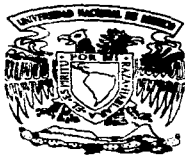


32
29

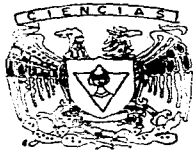


**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**
FACULTAD DE CIENCIAS

**"LA MAGNETOHIDRODINAMICA
DE LOS PLASMAS POLVOSOS"**



T E S I S
Que para obtener el Título de:
F I S I C O
P r e s e n t a:
HERIBERTO MARIN ARELLANO

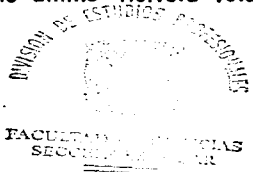


DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez

México, D. F.

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"La Magnetohidrodinámica de los Plasmas Polvosos"

realizado por MARIN ARELLANO HERIBERTO

con número de cuenta 7218938-4 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ

Propietario
DR. ENRIQUE CAMPS CARVAJAL

Suplente
DR. NIKOLAI KOTSAREMKO

Suplente
DR. JESUS GALINDO TREJO

DRA. DOLORES MARAVILLA MEZA

Consejo Departamental de Física

P.A. DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**A MI PADRE:
ING. HERIBERTO MARÍN GONZALEZ.**

**A MI MADRE:
MARIA LUZ ARELLANO ACOSTA.**

**A MIS HERMANOS:
GUSTAVO, MARCO, ELSA, MARTHA, BERTHA,
ANGELES, MONICA Y EUGENIO.**

**CON AMOR A MI ESPOSA:
FLOR HERNANDEZ CARBALLIDO.**

**EL PRESENTE TRABAJO SE REALIZÓ
EN EL INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
U.N.A.M., BAJO LA DIRECCIÓN DEL
DR. JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ.**

AGRADECIMIENTOS.

Expreso mi agradecimiento al Dr. José Julio Emilio Herrera Velazquez por la excelente asesoría y por las facilidades y apoyos brindados para la realización de este trabajo.

En igual forma, agradezco al Dr. Enrique Camps Carvajal, al Dr. Nikolai Kotsaremko, al Dr. Jesús Galindo Trejo y a la Dra. Dolores Maravilla Meza la revisión crítica del trabajo de tesis, así como por sus valiosas observaciones.

ÍNDICE

I.- INTRODUCCIÓN.

I-1. Aspectos básicos del plasma y atrapamiento.	1
I-2. Formación y crecimiento de partículas.	3
I-3. Problemas de partículas.	6
I-4. Efectos de las partículas de polvo en plasmas.	6
I-5. Plasmas polvosos en el espacio.	8
I-6. Condiciones de plasma y valores de parámetros para plasmas de laboratorio y astrofísicos.	9
I-7. Organización y desarrollo del trabajo.	11

II.- ECUACIONES DE FLUIDO-MODELO CINÉTICO.

II-1. Introducción.	13
II-2. Ecuación de Boltzman.	13
II-3. Modelo de fluido.	16
II-3a. Momentos de la ecuación de Boltzman, ecuaciones de conservación y convectivas.	19
II-4. Ecuaciones macroscópicas básicas.	28
II-5. Conclusiones.	30

III.- MODOS MAGNETOACÚSTICOS EN UN PLASMA POLVOSO MAGNETIZADO.

III-1. Introducción.	31
III-2. Aproximación Magnetohidrodinámica (MHD).	32
III-2a. Ecuaciones para los modos magnetoacústicos.	32
III-2b. Relación general de dispersión.	36
III-2c. Modos para plasma polvoso no magnetizado.	37
III-2d. Modos magnetoacústico-polvosos.	39
III-2e. Modo magnetoacústico-iónico-polvoso.	44
III-2f. Modo magnetoacústico-polvoso (caso especial).	44
III-2g. Discusión.	46
III-3. Aproximación Electro-magnetohidrodinámica (EMHD).	52
III-3a. Régimen de baja frecuencia.	52
III-3b. Régimen de frecuencia media.	53
III-3c. Régimen de alta frecuencia.	56
III-4. Conclusiones.	59

IV.- MAGNETOHIDRODINÁMICA DE PLASMAS POLVOSOS.

IV-1. Introducción .	61
IV-2. Ecuaciones para los modos de extremada baja frecuencia.	61
IV-3. Relación general de dispersión..	64
IV-4. Caos límite .	66
IV-4a. Modo Magnetoacústico(rápido).	68
IV-5. Conclusiones.	69

V.- CONCLUSIONES: IMPLICACIONES Y PERSPECTIVAS. **70**

REFERENCIAS. **71**

CAPÍTULO I.

INTRODUCCIÓN.

En los trabajos pioneros sobre plasmas, por los años 20's, Irving Langmuir reportó la existencia de nubes de partículas atrapadas en plasmas de argón de baja presión, creado por descargas de alto voltaje. Las partículas se formaron por la condensación de tungsteno evaporado del cátodo de la descarga, (A.Bouchole1993). Antes de las recientes necesidades prácticas de entender la física de plasmas polvosos, había muy pocos estudios de laboratorio que permitieran comprender el cómo las nubes de partículas quedaban atrapadas en el plasma y lejos se estaba de saber los diversos efectos a los que dan origen dichas partículas. Cincuenta años después, Karl George de la Queen's University de Belfast empezó a estudiar la interacción plasma-partícula y el atrapamiento asociado de nubes de partículas en descargas de alto voltaje. Actualmente, se ha incrementado la investigación de los plasmas polvosos vertiginosamente ya que cada vez es más importante controlar la formación, crecimiento y atrapamiento de partículas de polvo en los plasmas para el desarrollo de tecnologías industriales, su conocimiento es incluso relevante en la astrofísica. En este tipo de sistemas se tiene, además de las diversas especies de iones y de electrones, partículas cargadas de varias micras, que son cargadas por varios procesos, como el de ligadura de electrones a la superficie de la partícula de polvo via colisiones, la foto-ionización, flujo de corrientes de plasma y emisión de campo. El estudio de los plasmas polvosos ha emergido como un campo de investigación con intensa actividad para comprender los procesos físicos observados en los plasmas de laboratorio, espaciales y astronómicos, (Goertz1989; Mendis & Rosenberg 1994). Actualmente existe una extensa literatura de investigaciones realizadas que pone de manifiesto los avances obtenidos en el conocimiento de los plasmas polvosos.

En el presente capítulo se exponen seis tópicos que ilustran de forma compacta y sintetizada aspectos relevantes de los plasmas polvosos. En la sección final, se hace la descripción general del presente trabajo.

I-1. Aspectos básicos del plasma y atrapamiento.

Considérese un gas a baja presión confinado dentro de un recipiente de vacío, eléctricamente aislado, sometido a una descarga eléctrica estacionaria de alto voltaje entre dos electrodos. La descarga eléctrica crea, por medio de colisiones, un plasma constituido por iones y electrones. El gas se ioniza débilmente, entre una milésima a diezmilésima parte, mediante colisiones entre los electrones y los átomos neutros. Para mantener tal ionización, dependiendo del gas usado para formar el plasma, sólo se requiere una energía de decenas de eV en una fracción pequeña de los electrones libres mientras que la energía media de los electrones generalmente es de eV.

Debido a la transferencia de energía por los choques entre iones y las partículas neutras, que son de masa comparable, ambas especies permanecen en equilibrio térmico una con respecto a la otra y con las paredes del recipiente que confina al plasma. La naturaleza estacionaria del plasma implica que la razón o tasa de ionización en el volumen de descarga es igual a la tasa de pérdida de carga del plasma hacia las paredes del recipiente de vacío:

$$\text{tasa de ionización} = \text{tasa de pérdida de carga.}$$

Para que el plasma permanezca neutro, el flujo de electrones e iones que escapan del plasma debe ser el mismo, a pesar de la velocidad de los electrones que es de 1000 a 10000 veces mayor que la de los iones:

$$\text{flujo de electrones} = \text{flujo de iones.}$$

Esto significa que debe haber una barrera de energía para impedir que demasiados electrones alcancen las paredes del recipiente o los electrodos (figura uno). Esta barrera de energía debe ser unas cuantas veces la energía promedio de los electrones y es formada por "capas" ("sheaths") electrostáticas delgadas, regiones de gas ionizado no neutro, entre el plasma y las paredes y, entre el plasma y los electrodos.

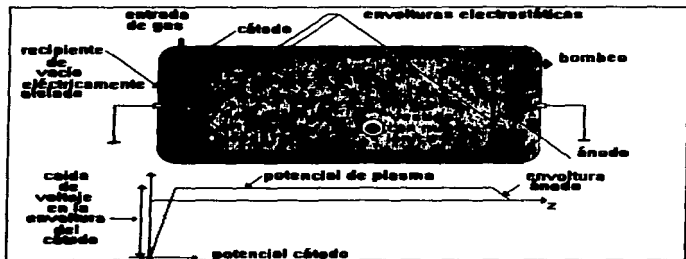


Fig. 1 La partícula se carga negativamente y es atrapada en el plasma. Una partícula pequeña - así es "vestida" por una nube de iones, de tal manera que la región perturbada del plasma es mucho más grande que la partícula misma.

Así, las capas electrostáticas delgadas, que son negativas con respecto al plasma, se interponen para repeler muchos de los electrones que alcanzan las orillas del plasma. Estas capas están asociadas con caídas de potencial en el potencial electrostático enfrente de los electrodos. El volumen del plasma en sí mismo es rigurosamente equipotencial y totalmente neutro, los electrodos y las paredes permanecen negativas en comparación con el potencial del plasma.

Por otro lado, se pueden aplicar argumentos similares a partículas de polvo inmersas en el volumen del plasma. Tales partículas pueden crecer espontáneamente en el plasma o pueden ser inyectadas dentro de la descarga por las paredes o por flujos de gas. El equilibrio electrostático en este sistema es alcanzado cuando los flujos netos de electrones y iones cayendo sobre la superficie de la partícula de polvo son los mismos. Esto requiere que el potencial de la superficie de la partícula sea negativo comparado con el potencial del plasma. La partícula de polvo alcanza el potencial negativo necesario debido a la ligadura de electrones sobre su superficie, en la cual, puede acumular un gran número de éstos. La energía de la barrera es unas cuantas veces la energía promedio de los electrones. Debido a esta carga negativa las partículas de polvo son repelidas, como los electrones, por las envolturas (sheaths) que confinan al plasma, quedando así atrapadas en su interior.

Además, cada partícula cargada negativamente es rodeada por una nube de iones positivos que la blindan del plasma. Esto es conocido como blindaje de Debye. Una inspección más cercana del equilibrio plasma-partícula muestra que la caída de potencial entre el plasma y la superficie de la misma se logra en una envoltura que la rodea (similar a la envoltura en las orillas del plasma). Esta envoltura, que repele electrones y atrae iones, está caracterizada por un carga positiva igual a la carga negativa de la partícula. Por lo tanto el sistema partícula-nube es neutro. En muchos estudios recientes se ha observado que el atrapamiento de estas partículas "vestidas" se localiza fuertemente cerca de las envolturas del plasma. Se entiende, este fenómeno, como el resultado de fuerzas (tales como flujos de iones positivos) empujando a las partículas aisladas hacia las paredes, sólo que son repelidas como se mencionó anteriormente. Este efecto de atrapamiento explica porqué las partículas de polvo tan comunes en las descargas y las introducidas por el sistema de alimentación de gas dentro de la descarga son almacenadas en el volumen del plasma.

I-2. Formación y crecimiento de partículas.

Uno de los aspectos menos entendidos de los plasmas polvosos es de dónde provienen las partículas, en su formación, son probables muchos procesos diferentes. Se han efectuado, en colaboración, diversos experimentos por grupos universitarios: Orléans en Francia, Eindhoven en Holanda, Barcelona en España, entre otros, sobre la formación de partículas de polvo en un plasma de argón-selenio (Ar/SiH_4). La figura 2 describe esquemáticamente el dispositivo utilizado para la realización del experimento efectuado en Orleans: El flujo de gas en el reactor es laminar, desde el electrodo hasta el fondo de la caja a tierra que rodea a este electrodo, el plasma se forma aplicando al electrodo un pulso de radio frecuencia (13.56 MHz). La presión de operación es del orden de 100 Torr y la presión parcial del selenio es baja (<5%).

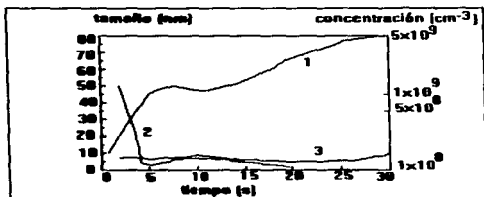


Fig. 3a Tamaño de partículas(1) y concentración(2) como función de la duración del plasma. La desviación estándar (3) muestra una distribución del tamaño bien definida a los primeros 10 segundos que su evolución está caracterizada por razones de crecimiento muy diferentes.



Fig. 3b. Micrografía de partículas de 20 nm mostrando evidencia del fenómeno de aglomeración en los primeros cinco segundos.

Otros estudios más detallados de microscopía electrónica de transmisión muestran que en la etapa de coagulación las partículas contienen nanocristales de tamaño bien definido (del orden de 2nm), mientras que en la etapa de crecimiento (>50nm) la naturaleza amorfa del material predomina. Las observaciones anteriores sugieren un proceso inicial de formación de los cristales elementales, luego una coagulación subsecuente que conlleva a la formación de partículas de tamaño creciente y a un paso final de crecimiento por deposición sobre la superficie que da como resultado capas delgadas de silicón amorfo. El paso inicial es crucial para la formación de la partícula de polvo.

Por otro lado, mediante experimentos para el estudio detallado de la formación de dichos cristales, se han sugerido diversas rutas de formación y crecimiento de las partículas de polvo en un plasma como resultado de las investigaciones realizadas por: Mary Louise Mandich de AT&T Bell Laboratories, Christophe Hollenstein en el French École Polytechnique y el École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) y Jerome Perrin del École Polytechnique, entre otros. El seguimiento de tales resultados no entra ya en el propósito del presente trabajo.

I-3. Problemas de partículas.

Los anteriores efectos de formación, atrapamiento y crecimiento de partículas dan origen a los plasmas polvosos, los cuales son comunes en plasmas de baja temperatura en el laboratorio. El control de la formación y atrapamiento de las partículas de polvo en los plasmas es crucial para muchas tecnologías industriales. En los plasmas de laboratorio, las partículas de polvo generalmente aparecen como impurezas que conducen a serios problemas de contaminación en procesos tecnológicos de manufactura de semiconductores, (Cartile et al. 1991; Bouchole et. al 1991; Sheehan, Carrillo & Heidbrink 1990). Por ejemplo, el procesado con plasmas es esencial para la fabricación de circuitos integrados modernos. No obstante, que se toman precauciones muy costosas para evitar la contaminación, la formación y/o atrapamiento de partículas puede conllevar a efectos de polución en el procesado con plasmas en reactores. La formación de partículas en esta tecnología limita la calidad y la tasa de deposición de las capas. La alta concentración de especies activas necesarias para la deposición de películas delgadas conduce al agrupamiento y crecimiento de partículas y su atrapamiento electrostático en el plasma. Si la razón o tasa de deposición es muy alta "nieva" en el reactor y la calidad de las capas delgadas es muy baja. En la industria micro-electrónica el proceso inducido de polución de partículas es también un serio problema.

I-4. Efectos de las partículas de polvo en plasmas.

Con respecto a los plasmas polvosos de laboratorio, se puede decir que se caracterizan por ser gases parcialmente ionizados de baja temperatura, cuyos constituyentes son electrones, iones y particulas de polvo cargadas por lo general, negativamente debido (como se

mencionó) a la ligadura de electrones del fondo del plasma sobre la superficie de los granos de polvo mediante colisiones. La presencia de granos de polvo cambia los parámetros del plasma, tales como las frecuencias características y las escalas espaciales, así como los procesos colectivos de estos sistemas, (N.F.Cramer & V.Vladimirov 1996). El experimento descrito por la figura 2 se puede usar no sólo para investigar la formación y el crecimiento de las partículas sino para el estudio en sí de las propiedades de los plasmas polvosos. Se pueden producir plasmas de argón con tamaños de partículas y concentración bien definidas. Las mediciones de concentración de electrones libres indican una gran diferencia entre la medida para los plasmas "limpios" de argón y la medida en ese plasma pero polvoso. La concentración de iones positivos siempre es la misma en ambos plasmas, del orden por ejemplo de $5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Pero la densidad de electrones libres, que también es de $5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ en el plasma limpio, es menor que el 10% de ese valor en un plasma polvoso. El balance de carga en el plasma se mantiene esencialmente por las partículas de polvo cargadas, las cuales pueden acumular alrededor de 50 electrones cada una. Estas diferencias tienen dos consecuencias, la primera referente a las propiedades de transporte: el polvo incrementa mucho la resistividad del plasma. Esto ha sido confirmado mediante simulaciones de computadora por Mark Kushner de la universidad de Illinois. En términos del comportamiento en una descarga de radiofrecuencia, el polvo causa la impedancia para cambiar de capacitivo a resistivo. En consecuencia, el gran campo eléctrico colocado en el gas conlleva a un gran incremento de la energía cinética media de los electrones del plasma. Esto a su vez, provoca un incremento en la excitación electrónica y disociación de las especies del gas aún pensando que hay diez veces menos electrones que en los plasmas limpios. Por tanto, los plasmas polvosos son un modo de acoplar energía dentro de gases con descargas eléctricas. La segunda está relacionada con la alta concentración que se presenta en algunos plasmas que combinada con otros parámetros del plasma da lugar a diversos efectos, (A.Bouchoule 1993). Por ejemplo, para un plasma de 100 m Torr con una concentración de $1.2 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ de partículas de 85nm, la distancia promedio interpartícula es menor que el diámetro de la esfera de Debye que rodea la partícula. La distribución espacial de los iones positivos es sólo modulada ligeramente pero toma lugar una interacción electrostática fuerte entre las partículas cargadas negativamente. Las mediciones en torno a esto, muestran que la energía de interacción es 10 veces mayor que la energía cinética por lo que las nubes de partículas deben ser consideradas como "líquidos coulombianos" que tienen posibilidades de congelarse cuando la energía de interacción es 170 veces más grande que la energía cinética, (A.Bouchoule 1993). En otro experimento, se han observado directamente con microscopio óptico cristales Coulombianos y líquidos en plasmas polvosos fuertemente acoplados, los cuales, son formados suspendiendo finas partículas cargadas negativamente de SiO_2 (óxido de silicio) con un diámetro de $10 \mu\text{m}$ en descargas de radiofrecuencia en argón de débil ionización, (J.H.Chu y Lin I 1994). Por otro lado, los granos de polvo cargados al coleccionar electrones e iones del interior del plasma producen efectos sobre la dinámica del mismo, los cuales, como se estudiará en el presente trabajo, dan lugar a la existencia de nuevos modos de vibración, debido a la inercia del fluido polvoso. Se sabe que la presencia estática de granos de polvo cargado puede modificar la electrostática existente y el espectro electromagnético, (P.K.Shukla 1995). Hay

dos hechos importantes que distinguen a los plasmas polvosos de los plasmas "limpios" que tienen una clase más de iones o electrones con diferente temperatura.

