de la curva de oferta relativa RS: un "paso"con sección plana seguido de una sección vertical. Una vez entendida la derivación de la curva RS, estaríamos casi listos para entender el modelo en su totalidad.

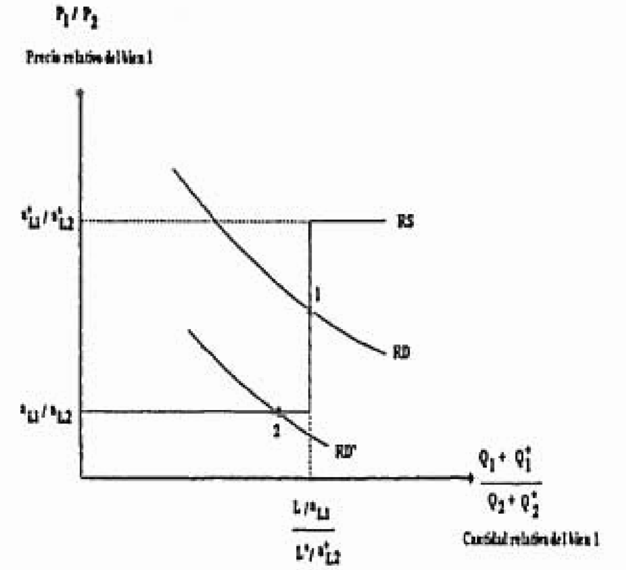

FIGURA 2.7. Oferta y demanda relativa en el mundo. La curva RD muestra que la demanda relativa del queso al vino es una función decreciente en los precios del queso relativos a los del vino, mientras que la curva RS muestra que la oferta relativa del queso al vino es una función creciente del mismo precio relativo.

Primero, del dibujo, la curva RS muestra que no hay demanda de queso si los precios en el mundo están por debajo de la pendiente a_{L1}/a_{L2}. Para ver por qué, recordemos que mostramos que la economía $\mathcal{E}$ se especializará en la producción de vino si $P_1/P_2 < a_{L1}/a_{L2}$. Similarmente, la $\mathcal{E}^*$ se especializará en la producción de vino siempre que $P_1/P_2 < a^*_{L1}/a^*_{L2}$, lo cual es por suposición más grande que a_{L1}/a_{L2}. Por lo que, si los precios relativos del queso están por debajo de a_{L1}/a_{L2}, no habrá producción mundial de queso.

Después, cuando el precio relativo del queso es exactamente igual a a_{L1}/a_{L2}, sabemos que los trabajadores de las economía $\mathcal{E}$ pueden ganar exactamente la misma cantidad en cualquier de los mercados, queso o vino. Así la economía $\mathcal{E}$ estará dispuesta a ofrecer alguna cantidad relativa de los dos bienes, produciendo una sección plana en la curva de oferta.

Si P_1/P_2 esta arriba de a_{L1}/a_{L2}, observaremos que la economía $\mathcal{E}$ se espacializará en la producción de queso. Mientras $P_1/P_2 < a^*_{L1}/a^*_{L2}$, la economía $\mathcal{E}^*$ continuará especializada en la producción de vino. Cuando la economía $\mathcal{E}$ se especializa en la producción de queso, sus libras producidas son L/a_{L1}. Similarmente, cuando la economía $\mathcal{E}^*$ se especializa en la producción de vino, sus galones producidos son L^*/a^*_{L2}. Así para algún precio relativo de queso entre a_{L1}/a_{L2} y a^*_{L1}/a^*_{L2} la oferta relativa de queso es

$$\frac{\left(\frac{L}{a_{L1}}\right)}{\left(\frac{L^*}{a^*_{L1}}\right)}. \tag{2.84}$$

En $P_1/P_2 = a^*_{L1}/a^*_{L2}$, sabemos que los trabajadores de la economía $\mathcal{E}^*$ son indiferentes entre producir queso o vino. De este modo se producirá nuevamente una sección plana en la curva de oferta.

Finalmente, para $P_1/P_2 > a^*_{L1}/a^*_{L2}$, ambas economías se especializaran en la producción de queso. Se especializaran en la producción de vino, si la oferta relativa del queso se transforma infinita.

La curva de demanda relativa RD no requiere un anális tan exhaustivo. La pendiente hacia abajo de RD refleja el efecto substituto. Como el precio relativo del queso crece, los consumidores tenderán a adquirir menos queso y más vino, y así el precio relativo de la demanda para el queso caerá.

El equilibrio del precio relativo del queso esta determinado por la intersección de las curvas de oferta y demanda relativas. La Figura 2.7 muestra la curva de demanda relativa RD que intersecta la curva RS en el punto 1, donde el precio relativo del queso esta entre los dos precios precomerciados de los países. En este caso cada país se especializa en la producción del bien en el cual tiene ventaja competitiva: La economía $\mathcal{E}$ produce solamente queso, y la $\mathcal{E}^*$ solamente vino.

Este no es el único resultado posible. Si la curva que hace RD fuera RD', por ejemplo, la oferta y la demanda relativa se intersectarían sobre una de las secciones horizontales de RS. Un segundo punto, el precio relativo del queso en el mundo después de comerciar es a_{L1}/a^*_{L1}, con el mismo costo de oportunidad del queso en términos del vino en la economía $\mathcal{E}$.

¿Cuál es el significado de este resultado? Si el precio relativo del queso es igual a su costo de oportunidad en la economía $\mathcal{E}$, la economía $\mathcal{E}$ no necesita especializarse en producir queso o vino. Y en efecto en el punto 2 la $\mathcal{E}$ debería estar produciendo ambos, algo de queso y algo de vino; podemos inferir esto del hecho de que la oferta relativa del queso es menor de lo que será si la $\mathcal{E}$ fuera en efecto completamente especializada. Como P_1/P_2 está debajo del costo de oportunidad del queso en términos del vino en la $\mathcal{E}^*$, por otra parte, la $\mathcal{E}^*$ se especializa completamente en la producción del queso. Sin embargo, sigue siendo cierto que si un país se especializa, este lo hará en un bien en el cual tenga ventaja comparativa.

Dada la posibilidad de que por un momento uno de los dos países no se especialice completamente. Excepto en este caso, el resultado normal del comercio es que el precio del bien comerciado (*i.e.* queso) relativo al del otro bien (vino) termine en algún lugar entre su nivel precomerciado en los dos países.

El efecto de esta convergencia en precios relativos significa que cada país se especializa en la producción del bien en el cual tenga el menor requerimiento de unidades de trabajo.

El incremento en el precio relativo del queso en la economía $\mathcal{E}$ marcará la especialización de la misma en la producción de queso, produciendo el punto F de la Figura 2.1. La disminución en el precio relativo del queso en la economía $\mathcal{E}^*$ producirá la especialización de la misma en vino, produciendo el punto F^* en la Figura 2.6.

2.3.2 LOS BENEFICIOS DEL COMERCIO

Hemos visto hasta ahora que países cuyo trabajo productivo relativo debido a diferentes industrias pueden especializarse en la producción de diferentes bienes. Mostraremos que ambos países obtienen beneficios del comercio de esa especialización. Estos beneficios mutuos pueden ser demostrados en dos caminos alternativos.

El primer camino muestra que la especialización y el comercio son benéficos si se piensa en el comercio como un método indirecto de producción. La economía $\mathcal{E}$ podrá producir vino directamente, pero comerciar con $\mathcal{E}^*$ le permite la producción de vino por producción de queso y entonces comercia queso por vino. Este método indirecto de "producir" un galón de vino es más eficiente que el método directo de producción. Considere dos caminos alternativos de usar una hora de trabajo. Uno es, la economía $\mathcal{E}$ podrá usar la hora directamente para producir $1/a_{L2}$ galones de vino. Alternativamente, podrá usar la hora para producir $1/a_{L1}$ libras de queso. Este queso podrá entonces ser comerciado en vino, con cada libra comerciada por P_1/P_2 galones; así nuestra hora original de trabajo produce $(1/a_{L1})(P_1/P_2)$ galones de vino. Esto será más vino que si se produce la hora directamente, mientras que

$$\left(\frac{1}{a_{L1}}\right)\left(\frac{P_1}{P_2}\right) > \left(\frac{1}{a_{L2}}\right), \tag{2.85}$$

$$\frac{P_1}{P_2} > \frac{a_{L1}}{a_{L2}}.$$

Pero hemos justificado que en equilibrio internacional, si ninguno produce ambos bienes, debemos tener $(P_1/P_2) > 1/a_{L2}$. Esto muestra que la economía $\mathcal{E}^*$ puede "producir" vino más efecientemente por hacer queso y comerciar este por vino que producirlo directamente por sí misma. Esta es un forma de ver como ambos países de benefician.

Otro camino es observar los beneficios mutuos del comercio examinando como afecta el comercio a cada una de las posibilidades de consumo del país. En la ausencia de comercio, las posibilidades de consumo son las mismas que las de producción (las líneas continuas FPP y FPP^* en la Figura 2.8). Una vez que el comercio es permitido, sin embargo, cada economía puede consumir una diferente mezcla de queso y vino, de la mezcla que es producida. Las posibilidades de consumo de la economía $\mathcal{E}$ son indicadas por la línea TF en la Figura 2.8a, mientras que las posibilidades de consumo de la economía $\mathcal{E}^*$ son indicadas por la línea TF^* en la Figura 2.8b. En cada caso el comercio tiene un amplio rango a escoger, y por consiguiente se hará vecino con cada uno de los mejores países.

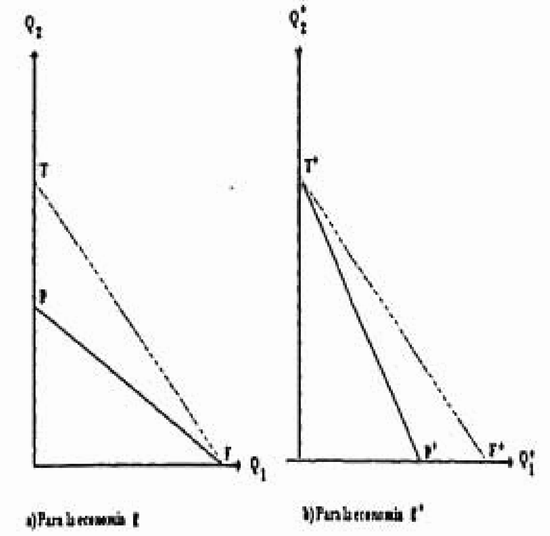

FIGURA 2.8 Deducción de comercio internacional entre las economías doméstica y extranjera para consumo en cualquier parte dentro de las líneas $TF's$, las cuales se encuentran fuera de las fronteras de posibilidades de producción de los países.

2.3.3 EJEMPLO NUMERICO

Para comprender los puntos vistos hasta este momento, consideremos el siguiente ejemplo numérico. Suponga, que las economías doméstica ($\mathcal{E}$) y extranjera ($\mathcal{E}^*$) tienen los requerimientos en unidades de trabajo ilustrados en la Tabla 2.1.

TABLA 2.1 UNIDADES DE TRABAJO REQUERIDAS

	QUESO	VINO
Doméstica	$a_{L1} = 1$	$a_{L2} = 2$
Extranjera	$a_{L1}^* = 6$	$a_{L2}^* = 3$

Una característica notable de esta tabla es que la economía doméstica tiene los requerimientos de unidades de trabajo más bajas, esto es, tiene una productividad en el trabajo más alta, en ambas industrias. Olvidaremos por un momento esta obsevación y nos enfocaremos sobre el patrón de comercio.

Lo primero que pensamos es en la necesidad de determinar el precio relativo del queso P_1/P_2. Este dependerá de la demanda; sin embargo, sabemos que éste se producirá entre el costo de oportunidad del queso de los dos países. En la doméstica, tenemos $a_{L1} = 1, a_{L2} = 2$; tal que el costo de oportunidad del queso en términos del vino es $a_{L1}/a_{L2} = 1/2$. En la exterior, $a^*_{L1} = 6, a^*_{L2} = 3$; tal que el costo de oportunidad del queso es 2. En un mundo en equilibrio, el precio relativo del queso se producirá entre esos valores. Por la forma del ejemplo, asumimos que el mundo esta en equilibrio si $P_1/P_2 = 1$: una libra de queso comerciada por un galón de vino en el mercado mundial.

En el precio relativo del queso observamos inmediatamente que cada país se especializará, doméstico en queso y extranjero en vino. Para checar esto, note que cada trabajador en la economía doméstica ganará solamente la mitad si produce vino que si produce queso y viceversa para un trabajador de la economía extranjera.

Podremos ahora checar los beneficios del comercio. Primero, esperamos mostrar que la economía doméstica puede producir vino más eficientemente haciendo queso y comerciar éste por vino que producirlo directamente. Esto es fácil de observar: en producción directa, una hora de trabajo en la economía doméstica produce solamente 1/2 galón de vino. La misma hora podrá ser usada para producir una libra de queso, la cual puede ser comerciada por un galón de vino. Esto muestra que la economía doméstica realmente se beneficia con el comercio. Similarmente, la economía extranjera podrá usar una hora de trabajo para producir 1/6 de libra de queso; pero esta puede usarse para producir 1/3 de galón de vino, y comerciar el vino por 1/3 de libra de queso. En este ejemplo en particular, cada país puede usar las mismas horas de trabajo eficientemente para comerciar, por que realmente las necesita para producir sus importaciones por sí misma.

Aunque no es esencial analizar el efecto del comercio en el bienestar de cualquier país, es interesante notar los efectos del comercio por la razón de las tasas de pago en los dos países. Para determinar la razón de las tasas de pago en los dos países, primero note que la razón de la tasa de pago de cada país estará en términos de los bienes producidos. Después de comerciar, la economía doméstica produce queso; con una hora de trabajo para producir una libra de queso, la tasa de pago en la economía doméstica es una libra de queso por una hora-hombre de trabajo. Similarmente, la economía extranjera produce vino, necesitando 3 horas de trabajo por galón; así la tasa de pago de la economía extranjera es 1/3 de galón de vino por hora-hombre.

Para explicar esas tasas de pago en términos comparables de queso y vino, debemos hacer uso de los precios relativos de los bienes. Si el costo de un galón de vino es el mismo que el de una libra de queso, entonces la tasa de salarios en la economía extranjera debe ser uno a tres la tasa de la economía doméstica. La razón de la tasas de pagos se produce entre las razones de productividad en las industrias de los dos países. La economía doméstica es seis veces más productiva que la extranjera en queso, pero solamente uno y media veces en vino, y esto determina la tasa de salarios de tres veces más alta en la extranjera. Precisamente el pago relativo intermedio entre la productividad relativa de cada país determina la ventaja en el costo de un bien. Debido a su tasa de pago más baja, la economía extranjera tiene una ventaja en el costo del vino, si pensamos que tiene una productividad en el trabajo más baja. La economía doméstica tiene una ventaja en el costo del queso a pesar de su tasa de salarios más alta, debido al pago más alto es maś compensada por su productividad más alta.

Sabemos ahora el desarrollo del modelo de comercio internacional más simple. Obviamente el modelo Ricardiano de un bien es el más simple para hacer un análisis completo de cualquiera de las causas o efectos de comercio internacional. Nos enfocaremos sobre la productividad del trabajo relativo que puede ser una herramienta muy común para pensar acerca de comercio internacional. En particular, el modelo simple de un factor es un buen camino para producir varios conceptos en común respecto al significado de ventaja comparativa y la naturaleza del beneficio del libre comercio. Esos conceptos aparecen frecuentemente en debates acerca de política económica internacional, igualmente en declaraciones de aquellos quienes no son expertos.

2.4 MALOS ENTENDIDOS ACERCA DE VENTAJA COMPARATIVA

No existe confusión de ideas en economía. Políticos, líderes de negocios y algunos economistas frecuentemente hacen declaraciones que no tienen bases en un cuidadoso análisis económico. Por alguna razón esas apreciaciones serán especialmente ciertas en economía internacional. Al abrir la sección de negocios de algún periódico dominical o revista semanal encontraras probablemente al menos un artículo que haga declaraciones tontas acerca de economía internacional. Tres malos entendidos en particular son altamente citados, y nuestro simple modelo de ventaja comparativa puede ser usado para ver por que son incorrectos.

2.4.1 PRODUCTIVIDAD Y COMPETITIVIDAD

Mito 1: Libre comercio es sólo benéfico si nuestros países son lo suficientemente productivos para levantar la competencia internacional. Este argumento, frecuentemente usado para juzgar países menos desarrollados, implica que países pobres deberían ellos mismos aislarse de la economía internacional hasta que esten lo suficientemente fuertes para competir. En 1983, por ejemplo, un columnista en el *Wall Street Journal* (B. Bruce-Biggs, The Coming Overthrow of Free Trade, February 28, 1983) aseveró que "Muchos países no tienen ventaja competitiva en nada". Esta falacia ha sido dada en nuevos contratos de vida por retos tecnológicos Japoneses a los Estados Unidos. Estos retos han producido temor a un fracaso de los Estados Unidos que guardan su tecnología de punta que significará que el comercio puede llegar a ser una fuente de daño instantáneo del beneficio.

Para ver la falacia de este razonamiento, necesitamos ver no más de un simple ejemplo numérico de comercio. La economía doméstica tiene requerimientos de unidades de trabajo más bajas y su productividad más alta en ambos sectores queso y vino. No obstante, como vimos, ambos países se benefician con el comercio. Esto siempre incita a suponer que la habilidad de exportar bienes depende de su ventaja absoluta en productividad: que para el columnista del *Wall Street Journal* tendrá el significado de que "muchos países pequeños no tienen ventaja productiva absoluta sobre otros países en nada". Lo que le falló es entender que una ventaja productiva absoluta sobre otros países en la producción de bienes no es condición necesaria o suficiente para tener una ventaja *comparativa* en ese bien. En nuestro modelo de un factor la razón de por qué la ventaja comparativa absoluta en una industria es no necesaria o no sufuciente es clara: *La ventaja comparativa de una industria depende no sólo de su productividad relativa a la industria extranjera, sino también de la tasa de pago doméstica relativa a la tasa de pago extranjera.* La tasa de pago de un país, en turno, depende de la productividad relativa en sus otras industrias. En nuestro ejemplo numérico, la economía extranjera es menos eficiente que la economía doméstica en la manufactura de vino, pero igual o más grande es su desventaja en su productividad relativa de queso. Debido a su baja productividad total. La economía extranjera pagará menor salario que la doméstica, lo suficientemente bajos que terminan con costos más bajos en la producción de vino. Similarmente, en el mundo real Portugal tiene productividad baja, digamos ropa, comparada con los Estados Unidos; pero la desventaja productiva de Portugal es igual de grande en otras industrias que pagan salarios lo suficientemente bajos para tener ventaja comparativa en ropa.

¿Pero no tienen ventaja comparativa basada sobre salarios bajos de algún modo falsos? Mucha gente piensa que: sus creencias son resumidas por nuestro segundo mal entendido.

2.4.2 EL ARGUMENTO DE TRABAJO CON SALARIO BAJO

Mito 2: La competancia de la economía extranjera es falsa y ofende a otros países cuando esta basada en bajos salarios. Este argumento algunas veces se refiere al **argumento de trabajo, de emplear trabajadores con bajo salario por largas horas en pobres condiciones**, es un argumento preferido por los sindicatos de trabajo para buscar protección de la competencia extranjera. La gente que se adhiere a estas creencias argumenta que las industrias no deberían tener que hacer frente a industrias extranjeras que son menos eficientes y pagan menor salario. Este punto de vista es general y tomado seriamente por opiniones respetables: durante 1986 el *New York Times* publicó tres artículos del Profesor John Culbertson de la universidad de Wisconsin, argumentando que la competencia extranjera basada en bajos salarios es destructiva para los Estados Unidos.

Nuevamente, nuestro simple modelo revela el error de este argumento. En el ejemplo, la economía doméstica es más productiva que la extranjera en ambas industrias, los costos de producción de vino más bajos en la extranjera son completamente debido a su tasa de salarios mucho más bajos. La tasa de salarios más bajos en la economía extranjera son, sin embargo, irrelevantes para la cuestión de si la economía doméstica se beneficia más del comercio. Si los costos más bajos en la producción de vino en la economía extranjera son debido a su alta productividad o menores salarios no importa. Todo lo que importa en la economía doméstica es que sea más barato en términos de su propio trabajo producir queso y comerciar este por vino que producir vino por sí mismo.

Esto es bueno para la economía doméstica; ¿pero que hay acerca de la economía extranjera? No hay algunas cosas malas en base a una sobre exportación a bajos salarios?

Ciertamente esta no es una posición atractiva para estar dentro de ella, pero la idea de comerciar en solamente bienes si tu recibes altos salarios es nuestro error al final.

2.4.3 CAMBIOS DESIGUALES

Mito 3: Proezas comerciales en países y hacer esto en peores condiciones si el país usa más trabajo para producir los bienes a exportar de lo que otros países usan para producir los bienes recibidos a cambio. Este argumento, algunas veces llamado la doctrina de **cambios desiguales**, tiene sus raíces en las ideas Marxistas de que el valor es creado solamente por el trabajo, y tiende a favorecer al tercer mundo abogando por una redistribución de ingresos de los países ricos a los pobres.

Mientras exista una cierta señal de la idea de que un país esta siendo explotado si sus exportaciones incorporan más trabajo que sus importaciones, desigualdades de cambio no significa que los países con bajos salarios pierdan por comerciar. En el ejemplo numérico, la economía extranjera cambia un galón de vino por cada libra de queso que recibe; estos cambios algunas veces toman tres horas de trabajo para producir algo que la economía doméstica produce solamente en una hora de trabajo. Estas desigualdades en las entradas de trabajo, sin embargo, son irrelevantes para la conclusión de que la economía extranjera se beneficia del comercio. En la pregunta de que si comercio es benéfico, no deberas comparar el trabajo doméstico usado para producir tus exportaciones con el trabajo usado en el extranjero para pruducir sus importaciones. Así , deberas comparar el trabajo usado para producir tus exportaciones con la cantidad de trabajo que deberas tomar para producir tus importaciones por uno mismo. El comercio completo es: la economía extranjera es capaz de obtener una libra de queso por tres horas de trabajo, cuando le tomaría seis horas de trabajo para producirlo domésticamente. Si en otro país puede producir sus importaciones con mucho menos trabajo del que requerirá en su país, bienes para ellos, este hecho no hace que reduzcan sus propios beneficios del comercio.

2.5 UN FACTOR, VARIOS BIENES

Si se producen varios bienes utilizando un sólo factor, trabajo, y manteniendo los supuestos hasta ahora utilizados, la tecnología de cada economía puede ser descrita por la unidad de trabajo requerida para producir una unidad de cada bien. Para la economí a $\mathcal{E}$, la unidad de trabajo requerida para producir el bien i es a_{Li}, y la correspondiente para la economía $\mathcal{E}^*$ es a^*_{Li}. La razón de trabajo requerida en $\mathcal{E}$ en términos de $\mathcal{E}^*$ del bien i es a_{Li}/a^*_{Li}. Si se renombran los bienes de tal forma que el bien 1 corresponda a la razón más baja y así sucesivamente, tal que

$$\frac{a_{L1}}{a^*_{L1}} < \frac{a_{L2}}{a^*_{L2}} < \dots < \frac{a_{LN}}{a^*_{LN}}.$$

El patrón de comercio depende solamente de la razón de salarios entre las dos economías. Una vez conocida dicha razón, se determina quien produce qué. Sea W la tasa salarial por hora en $\mathcal{E}$ y W^* en $\mathcal{E}^*$. El cociente de tasas salariales es $\frac{W}{W^*}$. Cualquier bien para el cual $\frac{a^*_{Li}}{a_{Li}} > \frac{W}{W^*}$ será producido en $\mathcal{E}$, mientras que si $\frac{a^*_{Li}}{a_{Li}} < \frac{W}{W^*}$ será producido en $\mathcal{E}^*$. Esto se debe a que los bienes serán producidos en donde es más barato producirlo. El costo de producir el bien i es la unidad de trabajo requerida por la tasa salarial. Para producir el bien i en $\mathcal{E}$ se necesita Wa_{Li}, mientras que para $\mathcal{E}^*$ es $W^*a^*_{Li}$. Será más barato producirlo en $\mathcal{E}$ si $Wa_{Li} < W^*a^*_{Li}$, o lo que es lo mismo, $\frac{a^*_{Li}}{a_{Li}} > \frac{W}{W^*}$. Similarmente para $\mathcal{E}^*$.

Si $\frac{a^*_{Li}}{a_{Li}} = \frac{W}{W^*}$, el bien se producirá en ambas economías.

En el caso de incorporar al modelo costos de transporte, los resultados fundamentales no cambian, sólo se recorrerá la intersección de las curvas de oferta y demanda relativas.

2.6 ESTATICA COMPARATIVA

Retomando el problema de dos economías, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^*$, que comercian internacionalmente y suponiendo que

$$\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}} \tag{1.86}$$

ó $\frac{1/a_{L1}}{1/a_{L2}} > \frac{1/a^*_{L1}}{1/a^*_{L2}}$, *i.e.*, en este caso $\mathcal{E}$ tiene ventaja comparativa en la producción del bien y_1. En el caso de que $a_{L1} < a^*_{L1}$, el trabajo en $\mathcal{E}$ es más eficiente que en $\mathcal{E}^*$, se dice que $\mathcal{E}$ tiene ventaja absoluta en la producción de y_1.

Para obtener las gráficas de oferta y demanda relativas, sea

$$y = \frac{y_1 + y_1^*}{y_2 + y_2^*} = \frac{L_1/a_{L1} + L_1^*/a^*_{L1}}{L_2/a_{L2} + L_2^*/a^*_{L2}}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{L/a_{L1} + L_1^*/a_{L1}}{(L^* - L_1^*)/a^*_{L2}}, \quad L_1 = L, \quad L_2 = 0. \text{ Segmento 4 de la curva RD;} \\ \dfrac{L/a_{L1}}{L^*/a^*_{L2}}, \quad L_1 = L, \quad L_1^* = 0. \text{ Segmento 3 de la curva RD;} \\ \dfrac{L_1/a_{L1}}{(L - L_1)/a_{L2} + L^*/a^*_{L2}}; \quad L_1^* = 0, \quad L_2^* = L^*. \text{ Segmento 2 de la curva RD;} \\ 0, \quad y_1 = -y_1^*. \text{ Segmento 1 de la curva RD.} \end{cases}$$

En la sacción 4 de la curva RD, $\mathcal{E}$ se especializa en y_1 y tiene ventaja comparativa sobre $\mathcal{E}^*$. En la sección 3 de la misma curva $\mathcal{E}$ tiene ventaja absoluta en la producción de y_1.

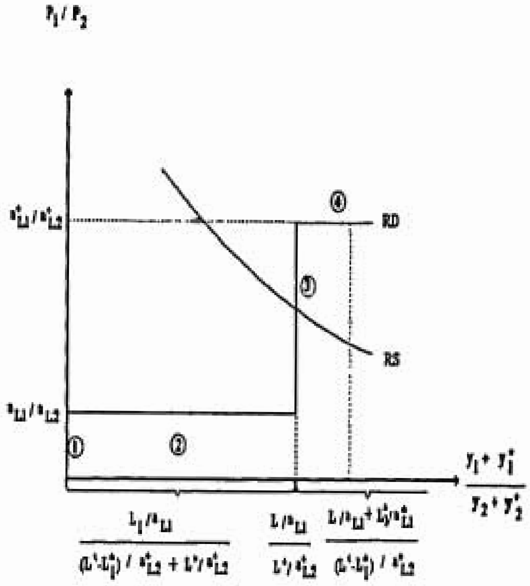

FIGURA 2.9. Equilibrio general (Ofertas y demandas relativas).

Del supuesto (2.86) se tienen los siguientes casos:

CASOI. $\frac{P_1}{P_2} < \frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}}$ $\quad \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow y_1 = 0, \;\; y_2 = \frac{L}{a_{L2}}; \\ \mathcal{E}^* \rightarrow y_1^* = 0, \;\; y_2^* = \frac{L^*}{a^*_{L2}} \end{cases}$

CASOII. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}}$ $\quad \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow y_1 = \frac{L_1}{a_{L1}}, \;\; y_2 = \frac{(L-L_1)}{a_{L2}}; \\ \mathcal{E}^* \rightarrow y_1^* = 0, \;\; y_2^* = \frac{L^*}{a^*_{L2}} \end{cases}$

CASOIII. $\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{P_1}{P_2} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}}$ $\quad \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow y_1 = \frac{L}{a_{L1}}, \;\; y_2 = 0; \\ \mathcal{E}^* \rightarrow y_1^* = 0, \;\; y_2^* = \frac{L^*}{a^*_{L2}} \end{cases}$

CASOIV. $\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}} = \frac{P_1}{P_2}$ $\quad \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow y_1 = \frac{L}{a_{L1}}, \;\; y_2 = 0; \\ \mathcal{E}^* \rightarrow y_1^* = \frac{L_1^*}{a^*_{L1}}, \;\; y_2^* = \frac{(L^*-L_1^*)}{a^*_{L2}} \end{cases}$

CASOV. $\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}} < \frac{P_1}{P_2}$ $\quad \{\text{no} - \text{comercian}$

En el caso (III) hay especialización en cada economía en una industria. $\mathcal{E}$ podría producir $\frac{1}{a_{L2}}$ de y_2, sin embargo produce $\frac{1}{a_{L1}}$ de y_1 para después intercambiarlo, esta es la mejor situación, ya que: $\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{a_{L1}} > \frac{1}{a_{L2}}$ entonces $\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{P_1}{P_2}$. A esto se le llama ganancia por comerciar. Nótese que no se usaron preferencias.

