UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MARTINGALAS Y OPCIONES EUROPEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

MANUEL JIMENEZ ROMERO

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARIA ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ

1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

MARTINGALAS Y OPCIONES EUROPEAS

realizado por MANUEL JIMENEZ ROMERO

con número de cuenta 8935712-5, pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DRA. MARIA ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ
Propietario	M. en C. BEATRIZ EUGENIA RODRIGUEZ FERNANDEZ
Propietario	MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO
Suplente	M. en I. O. MARIA DEL CARMEN HERNANDEZ AYUSO
Suplente	ACT. RAUL CASTILLO WUDATT

Consejo Departamental de Matemáticas

ACT. AGUSTIN ROMAN AGUILAR

Por haber dirigido esta tesis, por el tiempo que nos dedicó y por muchas cosas más agradezco a nuestra profesora y directora de tesis

Dra. Ma. Asunción Begoña Fernández F.

Por la lectura y los comentarior hechos a esta tesis, gracias

Act. Raúl Castillo W.

Mat. Margarita E. Chavez Cano

M. en I. O. Ma. del Carmen Hernández A.

M. en C. Beatriz E. Rodríguez F.

Gracias a nuestra casa de estudios por habernos dado la oportunidad de formar parte de ella y a nuestros profesores por por su gran labor de enseñanza y difusión del conocimiento.

Dedico esta tesis

a mis mis padres Ma. Luisa Romero Z. y Manuel Jiménez F.,

a mi hermana Miriam Jiménez R. y a su niña Lesly Zamora J.,

a mis abuelos y tíos,

a mi esposa Lilian Mendoza Z. por todo lo que eres para mi.

Contenido

Introducción

En la actualidad las opciones financieras son instrumentos de inversión que día a día van cobrando más auge; en muchos paises del mundo ya se tiene un mercado de opciones funcionando, y se comercializan alrededor de 2000 contratos de opción por minuto. Las opciones financieras son instrumentos relativamente "nuevos", aunque en realidad datan de la época de los fenicios y romanos. Las opciones tienen variantes pues existen opciones europeas, americanas, asiáticas, exóticas entre otras. En este trabajo sólo nos enfocaremos a las opciones europeas que operan sobre acciones que no reparten dividendos.

Las opciones europeas son contratos que dan a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de comprar o vender una acción a un precio y a una fecha determinados en el contrato. Si la opción permite comprar una acción, entonces se trata de un call, y si permite venderla, entonces hablamos de un put. Las opciones europeas no pueden ejercerse antes de su fecha de vencimiento (fecha hasta la que está vigente el contrato).

Esta tesis consta de seis capítulos:

En el Capítulo 1 se da una breve presentación de los elementos preliminares de

Probabilidad y Esperanza Condicional.

El Capítulo 2 trata escuetamente de una parte de la Teoría de Martingalas, pues como veremos, la propiedad de martingala se presentará en los modelos de valuación de opciones.

En el Capítulo 3 introduciremos la definición de opción y los principales problemas que surgen: el problema del "pricing" o valuación de la opción, que consiste en encontrar el precio de las opciones, y el problema de la cobertura, que es encontrar una forma de inversión del precio de la opción para que a la fecha de vencimiento se produzca una riqueza con la que se pueda afrontar la obligación que se establece en el contrato de la opción. Además se expondrán algunas de las posiciones elementales, las cuales son formas de inversión que involucran a las opciones y a los activos sobre los cuales operan las opciones.

En el Capítulo 4 se demostrarán algunas de las relaciones que deben cumplir los precios de las opciones para que no haya oportunidad de hacer dinero sin arriesgar nada por medio de transacciones con opciones, las cuales son conocidas como relaciones de arbitraje.

En el Capítulo 5 desarrollaremos la teoría de los modelos discretos de valuación de opciones.

En el Capítulo 6 construiremos un modelo de valuación de opciones conocido como Modelo Binomial; propondremos otro modelo "Trinomial" y veremos que en la práctica no es de utilidad, pues no resuelve los problemas planteados sobre las opciones; por último daremos una aproximación a un modelo continuo de valuación de opciones.

Capítulo 1

Probabilidad y esperanza condicional

1.1 Introducción.

En este primer capítulo se encuentran los resultados de probabilidad y esperanza condicional que serán utilizados a lo largo de esta tesis; debemos advertir que varias propiedades aparecen sólo mencionadas ya que sus demostraciones requieren conocimientos más profundos. No siendo el objetivo de este trabajo, se desglosa una parte muy pequeña de la Teoría de la Probabilidad que resulta ser de gran importancia para el desarrollo del mismo.

Se inicia describiendo las $\sigma-$álgebras para definir espacios medibles y espacios de probabilidad; a continuación se habla de probabilidad condicional y finalmente de esperanza condicional, estos tres elementos que son indispensables para la construcción de modelos de mercados financieros.

1.2 Espacios y funciones medibles.

Al lanzar una moneda, sabemos que los posibles resultados son: "que caiga sol" o "que caiga águila"; pero durante el tiempo en que la moneda está en el aire, no sabemos cuál de ellas resultará. Análogamente, en el tiro de un dado, los posibles resultados son las 6 caras marcadas con los números 1,2,...,6. Estas situaciones ilustran a los experimentos aleatorios.

Un experimento aleatorio es aquel que tiene al menos dos posibles resultados, y dichos resultados no se encuentran determinados de antemano. A la colección de los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama **espacio muestral** y se denota por Ω.

Por ejemplo, si contamos el número de veces que lloverá durante el próximo mes de julio y medimos la cantidad total de lluvia en centímetros, el espacio muestral queda representado por:

$$\Omega = \{(i,x) : i = 0, 1, \ldots \text{ y } 0 \leq x\},$$

donde i es el número de veces que lloverá y x la cantidad total de lluvia en centímetros; así $\omega = (3, 5.271)$ es un punto en Ω e indica que lloverá tres veces y que habrá una cantidad total de 5.271 centímetros de precipitación pluvial.

En todo lo que sigue Ω será un conjunto finito o numerable.

Definición 1.1 *Una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω se dice que es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω si satisface:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

ii) *Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^C \in \mathcal{F}$.*

iii) *Si $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \geq 1$, entonces $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.*

A los elementos de una $\sigma-$álgebra los llamaremos en ocasiones eventos.

Si $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra, entonces diremos que la pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ es un **espacio medible.**

Ejemplos de $\sigma-$álgebras:

1. $\{\emptyset, \Omega\}$ es una $\sigma-$álgebra y es conocida como la $\sigma-$álgebra trivial.

2. La potencia de Ω (la familia de todos los subconjuntos de Ω), denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$, es una $\sigma-$álgebra.

3. Las $\sigma-$álgebras generadas por una partición finita o numerable de Ω (esto es, $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $\cup_{n \in I} \mathbf{B}_n = \Omega$); sea $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_n : n \in I\}$ una partición finita o numerable de Ω; entonces existe una $\sigma-$álgebra $\mathcal{H}$ tal que $\mathbf{B} \subset \mathcal{H}$ y, para toda $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ tal que $\mathbf{B} \subset \mathcal{F}$, se satisface $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. A $\mathcal{H}$ la llamamos la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathbf{B}$.

4. El lanzamiento de dos monedas que pueden ser diferenciadas tiene como espacio muestral

$$\Omega = \{(S,S), (S,A), (A,A), (A,S)\},$$

donde S denota al evento "cae sol" y A al evento "cae águila", además la primera componente es el resultado del lanzamiento de la primera moneda y la segunda componente el de la segunda moneda. Formemos la colección $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos de Ω:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \; & \{\emptyset, \Omega, \{S,S\}, \{S,A\}, \{A,A\}, \{A,S\}, \{(S,S),(S,A)\}, \{(S,S),(A,A)\}, \\
& \{(S,S),(A,S)\}, \{(A,S),(A,A)\}, \{(S,A),(A,A)\}, \{(S,A),(A,S)\}, \\
& \{(S,S),(S,A),(A,S)\}, \{(S,S),(S,A),(A,A)\}, \{(S,A),(A,A),(A,S)\}, \\
& \{(S,S),(A,S),(A,A)\}\}.
\end{aligned}
$$

Definición 1.2 *Sea $\mathcal{F}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Una función $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ decimos que es una* **probabilidad** *si satisface:*

i) $\mathbf{P}[\Omega] = 1$.

ii) *Para todo $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbf{P}[A] \leq 1$.*

iii) *Si $A_n \in \mathcal{F}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces*

$$\mathbf{P}\left[\bigcup_{n\geq 1} A_n\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}[A_n].$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se le llama **espacio de probabilidad.**

Definición 1.3 *Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es una función $\mathcal{F}-$medible simple, o vector aleatorio discreto, si para todo $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}.$$

Al conjunto

$$\mathbf{R}(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \text{existe } \omega \in \Omega \text{ tal que } X(\omega) = x\right\}$$

se le denomina **rango de X,** y en ocasiones se denota por

$$\mathbf{R}(X) = \{x_i : i \in I\},$$

donde I es un conjunto de índices a lo más numerable (recuerdese que por hipótesis Ω es a lo más numerable).

Cuando $d = 1$, el vector aleatorio X es llamado variable aleatoria. Obsérvese que el vector $X = (X_1, ..., X_d)$ es aleatorio si cada componente X_i, con $i = 1, ..., d$, es una variable aleatoria.

La función $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_X(x) = \mathbf{P}[X = x],$$

es llamada **función de densidad de X**; cuando $X = (X_1, ..., X_d)$ se dice que $f_X(x)$ es la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X_i, $i = 1, ..., d$.

A partir de aquí se considera $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad fijo y los vectores aleatorios estarán definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

Notemos que:

1. Si $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra generada por una partición finita o numerable de Ω, entonces $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es un vector aleatorio si y sólo si X es constante sobre cada uno de los elementos de la partición.

2. Si X es un vector aleatorio y $x \in (\mathbf{R}(X))^C$, entonces

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \emptyset,$$

y, para todo $x \in (\mathbf{R}(X))^C$,

$$f_X(x) = 0.$$

3. Si X es un vector aleatorio, $\mathbf{R}(X) = \{x_i : i \in I\}$ es un conjunto finito o numerable. Sea $\mathbf{B}_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i,\ i \in I\}$; entonces la colección $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_i : i \in I\}$ es una partición de Ω.

Proposición 1.4 *Sean X, Y variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $aX + bY$ y XY también son variables aleatorias.*

Demostración:

$$\begin{aligned} \{aX + bY = n\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{aX + by_k = n\} \cap \{Y = y_k\}\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left\{X = \frac{n - by_k}{a}\right\} \cap \{Y = y_k\}\right) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \{XY = n\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{Xy_k = n\} \cap \{Y = y_k\}\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left\{X = \frac{n}{y_k}\right\} \cap \{Y = y_k\}\right) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

□

Definición 1.5 *Sea X una variable aleatoria. Definimos la $\sigma-$álgebra generada por X, denotada $\sigma(X)$, como la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a la partición*

$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_i : i \in I\}$, *donde* $\mathbf{B}_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, i \in I\}$.

Definición 1.6 *Sean $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ un vector aleatorio y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $g(X)$ es una variable aleatoria. Diremos que $g(X)$ tiene momento finito de orden n si*

$$\sum_x |g^n(x)| \, f_X(x) < \infty,$$

y definimos el momento de orden n de $g(X)$, o la esperanza de $g^n(X)$, como

$$\mathbf{E}[g^n(X)] = \sum_x g^n(x) \, f_X(x),$$

donde f_X es la función de densidad de X.