Primero, el tamaño, pues las partículas de polvo son muchos órdenes de magnitud más grandes y más pesadas que los iones usuales. Entre otros efectos, como se analizará en el capítulo III, esto permite hacer un análisis de los modos normales de vibración que se propagan en un plasma polvoso magnetizado separando dichos modos. Segundo, la carga en las partículas de polvo puede variar debido al movimiento ondulatorio electrónico inducido, es decir, desplazamiento de los electrones en torno a sus posiciones de equilibrio sobre la superficie de la partícula y corrientes iónicas fluyendo sobre dicha superficie o debido a procesos de cargado de equilibrio, (Allen 1992; Barnes et. al 1992; Tsytovich & Havnes 1993; Ma & Yu 1994; Vladimirov 1994).

Se sabe que los procesos de cargado de equilibrio son los responsables de nuevos efectos en los plasmas polvosos, los cuales, están ausentes en la clase usual de plasmas multi-componentes con diferentes tipos de especies de iones o electrones. Por ejemplo, se ha demostrado recientemente que las fluctuaciones de carga por lo general dan origen a amortiguamientos de ondas que podrían propagarse como modos normales en plasmas libres de partículas de polvo, (Varma, Shukla & Krishna 1993; Melandso, Aslaksen & Havnes 1993a,b; Rao & Shukla 1994; Li, Havnes & Melandso 1994). Por otra parte, el movimiento de los granos de polvo afecta a ondas de muy baja frecuencia e incluso si las partículas de polvo se consideran estáticas se ve modificado el carácter de las ondas y su propagación. Finalmente, los diversos efectos por la presencia de partículas de polvo en un plasma, ha motivado que un buen número de autores investiguen recientemente varios procesos colectivos, tales como ondas ciclotrón, ondas de desplazamiento, ondas de Alfvén, inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y de Rayleigh-Taylor en plasmas polvosos, (Bliokh & Yarashenko 1985; Philipp, Hartquist & Havnes 1987; de Angelis, Formisano & Giordano 1988; Rao, Shukla & Yu 1990; D'Angelo & Song 1990; D'Angelo 1990, 1993; Bharuthram & Shukla 1992a,b; Shukla 1992; Rosenberg 1993; Rao 1993a-c; Rawat & Rao 1993).

I-5. Plasmas polvosos en el espacio.

Los plasmas polvosos espaciales se encuentran ubicados en nubes interestelares y circundantes, en los anillos planetarios, en las colas de los cometas y en la parte baja de la ionósfera de la tierra. La física y química básica de estos plasmas polvosos es similar a aquella de los plasmas de baja presión de laboratorio, pero las condiciones del plasma difieren enormemente en los órdenes de magnitud. Por ejemplo, las nubes interestelares tienen temperaturas del orden de 10 K y pueden tener dimensiones del orden de 10^{14} m. La densidad de partículas es del orden de 10^6 cm^{-3} para partículas neutras (digamos hidrógeno), de 10^{-3} cm^{-3} para los iones y electrones y de 10^{-7} cm^{-3} para las partículas de polvo. En contraste, el anillo E de Saturno, a $2-3 \times 10^7$ m del planeta, es mucho más caliente; del orden de (10^3 K) y el plasma está más altamente ionizado; las densidades de iones y electrones vienen siendo aproximadamente de 20 cm^{-3} . La densidad de las partículas neutras es mucho más pequeña, del orden de 1 cm^{-3} mientras que la densidad de partículas de polvo en el

anillo E de Saturno es aproximadamente igual a la de las nubes interestelares, esto es, de 10^{-7} cm^{-3} (A. Bouchoule 1993).

Diferentes procesos físicos y químicos son importantes en estas situaciones espaciales tan variadas. Por ejemplo, el equilibrio electrostático de un grano sólido en el sistema solar puede ser modificado por el efecto fotoeléctrico originado por la radiación solar. Se ha mostrado que esto conlleva a un equilibrio electrostático de las partículas que puede ser dependiente de su tamaño. Estas consideraciones juegan un papel importante en varios aspectos, tales como en la evolución de las distribuciones de los tamaños del grano. Este efecto fotoeléctrico es generalmente despreciado en el procesamiento de plasmas en un reactor, en la medida que el flujo relativo de electrones y iones del plasma circundante es órdenes de magnitud mayor. Otro ejemplo de procesos en los plasmas polvosos que existen en el espacio, es el equilibrio químico de nubes interestelares, donde el fenómeno de ionización es inducido por los rayos cósmicos. La química de superficie en granos pequeños de polvo juega un papel importante en la definición del equilibrio. Por ejemplo, la recombinación del hidrógeno atómico sobre la superficie de estos granos es la razón de equilibrio bajo de disociación.

I-6. Condiciones de plasma y valores de parámetros para plasmas de laboratorio y astrofísicos.

Condiciones de plasma:

0. Sistema cuasi-neutro.

1. $r_D \ll L$ (longitud del sistema).

2. $N_D \gg 1$.

3. $\omega_p \tau > 1$ (τ = periodo medio entre colisiones).

Parámetros:

n = densidad.

T_e = Temperatura.

$$v_{te} = \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n$$

$$r_D = \left(\frac{T_e}{4\pi n e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Valores de parámetros:

En la tabla 1, se proporcionan los valores típicos para la densidad electrónica n_e y la temperatura electrónica T_e para un conjunto de plasmas astrofísicos y de laboratorio, así como los valores resultantes de la frecuencia de Langmuir ω_{pe} , la velocidad térmica de los electrones v_{te} , el radio de Debye r_D y el número de Debye N_D .

Tabla 1. Valores de parámetros.

Sistema	n_e (cm^{-3})	T_e $^{\circ}\text{K}$	T_e erg	v_{te} (cm s^{-1})	r_D (cm)	ω_{pe} (s^{-1})	N_D
Gas interestelar	1	10^4	1.4×10^{-12}	4×10^7	700	6×10^4	3×10^8
Nebulosa gaseosa	10^2	10^4	1.4×10^{-12}	4×10^7	70	6×10^3	3×10^7
Cinturón de radiación	10^3	10^3	1.4×10^{-12}	10^8	70	2×10^6	3×10^8
Ionosfera (capa F)	10^6	10^3	1.4×10^{-13}	10^7	0.2	6×10^7	10^4
Cosmos	10^8	10^6	1.4×10^{-10}	4×10^8	0.7	6×10^8	3×10^7
Magnetosfera polar	10^{10}	10^6	1.4×10^{-10}	4×10^8	0.07	6×10^9	3×10^6
Plasma de lab. tecn.	10^{11}	10^4	1.4×10^{-12}	4×10^7	2×10^{-3}	2×10^{10}	10^3
Sellaesor	10^{13}	10^6	1.4×10^{-10}	4×10^8	2×10^{-3}	2×10^{11}	10^3
Fotósfera	10^{15}	10^4	1.4×10^{-12}	4×10^7	2×10^{-3}	2×10^{12}	10^3
Plasma termonuclear	10^{16}	10^8	1.4×10^{-8}	4×10^9	7×10^{-4}	6×10^{12}	3×10^4
Plasma láser	10^{22}	10^8	1.4×10^{-8}	4×10^9	7×10^{-7}	6×10^{15}	3×10^3

I-7. Organización y desarrollo del trabajo.

Por lo anterior, es de gran interés realizar el presente trabajo intitulado: "La Magnetohidrodinámica de los Plasmas Polvosos". Con el objetivo de profundizar en el estudio de estos plasmas tanto espaciales como de laboratorio por su importancia en el desarrollo tecnológico en el terreno industrial y como fuente de conocimiento del espacio exterior. Se aporta una sistematización que permita la presentación y ampliación de resultados obtenidos en investigaciones anteriores. Los temas por desarrollar en este trabajo se organizan, de la siguiente manera: Capítulo II, intitulado "Ecuaciones de fluido-modelo cinético", presenta cinco secciones. Se obtienen las ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD) a partir del modelo cinético, bajo la suposición de que el número de partículas es lo suficientemente grande como para tener una función de distribución Maxwelliana. En la introducción II-1 son expuestas las diferentes aproximaciones o modelos que existen para el estudio de los plasmas y sus límites de aplicación. En la sección II-2 se deriva la ecuación de Boltzman. En la sección II-3, se construye el modelo de fluido para obtener las ecuaciones de conservación de partículas, de conservación de momento y energía a partir de los momentos de la ecuación de Boltzman. Las ecuaciones obtenidas se presentan en su forma convectiva final. En la II-4 se obtienen las ecuaciones macroscópicas básicas a partir de las obtenidas en el modelo cinético y que conjuntamente con las ecuaciones de Maxwell son la base para el presente trabajo. En la sección II-5, se presentan las conclusiones del capítulo. Capítulo III, intitulado "Modos Magnetoacústicos en un plasma polvososo magnetizado", investiga la existencia de diversos tipos de modos magnetoacústicos en diferentes regímenes de frecuencia en un plasma polvososo magnetizado constituido por iones, electrones y partículas de polvo. El análisis se lleva a cabo usando el modelo MHD que permite el movimiento no congelado al campo magnético, es decir, aquel en que las líneas de campo magnético no se mueven con el fluido. El capítulo es subdividido en cuatro secciones. En la sección III-1 se plantea el porqué se pueden separar los modos normales del sistema y las características del tipo de modos que se analizan. En la sección III-2 intitulada aproximación "magnetohidrodinámica" (MHD) se obtienen explícitamente las ecuaciones para los modos magnetoacústicos y la relación general de dispersión correspondiente. Como caso particular se analizan los modos para un plasma no magnetizado y posteriormente los diversos modos magnetoacústicos-polvosos contenidos en la relación general de dispersión. Se analiza un modo especial magnetoacústico-polvoso que proviene de las ecuaciones antes mencionadas pero sin considerar algunos términos, en todos los casos se obtienen los regímenes de existencia de los modos. Al final de la sección se discuten resultados parciales. En la sección III-3 intitulada aproximación "Electro-magnetohidrodinámica" (EMHD) se usa una aproximación semejante a ésta para obtener una derivación alternativa de las ecuaciones relevantes para los modos magnetoacústicos obtenidas previamente con la aproximación MHD. Se analizan los regímenes de frecuencia baja, media y alta. Los resultados obtenidos con ambas aproximaciones se comparan entre sí. En la sección III-4 del capítulo se presentan conclusiones.

En el Capítulo IV, intitulado "Magnetohidrodinámica de plasmas polvosos", se trabaja de forma autocontenida el régimen de extremada baja frecuencia, en el cual la frecuencia característica de la onda es mucho menor que la frecuencia de giro del ion. De tal manera que las inercias de los iones y electrones son despreciables. Se presenta un conjunto compacto de ecuaciones MHD para los plasmas polvosos en este régimen. El capítulo se subdivide en cinco secciones. En la introducción, sección IV-1 se amplían las consideraciones antes mencionadas. En la sección IV-2 se obtienen las ecuaciones de gobierno. Se obtiene una relación general de dispersión en la sección IV-3. Los casos límites y los modos magnetoacústicos (rápidos) se presentan en la sección IV-4. Las conclusiones de este capítulo están contenidas en la sección IV-5. En el Capítulo V, se presenta una sección de conclusiones: implicaciones y perspectivas.

CAPÍTULO II.

ECUACIONES DE FLUIDO-MODELO CINÉTICO.

II-1. Introducción.

La magnetohidrodinámica (MHD) es un rama importante de la dinámica de fluidos. Trata de la interacción entre fluidos eléctricamente conductores y campos electromagnéticos. Cuando un fluido conductor se mueve a través de un campo magnético, se puede inducir un campo eléctrico y, consecuentemente, una corriente eléctrica, la que a su vez interactúa con el campo magnético para producir una fuerza sobre las partículas del fluido.

Existen dos métodos principales de atacar el problema, el macroscópico: modelo de fluido continuo conocido como MHD; y el microscópico: modelo estadístico conocido como teoría cinética. También existe la teoría orbital, que es una buena aproximación para el movimiento de las partículas en un plasma cuando las colisiones entre partículas no juegan un papel dominante, esto es, cuando el camino libre medio para colisiones es grande comparado con las dimensiones características de la órbita. La teoría hidromagnética es una descripción macroscópica del plasma y buena aproximación cuando el camino libre medio para colisiones es muy pequeño comparado con las distancias de interés físico en el sistema. Es punto de partida para estudiar el movimiento colectivo de las partículas en el plasma, es decir, oscilaciones de plasma. Éste, se considera como fluido conductor eléctrico y, por lo tanto, se toman en cuenta explícitamente las fuerzas electromagnéticas. Se analizarán los modos normales en los próximos capítulos de este trabajo con esta aproximación.

El método cinético, basado en la teoría del equilibrio parte de la suposición de que las colisiones entre partículas cargadas son suficientes como para mantener una distribución de velocidades de Maxwell-Boltzman en el sistema. Las formulaciones anteriores proporcionan un conocimiento considerable respecto a lo que está sucediendo en el plasma, dentro de ciertos límites de validez. Se pone atención especial en las aproximaciones que definen al modelo, con la finalidad de utilizarlas correctamente en las aplicaciones.

En este capítulo se obtienen las ecuaciones de fluido para varios componentes a partir del modelo cinético. Éstas se emplearán en los siguientes capítulos para estudiar las propiedades colectivas magnetohidrodinámicas del plasma polvoso.

II-2. Ecuación de Boltzman.

Se considera primero el caso en el que las interacciones o colisiones entre partículas pueden ser completamente despreciables. Sea $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ una función de distribución que describe una situación en estado de equilibrio o fuera de éste. Supóngase que cada partícula de masa m está sujeta a una fuerza externa \vec{F} .

Por simplicidad se asume que \vec{F} es independiente de la velocidad, \vec{v} , de la partícula. Las partículas que al tiempo t tienen posiciones y velocidades en el elemento de volumen, $d\vec{F}d\vec{v}$, del espacio fase cerca de \vec{F} y \vec{v} , al tiempo $t' = t + dt$ tendrán nuevas posiciones y velocidades en el espacio fase $d\vec{F}'d\vec{v}'$ cerca de \vec{F}' y \vec{v}' respectivamente como resultado de su movimiento bajo la influencia de la fuerza externa \vec{F} . En ausencia de colisiones se tiene:

$$f(\vec{F}', \vec{v}', t') d\vec{F}' d\vec{v}' = f(\vec{F}, \vec{v}, t) d\vec{F} d\vec{v},$$

El elemento de volumen $d\vec{F}d\vec{v}$ en el espacio fase cambia como resultado del movimiento bajo la acción de la fuerza externa. Su nuevo volumen está relacionado con el anterior mediante la relación:

$$d\vec{F}' d\vec{v}' = |J| d\vec{F} d\vec{v},$$

donde J es el Jacobiano de la transformación: $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{v} dt$ y $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{a} dt = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt$. Para este caso, $J=1$ tomando sólo términos de primer orden. Así que $d\vec{F}'d\vec{v}' = d\vec{F}d\vec{v}$, lo cual implica que:

$$f(\vec{F}', \vec{v}', t') = f(\vec{F}, \vec{v}, t),$$

o bien:

$$f(\vec{F} + \vec{v} dt, \vec{v} + \vec{a} dt, t + dt) - f(\vec{F}, \vec{v}, t) = 0.$$

Cuando el sistema alcanza el equilibrio estacionario, de la ecuación anterior expresada en términos de derivadas parciales, se tiene:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{F}} f + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0, \quad (2.1)$$

donde $\nabla_{\vec{F}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $\nabla_{\vec{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$ y \vec{a} es la aceleración sobre una

partícula que de acuerdo con la segunda ley de Newton se puede escribir como $\frac{\vec{F}}{m}$. La razón de cambio de las partículas vista desde un sistema de referencia que se mueve con ellas queda representado por el término df/dt que es la derivada convectiva en el espacio fase. Cuando el sistema se encuentra ligeramente fuera del estado de equilibrio o interactúa con otros gases mediante colisiones entre partículas tenderá al equilibrio.

Considérese partículas que al tiempo t tienen posiciones y velocidades en $d\vec{F}d\vec{v}$ cerca de \vec{F} y \vec{v} . Si no hay colisiones, estas partículas se mueven simplemente bajo la influencia de la fuerza externa \vec{F} y el resultado es el obtenido anteriormente. Pero si se toma en cuenta las colisiones, el número de partículas puede cambiar en ese elemento de volumen. Como producto de las colisiones, algunas partículas que originalmente no tenían posiciones y velocidades en el elemento de volumen, $d\vec{F}d\vec{v}$, pueden caer en él y otras de las que estaban pueden salir.

Sea $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.} d\vec{F}d\vec{v}$ el incremento neto por unidad de tiempo del número de partículas en $d\vec{F}d\vec{v}$ como resultado de tales colisiones. Entoces, el número de partículas que al tiempo $t + dt$ están en $(\vec{F} + \vec{v}dt)$ y $(\vec{v} + \vec{a}dt)$, debe ser igual al número de partículas que estuvieron al tiempo t en el elemento de volumen cercano a \vec{F} y \vec{v} , que fueron movidas a $(\vec{F} + \vec{v}dt)$ y $(\vec{v} + \vec{a}dt)$ como resultado de la fuerza externa, más el cambio neto en el número de partículas en este elemento de volumen debido a las colisiones en el intervalo de tiempo dt . Esto es:

$$f(\vec{F} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{a}dt, t + dt)d\vec{F}'d\vec{v}' = f(\vec{F}, \vec{v}, t)d\vec{F}d\vec{v} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.} d\vec{F}d\vec{v}dt,$$

usando la identidad $d\vec{F}'d\vec{v}' = d\vec{F}d\vec{v}$ se tiene:

$$f(\vec{F} + \vec{v}dt, \vec{v} + \vec{a}dt, t + dt) - f(\vec{F}, \vec{v}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.} d\vec{F}d\vec{v}dt,$$

dividiendo entre dt y expresando el resultado en términos de las derivadas parciales, finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{F}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{col.}, \quad (2.2)$$

donde el término del lado derecho de la ecuación anterior representa el cambio en la función de distribución con respecto al tiempo debido a dichas colisiones. A la ecuación (2.2) se le conoce con el nombre de ecuación de Boltzman en la cual las fuerzas externas, debidas a los campos sobre el sistema, están representadas en el lado izquierdo de la ecuación y las internas, debido a colisiones, están en el lado derecho. Esta ecuación es la base para la teoría de transporte. La formulación es rigurosa para problemas de plasma, pero su resolución es difícil en general, excepto para situaciones en que sea permisible despreciar algunos términos de la ecuación. Cuando las fuerzas externas que actúan son electromagnéticas se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} \quad (2.3)$$

El término de colisiones toma en cuenta todo tipo de colisiones y para un plasma en el que existan diversas especies se tendrán varias ecuaciones como la anterior acopladas, una para cada especie. Los campos eléctrico y magnético deben ser obtenidos de las ecuaciones de Maxwell.

II-3. Modelo de fluido.