Si ahora introducimos preferencias para el caso (III), se tiene el siguiente problema para la econimía $\mathcal{E}$

$$\left.\begin{aligned} &\max \ U(c_1, c_2), \\ &\text{s.a.} \ \ P_1c_1 + P_2c_2 \leq \frac{L}{a_{L1}}P_1, \\ &\qquad c_1 \geq 0, \\ &\qquad c_2 \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.87}$$

El lagrangiano y las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden son:

$$\mathcal{L} = U + \lambda_1\left(\frac{L}{a_{L1}}P_1 - P_1c_1 - P_2c_2\right) + \lambda_2c_1 + \lambda_3c_2. \tag{2.88}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_1} = U_1 - \lambda_1P_1 + \lambda_2 \leq 0; \tag{2.89a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_2} = U_2 - \lambda_1P_2 + \lambda_3 \leq 0; \tag{2.89b}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \frac{L}{a_{L1}}P_1 - P_1c_1 - P_2c_2 \geq 0; \tag{2.89c}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = c_1 \geq 0; \tag{2.89d}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = c_2 \geq 0; \tag{2.89e}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_1}c_1 = (U_1 - \lambda_1P_1 + \lambda_2)c_1 = 0; \tag{2.89f}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_2}c_2 = (U_2 - \lambda_1P_2 + \lambda_3)c_2 = 0; \tag{2.89g}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_1}\lambda_1 = \left(\frac{L}{a_{L1}}P_1 - P_1c_1 - P_2c_2\right)\lambda_1 = 0; \tag{2.89h}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_2}\lambda_2 = c_1\lambda_2 = 0; \tag{2.89i}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_3}\lambda_3 = c_2\lambda_3 = 0; \tag{2.89j}$$

$$\lambda_1 \geq 0; \tag{2.89k}$$

$$\lambda_2 \geq 0; \tag{2.89l}$$

$$\lambda_3 \geq 0. \tag{2.89m}$$

De (2.89a), (2.89d) y (2.89f)

$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 < 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0; \tag{2.90a}$$
$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 > 0; \tag{2.90b}$$
$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0; \tag{2.90c}$$

De (2.89b), (2.89e) y (2.89g)

$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 < 0 \quad \text{y} \quad c_2 = 0; \tag{2.91a}$$
$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 > 0; \tag{2.91b}$$
$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 = 0; \tag{2.91c}$$

De (2.89c), (2.89h) y (2.89k)

$$\frac{L}{a_{L1}} P_1 - P_1 c_1 - P_2 c_2 > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 0; \tag{2.92a}$$
$$\frac{L}{a_{L1}} P_1 - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 > 0; \tag{2.92b}$$
$$\frac{L}{a_{L1}} P_1 - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 0; \tag{2.92c}$$

De (2.89i) y (2.89l)

$$\lambda_2 > 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0; \tag{2.93a}$$
$$\lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 > 0; \tag{2.93b}$$
$$\lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0; \tag{2.93c}$$

De (2.89j) y (2.89m)

$$\lambda_3 > 0 \quad \text{y} \quad c_2 = 0; \tag{2.94a}$$
$$\lambda_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 > 0; \tag{2.94b}$$
$$\lambda_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_2 = 0. \tag{2.94c}$$

Si queremos solución interior, $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, entonces: de (2.90b), (2.91b), (2.92b), (2.93b) y (2.94b) y tomando $\lambda_1 = \lambda$

$$U_1 - \lambda P_1 = 0; \tag{2.95a}$$
$$U_2 - \lambda P_2 = 0; \tag{2.95b}$$
$$\frac{L}{a_{L1}} P_1 - P_1 c_1 - P_2 c_2 = 0. \tag{2.95c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (2.95):

$$\left.\begin{aligned} U_{11}dc_1 + U_{12}dc_2 - \lambda dP_1 - P_1 d\lambda = 0;\\ U_{21}dc_1 + U_{22}dc_2 - \lambda dP_2 - P_2 d\lambda = 0;\\ \frac{P_1}{a_{L1}}dL + \frac{L}{a_{L1}}dP_1 - \frac{P_1 L}{a_{L1}^2}da_{L1} - P_1 dc_1 - c_1 dP_1 - P_2 dc_2 - c_2 dP_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.96}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_1 \\ \lambda dP_2 \\ \frac{-P_1}{a_{L1}}dL - \frac{L}{a_{L1}}dP_1 + \frac{P_1}{a_{L1}^2}da_{L1} + c_1 dP_1 + c_2 dP_2 \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

De (1.95)

$$\frac{U_1}{P_1} = \frac{U_2}{P_2} = \lambda. \tag{2.98}$$

Y el discriminante del sistema (2.97) es el mismo que para el sistema (2.33), esto es, Δ (ecuación (2.34)). Resolviendo para dc_1

$$\begin{aligned} dc_1 = & \frac{1}{\Delta}\Bigg(-\lambda P_2^2 dP_1 + \lambda P_1 P_2 dP_2 + \\ & - U_{12}P_2 \left[\frac{-P_1}{a_{L1}}dL - \frac{L}{a_{L1}}dP_1 + \frac{P_1}{a_{L1}^2} + c_1 dP_1 + c_2 dP_2\right] + \\ & + P_1 U_{22}\left[\frac{-P_1}{a_{L1}}dL - \frac{L}{a_{L1}}dP_1 + \frac{P_1}{a_{L1}^2}da_{L1} + c_1 dP_1 + c_2 dP_2\right]\Bigg). \end{aligned}$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_1 = & \frac{1}{\Delta}\left\{\left[-\lambda P_2^2 - U_{12}P_2\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right) + P_1 U_{22}\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\right] dP_1 + \right. \\ & + \left[P_1 P_2 \lambda - U_{12}P_2 c_2 + P_1 U_{22} c_2\right] dP_2 + \\ & + \left[(U_{12}P_2 - U_{22}P_1)\,\frac{P_1}{a_{L1}}\right] dL + \\ & \left. + \left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\,\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\right] da_{L1}\right\}. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Como

$$dc_1 = \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right) da_{L1}. \tag{2.100}$$

Comparando (2.99) y (2.100)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[-\lambda P_2^2 - U_{12}P_2\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right) + P_1U_{22}\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\right]; \quad (2.101a)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[P_1P_2\lambda - U_{12}P_2c_2 + P_1U_{22}c_2\right]; \quad (2.101b)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(U_{12}P_2 - U_{22}P_1)\frac{P_1}{a_{L1}}\right]; \quad (2.101c)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\frac{P_1L}{a_{L1}^2}\right]. \quad (2.101d)$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{11}P_1)\frac{P_1L}{a_{L1}^2}\right]; \quad (2.102)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{-a_{L1}}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right); \quad (2.103)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \frac{-1}{\Delta}\lambda P_2^2 + \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right); \quad (2.104a)$$

$$= \frac{-1}{\Delta}\lambda P_2^2 - \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}^2}{P_1L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right); \quad (2.104b)$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}\lambda P_1P_2 - \frac{c_2a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right); \quad (2.105a)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\lambda P_1P_2 + \frac{c_2a_{L1}^2}{P_1L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right). \quad (2.105b)$$

Resolviendo de manera análoga para dc_2

$$dc_2 = \frac{1}{\Delta}\left\{\lambda P_1P_2dP_1 - \lambda P_1^2dP_2 + \right.$$
$$\left. + [U_{11}P_2 - U_{21}P_1]\left[\frac{-P_1}{a_{L1}}dL - \frac{L}{a_{L1}}dP_1 + \frac{P_1}{a_{L1}^2} + c_1dP_1 + c_2dP_2\right]\right\}.$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_2 = \frac{1}{\Delta}\Bigg\{ & \left[\lambda P_1P_2 + (U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\right]dP_1 + \\ & + \left[-P_1^2\lambda + (U_{11}P_2 - P_1U_{21})c_2\right]dP_2 + \\ & + \left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\left(\frac{-P_1}{a_{L1}}\right)\right]dL + \\ & + \left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\frac{P_1L}{a_{L1}^2}\right]da_{L1}\Bigg\}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Como

$$dc_2 = \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right) da_{L1}. \tag{2.107}$$

Comparando (2.106) y (2.107)

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda P_1 P_2 + (U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\right]; \tag{2.108a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[-P_1^2\lambda + (U_{11}P_2 - P_1U_{21})c_2\right]; \tag{2.108b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\left(\frac{-P_1}{a_{L1}}\right)\right]; \tag{2.108c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\right]. \tag{2.108d}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\right]; \tag{2.109}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = \frac{-a_{L1}}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.110}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}\lambda P_1 P_2 - \left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right); \tag{2.111a}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\lambda P_1 P_2 + \left(\frac{-L}{a_{L1}} + c_1\right)\frac{a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.111b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = \frac{-1}{\Delta}\lambda P_1^2 - \frac{c_2 a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right); \tag{2.112a}$$

$$= \frac{-1}{\Delta}\lambda P_1^2 + \frac{c_2 a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right). \tag{2.112b}$$

Las ecuaciones (2.102-2.105) y (2.109-2.112) son llamadas **demandas marshallianas.**

Para el *problema dual*:

$$\left.\begin{aligned} \min\ & P_1h_1 + P_2h_2, \\ \text{s.a.}\ & U(h_1, h_2) \geq U_o, \\ & h_1 \geq 0, \\ & h_2 \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.113}$$

El lagrangiano y las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden son:

$$\mathcal{L} = P_1 h_1 + P_2 h_2) + \mu_1 (U_o - U) + \mu_2 h_1 + \mu_3 h_2. \tag{2.114}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} = P_1 - \mu_1 U_1 + \mu_2 \geq 0; \tag{2.115a}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} = P_2 - \mu_1 U_2 + \mu_3 \geq 0; \tag{2.115b}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} = U_o - U \leq 0; \tag{2.115c}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} = h_1 \geq 0; \tag{2.115d}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3} = h_2 \geq 0; \tag{2.115e}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} h_1 = (P_1 - \mu_1 U_1 + \mu_2) h_1 = 0; \tag{2.115f}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} h_2 = (P_2 - \mu_1 U_2 + \mu_3) h_2 = 0; \tag{2.115g}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} \mu_1 = (U_o - U) \mu_1 = 0; \tag{2.115h}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} \mu_2 = h_1 \mu_2 = 0; \tag{2.115i}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3} \mu_3 = h_2 \mu_3 = 0; \tag{2.115j}$$
$$\mu_1 \geq 0; \tag{2.115k}$$
$$\mu_2 \geq 0; \tag{2.115l}$$
$$\mu_3 \geq 0. \tag{2.115m}$$

De (2.115a), (2.115d) y (2.115f)

$$P_1 - \mu_1 U_1 + \mu_2 > 0 \ \text{ y } \ h_1 = 0; \tag{2.116a}$$
$$P_1 - \mu_1 U_1 + \mu_2 = 0 \ \text{ y } \ h_1 > 0; \tag{2.116b}$$
$$P_1 - \mu_1 U_1 + \mu_2 = 0 \ \text{ y } \ h_1 = 0; \tag{2.116c}$$

De (2.115b), (2.115e) y (2.115g)

$$P_2 - \mu_1 U_2 + \mu_3 > 0 \ \text{ y } \ h_2 = 0; \tag{2.117a}$$
$$P_2 - \mu_1 U_2 + \mu_3 = 0 \ \text{ y } \ h_2 > 0; \tag{2.117b}$$
$$P_2 - \mu_1 U_2 + \mu_3 = 0 \ \text{ y } \ h_2 = 0; \tag{2.117c}$$

De (2.115c), (2.115h) y (2.115k)

$$U_o - U < 0 \;\; \text{y} \;\; \mu_1 = 0; \tag{2.118a}$$
$$U_o - U = 0 \;\; \text{y} \;\; \mu_1 > 0; \tag{2.118b}$$
$$U_o - U = 0 \;\; \text{y} \;\; \mu_1 = 0; \tag{2.118c}$$

De (2.115i) y (2.115l)

$$\mu_2 > 0 \;\; \text{y} \;\; h_1 = 0; \tag{2.119a}$$
$$\mu_2 = 0 \;\; \text{y} \;\; h_1 > 0; \tag{2.119b}$$
$$\mu_2 = 0 \;\; \text{y} \;\; h_1 = 0; \tag{2.119c}$$

De (2.115j) y (2.115m)

$$\mu_3 > 0 \;\; \text{y} \;\; h_2 = 0; \tag{2.120a}$$
$$\mu_3 = 0 \;\; \text{y} \;\; h_2 > 0; \tag{2.120b}$$
$$\mu_3 = 0 \;\; \text{y} \;\; h_2 = 0; \tag{2.120c}$$

Si queremos solución interior, $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$, entonces: de (2.116b), (2.117b), (2.118b), (2.119b) y (2.120b) y tomando $\mu_1 = \mu$

$$P_1 - \mu U_1 = 0; \tag{2.121a}$$
$$P_2 - \mu U_2 = 0; \tag{2.121b}$$
$$U_o - U = 0. \tag{2.121c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (2.121):

$$\left.\begin{aligned} -\mu U_{11} dh_1 - \mu U_{12} dh_2 + dP_1 - U_1 d\mu &= 0; \\ -\mu U_{21} dh_1 - \mu U_{22} dh_2 + dP_2 - U_2 d\mu &= 0; \\ dU_o - U_1 dh_1 - U_2 dh_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.122}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mu U_{11} & \mu U_{12} & U_1 \\ \mu U_{21} & \mu U_{22} & U_2 \\ U_1 & U_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_1 \\ \lambda dP_2 \\ dU_o \end{bmatrix} \tag{2.123}$$

El sistema (2.123) es igual al del sistema (2.50), por lo que las demandas hicksianas son las mismas y estan dadas por (2.56) y (2.60). Comparando las demandas hicksianas y marshallianas se llega a las relaciones de Slutsky siguientes:

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) + \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right); \tag{2.124a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) - \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.124b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) - c_2\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right); \tag{2.125a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) + c_2\frac{a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.125b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) + \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right); \tag{2.126a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) - \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.126b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = -\left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) - c_2\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right); \tag{2.127a}$$

$$= \left(\frac{-\partial h_2}{\partial P_2}\right) + c_2\frac{a_{L1}^2}{P_1 L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right); \tag{2.127b}$$

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right); \tag{2.128}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right)}{\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right)}; \tag{2.129}$$

Si ahora resolvemos el problema para la economía $\mathcal{E}^*$ bajo el supuesto (2.86) caso (III):

$$\left.\begin{aligned} &\max\ U^*(c_1^*, c_2^*), \\ &\text{s.a.}\ \ P_1 c_1^* + P_2 c_2^* \leq \frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2, \\ &\qquad c_1^* \geq 0, \\ &\qquad c_2^* \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.130}$$

El lagrangiano y las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden son:

$$\mathcal{L}^* = U^* + \lambda_1^*\left(\frac{L^*}{a_{L2}^*}P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^*\right) + \lambda_2^* c_1^* + \lambda_3^* c_2^* \tag{2.131}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c_1^*} = U_1^* - \lambda_1^* P_1 + \lambda_2^* \leq 0; \tag{2.132a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c_2^*} = U_2^* - \lambda_1^* P_2 + \lambda_3^* \leq 0; \tag{2,132b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_1^*} = \frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* \geq 0; \tag{2.132c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_2^*} = c_1^* \geq 0; \tag{2.132d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_3^*} = c_2^* \geq 0; \tag{2.132e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c_1^*} c_1^* = (U_1^* - \lambda_1^* P_1 + \lambda_2^*) c_1^* = 0; \tag{2.132f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial c_2^*} c_2^* = (U_2^* - \lambda_1^* P_2 + \lambda_3^*) c_2^* = 0; \tag{2.132g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_1^*} \lambda_1^* = \left(\frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* \right) \lambda_1^* = 0; \tag{2.132h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_2^*} \lambda_2^* = c_1^* lambda_2^* = 0; \tag{2.132i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \lambda_3^*} \lambda_3^* = c_2^* \lambda_3^* = 0; \tag{2.132j}$$

$$\lambda_1^* \geq 0; \tag{2.132k}$$

$$\lambda_2^* \geq 0; \tag{2.132l}$$

$$\lambda_3^* \geq 0. \tag{2.132m}$$

De (2.132a), (2.132d) y (2.132f)

$$U_1^* - \lambda_1^* P_1 + \lambda_2^* < 0 \ \text{ y } \ c_1^* = 0; \tag{2.133a}$$

$$U_1^* - \lambda_1^* P_1 + \lambda_2^* = 0 \ \text{ y } \ c_1^* > 0; \tag{2.133b}$$

$$U_1^* - \lambda_1^* P_1 + \lambda_2^* = 0 \ \text{ y } \ c_1^* = 0; \tag{2.133c}$$

De (2.132b), (2.132e) y (2.132g)

$$U_2^* - \lambda_1^* P_2 + \lambda_3^* < 0 \ \text{ y } \ c_2^* = 0; \tag{2.134a}$$

$$U_2^* - \lambda_1^* P_2 + \lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ c_2^* > 0; \tag{2.134b}$$

$$U_2^* - \lambda_1^* P_2 + \lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ c_2^* = 0; \tag{2.134c}$$

De (2.132c), (2.132h) y (2.132k)

$$\frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* > 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* = 0; \tag{2.135a}$$

$$\frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* > 0; \tag{2.135b}$$

$$\frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* = 0; \tag{2.135c}$$

De (2.132i) y (2.132l)

$$\lambda_2^* > 0 \;\; y \;\; c_1^* = 0; \tag{2.136a}$$
$$\lambda_2^* = 0 \;\; y \;\; c_1^* > 0; \tag{2.136b}$$
$$\lambda_2^* = 0 \;\; y \;\; c_1^* = 0; \tag{2.136c}$$

De (2.132j) y (2.132m)

$$\lambda_3^* > 0 \;\; y \;\; c_2^* = 0; \tag{2.137a}$$
$$\lambda_3^* = 0 \;\; y \;\; c_2^* > 0; \tag{2.137b}$$
$$\lambda_3^* = 0 \;\; y \;\; c_2^* = 0. \tag{2.137c}$$

Si queremos solución interior, $c_1^* > 0$ y $c_2^* > 0$, entonces: de (2.133b), (2.134b), (2.135b), (2.136b) y (2.137b) y tomando $\lambda_1^* = \lambda^*$

$$U_1^* - \lambda^* P_1 = 0; \tag{2.138a}$$
$$U_2^* - \lambda^* P_2 = 0; \tag{2.138b}$$
$$\frac{L^*}{a_{L2}^*} P_2 - P_1 c_1^* - P_2 c_2^* = 0. \tag{2.138c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (2.138):

$$\left.\begin{aligned} U_{11}^* dc_1^* + U_{12}^* dc_2^* - \lambda^* dP_1 - P_1 d\lambda^* = 0; \\ U_{21}^* dc_1^* + U_{22}^* dc_2^* - \lambda^* dP_2 - P_2 d\lambda^* = 0; \\ \frac{P_2}{a_{L2}^*} dL^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*} dP_2 - \frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}} da_{L2}^* - P_1 dc_1^* - c_1^* dP_1 - P_2 dc_2^* - c_2^* dP_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.139}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & -P_1 \\ U_{21}^* & U_{22}^* & -P_2 \\ -P_1 & P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc_1^* \\ dc_2^* \\ d\lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* dP_1 \\ \lambda^* dP_2 \\ \frac{-P_2}{a_{L2}^*} dL^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*} dP_2 + \frac{P_2}{a_{L2}^{*2}} da_{L2}^* + c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 \end{bmatrix} \tag{2.140}$$

De (2.138)

$$\frac{U_1^*}{P_1} = \frac{U_2^*}{P_2} = \lambda^*. \tag{2.141}$$

Y el discriminante del sistema (2.140) es el mismo que para el sistema (2.33) para $\mathcal{E}^*$, esto es, Δ^* (ecuación (2.34) con asterisco). Resolviendo para dc_1^*

$$\begin{aligned} dc_1^* = & \frac{1}{\Delta^*} \Bigg(-\lambda^* P_2^2 dP_1 + \lambda^* P_1 P_2 dP_2 + \\ & - U_{12}^* P_2 \left[\frac{-P_2}{a_{L2}^*} dL^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*} dP_2 + \frac{P_2}{a_{L1}^{*2}} da_{L2}^* + c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 \right] + \\ & + P_1 U_{22}^* \left[\frac{-P_2}{a_{L2}^*} dL^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*} dP_2 + \frac{P_2}{a_{L2}^{*2}} da_{L2}^* + c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 \right] \Bigg). \end{aligned}$$

Ordenando términos

$$
\begin{aligned}
dc_1^* = \frac{1}{\Delta^*} \Big\{ & \left[-\lambda^* P_2^2 - U_{12}^* P_2 (c_1^*) + P_1 U_{22}^* (c_1^*)\right] dP_1 + \\
& + \left[P_1 P_2 \lambda^* - U_{12}^* P_2 c_2 + P_1 U_{22}^* \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}}\right)\right] dP_2 + \\
& + \left[\left(U_{12}^* P_2 - U_{22}^* P_1\right) \frac{P_2}{a_{L2}^*}\right] dL^* + \\
& + \left[\left(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1\right) \frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right] da_{L2}^* \Big\} .
\end{aligned}
\tag{2.142}
$$

Como

$$
dc_1^* = \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) dL^* + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) da_{L2}^* . \tag{2.143}
$$

Comparando (2.142) y (2.143)

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[-\lambda^* P_2^2 - U_{12}^* P_2 (c_1^*) + P_1 U_{22}^* (c_1^*)\right] ; \tag{2.144a}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[P_1 P_2 \lambda^* - U_{12}^* P_2 \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) + P_1 U_{22}^* \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\right] ; \tag{2.144b}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[\left(U_{12}^* P_2 - U_{22}^* P_1\right) \frac{P_2}{a_{L2}^*}\right] ; \tag{2.144c}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[\left(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1\right) \frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right] . \tag{2.144d}
$$

Resumiendo

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[\left(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1\right) \frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right] ; \tag{2.145}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) = \frac{-a_{L2}^*}{L^*} \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) ; \tag{2.146}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) = \frac{-1}{\Delta^*} \lambda^* P_2^2 - c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2} \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) ; \tag{2.147a}
$$

$$
= \frac{-1}{\Delta^*} \lambda^* P_2^2 + c_1^* \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*} \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) ; \tag{2.147b}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \lambda^* P_1 P_2 - \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) \frac{a_{L2}^*}{P_2} \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) ; \tag{2.148a}
$$

$$
= \frac{1}{\Delta^*} \lambda^* P_1 P_2 + \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*} \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) . \tag{2.148b}
$$

Resolviendo de manera análoga para dc_2^*

$$dc_2^* = \frac{1}{\Delta^*}\Bigg\{\lambda^* P_1 P_2 dP_1 - \lambda^* P_1^2 dP_2 +$$
$$+ \left[U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1\right]\left[\frac{-P_2}{a_{L2}^*} dL^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*} dP_2 + \frac{P_2}{a_{L2}^{*2}} da_{L2}^* + c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2\right]\Bigg\}.$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_2^* = \frac{1}{\Delta^*}\Bigg\{ & \left[\lambda^* P_1 P_2 + (U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(c_1^*)\right] dP_1 + \\ & + \left[-P_1^2 \lambda^* + (U_{11}^* P_2 - P_1 U_{21}^*)\left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\right] dP_2 + \\ & + \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)\left(\frac{-P_2}{a_{L2}^*}\right)\right] dL^* + \\ & + \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)\frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right] da_{L2}^* \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Como

$$dc_2^* = \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) dL^* + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right) da_{L2}^*. \tag{2.150}$$

Comparando (2.149) y (2.150)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[\lambda^* P_1 P_2 + (U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(c_1^*)\right]; \tag{2.151a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[-P_1^2 \lambda^* + (U_{11}^* P_2 - P_1 U_{21}^*)\left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\right]; \tag{2.151b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)\left(\frac{-P_2}{a_{L2}^*}\right)\right]; \tag{2.151c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)\frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right]. \tag{2.151d}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)\frac{P_2 L^*}{a_{L2}^{*2}}\right]; \tag{2.152}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) = \frac{-a_{L2}^*}{L^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.153}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1 P_2 - c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.154a}$$

$$= \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1 P_2 + c_1^* \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.154b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) = \frac{-1}{\Delta^*}\lambda^* P_1^2 - \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.155a}$$

$$= \frac{-1}{\Delta^*}\lambda^* P_1^2 + \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right). \tag{2.155b}$$

Las ecuaciones (2.145-2.148) y (2.152-2.155) son llamadas **demandas marshallianas y en este caso para la economía $\mathcal{E}^*$.**

Para el *problema dual*:

$$\left.\begin{array}{r l} \text{Min} & P_1 h_1^* + P_2 h_2^* \\ \text{s.a.} & U^*(h_1^*, h_2^*) = U_o^* \\ & h_1^* \geq 0 \\ & h_2^* \geq 0 \end{array}\right\} \tag{2.156}$$

Este problema ya fue resuelto, ecuaciones (2.113)- (2.123), sólo que aquíes para la economía $\mathcal{E}^*$: Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mu^* U_{11}^* & \mu^* U_{12}^* & U_1^* \\ \mu^* U_{21}^* & \mu^* U_{22}^* & U_2^* \\ U_1^* & U_2^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh_1^* \\ dh_2^* \\ d\mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* dP_1 \\ \lambda^* dP_2 \\ dU_o^* \end{bmatrix} \tag{2.157}$$

El sistema (2.157) es igual al del sistema (2.50), por lo que las demandas hicksianas son las mismas y estan dadas por (2.56) y (2.60) para la economía $\mathcal{E}^*$. Comparando las demandas hicksianas y marshallianas se llega a las relaciones de Slutsky siguientes:

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) - c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.158a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) + c_1^* \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.158b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) - \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.159a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) + \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.159b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) - c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.160a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) + c_1^* \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*} \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.160b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) = -\left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) - \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) \frac{a_{L2}^*}{P_2} \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right); \tag{2.161a}$$

$$= \left(\frac{-\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) + \left(c_2^* - \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) \frac{a_{L2}^{*2}}{P_2 L^*} \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right); \tag{2.161b}$$

$$\left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right); \tag{2.162}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right)}{\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right)}{\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right)}; \tag{2.163}$$

2.6.1 EJEMPLO DE ESTATICA COMPARATIVA

Para ilustrar el análisis de sensibilidad por medio de estática comparativa utilizamos como función de utilidad una de tipo Cobb-Douglas para la economía $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^*$, esto es,

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{E} & \mathcal{E}^* \\
U(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta}, & U^*(c_1^*, c_2^*) = c_1^{*\alpha^*} c_2^{*\beta^*}, \\
U_1 = \alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta}, & U_1^* = \alpha^* c_1^{*\alpha^*-1} c_2^{*\beta^*}, \\
U_2 = \beta c_1^{\alpha} c_2^{\beta-1}, & U_2^* = \beta^* c_1^{*\alpha^*} c_2^{*\beta^*-1}, \\
U_{11} = \alpha(\alpha-1) c_1^{\alpha-2} c_2^{\beta}, & U_{11}^* = \alpha^*(\alpha^*-1) c_1^{*\alpha^*-2} c_2^{*\beta^*}, \\
U_{12} = \alpha\beta c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta-1}, & U_{12}^* = \alpha^*\beta^* c_1^{*\alpha^*-1} c_2^{*\beta^*-1}, \\
U_{21} = \alpha\beta c_1^{\alpha-1} c_2^{\beta-1}, & U_{21}^* = \alpha^*\beta^* c_1^{*\alpha^*-1} c_2^{*\beta^*-1}, \\
U_{22} = \beta(\beta-1) c_1^{\alpha} c_2^{\beta-2}, & U_{22}^* = \beta^*(\beta^*-1) c_1^{*\alpha^*} c_2^{*\beta^*-2},
\end{array}$$

Se considera $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Sustituyendo en (2.34):

$$\begin{aligned}
\Delta = &-\frac{1}{\lambda^2}\Big[\alpha(\alpha-1)c_1^{\alpha-2}c_2^{\beta}\left(\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}\right)^2 + \beta(\beta-1)c_1^{\alpha}c_2^{\beta-2}\left(\alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}\right)^2 + \\
&- \alpha c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}\beta c_1^{\alpha}c_2^{\beta-1}\left(\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1} + \alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}\right)\Big] \\
= &\frac{1}{\lambda^2}\left[\alpha\beta(\alpha+\beta)c_1^{3\alpha-2}c_2^{3\beta-2}\right] \\
= &\frac{1}{\lambda^2}\left[\alpha\beta c_1^{3\alpha-2}c_2^{3\beta-2}\right] > 0.
\end{aligned} \tag{2.164}$$

Sustituyendo en (2.102)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{11}P_1)\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\right];$$
$$= \frac{1}{\Delta}\left[\left(-\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}P_2 + \alpha(\alpha-1)c_1^{\alpha-2}c_2^{\beta}P_1\right)\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\right];$$
$$= -\frac{1}{\Delta}\left(P_2 c_2^{-1} + P_1 c_1^{-1}\right)\frac{P_1 L}{a_{L1}^2}\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta} < 0; \tag{2.165}$$

para (2.103)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) = \frac{-a_{L1}}{L}\left(\frac{\partial c_1}{\partial a_{L1}}\right) > 0; \tag{2.166}$$

para (2.104)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) > \frac{1}{\Delta}\lambda P_2^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right) > 0 \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right)\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) < \frac{1}{\Delta}\lambda P_2^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right) > 0 \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{L}{a_{L1}} - c_1\right) < 0. \end{cases} \tag{2.167}$$