Si X es una variable aleatoria, $\mathbf{E}[X]$ es conocida como la esperanza de X.

1.3 Probabilidad condicional.

En el desarrollo de un experimento no resulta extraño cuestionarse sobre la probabilidad con que se da un evento, luego de estar sujeto (condicionado) a la ocurrencia de otro; por ejemplo:

Un dado perfectamente balanceado es lanzado dos veces. Dado que el total obtenido es 7, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se haya obtenido k, con $1 \leq k \leq 6$?.

El espacio muestral de este experimento es $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, ..., 6\}\}$, donde la primera componente de la pareja representa el resultado obtenido en el primer lanzamiento y la segunda el resultado del segundo lanzamiento. Si se sabe que la suma de las caras que cayeron es 7, los posibles resultados se reducen a

$\{(1,6)\}, \{(2,5)\}, \{(3,4)\}, \{(4,3)\}, \{(5,2)\}, \{(6,1)\}$. Sean los eventos:

$A = \{$el resultado del primer lanzamiento es $k\}$

$B = \{$la suma de las caras que cayeron es 7$\}$

y si denotamos por $\mathbf{P}[A \mid B]$ a la probabilidad de que ocurra A dado que B ya ocurrió, entonces, para cada valor k,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A \mid B] &= \mathbf{P}[(k, 7-k)] \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Si nos preguntaramos ahora: dado que en el primer lanzamiento se obtuvo 4, ¿cuál es la probabilidad de que en el segundo lanzamiento se obtenga k?.

Si se conoce que en el primer lanzamiento se obtuvo 4, los posibles resultados son: $\{(4,1)\}, \{(4,2)\}, \{(4,3)\}, \{(4,4)\}, \{(4,5)\}, \{(4,6)\}$. Sean los eventos:

$C = \{$el resultado del segundo lanzamiento es $k\}$

$D = \{$el resultado del primer lanzamiento es $4\}$; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[C \mid D] &= \mathbf{P}[(4,k)] \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[B \mid D] &= \mathbf{P}[(4,7-4)] \\ &= \mathbf{P}[(4,3)] \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

El ejemplo anterior fue escrito como motivación para dar la siguiente definición de probabilidad condicional:

Definición 1.7 *Sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{P}[B] > 0$; entonces para todo $A \in \mathcal{F}$ definimos la probabilidad condicional de A dado B, denotada $\mathbf{P}[A \mid B]$, como*

$$\mathbf{P}[A \mid B] = \frac{\mathbf{P}[A \cap B]}{\mathbf{P}[B]}.$$

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado que establece que la probabilidad condicional es una función de densidad.

Proposición 1.8 *Para cada $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{P}[B] > 0$, $\mathbf{P}[\cdot \mid B] : \mathcal{F} \to [0,1]$ es una probabilidad y, por lo tanto, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}[\cdot \mid B])$ es un nuevo espacio de probabilidad.*

Demostración:

i)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\Omega \mid B] &= \frac{\mathbf{P}[\Omega \cap B]}{\mathbf{P}[B]}\\ &= \frac{\mathbf{P}[B]}{\mathbf{P}[B]}\\ &= 1.\end{aligned}$$

ii) Sea $A \in \mathcal{F}$; entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{P}[A \mid B] \geq 0$. De la definición 1.2 se obtiene

$$\mathbf{P}[A \cap B] \leq \mathbf{P}[B],$$

con lo que

$$\mathbf{P}[A \mid B] \leq 1.$$

iii) Sea $A_1, A_2, ...$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right] &= \frac{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right]}{\mathbf{P}[B]}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right]}{\mathbf{P}[B]}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}[A_i \cap B]}{\mathbf{P}[B]}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i \mid B]\end{aligned}$$

□

Un resultado básico y de gran importancia es el teorema de la probabilidad total, que a continuación enunciamos.

Teorema 1.9 (De la Probabilidad Total) *Sea* $\{\mathbf{B}_i : i \in I\}$ *una partición finita o* *numerable de Ω tal que $\mathbf{B}_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$; entonces para todo $A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbf{P}[A] = \sum_{\{i \in I : P[B_i] > 0\}} \mathbf{P}[A \mid \mathbf{B}_i] \, \mathbf{P}[\mathbf{B}_i].$$

Demostración:

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap \left(\bigcup_{\{i \in I\}} \mathbf{B}_i \right) \\ &= \bigcup_{\{i \in I\}} (A \cap \mathbf{B}_i); \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A] &= \sum_{\{i \in I\}} \mathbf{P}[A \cap \mathbf{B}_i] \\ &= \sum_{\{i \in I : P[B_i] > 0\}} \mathbf{P}[A \mid \mathbf{B}_i] \, \mathbf{P}[\mathbf{B}_i] \end{aligned}$$

□

Sea nuevamente $\{\mathbf{B}_i : i \in I\}$ una partición finita o numerable de Ω y $\mathcal{H}$ la mínima $\sigma-$álgebra que la contiene; para cada $A \in \mathcal{F}$ y $C \in \mathcal{H}$, usando el teorema de la probabilidad total, se tiene:

$$\mathbf{P}[A \cap C] = \sum_{\{j \in J : P[\mathbf{B}_j] > 0\}} \mathbf{P}[A \mid \mathbf{B}_j] \, \mathbf{P}[\mathbf{B}_j],$$

donde $C = \bigcup_{\{j \in J\}} \mathbf{B}_j$.

Definición 1.10 *Sea $\mathcal{H}$ una $\sigma-$álgebra generada por una partición finita o numerable de Ω; entonces, para cada $A \in \mathcal{F}$, definimos la probabilidad condicional de A dado $\mathcal{H}$ como una función $H : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{H}-$medible, que satisface la ecuación 1.3.*

La probabilidad condicional así definida no es única, sin embargo las funciones que satisfacen la última definición sólo difieren en un conjunto de probabilidad cero.

Obsérvese que para cada $A \in \mathcal{F}$ la función $\mathbf{P}[A \mid \mathcal{H}](\omega)$ definida por

$$\mathbf{P}[A \mid \mathcal{H}](\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}[A \mid \mathbf{B}_i] & \text{si } \omega \in \mathbf{B}_i \text{ y } \mathbf{P}[\mathbf{B}_i] > 0 \\ 0 & \text{si } \omega \in \mathbf{B}_i \text{ y } \mathbf{P}[\mathbf{B}_i] = 0. \end{cases}$$

satisface la definición 1.10; esto es una versión de la probabilidad condicional.

Corolario 1.11 *Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un vector aleatorio; entonces:*

i) *Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ y para cada $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{P}[B] > 0$, la probabilidad condicional de $\{X = x\}$ dado B estará definida por:*

$$\mathbf{P}[X = x \mid B] = \frac{\mathbf{P}[\{X = x\} \cap B]}{\mathbf{P}[B]},$$

y, para cada B fijo tal que $\mathbf{P}[B] > 0$, $\mathbf{P}[X = \cdot \mid B]$ es una densidad.

ii) *Sea $\mathcal{H}$ la mínima $\sigma-$álgebra que contiene a la partición $\{\mathbf{B}_i : i \in I\}$ tal que $\mathbf{B}_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$; entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^m$ fijo, $\mathbf{P}[X = x \mid \mathcal{H}]$ es una función $\mathcal{H}-$medible dada por:*

$$\mathbf{P}[X = x \mid \mathcal{H}](\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}[X = x \mid \mathbf{B}_i] & si\ \omega \in \mathbf{B}_i\ y\ \mathbf{P}[\mathbf{B}_i] > 0 \\ 0 & si\ \omega \in \mathbf{B}_i\ y\ \mathbf{P}[\mathbf{B}_i] = 0. \end{cases}$$

Sean $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ vectores aleatorios. Se puede definir la densidad condicional de X dado $\{Y = y\}$ y la probabilidad condicional de $\{X = x\}$ dado $\sigma(Y)$ de la siguiente forma:

Corolario 1.12 **i)** *Para cada $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $\mathbf{P}[Y = y] > 0$, la función*

$f_{X|Y}(\cdot \mid y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \mathbf{P}[X = x \mid Y = y] \\ &= \frac{\mathbf{P}[X = x, Y = y]}{\mathbf{P}[Y = y]}, \end{aligned}$$

es una densidad, y se llama densidad condicional de X dado $\{Y = y\}$.

ii) *Para cada $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{P}[X = x \mid \sigma(Y)] : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$\mathbf{P}[X = x \mid \sigma(Y)](\omega) = \begin{cases} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y_i] & si\ Y(\omega) = y_i\ y\ \mathbf{P}[Y = y_i] > 0 \\ 0 & si\ Y(\omega) = y_i\ y\ \mathbf{P}[Y = y_i] = 0, \end{cases}$$

es una función $\sigma(Y)-$medible llamada la probabilidad condicional de $\{X = x\}$ dado $\sigma(Y)$.

iii) *Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ fijo, la función $f_{X|Y}(x \mid \cdot)$, definida por:*

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y] = \frac{\mathbf{P}[X=x,Y=y]}{\mathbf{P}[Y=y]} & si\ \mathbf{P}[Y = y] > 0 \\ 0 & si\ \mathbf{P}[Y = y] = 0, \end{cases}$$

satisface $f_{X|Y}(x \mid y) \circ Y = \mathbf{P}[X = x \mid \sigma(Y)]$.

Para simplificar la notación, denotaremos por

$$\mathbf{P}[X = x \mid \sigma(Y)] = \mathbf{P}[X = x \mid Y].$$

Para cada $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $\mathbf{P}[Y = y] > 0$, $\mathbf{P}[X \mid Y = y]$ es una densidad; entonces, para todo $A \in \mathbb{R}^m$, se tiene

$$\mathbf{P}[X \in A \mid Y = y] = \sum_{x \in A} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y],$$

y, usando el teorema de la probabilidad total, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \in A] &= \sum_{\{y: P[Y=y]>0\}} \mathbf{P}[X \in A \mid Y = y]\, \mathbf{P}[Y = y] \\
&= \sum_{\{y: P[Y=y]>0\}} \sum_{x \in A} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y]\, \mathbf{P}[Y = y].
\end{aligned}$$

Más aún, para todo $A \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \in A, Y \in C] &= \sum_{\{y \in C: P[Y=y]>0\}} \mathbf{P}[X \in A \mid Y = y]\, \mathbf{P}[Y = y] \\
&= \sum_{\{y \in C: P[Y=y]>0\}} \sum_{x \in A} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y]\, \mathbf{P}[Y = y].
\end{aligned}$$

En particular, la densidad conjunta de (X, Y) se puede escribir en términos de densidades condicionales:

$$\mathbf{P}[X = x, Y = y] = \begin{cases} \mathbf{P}[X = x \mid Y = y]\, \mathbf{P}[Y = y] & \text{si } \mathbf{P}[Y = y] > 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{P}[Y = y] = 0. \end{cases}$$

1.4 Esperanza Condicional.

En esta sección estudiaremos brevemente la esperanza condicional, la esperanza de un vector aleatorio con respecto a una densidad condicional, pues durante el desarrollo de la parte fundamental de este trabajo se requiere de su manejo.

Sean $B \in \mathcal{F}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ un vector aleatorio y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(X)$ es una variable aleatoria. La esperanza condicional de $g(X)$ dado B se define como

$$\mathbf{E}[g(X) \mid B] = \sum_x g(x)\, \mathbf{P}[X = x \mid B].$$

El siguiente teorema nos dá la condición suficiente para la existencia de $\mathbf{E}[g(X) \mid B]$, donde B denota a cualquier evento.