Sea l_D la longitud de Debye y L el tamaño del sistema físico de interés. Si $l_D \ll L$ entonces el plasma puede considerarse como un fluido de medio continuo. A partir de la ecuación de Boltzman se obtienen las ecuaciones de fluido calculando la ecuación de cambio para los valores promedio, los diferentes momentos y ecuaciones de conservación y, para que estas ecuaciones adquieran una forma magnetohidrodinámica práctica son llevadas a su forma convectiva. Las ecuaciones de conservación así obtenidas son una consecuencia rigurosa de la ecuación de Boltzman. Para tal fin se considera una función $g(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que describe una propiedad de la partícula cuando está en la posición \vec{r} y tiene una velocidad \vec{v} al tiempo t . Se define el promedio de $g(\vec{r}, \vec{v}, t)$ como:

$$\langle g(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{\int g(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}} \quad (2.4)$$

donde el número de partículas por unidad de volumen está dado por el denominador de la expresión anterior, que se expresa como:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.5)$$

Entonces la ec. (2.4) toma la forma:

$$\langle g(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle n(\vec{r}, t) = \int g(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (2.6)$$

Multiplicando por $g = g(\vec{r}, \vec{v}, t)$ la ecuación de Boltzman (2.2) e integrando con respecto a \vec{v} se obtiene:

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} + \int g \vec{v} \cdot \nabla_r f d\vec{v} + \int g \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f d\vec{v} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v}. \quad (2.7)$$

Se transforman las integrales de la ec.(2.7) en cantidades que sean promedios, esto es, en integrales que contengan la función $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ en lugar de sus derivadas, integrando término a término:

$$\text{como } g \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (gf) - f \frac{\partial g}{\partial t},$$

se reescribe el primer miembro del lado izquierdo de la siguiente manera:

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int g f d\vec{v} - \int f \frac{\partial g}{\partial t} d\vec{v},$$

puesto que el orden en la diferenciación con respecto al tiempo y la integración con respecto a la velocidad se puede intercambiar. Usando la ec. (2.6) se obtiene:

$$\int g \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} ((g)n) - n \left\langle \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.8)$$

Tomando $\nabla_r \cdot [(g\vec{v})f] = g\vec{v} \cdot \nabla_r f + f \nabla_r \cdot (g\vec{v})$ se escribe el segundo término del lado izquierdo como:

$$\int (g\vec{v}) \cdot \nabla_r f d\vec{v} = \nabla_r \cdot \int g \vec{v} f d\vec{v} - \int f \nabla_r \cdot (g\vec{v}) d\vec{v},$$

usando la ec.(2.6) se obtiene:

$$\int (g\vec{v}) \cdot \nabla_r f d\vec{v} = \nabla_r \cdot (n(g\vec{v})) - n \langle \nabla_r \cdot (g\vec{v}) \rangle. \quad (2.9)$$

De la identidad:

$$\nabla_v \cdot \left[\left(\frac{g\vec{F}}{m} \right) f \right] = f \nabla_v \cdot \left(\frac{g\vec{F}}{m} \right) + \left(\frac{g\vec{F}}{m} \right) \cdot \nabla_v f,$$

se reescribe el tercer término del lado izquierdo como:

$$\int \frac{g\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\nu} f d\vec{v} = \int \nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{g\vec{F}}{m} f \right) d\vec{v} - \int f \nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{g\vec{F}}{m} \right) d\vec{v}$$

y aplicando el teorema de la divergencia se tiene que:

$$\int_{\nu} \nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{g\vec{F}}{m} f \right) d\vec{v} = \int_{\mathcal{S}} \alpha \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0,$$

donde $\alpha = gf/m$. La integral anterior es cero puesto que cuando la superficie de integración tiende a infinito, α tiende a cero. Por lo tanto:

$$\int \frac{g\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\nu} f d\vec{v} = -n \left\langle \nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{g\vec{F}}{m} \right) \right\rangle.$$

Sustituyendo la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$ en el término del lado derecho de la ecuación anterior, se obtiene:

$$n \left\langle \nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{g}{m} \vec{F} \right) \right\rangle = n \left\langle \frac{g}{m} \left(\nabla_{\nu} \cdot \left[q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right] \right) + \vec{F} \cdot \nabla_{\nu} \left(\frac{g}{m} \right) \right\rangle = \frac{n}{m} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\nu} g \rangle$$

puesto que el campo eléctrico no depende de la velocidad y $\nabla_{\nu} \cdot \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = 0$. Esta integral toma la forma:

$$\int \frac{g\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\nu} f d\vec{v} = -\frac{n}{m} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\nu} g \rangle. \quad (2.10)$$

Sustituyendo (2.8), (2.9) y (2.10) en la ec. (2.7) finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\langle g \rangle) - n \left\langle \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle + \nabla_{\nu} \cdot (n\langle g\vec{v} \rangle) - n \langle \nabla_{\nu} \cdot (g\vec{v}) \rangle - \frac{n}{m} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\nu} g \rangle = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v}. \quad (2.11)$$

La ec. (2.11) describe el cambio de $\langle g(\vec{F}, \vec{v}, t) \rangle$ como función de \vec{F} , \vec{v} y t .

II-3a. Momentos de la ecuación de Boltzman, ecuaciones de conservación y convectivas.

Se hace uso de la ecuación de cambio de los valores promedio (2.11) para calcular las ecuaciones de conservación de partículas, de momento y energía mediante el cálculo de los distintos momentos en el espacio de velocidades sustituyendo el valor correspondiente para la función de peso $g(F, \vec{v}, t)$ en la ec.(2.11).

i) Momento de orden cero.

Cuando $g=1$ de la ec. (2.11) se obtiene:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v} \rangle) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.12)$$

que es la ecuación de continuidad.

ii) Primer momento.

Sustituyendo $g = m\vec{v}$ en la ec. (2.11) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\langle m\vec{v} \rangle) - n \left\langle \frac{\partial m\vec{v}}{\partial t} \right\rangle + \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v}m\vec{v} \rangle) - n\langle \nabla_r \cdot (\vec{v}m\vec{v}) \rangle - \frac{n}{m} \langle F \cdot \nabla_v (m\vec{v}) \rangle = \int m\vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v}$$

Como la velocidad es una variable independiente de F y t entonces se tiene que:

$$n \left\langle \frac{\partial m\vec{v}}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad \text{y} \quad n\langle \nabla_r \cdot (\vec{v}m\vec{v}) \rangle = 0,$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\langle m\vec{v} \rangle) + \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v}m\vec{v} \rangle) - \frac{n}{m} \langle F \cdot \nabla_v (m\vec{v}) \rangle = \int m\vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v}$$

y como $\frac{n}{m} \langle F \cdot \nabla_v m\vec{v} \rangle = n\langle F \rangle$, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm\langle \vec{v} \rangle) + \nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}\vec{v} \rangle) - n\langle F \rangle = \int m\vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v}, \quad (2.13)$$

que es la ecuación de conservación de momento. El primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior representa la razón de cambio de la densidad de momento en un punto \vec{r} del espacio, el segundo término representa la razón neta a la cual el momento es transportado a través de las fronteras de la superficie en un elemento de volumen para un punto de interés, el tercer término indica el cambio en la densidad de momento debido a la fuerza de Lorentz. El término del lado derecho de la ecuación representa el momento total ganado por unidad de tiempo, como resultado de colisiones.

Ecuación convectiva de la ecuación de conservación de momento.

Se define la velocidad aleatoria de las partículas del plasma como:

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle) = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_r, \quad (2.14)$$

donde se ha tomado:

$$\vec{v}_r = (\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle),$$

siendo que,

$$\langle \vec{v}_r \rangle = \langle \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \rangle = 0.$$

Sustituyendo la ec. (2.14) en el término $\nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}\vec{v} \rangle)$ de la (2.13) se tiene que:

$$\nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}\vec{v} \rangle) = \nabla_r \cdot [nm\langle (\langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_r)(\langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_r) \rangle].$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior se tiene:

$$\nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}\vec{v} \rangle) = \nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v} \rangle \langle \vec{v} \rangle + nm\langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle).$$

De lo cual se obtiene:

$$\nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}\vec{v} \rangle) = m\langle \vec{v} \rangle \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v} \rangle) + nm\langle (\langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla_r) \langle \vec{v} \rangle + \nabla_r \cdot (nm\langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle). \quad (2.15)$$

Multiplicando la ec.(2.12) por $m\langle \vec{v} \rangle$ se obtiene:

$$m\langle \vec{v} \rangle \frac{\partial n}{\partial t} + m\langle \vec{v} \rangle \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v} \rangle) = m\langle \vec{v} \rangle \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v}.$$

como:

$$m\langle \vec{v} \rangle \frac{\partial n}{\partial t} = m \frac{\partial}{\partial t} (n\langle \vec{v} \rangle) - nm \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{v} \rangle,$$

se sustituye en la ecuación anterior para obtener:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\langle \vec{v} \rangle) - nm \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{v} \rangle + m \langle \vec{v} \rangle \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v} \rangle) = m \langle \vec{v} \rangle \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v}.$$

Despejando, finalmente se obtiene que:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\langle \vec{v} \rangle) = m \langle \vec{v} \rangle \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v} + nm \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{v} \rangle - m \langle \vec{v} \rangle \nabla_r \cdot (n\langle \vec{v} \rangle). \quad (2.16)$$

Al sustituir las ecs. (2.15) y (2.16) en la ecuación de conservación de momento (2.13), se obtiene:

$$nm \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{v} \rangle + nm (\langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla_r) \langle \vec{v} \rangle + \nabla_r \cdot (nm \langle \vec{v} \vec{v}_r \rangle) = n \langle \vec{F} \rangle + \int (m\vec{v} - m\langle \vec{v} \rangle) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v}. \quad (2.16a)$$

Se define el tensor de esfuerzos como:

$$\bar{P} = nm \langle \vec{v} \vec{v}_r \rangle = m \int \vec{v} \vec{v}_r f d\vec{v}. \quad (2.17)$$

Recordando que $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_r$, entonces el término de colisiones queda expresado como:

$$\int (m\vec{v} - m\langle \vec{v} \rangle) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v} = \bar{R},$$

donde:

$$\bar{R} = \int m \vec{v}_r \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v}, \quad (2.18)$$

que representa la ganancia de momento debido a colisiones.

Sustituyendo las cantidades definidas anteriormente en la ec.(2.16) y despejando, finalmente se tiene que:

$$nm \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla_r) \right) \langle \vec{v} \rangle = n \langle \vec{F} \rangle + \bar{R} - \nabla_r \cdot \bar{P}. \quad (2.19)$$

El término izquierdo de la ec.(2.19) representa la masa de todas las partículas por unidad de volumen por su aceleración vista desde un marco de referencia de laboratorio.

El tensor de esfuerzos $\overline{P}_{ij}(\vec{r}, t)$ puede ser interpretado de la siguiente manera: $f d\vec{v}$ es el número total de partículas en un elemento de volumen $d\vec{v}$ alrededor de \vec{v} en el espacio de velocidades; $(f m v_{ix}) d\vec{v}$ es el momento aleatorio en la dirección x de todas las partículas en un elemento de volumen $d\vec{v}$ en el espacio de velocidades y localizadas en una unidad de volumen en el espacio \vec{r} . Entonces $(f m v_{ix}) v_{iy} d\vec{v}$ es la razón a la cual el momento es transportado en la dirección y y por unidad de área para todas las partículas en $d\vec{v}$ localizadas en (\vec{r}, \vec{v}) .

El tensor de esfuerzos se escribe como:

$$\overline{P} = nm \left\langle \begin{pmatrix} v_x v_x & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y v_y & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z v_z \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.20)$$

En general el tensor de esfuerzos se puede escribir como la suma de dos partes, la que se refiere a la diagonal y la otra al complemento, es decir,

$$\overline{P} = nm \left\langle \begin{pmatrix} v_x v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z v_z \end{pmatrix} \right\rangle + nm \left\langle \begin{pmatrix} 0 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & 0 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.20a)$$

El segundo término del lado derecho de la ec.(2.20a) se define como el tensor de viscosidad Π_{ij} y al primer término se le llamará por el momento Q_{ij} .

Reescribimos la ecuación anterior como:

$$\overline{P}_{ij}(\vec{r}, t) = Q_{ij} + \Pi_{ij}. \quad (2.20b)$$

Para el caso de una distribución maxwelliana se tiene:

$$\frac{1}{2} m \langle v_r^2 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Puesto que $v_r^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, se tiene:

$$\frac{1}{2} m \langle v_r^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle.$$

Por ser equivalentes las direcciones x , y y z se tiene:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_r^2 \rangle$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2} m \langle v_r^2 \rangle = 3 \left(\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle \right) = \frac{3}{2} KT,$$

de donde:

$$KT = m \langle v_x^2 \rangle.$$

Multiplicando por n la ecuación anterior:

$$nKT = nm \langle v_x^2 \rangle = nm \frac{1}{3} \langle v_r^2 \rangle,$$

donde nKT es la presión p .

Finalmente en notación tensorial se escribe la presión como:

$$P_{ij} = \frac{nm \langle v_r^2 \rangle}{N} \delta_{ij} = Q_{ij} \quad (2.20c)$$

donde N indica el número de grados de libertad que en este caso son tres.

Sustituyendo la ec. (2.20c) en la (2.20b) se tiene:

$$\overline{P}_{ij} = \frac{nm \langle v_r^2 \rangle}{N} \delta_{ij} + \Pi_{ij}$$

Despejando el tensor de viscosidad:

$$\Pi_{ij} = \overline{P}_{ij} - \frac{nm \langle v_r^2 \rangle}{N} \delta_{ij} \quad (2.20d)$$

Sustituyendo la ec. (2.17) en la ec. (2.20d) se obtiene:

$$\Pi_{ij} = nm \left\langle \bar{v}_i \bar{v}_j - \frac{\langle v_r^2 \rangle}{N} \delta_{ij} \right\rangle = \overline{P}_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2.21)$$

Si se supone isotropía, entonces:

$$\overline{P}_y = \Pi_{ij} + p\delta_{ij} \quad (2.21a)$$

Sustituyendo la ec.(2.21a) en la ec. (2.19) se tiene que:

$$nm\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{v} \cdot \nabla_r \right) \langle \vec{v} \rangle = n\langle \vec{F} \rangle - \nabla p - \nabla_r \cdot \Pi + \vec{K} \quad (2.22)$$

que es la ecuación convectiva para la densidad de momento.

iii) Segundo momento.

Cuando $g = \frac{1}{2} mv^2$, al sustituir en la ec (2.11) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle n \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \right\rangle - n \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \right\rangle + \nabla_r \cdot \left(n \left\langle \vec{v} \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle \right) - n \left\langle \nabla_r \cdot \left(\vec{v} \frac{1}{2} mv^2 \right) \right\rangle \\ - \frac{n}{m} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_v \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \int \frac{mv^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.23) \end{aligned}$$

como \vec{v}, F, t son variables independientes el segundo y cuarto términos de la ecuación anterior son cero, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle n \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \right\rangle + \nabla_r \cdot \left(n \left\langle \vec{v} \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle \right) - \frac{n}{m} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_v \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \right\rangle = \int \frac{mv^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.23a)$$

desarrollando el tercer término de esta ecuación se tiene:

$$n \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_v \frac{1}{2} v^2 \right\rangle = n \left\langle (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \right\rangle = nq\vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle.$$

Sustituyendo éste resultado en la ec.(2.23a) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v^2 \rangle \right) + \nabla_r \cdot \left(\frac{nm}{2} \langle \vec{v} v^2 \rangle \right) = nq\vec{E} \cdot \langle \vec{v} \rangle + \int \frac{mv^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\vec{v} \quad (2.24)$$

que es la ecuación de transporte de energía. El primer término del miembro izquierdo es la razón de cambio de la densidad de energía con respecto al tiempo, el segundo es la pérdida de energía a través de las fronteras de un elemento de volumen, el trabajo hecho sobre las partículas por el campo eléctrico en la unidad de tiempo está representado por el primer término del lado derecho de la ecuación y la transferencia de energía por unidad de tiempo debido a las colisiones por el segundo término del lado derecho. Cuando hay partículas de diferentes especies en el sistema se tendrá una ecuación de transporte de energía para cada

especie y las integrales debido a colisiones por separado son diferentes de cero, pero la suma total será siempre cero a menos que se altere la energía interna del sistema.

Ecuación convectiva para la ecuación de transporte de energía:

Para calcular $\langle \bar{v}v^2 \rangle$ del segundo término del lado izquierdo de la ec.(2.24) se puede usar la ec.(2.14), se tiene que:

$$\langle \bar{v}v^2 \rangle = \langle ((\bar{v}) + \bar{v}_r) \{ ((\bar{v}) + \bar{v}_r) \cdot ((\bar{v}) + \bar{v}_r) \} \rangle.$$

Desarrollando términos y recordando que $\langle \bar{v} \rangle = 0$ se obtiene:

$$\langle \bar{v}v^2 \rangle = \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle^2 + \langle \bar{v} \rangle \langle v_r^2 \rangle + 2\langle \bar{v} \rangle \cdot \langle \bar{v}_r \bar{v}_r \rangle + \langle \bar{v}_r v_r^2 \rangle.$$

Se reescribe el tercer término del lado derecho de la ecuación anterior como:

$$2\langle \bar{v} \rangle \cdot \langle \bar{v}_r \bar{v}_r \rangle = \frac{2}{nm} \langle \bar{v} \rangle \cdot (nm \langle \bar{v}_r \bar{v}_r \rangle).$$

Usando la ec.(2.17) y la (2.21a) se tiene:

$$2\langle \bar{v} \rangle \cdot \langle \bar{v}_r \bar{v}_r \rangle = \frac{2}{nm} \langle \bar{v} \rangle \cdot \Pi + \frac{2}{nm} \langle \bar{v} \rangle \cdot p \bar{I},$$

donde \bar{I} es el tensor unitario. Por lo tanto,

$$\langle \bar{v}v^2 \rangle = \left(\langle \bar{v} \rangle^2 + \langle v_r^2 \rangle + \frac{2}{nm} p \bar{I} \right) \langle \bar{v} \rangle + \frac{2}{nm} \langle \bar{v} \rangle \cdot \Pi + \langle \bar{v}_r v_r^2 \rangle.$$

Multiplicando y dividiendo por (nmN) el término $\langle v^2 \rangle$ de la ecuación anterior se llega a:

$$\langle \bar{v}v^2 \rangle = \left(\langle \bar{v} \rangle^2 + \frac{N+2}{nm} p \right) \langle \bar{v} \rangle + \frac{2}{nm} \langle \bar{v} \rangle \cdot \Pi + \langle \bar{v}_r v_r^2 \rangle.$$

Finalmente el segundo término del lado izquierdo de la ecuación (2.24) queda como:

$$\nabla_r \cdot \left(\frac{nm}{2} \langle \bar{v}v^2 \rangle \right) = \nabla_r \cdot \left[\left(\frac{nm}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 + \frac{N+2}{2} p \right) \langle \bar{v} \rangle + \langle \bar{v} \rangle \cdot \Pi + \bar{q} \right], \quad (2.24a)$$

donde:

$$\bar{q} = \frac{nm}{2} \langle \bar{v}, v_i^2 \rangle = \int \frac{m}{2} \bar{v}, v_i^2 f d\bar{v},$$

es la densidad de flujo de energía debido al movimiento aleatorio. Desarrollando el primer término de la ec.(2.24) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v^2 \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2 + \frac{N}{2} p \right)$$

Sustituyendo éstos resultados en la ec. (2.24), se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2 + \frac{N}{2} p \right) + \nabla_r \cdot \left[\left(\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2 + \frac{N+2}{2} p \right) \langle v \rangle + \langle v \rangle \cdot \Pi + \bar{q} \right] =$$

$$nq\bar{E} \cdot \langle v \rangle + \int \frac{nmv^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{col} d\bar{v}, \quad (2.25)$$

donde el término $\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2$ es la densidad de energía cinética, $\frac{Np}{2}$ es la energía interna, $\langle v \rangle \cdot \Pi$ es el transporte de energía debido a la viscosidad, $qn\langle v \rangle$ es la densidad de corriente eléctrica neta, $qn\langle v \rangle \cdot \bar{E}$ es el término de calentamiento Joule.