Para (2.105)

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } c_2\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) < \frac{1}{\Delta}\lambda P_1 P_2 \\ < 0 \text{ si } c_2\frac{a_{L1}}{P_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L}\right) > \frac{1}{\Delta}\lambda P_1 P_2. \end{cases} \tag{2.168}$$

Para (2.109)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right) &= \frac{1}{\Delta}\left[\left(\alpha(\alpha-1)c_1^{\alpha-2}c_2^{\beta}P_2+\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta-1}P_1\right)\frac{P_1L}{a_{L1}^2}\right];\\
&= -\frac{1}{\Delta}\left(P_2c_1^{-1}+P_1c_2^{-1}\right)\frac{P_1L}{a_{L1}^2}\alpha\beta c_1^{\alpha-1}c_2^{\beta}<0;
\end{aligned}
\tag{2.169}
$$

para (2.110)

$$
\left(\frac{\partial c_2}{\partial L}\right) = \frac{-a_{L1}}{L}\left(\frac{\partial c_2}{\partial a_{L1}}\right) > 0; \tag{2.170}
$$

para (2.111)

$$
\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) \quad \begin{cases} <0 \text{ si } \left(\dfrac{L}{a_{L1}}-c_1\right)\dfrac{a_{L1}}{P_1}\left(\dfrac{\partial c_2}{\partial L}\right) > \dfrac{1}{\Delta}\lambda P_1P_2 \quad \text{y} \quad \left(\dfrac{L}{a_{L1}}-c_1\right)<0 \\[2ex] >0 \text{ si } \left(\dfrac{L}{a_{L1}}-c_1\right)>0. \end{cases} \tag{2.171}
$$

Para (2.112)

$$
\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) < 0. \tag{2.172}
$$

Se considera $\alpha^* + \beta^* = 1$ y $\alpha^* > 0$, $\beta^* > 0$. Sustituyendo en (2.34):

$$
\begin{aligned}
\Delta^* = &-\frac{1}{\lambda^{*2}}\left[\alpha^*(\alpha^*-1)c_1^{*\alpha^*-2}c_2^{*\beta^*}\left(\beta^*c_1^{*\alpha^*}c_2^{*\beta^*-1}\right)^2+\beta^*(*\beta^*-1)c_1^{*\alpha^*}c_2^{*\beta-2}\left(\alpha^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*}\right)^2+\right.\\
&\left.-\alpha^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*}\beta^*c_1^{*\alpha^*}c_2^{*\beta^*-1}\left(\alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*-1}+\alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*-1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\lambda^{*2}}\left[\alpha^*\beta^*(\alpha^*+\beta^*)c_1^{*3\alpha^*-2}c_2^{*3\beta^*-2}\right]\\
&= \frac{1}{\lambda^{*2}}\left[\alpha^*\beta^*c_1^{*3\alpha^*-2}c_2^{*3\beta^*-2}\right] > 0.
\end{aligned}
\tag{2.173}
$$

Sustituyendo en (2.145)

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[\left(-U_{12}^*P_2 + U_{22}^*P_1\right)\frac{P_2L^*}{a_{L2}^{*2}}\right];$$
$$= \frac{1}{\Delta^*}\left[\left(-\alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*-1}P_2 + \beta^*(\beta^*-1)c_1^{*\alpha^*}c_2^{*\beta^*-2}P_1\right)\frac{P_2L^*}{a_{L2}^{*2}}\right];$$
$$= -\frac{1}{\Delta^*}\left(P_2c_1^{*-1} + P_1c_2^{*-1}\right)\frac{P_2L^*}{a_{L2}^{*2}}\alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*}c_2^{*\beta^*-1} < 0; \qquad (2.174)$$

para (2.146)

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) = \frac{-a_{L2}^*}{L^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial a_{L2}^*}\right) > 0; \qquad (2.175)$$

para (2.147)

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) < 0; \qquad (2.176)$$

para (2.148)

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) \quad \begin{cases} < 0 \text{ si } \left(\frac{-L^*}{a_{L2}^*} + c_2^*\right)\frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L^*}\right) > \frac{1}{\Delta^*}\lambda^*P_1P_2 \text{ y } \left(\frac{-L^*}{a_{L2}^*} + c_2^*\right) < 0; \\ > 0 \text{ si } \left(\frac{-L^*}{a_{L2}^*} + c_2^*\right) > 0; \end{cases} \qquad (2.177)$$

para (2.152)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[\left(\alpha^*(\alpha^*-1)c_1^{*\alpha^*-2}c_2^{*\beta^*}P_2 - \alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*-1}P_1\right)\frac{P_2L^*}{a_{L2}^{*2}}\right];$$
$$= -\frac{1}{\Delta^*}\left(P_2c_1^{*-1} + P_1c_2^{*-1}\right)\frac{P_2L^*}{a_{L2}^{*2}}\alpha^*\beta^*c_1^{*\alpha^*-1}c_2^{*\beta^*} < 0; \qquad (2.178)$$

para (2.153)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) = \frac{-a_{L2}^*}{L^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial a_{L2}^*}\right) > 0; \qquad (2.179)$$

para (2.154)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) \quad \begin{cases} < 0 \text{ si } c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) > \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1 P_2; \\ > 0 \text{ si } c_1^* \frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) < \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1 P_2. \end{cases} \tag{2.180}$$

Para (2.155)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) \quad \begin{cases} > 0 \text{ si } \left(-c_2^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) > \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1^2 \text{ y } \left(-c_2^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) > 0; \\ < 0 \text{ si } \left(-c_2^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right)\frac{a_{L2}^*}{P_2}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L^*}\right) < \frac{1}{\Delta^*}\lambda^* P_1^2 \text{ y } \left(-c_2^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) > 0; \\ < 0 \text{ si } \left(-c_2^* + \frac{L^*}{a_{L2}^*}\right) < 0. \end{cases} \tag{2.181}$$

CAPITULO 3

3.1 LA CURVA DE PRODUCCION

3.1.1 FUNCIONES DE PRODUCCION

¿Qué se entiende por producción? Producción es la conversión de trabajo, capital (físico y/o humano) y tierra en bienes y servicios. El trabajo, el capital y la tierra reciben el nombre de insumos o factores de la producción. A los bienes y servicios generados se les llama productos. Los productos se pueden destinar a consumo o a la producción de más bienes. En el primer caso se les llama bienes de consumo, y en el segundo bienes de capital. Por supuesto, es posible mencionar otros factores de la producción, por ejemplo, el tiempo en la producción del vino, o la capacidad empresarial para dirigir los procesos productivos..

Este capítulo se interesa en empresas no agrícolas, y por lo tanto la tierra no aparece como un factor de la producción. Por supuesto, si la naturaleza y características del problema requieren que la tierra sea un factor escaso, como es el caso de una empresa agrícola o pecuaria, entonces se requerirán modificaciones mínimas en el modelo propuesto.

En lugar de examinar a una empresa con toda su complejidad y detalle, se tomarán en cuenta sólo aquellos aspectos en los que se está interesado en estudiar. A continuación se describe en forma precisa la relación entre insumos y producto. Considere una función producción de la forma:

$$y = F(L, K), \tag{3.1}$$

la cual satisface:

$$F_L, F_K > 0, \tag{3.2}$$

$$F_{LL}, F_{KK} < 0, \tag{3.3}$$

$$F_{LK} \geq 0. \tag{3.4}$$

$$F_{LL}F_{KK} - (F_{LK})^2 > 0, \tag{3.5}$$

La ecuación (3.1) es una forma algebraica de representar una cierta tecnología F, en la cual para producir el bien y se utilizan capital, K, y trabajo, L. Las dos ecuaciones que aparecen en (3.2) simplemente dicen que al incrementar en una unidad cualesquiera de los factores, se obtiene siempre un producto adicional (producto marginal positivo). Las dos relaciones en (3.3) dicen que conforme se siguen aumentando los factores, el producto adicional sigue creciendo, pero cada vez menos; esta es la *Ley de Rendimientos Marginales Decrecientes*. (3.4) expresa que el capital y el trabajo son complementos en la producción. Por último (3.5) asegura la propiedad deseable de concavidad estricta en la función de producción; ya que se asegura la existencia de un máximo.

Si se fija la producción y en $\bar{y}$, el lugar geométrico de todas las combinaciones de K y L que conducen a $\bar{y}$, es lo que comúnmente se llama curva de nivel. En teoría económica las curvas de nivel reciben el nombre de isocuantas. Dicho de otra manera, todas las combinaciones de (L, K) en una isocuanta generan exactamente el mismo nivel de producción $\bar{y}$.

Si ahora fijamos alguno de los factores de la producción, digamos K, en $\bar{K}$, esto nos conduce a y=$F(L,\bar{K})$, la cual será llamada función de producción de corto plazo. En general cuando alguno de los factores de la produccón se mantiene constante, se dice que la función de producción es de corto plazo.

3.1.2 RENDIMIENTOS A ESCALA

¿Cómo afecta a la producción un incremento en la misma proporción en todos los insumos ? Pueden existir varias posibilidades en el producto resultante, éste puede ser menor, mayor o igualmente proporcional. En lo que sigue se precisan estos casos:

Definición 3.1 La función $y=F(L,K)$ se dice homogénea de grado k si para cualquier $\lambda > 0$, se tiene que $\lambda^k y=F(\lambda L,\lambda K)$. Si $k = 1$ se dice también que la función es homogénea lineal.

Ejemplo 3.1 Considere una función de producción del tipo Cobb-Douglas, $y = L^\alpha K^{1-\alpha} = F(L, K)$. Para ver que es homogénea de grado uno, observe que

$$F(\lambda L, \lambda K) = (\lambda L)^\alpha (\lambda K)^{1-\alpha} \tag{3.6}$$

y

$$\begin{aligned}\lambda F(L, K) &= \lambda(L^\alpha K^{1-\alpha}) \\ &= \lambda^\alpha \lambda^{1-\alpha}(L^\alpha K^{1-\alpha}), \\ &= (\lambda^\alpha L^\alpha)(\lambda^{1-\alpha} K^{1-\alpha}) \\ &= (\lambda L)^\alpha (\lambda K)^{1-\alpha}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Así, de la definición (3.1), la función de producción Cobb-Douglas en el ejemplo (3.1) es homogénea de grado 1.

Suponga, por ejemplo, que L y K aumentan en la misma proporción. Si la función es homogénea de grado 1, entonces la producción también se incrementa en exactamente la misma proporción; en este caso se dice que F presenta rendimientos constantes a escala. La función de producción Cobb-Douglas del ejemplo anterior presenta rendimientos constantes a escala. Cuando $k > 1$, el producto resultante es mayor que el aumento en la misma proporción de todos los factores, se dice en este caso que F tiene rendimientos crecientes a escala. Finalmente, si $k < 1$, se dice que F presenta rendimientos decrecientes a escala. La interpretación es análoga al caso anterior.

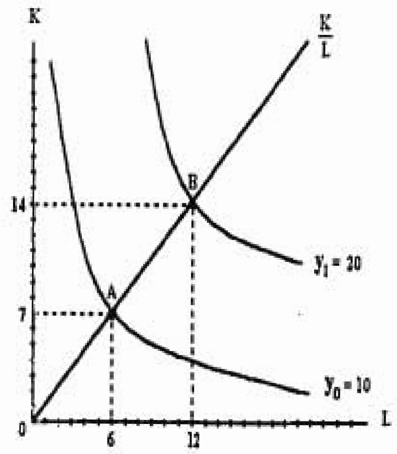

FIGURA 3.1 y_o y y_1 son las isocuantas y K/L la pendiente del rayo. L y K los insumos trabajo y capital, respectivamete

Teorema 3.1 Si $F(L, K)$ es homogénea de grado k, entonces las primeras parciales F_L, F_K son homogéneas de grado $k - 1$.

Prueba Como F es homogénea de grado k,

$$F(\lambda L, \lambda K) \equiv \lambda^k F(L, K).$$

Diferenciando respecto a K, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda K)} \frac{\partial(\lambda K)}{\partial K} \equiv \lambda^k \frac{\partial F}{\partial K}$$

Sin embargo, $\frac{\partial(\lambda K)}{\partial K} = \lambda$. Dividiendo ambos lados de la identidad por λ se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda K)} \equiv \lambda^{k-1} \frac{\partial F}{\partial K}.$$

Así, la función F_K, evaluada en $(\lambda L, \lambda K)$ equivale a $\lambda^{k-1} F_K(L, K)$. De aquí, F_K es homogénea de grado $k - 1$. Se procede de manera análoga para L.

Ejemplo 3.2 Utilizando la función de producción del ejercicio anterior, verificar que cumple con el teorema 3.1.

Sabemos que la función de producción Cobb-Douglas es homogénea de grado uno (ejemplo 3.1) y que

$$F_K = \frac{\partial F}{\partial K} \equiv L^{\alpha}(1-\alpha)K^{-\alpha} \equiv G(L,K)$$

y

$$\begin{aligned} G(\lambda L, \lambda K) &= (\lambda L)^{\alpha}(1-\alpha)(\lambda K)^{-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha}L^{\alpha}(1-\alpha)\lambda^{-\alpha}K^{-\alpha} \\ &= L^{\alpha}(1-\alpha)K^{-\alpha} \\ &= G(L,K) \end{aligned}$$

por lo que F_K es homogénea de grado cero. Para F_L se procede de manera análoga.

$$F_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} \equiv H(L,K)$$

entonces

$$\begin{aligned} H(\lambda L, \lambda K) &= \alpha(\lambda L)^{\alpha-1}(\lambda K)^{1-\alpha} \\ &= \alpha\lambda^{\alpha-1}\lambda^{1-\alpha}L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} \\ &= \alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} \\ &= H(L,K) \end{aligned}$$

Así, F_L es homogénea de grado cero.

Teorema (de Euler) 3.2 Suponga que $F(L,K)$ es homogénea de grado r. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial L}L + \frac{\partial F}{\partial K}K = rF(L,K)$$

Prueba. Por la definición de homogeneidad, se sigue que

$$F(\lambda L, \lambda K) = \lambda^r F(L,K)$$

Como esta identidad se conserva para todos los valores de L, K y λ, diferenciando ambos lados con respecto a λ, usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda L)}\frac{\partial(\lambda L)}{\partial\lambda} + \frac{\partial F}{\partial(\lambda K)}\frac{\partial(\lambda K)}{\partial\lambda} = r\lambda^{r-1}F(L,K)$$

Sin embargo, $\frac{\partial(\lambda K)}{\partial(\lambda)} = K$ y $\frac{\partial(\lambda L)}{\partial(\lambda)} = L$, así

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda L)}L + \frac{\partial F}{\partial(\lambda K)}K = r\lambda^{r-1}F(L,K)$$

Escogiendo $\lambda = 1$ en la identidad anterior se tiene la conclusión.

Un caso especial de homogeneidad es el de homogeneidad de grado 1, también llamada homogeneidad lineal. En este caso, $r = 1$, y el teorema de Euler produce $F_L L + F_K K = F(L,K)$.

Otro caso interesante es cuando $F(L,K)$ es homogénea de grado cero. El teorema de Euler produce

$$F_L L + F_K K = 0$$

A continuación se presentan dos ejemplos donde se aplica el teorema de Euler.

Ejemplo 3.3 Considere nuevamente la función Cobb-Duglas $y = K^{1-\alpha}L^{\alpha} = F(L,K)$. Esta función es homogénea de grado 1, *i.e.*, $r = 1$. Tenemos que $F_K = (1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha}$ y $F_L = \alpha K^{1-\alpha}L^{\alpha-1}$. El lado izquierdo de la identidad de Euler es

$$\begin{aligned}
F_L L + F_K K &= \alpha K^{1-\alpha}L^{\alpha-1}L + (1-\alpha)K^{-\alpha}KL^{\alpha} \\
&= \alpha K^{1-\alpha}L^{\alpha} + (1-\alpha)K^{1-\alpha}L^{\alpha} \\
&= (\alpha + 1 - \alpha)K^{1-\alpha}L^{\alpha} \\
&= F(L,K)
\end{aligned}$$

Así, $F_L + F_K$ es idéntica a la función de producción original $K^{1-\alpha}L^{\alpha}$.

Ejemplo 3.4 Sea $y = K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$. Entonces

$$F_K = \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1}L^{\alpha_2} \qquad F_L = \alpha_2 K^{\alpha_1}L^{\alpha_2 - 1}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
F_L L + F_K K &= \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1}L^{\alpha_2}K + \alpha_2 K^{\alpha_1}L^{\alpha_2 - 1}L \\
&= \alpha_1 K^{\alpha_1}L^{\alpha_2} + \alpha_2 K^{\alpha_1}L^{\alpha_2} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2)K_1^{\alpha}L^{\alpha_2} = (\alpha_1 + \alpha_2)F(L,K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_L + F_K &= \alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}L + (1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha}K \\
&= \alpha L^{\alpha}K^{1-\alpha} + (1-\alpha)L^{\alpha}K^{1-\alpha} \\
&= (\alpha + 1 - \alpha)L^{\alpha}K^{1-\alpha} = F(L,K)
\end{aligned}$$

Otra característica asociada con el concepto de homogeneidad relaciona a las pendientes de las isocuantas cuando el rayo que parte del origen viene dado por K/L. Ver figura 3.1. Para tal rayo y funciones de producción homogéneas de grado uno, las pendientes de las isocuantas en todos los puntos del rayo K/L son idénticas. Siendo A y B intercepciones del rayo con la isocuanta correspondiente. Esto es muy importante, ya que si se conoce una isocuanta se conocen todas las demás. En efecto

Sea $y = F(L,K)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda y &= \lambda F(L,K) \\
&= F(\lambda L, \lambda K),
\end{aligned}$$

si $\lambda = 1/L$

$$\frac{1}{L}y = F(1, \frac{K}{L}).$$

Diferenciando

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\frac{1}{L}y)}{\partial K} \; dK = \frac{1}{L} \; \frac{\partial y}{\partial K} \; dK &= \frac{1}{L} \; F_K dK \\ &= \frac{1}{L} \; \frac{\partial F(1, \frac{K}{L})}{\partial(\frac{K}{L})} \; dK.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial K} &= \frac{\partial F(1, \frac{K}{L})}{\partial(\frac{K}{L})} \\ F_K &= \frac{\partial F(1, \frac{K}{L})}{\partial(\frac{K}{L})}\end{aligned}$$

por lo que F_K sólo depende de $\frac{K}{L}$. Similarmente,

sea $y = F(L, K)$ y $\mu > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mu y &= \mu F(L, K) \\ &= F(\mu L, \mu K),\end{aligned}$$

si $\mu = 1/K$

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}y &= F(\frac{L}{K}, 1) \\ &= F(\frac{1}{\frac{K}{L}}, 1)\end{aligned}$$

diferenciando

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\frac{1}{K}y)}{\partial L} \; dL = \frac{1}{K} \; \frac{\partial y}{\partial L} \; dL &= \frac{1}{K} \; F_L dL \\ &= \frac{1}{K} \; \frac{\partial F(\frac{1}{\frac{K}{L}}, 1)}{\partial(\frac{1}{\frac{K}{L}})} \; dL.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{\partial F(\frac{1}{\frac{K}{L}}, 1)}{\partial(\frac{1}{\frac{K}{L}})}$$

$$F_L = \frac{\partial F(\frac{1}{\frac{K}{L}}, 1)}{\partial(\frac{1}{\frac{K}{L}})},$$

por lo que F_L sólo depende de $\frac{K}{L}$. Así en una isocuanta

$$y_0 = F(L, K),$$

diferenciando

$$0 = F_L dL + F_K dK,$$

entonces

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K}.$$

Por lo tanto, sobre el rayo K/L =cte, todas las curvas de indiferencia que pasan por él tienen la misma pendiente.

Por otro lado, observe que existe diferencia entre la ley de rendimientos marginales decrecientes y los rendimientos a escala. En la primera se fija un factor y se varía el otro y se observa como es afectada la producción. Para la segunda se varian ambos factores en la misma proporción y se examina que pasa con la producción.

3.1.3 EQUILIBRIO PARA UN SOLO PRODUCTOR

La atención se ha puesto en las características de las funciones de producción. El productor puede estar pensando en maximizar la producción sujeta a una restricción de costos ó minimizar costos sujetos a una restricción de producción. Ambos enfoques son equivalentes.

Se supone que el productor, teniendo acceso a una tecnología representada por (3.1), desea maximizar la producción, sujeto a la condición de que sus costos no deben exceder una cantidad C_0. Los salarios, W, y la renta sobre el capital (tasa de interés), r, son conocidas por el productor. Asíque, el problema de decisión del productor es:

$$\begin{aligned} &\max \quad y = F(L, K), \\ &\text{s.a.} \quad C_0 = WL + rK. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Suponemos que el productor es pequeño, es decir, no tiene influencia sobre el precio de los insumos, así que W y r serán tratadas como constantes. Si C_0 se gasta en compras de capital, entonces el capital contratado es $K_0 = C_0/r$. Similarmente, si C_0 se gasta en servicios laborales, entonces se adquiere $L_0 = C_0/W$. La recta que une a K_0 con L_0 con pendiente W/r es denominada *línea de isocostos*. Representa la restricción impuesta por costos que el productor enfrenta. En equilibrio $K_0/L_0 = W/r$.

El cambio total en y es:

$$\begin{aligned} dy &= F_L dL + F_K dK \\ dy &= PM_L dL + PM_K dK. \end{aligned} \tag{3.9}$$

siendo PM el producto marginal, *i.e.*, la cantidad adicional de producción asociada a una unidad extra del factor en cuestión, manteniendo los otros factores constantes. De la definición de isocuanta $dy = 0$. De la ecuación (3.9) se obtiene

$$0 = PM_L dL + PM_K dK,$$

reagrupando,

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{PM_L}{PM_K}. \tag{3.10}$$

Donde el lado derecho de la ecuación es positivo cuando dK y dL son de signos contrarios. Como la pendiente de la línea de isocostos es $-W/r$, entonces la condición para la maximización de la producción, se obtiene cuando se iguala la pendiente de la línea de isocosto con la pendiente de la isocuanta accesiblemente.más alta, esto es,

$$\frac{W}{r} = \frac{PM_L}{PM_K}. \tag{3.11}$$

3.1.4 EL MODELO DE DOS BIENES, DOS FACTORES

Suponga que una economía produce dos bienes, y_1 y y_2, usando dos factores, capital y trabajo, con tecnologías descritas por funciones de producción:

$$y_1 = F_1(L_1, K_1), \tag{3.12}$$

$$y_2 = F_2(L_2, K_2). \tag{3.13}$$

Las funciones y_1 y y_2 presentan rendimientos constantes a escala. Las dotaciones de capital y trabajo son fijas, esto es,

$$\bar{K} = K_1 + K_2 \qquad (3.14),$$

$$\bar{L} = L_1 + L_2. \tag{3.15}$$

Las isocuantas representativas para las dos industrias, y_{10} y y_{20}, son mostradas en la figura (3.2). La restricción de costos dada por la línea $\bar{K}_0\bar{L}_0$. Con estos precios relativos, la producción en la industria 2, y_2 se localizaría en algún punto de OA, y la producción de la industrial 1, y_1 en OB. El cociente capital y trabajo para las industrias 1 y 2, estan representadas en las figura (3.2) por k_1 y k_2 respectivamente. Es decir $k_i = K_i/L_i$.

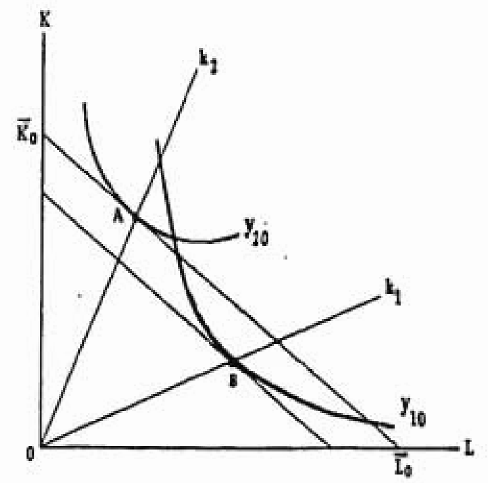

FIGURA 3.2. Isocuantas representativas para cada industria, y_{10} para la industria 1 y, y_{20} para la industria 2. Intensidad relativa del capital para el bien 2.

Definición 3.2 Se dice que dos funciones de producción difieren si, para la misma razón entre salario y precio de capital en ambas funciones, las razones entre capital y trabajo son diferentes. Si, por ejemplo, k_2 es más grande que k_1 , entonces el bien 2 se dice que es intensivo en el uso del capital relativo al bien 1. Por supuesto, un planteamiento equivalente es que el bien 1 es intensivo en trabajo relativo al bien 2. Se puede suponer que y_2 es intensivo en el uso de capital relativo a y_1 para toda razón entre salario y precio del capital.

3.1.5 LA FORMA DE LA CURVA DE POSIBILIDAD DE PRODUCCION

La curva de posibilidades de producción, también llamada *curva de transformación*, muestra todos los posibles puntos de producción eficientes. Para construir la curva de posibilidades de producción, a partir de la información dada por las funciones de producción (3.12) y (3.13), y las restricciones sobre los factores (3.14) y (3.15), dos puntos sobre la curva de posibilidades de producción son fáciles de identificar, $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$. Suponga que todo el trabajo y todo el capital fuesen asignados a la producción y_2, así, en las ecuaciones (3.14) y (3.15), K_2 y L_2 son reemplazadas por $\bar{K}$ y $\bar{L}$. Esto nos dará un nivel de producción bien definido para y_2, el cual podemos llamar $\bar{y}_2$. Note que si todos los factores son usados para producir y_2, la producción de y_1 debe ser cero. Similarmente, asignando todo el capital y el trabajo a la producción de y_1 daría $\bar{y}_1$. Una tarea más difícil sería encontrar puntos sobre la curva de posibilidades de producción diferentes de $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$

Para darse una idea de como sería la curva de posibilidades de producción se traza primero la recta que une $\bar{y}_1$ a $\bar{y}_2$ en donde se encontrarían puntos factibles de producción utilizando rendimientos constantes a escala. Para saber cuales son eficientes, es decir, cuales puntos de la línea $\bar{y}_1\bar{y}_2$ corresponden a mayores niveles de producción, en ambos bienes, la caja Edgeworth-Bowley representa de manera concisa la información obtenida en las ecuaciones (3.12) a (3.15), y demuestra qué se entiende por eficiencia de mercado.

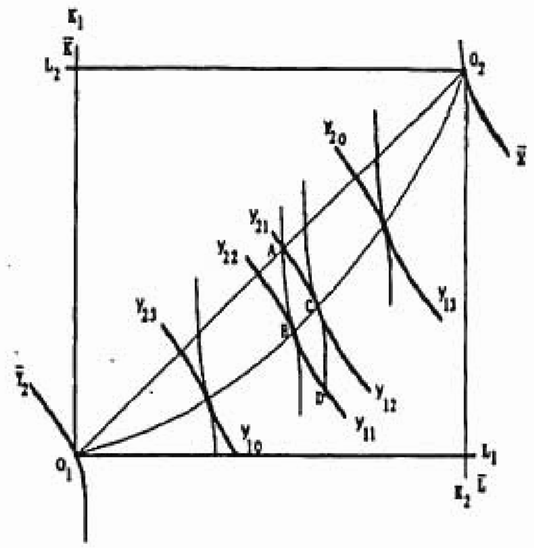

FIGURA 3.3. Caja Edgeworth-Bowley

Varias curvas representativas de las isocuantas para la industria y_1 desde el origen O_1 estan representadas en la figura (3.3). La cantidad máxima de y_1 que podría ser producida cuando todos los factores son asignados a la producción de y_1 es $\bar{y}_1$. Exactamente el mismo procedimiento es ahora empleado para la industria y_2, excepto que en este caso la isocuanta parte de O_2. Note que la producción de y_2 se incrementa a medida en que se mueve de O_2 a O_1. Desde el punto de vista de la industria y_2, O_1 sobre la isocuanta $\bar{y}_2$ representa la máxima cantidad posible del bien y_2 que pueda ser producido, pero esta es la asignación total de $\bar{L}$ para la producción del bien y_2.

Toda posible asignación de capital y trabajo entre las dos industrias están representadas por los puntos en la caja de producción $O_1\bar{K}O_2\bar{L}$. En medio de estos posibles puntos de producción buscamos los eficientes, para un nivel de producción dado de un bien, el nivel de producción de los otros bienes está maximizada. Para tomar un ejemplo específico, suponga un nivel de producción y_{21} del bien y_2, se busca maximizar y_1 sujeta a esa restricción. Una posible asignación de factores entre las dos industrias esta representada por todos los puntos de la isocuanta y_{21} y queremos encontrar el punto en esta curva que maximiza la producción de y_1. Primero, suponga que la producción estuviera en el punto A, a la mitad del camino entre O_1 y O_2. Tal punto de producción es claramente factible, no obstante este utiliza el total de fuentes disponibles de capital y trabajo, resultando en las producciones y_{21} y y_{11} para las industrias y_2 y y_1 respectivamente. Pero mientras este punto de producción es posible, no es eficiente. Algún movimiento a lo largo de la isocuanta y_{21} desde A hacia C, no reduciendo y_2, incrementará la producción de y_1. Para C moviéndose sobre la isocuanta y_{21} hacia D comenzará a decrecer la cantidad de y_1 producida. Luego, dada la restricción de que y_{21} se produce, la asignación de capital y trabajo asociado con el punto C resulta en el máximo posible del bien y_1. El punto C es el punto de tangencia para las dos isocuantas y_{21} y y_{12} y entonces, para una cantidad dada de y_2, la producción de y_1 esta maximizada en el punto donde la isocuanta y_1 más alta es tangente a la isocuanta apropiada y_2.