Teorema 1.13 *Supongamos que* $\mathbf{E}[g(X)]$ *existe; entonces* $\mathbf{E}[g(X) \mid B]$ *existe.*

Demostración:

Es suficiente mostrar que $\sum_x |g(x)| \mathbf{P}[X = x \mid B] < \infty$.

$$\begin{aligned} \sum_x |g(x)| \mathbf{P}[X = x \mid B] &= \sum_x |g(x)| \frac{\mathbf{P}[\{X = x\} \cap B]}{\mathbf{P}[B]} \\ &\leq \frac{1}{\mathbf{P}[B]} \sum_x |g(x)| \mathbf{P}[X = x] < \infty \end{aligned}$$

$\square$

Observaciones:

i) $\mathbf{E}[X \mid B]$ es lineal, pues es una esperanza, es decir, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y X, Y funciones $\mathcal{F}-$medibles,

$$\mathbf{E}[aX + bY \mid B] = a\mathbf{E}[X \mid B] + b\mathbf{E}[Y \mid B].$$

ii) La **función indicadora** del conjunto A, denotada 1_A, se define como

$$1_A = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A; \end{cases}$$

además, si $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{E}[1_A \mid B] = \mathbf{P}[A \mid B].$$

$\mathbf{E}[g(X) \mid Y = y]$ se define de una forma general como sigue:

Definición 1.14 *Sean* $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $g(X) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *y* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *vectores aleatorios. Supongamos que* $\mathbf{E}[g(X)]$ *existe. Se define la esperanza condicional*

$\mathbf{E}[g(X) \mid Y = \cdot] : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ *como*

$$\mathbf{E}[g(X) \mid Y = y] = \begin{cases} \sum_x g(x) f_{X|Y}(x \mid y) & si\ \mathbf{P}[Y = y] > 0 \\ 0 & si\ \mathbf{P}[Y = y] = 0. \end{cases}$$

De acuerdo a esta definición $\mathbf{E}[g(X) \mid Y = y]$ es una función de y que puede denotarse por $h(y)$, incluso puede componerse con la función Y; y es claro que $h(Y)$ es un vector aleatorio discreto definido sobre $(\Omega, \sigma(Y))$, pues es constante sobre los conjuntos $\{Y = y\}$.

Definición 1.15 *Sean X, Y y $g(X)$ funciones $\mathcal{F}-$medibles tales que $\mathbf{E}[g(X)]$ existe; entonces la esperanza condicional de $g(X)$ dado Y es la función $h(Y)$, $\sigma(Y)-$medible, definida por*

$$h(y) = \mathbf{E}[g(X) \mid Y = y].$$

El siguiente teorema establece la condición de existencia de la esperanza condicional $h(Y)$.

Teorema 1.16 *Sean X, Y y $g(X)$ vectores aleatorios tales que $\mathbf{E}[g(X)]$ existe; entonces $\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X) \mid Y]]$ existe y*

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X) \mid Y]] = \mathbf{E}[g(X)].$$

Demostración:

Para que exista $\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X) \mid Y]]$ se debe mostrar que:

$\sum_y |\mathbf{E}[g(X) \mid Y = y]| \, \mathbf{P}[Y = y] < \infty.$

$$\begin{aligned}
\sum_{y}\left|\mathbf{E}\left[g(X)\mid Y=y\right]\right|\mathbf{P}\left[Y=y\right] &= \sum_{\{y:P[Y=y]>0\}}\left|\sum_{x} g(x)\,\mathbf{P}\left[X=x\mid Y=y\right]\right|\mathbf{P}\left[Y=y\right]\\
&\leq \sum_{\{y:P[Y=y]>0\}}\sum_{x}\left|g(x)\right|\mathbf{P}\left[X=x\mid Y=y\right]\mathbf{P}\left[Y=y\right]\\
&= \sum_{x}\sum_{\{y:P[Y=y]>0\}}\left|g(x)\right|\mathbf{P}\left[X=x,Y=y\right]\\
&= \sum_{x}\left|g(x)\right|\mathbf{P}\left[X=x\right]<\infty.
\end{aligned}$$

Ahora se probará la igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[g(X)\mid Y\right]\right] &= \sum_{y}\mathbf{E}\left[g(X)\mid Y=y\right]\mathbf{P}\left[Y=y\right]\\
&= \sum_{\{y:P[Y=y]>0\}}\sum_{x} g(x)\,\mathbf{P}\left[X=x\mid Y=y\right]\mathbf{P}\left[Y=y\right]\\
&= \sum_{x} g(x)\sum_{\{y:P[Y=y]>0\}}\mathbf{P}\left[X=x,Y=y\right]\\
&= \sum_{x} g(x)\,\mathbf{P}\left[X=x\right]\\
&= \mathbf{E}\left[g(X)\right]
\end{aligned}$$

□

Si $A\in\sigma(Y)$, entonces 1_A es $\sigma(Y)-$ medible. Sean $A=\bigcup_{\{j\in J\}}\{Y=y_j\}$ y $g_1:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ definida por

$$g_1(y)=\begin{cases}1 \text{ si } y\in\{y_j : j\in J\}\\ 0 \qquad\qquad \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Observemos que $1_A=g_1(Y)$, de donde resulta la siguiente proposición:

Proposición 1.17 *Sean X,Y vectores aleatorios tales que $\mathbf{E}\left[g(X)\right]$ existe y sea $A\in\sigma(Y)$; entonces*

$$\mathbf{E}\left[1_A\mathbf{E}\left[g(X)\mid Y\right]\right]=\mathbf{E}\left[1_A g(X)\right].$$

La demostración es semejante a la del teorema anterior.

El siguiente teorema da la caracterización de $\mathbf{E}[g(X) \mid Y]$ como variable aleatoria

Teorema 1.18 *Sean X, Y funciones $\mathcal{F}-$medibles tales que $\mathbf{E}[g(X)]$ existe, y $H : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\sigma(Y)-$medible tal que, para todo $A \in \sigma(Y)$,*

$$\mathbf{E}[1_A H] = \mathbf{E}[1_A g(X)];$$

entonces

$$\mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : H(\omega) \neq \mathbf{E}[g(X) \mid Y]\}] = 0.$$

Demostración:

Por la proposición anterior, para todo $A \in \sigma(Y)$,

$$\mathbf{E}[1_A H] = \mathbf{E}[1_A \mathbf{E}[g(X) \mid Y]].$$

Sean

$$A_i = \{\omega : Y = y_i, y_i \in \mathbf{R}(Y)\} \in \sigma(Y)$$

y

$$H(\omega) = h_i \text{ para todo } \omega \in A_i.$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[1_{A_i} H] &= \sum_{\omega \in \Omega} 1_{A_i}(\omega) H(\omega) \mathbf{P}[\{\omega\}] \\ &= h_i \sum_{A_i} \mathbf{P}[\{\omega\}] \\ &= h_i \mathbf{P}[A_i]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[1_{A_i}\mathbf{E}\left[g(X) \mid Y\right]\right] &= \sum_{\omega\in\Omega} 1_{A_i}(\omega)\,\mathbf{E}\left[g(X) \mid Y(\omega)\right]\mathbf{P}\left[\{\omega\}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[g(X) \mid Y = y_i\right]\sum_{A_i}\mathbf{P}\left[\{\omega\}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[g(X) \mid Y = y_i\right]\mathbf{P}\left[A_i\right].
\end{aligned}$$

Entonces, para todo $\omega \in \Omega$,

$$H(\omega) = \mathbf{E}\left[g(X) \mid Y\right]$$

□

Este resultado es la base de la definición general de esperanza condicional, que a continuación enunciamos.

Definición 1.19 *Sean X, Y funciones $\mathcal{F}-$medibles tales que $\mathbf{E}[g(X)]$ existe. Definimos la esperanza condicional de $g(X)$ dado Y como la función*

$\mathbf{E}[g(X) \mid Y] : \Omega \to \mathbb{R}$, *$\sigma(Y)-$medible, que satisface*

$$\mathbf{E}\left[1_A\mathbf{E}\left[g(X) \mid Y\right]\right] = \mathbf{E}\left[1_A g(X)\right],$$

para todo $A \in \sigma(Y)$.

La esperanza condicional así definida no es única, pero todas las funciones con esta propiedad difieren en un conjunto con probabilidad cero.

Sean $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ la $\sigma-$álgebra generada por la partición finita o numerable $\mathrm{B} = \{\mathrm{B}_i \in \mathcal{F} : i \in I\}$ de Ω y $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $g(X) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vectores aleatorios; entonces

$$\mathbf{E}\left[g(X) \mid \mathcal{H}\right] = \mathbf{E}\left[g(X) \mid \mathbf{B}_i\right] \text{ si } \omega \in \mathbf{B}_i.$$

A continuación se enuncian algunas propiedades elementales de la esparanza condicional

Proposición 1.20 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{H}$ una sub $\sigma-$álgebra de $\mathcal{F}$.*

i) *Si $g(X)$ es $\mathcal{H}-$medible, entonces $\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] = g(X)$.*

ii) *Si $g(X)$ es $\mathcal{H}-$medible, entonces $\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}]] = \mathbf{E}[g(X)]$.*

iii) *Para toda función $h(Y)$, $\mathcal{H}-$medible y acotada,*

$$\mathbf{E}[h(Y)\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}]] = \mathbf{E}[h(Y)g(X)].$$

iv) *Sea $h(Y)$ una variable aleatoria. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}[ag(X) + bh(Y) \mid \mathcal{H}] = a\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] + b\mathbf{E}[h(Y) \mid \mathcal{H}].$$

v) *Si $g(X) \geq h(Y)$, entonces $\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] \geq \mathbf{E}[h(Y) \mid \mathcal{H}]$.*

vi) *Si C es una sub $\sigma-$álgebra de $\mathcal{H}$, entonces $\mathbf{E}[\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] \mid C] = \mathbf{E}[g(X) \mid C]$.*

vii) *Si $h(Y)$ es $\mathcal{H}-$medible y acotada, entonces*

$$\mathbf{E}[h(Y)g(X) \mid \mathcal{H}] = h(Y)\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}].$$

viii) *Si $g(X)$ es independiente de $\mathcal{H}$, entonces $\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] = \mathbf{E}[g(X)]$.*

Las demostraciones se omiten.

Notemos que $\mathbf{E}[g(X) \mid \mathcal{H}] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, por lo que tiene sentido calcular su esperanza.