Se puede eliminar el término que corresponde a la densidad de energía cinética que aparece en la ecuación anterior. El desarrollo del primer término de la ec.(2.25) es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2 + \frac{N}{2} p \right) = \frac{m}{2} \langle v \rangle^2 \frac{\partial n}{\partial t} + nm \left(\langle v \rangle \cdot \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} \right) + \frac{N}{2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.26)$$

el desarrollo del segundo término del lado izquierdo de la ec. (2.25) es:

$$\nabla_r \cdot \left[\left(\frac{nm}{2} \langle v \rangle^2 + \frac{N+2}{2} p \right) \langle v \rangle + \langle v \rangle \cdot \Pi + \bar{q} \right] = \frac{m}{2} \langle v \rangle^2 \nabla_r \cdot (n\langle v \rangle) + \frac{m}{2} (n\langle v \rangle) \cdot \nabla_r \langle v \rangle^2 + \frac{N+2}{2} \langle v \rangle \cdot \nabla_r p + \frac{N+2}{2} p \nabla_r \cdot \langle v \rangle + \nabla_r \cdot (\langle v \rangle \cdot \Pi) + \nabla_r \cdot \bar{q}. \quad (2.27)$$

Sustituyendo en la ec. (2.25) las ecs.(2.26) y (2.27), usando la ec.de continuidad (2.12) y ordenando términos se obtiene:

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t}+\frac{N}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\langle(\vec{v})\cdot\Pi\rangle+\nabla\cdot\vec{q}+\frac{nm}{2}\langle(\vec{v})\cdot\nabla\rangle\langle\vec{v}\rangle^2+\frac{N+2}{2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla p+\frac{N+2}{2}p\nabla\cdot\langle\vec{v}\rangle+\frac{m}{2}\langle\vec{v}\rangle^2\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}d\vec{v}=nq\vec{E}\cdot\langle\vec{v}\rangle+\int\frac{m}{2}v^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}d\vec{v}.$$
 (2.28)

Multiplicando por $\langle\vec{v}\rangle$, la ec. (2.22) se transforma en:

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t}+nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\left[\langle(\vec{v})\cdot\nabla\rangle\langle\vec{v}\rangle\right]=n\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\vec{F}\rangle-\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla p-\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\nabla\cdot\Pi\rangle+\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{R}.$$
 (2.29)

Desarrollando los siguientes términos de la ecuación anterior:

$$n\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\vec{F}\rangle=n\langle\vec{v}\rangle\cdot\left(\langle q\vec{E}\rangle+\langle q\vec{v}\times\vec{B}\rangle\right)=nq\vec{E}\cdot\langle\vec{v}\rangle,$$

$$\langle\vec{v}\rangle\cdot\langle\nabla\cdot\Pi\rangle=\nabla\cdot\langle(\vec{v})\cdot\Pi\rangle-\Pi:\nabla\langle\vec{v}\rangle,$$

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\left[\langle(\vec{v})\cdot\nabla\rangle\langle\vec{v}\rangle\right]=\frac{nm}{2}\langle(\vec{v})\cdot\nabla\rangle\langle\vec{v}\rangle^2,$$

$$\text{puesto que } nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\left(\langle\vec{v}\rangle\times\langle\nabla\times\langle\vec{v}\rangle\rangle\right)=0.$$

De donde:

$$nm\langle\vec{v}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\vec{v}\rangle}{\partial t}+\frac{nm}{2}\langle(\vec{v})\cdot\nabla\rangle\langle\vec{v}\rangle^2=nq\vec{E}\cdot\langle\vec{v}\rangle-\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla p-\nabla\cdot\langle(\vec{v})\cdot\Pi\rangle+\Pi:\nabla\langle\vec{v}\rangle+\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{R}.$$
 (2.30)

Restando la ec.(2.30) de la ec.(2.28) se tiene:

$$\frac{N}{2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{N+2}{2}\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla p+\frac{N+2}{2}p\nabla\cdot\langle\vec{v}\rangle+\nabla\cdot\vec{q}+\frac{m}{2}\langle\vec{v}\rangle^2\int\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}d\vec{v}=\int\frac{mv^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}}d\vec{v}+\langle\vec{v}\rangle\cdot\nabla p-\Pi:\nabla\langle\vec{v}\rangle-\langle\vec{v}\rangle\cdot\vec{R}.$$

Reordenando términos:

$$\frac{N}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{N+2}{2} \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla p + \frac{N+2}{2} p \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle + \nabla \cdot \vec{q} - \langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla p + \Pi : \nabla \langle \vec{v} \rangle = Q, \quad (2.30a)$$

donde:

$$Q = -\frac{m}{2} \langle \vec{v} \rangle^2 \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v} + \int \frac{m v^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} d\vec{v} - \langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{R}$$

es el calor producido debido a las colisiones. Calculando la suma del segundo y tercer término de la ec. (2.30a), se transforma en:

$$\frac{N}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{N}{2} \nabla \cdot (p \langle \vec{v} \rangle) + p \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle + \Pi : \nabla \langle \vec{v} \rangle + \nabla \cdot \vec{q} = Q \quad (2.31)$$

que es la ecuación convectiva de transporte de energía. Las ecuaciones (2.12), (2.22) y (2.31) son las ecuaciones convectivas deseadas para trabajar directamente con ellas en la magnetohidrodinámica.

II-4. Ecuaciones macroscópicas básicas.

Finalmente, de las ecs.(2.12) , (2.22) y (2.31) del modelo cinético, se obtienen las ecuaciones macroscópicas de continuidad, transporte de momento y de energía, ignorando término de colisiones, para un plasma altamente ionizado compuesto de iones, electrones y partículas de polvo cargadas.

De continuidad:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \vec{v}_a) = 0 \quad (2.32)$$

De transporte de momento:

$$m_a n_a D_a \vec{v}_a = -\nabla p_a - \nabla \cdot \Pi_a + q_a n_a \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_a}{c} \times \vec{B} \right) \quad (2.33)$$

De energía:

$$\frac{N}{2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \frac{N}{2} \nabla \cdot (p_a \vec{v}_a) + p_a \nabla \cdot \vec{v}_a + \Pi_a : \nabla \vec{v}_a + \nabla \cdot \vec{q}_a = 0. \quad (2.34)$$

Donde $D_a = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_a \cdot \nabla)$ y se tomó $\langle \vec{v}_a \rangle = \vec{v}_a$ para cada especie. Se tiene que $\alpha = e, i, d$ para electrones, iones y partículas de polvo respectivamente. De la ec.(2.32) se puede obtener la ecuación de conservación de masa para cada especie multiplicando por m_e , m_i y m_d y la ecuación de conservación de carga multiplicando por q_e , q_i y q_d respectivamente, esto es:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \vec{v}_a) = 0 \quad (2.35)$$

donde,

$$\rho_e = n_e m_e, \quad \rho_i = n_i m_i, \quad \rho_d = n_d m_d \quad \text{y} \quad \rho_e = -en_e, \quad \rho_i = en_i, \quad \rho_d = \pm Zen_d$$

para la densidad de masa y carga de electrones, iones y partículas de polvo respectivamente. En lo sucesivo el subíndice, d , correspondiente a las cantidades para el polvo se omitirá con la finalidad de simplificar la notación. Las ecuaciones básicas en el presente trabajo, pueden escribirse como las ecuaciones de continuidad, de movimiento (ignorando el término de viscosidad) y de energía; el sistema se completa al incluir las ecuaciones de Maxwell:

De continuidad:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \vec{v}_a) = 0. \quad (2.36)$$

De movimiento:

$$\rho_a D_a \vec{v}_a = -\nabla p_a + \rho_a \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_a}{c} \times \vec{B} \right). \quad (2.37)$$

De energía:

$$\frac{N}{2} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{N}{2} \nabla \cdot (\rho_a \vec{v}_a) + p_a \nabla \cdot \vec{v}_a + \Pi_a : \nabla \vec{v}_a + \nabla \cdot \vec{q}_a = 0. \quad (2.38)$$

De Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (2.42)$$

En general las ecuaciones (2.12), (2.22) y (2.31), conjuntamente con las ecuaciones de Maxwell, no forman un conjunto cerrado, pues el número de variables desconocidas excede el número de ecuaciones ya que el tensor de viscosidad, Π , y el vector de conducción térmica no están determinados. Es necesario introducir modelos particulares de Π y \vec{q} para cerrar el conjunto de ecuaciones. En la ec.(2.37) se puede omitir el término $\rho_e \vec{E}$ debido a la cuasi-neutralidad. Las desviaciones a ésta se consideran con la ecuación de Poisson.

II-5. Conclusiones.

Las ecuaciones de fluido obtenidas con el modelo cinético a partir de la ecuación de Boltzman son las de conservación de partículas, de momento y energía. Éstas, confirman que el movimiento de un número suficientemente grande de partículas que interactúan con un campo electromagnético se puede describir por una función de distribución $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que satisfaga la ecuación de Boltzman. La teoría de transporte se basa en esta formulación. Para obtener las magnitudes físicas de interés en general hay que determinar la forma específica de la función de distribución que en el equilibrio es la de Maxwell-Boltzman.

El desarrollo del modelo cinético de fluido requirió calcular la ecuación de cambio para los valores promedio y los momentos de esta ecuación en el espacio de velocidades, que condujeron a las ecuaciones de conservación cuya variación está expresada sólo con respecto al espacio y al tiempo. Se obtuvieron las ecuaciones convectivas para las ecuaciones de transporte de momento y de energía, con lo cual, quedó establecido el conjunto de ecuaciones de modelo cinético de fluido en forma práctica. Las ecuaciones del modelo cinético se reescribieron como ecuaciones macroscópicas, recuperándose la forma de las ecuaciones MHD del enfoque de medio continuo. Finalmente, despreciando el término de viscosidad, se generalizó el sistema de ecuaciones macroscópicas para formular el conjunto de ecuaciones acopladas que conjuntamente con las ecuaciones de Maxwell se utilizan en el presente trabajo para el estudio de los fenómenos colectivos en un plasma multi-componente constituido por electrones, iones y partículas de polvo.

CAPÍTULO III.

MODOS MAGNETOACÚSTICOS EN UN PLASMA POLVOSO MAGNETIZADO.

III-1. Introducción.

Los plasmas polvosos se distinguen de los plasmas multi-componentes usuales, los cuales tienen electrones y clases diferentes de iones con diferente temperatura, debido a que la masa de las partículas de polvo es muchos órdenes de magnitud mayor que la de los iones. Esto permite que las frecuencias del plasma, así como las frecuencias de giro de los iones y de las partículas de polvo estén ampliamente separadas, consecuentemente es posible separar los modos que provienen debido a los efectos de la inercia de los iones y del polvo (Rao 1993a). De hecho, en el régimen de muy baja frecuencia, los plasmas polvosos presentan nuevos modos de oscilación en los cuales la inercia es provista principalmente por la componente polvosa. En general, de la dinámica colectiva del polvo provienen nuevos modos de oscilación. Por ejemplo, para velocidades de fase $\frac{\omega}{k}$ mucho menores que las velocidades térmicas de los iones y electrones v_n y v_e , respectivamente, (Rao et al.1990), predijeron la existencia de un modo electrostático parecido al acústico, que llamaron "onda acústico-polvosa" en la cual los iones y electrones están en presencia de un campo electrostático autoconsistente. Por otro lado, para velocidades de fase en el rango definido por la desigualdad, $v_n \ll \frac{\omega}{k} \ll v_e$, Shukla & Silin (1992) mostraron la existencia de otro tipo de onda acústica, llamada onda "acústico-iónico-polvosa". Para plasmas polvosos magnetizados, con el modelo MHD que permite el movimiento no congelado al campo magnético (Rao 1993a,b) y que se utiliza en el presente análisis se discutió la existencia de diferentes tipos de ondas hidromagnéticas. El nuevo modo llamado "onda magnetoacústico-polvosa" el cual es una generalización electromagnética de la "onda acústico-polvosa" mencionada anteriormente fué obtenido (Rao 1993c) con este modelo. En este capítulo se describe el trabajo de N.N. Rao "Magnetoacoustic modes in a magnetized dusty plasma" (N.N.Rao, J.Plasma Phys.53, 317 1995), en el cual, se investiga para un plasma polvoso magnetizado constituido por electrones, iones y partículas de polvo, la existencia de ondas hidromagnéticas compresionales del tipo magnetoacústico en diferentes regímenes de frecuencia. Se analiza sólo el modo rápido que se propaga exactamente perpendicular al campo magnético externo y en donde el campo magnético de la onda es paralelo a dicho campo. Se obtienen explícitamente los modos normales básicos que son posibles para la geometría magnetoacústica en dichos regímenes de frecuencia. Es decir, se investigan, los modos magnetoacústicos rápidos.

III-2. Aproximación Magnetohidrodinámica (MHD).

III-2a. Ecuaciones para los modos magnetoacústicos.

En esta subsección se derivan las ecuaciones básicas que rigen el comportamiento de los modos magnetoacústicos a partir de las ecuaciones de movimiento y de continuidad para los tres fluidos, conjuntamente con las ecuaciones de Maxwell. Se supone por simplicidad que la carga es constante sobre las partículas de polvo ya que se investigan sólo los modos normales ignorando los amortiguados que provienen de fluctuaciones de carga. Tal aproximación se justifica para aquellos plasmas polvosos que tienen partículas de polvo por ejemplo de una micra con carga débil. Se desprecia la corriente de desplazamiento en la ecuación de la ley de Ampere, así como la inercia de los electrones en la ecuación de conservación de momento correspondiente. Se supone cuasi-neutralidad y que la velocidad de fase es mucho menor que la velocidad térmica de los electrones. A partir del modelo de fluido descrito en el capítulo II, las ecuaciones básicas para un plasma polvoso formado de iones, electrones y partículas de polvo son:

Ecuaciones de continuidad para partículas de polvo, iones y electrones:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0. \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \quad (3.2a)$$

Ecuaciones de movimiento para partículas de polvo, iones y electrones:

$$nmD\vec{v} = -\nabla p + Zen\vec{E} + \frac{Zen}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.3)$$

$$n_i m_i D_i \vec{v}_i = -\nabla p_i + en_i \vec{E} + \frac{en_i}{c} \vec{v}_i \times \vec{B}, \quad (3.4)$$

$$0 = -\nabla p_e - en_e \vec{E} - \frac{en_e}{c} \vec{v}_e \times \vec{B}. \quad (3.5)$$

Ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e + Zn\vec{v}). \quad (3.6)$$

Ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Condiciones iniciales sobre \vec{E} y \vec{B} :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.9)$$

Ecuación de estado:

$$p_a = C \rho_a^{\gamma_a} \quad (3.10)$$

Ecuación de cuasi-neutralidad:

$$n_e = n_i + Zn,$$

se utiliza la notación descrita en el capítulo anterior. A partir de este conjunto de ecuaciones se encuentran las que definen el modelo para los modos magnetoacústicos de la siguiente manera:

Despejando el campo eléctrico, \vec{E} , de (3.5) y sustituyendo en (3.3) se tiene:

$$nmD\vec{v} = -\nabla p - \frac{Zn}{n_e} \nabla p_e - \frac{Zne}{c} \vec{v}_e \times \vec{B} + \frac{Zen}{c} \vec{v} \times \vec{B},$$

despejando \vec{v}_e de (3.6) y sustituyendo en la ecuación anterior y, haciendo uso de la ecuación de cuasi-neutralidad y (3.10) se obtiene:

$$nmD\vec{v} = \frac{Z}{4\pi} \frac{n}{n_e} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \frac{Zen_i}{cn_e} n(\vec{v} - \vec{v}_i) \times \vec{B} - Z\gamma_e T_e \frac{n}{n_e} \nabla n_e - \gamma T \nabla n. \quad (3.11)$$

Despejando el campo eléctrico, \vec{E} , de (3.5) y sustituyendo en (3.4) se calcula:

$$n_i m_i D_i v_i = -\nabla p_i - \frac{n_i}{n_e} \nabla p_e - \frac{en_i}{c} \vec{v}_e \times \vec{B} + \frac{en_i}{c} v_i \times \vec{B}.$$

Despejando \vec{v}_e de (3.6) y sustituyendo en la ecuación anterior, haciendo uso de la ecuación de cuasi-neutralidad y (3.10) se obtiene:

$$n_i m_i D_i v_i = \frac{1}{4\pi} \frac{n_i}{n_e} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{Z e n_i}{c n_e} m_i (\vec{v} - \vec{v}_i) \times \vec{B} - \gamma_i T_i \frac{n_i}{n_e} \nabla n_i - \gamma_i T_i \nabla n_i. \quad (3.12)$$

Tomando el rotacional de (3.3) y cancelando términos se tiene:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{mc}{Ze} \nabla \times (D\vec{v}) - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (3.13)$$

Tomando la divergencia de (3.6) y haciendo uso de la ecuación de cuasi-neutralidad se obtiene:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0. \quad (3.14)$$

Con el mismo procedimiento se calcula:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0. \quad (3.15)$$

Agregamos, aquí, la ecuación de cuasi-neutralidad como la ecuación número:

$$n_e = n_i + Z n. \quad (3.16)$$

Resumiendo, las ecuaciones (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) son las ecuaciones para los modos magnetoacústicos, donde las cantidades n_e, m_e, T_e, \vec{v}_e denotan la densidad, masa, temperatura y velocidad del fluido de las partículas correspondientes, Z es el número de carga del polvo que es positivo en este caso pero puede ser también negativo, e es la magnitud de la carga del electrón y c es la velocidad de la luz. Las cantidades γ_i, γ_e son los índices adiabáticos, cuyos valores numéricos se escogen de manera conveniente. Por ejemplo, para frecuencias muy bajas es apropiado suponer que el proceso es isotérmico, en tal caso se pueden usar los valores $\gamma_e = \gamma_i = 1$.

En las ecuaciones (3.11) y (3.12) se denotan las derivadas convectivas definidas para las velocidades del flujo del fluido del polvo y de los iones respectivamente como:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \quad \text{y} \quad D_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \right).$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) contienen nuevos términos de fuerzas que son proporcionales a la velocidad relativa entre el fluido de iones y de polvo, son iguales en magnitud pero opuestos en signo ya que en ausencia de una fuente externa o sumidero en el sistema, el momento total de los fluidos tiene que conservarse.

Como en el caso de los plasmas de dos componentes (iones-electrones) ellos deben alcanzar, incluso en ausencia de colisiones, una resistencia inercial efectiva que haga que los movimientos de flujo de los iones y electrones no se congelen uno a otro (Speiser 1970). El campo magnético de la onda para el modo rápido tiene su dirección a lo largo del campo magnético externo $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$, el cual, como se indica es tomado en la dirección \hat{z} . Se escribirá en lo sucesivo $B = B_z$. Se supone que las componentes de la velocidad para el fluido de los iones y del polvo están dadas por $\vec{v}_i = (u_i, v_i, 0)$ y $\vec{v} = (u, v, 0)$ respectivamente. Las densidades n_i, n_p y n_e , así como las velocidades dependen de x y t .