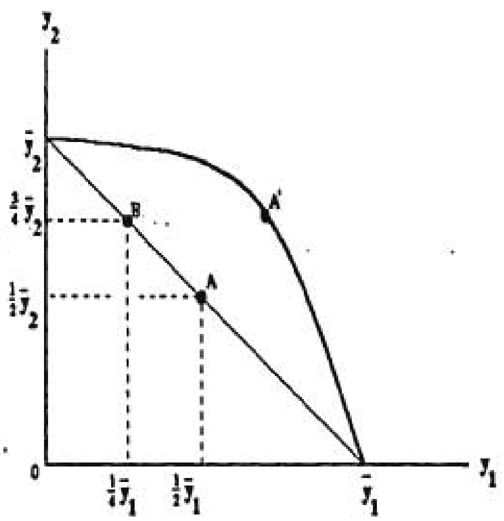

FIGURA 3.4 Con cada punto de eficiencia hay asociado un nivel de producción, y esos puntos en el espacio $y_1 y_2$ quedan representados por la curva $\bar{y}_1 A' \bar{y}_2$.

Cualquier nivel de producción de y_2 desde 0 hasta $\bar{y}_2$ podría haber sido escogido y y_1 maximizada sujeta a esta restricción. Conjuntamente todos esos puntos estarían en O_1BO_2, llamada *localización eficiente*. Note que los movimientos a lo largo de esta localización desde O_1 hacia O_2 implican aumento de la y_1 reduciendo la cantidad de y_2. Todos los puntos sobre esta localización tienen la característica de que la producción de un bien no puede ser incrementada sin reducir la del otro. Es precisamente este criterio el que describe el mercado eficiente, ya que no se establecen restricciones en cuanto a la forma de las funciones de producción y_1 y y_2. El supuesto de que ambas funciones de producción son homogéneas, da lugar a que la eficiencia es suavemente convexa.

La curva de posibilidad de producción puede ahora ser derivada, con cada punto de eficiencia hay asociado un nivel de producción de y_1 y y_2, y esos puntos, en el espacio y_1y_2, dan $\bar{y}_1A'\bar{y}_2$, ver figura (3.4). En la discusión anterior sobre la curva de posibilidades de producción, los factores de producción fueron arbitrariamente asignados iguales a las dos industrias, y eso dió lugar al punto de producción A.

La asignación eficiente de recursos require que la producción tome lugar en un punto donde una isocuanta proveniente de una industria es tangente a la isocuanta de otra. Además, para el productor individual, la maximización de la producción sujeta a la restricción de costos requiere que la razón de precios sea igual a la pendiente de las isocuantas. Cuando esta condición es verdadera para ambas industrias, y cuando la eficiencia del mercado requiere una tangencia entre las isocuantas de las dos industrias, es claro que la eficiencia en producción require que ambas industrias enfrenten el mismo cociente del salario y precio del capital.

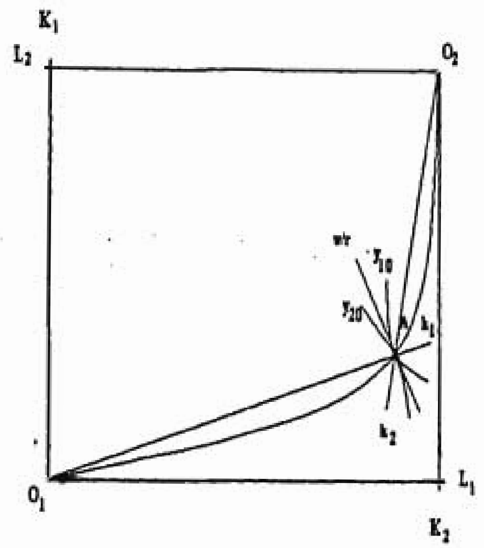

FIGURA 3.5 Caja Edgeworth-Bowley con la razón de precios W/r en A

En la figura (3.5) la producción de y_{10} y y_{20} asociadas con el punto A implica que la razón de precios de los factores sea W/r, la línea tangente a las dos isocuantas en el punto A. Note también que, para la producción en el punto A, las razones capital y trabajo en las dos industrias son k_1 y k_2 para las industrias y_1 y y_2, respectivamente. En la figura (3.5), por ejemplo, para algún punto de producción eficiente, tal como A, hay una razón salario y precio del capital única. Esto implica que para todo punto sobre la curva de posibilidades de producción esto se cumple.

En equilibrio se considera que una condición para maximizar los beneficios para una industria competitiva es que los costos marginales igualen al precio. Entonces para nuestras dos industrias tenemos $CM_i = P_i$. Dividiendo una con otra

$$\frac{CM_1}{CM_2} = \frac{P_1}{P_2} \qquad 3.16$$

En la figura (3.6) la pendiente de la curva de posibilidades de producción en cualquier punto dado, muestra la tasa en la cual un bien puede ser convertido a otro a través de la reasignación de factores de una industria a otra.

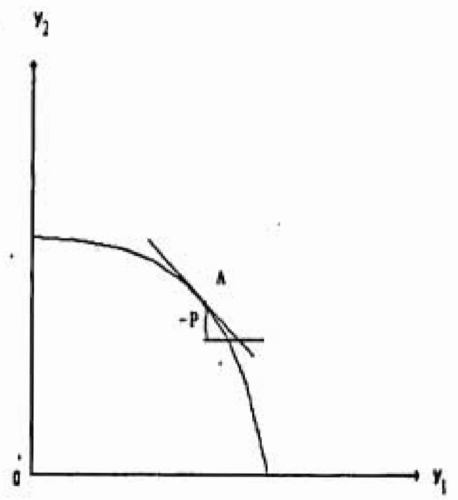

FIGURA 3.6 La línea de la razón de precios es tangente a la FPP. $P = P_1/P_2$, P_1 y P_2 los precios del bien 1 y del bien 2 respectivamente.

Luego, la pendiente de la curva de posibilidades de producción es el costo de un bien en términos del otro, el cual es la razón de los costos marginales. La pendiente de la curva de posibilidades de producción es CM_1/CM_2, obteniéndose la ecuación (3.16).

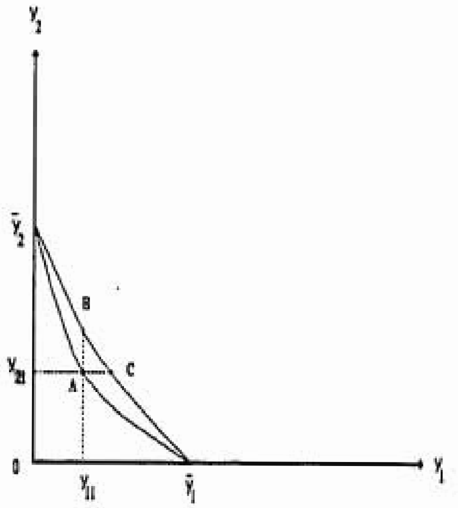

FIGURA 3.7 Retornos constantes a escala. La FPP es uniformemente convexa al origen

3.1.6 RETORNO A ESCALA NO CONSTANTE

Hasta este punto, las funciones de producción se han considerado homogéneas de grado uno. Para el caso en el cual las funciones de producción son homogéneas de grado diferente a uno, se considera a continuación.

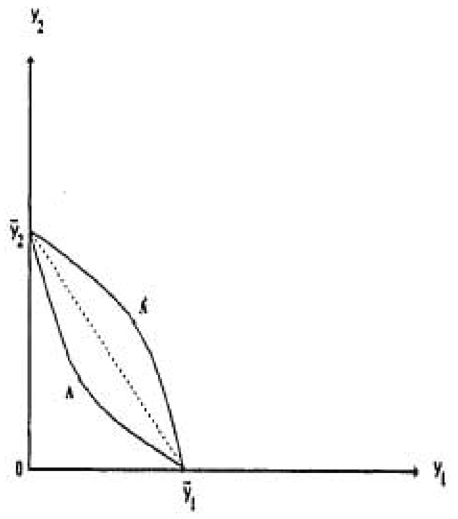

FIGURA 3.8 La FPP no necesariamente es uniformemente convexa al origen

El caso en el cual las funciones de producción son homogéneas de grado superior a uno, implica que existen rendimientos crecientes a escala. El sistema de producción está representado por las ecuaciones (3.12) y (3.15), y los puntos extremos de la curva de posibilidades de producción pueden ser encontrados designando la cantidad total de capital y trabajo para las industrias y_1 y y_2, respectivamente. En la figura (3.8) se muestra la asignación completa de capital y trabajo a la industria y_2 obteniéndose $\bar{y}_2$, y la asignación del stock de ambos factores a la industria y_1 obteniéndose $\bar{y}_1$. Ahora suponga que la mitad de ambos factores esta asignado a cada industria. Debido a la hipótesis de rendimientos crecientes a escala, dividiendo en dos partes iguales los factores para la industria y_2, la producción es mayor que la mitad de $\bar{y}_2$, digamos y_{21}. Similarmente, dividiendo en dos partes iguales los factores de la industria y_1 produce y_{11}, donde y_{11} es menor que la mitad de $\bar{y}_1$. La producción resultante, A en la figura (3.7), se localiza por abajo de la línea que une $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_1$. Otra asignación proporcional de los factores para las dos industrias darán otros puntos producción, y tales puntos pertenecerán a $\bar{y}_2 A \bar{y}_1$.

Las funciones de producción para las dos industrias son diferentes, y esto implica que mientras A es un punto de producción posible, en general este no será eficiente. Justo como en el caso de rendimientos constante a escala, puede ser mostrado que moviéndose desde A a B o C, resultará en una cantidad más grande de uno de los dos niveles de producción, y dará lugar a puntos tales como B y C en la figura (3.7). Repitiendo este proceso para todos los puntos de la curva $\bar{y}_2 A \bar{y}_1$ se obtiene la curva de posibilidades de producción $\bar{y}_2 B C \bar{y}_1$.

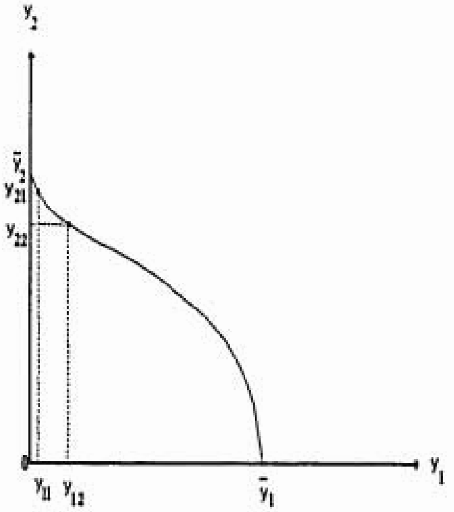

FIGURA 3.9 Ejemplo donde existen rendimientos constantes a escala en la industria y_0 y crecientes en la industria y_1

En la figura (3.8) la curva de posibilidades de producción se muestra uniformemente convexa al origen, pero este no es necesariamente el caso. Con rendimientos crecientes a escala la línea de equiproporciones debe estar por debajo de la línea recta que une los puntos extremos $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_1$, si el grado de homogeneidad no es mucho mayor que uno, entonces la línea de equiproporciones no difere mucho de la recta, y se podría obtener la línea $\bar{y}_2 A \bar{y}_1$ de la figura (3.8). Si al mismo tiempo las razones de capital y trabajo de las dos industrias difieren ampliamente, entonces un incremento considerable en la producción podría ser generado por factores reasignados, resultando en puntos tales como A' estando fuera de $\bar{y}_2\bar{y}_1$. Entonces, al igual que con los rendimientos crecientes a escala, la curva de posibilidades de producción puede ser cóncava al origen a lo largo de casi toda su extensión. Para rendimientos crecientes a escala, dos factores determinan la posición de la curva de posibilidades de producción, el grado de homogeneidad y la diferencia en intensidades del factor. La mayor diferencia en grado de homogeneidad desde uno, ocasionaría que la línea de equiproporciones fuese empujada hacia el origen, y la diferencia en las intensidades de capital de las dos industrias es lo mejor que se podría esperar de las diferentes curvas de posibilidades de producción desde la línea de equiproporciones. La curva de posibilidades de producción depende de la solidez relativa de estas dos intensidades del factor.

En la figura (3.8) la curva de posibilidades de producción aparece cóncava hacia el origen a lo largo de casi toda su extensión, siendo convexa al origen a medida que se aproxima a ambos ejes. Esto siempre es cierto tanto como ambas industrias exhiban rendimientos crecientes a escala.

Es interesante que la convexidad de la curva de posibilidades de producción ocurra cerca del eje y_2 cuando se incrementa los rendimientos a escala en la industria y_1. Un punto final es que mientras crecen los rendimientos en una industria y permanecen constante en la otra puede producir curvas de posibilidades de producción como la mostrada en la figura (3.9), este resultado no es necesariamente significativo. La curva de posibilidades de producción puedes ser también convexa a lo largo de toda su extensión, como la mostrada en la figura (3.8).

El caso de rendimientos decrecientes a escala, en otras palabras, el caso en el cual la homogeneidad es de grado menor que uno, puede ser resuelto de manera similar.

3.2 ESTATICA COMPARATIVA

Retomando el problema (3.8)

$$\begin{cases} \max \ F(L,K), \\ \text{s.a.} \ C_o \leq WL + rK, \\ \quad L \geq 0, \\ \quad K \geq 0; \end{cases} \tag{3.17}$$

ó

$$\begin{cases} \min \ WL + rK, \\ \text{s.a.} \ F(L,K) \geq y_0, \\ \quad L \geq 0, \\ \quad K \geq 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Resolviendo (3.18) para la industria 1:

Sea

$$\mathcal{L} = WL_1 + rK_1 + \lambda_1(y_1 - F^1) + \lambda_2 L_1 + \lambda_3 K_1. \tag{3.19}$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = W - \lambda_1 F^1_{L1} + \lambda_2 \geq 0, \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = r - \lambda_1 F^1_{K1} + \lambda_3 \geq 0, \tag{3.20b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = y_1 - F^1 \leq 0, \tag{3.20c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = L_1 \geq 0, \tag{3.20d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = K_1 \geq 0, \tag{3.20e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} L_1 = L_1(W - \lambda_1 F^1_{L1} + \lambda_2) = 0, \tag{3.20f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} K_1 = K_1(r - \lambda_1 F^1_{K1} + \lambda_3) = 0, \tag{3.20g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 = \lambda_1(y_1 - F^1) = 0, \tag{3.20h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = \lambda_2 L_1 = 0, \tag{3.20i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 = \lambda_3 K_1 = 0, \tag{3.20j}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \tag{3.20k}$$

$$\lambda_2 \geq 0, \tag{3.20l}$$

$$\lambda_3 \geq 0, \tag{3.20m}$$

De (3.20a), (3.20d) y (3.20f)

$$W - \lambda_1 F^1_{L1} + \lambda_2 > 0 \ \text{ y } \ L_1 = 0; \tag{3.21a}$$

$$W - \lambda_1 F^1_{L1} + \lambda_2 = 0 \ \text{ y } \ L_1 > 0; \tag{3.21b}$$

$$W - \lambda_1 F^1_{L1} + \lambda_2 = 0 \ \text{ y } \ L_1 = 0; \tag{3.20c}$$

De (3.20b), (3.20e) y (3.20g)

$$r - \lambda_1 F^1_{K1} + \lambda_3 > 0 \ \text{ y } \ K_1 = 0; \tag{3:22a}$$

$$r - \lambda_1 F^1_{K1} + \lambda_3 = 0 \ \text{ y } \ K_1 > 0; \tag{3.22b}$$

$$r - \lambda_1 F^1_{K1} + \lambda_3 = 0 \ \text{ y } \ K_1 = 0; \tag{3.22c}$$

De (3.20c), (3.20h) y (3.20k)

$$y_1 - F^1 < 0 \ \text{ y } \ \lambda_1 = 0; \tag{3.23a}$$

$$y_1 - F^1 = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1 > 0; \tag{3.23b}$$

$$y_1 - F^1 = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1 = 0; \tag{3.23c}$$

De (3.20i) y (3.20l)

$$\lambda_2 > 0 \ \text{ y } \ L_1 = 0; \tag{3.24a}$$

$$\lambda_2 = 0 \ \text{ y } \ L_1 > 0; \tag{3.24b}$$

$$\lambda_2 = 0 \ \text{ y } \ L_1 = 0; \tag{3.24c}$$

De (3.20j) y (3.20m)

$$\lambda_3 > 0 \ \text{ y } \ K_1 = 0; \tag{3.25a}$$

$$\lambda_3 = 0 \ \text{ y } \ K_1 > 0; \tag{3.25b}$$

$$\lambda_3 = 0 \ \text{ y } \ K_1 = 0. \tag{3.25c}$$

Si queremos solución interior, $L_1 > 0$ y $K_1 > 0$, entonces: de (3.21b), (3.22b), (3.23b), (3.24b) y (3.25b) y tomando $\lambda_1 = \lambda$

$$W - \lambda F^1_{L1} = 0; \tag{3.26a}$$

$$r - \lambda F^1_{K1} = 0; \tag{3.26b}$$

$$y_1 - F^1 = 0. \tag{3.26c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (3.26):

$$\begin{cases} dW - \lambda(F^1_{L1L1}dL_1 + F^1_{L1K1}dK_1) - F^1_{L1}d\lambda = 0; \\ dr - \lambda(F^1_{K1L1}dL_1 + F^1_{K1K1}dK_1) - F^1_{K1}d\lambda = 0; \\ dy_1 - (F^1_{L1}dL_1 + F^1_{K1}dK_1) = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Simplificando notación:

$$\begin{cases} dW - \lambda(F^1_{11}dL_1 + F^1_{12}dK_1) - F^1_1 d\lambda = 0; \\ dr - \lambda(F^1_{21}dL_1 + F^1_{22}dK_1) - F^1_2 d\lambda = 0; \\ dy_1 - (F^1_1 dL_1 + F^1_2 dK_1) = 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda F^1_{11} & \lambda F^1_{12} & F^1_1 \\ \lambda F^1_{21} & \lambda F^1_{22} & F^1_2 \\ F^1_1 & F^1_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dK_1 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dW \\ dr \\ dy_1 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

De (2.26)

$$\frac{r}{F^1_2} = \frac{W}{F^1_1} = \lambda. \tag{3.30}$$

Y el discriminante del sistema (3.29), Γ es de la misma forma que el del sistema (2.50) con $U \to F^1$. Resolviendo para dL_1

$$dL_1 = \frac{1}{\Gamma}\left\{-F^1_2{}^2 dW + \lambda F^1_{12}F^1_2 dy_1 + F^1(F^1_2 dr - \lambda F^1_{22}dy_1)\right\}$$

Ordenando términos

$$dL_1 = \frac{1}{\Gamma}\left(\left[-F^1_2{}^2\right] dW + \left[\lambda(F^1_2 F^1_{12} - F^1_1 F^1_{22})\right] dy_1 + \left[F^1_1 F^1_2\right] dr\right). \tag{3.31}$$

Como

$$dL_1 = \left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) dW + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right) dy_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) dr. \tag{3.32}$$

Comparando (3.31) y (3.32)

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[-F^1_2{}^2\right]; \tag{3.33a}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[\lambda(F^1_{12}F^1_2 - F^1_1 F^1_{22})\right]; \tag{3.33b}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[F^1_1 F^1_2\right]; \tag{3.33c}$$

Resolviendo de manera análoga para dK_1

$$dK_1 = \frac{1}{\Gamma}\left\{F_1^1 F_2^1 dW + \lambda(F^1 F_{21}^1 - F_2^1 F_{11}^1)dy_1 - F_1^{1\ 2} dr\right\}. \tag{3.34}$$

Como

$$dK_1 = \left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right) dW + \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right) dy_1 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) dr. \tag{3.35}$$

Comparando (3.34) y (3.35)

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[F_1^1 F_2^1\right]; \tag{3.36a}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[\lambda(F_{21}^1 F_1^1 - F_2^1 F_{11}^1)\right]; \tag{3.36b}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Gamma}\left[F_1^{1\ 2}\right]. \tag{3.36c}$$

Como el costo para la empresa 1 es

$$C^1 = WL_1 + rK_1 \tag{3.37}$$

y como $L_1 = L_1(W, y_1, r)$ lo mismo que $K_1 = K_1(W, y_1, r)$, entonces

$$\left(\frac{\partial C^1}{\partial W}\right) = L_1 + W\left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) + r\left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right); \tag{3.37a}$$

$$\left(\frac{\partial C^1}{\partial r}\right) = K_1 + W\left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) + r\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right); \tag{3.37b}$$

$$\left(\frac{\partial C^1}{\partial y_1}\right) = W\left(\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right) + r\left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right); \tag{3.37c}$$

sustituyendo

$$\left(\frac{\partial C^1}{\partial W}\right) = L_1 + \frac{1}{\Gamma}\left(-r\frac{F_1^1}{F_2^1}F_2^{1\ 2} + rF_1^1 F_2^1\right) = L_1; \tag{3.38a}$$

$$\left(\frac{\partial C^1}{\partial r}\right) = K_1 + \frac{1}{\Gamma}\left(r\frac{F_1^1}{F_2^1}F_1^1 F_2^1 - rF_1^{1\ 2}\right) = K_1. \tag{3.38b}$$

Lo anterior es válido para una sola unidad del bien 1. Para n unidades:

$$L_1 y_1 + K_1 y_1 = \left(\frac{\partial C^1}{\partial W}\right) y_1 + \left(\frac{\partial C^1}{\partial r}\right) y_1$$

procediendo de manera análoga para la industria 2 se llega a:

$$L_2y_2 + K_2y_2 = \left(\frac{\partial C^2}{\partial W}\right)y_2 + \left(\frac{\partial C^2}{\partial r}\right)y_2,$$

por lo que

$$L_1y_1 + L_2y_2 = \left(\frac{\partial C^1}{\partial W}\right)y_1 + \left(\frac{\partial C^2}{\partial W}\right)y_2; \tag{3.39a}$$

$$K_1y_1 + K_2y_2 = \left(\frac{\partial C^1}{\partial r}\right)y_1 + \left(\frac{\partial C^2}{\partial r}\right)y_2. \tag{3.39b}$$

y

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{F_1^2dL_2 + F_2^2dK_2}{F_1^1dL_1 + F_2^1dK_1}. \tag{3.40}$$

Si ahora resolvemos el siguiente problema se verá que la pendiente de la curva de posibilidades de producción es igual a menos el precio relativo.

$$\begin{cases} \max & P_1y_1 + P_2y_2, \\ \text{s.a.} & y_1 = F^1, \\ & y_2 = F^2, \\ & L = L_1 + L_2, \\ & K = K_1 + K_2. \end{cases} \tag{3.41}$$

Incorporando las restricciones y dejándolas en términos de L_1 y K_1. Sea

$$Z = P_1F^1(L_1, K_1) + P_2F^2(L - L_1, K - K_1)$$

y $dL_2 = -dL_1$ y $dK_2 = -dK_1$ con L y K fijos. Así,

$$\frac{\partial Z}{\partial L_1} = P_1F_1^1 + P_2F_1^2(-1) = 0; \tag{3.42a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K_1} = P_1F_2^1 + P_2F_2^2(-1) = 0. \tag{3.42b}$$

De (3.42)

$$P = \frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1^2}{F_1^1} = \frac{F_2^2}{F_2^1}$$

y recordando que $\frac{W}{r} = \frac{F_1^2}{F_2^2} = \frac{F_1^1}{F_2^1}$ se sustituye en (3.40)

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dy_1} &= \frac{F_2^2\left(\frac{F_1^2}{F_2^2}dL_2 + dK_2\right)}{F_2^1\left(\frac{F_1^1}{F_2^1}dL_1 + dK_1\right)} \\ &= P\left(\frac{\frac{W}{r}dL_2 + dK_2}{\frac{W}{r}dL_1 + dK_1}\right) \\ &= -P. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Si diferenciamos (3.42)

$$d\left(PF_1^1 - F_1^2\right) = dPF_1^1 + PdF_1^1 - dF_1^2 = 0; \tag{3.44a}$$
$$d\left(PF_2^1 - F_2^2\right) = dPF_2^1 + PdF_2^1 - dF_2^2 = 0, \tag{3.44b}$$

pero

$$\begin{aligned} dF_1^1 &= F_{11}^1 dL_1 + F_{12}^1 dK_1, \\ dF_2^1 &= F_{21}^1 dL_1 + F_{22}^1 dK_1, \\ dF_1^2 &= -F_{11}^2 dL_1 - F_{12}^2 dK_1, \\ dF_2^2 &= -F_{21}^2 dL_1 - F_{22}^2 dK_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.44)

$$\begin{cases} F_1^1 dP + P(F_{11}^1 dL_1 + F_{12}^1 dK_1) + (F_{11}^2 dL_1 + F_{12}^2 dK_1) = 0 \\ F_2^1 dP + P(F_{21}^1 dL_1 + F_{22}^1 dK_1) + (F_{21}^2 dL_1 + F_{22}^2 dK_1) = 0. \end{cases}$$

Ordenando términos

$$\begin{cases} F_1^1 dP + (PF_{11}^1 + F_{11}^2)dL_1 + (PF_{12}^1 + F_{12}^2)dK_1 = 0 \\ F_2^1 dP + (PF_{21}^1 + F_{21}^2)dL_1 + (PF_{22}^1 + F_{22}^2)dK_1 = 0. \end{cases}$$

y en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} (PF_{11}^1 + F_{11}^2) & (PF_{12}^1 + F_{12}^2) \\ (PF_{21}^1 + F_{21}^2) & (PF_{22}^1 + F_{22}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dK_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1^1 dP \\ -F_2^1 dP \end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

El discriminante del sistema (3.45) es

$$\Lambda = (PF_{11}^1 + F_{11}^2)(PF_{22}^1 + F_{22}^2) - (PF_{21}^1 + F_{21}^2)(PF_{12}^1 + F_{12}^2). \tag{3.46}$$

Resolviendo para dL_1

$$\begin{aligned} dL_1 &= \frac{1}{\Lambda}\left[-F_1^1 dP(PF_{22}^1 + F_{22}^2) + F_2^1 dP(PF_{12}^1 + F_{12}^2)\right] \\ &= \frac{1}{\Lambda}\left[P(F_2^1 F_{12}^1 - F_1^1 F_{22}^1) + (F_2^1 F_{12}^2 - F_1^1 F_{22}^2)\right] dP, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dL_1}{dP} = \frac{1}{\Lambda}\left[P(F_2^1 F_{12}^1 - F_1^1 F_{22}^1) + (F_2^1 F_{12}^2 - F_1^1 F_{22}^2)\right]. \tag{3.47}$$

Resolviendo para dK_1

$$\begin{aligned} dK_1 &= \frac{1}{\Lambda}\left[F_1^1 dP(PF_{21}^1 + F_{21}^2) - F_2^1 dP(PF_{11}^1 + F_{11}^2)\right] \\ &= \frac{1}{\Lambda}\left[P(-F_2^1F_{11}^1 + F_1^1F_{21}^1) + (-F_2^1F_{11}^2 + F_1^1F_{21}^2)\right] dP, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dK_1}{dP} = \frac{1}{\Lambda}\left[P(-F_2^1F_{11}^1 + F_1^1F_{21}^1) + (-F_2^1F_{11}^2 + F_1^1F_{21}^2)\right]. \tag{3.48}$$

Así,

$$\frac{dL_1}{dP}\begin{cases} > 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 > 0 \\ \quad \text{y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 > 0, \\ > 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 > 0 \text{ y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 < 0 \\ \quad \text{y } P(F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1) > (F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2), \\ > 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 < 0 \text{ y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 > 0 \\ \quad \text{y } P(F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1) < (F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2), \\ < 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 < 0 \text{ y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 < 0, \\ < 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 > 0 \text{ y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 < 0 \\ \quad \text{y } P(F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1) < (F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2), \\ < 0 \text{ si } F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1 < 0 \text{ y } F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2 > 0 \\ \quad \text{y } P(F_2^1F_{12}^1 - F_1^1F_{22}^1) < (F_2^1F_{12}^2 - F_1^1F_{22}^2). \end{cases} \tag{3.49}$$

$$\frac{dK_1}{dP}\begin{cases} > 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^2 > 0 \\ \quad \text{y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 > 0, \\ > 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 > 0 \text{ y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 < 0 \\ \quad \text{y } P(-F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1) > (-F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2), \\ > 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1 < 0 \text{ y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 > 0 \\ \quad \text{y } P(-F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1) < (-F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2), \\ < 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1 < 0 \text{ y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 < 0, \\ < 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1 > 0 \text{ y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 < 0 \\ \quad \text{y } P(-F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1) < (-F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2), \\ < 0 \text{ si } -F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1 < 0 \text{ y } -F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2 > 0 \\ \quad \text{y } P(-F_1^1F_{21}^1 + F_2^1F_{11}^1) < (-F_1^1F_{21}^2 + F_2^1F_{11}^2). \end{cases} \tag{3.50}$$

Si ahora ponemos a comerciar dos economías como en el modelo Ricardiano, esto es, una doméstica ($\mathcal{E}$) y otra exterior ($\mathcal{E}^*$), se tendría para las dos industrias en cada economía