A continuación veremos un resultado muy útil en el empleo de la esperanza condicional

Proposición 1.21 *Sean $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ vectores aleatorios tales que Y es independiente de $\mathcal{F}$; entonces, para toda función boreliana g acotada sobre $\left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d\right)$,*

$$\mathbf{E}\left[g(X,Y) \mid \mathcal{F}\right] = \mathbf{E}\left[g(x,Y)\right] \circ X.$$

Demostración:

Sea Z una variable aleatoria $\mathcal{F}-$medible positiva; entonces, utilizando la independencia de Y del vector (X,Z),

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[zg(X,Y)\right] &= \sum_{(x,z)\in\mathbf{R}(X,Z)} \sum_{y\in\mathbf{R}(Y)} zg(x,y) f_{X,Z}(x,z) f_Y(y) \\
&= \sum_{(x,z)\in\mathbf{R}(X,Z)} z\left(\sum_{y\in\mathbf{R}(Y)} g(x,y) f_Y(y)\right) f_{X,Z}(x,z) \\
&= \sum_{(x,z)\in R(X,Z)} z\left(\mathbf{E}\left[g(x,Y)\right]\right) f_{X,Z}(x,z) \\
&= \mathbf{E}\left[Z\mathbf{E}\left[g(X,Y)\right]\right];
\end{aligned}$$

Si hacemos $Z = 1_A$, con $A \in \mathcal{F}$, y utilizando la definición 1.19 y la medibilidad de X con respecto a $\mathcal{F}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[g(X,Y) \mid \mathcal{F}\right] &= \mathbf{E}\left[g(X,Y)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[g(x,Y)\right] \circ X
\end{aligned}$$

$\square$

Esta proposición nos dice que $\mathbf{E}\left[g(X,Y) \mid \mathcal{F}\right]$ se puede calcular tomando a X como constante, es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[g(X,Y) \mid \mathcal{F}\right] &= \mathbf{E}\left[g(X,Y) \mid \mathbf{B}_i\right] \text{ si } \omega \in \mathbf{B}_i \\
&= \mathbf{E}\left[g(x_j,Y)\right] \text{ si } \omega \in \mathbf{B}_i \text{ y } \mathbf{B}_i \subset \{X = x_j\}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.22 (Desigualdad de Jensen) *Sean X una variable aleatoria con esperanza finita y $g(\cdot)$ una función convexa. Entonces*

$$\mathbf{E}[g(X)] \geq g(\mathbf{E}[X]).$$

Demostración:

Como $g(x)$ es continua y convexa, entonces existe una recta $l(x) = ax + b$ tal que $l(\mathbf{E}[X]) = g(\mathbf{E}[X])$ y $g(x) \geq l(x)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[l(X)] &= a\mathbf{E}[X] + b \\ &= l(\mathbf{E}[X]), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{E}[X]) &= \mathbf{E}[l(X)] \\ &\leq \mathbf{E}[g(X)] \end{aligned}$$

□

1.5 Convergencia en Distribución.

El propósito de esta tesis es desarrollar un *modelo discreto* para valuar opciones europeas. En el capítulo 6 obtendremos la fórmula del Modelo Binomial que proporciona los valores de las opciones a los tiempos $0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, ..., \frac{(N-1)T}{N}, T$ del intervalo $[0, T]$ de vida de la opción. Se verá que si se va refinando la partición de este intervalo, haciendo tender N a infinito, la fórmula de valuación convergerá en distribución a la fórmula continua de Black-Scholes para valuación de opciones europeas.

Por lo anterior, expondremos brevemente los elementos de convergencia en distribución que requeriremos para tal objetivo.

Definición 1.23 *Una sucesión* $\{X_n\}$ *de variables aleatorias* **converge en distribución** *si y sólo si existe una función de distribución* F *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

en todos los puntos x *donde* F *es continua.*

Veamos un ejemplo:

Sea X_n es un número elegido aleatoriamente en el intervalo $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, con $n \geq 1$. La distribución $F_n(\cdot)$ de X_n está dada por:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\dfrac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(1+nx) \text{ si } -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1 \text{ si } x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Cuando $n \to \infty$ la sucesión de funciones $F_n(x)$ tiende a la función límite

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

$G(x)$ no es una función de distribución, pero redefiniendo el valor en $x = 0$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$$

obtenemos una distribución a la cual la sucesión $\{F_n\}$ converge en todos los puntos de continuidad de F.

El siguiente teorema proporciona una definición equivalente de convergencia en distribución.

Teorema 1.24 *Una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias converge en distribución si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[f\left(X_n\right)\right] = \mathbf{E}\left[f\left(X\right)\right]$$

para toda función f continua y acotada.

La demostración se omite.

Otra de las herramientas indispensables en la teoría de la Probabilidad es la función característica, en particular es útil en el estudio de la convergencia en distribución. Primero daremos las definiciones preliminares de variable aleatoria compleja y de su esperanza.

Todo numero complejo z se puede escribir de la forma $z = x + iy$, donde x y y son números reales e $i = \sqrt{-1}$. El valor absoluto de z se define como

$$|z| = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

y la distancia entre dos números complejos z_1 y z_2 se define como $|z_1 - z_2|$.

Definición 1.25 *Sean $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variables aleatorias.La función $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por*

$$Z = X + iY$$

es una variable aleatoria compleja.

Definición 1.26 *La esperanza condicional de una variable aleatoria compleja $Z = X + iY$ se define como*

$$E[Z] = E[X] + iE[Y],$$

y Z tiene esperanza finita si y sólo si $E[|Z|] < \infty$.

Ahora enunciaremos la definición de función característica de una variable aleatoria, la cual involucra números complejos.

Definición 1.27 *Sea X una variable aleatoria. La función $\varphi_X(t)$, $-\infty < t < \infty$, dada por*

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[\exp\{itX\}],$$

se llama la función característica de X.

La función característica de X siempre existe, ya que

$$\exp\{itx\} = \cos(tx) + i\,sen(tx)$$

y, para todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |\exp\{itX(\omega)\}| &= \left(\cos^2(tX(\omega)) + sen^2(tX(\omega))\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Calculemos ahora la función característica de una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbf{E}[\exp\{itx\}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{itx\}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sigma}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{x^2-2x(\mu+it\sigma^2)+(\mu+it\sigma^2)^2-(\mu+it\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx \\
&= \exp\left\{\frac{(\mu+it\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(x-(\mu+it\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx \\
&= \exp\left\{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}.
\end{aligned}
$$

El siguiente teorema establece que la función de distribución de una variable aleatoria está determinada por su función característica.

Teorema 1.28 (De Unicidad) *Si dos variables aleatorias tienen la misma función característica, entonces tienen la misma función de distribución.*

Omitimos la demostración.

El teorema que sigue establece que la convergencia de funciones características implica la convergencia de las correspondientes funciones de distribución. La demostración se omite.

Teorema 1.29 (De Continuidad de Levy) *Sean $X_n, n \geq 1$, una sucesión de variables aleatorias tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

Entonces X_n converge en distribución.

Por último, la proposición que mencionamos a continuación establece la convergencia en distruibución de variables binomiales a una distribución normal.

Proposición 1.30 *Si $(Y_N)_{N>1}$ es una sucesión de variables aleatorias de la forma*

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + \dots + X_N^N,$$

donde, para cada N, las variables aleatorias X_i^N son independientes e idénticamente distribuidas, con valores en $\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$ y con media μ_N tal que $\lim_{N\to\infty}(N\mu_N) = \mu$, y

$$\lim_{N\to\infty}(N\mu_N) = \mu;$$

entonces $(Y_N)_{N>1}$ converge en distribución a una variable con distribución $N(\mu,\ \sigma^2)$.

Demostración:

Usando la función característica de Y_N,

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_N}(t) &= \mathbf{E}\left[\exp(itY_N)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{N} \mathbf{E}\left[\exp(itX_j^N)\right] \\
&= \left(\mathbf{E}\left[\exp(itX_j^N)\right]\right)^N \\
&= \left(1 + it\mathbf{E}\left[X_j^N\right] - \frac{t^2\mathbf{E}\left[X_j^{2N}\right]}{2!} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N \\
&= \left(1 + it\mu_N - t^2\frac{\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N;
\end{aligned}$$

tomando límite,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\varphi_{Y_N}(t) &= \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{itN\mu_N - t^2\frac{\sigma^2}{2}}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N \\
&= \exp\left\{it\mu - t^2\frac{\sigma^2}{2}\right\},
\end{aligned}$$

lo que demuestra la convergencia en distribución de $(Y_N)_{N>1}$

$\square$

Los elementos presentados en este capítulo los utilizaremos ampliamente en el desarrollo de los dos últimos capítulos; principalmente recurriremos al manejo de la esperanza condicional, una de las herramientas más útiles en la teoría de la probabilidad, y a las propiedades de la convergencia en distribución, al final del este trabajo cuando se estudie la aproximación a un modelo continuo de valuación de opciones.

Capítulo 2

Martingalas.

2.1 Introducción.

Con el análisis de los juegos de azar se desarrolló el concepto de los juegos justos, con el planteamiento, en general, del siguiente problema: dado un juego de azar entre dos personas, ¿como deben ser las apuestas para que el juego sea "justo"?. A continuación daremos la definición de juego justo y su relación con las martingalas.

Consideremos un juego de azar entre dos personas A y B que consiste de n partidas. Sea X_k la ganancia total de A hasta la k-ésima partida. Se dice que el juego es justo si $E[X_1] = 0$ y para todo $k = 1, ..., n-1$ se satisface

$$\mathbf{E}[X_{k+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_k = x_k] = x_k.$$

Como veremos en la siguiente sección, la segunda condición de la definición de juego justo es precisamente la definición de martingala (una sucesión de variables aleatorias con dicha propiedad), por lo que un juego con al menos dos partidas es justo si la sucesión (X_k), de ganancias totales, que genera el juego para un jugador, es una martingala y $E[X_1] = 0$.

Las martingalas son la parte fundamental en la teoría de los modelos discretos de valuación de opciones europeas, debido a su relación con los juegos justos; de hecho, dan la caracterización de los mercados financieros que consideran los modelos de valuación de opciones.

A continuación se da un sencillo bosquejo de la teoría de las martingalas y de los resultados que se ocuparán en esta tesis.

2.2 Martingalas.

La propiedad de martingala de una sucesión de variables aleatorias suele darse en numerosos contextos. Como veremos, una condición para que en el modelo del mercado no sea posible hacer dinero sin dinero, será que la sucesión de precios actualizados de los activos sea una martingala bajo una cierta probabilidad.

Iniciemos dando las definiciones de algunos elementos indispensables:

Definición 2.1 (Filtración) *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una filtración $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una sucesión creciente de sub$\sigma-$álgebras de $\mathcal{F}$; esto es, para todo $n \leq N-1$,*

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}_n$ representa la información disponible hasta el momento n. Para tener una idea más clara de esto, pensemos en un juego y que los elementos de una sucesión $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ representan, en cada tiempo n, la fortuna de un jugador; entonces $\mathcal{F}_n$

contiene la información de las riquezas pasadas X_n. Otro ejemplo lo constituye los precios de los activos con riesgo, que será tratado en el capítulo 5, donde en $\mathcal{F}_n$ está contenida la información de los precios de los activos hasta el instante n. Por esto decimos que $\mathcal{F}_n$ incluye toda la historia hasta el instante n.

En todo lo que sigue supondremos que tenemos un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y una filtración $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ fijos.

Definición 2.2 (Sucesión adaptada) *Una sucesión $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ de vectores aleatorios es llamada sucesión adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ si para todo n, X_n es $\mathcal{F}_n-$medible.*

Definición 2.3 (Sucesión predecible) *Una sucesión $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ de vectores aleatorios es llamada predecible si para todo $n \geq 1$, H_n es $\mathcal{F}_{n-1}-$medible.*

Definición 2.4 (Martingala) *Una sucesión adaptada $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ de variables aleatorias es una $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si para todo $n \leq N-1$,*

$$\mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

Ahora bien, la sucesión será una $\mathcal{F}_n-$supermartingala si y sólo si para todo $n \leq N-1$,

$$\mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq M_n.$$

Por otra parte, se dice que la sucesión es una $\mathcal{F}_n-$submartingala si y sólo si para todo $n \leq N-1$,

$$\mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq M_n.$$

Estas definiciones se extienden a vectores aleatorios:

Una sucesión $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ de vectores aleatorios en $\mathbb{R}^d$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala, una $\mathcal{F}_n-$supermartingala o una $\mathcal{F}_n-$submartingala si cada componente del vector M_n es una $\mathcal{F}_n-$martingala, una $\mathcal{F}_n-$supermartingala o una $\mathcal{F}_n-$submartingala, respectivamente.