Realizando las operaciones indicadas en las ecs. (3.11) - (3.15) se obtienen las siguientes ecuaciones por componentes:

$$nmD_u = -\frac{Z n_i B}{4 \pi n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{Z n_i}{n_e} \frac{\partial n_i}{\partial x} - \gamma T_e \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{e n_i}{c n_e} Z n (v - v_i) B. \quad (3.17)$$

$$nmD_v = -\frac{e n_i}{c n_e} Z n (u - u_i) B. \quad (3.18)$$

$$m_i n_i D_i u_i = -\frac{n_i B}{4 \pi n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{n_i}{n_e} \frac{\partial n_i}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} - \frac{e n_i}{c n_e} Z n (v - v_i) B. \quad (3.19)$$

$$m_i n_i D_i v_i = \frac{e n_i}{c n_e} Z n (u - u_i) B. \quad (3.20)$$

$$DB + B \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m c}{2 e} \frac{\partial}{\partial x} (Dv) = 0. \quad (3.21)$$

$$Dn + n \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.22)$$

$$D_i n_i + n_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

Donde las derivadas convectivas para el fluido polvoso y de iones están ahora definidas respectivamente por:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x}.$$

Las ecuaciones (3.16) - (3.23) constituyen un conjunto completo de ecuaciones que rigen el comportamiento de los fenómenos que involucran movimientos ondulatorios compresionales rápidos en plasmas polvosos magnetizados.

III-2b. Relación general de dispersión.

Para obtener los modos normales del sistema contenidos en este conjunto de ecuaciones, con ondas planas, se linealiza y se aplica análisis de Fourier a las ecs. (3.16) - (3.23). Se supone que las perturbaciones se propagan paralelamente a la dirección \hat{x} variando como $\exp i(kx - \omega t)$.

Las expresiones para las cantidades perturbadas son: $n_a = n_{a0} + \hat{n}_a \exp i(kx - \omega t)$, $v_a = \hat{v}_a \exp i(kx - \omega t)$, $u_a = \hat{u}_a \exp i(kx - \omega t)$, $B = B_0 + \hat{B} \exp i(kx - \omega t)$. Se desprecian términos de segundo orden.

De (3.18), se obtiene:

$$\hat{v} = -\frac{iZn_0 eB_0}{m\omega cn_{e0}} (\hat{u} - \hat{u}_i). \quad (3.24)$$

De (3.20) se tiene:

$$\hat{v}_i = \frac{iZn_0 eB_0}{m_i\omega cn_{e0}} (\hat{u} - \hat{u}_i). \quad (3.35)$$

De (3.21) y (3.24) se calcula:

$$\hat{B} = \frac{kB_0}{n_{e0}\omega} [(n_{e0} - n_{i0})\hat{u} + n_{i0}\hat{u}_i]. \quad (3.26)$$

De (3.22) se obtiene:

$$\hat{n} = \frac{n_0 k}{\omega} \hat{u}. \quad (3.27)$$

De (3.23) se calcula:

$$\hat{n}_i = \frac{n_{i0} k}{\omega} \hat{u}_i. \quad (3.28)$$

Al linealizar y aplicar análisis de Fourier a las ecuaciones (3.17) y (3.19) y sustituir las expresiones (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) y (3.28) se obtiene un sistema lineal de ecuaciones. Del determinante igualado a cero se obtiene la relación general de dispersión siguiente:

$$\left(m \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma T \right) \left(m_i n_{e0} \frac{\omega^2}{k^2} - (n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i) - \frac{n_{e0}}{n_{e0}} \frac{B_0^2}{4\pi} \right) - \frac{Z^2 n_0}{n_{e0}} \left(m_i \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma_i T_i \right) \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) - \frac{\Omega_i^2 Z^2 m_i}{k^2 n_{e0} m} (m n_0 + m_i n_{e0}) \left[(m n_0 + m_i n_{e0}) \frac{\omega^2}{k^2} - \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \lambda_i T_i + n_{e0} \gamma T \right) \right] = 0, \quad (3.29)$$

donde $\Omega_i = \frac{e B_0}{m_i c}$ es la frecuencia de giro del ion y el subíndice 0 indica las cantidades en equilibrio respectivamente.

III-2c. Modos para plasma polvoso no magnetizado.

Antes de considerar la relación de dispersión general (3.29), se discuten brevemente los modos para el caso de plasmas polvosos no magnetizados, $B_0 \rightarrow 0$, contenidos en dicha relación de dispersión y que fueron comentados en la introducción del presente capítulo.

La ec. (3.29) se reduce a:

$$\left(m \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma T \right) \left[m_i n_{e0} \frac{\omega^2}{k^2} - (n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i) \right] - Z^2 n_0 \left(m_i \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma_i T_i \right) \gamma_e T_e = 0,$$

y de la ecuación anterior:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m} \left(\frac{Z^2 n_0 \gamma_e T_e \left(\gamma_i T_i - m_i \frac{\omega^2}{k^2} \right)}{n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \left(\gamma_i T_i - m_i \frac{\omega^2}{k^2} \right)} + \gamma T \right). \quad (3.30 \text{ a})$$

Para $\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma_i T_i}{m_i}$, de la ec.(3.30a) se tiene:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m} \left(\frac{Z^2 n_o \gamma_e T_e \gamma_i T_i}{n_o \gamma_e T_e + n_{oe} \gamma_i T_i} + \gamma T \right), \quad (3.30 b)$$

que es la relación de dispersión para las llamadas "ondas acústico- polvosas", obtenida por Rao et. al. (1990). La inercia es provista por las partículas de polvo. Estos modos existen cuando la velocidad de fase, $\frac{\omega}{k}$, satisface las desigualdades siguientes:

$$\gamma_i^2 \ll \frac{\omega^2}{k^2} \ll \gamma_i v_a^2 \ll \gamma_e v_a^2,$$

$$\text{donde: } v_i = \left(\frac{T_i}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}, v_a = \left(\frac{T_i}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, v_e = \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

son la velocidad térmica de las partículas de polvo, iones y electrones respectivamente.

Por otro lado, para el caso de partículas de polvo estáticas y frías, $m \rightarrow \infty$ y $T = 0$, se obtiene de (3.29) cuando $B_o \rightarrow 0$:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left(m_i n_{oe} \frac{\omega^2}{k^2} - (n_o \gamma_e T_e + n_{oe} \gamma_i T_i) \right) = 0.$$

Despejando:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{n_o \gamma_e T_e + n_{oe} \gamma_i T_i}{m_i n_{oe}} \quad (3.31)$$

la cual es la relación de dispersión generalizada para el tipo de ondas acústicas llamadas "ondas acústico- iónico-polvosas" discutidas por Shukla & Silin (1992). Estos modos existen cuando la velocidad de fase de la onda, $\frac{\omega}{k}$, satisface las desigualdades:

$$\gamma_i^2 \ll \gamma_e v_a^2 \ll \frac{\omega^2}{k^2} \ll \gamma_e v_a^2.$$

Usando la ecuación de cuasi-neutralidad $n_o = n_i + Z n_p$ y suponiendo $\gamma_e = \gamma_i = \frac{2+N}{N} = 3$ la ec. (3.31) se puede reescribir como:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_e T_e}{m_i} \left(\frac{1 + \vartheta + \vartheta \xi}{1 + \xi} \right), \quad (3.31 a)$$

donde:

$$\vartheta = \frac{T_i}{T_e} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{Z n_0}{n_i}.$$

Por otro lado, la ec.(3.31) para el caso sin polvo se reduce a:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_e T_e}{m_i} (1 + \vartheta). \quad (3.31 b)$$

Comparando las velocidades de fase de ambas ondas, (3.31a) y (3.31b), para $T_e \gg T_i$ se obtiene:

$$v_{\text{fase}}^2 = \left(\frac{1}{1 + \xi} \right) v^2. \quad (3.31 c)$$

es decir, la presencia de polvo, aún considerado estático cambia la velocidad de fase de la onda. Para el caso $T_e \gg T_i$ la ec.(3.31b) se reduce directamente a:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_e T_e}{m_i},$$

que es el modo para plasmas de dos componentes. La magnitud y la importancia de este cambio dependerá de los parámetros del plasma y de lo que se esté midiendo.

La relación de dispersión (3.29) contiene, en general, modos que están determinados por la inercia del ion así como por la inercia del polvo. Se consideran los dos casos por separado en las siguientes secciones.

III-2d. Modos Magnetoacústico-polvosos.

En el régimen de muy baja frecuencia, la dinámica colectiva del polvo juega un papel dominante, y la inercia es proporcionada esencialmente por la masa de las partículas de polvo. Para los modos de onda resultantes se puede tratar a los iones conjuntamente con los electrones, como formando un fluido casi sin masa.

Para velocidades de fase mucho menores que la velocidad térmica de los iones, $\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma_e T_e}{m_i}$, la expresión (3.29) puede ser reescrita como:

$$\omega^2 - \frac{k^2}{m} \left(\frac{Z^2 n_0 \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) \gamma_e T_e}{n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_e T_e + \frac{n_{i0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}} + \gamma T \right) + \frac{\Omega_i^2 Z^2 m_i (m n_0 + m_i n_{i0})^2 \omega^2}{k^2 n_{e0} m^2} = 0$$

$$\frac{\frac{\Omega_i^2 Z^2 m_i (m n_0 + m_i n_{i0})^2}{k^2 n_{e0} m^2}}{\left(n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_e T_e + \frac{n_{i0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right)} - \frac{k^2 \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T \right)}{(m n_0 + m_i n_{i0})} = 0$$

La ecuación anterior se puede reducir a:

$$(\omega^2 - k^2 V^2_{DM}) + \lambda (\omega^2 - k^2 V^2_M) = 0 \quad (3.32)$$

donde:

$$V_M^2 = \frac{1}{m n_0 + m_i n_{i0}} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T \right) \quad (3.33 a)$$

$$V_{DM}^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{Z^2 n_0 \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) \gamma_e T_e}{n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_e T_e + \frac{n_{i0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}} + \gamma T \right) \quad (3.33 b)$$

$$\lambda = \frac{\frac{\Omega_i^2 Z^2 m_i (m n_0 + m_i n_{i0})^2}{k^2 n_{e0} m^2}}{n_{i0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_e T_e + \frac{n_{i0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}} \quad (3.34)$$

donde el subíndice DM y M indican respectivamente las velocidades magnetoacústica-polvosa y la magnetoacústica usual, es decir, la ec. (3.32) contiene ambas velocidades. La cantidad λ se define positiva.

Definiendo $\beta = \frac{\lambda V_M^2}{V_{DM}^2}$, la ec. (3.32) puede ser reescrita como:

$$(\omega^2 - k^2 V_{DM}^2) + (\lambda \omega^2 - \beta k^2 V_{DM}^2) = 0. \quad (3.35)$$

de donde:

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{1 + \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\lambda}} \right) V_M^2.$$

Para $\lambda \gg 1, \beta \gg 1$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$\omega^2 = k^2 V_M^2 \quad (3.35a)$$

la cual es la relación de dispersión para el tipo usual de onda magnetoacústica en un plasma multicomponente. Tomando el límite $m_i \rightarrow 0$ de la ec.(3.33a) la relación de dispersión (3.35a) toma la forma:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m_i n_i} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i + n_{\alpha 0} \gamma T \right). \quad (3.36)$$

Se obtiene la ec. (3.36) a partir de la (3.32) para comprobar en el proceso que λ y β tienden a infinito cuando $m_i \rightarrow 0$ y que, por lo tanto, $\lambda \gg 1$ y $\beta \gg 1$ quedan satisfechas completamente en este límite, lo cual, confirmará que la relación de dispersión (3.36) se obtuvo adecuadamente.

Se toma el límite mencionado, $m_i \rightarrow 0$, para la ec. (3.32):

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} \left(\frac{\omega^2}{\lambda k^2} - \frac{V_{DM}^2}{\lambda} + \frac{\omega^2}{k^2} - V_M^2 \right) = 0. \quad (3.36a)$$

De (3.34) se obtiene:

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} \lambda = \lim_{m_i \rightarrow 0} \left(\frac{q(mn_0 + m_i n_{i0})^2}{m_i} \right) = \infty .$$

donde q contiene términos independientes de la masa de los iones. Tomando $m_i \rightarrow 0$ de

$$\beta = \lambda \frac{V_M^2}{V_{DM}^2} \text{ se tiene que:}$$

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} \beta = \frac{1}{v_{DM}^2} \lim_{m_i \rightarrow 0} \left(\frac{qs(mn_0 + m_i n_{i0})}{m_i} \right) = \infty ,$$

$$\text{donde } s = \left(\frac{B_V^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i + n_{\omega} \gamma T \right) .$$

De la ec. (3.33a):

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} V_M^2 = \lim_{m_i \rightarrow 0} \left(\frac{s}{mn_0 + m_i n_{i0}} \right) = \frac{s}{m n_0} .$$

Con el resultado anterior para λ y β la ec. (3.36a) se reduce a:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{mn_0} \left(\frac{B_V^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i + n_{\omega} \gamma T \right) ,$$

donde la presión total en el numerador del lado derecho, aporta la fuerza de restauración y es justamente la suma de la presión del campo magnético y la presión térmica provocada por las diferentes especies de partículas. La densidad de masa en el denominador es provista esencialmente por las partículas más pesadas de polvo, las cuales aportan la inercia. Este modo es el llamado "magnetoacústico usual". Como se mostrará en el apartado III-3, existe para frecuencias $\omega \ll \Omega$.

Por otro lado, para $\lambda \ll 1$ y $\beta \ll 1$, la ec. (3.35) da una nueva clase de "onda magnetoacústica-polvosa" determinada por:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = V_{DM}^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{Z^2 n_0 \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) \gamma_i T_i}{n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i + \frac{n_{e0} B_0^2}{4\pi}} + \gamma T \right), \quad (3.37)$$

la cual requiere que $T_i \neq 0$ porque se usó la condición $\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma_i T_i}{m_i}$ para obtener la ec.(3.32).

Analizando las desigualdades $\lambda \ll 1$ y $\beta \ll 1$ se obtienen las siguientes condiciones para la existencia del modo magnetoacústico-polvoso (3.37):

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll \mu \frac{\gamma_i T_i}{m_i}, \quad (3.38a)$$

$$\omega^2 \geq \max \left\{ \Omega_i^2 (1 + \epsilon), \left(\frac{Z n_0}{n_{e0}} \right)^2 \Omega_i^2 (1 + \epsilon)^2 \right\}, \quad (3.38b)$$

donde:

$$\mu = \frac{\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \lambda_e T_e}{\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i + n_{e0} T}, \quad (3.39)$$

y $\epsilon = \frac{m_i n_0}{m n_0}$ es un cociente de densidad de masa. El modo (3.37) es una generalización electromagnética del modo acústico-polvoso encontrado en la sección III-2c, cuando $B_0 \rightarrow 0$, la ec. (3.37) se reduce exactamente a (3.30b).

Para valores intermedios de λ y β se obtiene de (3.32) la relación de dispersión para el modo magnetoacústico siguiente:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{V_{DM}^2 + \lambda V^2}{1 + \lambda} \quad (3.40)$$

el cual involucra tanto la velocidad magnetoacústico-polvosa como la magnetoacústica.

III-2e. Modo Magnetoacústico-iónico-polvoso.

Para escalas de tiempo mucho más cortas que el tiempo de respuesta de las partículas de polvo, éstas deben suponerse casi inmóviles, debido a su masa, así que el movimiento ondulatorio está dominado por las contribuciones de la dinámica del fluido de iones, mientras que la componente polvosa forma esencialmente un fondo neutralizado estático. Como ya se mencionó Shukla & Silim (1992) encontraron, en este régimen, el modo (3.31) llamado "onda acústico-iónico-polvosa". En esta sección se buscará la existencia de una generalización electromagnética de este modo a partir de la ec.(3.29). Para partículas de polvo casi inmóviles, en esta escala de tiempo, se toman los límites cuando $m \rightarrow \infty$ y $T \rightarrow 0$. De (3.29) se obtiene:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \left[\left(m_1 n_{e0} \frac{\omega^2}{k^2} - (n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i) - \frac{n_{ie} B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right) - \frac{\Omega_i^2 Z^2 m_1 n_0^2}{k^2 n_{e0}} \right] = 0,$$

de donde:

$$\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{Z^2 \Omega_i^2}{k^2} \left(\frac{n_0}{n_{e0}} \right)^2 = \frac{1}{m_1 n_{e0}} \left(n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i + \frac{n_{ie} B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right). \quad (3.41a)$$

Para frecuencias $\omega \gg \frac{Z \Omega_i n_0}{n_{e0}}$, se puede despreciar el segundo término del lado izquierdo.

Esta aproximación puede ser relevante para los plasmas polvosos encontrados en situaciones del espacio planetario, donde la densidad de polvo es típicamente mucho más pequeña que la densidad de electrones y iones. La ec. (3.41a) entonces queda como:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m_1 n_{e0}} \left(n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma_i T_i + \frac{n_{ie} B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right), \quad (3.41b)$$

que es la relación de dispersión del modo magnetoacústico, que se le conoce como: "onda magnetoacústica-iónico-polvosa". En el límite de plasma polvoso no magnetizado la ec. (3.41b), se reduce exactamente a la relación de dispersión (3.31).

III-2f. Modo magnetoacústico-polvoso (caso especial).

Ahora se considera un caso especial del sistema de ecuaciones (3.16) - (3.23) y se obtiene el rango de frecuencia para la existencia de otro tipo de onda magnetoacústica-polvosa, como se mencionó en la introducción del presente capítulo, discutida anteriormente por (Rao 1993c).

Para frecuencias $\omega \gg \Omega_e \gg \Omega_i$, de las ecs. (3.18) y (3.20) se tiene que v y v_i tienden a cero aún cuando la diferencia de velocidades, $u - u_i$, es diferente de cero, esto es, aún cuando los fluidos de polvo y de iones no están congelados entre sí. Las ecuaciones (3.17) - (3.21) dan entonces el siguiente sistema simplificado de ecuaciones:

$$nmDv = -\frac{Zn}{4\pi n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{Zn}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma T \frac{\partial n}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$n_i m_i D_i u_i = -\frac{n_i}{n_e} \frac{B}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{n_i}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} \quad (3.43)$$

$$DB + B \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.44)$$

$$\text{donde } D = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x}$$

Las ecs. (3.42) - (3.44), (3.16), (3.22) y (3.23) constituyen un conjunto completo para describir los modos (rápidos) comprensionales en el límite de alta frecuencia. Como al principio, se supone que las perturbaciones varían como $\exp(i(kx - \omega t))$, linealizando y aplicando análisis de Fourier se obtiene la nueva relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m} \left(\frac{Z \left(Z n_e \gamma_e T_e + \frac{B_0^2}{4\pi} \right) \left(\gamma_i T_i - \frac{m_i \omega^2}{k^2} \right)}{n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i - m_i n_{i0} \frac{\omega^2}{k^2}} + \gamma T \right) \quad (3.45)$$

Nuevamente, para $\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma_i T_i}{m_i}$ la ec. (3.45) se reduce a:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m} \left(\frac{Z \gamma_i T_i \left(Z n_e \gamma_e T_e + \frac{B_0^2}{4\pi} \right)}{n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i} + \gamma T \right) \quad (3.46)$$

que representa el otro tipo de onda magnetoacústica-polvosa. Como se mostrará en el apartado intitulado aproximación "Electro-magnetohidrodinámica" (EMHD) del presente capítulo, este modo existe en el rango de frecuencia $\Omega \ll \Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$, en el que tanto el polvo como los iones están poco magnetizados, pero los electrones lo están altamente.

III-2g. Discusión.