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{E} & \mathcal{E}^* \\
\begin{aligned} &\max\ F(L,K), \\ \text{s.a.}\ & C_0 \le WL + rK, \\ & L \ge 0;\ \ K \ge 0, \\ & L = L_1 + L_2, \\ & K = K_1 + K_2; \end{aligned} & \begin{aligned} &\max\ F^*(L^*,K^*), \\ \text{s.a.}\ & C_0^* \le W^*L^* + r^*K^*, \\ & L^* \ge 0;\ \ K^* \ge 0, \\ & L^* = L_1^* + L_2^*, \\ & K^* = K_1^* + K_2^*; \end{aligned}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\text{para la industria}_1 & \text{para la industria}_1 \\
\begin{aligned} &\max\ F^1(L_1,K_1), \\ \text{s.a.}\ & C_0^1 \le W_1L_1 + r_1K_1, \\ & L_1 \ge 0;\ \ K_1 \ge 0, \end{aligned} & \begin{aligned} &\max\ F^{1*}(L_1^*,K_1^*), \\ \text{s.a.}\ & C_0^{1*} \le W_1^*L_1^* + r_1^*K_1^*, \\ & L_1^* \ge 0;\ \ K_1^* \ge 0, \end{aligned}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\text{para la industria}_2 & \text{para la industria}_2 \\
\begin{aligned} &\max\ F^2(L_2,K_2), \\ \text{s.a.}\ & C_0^2 \le W_2L_2 + r_2K_2, \\ & L_2 \ge 0;\ \ K_2 \ge 0, \end{aligned} & \begin{aligned} &\max\ F^{2*}(L_2^*,K_2^*), \\ \text{s.a.}\ & C_0^{2*} \le W_2^*L_2^* + r_2^*K_2^*, \\ & L_2^* \ge 0;\ \ K_2^* \ge 0. \end{aligned}
\end{array}$$

Suponiendo que hay especialización, $\mathcal{E}$ en la industria 1 y $\mathcal{E}^*$ en la industria 2, tenemos para $\mathcal{E}$:

Sea

$$\mathcal{L} = F^1 + \lambda_1(-WL_1 - rK_1 + C_0^1) + \lambda_2 L_1 + \lambda_3 K_1, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = F_1^1 - \lambda_1 W + \lambda_2 \le 0, \tag{3.52a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = F_2^1 - \lambda_1 r + \lambda_3 \le 0, \tag{3.52b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -WL_1 - rK_1 + C_0^1 \le 0, \tag{3.52c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = L_1 \ge 0, \tag{3.52d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = K_1 \ge 0, \tag{3.52e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} L_1 = L_1(F_1^1 - \lambda_1 W + \lambda_2) = 0, \tag{3.52f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} K_1 = K_1(F_2^1 - \lambda_1 r + \lambda_3) = 0, \tag{3.52g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \lambda_1 = \lambda_1(-WL_1 - rK_1 + C_0^1) = 0, \tag{3.52h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = \lambda_2 L_1 = 0, \tag{3.52i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} \lambda_3 = \lambda_3 K_1 = 0, \tag{3.52j}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \tag{3.52k}$$

$$\lambda_2 \geq 0, \tag{3.52l}$$

$$\lambda_3 \geq 0. \tag{3.52m}$$

De (3.52a), (3.52d) y (3.52f)

$$F_1^1 - \lambda_1 W + \lambda_2 < 0 \;\text{ y }\; L_1 = 0; \tag{3.53a}$$

$$F_1^1 - \lambda_1 W + \lambda_2 = 0 \;\text{ y }\; L_1 > 0; \tag{3.53b}$$

$$F_1^1 - \lambda_1 W + \lambda_2 = 0 \;\text{ y }\; L_1 = 0; \tag{3.53c}$$

de (3.52b), (3.52e) y (3.52g)

$$F_2^1 - \lambda_1 r + \lambda_3 < 0 \;\text{ y }\; K_1 = 0; \tag{3.54a}$$

$$F_2^1 - \lambda_1 r + \lambda_3 = 0 \;\text{ y }\; K_1 > 0; \tag{3.54b}$$

$$F_2^1 - \lambda_1 r + \lambda_3 = 0 \;\text{ y }\; K_1 = 0; \tag{3.54c}$$

de (3.52c), (3.52h) y (3.52k)

$$-WL_1 - rK_1 + C_0^1 < 0 \;\text{ y }\; \lambda_1 = 0; \tag{3.55a}$$

$$-WL_1 - rK_1 + C_0^1 = 0 \;\text{ y }\; \lambda_1 > 0; \tag{3.55b}$$

$$-WL_1 - rK_1 + C_0^1 = 0 \;\text{ y }\; \lambda_1 = 0; \tag{3.55c}$$

de (3.52i) y (3.52l)

$$\lambda_2 > 0 \;\text{ y }\; L_1 = 0; \tag{3.56a}$$

$$\lambda_2 = 0 \;\text{ y }\; L_1 > 0; \tag{3.56b}$$

$$\lambda_2 = 0 \;\text{ y }\; L_1 = 0; \tag{3.56c}$$

de (3.52j) y (3.52m)

$$\lambda_3 > 0 \;\text{ y }\; K_1 = 0; \tag{3.57a}$$

$$\lambda_3 = 0 \;\text{ y }\; K_1 > 0; \tag{3.57b}$$

$$\lambda_3 = 0 \;\text{ y }\; K_1 = 0. \tag{3.57c}$$

Si queremos solución interior, $L_1 > 0$ y $K_1 > 0$, entonces: de (3.53b), (3.54b), (3.55b), (3.56b) y (3.57b) y tomando $\lambda_1 = \lambda$

$$F_1^1 - \lambda W = 0; \tag{3.58a}$$

$$F_2^1 - \lambda r = 0; \tag{3.58b}$$

$$-WL_1 - rK_1 + C_0^1 = 0. \tag{3.58c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (3.58):

$$\begin{cases} F_{11}^1 dL_1 + F_{12}^1 dK_1 - \lambda dW - W d\lambda = 0; \\ F_{21}^1 dL_1 + F_{22}^1 dK_1 - \lambda dr - r d\lambda = 0; \\ -W dL_1 - L_1 dW - r dK_1 - K_1 dr + dC_0^1 = 0. \end{cases} \tag{3.59}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{11}^1 & F_{12}^1 & -W \\ F_{21}^1 & F_{22}^1 & -r \\ -W & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dK_1 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dW \\ \lambda dr \\ W dL_1 + L_1 dW + r dK_1 + K_1 dr - dC_0^1 \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

De (3.58)

$$\frac{F_1^1}{W} = \frac{F_2^1}{r} = \lambda. \tag{3.61}$$

Y el discriminante del sistema (3.60) es:

$$\Xi = -r^2 F_{11}^1 + Wr(F_{12}^1 + F_{21}^1) - W^2 F_{22}^1. \tag{3.62}$$

Resolviendo para dL_1

$$\begin{aligned} dL_1 = \frac{1}{\Xi}\Big(& -\lambda r^2 dW + \lambda W r dr + \\ & - F_{12}^1 r \left[L_1 dW + K_1 dr - dC_0^1\right] + \\ & + W(F_{22}^1 + r\lambda dr)\left[L_1 dW + K_1 dr - dC_0^1\right]\Big). \end{aligned}$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dL_1 = \frac{1}{\Xi}\Big\{ & \left[-\lambda r^2 - L_1(rF_{12}^1 - WF_{22}^1)\right] dW + \\ & + \left[Wr\lambda - K_1(rF_{12}^1 - WF_{22}^1)\right] dr + \\ & + \left[rF_{12}^1 - WF_{22}^1\right] dC_0^1 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Como

$$dL_1 = \left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) dW + \left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) dC_0^1. \tag{3.64}$$

Comparando (3.63) y (3.64)

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[-\lambda r^2 - L_1(rF_{12}^1 - WF_{22}^1)\right]; \tag{3.65a}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[Wr\lambda - K_1(rF_{12}^1 + WF_{22}^1)\right]; \tag{3.65b}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[rF_{12}^1 - WF_{22}^1\right]; \tag{3.65c}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[rF_{12}^1 - WF_{22}^1\right]; \tag{3.66}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right) = -\frac{1}{\Xi}r^2\lambda - L_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right); \tag{3.67}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Xi}\lambda Wr - K_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right). \tag{3.68}$$

Nótese que el primer término de (3.67) y (3.68) corresponden al dual resuelto en (3.33a) y (3.33c) repectivamente. Resolviendo de manera análoga para dK_1

$$dK_1 = \frac{1}{\Xi}\Big\{rF_{11}^1(L_1dW + K_1dr - dC_0^1) + Wr\lambda dW +$$
$$+ W[F_{21}^1(L_1dW + K_1dr - dC_0^1) + W\lambda dr]\Big\}$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dK_1 = \frac{1}{\Xi}\Big\{&\left[\lambda Wr - L_1(-rF_{11}^1 + WF_{21}^1)\right]dW + \\ &+ \left[-W^2\lambda + K_1(-rF_{11}^1 + WF_{21}^1)\right]dr + \\ &+ \left[-rF_{11}^1 + WF_{21}^1\right]dC_0^1\Big\} \end{aligned} \tag{3.69}$$

Como

$$dK_1 = \left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right)dW + \left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right)dC_0^1. \tag{3.70}$$

Comparando (3.69) y (3.70)

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[\lambda Wr - L_1(-rF_{11}^1 - WF_{21}^1)\right]; \tag{3.71a}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[-W^2\lambda - K_1(-rF_{11}^1 + WF_{21}^1)\right]; \tag{3.71b}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[-rF_{11}^1 + WF_{21}^1\right]; \tag{3.71c}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) = \frac{1}{\Xi}\left[-rF_{11}^1 P_2 + WF_{21}^1\right]; \tag{3.72}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Xi}\lambda W r - L_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right); \tag{3.73}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) = \frac{-1}{\Xi}\lambda W^2 - K_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right). \tag{3.74}$$

Si $\Xi > 0$:

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial W}\right)\begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) < 0 \\ \quad \text{y } L_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) > \frac{1}{\Xi}r^2\lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) < 0 \\ \quad \text{y } L_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) < \frac{1}{\Xi}r^2\lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) > 0. \end{cases} \tag{3.75}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial r}\right)\begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) > 0 \\ \quad \text{y } K_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) < \frac{1}{\Xi}Wr\lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) > 0 \\ \quad \text{y } K_1\left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) > \frac{1}{\Xi}Wr\lambda, \\ > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_1}{\partial C_0^1}\right) < 0. \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial W}\right) \begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) > 0 \\ \quad \text{y } L_1 \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) < \frac{1}{\Xi} W r \lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) > 0 \\ \quad \text{y } L_1 \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) > \frac{1}{\Xi} W r \lambda, \\ > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) < 0. \end{cases} \tag{3.77}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial r}\right) \begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) < 0 \\ \quad \text{y } K_1 \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) > \frac{1}{\Xi} W^2 \lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) < 0 \\ \quad \text{y } K_1 \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) < \frac{1}{\Xi} W^2 \lambda, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_1}{\partial C_0^1}\right) > 0. \end{cases} \tag{3.78}$$

Para $\mathcal{E}^*$:
Sea

$$\mathcal{L} = F^{2*} + \lambda_1^*(-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*}) + \lambda_2^* L_2^* + \lambda_3^* K_2^*, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2^*} = F_1^{2*} - \lambda_1^* W^* + \lambda_2^* \leq 0, \tag{3.80a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2^*} = F_2^{2*} - \lambda_1^* r^* + \lambda_3^* \leq 0, \tag{3.80b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1^*} = -W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*} \leq 0, \tag{3.80c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2^*} = L_2^* \geq 0, \tag{3.80d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3^*} = K_2^* \geq 0, \tag{3.80e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2^*} L_2^* = L_2^*(F_1^{2*} - \lambda_1^* W^* + \lambda_2^*) = 0, \tag{3.80f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2^*} K_2^* = K_2^*(F_2^{2*} - \lambda_1^* r^* + \lambda_3^*) = 0, \tag{3.80g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1^*} \lambda_1^* = \lambda_1^*(-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*}) = 0, \tag{3.80h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2^*} \lambda_2^* = \lambda_2^* L_2^* = 0, \tag{3.80i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3^*} \lambda_3^* = \lambda_3^* K_2^* = 0, \tag{3.80j}$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \tag{3.80k}$$

$$\lambda_2^* \geq 0, \tag{3.80l}$$

$$\lambda_3^* \geq 0. \tag{3.80m}$$

De (3.80a), (3.80d) y (3.80f)

$$F_1^{2*} - \lambda_1^* W^* + \lambda_2^* < 0 \;\text{ y }\; L_2 = 0; \tag{3.81a}$$

$$F_1^{1} - \lambda_1^* W^* + \lambda_2^* = 0 \;\text{ y }\; L_2^* > 0; \tag{3.81b}$$

$$F_1^{2*} - \lambda_1^* W^* + \lambda_2^* = 0 \;\text{ y }\; L_2^* = 0; \tag{3.81c}$$

de (3.80b), (3.80e) y (3.80g)

$$F_2^{2*} - \lambda_1^* r^* + \lambda_3^* < 0 \;\text{ y }\; K_2^* = 0; \tag{3.82a}$$

$$F_2^{2*} - \lambda_1^* r^* + \lambda_3^* = 0 \;\text{ y }\; K_2^* > 0; \tag{3.82b}$$

$$F_2^{2*} - \lambda_1^* r^* + \lambda_3^* = 0 \;\text{ y }\; K_2^* = 0; \tag{3.82c}$$

de (3.80c), (3.80h) y (3.80k)

$$-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*} < 0 \;\text{ y }\; \lambda_1^* = 0; \tag{3.83a}$$

$$-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*} = 0 \;\text{ y }\; \lambda_1^* > 0; \tag{3.83b}$$

$$-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*} = 0 \;\text{ y }\; \lambda_1^* = 0; \tag{3.83c}$$

de (3.80i) y (3.80l)

$$\lambda_2^* > 0 \;\text{ y }\; L_2^* = 0; \tag{3.84a}$$

$$\lambda_2^* = 0 \;\text{ y }\; L_2^* > 0; \tag{3.84b}$$

$$\lambda_2^* = 0 \;\text{ y }\; L_2^* = 0; \tag{3.84c}$$

de (3.80j) y (3.80m)

$$\lambda_3^* > 0 \ \text{ y } \ K_2^* = 0; \tag{3.85a}$$
$$\lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ K_2^* > 0; \tag{3.85b}$$
$$\lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ K_2^* = 0. \tag{3.85c}$$

Si queremos solución interior, $L_2 > 0$ y $K_2 > 0$, entonces: de (3.81b), (3.82b), (3.83b), (3.84b) y (3.85b) y tomando $\lambda_1^* = \lambda^*$

$$F_1^{2*} - \lambda^* W^* = 0; \tag{3.86a}$$
$$F_2^{2*} - \lambda^* r^* = 0; \tag{3.86b}$$
$$-W^* L_2^* - r^* K_2^* + C_0^{2*} = 0. \tag{3.86c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (3.86):

$$\begin{cases} F_{11}^{2*} dL_2^* + F_{12}^{2*} dK_2^* - \lambda^* dW^* - W^* d\lambda^* = 0; \\ F_{21}^{2*} dL_2^* + F_{22}^{2*} dK_2^* - \lambda^* dr^* - r^* d\lambda^* = 0; \\ -W^* dL_2^* - L_2^* dW^* - r^* dK_2^* - K_2^* dr^* + dC_0^{2*} = 0. \end{cases} \tag{3.87}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{11}^{2*} & F_{12}^{2*} & -W^* \\ F_{21}^{2*} & F_{22}^{2*} & -r^* \\ -W^* & -r^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_2^* \\ dK_2^* \\ d\lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* dW^* \\ \lambda^* dr \\ W^* dL_2^* + L_2^* dW^* + r^* dK_2^* + K_2^* dr^* - dC_0^{2*} \end{bmatrix}. \tag{3.88}$$

De (3.58)

$$\frac{F_1^{2*}}{W^*} = \frac{F_2^{2*}}{r^*} = \lambda^*. \tag{3.89}$$

Y el discriminante del sistema (3.88) es:

$$\Xi^* = -r^{*2} F_{11}^{2*} + W^* r^* (F_{12}^{2*} + F_{21}^{2*}) - W^{*2} F_{22}^{2*}. \tag{3.90}$$

Resolviendo para dL_2^*

$$\begin{aligned} dL_2^* = & \frac{1}{\Xi^*} \Big(-\lambda^* r^{*2} dW^* + \lambda^* W^* r^* dr^* + \\ & - F_{12}^{2*} r^* \left[L_2^* dW^* + K_2^* dr^* - dC_0^{2*} \right] + \\ & + W^* (F_{22}^{2*} + r^* \lambda^* dr^*) \left[L_2^* dW^* + K_2^* dr^* - dC_0^{2*} \right] \Big). \end{aligned}$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dL_2^* = & \frac{1}{\Xi^*} \Big\{ \left[-\lambda^* r^{*2} - L_2^* (r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*}) \right] dW^* + \\ & + \left[W^* r^* \lambda^* - K_2^* (r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*}) \right] dr + \\ & + \left[r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*} \right] dC_0^{2*} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Como

$$dL_2^* = \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial W^*}\right) dW^* + \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial r^*}\right) dr^* + \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) dC_0^{2*}. \quad (3.92)$$

Comparando (3.91) y (3.92)

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial W^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[-\lambda^* r^{*2} - L_2^*(r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*})\right]; \quad (3.93a)$$

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[W^* r^* \lambda^* - K_2^*(r^* F_{12}^{2*} + W^* F_{22}^{2*})\right]; \quad (3.93b)$$

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*}\right]; \quad (3.93c)$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[r^* F_{12}^{2*} - W^* F_{22}^{2*}\right]; \quad (3.94)$$

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial W^*}\right) = -\frac{1}{\Xi^*} r^{*2}\lambda^* - L_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right); \quad (3.95)$$

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\lambda^* W^* r^* - K_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right). \quad (3.96)$$

Nótese que el primer término de (3.95) y (3.96) corresponden al dual. Resolviendo de manera análoga para dK_2^*:

$$dK_2^* = \frac{1}{\Xi^*}\Big\{r^* F_{11}^{2*}(L_2^* dW^* + K_2^* dr^* - dC_0^{2*}) + W^* r^* \lambda^* dW^* +$$
$$+ W^*[F_{21}^{2*}(L_2^* dW^* + K_2^* dr^* - dC_0^{2*}) + W^* \lambda^* dr^*]\Big\}.$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dK_2^* = \frac{1}{\Xi^*}\Big\{ & \left[\lambda^* W^* r^* - L_2^*(-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*})\right] dW^* + \\ & + \left[-W^{*2}\lambda^* + K_2^*(-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*})\right] dr + \\ & + \left[-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*}\right] dC_0^{2*} \Big\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Como

$$dK_2^* = \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial W^*}\right) dW^* + \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial r^*}\right) dr^* + \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) dC_0^{2*}. \quad (3.98)$$

Comparando (3.97) y (3.98)

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial W^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[\lambda^* W^* r^* - L_2^*(-r^* F_{11}^{2*} - W^* F_{21}^{2*})\right]; \tag{3.99a}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[-W^{*2}\lambda^* - K_2^*(-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*})\right]; \tag{3.99b}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*}\right]. \tag{3.99c}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\left[-r^* F_{11}^{2*} + W^* F_{21}^{2*}\right]; \tag{3.100}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{1}{\Xi^*}\lambda^* W^* r^* - L_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right); \tag{3.101}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{-1}{\Xi^*}\lambda W^{*2} - K_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right). \tag{3.102}$$

Si $\Xi^* > 0$:

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial W^*}\right) \begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0 \\ \quad \text{y } L_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > \frac{1}{\Xi^*} r^{*2}\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0 \\ \quad \text{y } L_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < \frac{1}{\Xi^*} r^{*2}\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0. \end{cases} \tag{3.103}$$

$$\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial r^*}\right)\begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0 \\ \quad \text{y } K_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < \frac{1}{\Xi^*}W^*r^*\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0 \\ \quad \text{y } K_2^*\left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > \frac{1}{\Xi^*}W^*r^*\lambda^*, \\ > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial L_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0. \end{cases} \tag{3.104}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial W^*}\right)\begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0 \\ \quad \text{y } L_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < \frac{1}{\Xi^*}W^*r^*\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0 \\ \quad \text{y } L_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > \frac{1}{\Xi^*}W^*r^*\lambda^*, \\ > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0. \end{cases} \tag{3.105}$$

$$\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial r^*}\right)\begin{cases} > 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0 \\ \quad \text{y } K_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > \frac{1}{\Xi^*}W^{*2}\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < 0 \\ \quad \text{y } K_2^*\left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) < \frac{1}{\Xi^*}W^{*2}\lambda^*, \\ < 0 \text{ si } \left(\frac{\partial K_2^*}{\partial C_0^{2*}}\right) > 0. \end{cases} \tag{3.106}$$

Todo lo anterior fue desde el punto de vista de la empresa. Ahora se verá desde el punto de vista del consumidor.

$$\mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} &\max \quad U(c_1, c_2), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1 + P_2c_2 \le WL + rK, \\ &c_1 \ge 0; \quad c_2 \ge 0, \\ &L = L_1 + L_2, \\ &K = K_1 + K_2; \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^*$$

$$\begin{aligned} &\max \quad U^*(c_1^*, c_2^*), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1^* + P_2c_2^* \le W^*L^* + r^*K^*, \\ &c_1^* \ge 0; \quad c_2^* \ge 0, \\ &L^* = L_1^* + L_2^*, \\ &K^* = K_1^* + K_2^*; \end{aligned}$$

Si se especializa en producir el bien1

$$\begin{aligned} &\max \quad U(c_1, c_1), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1 + P_2c_2 \le W_1L_1 + r_1K_1, \\ &c_1 \ge 0; \quad c_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Si se especializa en producir el bien1

$$\begin{aligned} &\max \quad U^*(c_1^*, c_2^*), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1^* + P_2c_2^* \le W_1^*L_1^* + r_1^*K_1^*, \\ &c_1^* \ge 0; \quad c_2^* \ge 0. \end{aligned}$$

Si se especializa en producir el bien2

$$\begin{aligned} &\max \quad U(c_2, c_2), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1 + P_2c_2 \le W_2L_2 + r_2K_2, \\ &c_1 \ge 0; \quad c_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Si se especializa en producir el bien2

$$\begin{aligned} &\max \quad U^*(c_1^*, c_2^*), \\ &\text{s.a.} \quad P_1c_1^* + P_2c_2^* \le W_2^*L_2^* + r_2^*K_2^*, \\ &c_1^* \ge 0; \quad c_2^* \ge 0. \end{aligned}$$

Suponiendo que hay especialización, $\mathcal{E}$ en la producción del bien 1 y $\mathcal{E}^*$ en la producción del bien 2:

Sea

$$\mathcal{L} = U + \lambda_1(WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2) + \lambda_2c_1 + \lambda_3c_2, \tag{3.107}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 \leq 0, \tag{3.108a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 \leq 0, \tag{3.108b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2 \geq 0, \tag{3.108c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = c_1 \geq 0, \tag{3.108d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = c_2 \geq 0, \tag{3.108e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1}c_1 = c_1(U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2) = 0, \tag{3.108f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2}c_2 = c_2(U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3) = 0, \tag{3.108g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}\lambda_1 = \lambda_1(WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2) = 0, \tag{3.108h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}\lambda_2 = \lambda_2 c_1 = 0, \tag{3.108i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3}\lambda_3 = \lambda_3 c_2 = 0, \tag{3.108j}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \tag{3.108k}$$

$$\lambda_2 \geq 0, \tag{3.108l}$$

$$\lambda_3 \geq 0, \tag{3.108m}$$

De (3.108a), (3.108d) y (3.108f)

$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 < 0 \;\; \text{y} \;\; c_1 = 0; \tag{3.109a}$$
$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 = 0 \;\; \text{y} \;\; c_1 > 0; \tag{3.109b}$$
$$U_1 - \lambda_1 P_1 + \lambda_2 = 0 \;\; \text{y} \;\; c_1 = 0; \tag{3.109c}$$

de (3.108b), (3.108e) y (3.108g)

$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 < 0 \;\; \text{y} \;\; c_2 = 0; \tag{3.110a}$$
$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 = 0 \;\; \text{y} \;\; c_2 > 0; \tag{3.110b}$$
$$U_2 - \lambda_1 P_2 + \lambda_3 = 0 \;\; \text{y} \;\; c_2 = 0; \tag{3.110c}$$

de (3.108c), (3.108h) y (3.108k)

$$\begin{aligned} WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2 > 0 \;\; &\text{y} \;\; \lambda_1 = 0; & (3.111a)\\ WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2 = 0 \;\; &\text{y} \;\; \lambda_1 > 0; & (3.111b)\\ WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2 = 0 \;\; &\text{y} \;\; \lambda_1 = 0; & (3.111c) \end{aligned}$$

de (3.108i) y (3.108l)

$$\begin{aligned} \lambda_2 > 0 \;\; &\text{y} \;\; c_1 = 0; & (3.112a)\\ \lambda_2 = 0 \;\; &\text{y} \;\; c_1 > 0; & (3.112b)\\ \lambda_2 = 0 \;\; &\text{y} \;\; c_1 = 0; & (3.112c) \end{aligned}$$

De (3.108j) y (3.108m)

$$\begin{aligned} \lambda_3 > 0 \;\; &\text{y} \;\; c_2 = 0; & (3.113a)\\ \lambda_3 = 0 \;\; &\text{y} \;\; c_2 > 0; & (3.113b)\\ \lambda_3 = 0 \;\; &\text{y} \;\; c_2 = 0. & (3.113c) \end{aligned}$$

Si queremos solución interior, $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, entonces: de (3.109b), (3.110b), (3.111b), (3.112b) y (3.113b) y tomando $\lambda_1 = \lambda$

$$\begin{aligned} U_1 - \lambda P_1 &= 0; & (3.114a)\\ U_2 - \lambda P_2 &= 0; & (3.114b)\\ WL_1 + rK_1 - P_1c_1 - P_2c_2 &= 0. & (3.114c) \end{aligned}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (3.114):

$$\left.\begin{aligned} U_{11}dc_1 + U_{12}dc_2 - \lambda dP_1 - P_1 d\lambda = 0;\\ U_{21}dc_1 + U_{22}dc_2 - \lambda dP_2 - P_2 d\lambda = 0;\\ WdL_1 + L_1dW + rdK_1 + K_1dr - P_1dc_1 - c_1dP_1 - c_2dP_2 - P_2dc_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.115)$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dP_1 \\ \lambda dP_2 \\ c_1dP_1 + c_2dP_2 - (WdL_1 + L_1dW + rdK_1 + K_1dr) \end{bmatrix} \qquad (3.116)$$

De (3.114)

$$\frac{U_1}{P_1} = \frac{U_2}{P_2} = \lambda. \qquad (3.117)$$

Y el discriminante del sistema (3.116) es el mismo que el del sistema (2.33), es decir, (2.34). Resolviendo para dc_1

$$
\begin{aligned}
dc_1 = \frac{1}{\Delta}\Big(& -\lambda P_2^2 dP_1 + \lambda P_1 P_2 dP_2 + \\
& - U_{12}P_2 \left[c_1 dP_1 + c_2 dP_2 - (W dL_1 + L_1 dW + r dK_1 + K_1 dr)\right] + \\
& + P_1 U_{22} \left[c_1 dP_1 + c_2 dP_2 - (W dL_1 + L_1 dW + r dK_1 + K_1 dr)\right]\Big).
\end{aligned}
$$

Ordenando términos

$$
\begin{aligned}
dc_1 = \frac{1}{\Delta}\Big\{ & \left[-\lambda P_2^2 - (U_{12}P_2 - U_{22}P_1)c_1\right] dP_1 + \\
& + \left[P_1 P_2 \lambda - (U_{12}P_2 - P_1 U_{22})c_2\right] dP_2 + \\
& + \left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\,(-W)\right] dL_1 + \\
& + \left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\,(-L_1)\right] dW + \\
& + \left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\,(-r)\right] dK_1 + \\
& + \left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\,(-K_1)\right] dr \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.118}
$$

Como

$$
dc_1 = \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) dL_1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) dW + \left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) dK_1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) dr. \tag{3.119}
$$

Comparando (3.118) y (3.119)

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[-\lambda P_2^2 + c_1(-U_{12}P_2 + P_1 U_{22})\right]; \tag{3.120a}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[P_1 P_2 \lambda + c_2(-U_{12}P_2 + P_1 U_{22})\right]; \tag{3.120b}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{12}P_2 - U_{22}P_1)\, W\right]; \tag{3.120c}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\, L_1\right]; \tag{3.120d}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\, r\right]; \tag{3.120e}
$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{22}P_1)\, K_1\right]. \tag{3.120f}
$$

Resumiendo

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(-U_{12}P_2 + U_{11}P_1)\, L_1\right]; \tag{3.121}
$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right); \tag{3.122a}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right); \tag{3.122b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right); \tag{3.122c}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) = \frac{W}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right); \tag{3.122d}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) = \frac{W}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right); \tag{3.122e}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) = \frac{K_1}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right); \tag{3.122f}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{L_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right); \tag{3.123a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right); \tag{3.123b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right); \tag{3.123c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right); \tag{3.123d}$$

$$\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{L_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right); \tag{3.124a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right); \tag{3.124b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right); \tag{3.124c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right). \tag{3.124d}$$

Donde ya se consideró el dual, pues el problema es igual al resuelto en el capítulo anterior.