Las propiedades más importantes de las martingalas se establecen en la siguiente proposición:

Proposición 2.5 **a)** *$(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si para todo $j \leq N-n$,*

$$\mathbf{E}\left[M_{n+j} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

b) *Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala para todo $0 \leq n \leq N$,*

$$\mathbf{E}\left[M_n\right] = \mathbf{E}\left[M_0\right].$$

c) *La suma de martingalas es una martingala.*

Demostración:

a) Sea $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ una $\mathcal{F}_n-$martingala.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[M_{n+j} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[M_{n+j} \mid \mathcal{F}_{n+j-1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbf{E}\left[M_{n+j-1} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= \ldots \\
&= \mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, $\mathbf{E}[M_{n+j} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ para todo $j \leq N-n$; en particular, para todo $n \leq N-1$,

$$\mathbf{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n.$$

b) Usando **a)**, para todo $n \leq N$,

$$\mathbf{E}[M_n \mid \mathcal{F}_0] = M_0;$$

entonces para todo $n \leq N$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{E}[M_n \mid \mathcal{F}_0]] &= \mathbf{E}[M_n] \\ &= \mathbf{E}[M_0]. \end{aligned}$$

c) Sean $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ y $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ dos $\mathcal{F}_n-$martingalas; entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_{n+1} + Q_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbf{E}[Q_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= M_n + Q_n \end{aligned}$$

□

Existen las correspondientes propiedades para sub y supermartingalas.

Notemos que:

1) $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es a la vez una $\mathcal{F}_n-$submartingala y una $\mathcal{F}_n-$supermartingala.

2) $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$supermartingala si y sólo si $(-M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$submartingala.

3) Si $(M_n)_{n\geq 1}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala entonces $(M_n)_{n\geq 1}$ es una martingala respecto a $(\sigma(X_1,...,X_n))_{n=1}^{\infty}$.

4) Si Y tiene esperanza finita y $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una filtración en $(\Omega,\mathcal{F})$, entonces la familia

$$\{X_{n+1}=\mathbf{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_{n+1}\right]:\ n\in\{0,1,...,N\}\},$$

es una $\mathcal{F}_n-$martingala, pues

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_{n+1}\right]\mid\mathcal{F}_n\right]\\
&= \mathbf{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_n\right]\\
&= X_n.
\end{aligned}$$

Ejemplos de martingalas

1. (Ruina del jugador) Un jugador realiza una serie de apuestas de un peso cada una; supongamos que su capital inicial es x_0, tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar cualquier apuesta y el juego termina hasta que se quede sin dinero. Sea X_n el capital del jugador después de haberse realizado la n-ésima apuesta. Así $X_n\in\{0,1,...\}$; supongamos $X_n=x$, con $x\in\{1,2,...\}$; entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X_{n+1}\mid X_0=x_0,...,X_n=x\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}\left[X_{n+1}=i\mid X_0=x_0,...,X_n=x\right]\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}\left[X_{n+1}=i\mid X_n=x\right]\\
&= (x+1)\,\mathbf{P}\left[X_{n+1}=x+1\mid X_n=x\right]+\\
&\quad\ (x-1)\,\mathbf{P}\left[X_{n+1}=x-1\mid X_n=x\right]\\
&= (x+1)\frac{1}{2}+(x-1)\frac{1}{2}\\
&= x;
\end{aligned}$$

por lo tanto, la sucesión $(X_n)_{n>0}$ es una $\sigma(X_0,...,X_n)$ −martingala.

2. Supongamos que una población al tiempo n está compuesta por i genes del tipo A y por $N-i$ genes del tipo a, con $i \in \{0,1,...,N\}$. En la generación $n+1$ la composición de la población está determinada por N ensayos de Bernoulli independientes; cada ensayo tiene por resultado A con probabilidad $P_i = \frac{i}{N}$ y a con probabilida $1-P_i = \frac{N-i}{N}$. Sea X_n el número de genes del tipo A en la población en la n-ésima generación; entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X_{n+1}=k \mid X_0=x_0,...,X_n=i] &= \mathbf{P}[X_{n+1}=k \mid X_n=i] \\
&= \binom{N}{k} P_i^k (1-P_i)^{N-k},
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{n+1} \mid X_0=x_0,...,X_n=i] &= \sum_{j=0}^{N} j\binom{N}{j} P_i^j (1-P_i)^{N-j} \\
&= NP_i \sum_{j=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(N-j)!\,(j-1)!} P_i^{j-1} (1-P_i)^{N-j} \\
&= NP_i \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-k)!\,(k)!} P_i^{k} (1-P_i)^{N-1-k} \\
&= NP_i \\
&= i,
\end{aligned}$$

por lo que $(X_n)_{n>0}$ es una martingala.

Proposición 2.6 *Sea $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ una $\mathcal{F}_n$−martingala y $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ una sucesión predecible con relación a $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$; entonces la sucesión*

$X_0 = H_0M_0$

$X_n = H_0M_0 + H_1(M_1-M_0) + ... + H_n(M_n-M_{n-1})$ *para todo* $n \geq 1$

es una $\mathcal{F}_n$−martingala.

Demostración:

Primero probaremos que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es adaptada.

$X_0 = H_0M_0$ es $\mathcal{F}_0$−medible, pues H_0 y M_0 son ambas medibles.

$X_n = H_0M_0 + H_1(M_1 - M_0) + ... + H_n(M_n - M_{n-1})$ es $\mathcal{F}_n$−medible, pues si una variable es $\mathcal{F}_{n-k}$−medible, con $0 \leq k \leq n$, también es $\mathcal{F}_n$−medible.

Ahora probaremos que $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n$−martingala. Para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1}\mathbf{E}[(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que H_{n+1} es $\mathcal{F}_n$−medible y $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una martingala, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \\ &= X_n \end{aligned}$$

□

La proposición siguiente es fundamental para caracterizar a los mercados financieros viables que veremos en el Capítulo 5, ya que relaciona a las martingalas con el arbitraje.

Proposición 2.7 *Una sucesión adaptada de v.a. reales $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n$−*

martingala si y sólo si para toda sucesión predecible $(H_n)_{0\leq n\leq N}$,

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{N} H_n\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] = 0.$$

Demostración:

Sea $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ una $\mathcal{F}_n-$martingala. Definimos a $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ como:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_n &= \sum_{i=1}^{n} H_i\left(M_i - M_{i-1}\right) \text{ para todo } n \geq 1, \end{aligned}$$

donde $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ es predecible; entonces, por la proposición 2.6, $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{N} H_n\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] &= \mathbf{E}\left[X_0\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, a cada evento A, $\mathcal{F}_j-$medible, con $j \in \{1, ..., N\}$, le asociamos la sucesión $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ definada por:

$$\begin{aligned} H_n &= 0 \text{ para } n \neq j+1 \\ H_{j+1} &= 1_A. \end{aligned}$$

De esta manera $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ es predecible.Usando que $\mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{N} H_n\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[1_A\left(M_{j+1} - M_j\right)\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[1_A\left(M_{j+1} - M_j\right) \mid \mathcal{F}_j\right]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[1_A\left(\mathbf{E}\left[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] - \mathbf{E}\left[M_j \mid \mathcal{F}_j\right]\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}\left[1_A\left(\mathbf{E}\left[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] - M_j\right)\right]$$
$$= 0,$$

por lo tanto $\mathbf{E}\left[M_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right] = M_j$

□

La siguiente proposición se refiere a las sucesiones de funciones convexas compuestas con martingalas y supermartingalas.

Proposición 2.8 i) *Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa tal que $f(M_n)$ tiene esperanza finita para todo n, entonces $(f(M_n))_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$submartingala.*

ii) *Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$submartingala y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y creciente tal que $f(M_n)$ tiene esperanza finita para todo n, entonces $(f(M_n))_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$submartingala.*

Demostración:

i) Utilizando el teorema 1.22,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[f(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] &\geq f\left(\mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right)\\ &= f(M_n).\end{aligned}$$

ii) De nuevo, usando el teorema 1.22,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[f(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] &\geq f\left(\mathbf{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right)\\ &\geq f(M_n)\end{aligned}$$

Los resultados presentados en este capítulo los utilizaremos en un modelo de valuación de opciones, en el que, como veremos, lo más importante es la propiedad de martingala que deben tener los precios actualizados de los activos considerados.

Capítulo 3

El problema de las opciones europeas.

3.1 Un poco de historia.

Actualmente los contratos de opción son instrumentos que representan el proceso de innovación en un mercado financiero; hoy en día existen mercados de opciones en los puntos económicos más importantes del mundo y en ellos se negocia con opciones que operan sobre una gama muy amplia de activos financieros. Pero hablar de opciones data de la época de los fenicios, griegos y romanos ya que celebraban negocios con cláusulas de opción sobre las mercancías que transportaban en sus embarcaciones; pero es hasta el siglo $XVII$ cuando en Holanda aparece el primer mercado de opciones con cierta "organización". Se trataba de contratos de opciones para vender o comprar bulbos de tulipán a una fecha predeterminada. De esta manera, los comerciantes holandeses podían asegurar el precio al que iban a adquirir los tulipanes, y consecuentemente, el precio al que serían vendidos a los clientes; por su parte, los agricultores compraban el derecho a vender su cosecha, a un precio prefijado, en el futuro.

Para 1640 la economía de los países europeos sufría grandes estragos y ésto provocó que muchos de los vendedores de opciones no pudieran cumplir con su parte , razón por la que en todo el continente, se consideraban como instrumentos peligrosos y especulativos, incluso muchas empresas medianas y pequeñas se declararon en quiebra. En 1720 las opciones operaban sobre las acciones de las compañías más importantes, pero nuevamente la racha de mala fortuna propició la caída económica de una de ellas, la South Sea Company quebró y su insolvencia para cumplir con su parte de los contratos de opciones condujo a que estos instrumentos se consideraran extremadamente especulativos y a raíz de ello el mercado de opciones fue declarado ilegal. Este acontecimiento se volvió un terrible escándalo, la prohibición para operar con opciones duró hasta principios del siglo XX.

A pesar que ha sido difícil la aceptación de los contratos de opción como instrumentos convenientes para hacer negocios, desde 1973 han tenido gran auge; en ese año empezó a operar el CBOE (Chicago Board Options Exchange) que fue el primer mercado de opciones formalmente organizado y desde entonces las opciones se han ganado un lugar muy especial de entre todos los demás instrumentos de inversión.

3.2 Opciones de compra y de venta.

Se pueden considerar dos clases de contratos de opciones:

i) los que incorporan derechos de compra.

ii) los que incorporan derechos de venta.

Definición 3.1 *Una opción es un contrato (o título) que dá a su poseedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender (si se trata de una opción de compra o de venta) una cierta cantidad de un activo financiero a un precio fijado con anticipación, durante un período de tiempo o a una fecha dada. Este derecho se adquiere a cambio del pago de una prima o precio de la opción.*

En inglés, una opción de compra es llamada **call** y una opción de venta **put**, términología que se ha impuesto en todas las lenguas para referirse a los contratos de opción.