Los modos magnetoacústicos-polvosos (3.37) y (3.46) tienen diferentes dependencias sobre los varios parámetros de equilibrio y difieren substancialmente de la onda magnetoacústica usual (3.36). Estos modos existen en diferentes regímenes de frecuencia, los cuales están bien separados en un plasma polvoso realista. Aún más, para plasmas polvosos no magnetizados, ambas ecs.(3.37) y (3.46) se reducen a la misma relación de dispersión (3.30b) para ondas acústico-polvosas. Así pues la introducción de un campo magnético externo remueve la degeneración del modo, dando origen a estos dos modos de onda distintos. Por otro lado, se puede demostrar que en el límite de dos componentes, los tres modos (3.36), (3.37) y (3.46) se reducen exactamente a la relación de dispersión para onda magnetoacústica usual pero para dos especies. Tomando en cuenta que, para estos modos, la inercia la proveen las especies pesadas de polvo, la forma correcta de tomar este límite es hacer que $n_o \rightarrow 0$, y no calculando el caso para $n_o \rightarrow 0$. Para tal caso, las relaciones de dispersión mencionadas se reducen exactamente a:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{mn_o} \left(\frac{B_o^2}{4\pi} + n_{eo}\gamma_e T_e + n_o\gamma T \right), \quad (3.47)$$

para el cálculo anterior se obtuvo de (3.16) $n_{eo} = Zn_o$ ya que $n_o = 0$. La ecuación (3.47) es justo la relación de dispersión estándar para el modo usual magnetoacústico en un plasma de dos componentes que consiste de partículas de polvo y electrones. Ahora, se discute las diferencias básicas entre los tres tipos de modos magnetoacústicos, (3.36), (3.37) y (3.46) obtenidos anteriormente. El modo magnetoacústico usual multi-componente (3.36) existe cuando $\omega \ll \Omega$. Para este modo de las ecs.(3.24) y (3.25) se tiene que $\hat{u} = \hat{u}_i$, donde \hat{u}_i, \hat{u}_e son las amplitudes de las componentes de las velocidades perturbadas en la dirección \hat{x} de las partículas de polvo y de los iones respectivamente. De las ecuaciones (3.27) y (3.28) se tiene:

$$\hat{u} = \frac{\alpha \hat{u}_i}{n_o k}, \quad (3.48)$$

$$\hat{u}_i = \frac{\alpha \hat{u}_e}{n_{io} k}, \quad (3.48a)$$

igualando las ecs.(3.48) y (3.48a) se obtiene:

$$\frac{\hat{n}}{n_o} = \frac{\hat{n}_i}{n_{io}}$$

Al linealizar y aplicar análisis de Fourier a la ecuación de transporte magnético (3.21) se transforma en:

$$-\frac{i\omega\hat{B}}{B_0} + iAk\hat{u} + \frac{\omega k}{\Omega}\hat{v} = 0$$

Para $\omega \ll \Omega$ la ecuación anterior se reduce a:

$$-\omega\hat{B} + B_0 k\hat{u} = 0,$$

de donde:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{u}}{\omega/k}.$$

Despejando de la ec.(3.48) la velocidad de fase y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{u}}{\omega} = \frac{\hat{n}}{n_0}.$$

Usando la condición de cuasi-neutralidad, $\hat{n}_e = \hat{n}_i + Z\hat{n}$ y $n_{e0} = n_{i0} + Zn_0$, de las ecs.(3.48) y (3.48a) se obtiene:

$$\frac{\hat{u}}{\omega} = \frac{\hat{n}_e}{n_{e0}}$$

sustituyendo el valor de $\frac{\omega}{k}$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\hat{n}_e}{n_{e0}} = \frac{\hat{n}_i}{n_{i0}}.$$

Finalmente:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{n}}{n_0} = \frac{\hat{n}_i}{n_{i0}} = \frac{\hat{n}_e}{n_{e0}}, \quad (3.48b)$$

esto es, los tres fluidos están congelados a las líneas de campo magnético, y las perturbaciones de campo magnético se propagan en fase con las fluctuaciones de la densidad.

La situación es, sin embargo, un poco diferente para las ondas magnetoacústico-polvosas, dadas por las relaciones de dispersión (3.37) y (3.46). Se considera primero el modo dado por (3.37), para lo cual, se elimina el término D v usando las ecs. (3.18) y (3.21). Se tiene:

$$DB + B \frac{\partial u}{\partial x} - (u - u_i)B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_i}{n_e} \right) - \frac{n_i}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} [(u - u_i)B] = 0.$$

La ecuación anterior se linealiza y aplica análisis de Fourier, se obtiene:

$$-n_{e0} \hat{B} + \frac{B_0}{n_0} (n_{e0} - n_{i0}) \hat{n} + B_0 \hat{n}_i = 0.$$

Sustituyendo las ecs. (3.27) y (3.28) se tiene:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{n}_e}{n_{e0}}.$$

Esto es, los electrones están congelados a líneas de campo magnético, mientras que los fluidos de polvo y de iones no lo están. Por lo tanto, para el modo (3.37), las cantidades perturbadas satisfacen las relaciones:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{n}_e}{n_{e0}} \neq \frac{\hat{n}_i}{n_{i0}} \neq \frac{\hat{n}}{n_0}. \quad (3.48c)$$

Por otro lado para el modo (3.46) se sigue de (3.27) y (3.44) que el fluido polvoso está congelado a las líneas de campo magnético, en este caso $\hat{u} \neq \hat{u}_i$, puesto que:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{n}}{n_0}.$$

Por lo tanto, para este modo, las cantidades perturbadas satisfacen las relaciones:

$$\frac{\hat{B}}{B_0} = \frac{\hat{n}}{n_0} \neq \frac{\hat{n}_i}{n_{i0}} \neq \frac{\hat{n}_e}{n_{e0}}, \quad (3.49)$$

Se verá en el apartado intitulado EMHD cómo se obtienen explícitamente los regímenes de existencia de estos modos. En la siguiente tabla 1 se resumen todos los modos analizados hasta aquí.

Tabla 1. Modos magnetoacústicos contenidos en la relación general de dispersión.

MODO.	RANGO FRECUENCIA.	DE	REL. DISP.	CONDICIONES.
magnetoacústico			(3.40)	λ, β arbitrarios
magnetoacústico-usual	$\omega \ll \Omega \ll \Omega_i \ll \Omega_e$		(3.36)	$\lambda \gg 1, \beta \gg 1$
magnetoacústico-polvoso	$\Omega \ll \Omega, \leq \omega \ll \Omega_e$		(3.36)	$\lambda \ll 1, \beta \ll 1, T_i \neq 0$
magnetoacústico-polvoso	$\Omega \ll \Omega, \ll \omega \ll \Omega_e$		(3.46)	$T_i \neq 0$
magnetoacústico-iónico-polvo	$\omega \gg Z\Omega_i \frac{n_0}{n_{e0}}$		(3.41b)	$m \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$
acústico-polvoso			(3.30b)	$v_i^2 \gamma \ll \frac{\omega^2}{k^2} \ll v_a^2 \gamma, \ll v_{n\gamma}^2$
acústico-iónico-polvoso			(3.31)	$v_i^2 \gamma \ll v_a^2 \gamma, \ll \frac{\omega^2}{k^2} \ll v_{n\gamma}^2$

Todos los modos enlistados son electromagnéticos, ondas hidromagnéticas comprensionales, excepto (3.30b) y (3.31), los cuales son ondas semejantes a las acústico electrostáticas. Se debe notar que, debido a que no hay ordenamiento entre las masas m y m_i al obtener la ec. (3.29), ésta es también válida para plasmas usuales multi-componentes que contienen en lugar de partículas de polvo, especies ligeras para partículas tales como electrones pero con temperaturas diferentes. La ec. (3.29) entonces da modos magnetoacústicos que son complementarios a los modos dados por (3.36) y (3.37). Esto es, modos donde la inercia es provista por los iones pesados. Con la finalidad de obtener tales modos, se reescribe (3.29) como:

$$\left(m \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma T_i \right) \left[\frac{m n_{e0} \omega^2}{k^2} - (Z^2 n_0 \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T) - \frac{Z^2 n_0 B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right] - \frac{n_{e0}}{n_{e0}} \left(\frac{m \omega^2}{k^2} - \gamma T \right) \frac{B_0^2}{4\pi} - \left(\frac{m \omega^2}{k^2} - \gamma T \right) n_{i0} \gamma_e T_e - \frac{\Omega_i^2 Z^2 m}{k^2 n_{e0}} (m n_0 + m_i n_{i0}) \left[(m n_0 + m_i n_{i0}) \frac{\omega^2}{k^2} - \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma T_i + n_{e0} \gamma T \right) \right] = 0,$$

de donde:

$$\begin{aligned} & \left(m_i \frac{\omega^2}{k^2} - \gamma, T_i \right) \left[\frac{m n_{e0} \omega^2}{k^2} - (Z^2 n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T) - \frac{Z^2 n_{e0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi} \right] \\ & - \frac{n_{i0}}{n_{e0}} \left(\frac{m \omega^2}{k^2} - \gamma T \right) \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) \\ & - \frac{\Omega^2 m}{k^2 n_{e0} m_i} (m n_{i0} + m_i n_{e0}) \left[(m n_{i0} + m_i n_{e0}) \frac{\omega^2}{k^2} - \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i + n_{e0} \gamma T \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

en (3.50), $\Omega = \frac{ZeB_0}{mc}$ es la frecuencia de giro de las partículas de polvo.

Definiendo,

$$\tilde{V}_{DM}^2 = \frac{1}{m_i} \left[\frac{\frac{n_{i0}}{n_{e0}} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right) \gamma T}{Z^2 n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T + \frac{Z^2 n_{e0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}} + \gamma, T_i \right], \quad (3.51)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\frac{\Omega^2 m}{k^2 n_{e0} m_i} (m n_{i0} + m_i n_{e0})^2}{Z^2 n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T + \frac{Z^2 n_{e0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\tilde{\lambda} V_{DM}^2}{V_{DM}^2}, \quad (3.53)$$

y usando $\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma T}{m}$, la ec.(3.50) se reescribe como:

$$(\omega^2 - k^2 \tilde{V}_{DM}^2) + (\tilde{\lambda} \omega^2 - \tilde{\beta} k^2 \tilde{V}_{DM}^2) = 0. \quad (3.54)$$

Para $\tilde{\lambda} \gg 1, \tilde{\beta} \gg 1$, esto es cuando $m \rightarrow 0$, la ec. (3.54) da la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m_i n_{i0}} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e + n_{i0} \gamma_i T_i + n_{i0} \gamma T \right), \quad (3.55)$$

la cual es complementaria a (3.36) y es válida cuando $\omega \ll \Omega_e, \Omega_i, \Omega_e \dots$. Por otro lado, para $\tilde{\lambda} \ll 1, \tilde{\beta} \ll 1$, esto es, para:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll \mu \frac{\gamma T}{m}, \quad (3.56)$$

$$\omega^2 \geq \max \left\{ \Omega^2 (1 + \hat{\varepsilon}), \left(\frac{n_{i0}}{n_{e0}} \right)^2 \Omega^2 (1 + \hat{\varepsilon})^2 \right\}, \quad (3.57)$$

donde $\hat{\varepsilon} = \frac{m n_{e0}}{m_i n_{i0}}$ y μ está dada por (3.39), se obtiene para $T \neq 0$ la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \mathcal{V}_{DM}^2 = \frac{1}{m_i} \left[\frac{\frac{n_{i0}}{n_{e0}} \gamma T \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{e0} \gamma_e T_e \right)}{Z^2 n_{e0} \gamma_e T_e + n_{e0} \gamma T + \frac{Z^2 n_{e0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}} + \gamma_i T_i \right]. \quad (3.58)$$

la cual es complementaria al modo dado por (3.37). Finalmente, para valores arbitrarios de $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\beta}$ se obtiene la relación de dispersión:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\mathcal{V}_{DM}^2 + \tilde{\lambda} \mathcal{V}_{M}^2}{1 + \tilde{\lambda}} \quad (3.59)$$

la cual es complementaria al modo dado por (3.40). Resumiendo:

Tabla 2. Modos complementarios.

MODO	RANGO-FRECUENCIA	RELACION DISPERSION	CONDICIONES
Comp.		(3.59)	$\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\beta}$ arbitrarios.
Comp.	$\omega \ll \Omega_e, \Omega_i, \Omega_e \dots$	(3.55)	$\tilde{\lambda} \gg 1, \tilde{\beta} \gg 1$
Comp.		(3.58)	$\tilde{\lambda} \ll 1, \tilde{\beta} \ll 1, T \neq 0$.

En estos modos la inercia es provista por las partículas más pesadas, las cuales, en el presente caso, son los iones.

III-3. Aproximación Electro-Magnetohidrodinámica (EMHD).

Aquí se da una derivación alternativa de las ecuaciones relevantes que rigen el comportamiento de los modos magnetoacústico-polvosos, encontradas y analizadas en apartado anterior, se sigue un procedimiento similar al usado en el método "Electro-Magnetohidrodinámico" (EMHD) (Gordeev et al.). En contraste con la aproximación MHD, la aproximación EMHD es particularmente útil para fenómenos en los que las escalas de tiempo característico son relativamente mucho menores que aquellas usadas en la MHD tradicional. Las velocidades de flujo de corriente son grandes comparadas con las velocidades de flujo de masa, y consecuentemente la corriente de conducción en la ley de Ampere es dada, en la mayoría de los casos, en términos de las velocidades de flujo de las especies más ligeras. Esta derivación facilita un mejor entendimiento de las derivas de las partículas involucradas en los modos discutidos en las secciones III-2c,d,e,f. Para este propósito, es más conveniente retener, como no se hace en el análisis MHD, el vector de campo eléctrico \vec{E} en las ecuaciones originales de los tres fluidos para plasma polvoso. Se analizan los tres casos por separado.

III-3a. Régimen de baja frecuencia: $\omega \ll \Omega \ll \Omega_i \ll \Omega_e$,

En el rango de frecuencia mucho más pequeño que las frecuencias de giro de todas las especies, es apropiada la aproximación MHD, los tres fluidos están altamente magnetizados. Sin perder generalidad, se puede tomar al vector eléctrico \vec{E} polarizado a lo largo de la dirección \hat{y} . Las derivas dominantes a lo largo de la dirección de propagación, digamos la dirección \hat{x} , son las derivas $\vec{E}_y \times \vec{B}_0$ las cuales son las mismas para las tres componentes. Tomando el rotacional de la ec. (3.7) y combinándola con la (3.6) se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (Zn\vec{v} + n_1\vec{v}_1 - n\vec{v}_e) \quad (3.60)$$

o sea que:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (Zm\vec{u} + n_1\vec{u}_1 - n_e\vec{u}_e, Zm\vec{v} + n_1\vec{v}_1 - n_e\vec{v}_e, 0)$$

Linealizando y aplicando análisis de Fourier la componente x de la ecuación anterior da la relación de conservación de corriente correspondiente:

$$n_{e0}\hat{u}_e = Zn_0\hat{u} + n_{10}\hat{u}_1, \quad (3.61)$$

la cual es trivialmente satisfecha debido a las derivas $\vec{E}_y \times \vec{B}_0$ así como por la condición de neutralidad de carga de equilibrio $n_{e0} = n_{i0} + Zn_0$. La componente \hat{y} de la ec. (3.60) da:

$$\nabla^2 E_y = \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (Zn_0 \hat{v}_y + n_{i0} \hat{v}_i - n_{e0} \hat{v}_e), \quad (3.62)$$

donde las velocidades perturbadas, \hat{v}_y, \hat{v}_i y \hat{v}_e , del lado derecho han sido substituidas en términos de la polarización, así como de las derivas diamagnéticas. La deriva dominante viene de la velocidad polarizada del polvo, debido a la gran masa de las partículas de polvo comparadas con la masa del ion y del electrón. Despreciando, por tanto, la polarización de las derivas del ion y del electrón se obtiene de (3.62) la relación de dispersión para la clase usual de ondas magnetoacústicas en un plasma de tres componentes, ec. (3.36).

III-3b. Régimen de frecuencia media: $\Omega \ll \Omega_i \leq \omega \ll \Omega_e$.

Cuando la frecuencia de la onda es mucho mayor que la girofrecuencia del polvo, es apropiada la aproximación similar a la EMHD. En este régimen de frecuencia, las partículas de polvo están débilmente magnetizadas, mientras que los iones y los electrones están magnetizados completamente. De acuerdo con lo anterior, el término $\vec{v} \times \vec{B}$ de la ec.(3.3) para el movimiento de fluido de polvo no se considera, esto es:

$$m_n D\mathbf{u} = Ze n E_x - \gamma T \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (3.63)$$

Mientras que la ecuación de movimiento del fluido iónico (3.4) da las ecuaciones:

$$n_i m_i D_i \mathbf{u}_i = n_i e E_x + \frac{en_i}{c} v_e B - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (3.64)$$

$$n_e m_e D_e \mathbf{v}_e = n_e e E_y - \frac{en_e}{c} u_i B. \quad (3.65)$$

La ec.(3.5) de movimiento para los electrones con $m_e \rightarrow 0$, da las siguientes ecuaciones:

$$0 = -en_e E_x - \frac{en_e}{c} v_e B - \gamma_e T_e \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad (3.66)$$

$$0 = -en_e E_y + \frac{en_e}{c} u_i B, \quad (3.67)$$

ya que la componente polvosa está débilmente magnetizada, sus velocidades de fluido perturbadas tienen cuando mucho componente x . Siguiendo la aproximación EMHD, se ignora la contribución polvosa a la corriente a lo largo de la dirección \hat{y} , se obtiene de la ley de Ampere las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{4\pi e}{c}(n_1 v_1 - n_2 v_2), \quad (3.68)$$

$$n_1 u_1 + Zn_1 - n_2 u_2 = 0. \quad (3.69)$$

El sistema de ecuaciones es cerrado por las ecuaciones de continuidad:

$$Dn_1 + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad (3.70)$$

$$Dn_2 + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (3.71)$$

por la ley de Faraday:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad (3.72)$$

y de la ecuación de cuasi-neutralidad:

$$n_2 = n_1 + Zn_1. \quad (3.73)$$

Las ecuaciones (3.63)-(3.73) forman un conjunto completo. Eliminando E_x entre (3.65) y (3.67), y usando (3.69) para sustituir u_1 , se tiene:

$$m_1 D_1 v_1 = \frac{en_1}{cn_2} u_1 B + \frac{eBZn_1}{cn_2} u_2 - \frac{eB}{c} u_1,$$

de donde:

$$m_1 D_1 v_1 = -\frac{eB}{c} \frac{Zn_1}{n_2} (u_1 - u_2), \quad (3.74)$$

la cual es idéntica a la ec. (3.20). Despejando E_x de la ec. (3.66) y v_2 de la ec. (3.68) al combinarlas se obtiene:

$$E_x = -\frac{B}{cn_e} \left(n_e v_x + \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial B}{\partial x} \right) - \frac{\gamma_e T_e}{en_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad (3.75)$$

la cual muestra que se requiere $E_x \neq 0$, indicando que la onda resultante magnetoacústica-polvosa no es puramente transversal. Sustituyendo la componente E_x de la ec. anterior en (3.63) y (3.64), se obtienen directamente las ecuaciones:

$$nmDu = -\frac{ZnB}{4\pi n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{Zn}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} - \frac{e n_i}{c n_e} Znv_x B, \quad (3.76)$$

$$n_i m_i D_i u_i = -\frac{n_i B}{4\pi m_i} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{n_i}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + \frac{e n_i}{c n_e} Znv_x B. \quad (3.77)$$

Las ecuaciones (3.76) y (3.77) son las mismas que (3.17) y (3.19), cuando los términos que contienen la componente v_x , en la dirección \hat{y} , de la velocidad del fluido polvoso ha sido despreciada. Es decir, aquí no se tiene el término que representa la velocidad relativa entre el fluido polvoso y el de iones. Esto es consistente con el rango de frecuencia $\omega \gg \Omega$ bajo consideración.