Resolviendo de manera análoga para dc_2

$$dc_2 = \frac{1}{\Delta}\Big(\lambda P_1 P_2 dP_1 + \lambda P_1^2 dP_2 +$$
$$U_{11}P_2\left[c_1 dP_1 + c_2 dP_2 - (WdL_1 + L_1 dW + rdK_1 + K_1 dr)\right] +$$
$$- P_1 U_{21}\left[c_1 dP_1 + c_2 dP_2 - (WdL_1 + L_1 dW + rdK_1 + K_1 dr)\right]\Big).$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_1 = \frac{1}{\Delta}\{ & [\lambda P_1 P_2 + (U_{11}P_2 + U_{21}P_1)c_1]\, dP_1 + \\ & + \left[-P_1^2\lambda + (U_{11}P_2 - P_1 U_{21})c_2\right] dP_2 + \\ & + [(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\,(-W)]\, dL_1 + \\ & + [(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\,(-L_1)]\, dW + \\ & + [(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\,(-r)]\, dK_1 + \\ & + [(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\,(-K_1)]\, dr\}\,. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Como

$$dc_2 = \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right) dL_1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) dW + \left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right) dK_1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right) dr. \tag{3.126}$$

Comparando (3.125) y (3.126)

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[\lambda P_1 P_2 + c_1(U_{11}P_2 - P_1 U_{21})\right]; \tag{3.127a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}\left[-P_1^2\lambda + c_2(U_{11}P_2 - P_1 U_{21})\right]; \tag{3.127b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\, W\right]; \tag{3.127c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\, L_1\right]; \tag{3.127d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\, r\right]; \tag{3.127e}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\, K_1\right]. \tag{3.127f}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = -\frac{1}{\Delta}\left[(U_{11}P_2 - U_{21}P_1)\, L_1\right]; \tag{3.128}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right); \tag{3.129a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right); \tag{3.129b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right) = \frac{L_1}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right); \tag{3.129c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right) = \frac{W}{K_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right); \tag{3.129d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right) = \frac{W}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right); \tag{3.129e}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right) = \frac{K_1}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right); \tag{3.129f}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{L_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right); \tag{3.130a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right); \tag{3.130b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right); \tag{3.130c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right); \tag{3.130d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{L_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial W}\right); \tag{3.131a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{W}\left(\frac{\partial c_2}{\partial L_1}\right); \tag{3.131b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{K_1}\left(\frac{\partial c_2}{\partial r}\right); \tag{3.131c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial K_1}\right). \tag{3.131d}$$

$$
\left(\frac{\partial c_1}{\partial P_1}\right)
\begin{cases}
> 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{L_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) > \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{L_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) < \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial W}\right) > 0, \\
> 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) > \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{W}\left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) < \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial L_1}\right) > 0, \\
> 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) > \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{K_1}\left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) < \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial r}\right) > 0, \\
> 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) > \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) < 0 \\
\quad \text{y } \frac{c_1}{r}\left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) < \left(\frac{\partial h_1}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \text{ si } \left(\frac{\partial c_1}{\partial K_1}\right) > 0.
\end{cases}
\tag{3.132}
$$

Para $\mathcal{E}^*$ especializada en el bien 2: Sea

$$\mathcal{L} = U^* + \lambda_1^*(W^*L_2^* + r^*K_2 - P_1c_1^* - P_2c_2^*) + \lambda_2^*c_1^* + \lambda_3^*c_2^*, \tag{3.133}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1^*} = U_1^* - \lambda_1^*P_1 + \lambda_2^* \leq 0, \tag{3.134a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^*} = U_2^* - \lambda_1^*P_2 + \lambda_3^* \leq 0, \tag{3.134b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1^*} = W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^* \geq 0, \tag{3.134c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2^*} = c_1^* \geq 0, \tag{3.134d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3^*} = c_2^* \geq 0, \tag{3.134e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1^*}c_1^* = c_1^*(U_1^* - \lambda_1^*P_1 + \lambda_2^*) = 0, \tag{3.134f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^*}c_2^* = c_2^*(U_2 - \lambda_1^*P_2 + \lambda_3^*) = 0, \tag{3.134g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1^*}\lambda_1^* = \lambda_1^*(W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^*) = 0, \tag{3.134h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2^*}\lambda_2^* = \lambda_2^*c_1^* = 0, \tag{3.134i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3^*}\lambda_3^* = \lambda_3^*c_2^* = 0, \tag{3.134j}$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \tag{3.134k}$$

$$\lambda_2^* \geq 0, \tag{3.134l}$$

$$\lambda_3^* \geq 0. \tag{3.134m}$$

De (3.134a), (3.134d) y (3.134f)

$$U_1^* - \lambda_1^*P_1 + \lambda_2^* < 0 \text{ y } c_1^* = 0; \tag{3.135a}$$

$$U_1^* - \lambda_1^*P_1 + \lambda_2^* = 0 \text{ y } c_1^* > 0; \tag{3.135b}$$

$$U_1^* - \lambda_1^*P_1 + \lambda_2^* = 0 \text{ y } c_1^* = 0; \tag{3.135c}$$

de (3.134b), (3.134e) y (3.134g)

$$U_2^* - \lambda_1^*P_2 + \lambda_3^* < 0 \text{ y } c_2^* = 0; \tag{3.136a}$$

$$U_2^* - \lambda_1^*P_2 + \lambda_3^* = 0 \text{ y } c_2^* > 0; \tag{3.136b}$$

$$U_2^* - \lambda_1^*P_2 + \lambda_3^* = 0 \text{ y } c_2^* = 0; \tag{3.136c}$$

de (3.134c), (3.134h) y (3.134k)

$$W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^* > 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* = 0; \tag{3.137a}$$
$$W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^* = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* > 0; \tag{3.137b}$$
$$W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^* = 0 \ \text{ y } \ \lambda_1^* = 0; \tag{3.137c}$$

de (3.134i) y (3.134l)

$$\lambda_2^* > 0 \ \text{ y } \ c_1^* = 0; \tag{3.138a}$$
$$\lambda_2^* = 0 \ \text{ y } \ c_1^* > 0; \tag{3.138b}$$
$$\lambda_2^* = 0 \ \text{ y } \ c_1^* = 0; \tag{3.138c}$$

de (3.134j) y (3.134m)

$$\lambda_3^* > 0 \ \text{ y } \ c_2^* = 0; \tag{3.139a}$$
$$\lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ c_2^* > 0; \tag{3.139b}$$
$$\lambda_3^* = 0 \ \text{ y } \ c_2^* = 0. \tag{3.139c}$$

Si queremos solución interior, $c_1^* > 0$ y $c_2^* > 0$, entonces: de (3.135b), (3.136b), (3.137b), (3.138b) y (3.139b) y tomando $\lambda_1 = \lambda$

$$U_1^* - \lambda^* P_1 = 0; \tag{3.140a}$$
$$U_2^* - \lambda^* P_2 = 0; \tag{3.140b}$$
$$W^*L_2^* + r^*K_2^* - P_1c_1^* - P_2c_2^* = 0. \tag{3.140c}$$

Derivando totalmente las ecuaciones (3.140):

$$\left.\begin{aligned} U_{11}^*dc_1^* + U_{12}^*dc_2^* - \lambda^*dP_1 - P_1d\lambda^* = 0;\\ U_{21}^*dc_1^* + U_{22}^*dc_2^* - \lambda^*dP_2 - P_2d\lambda^* = 0;\\ W^*dL_2^* + L_2^*dW^* + r^*dK_2^* + K_2^*dr^* - P_1dc_1^* - c_1^*dP_1 - c_2^*dP_2 - P_2dc_2^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.141}$$

Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & -P_1 \\ U_{21}^* & U_{22}^* & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc_1^* \\ dc_2^* \\ d\lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^*dP_1 \\ \lambda^*dP_2 \\ c_1^*dP_1 + c_2^*dP_2 - (W^*dL_2^* + L_2^*dW^* + r^*dK_2^* + \\ +K_2^*dr^*) \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

De (3.140)

$$\frac{U_1^*}{P_1} = \frac{U_2^*}{P_2} = \lambda^*. \tag{3.143}$$

Y el discriminante del sistema (3.142) es el mismo que el del sistema (2.33), es decir, (2.34) con asterisco y como variables L_2 y K_2. Resolviendo para dc_1^*

$$dc_1^* = \frac{1}{\Delta^*}\Big(-\lambda^* P_2^2 dP_1 + \lambda^* P_1 P_2 dP_2 + \\ - U_{12}^* P_2 \left[c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 - (W^* dL_2^* + L_2^* dW^* + r^* dK_2^* + K_2^* dr^*)\right] + \\ + P_1 U_{22}^* \left[c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 - (W^* dL_2^* + L_2^* dW^* + r^* dK_2^* + K_2^* dr^*)\right]\Big).$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_1^* = \frac{1}{\Delta^*} \{ & \left[-\lambda^* P_2^2 - (U_{12}^* P_2 - U_{22}^* P_1) c_1^*\right] dP_1 + \\ & + \left[P_1 P_2 \lambda^* - (U_{12}^* P_2 - P_1 U_{22}^*) c_2^*\right] dP_2 + \\ & + \left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1)(-W^*)\right] dL_2^* + \\ & + \left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1)(-L_2^*)\right] dW^* + \\ & + \left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1)(-r^*)\right] dK_2^* + \\ & + \left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1)(-K_2^*)\right] dr \}. \end{aligned} \tag{3.144}$$

Como

$$dc_1^* = \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) dL_2^* + \left(\frac{\partial c_1}{\partial W^*}\right) dW^* + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) dK_2^* + \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) dr^*. \tag{3.145}$$

Comparando (3.144) y (3.145)

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[-\lambda^* P_2^2 + c_1^*(-U_{12}^* P_2 + P_1 U_{22}^*)\right]; \tag{3.146a}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta^*}\left[P_1 P_2 \lambda^* + c_2^*(-U_{12}^* P_2 + P_1 U_{22}^*)\right]; \tag{3.146b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[(U_{12}^* P_2 - U_{22}^* P_1) W^*\right]; \tag{3.146c}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1) L_2^*\right]; \tag{3.146d}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1) r^*\right]; \tag{3.146e}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[(-U_{12}^* P_2 + U_{22}^* P_1) K_2^*\right]. \tag{3.146f}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[(-U_{12}^* P_2 + U_{11}^* P_1)\, L_2^*\right]; \tag{3.147}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.148a}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.148b}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.148c}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) = \frac{W^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.148d}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) = \frac{W^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.148e}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) = \frac{K_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.148f}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right); \tag{3.149a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.149b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.149c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.149d}$$

$$\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right); \tag{3.150a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.150b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.150c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right). \tag{3.150d}$$

Donde ya se consideró el dual, pues el problema es igual al resuelto en el capítulo anterior.

Resolviendo de manera análoga para dc_2^*

$$dc_2^* = \frac{1}{\Delta^*}\Big(\lambda^* P_1 P_2 dP_1 + \lambda^* P_1^2 dP_2 +$$
$$U_{11}^* P_2 \left[c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 - (W^* dL_2^* + L_2^* dW^* + r^* dK_2^* + K_2^* dr^*)\right] +$$
$$- P_1 U_{21}^* \left[c_1^* dP_1 + c_2^* dP_2 - (W^* dL_2^* + L_2^* dW^* + r^* dK_2^* + K_2^* dr^*)\right]\Big).$$

Ordenando términos

$$\begin{aligned} dc_1^* = \frac{1}{\Delta^*} \{ & [\lambda^* P_1 P_2 + (U_{11}^* P_2 + U_{21}^* P_1) c_1^*] \, dP_1 + \\ & + \left[-P_1^2 \lambda^* + (U_{11}^* P_2 - P_1 U_{21}^*) c_2^*\right] dP_2 + \\ & + [(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(-W^*)] \, dL_2^* + \\ & + [(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(-L_2^*)] \, dW^* + \\ & + [(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(-r^*)] \, dK_2^* + \\ & + [(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1)(-K_2^*)] \, dr^* \} . \end{aligned} \tag{3.151}$$

Como

$$dc_2^* = \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right) dL_2^* + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) dW^* + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right) dK_2^* + \left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right) dr^* . \tag{3.152}$$

Comparando (3.151) y (3.152)

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[\lambda^* P_1 P_2 + c_1^* (U_{11}^* P_2 - P_1 U_{21}^*)\right]; \tag{3.153a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta^*} \left[-P_1^2 \lambda^* + c_2^* (U_{11}^* P_2 - P_1 U_{21}^*)\right]; \tag{3.153b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*} \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1) W^*\right]; \tag{3.153c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*} \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1) L_2^*\right]; \tag{3.153d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*} \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1) r^*\right]; \tag{3.153e}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*} \left[(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1) K_2^*\right]. \tag{3.153f}$$

Resumiendo

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) = -\frac{1}{\Delta^*}\left[\left(U_{11}^* P_2 - U_{21}^* P_1\right) L_2^*\right]; \tag{3.154}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.155a}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.155b}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right) = \frac{L_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.155c}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right) = \frac{W^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.155d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right) = \frac{W^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.155e}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right) = \frac{K_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.155f}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_1}\right) = \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right); \tag{3.156a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.157b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.157c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_1}\right) - \frac{c_1^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right); \tag{3.157d}$$

$$\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial P_2}\right) = \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial W^*}\right); \tag{3.158a}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial L_2^*}\right); \tag{3.158b}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial r^*}\right); \tag{3.158c}$$

$$= \left(\frac{\partial h_2^*}{\partial P_2}\right) - \frac{c_2^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_2^*}{\partial K_2^*}\right). \tag{3.158d}$$

$$
\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial P_1}\right)
\begin{cases}
> 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) > \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{L_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) < \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial W^*}\right) > 0, \\
> 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) > \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{W^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) < \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial L_2^*}\right) > 0, \\
> 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) > \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{K_2^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) < \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial r^*}\right) > 0, \\
> 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) > \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) < 0 \\
\quad \text{y} \ \frac{c_1^*}{r^*}\left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) < \left(\frac{\partial h_1^*}{\partial P_1}\right), \\
< 0 \ \text{si} \ \left(\frac{\partial c_1^*}{\partial K_2^*}\right) > 0.
\end{cases}
\tag{3.159}
$$

CAPITULO 4

4.1 EQUILIBRIO GENERAL: MODELOS NO-LINEALES

4.1.1 CONDICIONES KUHN-TUCKER Y ESTATICA COMPARATIVA

Se investigará el modelo más plausible de equilibrio general basado en coeficientes variables de producción. Para n bienes producidos usando m factores de producción, y los precios de esos bienes conocidos, sean:

$$x_{ij} = \text{ cantidad del factor } i \text{ usado para producir el bien } j$$

y la función de producción

$$y_j = F^j(x_{1j}, ..., x_{mj}) \quad j = 1, ..., n. \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} P_j y_j = \sum_{j=1}^{n} P_j F^j(x_{1j}, ..., x_{mj}) \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq x_i \quad i = 1, ..., m \\ \qquad x_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j. \end{cases} \tag{4.2}$$

Hasta aquí es un problema de programación no-lineal general. Para la producción de n bienes usando dos factores:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} P_j y_j = \sum_{j=1}^{n} P_j F^j(L_j, K_j) \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^{n} L_j \leq L \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} K_j \leq K \\ \qquad L_j \geq 0; \ \ K_j \geq 0 \ \ \forall \ j. \end{cases} \tag{4.3}$$

La función Lagrangiana viene dada por:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} P_j F^j(L_j, K_j) + \lambda_1(L - \sum_{j=1}^{n} L_j) + \lambda_2(K - \sum_{j=1}^{n} K_j) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+2} L_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+2+n} K_j; \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_j} = P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 + \lambda_{j+2} \leq 0 \ \ \forall j, \tag{4.5a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_j} = P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 + \lambda_{j+2+n} \leq 0 \;\; \forall j, \tag{4.5b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = L - \sum_{j=1}^{n} L_j \geq 0, \tag{4.5c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = K - \sum_{j=1}^{n} K_j \geq 0, \tag{4.5d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{j+2}} = L_j \geq 0, \tag{4.5e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{j+2+n}} = K_j \geq 0, \tag{4.5f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_j} L_j = 0 \;\; \forall j, \tag{4.5g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_j} K_j = 0 \;\; \forall j, \tag{4.5h}$$

$$\lambda_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, 2n+2, \tag{4.5i}$$

$$\lambda_1 (L - \sum_{j=1}^{n} L_j) = 0, \tag{4.5j}$$

$$\lambda_2 (K - \sum_{j=1}^{n} K_j) = 0, \tag{4.5k}$$

$$\lambda_{j+2} L_j = 0 \;\; \forall j, \tag{4.5l}$$

$$\lambda_{j+2+n} K_j = 0 \;\; \forall j, \tag{4.5m}$$

las ecuaciones (4.5a) a (4.5k) son las condiciones Kuhn-Tucker de primer orden. De (4.5g)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_j} L_j = (P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 + \lambda_{j+2}) L_j = 0 \;\; \forall j,$$

de la que se tienen tres casos

$$P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 + \lambda_{j+2} = 0; \;\; L_j > 0, \tag{4.6a}$$

$$P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 + \lambda_{j+2} < 0; \;\; L_j = 0, \tag{4.6b}$$

$$P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 + \lambda_{j+2} = 0; \;\; L_j = 0, \tag{4.6c}$$

de (4.5h)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_j} K_j = (P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 + \lambda_{j+2+n}) K_j = 0 \;\; \forall j,$$

de la que se tienen tres casos

$$P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 + \lambda_{j+2+n} = 0; \quad K_j > 0, \tag{4.7a}$$

$$P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 + \lambda_{j+2+n} < 0; \quad K_j = 0, \tag{4.7b}$$

$$P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 + \lambda_{j+2+n} = 0; \quad K_j = 0, \tag{4.7c}$$

de (4.5j)

$$\lambda_1 = 0; \quad L - \sum_{j=1}^{n} L_j \geq 0, \tag{4.8a}$$

$$\lambda_1 \geq 0; \quad L - \sum_{j=1}^{n} L_j = 0, \tag{4.8b}$$

$$\lambda_1 = 0; \quad L - \sum_{j=1}^{n} L_j = 0, \tag{4.8c}$$

de (4.5k)

$$\lambda_2 = 0; \quad K - \sum_{j=1}^{n} K_j \geq 0, \tag{4.9a}$$

$$\lambda_2 \geq 0; \quad K - \sum_{j=1}^{n} K_j = 0, \tag{4.9b}$$

$$\lambda_2 = 0; \quad K - \sum_{j=1}^{n} K_j = 0, \tag{4.9c}$$

de (4.5l)

$$\lambda_{j+2} = 0; \quad L_j > 0, \tag{4.10a}$$

$$\lambda_{j+2} > 0; \quad L_j = 0, \tag{4.10b}$$

$$\lambda_{j+2} = 0; \quad L_j = 0, \tag{4.10c}$$

de (4.5m)

$$\lambda_{j+2+n} = 0; \quad K_j > 0, \tag{4.11a}$$

$$\lambda_{j+2+n} > 0; \quad K_j = 0, \tag{4.11b}$$

$$\lambda_{j+2+n} = 0; \quad K_j = 0, \tag{4.11c}$$

si se quiere encontrar una solución interior, i.e., $L_j > 0$, $K_j > 0$, $\forall j$ entonces de (4.10) y (4.11) $\lambda_{j+2} = 0$ y $\lambda_{j+2+n} = 0$ $\forall j$ por lo que se llega a

$$\begin{cases} P_j F^j_{Lj} - \lambda_1 = 0, \\ P_j F^j_{Kj} - \lambda_2 = 0, \\ L - \sum_{j=1}^{n} L_j = 0, \\ K - \sum_{j=1}^{n} K_j = 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

De las ecuaciones (4.12) se obtiene

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F^j_{Lj}}{F^j_{Kj}}, \tag{4.13}$$

y derivando cada una de las ecuaciones (4.12)

$$\begin{cases} \left\{P_j F^j_{LjLj} dL_j + P_j F^j_{LjKj} dK_j + F^j_{Lj} dP_j - d\lambda_1\right\} = 0; \forall j, \\ \left\{P_j F^j_{KjLj} dL_j + P_j F^j_{KjKj} dK_j + F^j_{Kj} dP_j - d\lambda_2\right\} = 0; \forall j, \\ dL - \sum_{j=1}^{n} dL_j = 0, \\ dK - \sum_{j=1}^{n} dK_j = 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

ordenando las ecuaciones (4.14) de manera matricial, siendo variables endógenas L_j, K_j, $\forall j$, λ_1 y λ_2, y las exógenas P_j, L y K.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P_1 F^1_{L1L1} & P_1 F^1_{L1K1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ P_1 F^1_{K1L1} & P_1 F^1_{K1K1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & P_2 F^2_{L2L2} & P_2 F^2_{L2K2} & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 F^2_{K2L2} & P_2 F^2_{K2K2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n F^n_{LnLn} & P_n F^n_{LnKn} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n F^n_{KnLn} & P_n F^n_{KnKn} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dL_1 \\ dK_1 \\ dL_2 \\ dK_2 \\ \dots \\ dL_n \\ dK_n \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -F^1_{L1}dP_1 \\ -F^1_{K1}dP_1 \\ -F^2_{L2}dP_2 \\ -F^2_{K2}dP_2 \\ \dots \\ -F^n_{Ln}dP_n \\ -F^n_{Kn}dP_n \\ -dL \\ -dK \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Para dos bienes:

$$\begin{pmatrix} P_1F^1_{L1L1} & P_1F^1_{L1K1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ P_1F^1_{K1L1} & P_1F^1_{K1K1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dK_1 \\ dL_2 \\ dK_2 \\ d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F^1_{L1}dP_1 \\ -F^1_{K1}dP_1 \\ -F^2_{L2}dP_2 \\ -F^2_{K2}dP_2 \\ -dL \\ -dK \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta = P_1F^1_{L1L1} \begin{vmatrix} P_1F^1_{K1K1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 & 0 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- P_1F^1_{L1K1} \begin{vmatrix} P_1F^1_{K1L1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 & 0 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} P_1F^1_{K1L1} & P_1F^1_{K1K1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & 0 \\ 0 & 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta = P_1F^1_{L1L1}\left\{ P_1F^1_{K1K1}\begin{vmatrix} P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 & 0 \\ P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- P_1F^1_{L1K1}\left\{ P_1F^1_{K1L1}\begin{vmatrix} P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 & 0 \\ P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & -1 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- \left\{ P_1F^1_{K1L1}\begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & 0 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - P_1F^1_{K1K1}\begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} & 0 \\ 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & 0 & P_2F^2_{L2L2} & P_2F^2_{L2K2} \\ 0 & 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\Delta = P_1 F^1_{L1L1} \Bigg\{ P_1 F^1_{K1K1} \Bigg[P_2 F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - P_2 F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2L2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$(-1) \Bigg[-P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2K2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\} +$$

$$- P_1F^1_{L1K1} \Bigg\{ P_1F^1_{K1L1} \Bigg[P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2K2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2L2} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$(-1) \Bigg[-P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2K2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & P_2F^2_{K2K2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\} +$$

$$(-1) \Bigg\{ P_1F^1_{K1L1} \Bigg[-P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$- P_1F^1_{K1K1} \Bigg[-P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2K2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} 0 & P_2F^2_{K2L2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$(-1) \Bigg[P_2F^2_{L2L2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & P_2F^2_{K2K2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - P_2F^2_{L2K2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & P_2F^2_{K2L2} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\}$$

Reduciendo

$$\begin{aligned}\Delta = \; & P_1^2(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1}) + \\ & P_1P_2(F^1_{L1L1}F^2_{K2K2} - F^1_{L1K1}F^2_{K2L2} - F^1_{K1L1}F^2_{L2K2} + F^1_{K1K1}F^2_{L2L2}) \\ & P_2^2(F^2_{L2L2}F^2_{K2K2} - F^2_{L2K2}F^2_{K2L2}).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Sean

$$\begin{aligned} a_{11} &= P_1F^1_{L1L1}; \quad & a_{12} &= P_1F^1_{L1K1}; \\ a_{21} &= P_1F^1_{K1L1}; \quad & a_{22} &= P_1F^1_{K1K1}; \\ a_{33} &= P_2F^2_{L2L2}; \quad & a_{34} &= P_2F^2_{L2K2}; \\ a_{43} &= P_2F^2_{K2L2}; \quad & a_{44} &= P_2F^2_{K2K2}; \end{aligned} \tag{4.19}$$

Resolviendo para dL_1:

$$dL_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -F^1_{L1}dP_1 & a_{12} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -F^1_{K1}dP_1 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -F^2_{L2}dP_2 & 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ -F^2_{K2}dP_2 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -dL & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta dL_1 = -F^1_{L1}dP_1 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -dL & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \quad \begin{vmatrix} -F^1_{K1}dP_1 & a_{22} & 0 & 0 & -1 \\ -F^2_{L2}dP_2 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ -F^2_{K2}dP_2 & 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -dL & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta dL_1 = -F^1_{L1}dP_1 \left\{ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- a_{12} \left\{ -F^1_{K1}dP_1 \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -dL & -1 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ F^1_{K1}dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -dL & -1 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} -F^2_{L2}dP_2 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ -F^2_{K2}dP_2 & 0 & a_{43} & a_{44} \\ -dL & 0 & -1 & 0 \\ -dK & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\Delta dL_1 = -F^1_{L1} dP_1 \left\{ a_{22} \left[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right. \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$(-1) \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \left. + \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right] \right\} +$$

$$- a_{12} \left\{ -F^1_{K1} dP_1 \left[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right. \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- \left[-F^2_{L2} dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{44} & 0 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \left. + a_{34} \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{43} & 0 \\ -dL & -1 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{43} & a_{44} \\ -dL & -1 & 0 \\ -dK & 0 & -1 \end{vmatrix} \right] \right\}$$

$$+\left\{F^1_{K1}dP_1\left[-a_{33}\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & a_{43} & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\right]+\right.$$

$$+a_{22}\left[-F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix}a_{43} & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}-a_{33}\begin{vmatrix}-F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & -1\\ -dL & 0 & 0\\ -dK & -1 & 0\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+a_{34}\begin{vmatrix}-F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & -1\\ -dL & -1 & 0\\ -dK & 0 & 0\end{vmatrix}\right]+$$

$$+\left[-F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix}0 & a_{43} & a_{44}\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix}-F^2_{K2}dP_2 & 0 & a_{44}\\ -dL & 0 & 0\\ -dK & -1 & -1\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.\left.-a_{34}\begin{vmatrix}-F^2_{K2}dP_2 & 0 & a_{43}\\ -dL & 0 & -1\\ -dK & -1 & 0\end{vmatrix}\right]\right\}.$$

Reduciendo y ordenando términos

$$\begin{aligned}\Delta dL_1 = {} & [-F^1_{L1}(a_{22}+a_{44})+F^1_{K1}(a_{12}+a_{34})]dP_1+\\ & +[F^2_{K2}(-a_{12}-a_{34})+F^2_{L2}(a_{22}+a_{44})]dP_2+\\ & +[-a_{12}a_{43}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43}]dL+\\ & +[-a_{12}a_{44}+a_{22}a_{34}]dK;\end{aligned} \tag{4.20}$$

como

$$dL_1=\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_1}\right)dP_1+\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_2}\right)dP_2+\left(\frac{\partial L_1}{\partial L}\right)dL+\left(\frac{\partial L_1}{\partial K}\right)dK. \tag{4.21}$$

Comparando (4.20) y (4.21) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_1}\right) &= \frac{1}{\Delta}[P_1(-F^1_{K1K1}F^1_{L1}+F^1_{L1K1}F^1_{K1})+P_2(-F^2_{K2K2}F^1_{L1}+F^2_{L2K2}F^1_{K1}];\\ \left(\frac{\partial L_1}{\partial P_2}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1(-F^1_{K1K1}F^2_{L2}+F^1_{L1K1}F^2_{K2})-P_2(-F^2_{K2K2}F^2_{L2}+F^2_{L2K2}F^2_{K2}];\\ \left(\frac{\partial L_1}{\partial L}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1P_2(-F^1_{K1K1}F^2_{L2L2}+F^1_{L1K1}F^2_{K2L2})-P_2^2(-F^2_{K2K2}F^2_{L2L2}+F^2_{L2K2}F^2_{K2L2}];\\ \left(\frac{\partial L_1}{\partial K}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1P_2(-F^1_{K1K1}F^2_{L2K2}+F^1_{L1K1}F^2_{K2K2})];\end{aligned} \tag{4.22}$$

Resolviendo para dK_1:

$$dK_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & -F^1_{L1}dP_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{21} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & -dL & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dK & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

desarrollando por menores:

$$\Delta dK_1 = a_{11}\begin{vmatrix} -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -dL & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ F^1_{L1}dP_1\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & -dL & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -dK & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$
\begin{aligned}
\Delta dK_1 = a_{11} \Bigg\{ & -F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F_{L2}^2 dP_2 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ -F_{K2}^2 dP_2 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -dL & -1 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg\} + \\
& + F_{L1}^1 dP_1 \left\{ a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} + \\
& + \Bigg\{ -a_{21} \begin{vmatrix} -F_{L2}^2 dP_2 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ -F_{K2}^2 dP_2 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -dL & -1 & 0 & 0 \\ -dK & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & -dL & -1 & 0 \\ 0 & -dK & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta dK_1 = a_{11} \Bigg\{ & -F^1_{K1} dP_1 \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\
& - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] + \\
& + \Bigg[F^2_{L2} dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{44} & 0 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} + \\
& - a_{34} \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{43} & 0 \\ -dL & -1 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -F^2_{K2} dP_2 & a_{43} & a_{44} \\ -dL & -1 & 0 \\ -dK & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\} + \\
& + F^1_{L1} dP_1 \Bigg\{ a_{21} \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\
& - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] + \\
& + \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\
& - \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$+\Bigg\{-a_{21}\Bigg[-F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}-a_{33}\begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & -1\\ -dL & 0 & 0\\ -dK & -1 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+a_{34}\begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & a_{43} & -1\\ -dL & -1 & 0\\ -dK & 0 & 0\end{vmatrix}\Bigg]+$$

$$-F^1_{K1}dP_1\Bigg[-a_{33}\begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\Bigg]+$$

$$+\Bigg[F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44}\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44}\\ -1 & -dL & 0\\ 0 & -dK & -1\end{vmatrix}+$$

$$-a_{34}\begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{43}\\ -1 & -dL & -1\\ 0 & -dK & 0\end{vmatrix}\Bigg]\Bigg\}$$