Así, la descripción precisa de un contrato de opción se hace a partir de los siguientes elementos:

- La naturaleza de la opción: Call o Put.
- El activo financiero sobre el que opera la opción; puede tratarse de una acción, una obligación, una divisa, etcétera.
- El monto, cantidad de activo financiero a comprar o vender.
- La fecha de expiración (o maduración), es el día hasta el cual el contrato tiene vigencia por lo que limita la vida de la opción. Si la opción puede ejercerse en cualquier tiempo anterior o hasta su fecha de expiración, entonces se hablará de una opción americana; y si sólo se puede ejercer en la fecha de expiración, estare-

mos hablando de una opción europea. La fecha de expiración la denotaremos por T y algunas veces por N.

- El precio de ejercicio, precio convenido de antemano al cual se hace la transacción si se ejerce la opción y que será representado por K.

- La prima, valor de la opción o precio del contrato, la prima será denotada por C si se trata de un call europeo o bien por P si se trata de un put europeo.

Durante el desarrollo de este trabajo sólo centraremos nuestro interés en el caso de opciones europeas que operan sobre activos que no reparten dividendos.

Veamos algunos ejemplos de contratos de opción.

1. Se adquiere un call sobre 50,000 dólares estadounidenses, con un precio de ejercicio de \$8 por dolar, que expira el 15 de diciembre de 1997. La persona que compró esta opción, tendrá el derecho de ejercerla y comprar 50,000 dólares en \$8 cada uno a la fecha de expiración. Por su parte, el vendedor de la opción estará obligado a vender 50,000 dólares a \$8 cada uno, en el caso de que el tipo de cambio es mayor o igual a \$8 por dolar.

2. Consideremos una opción put sobre una acción X, con precio de ejercicio de \$100, que vence el 15 de septiembre de 1997. Si una persona compra esta opción y el precio de la acción a la fecha de vencimiento fuera menor a \$100, esta persona ejercería la opción vendiendo la acción en \$100 a la persona que le vendió la opción, la cual estaría obligada a comprar la acción en \$100.

3.3 Algunas estrategias elementales.

Debemos recordar que sólo estudiaremos el caso de opciones europeas sobre activos que no reparten dividendos. Para tener una idea más clara, consideremos el caso de un call europeo con fecha de expiración T, precio de ejercicio K, sobre una acción con valor S_t a la fecha t. Es claro que si al tiempo T $S_T < K$, no se tiene interés en ejercer la opción, puesto que podríamos adquirir una unidad de activo a un precio menor que el establecido en el contrato. Opuestamente, si $S_T \geq K$, ejercemos la opción y obtenemos una ganancia de $S_T - K$ comprando la acción al precio K y revendiéndola en S_T. De esta manera, al momento de la transacción, el valor del call está dado por

$$(S_T - K)_+ = \max\{0, S_T - K\}.$$

De manera análoga, en el caso de un put europeo con las mismas características, si a la fecha T $S_T < K$, ejercemos la opción realizando una ganancia de $K - S_T$, vendiendo la opción en K y comprándola en S_T. Si $S_T > K$, no interesa ejercer la opción, ya que venderíamos una acción a un precio menor que el precio de mercado. Así obtenemos que a la fecha T el valor del put está dado por

$$(K - S_T)_+ = \max\{0, K - S_T\}.$$

Para el vendedor de la opción, se trata, en caso de ejercicio, de poder ofrecer o comprar (para un call o un put) una acción al precio K, y por lo tanto poder producir en el momento de la transacción una riqueza igual a $(S_T - K)_+$ o $(K - S_T)_+$, según sea el caso. Al momento de la venta de la opción, no se conoce S_T y se plantean los dos problemas siguientes:

i) ¿Cuánto tiene que pagar el comprador de la opción?; dicho de otro modo, ¿cómo evaluar al momento $t = 0$ una riqueza $(S_T - K)_+$ o $(K - S_T)_+$, para un call o un put, según corresponda?. Éste es el problema del "pricing" o valuación de la opción.

ii) ¿Cómo, el vendedor que tiene la prima al instante $t = 0$, podrá producir una riqueza igual a $(S_T - K)_+$ o $(K - S_T)_+$, para un call o un put, respectivamente?. Éste es el problema de la cobertura.

Para aclarar un poco más estos problemas, supongamos que se tiene la siguiente situación:

Sean S_n^0 y S_n los precios al tiempo n de un activo con tasa de interés de $\frac{1}{4}$ y de un activo con riesgo. Supongamos que

$$\begin{aligned} S_0 &= 4 \\ S_1 &= \begin{cases} 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) & \text{si el activo va a la baja} \\ 4\left(1 + \frac{1}{2}\right) & \text{si el activo va a la alza.} \end{cases} \end{aligned}$$

Queremos determinar la prima de un call al tiempo 0, con precio de ejercicio K, fecha de vencimiento $T = 1$, sobre una unidad de activo con riesgo, con un precio de ejercicio K. Es claro que si $K > 6$, esta operación sería benéfica para el vendedor del call, pues éste nunca se ejercería, es decir, el valor de la prima sería cero. Supongamos $K = 5$ y la prima del call de $\dfrac{3}{5}$. Supongamos que esta cantidad se invierte de la siguiente forma: al tiempo $t = 0$ invertimos $-\dfrac{2}{5}$ en el activo con tasa de interés $\dfrac{1}{4}$ y compramos $\dfrac{1}{4}$ de unidad del activo con riesgo, sin aportar ni retirar fondos. Al tiempo $t = 1$ si el activo con riesgo vale 2, entonces se tendrá un capital de

$$-\frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}(2) = 0$$

$$= \left(S_1^1 - K\right)_+ |_{S_1^1=2};$$

Por otro lado, si el activo con riesgo se va a la alza, es decir, $S_1^1 = 6$, el capital será de

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}(6) &= 1 \\ &= \left(S_1^1 - K\right)_+ |_{S_1^1=6}, \end{aligned}$$

con lo que el vendedor se cubre perfectamente.

Ahora, invirtamos al tiempo $t = 0$, $\dfrac{8}{20}$ en el activo con rendimiento seguro y compremos $\dfrac{1}{20}$ de unidad del activo con riesgo. Si al tiempo $t = 1$ $S_1^1 = 2$, nuestro capital será de

$$\frac{8}{20}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{20}(2) = \frac{12}{20};$$

en otro caso, si $S_1^1 = 6$ entonces tendremos un capital de

$$\frac{8}{20}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{20}(6) = \frac{16}{20},$$

con lo que el vendedor no se cubre perfectamente en caso de ejercicio.

3.3.1 Estrategias.

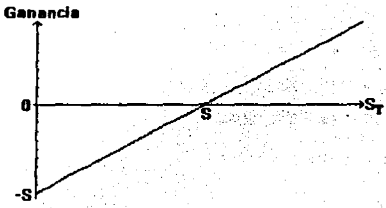
Consideremos un activo con riesgo, un call y un put sobre una unidad del mismo activo. Al comprar o vender unidades del activo con riesgo o de las opciones y si se mantienen hasta la fecha T de expiración de las opciones, se tienen cuatro tipos de posiciones elementales: descubiertos, coberturas, "spreads" y combinaciones. Estas posiciones intervienen en el problema de la cobertura, al invertir la prima de la opción.

En lo que resta de este capítulo estudiaremos estas posiciones.

1. Descubiertos.

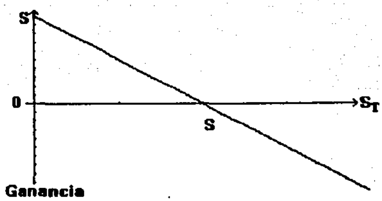
Consideremos una unidad de un activo financiero con precio actual S y precio S_T a la fecha T.

Una **posición larga** relaciona al precio de un activo financiero a la fecha T y a su fecha actual. Si $S_T < 0$, se tiene una pérdida de $S - S_T$; si $S_T = S$, no existe ni pérdida ni ganancia; y, finalmente, la ganancia se dá cuando $S_T > S$. La ganancia neta de esta posición es $S_T - S$.



Posición larga.
Ganancia neta= $G = S_T - S$

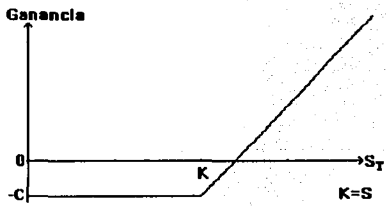
En una **posición corta** se involucra una venta al descubierto, esto es, vender un activo financiero que no se posee. Para ello se tiene que pedir prestado una unidad de dicho activo con valor actual S, la cual estamos obligados a devolver a la fecha T, comprándola al precio S_T para devolverla. De esta manera, se tiene ganancia cuando $S_T < S$; si $S_T = 0$, la ganancia es máxima, pues se posée la cantidad S y se tiene que pagar un activo con precio nulo; y se tiene pérdida cuando $S_T > S$, pues la cantidad que se tiene que pagar es mayor a la que se recibe por la venta al descubierto. La ganancia neta de esta posición es $S - S_T$.



Posición corta.

$G = S - S_T$

Ahora consideremos un call con vencimiento T, precio de ejercicio $K = S$, sobre una unidad del activo considerado anteriormente. Supongamos que compramos este call en C y que lo retenemos hasta el tiempo T. Si a la fecha T $K \geq S_T$, no nos conviene ejercerlo. Ejerceremos el call sólo cuando $S_T > K$. La ganancia neta está dada por $(S_T - S)_+ - C$.

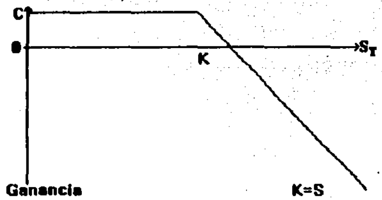


Compra de un call.

$$G = \begin{cases} -C \text{ si } S_T \leq S \\ S_T - S - C \text{ si } S_T > S \end{cases}$$

Ahora supongamos que emitimos el call en C. Con respecto a la ganancia neta, esta posición es exactamente opuesta a la compra del call, pues nuestra ganancia neta está dada por C menos la pérdida debida a que nos ejerzan el call, ésto es,

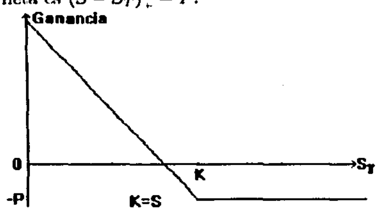
$C - (S_T - S)_+$.



Emisión de un call.

$$G = \begin{cases} C \text{ si } S_T \leq S \\ C - S_T + S \text{ si } S_T > S \end{cases}$$

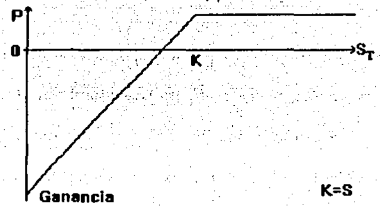
Consideremos un put con condiciones similares a las del call anterior. Supongamos que adquirimos el put en P. Si al tiempo T $S_T < S$, conviene ejercerlo, obteniendo una ganancia de $S - S_T$ por el ejercicio; si $S_T \geq S$, no se ejerce el put. La ganancia neta es $(S - S_T)_+ - P$.