Las ecs. (3.67), (3.69), (3.72) y (3.73) pueden ser combinadas apropiadamente para que den una ecuación de evolución para el campo magnético. Despejando E_y de (3.67) y sustituyendo u_x de (3.69) se tiene:

$$E_y = \frac{1}{c} \left(\frac{n_i u_i + Znv_x}{n_e} \right) B.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.72) se obtiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{n_i u_i + Znv_x}{n_e} \right) B \right].$$

Ahora, de (3.18) se despeja el término $(D\vec{v})$ y se sustituye en (3.21), desarrollando términos y usando (3.16), se obtiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{n_i u_i + Zn}{n_e} \right) B \right].$$

Que son exactamente las mismas. Así pues, queda demostrado con todo lo anterior que las ecs. (3.63)-(3.73) son un caso límite del conjunto de ecs. (3.16)-(3.23).

De las ecs. (3.63)-(3.73), se encuentran los modos normales contenidos en este conjunto de ecuaciones, linealizando y aplicando análisis de Fourier se obtiene la relación de dispersión:

$$(\omega^2 - k^2 v_{DM}^2) + (\bar{\lambda} \omega^2 - \bar{\beta} k^2 v_{DM}^2) = 0, \quad (3.78)$$

donde:

$$\bar{\lambda} = \frac{\Omega_i^2 Z^2 n_p m_i (m n_0 + m_i n_{i0})}{k^2 n_{e0} m} \cdot \frac{n_{i0} \gamma_i T_e + n_{e0} \gamma_e T_i + \frac{n_{i0} B_0^2}{n_{e0} 4\pi}}{n_{e0} 4\pi}, \quad (3.79)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\lambda} V_M^2}{V_{DM}^2}, \quad (3.80)$$

V_M y V_{DM} están dadas respectivamente por (3.33a) y (3.33b). Para $\bar{\lambda} \gg 1, \bar{\beta} \gg 1$, la ec. (3.78) da la relación de dispersión para la clase usual de onda magnetoacústica (3.36) en un plasma multi-componente. Por otro lado, para valores de los parámetros $\bar{\lambda} \ll 1$ y $\bar{\beta} \ll 1$, se tienen las desigualdades:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll \mu \frac{\gamma_i T_i}{m_i}, \quad (3.81)$$

$$\omega^2 > m \alpha \alpha \left\{ \Omega_i^2, \left(\frac{Z n_0}{n_{e0}} \right)^2 \Omega_i^2 (1 + \varepsilon) \right\}, \quad (3.82)$$

de tal manera que se recupera el modo magnetoacústico-polvoso (3.37). La condición es la misma que (3.38a), y las condiciones (3.82) y (3.38b) son similares, y de hecho idénticas en el límite cuando ($\varepsilon \rightarrow 0$). Para valores arbitrarios de $\bar{\lambda}$ y $\bar{\beta}$, la ec. (3.78) da una relación de dispersión que es muy similar a (3.40).

III-3c. Régimen de alta frecuencia: $\Omega \ll \Omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$.

En el límite de alta frecuencia, se pueden hacer simplificaciones subsiguientes de las ecs. (3.63)-(3.73). Aquí los iones y las partículas de polvo están, ambos, poco magnetizados, mientras que los electrones están fuertemente magnetizados. Así que (3.64) puede ser aproximada de:

$$n_i m_i D_i v_i = n_i e E_x + \frac{e n_i}{c} v_i B - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} .$$

a la forma:

$$n_i m_i D_i v_i = e n_i E_x - \gamma_i T_i \frac{\partial n_i}{\partial x} . \quad (3.83)$$

El campo eléctrico E_x está dado por (3.75), el cual puede ser aproximado, aún para $\omega \gg \Omega_i$, despreciando la contribución de los iones. Esto es equivalente a tomar sólo la contribución del electrón a la corriente de conducción en la ley de Ampere, y está en acuerdo con la aproximación usada en la EMHD.

Entonces aproximamos de:

$$E_x = -\frac{B}{c n_e} \left(n_i v_i + \frac{c}{4\pi e} \frac{\partial B}{\partial x} \right) - \frac{\gamma_e T_e}{e n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} .$$

a la forma:

$$E_x = -\frac{1}{e n_e} \left(\frac{B}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x} + \gamma_e T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) . \quad (3.84)$$

La ecuación para la evolución del campo magnético, se obtiene combinando la componente y de la ecuación para el polvo de movimiento con la ley de Faraday (3.72). De:

$$m n D v = Z e n E_y - \frac{Z e}{c} m n B ,$$

despejando E_y y sustituyendo en la ecuación de Faraday, se tiene:

$$D B + \frac{m n c}{Z e} \frac{\partial}{\partial x} (D v) + B \frac{\partial n}{\partial x} = 0 ,$$

que es precisamente la ec. (3.21), la cual, cuando $v \rightarrow 0$ toma la forma:

$$D B + B \frac{\partial n}{\partial x} = 0 . \quad (3.85)$$

Las ecs. (3.63), (3.73), y (3.83)-(3.85) están cerradas por medio de las ecuaciones de continuidad para el polvo y los iones, (3.70) y (3.71).

De (3.84) sustituimos E_x en (3.63) y (3.84) se obtiene:

$$nmDu = -\frac{Zn}{4\pi} \frac{B}{n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{Zn}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma T_i \frac{\partial n}{\partial x},$$

$$n_e m_e D_e u_e = -\frac{n_e}{4\pi} \frac{B}{n_e} \frac{\partial B}{\partial x} - \gamma_e T_e \frac{n_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \gamma_i T_i \frac{\partial n_e}{\partial x}.$$

Es decir, se recuperan exactamente las ecuaciones de movimiento (3.42) y (3.43), que fueron usadas para obtener el modo magnetoacústico-polvoso. Con esto se comprueba que el conjunto de ecuaciones anterior es idéntico al que consiste de las ecs. (3.16), (3.22), (3.23) y (3.42)-(3.44), el resto de ecuaciones de los dos conjuntos son las mismas.

Es ilustrativo señalar aquí que algunas de las consideraciones anteriores se sostienen incluso para los plasmas de dos componentes (electrones-iones). Consideremos, por simplicidad, el caso de un plasma frío tal que las derivas de las partículas son simples. Para frecuencias $\omega \ll \Omega_e \ll \Omega_i$, los electrones e iones están altamente magnetizados. Lo cuasi-neutro, el movimiento compresional del plasma a lo largo de la dirección de propagación (digamos la dirección \hat{x}), se alcanza debido a los desplazamientos $\vec{E}_y \times \vec{B}$ de los electrones e iones mientras que la corriente (a lo largo de la dirección \hat{y}) responsable de proveer la fuerza $\vec{J} \times \vec{B}$ es mantenida principalmente por la deriva polarizada del ion. Un análisis de las ecuaciones relevantes de los dos fluidos da entonces la relación de dispersión para las ondas magnetoacústicas rápidas usuales cuando se satisface la condición $k^2 c^2 \ll \omega^2 \mu$, donde

$\omega \mu = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ es la frecuencia iónica del plasma y n_e es la densidad de equilibrio del plasma. En términos del parámetro de profundidad de penetración no colisional definido por

$\lambda_e = \frac{c}{\omega \mu}$, esta condición requiere que $k^2 \lambda_e^2 \ll \frac{m_e}{m_i}$ donde $\omega \mu = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$ es la frecuencia electrónica del plasma. Debe notarse que estas condiciones son válidas en la aproximación MHD usual.

Por otro lado, para $\Omega_e^2 \ll \omega^2 \ll \Omega_i^2$, el modo rápido magnetoacústico es posible sólo cuando E_x es no nulo. De hecho, los iones están poco magnetizados y se mueven cuanto mucho a lo largo de la dirección \hat{x} , mientras que la contribución dominante a la corriente a lo largo de la dirección \hat{y} proviene debido a los desplazamientos $\vec{E}_x \times \vec{B}$ de los electrones, despreciando los desplazamientos polarizados del electrón. El movimiento cuasi-neutro del plasma a lo largo de la dirección \hat{x} requiere que el desplazamiento $\vec{E}_y \times \vec{B}$ de los electrones sea balanceado por la deriva eléctrica de los iones producida por E_x . Así se obtiene el mismo modo que en el caso previo, siempre que se cumpla la condición $k^2 c^2 \gg \omega^2 \mu$, esto

es, $k^2 \lambda_e^2 \gg \frac{m_e}{m_i}$ sea satisfecha. Éste es precisamente el rango para el cual la aproximación

EMHD es aplicable (Gordeev et al. 1994). Sin embargo, cuando una tercera componente cargada como las especies de polvo es introducida en el plasma, la degeneración anterior es removida, dando como resultado distintos modos como se comentó anteriormente.

III-4. Conclusiones.

Para resumir, diremos que se ha investigado la existencia de diferentes tipos de modos magnetoacústicos (rápidos) que son posibles en diferentes regímenes de frecuencia en un plasma polvoso magnetizado. El análisis se llevó a cabo usando el modelo MHD para dos fluidos que permite movimientos no congelados a las líneas de campo magnético. Se obtuvo una relación general de dispersión para las diferentes ondas llevando a cabo un análisis de los modos normales.

En el régimen de muy baja frecuencia se ha recuperado el tipo usual de ondas magnetoacústicas para un plasma magnetizado multi-componente. El cual, a su vez, es una generalización electromagnética de las ondas hidromagnéticas rápidas compresionales en un plasma compuesto de iones y electrones. No obstante, dependiendo del régimen de frecuencia medio o alto, se ha demostrado la existencia de dos nuevos tipos de modos llamados "ondas magnetoacústico-polvosas". Estos modos están típicamente caracterizados por un movimiento en el que no hay congelamiento de los diferentes fluidos del plasma y están acompañados por campo magnético compresional y perturbaciones de la densidad de plasma. Son una generalización electromagnética de las ondas acústico-polvosas en un plasma polvoso no magnetizado con electrones y iones térmicos. Es decir, en el límite de plasmas no magnetizados, ambas ondas magnetoacústico-polvosas se reducen a la misma onda semejante a la acústica, llamada, onda acústico-polvosa. Así pues la introducción de un campo magnético externo remueve la degeneración del modo, dando origen a dos modos electromagnéticos diferentes. Por otro lado, en el límite de dos componentes los tres tipos de modos magnetoacústicos (rápidos) se reducen al mismo modo semejante al encontrado en plasmas constituidos por iones y electrones.

Para escalas de tiempo mucho más cortas que el tiempo de respuesta de las partículas de polvo, éstas deben suponerse esencialmente inmóviles proporcionando un fondo neutralizado, mientras que el movimiento es regido por la inercia de los iones. En este régimen de frecuencia, la onda hidromagnética compresional llamada "magnetoacústico-iónico-polvosa" puede ser considerada la generalización electromagnética del modo electrostático, llamado "onda acústico-iónico-polvosa" la cual fue obtenida por Shukla y Silin (1992). En particular se han obtenido explícitamente los modos que son complementarios a los modos magnetoacústico, magnetoacústico usual y magnetoacústico polvoso, este último, en el régimen medio de frecuencia para plasmas polvosos. Se ha dado una derivación alternativa de las ecuaciones relevantes utilizadas en el presente análisis usando una aproximación que es similar a la empleada en la "electro-magnetohidrodinámica" (EMHD). El presente análisis se ha efectuado usando una aproximación multi-fluido en la

cual las fluctuaciones en la carga de las partículas de polvo se ha despreciado. Los resultados así obtenidos son por lo tanto aplicables sólo a aquellos plasmas polvosos donde la carga de los granos de polvo sea suficientemente pequeña para que no constituyan perturbaciones locales fuertes no lineales para las partículas del plasma. Por otro lado, si los granos tienen tamaños apreciables y/o carga, no debe ser válida la suposición de un fondo homogéneo provisto por los electrones e iones, y consecuentemente la carga del grano debe, en sí misma, variar lentamente como resultado de los procesos de cargado o descargado. Estos procesos de cargado y descargado de los granos de polvo, en su caso, están regidos por la ecuación de balance de corriente, la cual debe ser incluida en el conjunto básico de ecuaciones al principio. Un análisis de esto para los modos electromagnéticos es complicado y escapa de los propósitos del presente estudio, pero necesita ser considerado separadamente para cada uno de los modos normales obtenidos.

CAPÍTULO IV.

MAGNETOHIDRODINÁMICA DE PLASMAS POLVOSOS. (Régimen de extremada baja frecuencia característica)

IV-1. Introducción.

La consideración de la dinámica del polvo, conjuntamente con la de los iones en el capítulo anterior dio la posibilidad de encontrar nuevos modos magnetoacústicos rápidos en un plasma polvoso magnetizado. Estos modos fueron ubicados en regímenes de frecuencia característica baja, media y alta. En el presente capítulo es de interés obtener los modos que provienen sólo de la dinámica de las partículas de polvo, para lo cual, se establece y se analiza el régimen arriba citado.

En el régimen de extremada baja frecuencia, $\omega \ll \Omega_i$, los plasmas polvosos presentan nuevos modos en los cuales la inercia es aportada principalmente por las partículas de polvo en virtud de ser mucho más masivas. En este caso, a diferencia del capítulo anterior, las fuerzas de inercia de los electrones e iones son despreciablemente pequeñas en comparación con las correspondientes fuerzas de Lorentz.

Los sistemas magnetohidrodinámicos-polvosos consisten de tres ecuaciones en las cuales la densidad de masa, la velocidad del fluido polvoso y la inducción magnética están acopladas. Aunque las ecuaciones MHD que se obtienen se asemejan a las ecuaciones generalizadas para un plasma (ion-electrón) sin la componente polvosa, se comprende que las escalas espaciales y temporales son completamente diferentes. Por otro lado, el vector de propagación, \vec{k} , puede tener cualquier dirección, es decir, aquí no solo se está interesado en los modos perpendiculares al campo magnético externo sino en todos los posibles. Los perpendiculares se obtienen como caso límite y se comparan con los obtenidos en el capítulo anterior. En este capítulo se describe, en forma autocontenida, el trabajo de P.K.Shukla y H.U.Rahman, "Magneto hydrodynamics of dusty plasmas", (P.K.Shukla, H.U.Rahman, Phys. Plasmas. 3, 430 1996).

IV-2. Ecuaciones para los modos de extremada baja frecuencia.

Consideremos un plasma polvoso multicomponente magnetizado cuyos constituyentes son electrones, iones y partículas de polvo con carga constante y negativa extremadamente masivas y de tamaño de una micra. Se supone que los granos de polvo cargados son cargas puntuales y que sus tamaños así como los espacios grano-grano son mucho más pequeños que las escalas características de longitud, por ejemplo, la longitud de Debye y radio de giro, entre otras, de los plasmas polvosos.

Se supone también que existe un número suficientemente grande de partículas de polvo dentro de una esfera de Debye tal que se sea capaz de considerar los procesos colectivos. Se considera la cuasi-neutralidad mediante la ecuación $n_i = n_e - Zn$. El subíndice i es para los iones y el e para los electrones. Como se dijo en el capítulo dos, las cantidades correspondientes al polvo no llevan subíndice; Z es el número de carga constante que reside en los granos de polvo y que a diferencia del capítulo III es negativo. Se desprecia la corriente de desplazamiento en la ley de Ampere ya que se está trabajando con perturbaciones cuya velocidad de fase es mucho más pequeña que la velocidad de la luz. Partiendo de las ecuaciones básicas que fueron obtenidas en el capítulo II, se establece para la dinámica de extremada baja frecuencia (en comparación con la girofrecuencia del ion) que las perturbaciones electromagnéticas en el plasma polvoso están regidas por las ecuaciones siguientes.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0. \quad (4.1)$$

Ecuación de transferencia de momento del polvo:

$$\rho D\bar{v} = -Zne \left(\bar{E} + \frac{\bar{v}}{c} \times \bar{B} \right) - \nabla p. \quad (4.2)$$

Ecuación de transferencia de momento del ion:

$$0 = n_i e \left(\bar{E} + \frac{\bar{v}_i}{c} \times \bar{B} \right) - \nabla p_i. \quad (4.3)$$

Ecuación de transferencia de momento de los electrones:

$$0 = -n_e e \left(\bar{E} + \frac{\bar{v}_e}{c} \times \bar{B} \right) - \nabla p_e. \quad (4.4)$$

Ley de Faraday:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e - Zn\vec{v}) . \quad (4.6)$$

Condiciones iniciales sobre \vec{E} y \vec{B} :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 , \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (4.8)$$

con las correspondientes ecuaciones de continuidad para los iones y electrones. Donde $\rho = nm$, es la densidad de masa del polvo, m su masa, v_e , v_i y v son las velocidades correspondientes de las partículas del plasma, T_e , T_i y T su temperatura constante, p_e , p_i y p es la presión de cada especie, \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético respectivamente. Se supone que $\frac{Z}{m}$ es constante. Sumando de la ec.(4.2) a (4.4) y haciendo uso de la (4.6) se tiene:

$$\rho D\vec{v} = e(n_i - n_e - Zn)\vec{E} + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla P ,$$

por cuasi-neutralidad la ecuación anterior se reduce a:

$$\rho D\vec{v} = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla P ,$$

$$\text{donde } D = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla .$$

Desarrollando el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, finalmente:

$$\rho D\vec{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} , \quad (4.9)$$

donde:

$$P = n(T + ZT_1) + n_s(T_s + T_1) .$$

Despejando el campo eléctrico de la ec.(4.2) y sustituyendo en la (4.5) se tiene:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{mc}{Ze} \nabla \times (D\vec{v}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{c}{Ze} \nabla \times \left(\frac{\nabla P}{n} \right) ,$$

de donde:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{mc}{Ze} \nabla \times (D\vec{v}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{c}{Zen} \nabla n \times \nabla T . \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.1),(4.9) y (4.10) son las ecuaciones que rigen el comportamiento de la dinámica de varios tipos de ondas de extremada baja frecuencia.

IV-3. Relación general de dispersión.

Para obtener la relación general de dispersión se linealizan y aplica análisis de Fourier a las ecuaciones del apartado anterior, para de esta forma exhibir el acoplamiento lineal entre los modos. Se supone que las cantidades perturbadas varían como $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ donde el vector de onda se toma como $\vec{k} = \vec{k}_\perp + k_z \hat{z}$. Donde $\vec{k}_\perp (k_\perp)$ es la componente del vector de propagación perpendicular (paralelo) al eje \hat{z} y ω es la frecuencia característica de la onda.