Reduciendo y ordenando términos

$$\left.\begin{aligned}\Delta dK_1 = {} & [F^1_{L1}(a_{21}+a_{43})-F^1_{K1}(a_{11}+a_{33})]dP_1+\\ & +[F^2_{K2}(a_{11}+a_{33})-F^2_{L2}(a_{21}+a_{43})]dP_2+\\ & +[a_{11}a_{43}-a_{21}a_{33}]dL+\\ & +[a_{11}a_{44}-a_{21}a_{34}+a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43}]dK;\end{aligned}\right\}\qquad(4.23)$$

como

$$dK_1=\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_1}\right)dP_1+\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_2}\right)dP_2+\left(\frac{\partial K_1}{\partial L}\right)dL+\left(\frac{\partial K_1}{\partial K}\right)dK.\qquad(4.24)$$

Comparando (4.23) y (4.24) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_1}\right)&=\frac{1}{\Delta}[P_1(F^1_{K1L1}F^1_{L1}-F^1_{L1L1}F^1_{K1})+P_2(F^2_{K2L2}F^1_{L1}-F^2_{L2L2}F^1_{K1}];\\ \left(\frac{\partial K_1}{\partial P_2}\right)&=\frac{1}{\Delta}[-P_1(F^1_{K1L1}F^2_{L2}-F^1_{L1L1}F^2_{K2})-P_2(F^2_{K2L2}F^2_{L2}-F^2_{L2L2}F^2_{K2}];\\ \left(\frac{\partial K_1}{\partial L}\right)&=\frac{1}{\Delta}[-P_1P_2(F^1_{K1L1}F^2_{L2L2}-F^1_{L1L1}F^2_{K2L2})];\\ \left(\frac{\partial K_1}{\partial K}\right)&=\frac{1}{\Delta}[-P_1P_2(F^1_{K1L1}F^2_{L2K2}-F^1_{L1L1}F^2_{K2K2})-P_2^2(F^2_{K2L2}F^2_{L2K2}-F^2_{L2L2}F^2_{K2K2})];\end{aligned}\qquad(4.25)$$

Resolviendo para dL_2:

$$dL_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -F^1_{L1}dP_1 & 0 & -1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -dL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -dK & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando por menores:

$$\Delta dL_2 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & -dL & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -dK & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & -dL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dK & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- F^1_{L1}dP_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -F^2_{L2}dP_2 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -dK & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta dL_2 = a_{11}\left\{ a_{22}\begin{vmatrix} -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & -1 & 0 \\ -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & -1 \\ 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & 0 \\ 0 & -dL & 0 & 0 \\ -1 & -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- a_{12}\left\{ a_{21}\begin{vmatrix} -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & -1 & 0 \\ -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & -1 \\ 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & 0 \\ -1 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- F_{L1}^1 dP_1 \left\{ a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -1 & 0 \\ 0 & a_{44} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{34} & -1 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- \left\{ a_{21}\begin{vmatrix} 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & 0 \\ 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & -1 \\ 0 & -dL & 0 & 0 \\ -1 & -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} & 0 \\ 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} & -1 \\ -1 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & -dK & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -F_{L2}^2 dP_2 & a_{34} \\ 0 & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 & a_{44} \\ -1 & 0 & -dL & 0 \\ 0 & -1 & -dK & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\Delta dL_2 = a_{11}\left\{a_{22}\left[-F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] +$$

$$+ F^1_{K1}dP_1\left[-a_{34}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] +$$

$$- \left[F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34}\begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & 0 \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left.\left. + \begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & -1 \end{vmatrix}\right]\right\} +$$

$$- a_{12}\left\{a_{21}\left[-F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & a_{44} & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] +$$

$$+ F^1_{K1}dP_1\left[-a_{34}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] +$$

$$
-\left[F_{L2}^{2}dP_2\begin{vmatrix}0 & a_{44} & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & -F_{K2}^{2}dP_2 & 0\\ -1 & -dL & 0\\ 0 & -dK & 0\end{vmatrix}+\right.
$$

$$
\left.\left.\left.+\begin{vmatrix}0 & -F_{K2}^{2}dP_2 & a_{44}\\ -1 & -dL & 0\\ 0 & -dK & -1\end{vmatrix}\right]\right]\right\}+
$$

$$
-F_{L1}^{1}dP_1\left\{a_{21}\left[-a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}\right]\right.+
$$

$$
-a_{22}\left[-a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}\right]+
$$

$$
\left.-\left[a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{44}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}\right]\right\}+
$$

$$
-\left\{a_{21}\left[F_{L2}^{2}dP_2\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & -F_{K2}^{2}dP_2 & -1\\ 0 & -dL & 0\\ -1 & -dK & 0\end{vmatrix}\right]\right.+
$$

$$
-a_{22}\left[F_{L2}^{2}dP_2\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & -F_{K2}^{2}dP_2 & -1\\ -1 & -dL & 0\\ 0 & -dK & 0\end{vmatrix}\right]+
$$

$$
-F_{K1}^{1}dP_1\left[a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}\right]+
$$

$$
\left.+\left[F_{L2}^{2}dP_2\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{44}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & -F_{K2}^{2}dP_2\\ -1 & 0 & -dL\\ 0 & -1 & -dK\end{vmatrix}\right]\right\}
$$

Reduciendo y ordenando términos

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta dL_2 = {} & [F^1_{L1}(a_{22}+a_{44}) - F^1_{K1}(a_{12}+a_{34})]dP_1 + \\
& + [F^2_{K2}(a_{12}+a_{34}) - F^2_{L2}(a_{22}+a_{44})]dP_2 + \\
& + [a_{11}a_{22} + a_{11}a_{44} - a_{21}a_{34} - a_{12}a_{21}]dL + \\
& + [a_{12}a_{44} - a_{22}a_{34}]dK;
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}
$$

como

$$
dL_2 = \left(\frac{\partial L_2}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial L_2}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial L_2}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial L_2}{\partial K}\right) dK. \tag{4.27}
$$

Comparando (4.26) y (4.27) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_1}\right) &= \frac{1}{\Delta}[P_1(F^1_{K1K1}F^1_{L1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1}) + P_2(F^2_{K2K2}F^1_{L1} - F^2_{L2K2}F^1_{K1}]; \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_2}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1(F^1_{K1K1}F^2_{L2} - F^1_{L1K1}F^2_{K2}) - P_2(F^2_{K2K2}F^2_{L2} - F^2_{L2K2}F^2_{K2}]; \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial L}\right) &= \frac{1}{\Delta}[P_1^2(F^1_{K1K1}F^1_{L1L1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1}) + P_1P_2(F^1_{L1L1}F^2_{K2K2} - F^1_{K1L1}F^2_{L2K2})]; \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial K}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1P_2(F^1_{K1K1}F^2_{L2K2} - F^1_{L1K1}F^2_{K2K2})];
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Resolviendo para dK_2:

$$
dK_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & -F^1_{L1}dP_1 & -1 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & -dL & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -dK & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

desarrollando por menores:

$$\Delta dK_2 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & -1 \\ 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -dL & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & 0 & -1 \\ 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ F^1_{L1}dP_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_{33} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & -1 \\ 0 & 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -dL & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -dK & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta dK_2 = a_{11}\left\{ a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 & 0 \\ a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -1 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} - F^1_{K1}dP_1\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 \\ 0 & -1 & -dL & 0 \\ -1 & 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- a_{12}\left\{ a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 & 0 \\ a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -1 & -dL & 0 & 0 \\ 0 & -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} - F^1_{K1}dP_1\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & -1 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & 0 \\ -1 & -1 & -dL & 0 \\ 0 & 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$+ F^1_{L1}dP_1\left\{ a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -1 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} & -1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- \left\{ a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ 0 & -1 & -dL & 0 \\ -1 & 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -1 & -dL & 0 \\ 0 & 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + F^1_{K1}dP_1\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & 0 & -1 & -dL \\ 0 & -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} \right\}$$

$$\Delta dK_2 = a_{11} \left\{ a_{22} \left[a_{33} \begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} + F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right. \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- F^1_{K1}dP_1 \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & 0 \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} - F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \left. + \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 \\ 0 & -1 & -dL \\ -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} \right] \right\} +$$

$$- a_{12} \left\{ a_{21} \left[a_{33} \begin{vmatrix} -F^2_{K2}dP_2 & 0 & -1 \\ -dL & 0 & 0 \\ -dK & 0 & 0 \end{vmatrix} + F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right. \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- F^1_{K1}dP_1 \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & 0 \\ -1 & -dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} - F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & -1 & -dL \\ 0 & 0 & -dK \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] \Bigg\} +$$

$$+ F^1_{L1}dP_1 \Bigg\{ a_{21} \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] +$$

$$- a_{22} \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] +$$

$$- \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{43} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] \Bigg\} +$$

$$- \Bigg\{ a_{21} \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} - F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] +$$

$$- a_{22} \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} - F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] +$$

$$+ F^1_{K1}dP_1 \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] +$$

$$- \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} + F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{43} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg] \Bigg\}$$

Reduciendo y ordenando términos

$$\left.\begin{aligned}\Delta dK_2 = {} & [-F^1_{L1}(a_{21}+a_{43}) + F^1_{K1}(a_{11}+a_{33})]dP_1 + \\ & + [-F^2_{K2}(a_{11}+a_{33}) + F^2_{L2}(a_{21}+a_{43})]dP_2 + \\ & + [-a_{11}a_{43} + a_{21}a_{33}]dL + \\ & + [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{43}]dK;\end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

como

$$dK_2 = \left(\frac{\partial K_2}{\partial P_1}\right)dP_1 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial P_2}\right)dP_2 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial L}\right)dL + \left(\frac{\partial K_2}{\partial K}\right)dK. \qquad (4.30)$$

Comparando (4.29) y (4.30) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial K_2}{\partial P_1}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1(F^1_{K1L1}F^1_{L1} - F^1_{L1L1}F^1_{K1}) - P_2(F^2_{K2L2}F^1_{L1} - F^2_{L2L2}F^1_{K1}]; \\ \left(\frac{\partial K_2}{\partial P_2}\right) &= \frac{1}{\Delta}[P_1(F^1_{K1L1}F^2_{L2} - F^1_{L1L1}F^2_{K2}) + P_2(F^2_{K2L2}F^2_{L2} - F^2_{L2L2}F^2_{K2}]; \\ \left(\frac{\partial K_2}{\partial L}\right) &= \frac{1}{\Delta}[P_1P_2(F^1_{K1L1}F^1_{L2L2} - F^1_{L1L1}F^1_{K2L2})]; \\ \left(\frac{\partial K_2}{\partial K}\right) &= \frac{1}{\Delta}[-P_1^2(F^1_{K1L1}F^1_{L1K1} - F^1_{L1L1}F^1_{K1K1}) - P_1P_2(F^1_{L1K1}F^2_{K2L2} - F^1_{K1K1}F^2_{L2L2})];\end{aligned} \qquad (4.31)$$

Resolviendo para $d\lambda_1$:

$$d\lambda_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & -F^1_{L1}dP_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & -1 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -dL & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -dK & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando por menores:

$$\Delta d\lambda_1 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & -1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -dL & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 & -1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -dL & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- F^1_{L1}dP_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta d\lambda_1 = a_{11}\left\{ a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & 0 & -dL & 0 \\ 0 & -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} + F^1_{K1}dP_1\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 \\ 0 & -1 & 0 & -dL \\ -1 & 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- a_{12}\left\{ a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & 0 & -dL & 0 \\ 0 & -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} + F^1_{K1}dP_1\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & -1 & 0 & -dL \\ 0 & 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} \right\} +$$

$$- F^1_{L1}dP_1\left\{ a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\Delta d\lambda_1 = a_{11} \Bigg\{ a_{22} \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$+ F^1_{K1}dP_1 \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$- \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 \\ 0 & 0 & -dL \\ -1 & -1 & -dK \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 \\ 0 & -1 & -dL \\ -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} +$$

$$+ F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\} +$$

$$- a_{12} \Bigg\{ a_{21} \Bigg[a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ 0 & -dL & 0 \\ -1 & -dK & 0 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{43} & -F^2_{K2}dP_2 & -1 \\ -1 & -dL & 0 \\ 0 & -dK & 0 \end{vmatrix} +$$

$$- F^2_{L2}dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$+ F^1_{K1}dP_1 \Bigg[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$
-\left[-a_{33}\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2\\ -1 & 0 & -dL\\ 0 & -1 & -dK\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & a_{43} & -F^2_{K2}dP_2\\ -1 & -1 & -dL\\ 0 & 0 & -dK\end{vmatrix}\right.+
$$

$$
\left.\left.+F^2_{L2}dP_2\begin{vmatrix}0 & a_{43} & a_{44}\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\right]\right\}+
$$

$$
-F^1_{L1}dP_1\left\{a_{21}\left[-a_{33}\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & a_{43} & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\right]\right.+
$$

$$
-a_{22}\left[-a_{33}\begin{vmatrix}0 & a_{44} & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+a_{34}\begin{vmatrix}0 & a_{43} & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\right]+
$$

$$
\left.-\left[a_{33}\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{44}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}-a_{34}\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{43}\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}\right]\right\}.
$$

Reduciendo y ordenando términos

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta d\lambda_1 = {} & [-F^1_{L1}(a_{21}a_{34}+a_{43}a_{34}-a_{22}a_{33}-a_{33}a_{44})+F^1_{K1}(a_{11}a_{34}-a_{12}a_{33})]dP_1+\\
& +[F^2_{K2}(-a_{11}a_{34}+a_{12}a_{33})+F^2_{L2}(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{44}-a_{12}a_{21}-a_{12}a_{43})]dP_2+\\
& +[a_{11}(a_{22}a_{33}+a_{44}a_{33}-a_{34}a_{43})-a_{12}a_{21}a_{33}]dL+\\
& +[a_{11}a_{22}a_{34}-a_{12}a_{21}a_{34}+a_{12}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{34}a_{43}]dK\,;
\end{aligned}\right\} \tag{4.32}
$$

como

$$
d\lambda_1=\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial P_1}\right)dP_1+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial P_2}\right)dP_2+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial L}\right)dL+\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial K}\right)dK. \tag{4.33}
$$

Comparando (4.32) y (4.33) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_1}\right) &= \frac{1}{\Delta}\{P_1 P_2 F^1_{K1}[-F^1_{L1K1}F^2_{L2L2} + F^1_{L1L1}F^2_{L2K2}]+ \\
&\quad - F^1_{L1}[P_1P_2(F^1_{K1L1}F^2_{L2K2} - F^1_{K1K1}F^2_{L2L2})+ \\
&\quad + P_2^2(F^2_{L2K2}F^2_{K2L2} - F^2_{L2L2}F^2_{K2K2})]\}; \\
\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_2}\right) &= \frac{1}{\Delta}\{F^2_{L2}[P_1^2(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1})+ \\
&\quad + P_1P_2(F^2_{K2K2}F^1_{L1L1} - F^2_{K2L2}F^1_{L1K1})]+ \\
&\quad + F^2_{K2}P_1P_2[F^1_{L1K1}F^2_{L2L2} - F^1_{L1L1}F^2_{L2K2}]\}; \\
\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial L}\right) &= \frac{1}{\Delta}\{P_1^2P_2F^2_{L2L2}(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1})+ \\
&\quad + P_1P_2^2F^1_{L1L1}(F^2_{L2L2}F^2_{K2K2} - F^2_{L2K2}F^2_{K2L2})\}; \\
\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial K}\right) &= \frac{1}{\Delta}\{P_1^2P_2F^2_{L2K2}(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1})+ \\
&\quad + P_1P_2^2F^1_{L1K1}(F^2_{L2L2}F^2_{K2K2} - F^2_{L2K2}F^2_{K2L2})\};
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Resolviendo para $d\lambda_2$:

$$d\lambda_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & -1 & -F^1_{L1}dP_1 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 \\
0 & 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & -F^2_{L2}dP_2 \\
0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -F^2_{K2}dP_2 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -dL \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -dK
\end{vmatrix}$$

desarrollando por menores:

$$\Delta d\lambda_2 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -F^2_{K2}dP_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -dL \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} +$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 \\ 0 & a_{33} & a_{34} & -1 & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -dL \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} +$$

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & -F^1_{K1}dP_1 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & -F^2_{L2}dP_2 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & -F^2_{K2}dP_2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} +$$

$$+ F^1_{L1}dP_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando

$$\Delta d\lambda_2 = a_{11}\left\{a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & -F_{L2}^2 dP_2 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} - F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$- a_{12}\left\{a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & -1 & -F_{L2}^2 dP_2 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} - F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$- \left\{a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -F_{L2}^2 dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ 0 & -1 & 0 & -dL \\ -1 & 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -F_{L2}^2 dP_2 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & -1 & 0 & -dL \\ 0 & 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. - F_{K1}^1 dP_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$+ F_{L1}^1 dP_1 \left\{a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{34} & -1 \\ 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\}$$

$$\Delta d\lambda_2 = a_{11}\left\{ a_{22}\left[a_{33}\begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ 0 & 0 & -dL \\ -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & 0 & -dK \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} + F_{L2}^2 dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] + \right.$$

$$\left. - F_{K1}^1 dP_1 \left[-a_{33}\begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34}\begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right]\right\} +$$

$$- a_{12}\left\{ a_{21}\left[a_{33}\begin{vmatrix} a_{44} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ 0 & 0 & -dL \\ -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} - a_{34}\begin{vmatrix} a_{43} & 0 & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & 0 & -dK \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} + F_{L2}^2 dP_2 \begin{vmatrix} a_{43} & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right] + \right.$$

$$\left. - F_{K1}^1 dP_1 \left[-a_{33}\begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34}\begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right]\right\} +$$

$$- \left\{ a_{21}\left[-a_{33}\begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ 0 & 0 & -dL \\ -1 & -1 & -dK \end{vmatrix} + a_{34}\begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ 0 & -1 & -dL \\ -1 & 0 & -dK \end{vmatrix} + \right.\right.$$

$$+ F_{L2}^2 dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$- a_{22} \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & 0 & -dL \\ 0 & -1 & -dK \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & -F_{K2}^2 dP_2 \\ -1 & -1 & -dL \\ 0 & 0 & -dK \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ F_{L2}^2 dP_2 \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$- F_{K1}^1 dP_1 \left[a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{44} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{43} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right] \Bigg\} +$$

$$+ F_{L1}^1 dP_1 \Bigg\{ a_{21} \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] +$$

$$- a_{22} \left[-a_{33} \begin{vmatrix} 0 & a_{44} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + a_{34} \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{44} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Bigg] \Bigg\}$$

Reduciendo y ordenando términos

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta d\lambda_2 = {} & [F^1_{L1}(a_{22}a_{43} - a_{21}a_{44}) + \\
& + F^1_{K1}(a_{11}a_{44} - a_{12}a_{43}) + \\
& + F^1_{K1}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})]dP_1 + \\
& \\
& + [F^2_{K2}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\
& + F^2_{K2}(a_{22}a_{33} - a_{21}a_{34}) + \\
& + F^2_{L2}(a_{21}a_{44} - a_{22}a_{43})]dP_2 + \\
& \\
& + [a_{43}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\
& + a_{21}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})]dL + \\
& \\
& + [a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\
& + a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})]dK;
\end{aligned}\right\} \tag{4.35}
$$

como

$$
d\lambda_2 = \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_1}\right) dP_1 + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_2}\right) dP_2 + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial K}\right) dK. \tag{4.36}
$$

Comparando (4.35) y (4.36) y sustituyendo las expresiones (4.19):

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_1}\right) = {} & \frac{1}{\Delta}[P_1 P_2 F^1_{K1}(F^1_{L1L1}F^2_{K2K2} - F^1_{L1K1}F^2_{K2L2}) + \\
& + P_2^2 F^1_{K1}(F^2_{L2L2}F^2_{K2K2} - F^2_{L2K2}F^2_{K2L2}) + \\
& + P_1 P_2 F^1_{L1}(F^1_{K1K1}F^2_{K2L2} - F^1_{K1L1}F^2_{K2K2})]; \\
\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial P_2}\right) = {} & \frac{1}{\Delta}[P_1^2 F^2_{K2}(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1}) + \\
& - P_1 P_2 F^2_{K2}(F^1_{K1L1}F^2_{L2K2} - F^1_{K1K1}F^2_{L2L2}) + \\
& + P_1 P_2 F^2_{L2}(F^1_{K1L1}F^2_{K2K2} - F^1_{K1K1}F^2_{K2L2})]; \\
\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial L}\right) = {} & \frac{1}{\Delta}[P_1^2 P_2 F^2_{K2L2}(F^1_{L1L1}F^1_{K1K1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1}) + \\
& + P_1 P_2^2 F^1_{K1L1}(F^2_{L2L2}F^2_{K2K2} - F^2_{K2L2}F^2_{L2K2})]; \\
\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial K}\right) = {} & \frac{1}{\Delta}[P_1^2 P_2 F^2_{K2K2}(F^1_{K1K1}F^1_{L1L1} - F^1_{L1K1}F^1_{K1L1}) + \\
& - P_1 P_2^2 F^1_{K1K1}(F^2_{L2K2}F^2_{K2L2} - F^2_{L2L2}F^2_{K2K2})];
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Si utlizamos funciones de producción del tipo Cobb-Douglas

$$F^1(L_1, K_1) = L_1^\alpha K_1^\beta, \quad \alpha + \beta = 1;$$
$$F^2(L_2, K_2) = L_2^\gamma K_2^\delta, \quad \gamma + \delta = 1;$$

diferenciando

$$\begin{aligned}
F_{L1}^1 &= \alpha L_1^{\alpha-1} K_1^\beta;\\
F_{L1L1}^1 &= \alpha(\alpha-1) L_1^{\alpha-2} K_1^\beta;\\
F_{L1K1}^1 &= \alpha\beta L_1^{\alpha-1} K_1^{\beta-1};\\
F_{K1}^1 &= \beta L_1^\alpha K_1^{\beta-1};\\
F_{K1K1}^1 &= \beta(\beta-1) L_1^\alpha K_1^{\beta-2};\\
F_{K1L1}^1 &= \beta\alpha L_1^{\alpha-1} K_1^{\beta-1};\\
F_{L2}^2 &= \gamma L_2^{\gamma-1} K_2^\delta;\\
F_{L2L2}^2 &= \gamma(\gamma-1) L_2^{\gamma-2} K_2^\delta;\\
F_{L2K2}^2 &= \gamma\delta L_2^{\gamma-1} K_2^{\delta-1};\\
F_{K2}^2 &= \delta L_2^\gamma K_2^{\delta-1};\\
F_{K2K2}^2 &= \delta(\delta-1) L_2^\gamma K_2^{\delta-2};\\
F_{K2L2}^2 &= \delta\gamma L_2^{\gamma-1} K_2^{\delta-1};
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Sustituyendo en (4.18), (4.22), (4.25), (4.28), (4.31), (4.34) y (4.37):

$$\begin{aligned}
\Delta = {} & P_1^2[\alpha(\alpha-1) L_1^{\alpha-2} K_1^\beta \beta(\beta-1) L_1^\alpha K_1^{\beta-2} + \\
& - (\alpha\beta)^2 L_1^{2\alpha-2} K_1^{2\beta-2}] + \\
& + P_1 P_2[\alpha(\alpha-1) L_1^{\alpha-2} K_1^\beta \delta(\delta-1) L_2^\gamma K_2^{\delta-2} + \\
& - \alpha\beta L_1^{\alpha-1} K_1^{\beta-1} \delta\gamma L_2^{\gamma-1} K_2^{\delta-1} + \\
& - \beta\alpha L_1^{\alpha-1} K_1^{\beta-1} \gamma\delta L_2^{\gamma-1} K_2^{\delta-1} + \\
& + \beta(\beta-1) L_1^\alpha K_1^{\beta-2} \gamma(\gamma-1) L_2^{\gamma-2} K_2^\delta] + \\
& + P_2^2[\gamma(\gamma-1) L_2^{\gamma-2} K_2^\delta \delta(\delta-1) L_2^\gamma K_2^{\delta-2} + \\
& - (\delta\gamma)^2 L_2^{2\gamma-2} K_2^{2\delta-2}]
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$= P_1 P_2 \alpha\beta\gamma\delta L_1^\alpha K_1^\beta L_2^\gamma K_2^\delta [(L_1 K_2)^{-1} - (L_2 K_1)^{-1}]^2 > 0$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_1}\right) = {} & \frac{1}{\Delta}[P_1 \alpha\beta L_1^{2\alpha-1} K_1^{2\beta-2} + \\
& + P_2 \gamma\delta L_1^\alpha L_2^\gamma K_1^\beta K_2^{\delta-1} (\alpha L_1^{-1} K_2^{-1} + \beta L_2^{-1} K_1^{-1})] > 0;
\end{aligned} \tag{4.40a}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1\alpha\beta(\gamma L_1^{\alpha}L_2^{\gamma-1}K_1^{\beta-2}K_2^{\delta} + \delta L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta-1}K_2^{\delta-1})+$$
$$- P_2\gamma\delta L_2^{2\gamma-1}K_2^{2\delta-2}] < 0; \tag{4.40b}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha}K_1^{\beta-1}L_2^{\gamma-1}K_2^{\delta}(-L_1^{-1}K_2^{-1} + L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.40c}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial K}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{\gamma}K_1^{\beta-1}K_2^{\delta-1}(L_1^{-1}K_2^{-1} - L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.40d}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1\alpha\beta L_1^{2\alpha-2}K_1^{2\beta-1}+$$
$$+ P_2\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{\gamma-1}K_1^{\beta}K_2^{\delta}(\alpha L_1^{-1}K_2^{-1} + \beta L_2^{-1}K_1^{-1})] > 0; \tag{4.41a}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1\alpha\beta L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta}K_2^{\delta}(L_2^{-1}K_1^{-1} + \delta L_1^{-1}K_2^{-1})+$$
$$- P_2\gamma\delta L_2^{\gamma}K_2^{\delta-1}(\gamma L_2^{\gamma-2}K_2^{\delta} + \delta L_1^{\alpha-2}K_1^{\beta})] < 0; \tag{4.41b}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha-1}K_1^{\beta}L_2^{\gamma-1}K_2^{\delta}(-L_2^{-1}K_1^{-1} + L_1^{-1}K_2^{-1})]; \tag{4.41c}$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial K}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta}K_2^{\delta-1}(L_2^{-1}K_1^{-1} - L_1^{-1}K_2^{-1})]; \tag{4.41d}$$

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1\alpha\beta L_1^{2\alpha-1}K_1^{2\beta-2}+$$
$$- P_2\alpha(L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta}K_2^{\delta-2} + \beta L_1^{2\alpha-1}K_1^{2\beta-2}] < 0; \tag{4.42a}$$

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1\alpha\beta(\gamma L_1^{\alpha}L_2^{\gamma-1}K_1^{\beta-2}K_2^{\delta} + \delta L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta-1}K_2^{\delta-1})+$$
$$P_2\gamma\delta L_2^{2\gamma-1}K_2^{2\delta-2}] > 0; \tag{4.42b}$$

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha-1}K_1^{\beta}L_2^{\gamma}K_2^{\delta-1}(L_1^{-1}K_2^{-1} - L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.42c}$$

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial K}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{\gamma}K_1^{\beta-1}K_2^{\delta-1}(-L_1^{-1}K_2^{-1} + L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.42d}$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}[-P_1\alpha\beta L_1^{2\alpha-2}K_1^{2\beta-1}+$$
$$-P_2\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{\gamma-1}K_1^{\beta}K_2^{\delta}(\alpha L_1^{-1}K_2^{-1}+\beta L_2^{-1}K_1^{-1})]<0; \tag{4.43a}$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1\alpha\beta L_1^{\alpha-1}L_2^{\gamma}K_1^{\beta}K_2^{\delta}(\gamma L_2^{-1}K_1^{-1}+\delta L_1^{-1}K_2^{-1})+$$
$$P_2\gamma\delta L_2^{2\gamma-2}K_2^{2\delta-1}]>0; \tag{4.43b}$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial L}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha-1}K_1^{\beta}L_2^{\gamma-1}K_2^{\delta}(L_1^{-1}K_2^{-1}-L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.43c}$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial K}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{\gamma-1}K_1^{\beta-1}K_2^{\delta}(-L_1^{-1}K_2^{-1}+L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.43d}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{2\alpha-1}K_1^{2\beta-1}L_2^{\gamma-1}K_2^{\delta}(-L_1^{-1}K_2^{-1}+L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.44a}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha-1}L_2^{2\gamma-1}K_1^{\beta}K_2^{2\delta-1}(L_1^{-1}K_2^{-1}-L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.44b}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial L}\right) = 0; \tag{4.44c}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial K}\right) = 0; \tag{4.40d}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_1}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{2\alpha-1}K_1^{2\beta-1}L_2^{\gamma}K_2^{\delta-1}(L_1^{-1}K_2^{-1}-L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.45a}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_2}\right) = \frac{1}{\Delta}[P_1P_2\alpha\beta\gamma\delta L_1^{\alpha}L_2^{2\gamma-1}K_1^{\beta-1}K_2^{2\delta-1}(-L_1^{-1}K_2^{-1}+L_2^{-1}K_1^{-1})]; \tag{4.45b}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial L}\right) = 0; \tag{4.45c}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial K}\right) = 0; \tag{4.45d}$$

Resumiendo

$$
\begin{array}{ll}
\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_1}\right) & > 0 \\
\left(\frac{\partial L_1}{\partial P_2}\right) & < 0 \\
\left(\frac{\partial L_1}{\partial L}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases} \\
\left(\frac{\partial L_1}{\partial K}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2}; \end{cases} \\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_1}\right) & > 0 \\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial P_2}\right) & < 0 \\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial L}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \end{cases} \\
\left(\frac{\partial K_1}{\partial K}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases} \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_1}\right) & < 0 \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial P_2}\right) & > 0 \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial L}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \end{cases} \\
\left(\frac{\partial L_2}{\partial K}\right) & \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 \text{ si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases}
\end{array}
\tag{4.46a}
$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial P_1}\right) \quad < 0$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial P_2}\right) \quad > 0$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial L}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial K_2}{\partial K}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_1}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial P_2}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \end{cases} \tag{4.46b}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial L}\right) \quad = 0$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial K}\right) \quad = 0$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_1}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial P_2}\right) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} > \frac{L_2}{K_2} \\ < 0 & \text{si } \frac{L_1}{K_1} < \frac{L_2}{K_2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial L}\right) \quad = 0$$

$$\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial K}\right) \quad = 0$$

La intensidad relativa del factor, en este caso trabajo L y capital K, es medida por la razón del factor usado con respecto al otro para cada industria, *i.e.*, $\frac{L_j}{K_j}$, $\forall j$. La industria para la cual este cociente es mayor es relativamente intensiva en trabajo; la otra es relativamente intensiva en capital.