Compra de un put.

$$G = \begin{cases} S - S_T - P \text{ si } S_T < S \\ -P \text{ si } S_T \geq S \end{cases}$$

Ahora, supongamos que emitimos el put en P. Como es de esperarse, esta posición es opuesta a la compra de un put. Si $S_T < S$, tendremos una pérdida de $S - S_T$ por el ejercicio del put; Si $S_T \geq S$, no nos ejercerán el put. La ganancia neta de esta posición es $P-(S-S_T)_+$.



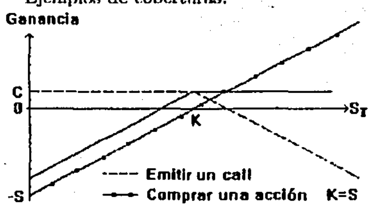
Emisión de un put.

$$G=\begin{cases} S_T-S+P \text{ si } S_T<S \\ P \text{ si } S_T\geq S \end{cases}$$

2. Coberturas.

Una cobertura (en inglés hedge), combina una opción y el activo financiero sobre el cual opera la opción, de tal manera que el activo protege a la opción o la opción proteje al activo contra pérdida. En una cobertura se combina una posición larga del activo con la emisión de calls o la compra de puts. Una cobertura revertida combina una posición corta del activo financiero con la compra de calls o la emisión de puts.

Ejemplos de coberturas:

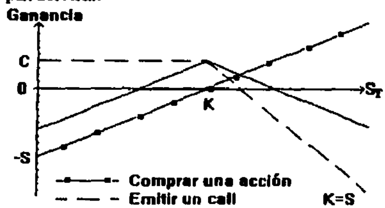


Cobertura 1:1.

$$G = \begin{cases} S_T - S + C \text{ si } S_T \leq S \\ C \text{ si } S_T > S \end{cases}$$

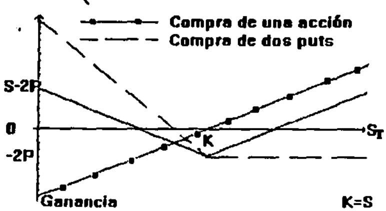
Esta gráfica corresponde a la emisión de un call y la compra de una acción; por el call recibimos C y pagamos S por la acción; si $S_T \leq S$, no nos ejercerán el call y entonces tendremos a la fecha T $S_T - S$ (lo que vale la acción en ese momento menos lo que nos costó) más la cantidad C; si $S_T > S$ entonces nos ejercen la opción y tenemos que ofrecer nuestra acción por lo que sólo nos queda la cantidad C.

Las figuras siguientes muestran estrategias similares y por ello se omiten sus explicaciones.



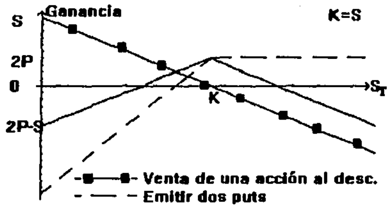
Cobertura 1:2.

$$G = \begin{cases} S_T - S + 2C \text{ si } S_T \leq S \\ 2C - S_T + S \text{ si } S_T > S \end{cases}$$



Cobertura 1:2.

$$G = \begin{cases} S - S_T - 2P \text{ si } S_T < S \\ S_T - S - 2P \text{ si } S_T \geq S \end{cases}$$

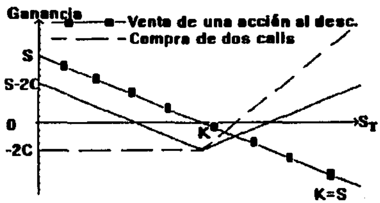


Cobertura revertida 2:1.

$$G = \begin{cases} S_T - S + 2P \text{ si } S_T < S \\ S - S_T + 2P \text{ si } S_T \geq S \end{cases}$$

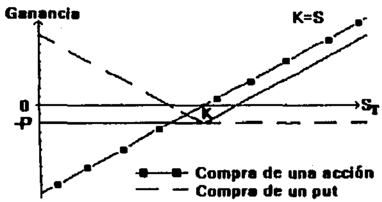
Como mencionamos al iniciar esta sección, una cobertura revertida involucra una posición corta del activo financiero y la compra de calls o la emisión de puts; en la gráfica anterior por la venta de una acción al descubierto y mientras $S_T < S$, se tiene una cantidad de $S - S_T$ a nuestro favor, por la emisión de los dos puts recibimos la cantidad de $2P$ y mientras $S_T < S$ nos ejercenen los puts y debemos adquirir dos acciones en S cada una perdiendo $2(S_T - S)$. Cuando $S_T \geq S$ entonces tenemos una pérdida de $S - S_T$ más $2P$ por los puts emitidos y que no serán ejercidos.

La explicación de cada una de las gráficas sucesivas pueden deducirse fácilmente.



Cobertura revertida 2:1.

$$G = \begin{cases} S - S_T - 2C \text{ si } S_T \leq S \\ S_T - S - 2C \text{ si } S_T > S \end{cases}$$



Cobertura 1:1.

$$G = \begin{cases} -P \text{ si } S_T < S \\ S_T - S - P \text{ si } S_T \geq S \end{cases}$$

3. Spreads.

Para definir las estrategias spreads, introduzcamos las siguientes definiciones:

Tipo de contratos de opcion: call o put.

Clase de contratos de opción: todas las opciones de un mismo tipo, sobre un mismo activo financiero.

Serie de contratos de opción: dentro de una clase, todas las opciones con mismo vencimiento y mismo precio de ejercicio.

Una estrategia spread es una combinación de opciones de la misma clase y de diferentes series, donde unas opciones son adquiridas y otras son emitidas, es decir, involucra sólo calls o sólo puts sobre un mismo activo financiero, ya sea con diferentes precios de ejercicio o diferentes fechas de expiración o ambos.

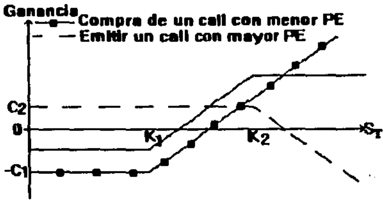
Los spreads elementales son el spread vertical, el spread horizontal y el spread diagonal. En un spread vertical, las opciones involucradas tienen misma fecha de expiración y diferentes precios de ejercicio. En un spread horizontal, las opciones tienen mismo precio de ejercicio y diferentes fechas de vencimiento. En un spread diagonal las opciones tienen diferentes precios de ejercicio y diferentes fechas de vencimiento.

Cada spread tiene su versión bullish (a la alza) y bearish (a la baja). En un spread vertical bullish, la opción adquirida tiene el menor precio de ejercicio. Para un spread horizontal bullish, la opción con fecha de expiración mayor es adquirida. En un spread diagonal bullish, la opción que se adquiere tiene el menor precio de ejercicio y el mayor plazo al vencimiento.

Alternativamente, para el caso de los calls un spread bullish es llamado un spread comprado o adquirido, ya que la adquisición del spread requiere una salida inicial de efectivo. Un spread bearish implica una entrada inicial de efectivo por lo que también es llamado un spread emitido.

Para los spreads con puts, un spread bullish es llamado un spread emitido, y un spread bearish como un spread adquirido.

Ejemplos de Spreads:

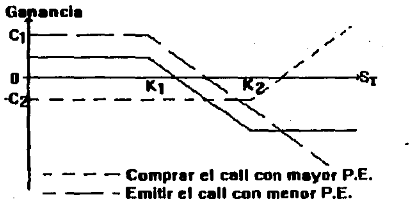


Spread vertical bullish.

$$G = \begin{cases} C_2 - C_1 \text{ si } S_T \leq K_1 \\ C_2 - C_1 + S_T - K_1 \text{ si } K_1 < S_T \leq K_2 \\ C_2 - C_1 + K_2 - K_1 \text{ si } S_T > K_2 \end{cases}$$

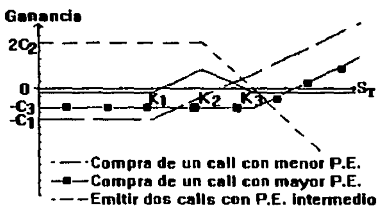
Si consideramos dos calls con distintos precios de ejercicio y compramos el de menor y emitimos el de mayor; si $S_T \leq K_1$, ninguno de los dos calls se ejercerá y sólo se tiene una cantidad igual a $C_2 - C_1$. Si $K_1 < S_T \leq K_2$ se ejercerá el call que adquirimos lo cual propiciará una ganancia de $S_T - K_1$ más la diferencia de primas de los calls $C_2 - C_1$. Ahora si $S_T > K_2$ entonces ejercemos el call adquirido y nos ejercen el call emitido dando como resultado la suma de $C_2 - C_1 - (S_T - K_2) + (S_T - K_1)$. Como podemos ver siguiendo esta estrategia empezamos con cantidades negativas que representarían una pérdida pero después se genera una ganancia que se incrementa hasta el momento en el que $S_T > K_2$ y luego la riqueza generada a partir de ese momento se mantiene constante.

Las gráficas que siguen muestran la ganancia obtenida siguiendo los spreads respectivos.



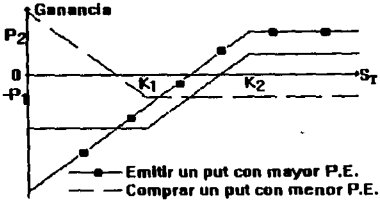
Spread vertical bearish.

$$G = \begin{cases} C_1 - C_2 \text{ si } S_T \leq K_1 \\ C_1 - C_2 - S_T + K_1 \text{ si } K_1 < S_T \leq K_2 \\ C_1 - C_2 + K_1 - K_2 \text{ si } S_T > K_2 \end{cases}$$



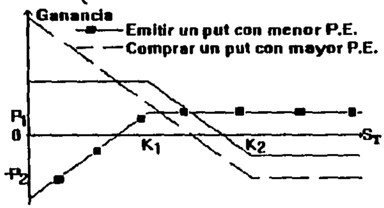
Spread butterfly.

$$G = \begin{cases} 2C_2 - C_1 - C_3 \text{ si } S_T \leq K_1 \\ 2C_2 - C_1 - C_3 + S_T - K_1 \text{ si } K_1 < S_T \leq K_2 \\ 2C_2 - C_1 - C_3 - S_T + 2K_2 - K_1 \text{ si } K_2 < S_T \leq K_3 \\ 2C_2 - C_1 - C_3 + 2K_2 - K_1 - K_3 \text{ si } S_T > K_3 \end{cases}$$



Spread vertical bullish.

$$G = \begin{cases} P_2 - P_1 + K_1 - K_2 \text{ si } S_T < K_1 \\ P_2 - P_1 + S_T - K_2 \text{ si } K_2 \leq S_T < K_2 \\ P_2 - P_1 \text{ si } S_T \geq K_2 \end{cases}$$



Spread vertical bearish.

$$G = \begin{cases} P_1 - P_2 + K_2 - K_1 \text{ si } S_T < K_1 \\ P_1 - P_2 + K_2 - S_T \text{ si } K_1 \leq S_T < K_2 \\ P_1 - P_2 \text{ si } S_T \geq K_2 \end{cases}$$

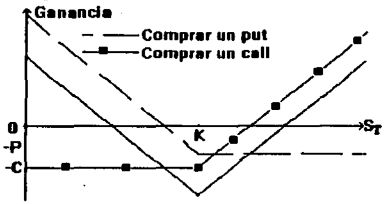
4. Combinaciones.