Por lo tanto, las cantidades perturbadas se escriben como:

$$\rho = \rho_0 + \hat{\rho} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} + \vec{\hat{B}} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{v} = \vec{\hat{v}} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

donde B_0 es la magnitud del campo magnético externo en la dirección del eje \hat{z} , ρ_0 es la densidad de masa no perturbada. $\hat{\rho}$, $\vec{\hat{B}}$, y $\vec{\hat{v}}$ son las cantidades perturbadas de densidad

de masa, campo magnético y velocidad respectivamente. Se supone que el sistema se perturba a partir de $v_0 = 0$. Cuando:

$$\rho_1 \ll \rho_0, \quad \vec{B}_1 \ll B_0 \quad \text{y} \quad n_e(T_e + T_i) \ll n(T + ZT_i),$$

donde:

$$\rho_1 = \hat{\rho} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad , \quad \vec{B}_1 = \vec{\hat{B}} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)),$$

entonces la densidad de electrones es lo suficientemente baja como para tomar en cuenta los efectos del proceso de atadura de los mismos sobre la superficie de los granos de polvo. Linealizando y aplicando análisis de Fourier a las ecs.(4.1), (4.9) y (4.10), de esta última se desprecia el tercer término del lado derecho, se obtiene el siguiente sistema vectorial de ecuaciones:

$$-\omega \hat{\rho} + \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{\hat{v}} = 0, \quad (4.11)$$

$$-\omega \rho_0 \vec{\hat{v}} + \frac{(T + ZT_i)}{m} \hat{\rho} \vec{k} + \frac{B_0 \vec{\hat{B}}_1}{4\pi} \vec{k} - \frac{B_0 k_x}{4\pi} \vec{\hat{B}}_1 = 0, \quad (4.12)$$

$$\omega \vec{\hat{B}}_1 + k_x B_0 \vec{\hat{v}} - B_0 \vec{k} \cdot \vec{\hat{v}} \hat{z} - \frac{i\omega c m}{Ze} \vec{k} \times \vec{\hat{v}} = 0. \quad (4.13)$$

Se expresa el sistema anterior de ecuaciones por componentes, del cual, se despejan las siguientes cantidades:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho_0}{\omega} (k_x \hat{v}_x + k_y \hat{v}_y + k_z \hat{v}_z), \quad (4.14)$$

$$\hat{B}_{1x} = -\frac{B_0}{\omega} k_x \hat{v}_x + \frac{iB_0}{\omega_c} k_y \hat{v}_z - \frac{iB_0}{\omega_c} k_x \hat{v}_y, \quad (4.15)$$

$$\hat{B}_{1y} = -\frac{B_0}{\omega} k_x \hat{v}_y - \frac{iB_0}{\omega_c} k_x \hat{v}_z + \frac{iB_0}{\omega_c} k_y \hat{v}_x, \quad (4.16)$$

$$\hat{B}_{1z} = \frac{B_0}{\omega} k_x \hat{v}_x + \frac{B_0}{\omega} k_y \hat{v}_y + \frac{iB_0}{\omega_c} k_x \hat{v}_y - \frac{iB_0}{\omega_c} k_y \hat{v}_x, \quad (4.17)$$

se sustituyen para formar un sistema de ecuaciones lineales para las componentes de la velocidad perturbada, del que se toma el determinante igualado a cero, obteniéndose:

$$(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^4 - \omega^2 k_x^2 v_A^2 - \omega^2 k_z^2 v_a^2 + \omega_A^2 k_x^2 v_a^2) = \frac{\omega^2 \omega_A^2 k_x^2 (\omega^2 - k_x^2 v_a^2)}{\omega_c^2}, \quad (4.18)$$

que es la relación general de dispersión que contiene los modos de extremada baja frecuencia.

Donde $\omega_A = v_A k_x$, $v_A = \frac{B_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}$, $v_a = \left(\frac{ZT_i + T}{m}\right)^{1/2}$ y $\omega_c = \frac{ZeB_0}{mc}$ son la frecuencia

polvosa de Alfvén, velocidad polvosa de Alfvén, velocidad acústico-polvosa y girofrecuencia polvosa respectivamente. Se observa que las velocidades de Alfvén y acústico polvosa son inversamente proporcionales a $m^{1/2}$, lo cual indica que la inercia del polvo juega un papel más significativo en la dinámica de la onda.

IV-4. Casos límite.

a). Para $k_x = 0$ de (4.18) se tiene:

$$\omega^2 = k_z^2 (v_A^2 + v_a^2), \quad (4.19)$$

la cual da la frecuencia de las ondas polvosas magnetoacústicas.

b). Para propagación a lo larga de las líneas de campo magnético externo $k_x = k_y = 0$ de la ec. (9) se tiene:

$$(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^4 - \omega^2 k_z^2 v_A^2 - \omega^2 k_z^2 v_a^2 + \omega_A^2 k_z^2 v_a^2) = \frac{\omega^2 \omega_A^2 k_z^2 (\omega^2 - k_z^2 v_a^2)}{\omega_c^2},$$

de donde:

$$k_z^2 v_A^2 = \frac{\omega^2 \omega_c}{\omega_c \pm \omega}, \quad (4.20)$$

la cual es la relación de dispersión para las ondas acopladas polvosas de ciclotrón y de Alfvén.

Para $\omega \ll \omega_c$, la ec.(4.20) da:

$$\omega \approx k_i v_A \left(1 \pm \frac{k_i v_A}{2\omega_c} \right).$$

En el límite opuesto $\omega \gg \omega_c$ la ec. (4.20) se reduce a:

$$\omega \approx \frac{k_i^2 v_A^2}{\omega_c} = \frac{k_i^2 c^2 \omega_c}{\omega_p^2},$$

la cual es la frecuencia silbido-polvosa, donde:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_0 Z^2 e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

es la frecuencia del plasma polvoso.

c). Para $\frac{k_i}{k} \ll 1$ y $\frac{\omega}{k_1} \ll v_a \ll v_A$ la ec.(4.18) da el espectro de onda de tijera de Alfvén

$$\omega^2 \approx k_i^2 v_A^2 (1 + k_1^2 \rho_s^2), \quad (4.21)$$

donde $\rho_s = \frac{v_a}{\omega_c}$, es el radio de giro.

d). Para $\omega \ll k_i v_A$ y $v_a \ll v_A$, se obtiene de (4.18):

$$(\omega^2 - k_i^2 v_a^2) = \frac{\omega^2 (\omega^2 - k^2 v_a^2)}{\omega_c^2}, \quad (4.22)$$

la cual exhibe el acoplamiento entre las ondas acústico-polvosa y ciclotrón-polvosa. Cuando $\omega \approx k_i v_a$, se obtiene de la ec. (4.22):

$$\omega \approx \frac{k_i v_a}{(1 + k_1^2 \rho_s^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.23)$$

la cual es la frecuencia de la onda acústico-polvosa dispersiva.

IV-4a. Modo magnetoacústico (rápido).

Para $k_y = k_z = 0$ de la ec.(4.18) se obtiene:

$$\frac{\omega^2}{k_x^2} = v_A^2 + v_e^2.$$

Reescribiendo la ecuación anterior y sustituyendo, $k_x = k$, se tiene:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{mn_0} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + Zn_0 T_i + n_0 T \right).$$

La ecuación de cuasi-neutralidad $n_{i0} = n_{e0} + Zn_0$ al tomar $n_{e0} \rightarrow 0$, se reduce a $n_{i0} = Zn_0$, lo cual está de acuerdo con la suposición $n_e(T_e + T_i) \ll n(T + ZT_i)$, y por lo tanto la ecuación anterior queda como:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{mn_0} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{i0} T_i + n_0 T \right). \quad (4.24)$$

En el capítulo anterior, en la sección de modos magnetoacústicos-polvosos, se comentó que en el régimen de muy baja frecuencia, la dinámica colectiva del polvo juega un papel dominante, y la inercia es aportada principalmente por la masa de las partículas de polvo así como el poder tratar a los iones y electrones formando un fluido casi sin masa (lo cual se ha hecho al desprejar la inercia de los iones y electrones en las ecuaciones de movimiento respectivas en el presente análisis).

La ec. (3.36) del capítulo anterior, llamada modo magnetoacústico usual, y ubicada en el rango de frecuencia $\omega \ll \Omega \ll \Omega_i \ll \Omega_e$, se obtuvo considerando en la ec. (3.29) que:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll \frac{\gamma_i T_i}{m_i},$$

después, se tomó $m_i \rightarrow 0$ por lo que ahora se tomará $n_{e0} \rightarrow 0$ en la ec. (3.36) para hacer corresponder ambas situaciones del capítulo anterior y el presente. Se obtiene:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{mn_0} \left(\frac{B_0^2}{4\pi} + n_{i0} \gamma_i T_i + n_0 T \right).$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

Para frecuencias muy bajas, lo cual es el caso, se comentó en el capítulo anterior que es apropiado asumir que los electrones e iones son isotérmicos y que en tal caso los índices adiabáticos respectivos son iguales a 1, de esta manera la ecuación anterior se reduce a la ec.(4.24). En ambas ecuaciones tenemos la presión total del lado derecho que es justamente la suma de la presión magnética y la presión térmica debida a los iones y partículas de polvo. El orden de magnitud de n_{i0} en ambas ecuaciones es el mismo, puesto que se tomó $n_i \rightarrow 0$ para obtener (3.36), lo cual es equivalente a despreciar la inercia de los iones en la ecuación correspondiente, sin embargo aparece en (4.24) porque el número de iones no es cero.

IV-5. Conclusiones

Se ha presentado un conjunto compacto de ecuaciones MHD para plasmas polvosos magnetizados multicomponentes. Estas ecuaciones derivadas se asemejan a las ecuaciones MHD para un plasma constituido por iones y electrones, excepto que la densidad de masa del ion y la velocidad de este fluido son reemplazadas ahora por la densidad de masa del polvo y la velocidad del fluido polvoso, respectivamente, exhibiéndose los acoplamientos entre las ondas polvosas de Alfvén, polvosa magnetosónica, polvosa ciclotrónica y acústico-polvosa. La inercia del polvo es la que soporta los modos anteriores. Se investigó para las condiciones de extremada baja frecuencia modos rápidos para compararlos con los encontrados en el capítulo anterior encontrándose que el modo magnetoacústico usual ec. (3.36), corresponde esencialmente al caso límite $k_y = k_z = 0$ del presente análisis. Mientras que otras comparaciones no son posibles, puesto que en el capítulo tres se trata sólo de modos cuya propagación es en la dirección del eje x y aquí el vector de propagación tiene las tres direcciones.

CAPÍTULO V.

CONCLUSIONES: IMPLICACIONES Y PERSPECTIVAS.

En el capítulo III, se investigó la existencia de varios tipos de modos magnetoacústicos (rápidos) en diferentes regímenes de frecuencia. Se obtuvo, para frecuencias mucho menores que la frecuencia de giro de las partículas de polvo, un modo magnetoacústico que es una generalización de la onda hidromagnética-compresional rápida usual en plasmas compuestos por electrones e iones. En los regímenes superiores de frecuencia, se mostró la existencia de dos nuevos tipos de modos llamados "Ondas magnetoacústico-polvosas". Ambos modos son acompañados por perturbaciones compresionales del campo magnético y de la densidad del plasma, y son generalizaciones electromagnéticas de las ondas acústico-polvosas en plasmas polvosos no magnetizados con electrones e iones térmicos.

Los modos normales discutidos en ese capítulo pueden ser importantes en el estudio de choques perpendiculares en los plasmas polvosos magnetizados. En trabajos previos (Rao 1993), mostró la existencia de onda de meseta en plasmas magnetizados polvosos, y se predijo una transición en el flujo del plasma de velocidades sub-magnetoacústicas a super-magnetoacústicas. Se piensa que los choques MHD multi-fluido juegan un papel importante en aquellas regiones de las nubes interestelares que están caracterizadas por procesos de formación de estrellas, (Nakano & Umebayashi 1980; Pilipp, Hartquist & Havnes 1990; Hartquist, Havnes & Morfill 1992). Las ecuaciones de gobierno obtenidas pueden ser usadas para deducir la estructura de los perfiles del plasma en la región frontal de choque, (Rao 1995). Por otro lado, las ondas hidromagnéticas tales como las ondas magnetoacústicas pueden proveer un mecanismo para el transporte de momento angular de las nubes durante sus etapas de colapso. Las nuevas ondas magnetoacústicas-polvosas encontradas, proporcionan canales adicionales para las redistribuciones del momento angular en los sistemas binarios y en los sistemas planetarios alrededor de estrellas simples, (Pilipp et al. 1987). El análisis efectuado es aplicable incluso a los plasmas multicomponentes usuales que tienen por ejemplo, un tipo de iones pero dos especies de electrones con diferentes temperaturas, (N.N.Rao 1995).

En el capítulo IV, se obtuvo un conjunto compacto de ecuaciones MHD para plasmas polvosos magnetizados. Se analizaron los modos provenientes de la relación general de dispersión obtenida y se encontraron los casos límites de interés. Haciéndose notar que la inercia del polvo juega un papel dominante en la propagación de estos modos.

Las ecuaciones de gobierno encontradas pueden ser usadas para el estudio de varios tipos de macro-inestabilidades así como la generación de campos magnéticos y estructuras coherentes no lineales en plasmas polvosos magnetizados de baja temperatura como los que se presentan en ambientes de laboratorio y astrofísicos.

REFERENCIAS.

Allen,J.E. 1992 *Physica Scripta* 45,497.

Barnes,M.S., Keller,J.H., Forster,J.C. O'Neill,J.A. & Coultas,D.K. 1992 *Phys. Rev.Lett.*68,313.

Bharuthram,R. & Shukla,P.K. 1992a. *Planet. Space Sci.* 40,465.

Bharuthram,R. & Shukla P.K. 1992b *Planet.Space Sci.* 40 647.

Bliokh,P.V. & Yarashenko,V.V. 1985 *Soviet Astron.* 29,330.

Bouchoule,A.,Plain,A.,Boufendi,I.,Blondeau,J.Ph. & Laure,C. 1991 *J.Appl. Phys.* 70,1991.

Carlile,R.N.,Gehe,S.,O'Hanlon,J.F. & Stewart,J.C. 1991 *Appl.Phys. L ett.* 59, 1167.

Ch Hollenstein 1993 *F.Appl.Phys.* to be published A A Howling et al. 1993 *F.Phys. D: Appl.Phys.* in press M L Mandich et al.1992 *F.Chem.Phys.*96 4233.Clustring of silicon-based ions.

C.K.Goertz,*Rev.Geo.Phys.*27,271(1989).

C.K.Goertz 1989 *Rev.Geophys.*27 271.Dusty plasmas in the solar system.

D.A. Mendis y M.Rosenberg, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*32,410 (1991).

D.A. Mendis y M.Rosenberg, *IEEE Trans. Plasma Sci.* PS-20,929 (1992).

D'Angelo,n. 1990 *Planet. Space Sci.* 38,1143.

D'Angelo,N. 1993 *Planet.Space Sci.* 41,469.

D'Angelo,N. & Song,B. 1990 *Planet. Space Sci.* 38,1577.

De Angelis,U. 1992 *Physica Scripta* 45,465.

De Angelis,U.,Formisano,V. & Giordiano,M. 1988 *J.Plasma Phys.*40,339.

- F.Diedrich,E.Peik,J.M.Chen,W.Quint,YW.Walter,Phys.Rev.Lett.59,2731 (1987);I.Waki,S.Kassner,G.Birkel, y H.Walther,Phys.Rev.Lett.68,2007 (1992).
- F.Verheest,Space Sci. Rev. 68,109(1994).
- G.Brodin y L.Stenflo,Contrib.Plasma Phys.30,413 (1990).
- Goertz,C.K. 1989 Rev. Geophys.27,271.
- Gordeev,A.V.,Kingsep,A.S. & Rudakov,L.I. 1994 Phys. Rep. 243,215.
- Hartquist,T.W.,Havnes,O. & Morfill.,G.E. 1992 Fund. Cosmic Phys. 15,107.
- Havnes,O.,Melendso,F.,La Hoz,C.,Aslaksen,T.K. & Hartquist,T. 1992 Physica Scripta 45,535.
- H.Ikezi,Phys.Fluids.29,1764(1986).
- J P Boeuf1992 Phys.Rev.A46 7912.M Kushner et al.1991 F.Appl. Phys. 69 6952.Modelling dusty plasmas.
- L Boufendi et al. 1993 F. Appl. Phys. 73 2160.Particle-particle interactions in plasmas.
- Li,F.,Havnes,O. & Melendso,F. 1994 Planet Space Sci. 42,401.
- Ma,J.X. & Yu,M.Y. 1994 Phys. Rev. E 50,2431.
- Melendso,F.,Aslaksen,T.K. & Havnes,O. 1993a Planet.Space Sci.41,312.
- Melendso,F.,Aslaksen,T.K. & Havnes,O. 1993b J.Geophys. Res.98,13315.
- Mendis, D. A. & Rosenberg, M 1994 Ann. Rev. Astron. Astrophys.32,419.
- Motschmann, Q., Sauer, K. & Roatsch, T. 1992 Geophys. Res. Lett. 19,225M.S.Barnes,J.H. Keller,J.C.Forster,J.A.O'Neil, y D.K.Couttas,Phys.Rev. Lett.68,313 (1992).
- Nakano, T. & Umebayashi, T. 1980 Publ. Astron. Soc. Japan 32,63.
- N.A.Clark, A.J.Hurd, y B.J.Ackerson,Nature (London) 281,57 (1979).
- N.N.Rao,P.K.Shukla,y M.Y.Yu,Planet.Space Sci.38,543(1990).
- N.N.Rao,J.Plasma Phys.49,375(1993),Phys.Scr.48,363(1993).

- Northrop, T. G. 1992 *Physica Scripta* 45,475.
- Pilipp, W., Hartquist, T. W. & Havnes, O. 1987 *Astrophys. J.* 314,341.
- Pilipp, W., Hartquist, T. W. & Vavnes, O. 1990 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 243,685.
- P.K.Shukla y V.P.Silin,*Phys.Scr.*45,508(1992).
P.K.Shukla,*Phys.Scr.*45,504 (1992).
- Rao N. N., 1993a *J. Plasma Phys.* 49,375.
- Rao N. N., 1993b *Planet Spase Sci.* 41,21.
- Rao N. N., 1993c *Physica Scripta* 48,363.
- Rao N. N., & Shukla, P. K. 1994 *Planet Space Sci.* 42,221.
- Rao N. N., Shukla P. K. & Yu, M. Y. 1990 *Planet Space Sci.* 38,543.
- Rawat, S. P. S. & Rao, N. N. 1993 *Planet Space Sci.* 41,137.
- R.F.Wuerker,H.Shelton, y R.V.Langmuir,*J.Appl. Phys.*30,342 (1959).
- R N Carlile et al. 1991 *Appl. Phys.Lett.* 59 1167. G S Selwyn et al. 1990 *Appl. Phys. Lett.* 57 1876. Particle clouds in plasma reactors.
- Rosenberg M. 1993 *Planet Space Sci.* 41,229.
- R.T.Farouky y S.Hamaguchi, *Appl. Phys. Lett.*61,1973 (1972).
- Sheehan D. P., Carrillo, M. & Heidbrink, W. 1990 *Rev. Sci. Intrum.* 61,3871.
- Shukla, P. K. 1992 *Physica Scripta* 45,504.
- Shukla, P. K. & Silink, V. P. 1992 *Physica Scripta* 45,508.
- Shukla P. K. & Stenflo, L. 1992 *Astrophys. Space Sci.* 190,23.
- S.Ichimarū,*Rev.Mod.Phys.*54,1017 (1982).
- Speiser T. W. 1970 *Planet Space Sci.* 18,613.
- Tsytoovich V. N. & Havnes, O. 1993, *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion* 15,267.

Varma, R. K., Shukla, P. K. & Krishan V. 1993 Phys. Rev. E47,3612.

Vladimirov, S. V. 1994 Phys. Plasma 1, 2762.