En el ejemplo anterior tomemos, por ejemplo, que la industria 1 es más intensiva en trabajo que la industria 2, esto nos lleva a que si se incrementa el factor trabajo para la industria 1 el precio del bien producido también se incrementará con la consecuente reducción en la otra industria. Ahora bien, si $\lambda_1 = W$ y $\lambda_2 = r$ se observa que los salarios aumentan también para dicha industria. Recordando que las funciones de producción fueron del tipo Cobb-Douglas homogéneas de grado 1, este ejemplo nos lleva a los siguientes teoremas fundamentales de comercio internacional:

4.1.2 TEOREMA DE IGUALACION DE LOS PRECIOS DE LOS FACTORES

Las ecuaciones

$$W = W^*(P_1, P_2)$$
$$r = r^*(P_1, P_2)$$

son la base de este teorema, un resultado fundamental del comercio internacional. Considérese dos economías, cada una produciendo los mismos productos y hay comercio entre ellas. En autarquía los precios en las dos economías en general difieren, dando costos marginales de producción diferentes, es decir, FPP diferentes, para las dos economías. (Por supuesto, las preferencias de los consumidores debería diferir sistemáticamente en las dos economías, ocasionando diferentes precios incluso si la función de costo marginal para las dos economías fueran idénticos). Sin embargo, con la apertura comercial los precios tienden a igualarse. Sin considerar costos de transporte u otros costos de transacción por comerciar, las ganancias por comerciar serán agotadas solamente cuando los precios sean idénticos en ambas economías y el consumidor enfrentará el mismo conjunto de precios en ambas economías. Este resultado está implícito en el postulado "se prefiere tener más que menos".

Otro efecto de esto es que el factor de precios tiende a igualarse a los precios. Si los factores fueran libres de moverse, estos lo harían hacia la economía que más paga, depreciando el salario o rentas en una e incrementándolo en la otra. ¿ Qué pasa si los factores no pueden moverse de una economía a otra? Esto es, suponer que que los bienes pueden moverse a bajo costo de una economía a otra pero los factores no pueden emigrar. ¿Convergerían los precios de los factores?

El par de ecuaciones anteriores bajo ciertas condiciones dicen que los precios de los factores también se igualarán en las dos economías cuando los precios son los mismos para ambas economías, a pesar de la inmovilidad de los factores. Las dotaciones de los factores no entran del lado derecho de las ecuaciones y de aquí son irrelevantes en la determinación de los precios de los factores. Sin embargo, la forma funcional específica de $W^*(P_1, P_2)$, y $r^*(P_1, P_2)$ dependerá de las funciones de producción reforzadas en la economía. Si la producción tecnológica, es decir, las funciones de producción reforzadas, *es la misma en ambas economías*, i.e., el comercio toma lugar a causa de las diferentes dotaciones de los factores o diferencias en los gustos del consumidor (o ambas) entre las dos economías, por lo que la forma funcional de las ecuaciones para W^* y r^* serán las mismas para las dos economías. En este caso, los precios de los factores serán los mismos en ambas economías, en donde ellas dependerán en forma idéntica de los precios. Estos resultados dependen críticamente de la homogeneidad lineal de las funciones de producción para cada industria.

4.1.3 TEOREMA DE STOLPER-SAMUELSON (MODELO 2X2)

Hipótesis:

- Se producen dos bienes: y_1 y y_2;
- Usa dos factores: $y_1 = F^1(L_1, K_1)$ y $y_2 = F^2(L_2, K_2)$;
- Tecnologías homogéneas de grado 1 en los dos factores;
- Pleno empleo. Si K y L son las dotaciones de la economía , entonces, $K = K_1 + K_2$ y $L = L_1 + L_2$

  El problema de maximización de beneficios se resuelve en dos etapas:

  1a. etapa. Se minimizan costos para un nivel de producción dado, para la industria j:

$$\begin{aligned}
\text{Min } \ & C^j = WL_j + rK_j, \\
\text{s.a. } \ & y_j = F^j(L_j, K_j), \\
& L_j \geq 0, \\
& K_j \geq 0,
\end{aligned}$$

como ya sabemos esto nos lleva a que

$$\lambda = \frac{W}{F^j_{Lj}} = \frac{r}{F^j_{Kj}},$$

λ el multiplicador lagrangiano correspondiente al problema. Y

$$\frac{W}{r} = \frac{F^j_{Lj}}{F^j_{Kj}},$$

obteniéndose soluciones

$$\begin{aligned}
L_j^* &= L_j^*(W, r, y_j), \\
K_j^* &= K_j^*(W, r, y_j),
\end{aligned}$$

además C^1 es homogénea de grado 1 en W y r. Usando el teorema de Euler:

$$\begin{aligned}
C^j &= WL_j + rK_j, \\
&= \lambda F^j_{Lj} + \lambda F^j_{Kj}, \\
&= \lambda(F^j_{Lj} + F^j_{Kj}), \\
&= \lambda y_j.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

2a. etapa.

$$\text{Max } \ \Pi_j = P_j y_j - C^j, \tag{4.48}$$

de (4.47)

$$\frac{\partial C^j}{\partial y_j} = \lambda,$$

por lo que

$$C^j = \frac{\partial C^j}{\partial y_j} y_j,$$

resolviendo

$$C^j = C_0^j y_j, \tag{4.49}$$

y diferenciando (4.47)

$$\frac{\partial C^j}{\partial W} = L_j,$$
$$\frac{\partial C^j}{\partial r} = \dot{K}_j,$$

y en general

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^j}{\partial W} y_j &= L_j, \\ \frac{\partial C^j}{\partial r} y_j &= K_j, \end{aligned} \tag{4.50}$$

así

$$\begin{aligned} L = L_1 + L_2 &= \frac{\partial C^1}{\partial W} y_1 + \frac{\partial C^2}{\partial W} y_2, \\ K = K_1 + K_2 &= \frac{\partial C^1}{\partial r} y_1 + \frac{\partial C^2}{\partial r} y_2, \\ C^1 &= \frac{\partial C^1}{\partial W} W + \frac{\partial C^1}{\partial r} r, \\ C^2 &= \frac{\partial C^2}{\partial W} W + \frac{\partial C^2}{\partial r} r. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Retomando el problema de maximización (4.48) y sustituyendo (4.49) y (4.50):

$$\Pi_j = P_j y_j - C^j = P_j y_j - C_0^j y_j = (P_j - C_0^j) y_j,$$

diferenciando

$$\frac{d\Pi_l}{dy_j} = P_j - C_0^j = 0,$$

por lo que

$$P_j = C_0^j = \frac{\partial C^j}{\partial W} W + \frac{\partial C^j}{\partial r} r,$$

así

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial C^1}{\partial W} W + \frac{\partial C^1}{\partial r} r, \\ P_2 &= \frac{\partial C^2}{\partial W} W + \frac{\partial C^2}{\partial r} r, \end{aligned} \tag{4.52}$$

donde

$$\begin{aligned} W &= W^*(P_1, P_2), \\ r &= r^*(P_1, P_2), \end{aligned} \tag{4.53}$$

y

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_1^*(W, r, L, K) = y_1^*(P_1, P_2, L, K), \\
y_2 &= y_2^*(W, r, L, K) = y_2^*(P_1, P_2, L, K),
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

de (4.51) y (4.52)

$$
L_1^* \frac{\partial W^*}{\partial P_1} + W^* \frac{\partial L_1^*}{\partial P_1} + K_1^* \frac{\partial r^*}{\partial P_1} + r^* \frac{\partial K_1^*}{P_1} \equiv 1, \tag{4.55a}
$$

y

$$
L_2^* \frac{\partial W^*}{\partial P_2} + W^* \frac{\partial L_2^*}{\partial P_2} + K_2^* \frac{\partial r^*}{\partial P_2} + r^* \frac{\partial K_2^*}{P_2} \equiv 1, \tag{4.55b}
$$

pero como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W^*}{\partial P_1} &= \frac{1}{(L_1^* K_2^* - L_2^* K_1^*)} K_2^*; \quad & \frac{\partial W^*}{\partial P_2} &= -\frac{1}{(L_1^* K_2^* - L_2^* K_1^*)} K_1^*; \\
\frac{\partial r^*}{\partial P_1} &= -\frac{1}{(L_1^* K_2^* - L_2^* K_1^*)} L_2^*; \quad & \frac{\partial r^*}{\partial P_2} &= \frac{1}{(L_1^* K_2^* - L_2^* K_1^*)} L_1^*,
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

sustituyendo (4.56) en (4.55) y reduciendo:

$$
W^* \frac{\partial L_1^*}{\partial P_1} + r^* \frac{\partial K_1^*}{P_1} = W^* \frac{\partial L_2^*}{\partial P_2} + r^* \frac{\partial K_2^*}{P_2}. \tag{4.57}
$$

De (4.56) se puede ver la intensidad de un factor, esto es,

$$
\begin{gathered}
\frac{\left(\frac{\partial r^*}{\partial P_1}\right)}{\left(\frac{\partial W^*}{\partial P_1}\right)} > \frac{\left(\frac{\partial r^*}{\partial P_2}\right)}{\left(\frac{\partial W^*}{\partial P_2}\right)}, \\
\frac{L_2^*}{K_2^*} > \frac{L_1^*}{K_1^*},
\end{gathered}
\tag{4.58a}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\left(\frac{\partial r^*}{\partial P_1}\right)}{\left(\frac{\partial W^*}{\partial P_1}\right)} < \frac{\left(\frac{\partial r^*}{\partial P_2}\right)}{\left(\frac{\partial W^*}{\partial P_2}\right)}, \\
\frac{L_2^*}{K_2^*} < \frac{L_1^*}{K_1^*},
\end{gathered}
\tag{4.58b}
$$

si la industria 1 es más intensiva en trabajo que la industria 2 de (4.56) se sigue que para

$$
\begin{gathered}
L_1^* K_2^* - L_2^* K_1^* > 0, \\
\Rightarrow \frac{\partial W^*}{\partial P_1} > 0 \;\text{ y }\; \frac{\partial r^*}{\partial P_1} < 0.
\end{gathered}
\tag{4.59}
$$

Obsérvese además que

$$
\begin{gathered}
P_1 = L_1 W + K_1 r > W L_1, \\
\frac{P_1}{W} \frac{\partial W}{\partial P_1} > \frac{L_1 K_2}{L_1 K_2 - L_2 K_1}, \\
\frac{1}{\frac{1 - L_2 K_1}{L_1 K_2}} > 1,
\end{gathered}
$$

por lo que

$$\frac{\partial W}{W} > \frac{\partial P_1}{P_1}. \tag{4.60}$$

De (4.59) y (4.60) **si la industria 1 es relativamente más intensiva en el trabajo que la industria 2, el precio del bien que produce la industria 1 y los salarios de toda la economía se incrementan, y el crecimiento es más que proporcional en los salarios. Mientras esto ocurre el precios del otro factor caerá**. Los resultados anteriores son el teorema general de Stolper-Samuelson.

4.1.4 TEOREMA DE RYBCZYNSKI

Hipótesis

- Produce dos bienes con dos factores;
- Las funciones de producción presentan rendimientos constantes a escala;
- Las industrias son competitivas;
- Pleno empleo;
- Una industria es más intensiva en alguno de los factores que la otra;
- Los precios y los precios factor no cambian, las que cambian son las dotaciones;

En general $L_1 = a^*_{L1}y_1$, $K_1 = a^*_{K1}y_1$, $L_2 = a^*_{L2}y_2$ y $K_2 = a^*_{L2}y_2$, así

$$\begin{aligned} L &= a^*_{L1}y_1 + a^*_{L2}y_2, \\ K &= a^*_{K1}y_1 + a^*_{K2}y_2, \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= a^*_{L1}W + a^*_{K1}r, \\ P_2 &= a^*_{L2}W + a^*_{K2}r. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Derivando (4.62) respecto a L:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial L} &= 0 = a^*_{L1}\frac{\partial W}{\partial L} + a^*_{K1}\frac{\partial r}{\partial L}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial L} &= 0 = a^*_{L2}\frac{\partial W}{\partial L} + a^*_{K2}\frac{\partial r}{\partial L}, \end{aligned} \tag{4.63}$$

resolviendo el sistema

$$\frac{\partial W}{\partial L} = \frac{\partial r}{\partial L} = 0. \tag{4.64a}$$

Derivando (4.62) respecto a K:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial K} &= 0 = a^*_{L1}\frac{\partial W}{\partial K} + a^*_{K1}\frac{\partial r}{\partial K}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial K} &= 0 = a^*_{L2}\frac{\partial W}{\partial K} + a^*_{K2}\frac{\partial r}{\partial K}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

resolviendo el sistema

$$\frac{\partial W}{\partial K} = \frac{\partial r}{\partial K} = 0. \tag{4.64b}$$

Derivando (4.61) respecto a L:

$$\begin{aligned} 1 &= a^*_{L1}\frac{\partial y_1}{\partial L} + a^*_{L2}\frac{\partial y_2}{\partial L}, \\ 0 &= a^*_{K1}\frac{\partial y_1}{\partial L} + a^*_{K2}\frac{\partial y_2}{\partial L}, \end{aligned} \tag{4.66}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial L} &= \frac{1}{a^*_{L1}a^*_{K2} - a^*_{L2}a^*_{K1}} a^*_{K2}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial L} &= -\frac{1}{a^*_{L1}a^*_{K2} - a^*_{L2}a^*_{K1}} a^*_{K1}. \end{aligned} \tag{4.67a}$$

Derivando (4.61) respecto a K:

$$\begin{aligned} 0 &= a^*_{L1}\frac{\partial y_1}{\partial K} + a^*_{L2}\frac{\partial y_2}{\partial K}, \\ 1 &= a^*_{K1}\frac{\partial y_1}{\partial K} + a^*_{K2}\frac{\partial y_2}{\partial K}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial K} &= -\frac{1}{a^*_{L1}a^*_{K2} - a^*_{L2}a^*_{K1}} a^*_{L2}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial K} &= \frac{1}{a^*_{L1}a^*_{K2} - a^*_{L2}a^*_{K1}} a^*_{L1}, \end{aligned} \tag{4.67b}$$

suponiendo que la industria 1 es intensiva en el trabajo, entonces

$$a^*_{L1}a^*_{K2} - a^*_{L2}a^*_{K1} > 0,$$

y de aquí

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial L} > 0; \quad \frac{\partial y_2}{\partial L} < 0, \\ \frac{\partial y_1}{\partial K} < 0; \quad \frac{\partial y_2}{\partial K} > 0. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Observando que

$$\frac{\partial W^*}{\partial P_i} = \frac{\partial y_i^*}{\partial L},$$

las condiciones de reciprocidad, para las cuales no se supuso la homogeneidad de las funciones de producción, reflejan el caracter dual del teorema de Rybczynski respecto del de Stolper-Samuelson.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial P_1} = \frac{\partial y_1}{\partial L}; \quad \frac{\partial W}{\partial P_2} = \frac{\partial y_2}{\partial L}, \\ \frac{\partial r}{\partial P_1} = \frac{\partial y_1}{\partial K}; \quad \frac{\partial r}{\partial P_2} = \frac{\partial y_2}{\partial K}. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Si seguimos suponiendo que las dotaciones de trabajo se incrementan y la industria 1 es intensiva en el trabajo entonces la producción de la industria 1 no solamente se incrementa sino que se incrementará en una tasa mayor a la que se incrementa el trabajo, esto es, de (4.61) y (4.67b)

$$\frac{L}{y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial L}\right) = \left(a^*_{L1} + a^*_{L2}\frac{y_2}{y_1}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial L}\right) > a^*_{L1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial L}\right) = \frac{1}{1 - \frac{a^*_{K1}a^*_{L2}}{a^*_{L1}a^*_{K2}}} > 1,$$

por lo que

$$\left(\frac{\partial y_1}{y_1}\right) > \left(\frac{\partial L}{L}\right). \tag{4.71}$$

Nótese que en este teorema se presenta un desplazamiento de la FFP ya que las dotaciones cambian, mientras que en el de Stolper-Samuelson no lo hay, pues lo que cambia es el precio relativo.

4.1.5 TEOREMA DE HECKSHER-OHLIN

Hipótesis

- Hay dos economías, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^*$;
- Produce dos bienes con dos factores;
- Las tecnologías son idénticas en el sentido que la función de producción de un sector es la misma en ambas economías;
- Las economías tienen idénticas y homotéticas preferencias, las cuales son representadas por una función de utilidad (social) creciente cuasi-cóncava;
- La función de producción de cada sector presenta rendimientos constantes a escala;
- Perfecta movilidad de los factores dentro de una economía, pero no entre ellas;
- Todos los mercados son perfectamente competitivos;
- Pleno empleo en cada economía;

entonces, **cada economía exportará el bien que utilice su factor más intensivo y abundante**. Para cada economía se tiene

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{E} & \mathcal{E}^* \\
a_{L1}W + a_{K1}r = P_1, & a_{L1}W^* + a_{K1}r^* = P_1, \\
a_{L2}W + a_{K2}r = P_2, & a_{L2}W^* + a_{K2}r^* = P_2, \\
a_{L1}y_1 + a_{L2}y_2 = L, & a_{L1}y_1^* + a_{L2}y_2^* = L^*, \\
a_{K1}y_1 + a_{K2}y_2 = K, & a_{K1}y_1^* + a_{K2}y_2^* = K^*,
\end{array}$$

Dado que son las mismas tecnologías, sean

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{K1} & a_{K2} \\ a_{L1} & a_{L2} \end{pmatrix}, \tag{4.72}$$

$$\mathbf{y_w} = \begin{pmatrix} y_1 + y_1^* \\ y_2 + y_2^* \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v_w} = \begin{pmatrix} K + K^* \\ L + L^* \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} K_w \\ L_w \end{pmatrix}; \tag{4.73}$$

con

$$\mathbf{y_w} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v_w}, \tag{4.74}$$

si las prefecrencias son homotéticas $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{y_w}$. Sea

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} <\mathbf{P}, \mathbf{C}> = \mathbf{P}^T\mathbf{C} &= <\mathbf{P}, \alpha\mathbf{y_w}>, \\ &= \alpha <\mathbf{P}, \mathbf{y_w}>, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{<\mathbf{P}, \mathbf{C}>}{<\mathbf{P}, \mathbf{y_w}>} &= \frac{<\mathbf{P}, \mathbf{y}>}{<\mathbf{P}, \mathbf{y_w}>}, \\ &= \frac{<\mathbf{P}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}>}{<\mathbf{P}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v_w}>}, \\ &= \frac{<(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{P}, \mathbf{v}>}{<(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{P}, \mathbf{v_w}>}, \end{aligned}$$

sea

$$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\alpha = \frac{\beta_1 K + \beta_2 L}{\beta_1 K_w + \beta_2 L_w} = \frac{\beta_1 K_w \left(\frac{K}{K_w}\right) + \beta_2 L_w \left(\frac{L}{L_w}\right)}{\beta_1 K_w + \beta_2 L_w},$$

donde $\left(\frac{K}{K_w}\right)$ y $\left(\frac{L}{L_w}\right)$ son las medias ponderadas, por lo tanto α está entre $\left(\frac{K}{K_w}\right)$ y $\left(\frac{L}{L_w}\right)$.
Considere el vector de exportaciones netas

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{C}, \\ &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} - \alpha\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v_w}, \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v_w}), \\ &= \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} K - \alpha K_w, \\ L - \alpha L_w \end{pmatrix}, \\ &= \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} K_w\left(\frac{K}{K_w} - \alpha\right), \\ L_w\left(\frac{L}{L_w} - \alpha\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

resolviendo (4.75), el discriminante del sistema es

$$\Delta = a_{K1}a_{L2} - a_{K2}a_{L1}, \tag{4.76}$$

como se ha supuesto que la industria 1 es intensiva en el trabajo, entonces $\Delta < 0$, además

$$\begin{aligned} x_1\Delta &= a_{L2}K_w\left(\frac{K}{K_w} - \alpha\right) - a_{K2}L_w\left(\frac{L}{L_w} - \alpha\right), \\ &= -a_{L1}K_w\left(\frac{K}{K_w} - \alpha\right) + a_{K1}L_w\left(\frac{L}{L_w} - \alpha\right), \end{aligned} \tag{4.77}$$

de (4.77)

$$\frac{a_{L1}}{a_{K1}} > \frac{L_w\left(\frac{L}{L_w} - \alpha\right)}{K_w\left(\frac{K}{K_w} - \alpha\right)},$$

por lo que $x_2 > 0$. Así pues, la industria que es intensiva en el trabajo junto con que la economía es abundante en L tiene exceso de oferta del bien correspondiente, por lo que hay exportación de dicho bien.

CAPITULO 5

A lo largo del presente trabajo se han resueltos varios modelos, primero para una econimía cerrada abriéndola posteriormente, llegando a la aplicación de los cuatro teoremas fundamentales del Comercio Internacional.

5.1 CONCLUSIONES

Resultado 1.

En una economía cerrada donde se considera como único factor de producción al trabajo y se consumen dos bienes, cuando el salario se incrementa el consumo de los dos bienes crece; lo mismo sucede si se incrementa el factor trabajo. Pero en el caso de que el precio de un bien, digamos el bien 1, se incrementa, su consumo disminuye aumentando el consumo del bien 2. Luego, al incrementarse el consumo del bien 2 su precio decrece sin afectar el consumo del bien 1. Ecuaciones (2.71-2.78).

Resultado 2.

Cuando se comercia entre países, siendo la economía no-doméstica intensiva en trabajo en la industria que produce el bien 1 y además $\frac{a_{L1}}{a_{L2}} < \frac{P_1}{P_2} < \frac{a^*_{L1}}{a^*_{L2}}$, en la economía doméstica el consumo del bien 1 producido internamente decrece a medida que la unidad de trabajo requerida para producirla domésticamente aumenta, ya que es más barato importar dicho producto que producirlo internamente. Si el consumo de dicho bien aumenta su precio baja. Además la fuerza laboral total se incrementa pero se va hacia la industria que produce el bien 2, creciendo el consumo del bien 2 a medida que baja su precio, especializándose en la producción del bien 2. Ecuaciones (2.164-2.181).

Resultado 3.

Cuando nos ponemos en el lugar del productor y suponemos dos factores para la producción de algún bien, en este caso trabajo y capital, y la economía es cerrada, los signos de los resultados de la estática comparativa van a depender de la tecnología, ecuaciones (3.49-3.50). Cuando se comercia y la economía doméstica solo produce el bien 1 y no hay movilidad de trabajo entre las economías, si el costo de producción se incrementa, la fuerza laboral disminuye y además la tecnología junto con la renta de capital no es suficientemente fuerte los salarios caen, ecuación (3.75a). Pero si la tecnología y la renta de capital son suficientemente fuertes el trabajo especializado será bien pagado, ecuación (3.75b). E independientemente la renta de capital cae cuando la fuerza laboral decrece, ecuación (3.76c). Por lo que la riqueza estará en función del trabajo especializado para una tecnología especializada.

Resultado 4.

Si el costo de producción aumenta y la fuerza laboral también los salarios disminuirán sin importar el factor capital, esto es, mano de obra barata, ecuación (3.75c). Si ahora la renta de capital, los salarios y la tecnología son suficientemente fuertes la recta de capital crece, ecuación (3.76a). Pero sino la renta de capital decrece, ecuación (3.76b).

Resultado 5.

Si el costo de producción se incrementa junto con el capital la renta de capital disminuye, ecuación (3.78c). Si además el salario, la tecnología y la renta de capital son suficientemente fuertes los salarios se incrementarán, ecuación (3.77a). Pero si no es así los salarios caerán, ecuación (3.77b).

Resultado 6.

Si el costo de producción sube y la dotación de capital baja los salarios bajan, ecuación (3.77c). Si además el salario y la tecnología son suficientemente fuertes la renta de capital sube, ecuación (3.78b). Pero sino la renta de capital se incrementa, ecuación (3.78a).

Resultado 7.

Desde el punto de vista del consumidor por ejemplo, si el consumo en el bien 1 se incrementa y el salario también, el precio del bien disminuye. Si el consumo del bien 1 se incrementa y la fuerza laboral en la industria que lo produce aumenta, el precio del bien disminuye. Si el consumo del bien 1 aumenta y la renta de capital también, el precio del bien disminuye. Si el consumo del bien 1 aumenta y la dotación de capital para producirlo también, el precio disminuye. (Ecuaciones 3.132). Al comerciar las economías tenderáa a especializarse cada una en la producción de un bien, ecuaciones (3.129-3.131, 3.155-3.158 y 3.159). Por lo que siempre hay ventajas económicas al comerciar independientemente de las tecnologías.

Resultado 8.

Para el caso de un modelo 2 x 2, *i.e.*, dos bienes y dos factores, en una economía cerrada, de las ecuaciones (4.46), el precio del bien 1 se incrementa a medida que lo hace la fuerza laboral para producirlo mientras que el precio del bien 2 disminuye. Si la industria 1 es intensiva en trabajo respecto a la industria 2, el incremento en la fuerza laboral total será debido a esa industria. Además, un aumeto en la fuerza laboral en esa industria traerá una disminución en la dotación del capital total pero no en la dotación de capital para la industria 1. Por lo que la economía tiende a especializarse en la industria más intensiva en trabajo. Además el salario se incrementa mientras que para el otro factor sucede lo contrario. Lo que esta de acuerdo con los teoremas de Stolper-Samuelson, Rybczynski y Hecksher-Ohlin.

BIBLIOGRAFIA

TEXTOS

Becker, Gary S.; Teoría Económica; Fondo de Cultura Económica; México, D.F.; 1987.

Markusen James R., Melvin James R.; The Theory of International Trade; Harper-Row Publishers, N.Y.; 1988.

Krugman Paul R., Obstfeld Maurice; International Economics Theory and Policy; Harper Collins Plublishers; Segunda edición; N.Y.; 1991.

Intriligator Michael D.; Mathematical Optimization and Economic Theory; Prentice-Hall, Inc.; N.J.; 1971.

Friedman Milton; Teoría de Precios; Editorial Ayotla; México, D.F.; 1976.

Dixit A.K., Norman V.; Theory of International Trade; Cambridge University Press; Great Britain; 1993.

Silberberg E.; The Structure of Economics; McGraw-Hill, Inc., N.Y.; 1990.

Meade, J.E.; A Geometry of International Trade; Allen-Unwin; London; 1952.

Johnson, H.G.; International Trade, Income Distribution and the Offer Curve; Manchester School; 1959.

Lerner, A.P.; Essays in Economic Analysis; Macmillan; London; 1953.

Bazaraa, M.S.; Nonlinear Programming; John Wiley and Sons; N.Y.; 1979.

Dowling, E.T.; Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economics; McGraw-Hill, Inc.; N.Y.; 1992.

Chiang, A.C.; Fundamental Methods of Mathematical Economics; McGraw-Hill, Inc.; N.Y.; 1974.

ARTICULOS

Stolper, W. and Samuelson, P.A.; Protection and real wages; Review of Economic Studies, 9 (1), 58-73; 1941.

Samuelson, P.A.; Prices of factors and goods in general equilibrium; Review of Economic Studies, 21 (1), 1-20; 1953.

Uzawa, H.; Duality principles in the theory of cost and production; International Economic Review, 5 (2),216-220; 1964.

Woodland, A.D.; Joint outputs, intermediate inputs and international trade theory; International Economic Review, 18 (3), 517-533; 1977.

Woodland, A.D.; A dual approach to equilibrium in the production sector in international trade theory; Canadian Journal of Economics, 10 (1), 50-68; 1977.