Una estrategia de combinación involucra opciones de diferentes tipos sobre un mismo activo financiero, tal que ambas opciones son adquiridas o ambas son emitidas, es decir, se involucran puts y calls sobre un mismo activo financiero que pueden tener iguales o diferentes precios de ejercicio e iguales o diferentes fechas de vencimiento.

La combinación llamada straddle se forma con un put y un call con el mismo precio de ejercicio e igual fecha de expiración.

Las combinaciónes tienen sus versiones top (cumbre) y bottom (fondo), dependiendo si las opciones son emitidas o adquiridas. Top indica un límite máximo de ganancia y bottom un límite máximo de pérdida.

Ejemplos de combinaciones:

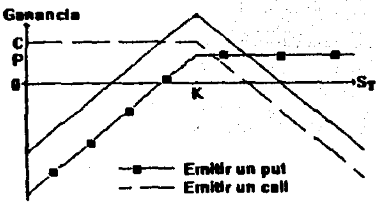


Straddle bottom.

$$G = \begin{cases} -P - C + K - S_T \text{ si } S_T \leq K \\ -P - C + S_T - K \text{ si } S_T > K \end{cases}$$

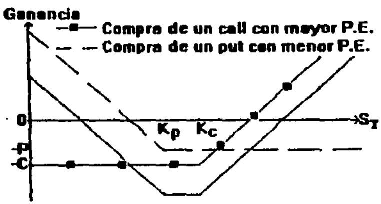
En esta combinación se compran un put y un call con igual precio de ejercicio e igual fecha de expiración, así que por la compra de ambas acciones pagamos $P + C$ y mientras $S_T \leq K$ podemos ejercer el put y obtenemos una ganancia de $K - S_T$, opuestamente si $S_T > K$ entonces ejercemos el call y contamos con una cantidad igual a $S_T - K$ menos las primas pagadas por la adquisición del put y del call $P + C$.

Como hemos hecho en las secciones anteriores, dejaremos las siguientes gráficas sin su respectiva explicación ya que es muy sencillo determinar el efecto que causa seguir las estrategias propuestas.



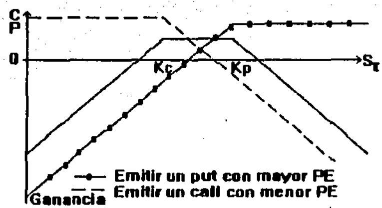
Straddle top.

$$G = \begin{cases} P + C + S_T - K \text{ si } S_T \leq K \\ P + C - S_T + K \text{ si } S_T > K \end{cases}$$



Combinación vertical bottom.

$$G = \begin{cases} -P - C + K_p - S_T \text{ si } S_T < K_p \\ -P - C \text{ si } K_p \leq S_T < K_c \\ -P - C + S_T - K_c \text{ si } S_T \geq K_c \end{cases}$$



Combinación vertical top.

$$G = \begin{cases} C + P - K_p + S_T \text{ si } S_T < K_c \\ C + P + K_c - K_p \text{ si } K_c \leq S_T < K_p \\ C + P - S_T + K_c \text{ si } S_T \geq K_p. \end{cases}$$

Con todos estos ejemplos podemos darnos una idea de la extensa gama de estrategias que se construyen a través de la negociación de opciones y que cada vez se convierten en instrumentos con mas fuerza y que ganan mas adeptos.

Capítulo 4

Noción de arbitraje y la relación de paridad call-put.

4.1 Introducción.

En el Capítulo 3 planteamos las dos incógnitas esenciales que buscan resolver los modelos de valuación de opciones: el del "pricing" o valuación, que consiste en encontrar el precio justo que deberá pagar el comprador por una opción, y el de la cobertura, donde se trata de encontrar la forma en la que el vendedor, quien tiene la prima al tiempo $t = 0$, pueda producir una riqueza al tiempo T igual a $(S_T - K)_+$ o $(K - S_T)_+$ para un call o un put, respectivamente.

Una de las hipótesis más importantes en los modelos de valuación de opciones es la de que en un mercado suficientemente líquido no se puede hacer dinero sin dinero, ya que de existir esta posibilidad las opciones no tendrían ningún valor. A esta propiedad se le conoce como ausencia de oportunidad de arbitraje. Para explicar esto un poco más, pensemos en el problema de la cobertura, que consiste en encontrar una estrategia de inversión de la prima en los activos del mercado, de tal forma que al tiempo T se solucione este problema; pero si se puede obtener dinero sin dinero, no tendría sentido pagar la opción, pues sin aportar dinero se podría tener una ganancia por medio de transacciones con los activos del mercado. En el Capítulo 6 se presenta un ejemplo de oportunidad de arbitraje.

4.2 Supuestos.

Los supuestos para el mercado financiero son:

1. No existen impuestos ni costos de transacción.

2. Se pueden dividir los activos; podemos comprar o vender fracciones decimales de ellos.

3. Existen ventas al descubierto sin límites, es decir, vendemos una acción que no poseemos en el momento pero que a una fecha pactada debemos comprarla al precio de mercado y devolverla.

4. No se piden garantías en ventas de opciones y en ventas al descubierto.

5. Se tiene una tasa de interés en común tanto para pedir prestado como para prestar. Supongamos que la tasa de interés para cada período es constante e igual a r.

6. Las transacciones pueden realizarse a un mismo tiempo.

7. Los precios del mercado no varían con la realización de transacciones.

8. El mercado es discreto, esto es, para una opción con vencimiento T, los precios de los activos y sus transacciones sólo se producen a los tiempos $0, 1, ..., N-1, N$.

El arbitraje se puede presentar en un mercado que cumpla con los supuestos anteriores.

Las relaciones de arbitraje para los valores de las opciones son restricciones que acotan sus valores, bajo el supuesto que no hay oportunidad de arbitraje en el mercado. Las relaciones más importantes se dan entre:

- El precio de una opción y la tasa de interés para préstamos de efectivo.
- Los precios de dos opciones que difieren únicamente en sus precios de ejercicio.
- Los precios de dos opciones que difieren sólo en su fecha de expiración.

En nuestro trabajo, desarrollaremos estas relaciones sólo para opciones europeas.

4.3 Relaciones de arbitraje para los valores de un call.

Es importante diferenciar dos tipos de arbitraje: el primero corresponde únicamente a los precios de los activos financieros del mercado sin considerar a los precios de las opciones; el segundo se refiere al precio de las opciones dentro del mercado. A partir de esta sección se desarrollan algunas relaciones de arbitraje para los valores de las opciones sobre activos que no reparten dividendos.

Proposición 4.1 *Sea C_t el valor de un call al tiempo t $(t \leq T)$, sobre una unidad del activo financiero con precio S_t al tiempo t, con precio de ejercicio K y vencimiento T. Entonces*

$$S_t - K(1+r)^{-(T-t)} \leq C_t \leq S_t.$$

Demostración:

Supongamos $C_t < S_t - K(1+r)^{-(T-t)}$; entonces al tiempo t vendemos al descubierto una unidad del activo en S_t, compramos un call en C_t e invertimos $K(1+r)^{-(T-t)}$ a la tasa r, lo que nos dá una ganancia $G = S_t - C_t - K(1+r)^{-(T-t)}$. Al tiempo T obtenemos K por nuestra inversión de $K(1+r)^{-(T-t)}$; si $S_T \leq K$, no ejercemos el call y pagamos la venta al descubierto, lo que nos dá una ganancia de $K - S_T$; si $K < S_T$, ejercemos el call, con lo que no tenemos ni pérdida ni ganancia.

Sea $S_t < C_t$; entonces al tiempo t emitimos un call en C_t y compramos una unidad del activo en S_t, lo que nos da una ganancia. Al tiempo T si $S_T \leq K$, obtenemos una ganancia de S_T, pues no ejercen el call; si $K < S_T$, ejercen el call y nuestra ganancia será K.

Por lo tanto, si no existe oprtunidad de arbitraje entonces $S_t - K(1+r)^{-(T-t)} \leq C_t \leq S_t$

□

Nota 4.1 *En particular, $S_t - K \leq C_t$. Se puede demostrar que los calls europeos y americanos tienen el mismo precio, debido a esta relación.*

La siguiente proposición relaciona a los precios de los calls con sus precios de ejercicio.

Proposición 4.2 *Sea $C_t(K_i)$, con $i \in \{1,2,3\}$, el precio de un call al tiempo t ($t \leq T$), sobre una unidad del activo financiero con precio S_t al tiempo t, con precio de ejercicio K_i y vencimiento T.*

a) *Si $K_1 < K_2$, entonces*

$$C_t(K_2) \leq C_t(K_1).$$

b) *Si $K_1 < K_2$, entonces*

$$C_t(K_1) - C_t(K_2) \leq (K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}.$$

c) *Sea $\lambda = \dfrac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$. Si $K_1 < K_2 < K_3$; entonces*

$$C_t(K_2) \leq \lambda C_t(K_1) + (1-\lambda)\, C_t(K_3).$$

Demostración:

a) Supongamos $C_t(K_1) < C_t(K_2)$; entonces al tiempo t compramos el call con precio de ejercicio K_1 y emitimos el call con precio de ejercicio K_2, con lo que obtenemos una ganancia. Al tiempo T si $S_T \leq K_1$, no se ejerce ningún call y no se tiene pérdida ni ganancia; si $K_1 < S_T \leq K_2$, ejercemos el call que compramos, obteniendo una ganancia de $S_T - K_1$; si $K_2 < S_T$, se ejercen los dos calls, y nuestra ganancia será

$$S_T - K_1 - (S_T - K_2) = K_2 - K_1.$$

b) Supongamos que $(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)} < C_t(K_1) - C_t(K_2)$; entonces al tiempo t emitimos el call con precio de ejercicio K_1, compramos el call con precio de ejercicio K_2 e invertimos $(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}$ a la tasa de interés r, lo que nos da una ganancia. Al tiempo T obtenemos $K_2 - K_1$ por nuestra inversión de

$(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}$; si $S_T \leq K_1$, no se ejerce ningún call, y nuestra ganancia es $K_2 - K_1$; si $K_1 < S_T \leq K_2$, ejercen el call que emitimos, y también tenemos una ganancia de

$$K_2 - K_1 - (S_T - K_1) = K_2 - S_T;$$

si $K_2 < S_T$, se ejercen los dos calls, y no tenemos pérdida ni ganancia.

c) Supongamos $\lambda C_t(K_1) + (1-\lambda) C_t(K_3) < C_t(K_2)$; entonces al tiempo t emitimos el call con precio de ejercicio K_2, compramos λ calls con precio de ejercicio K_1 y compramos $(1-\lambda)$ calls con precio de ejercicio K_3, lo que nos da una ganancia. Al tiempo T si $S_T \leq K_1$, no se ejerce ningún call; si $K_1 < S_T \leq K_2$, ejercemos los λ calls con precio de ejercicio K_1, obteniendo una ganancia de $\lambda(S_T - K_1)$; si $K_2 < S_T \leq K_3$, ejercemos los λ calls con precio de ejercicio K_1 y ejercen el call con precio de ejercicio K_2, lo que nos dá una ganancia de

$$\begin{aligned}
\lambda(S_T - K_1) - (S_T - K_2) &= \frac{(K_3 - K_2)(S_T - K_1) - (K_3 - K_1)(S_T - K_2)}{K_3 - K_1} \\
&= \frac{(K_3 - S_T)(K_2 - K_1)}{K_3 - K_1};
\end{aligned}$$

si $K_3 < S_T$, se ejercen todos los calls, con lo que no obtenemos pérdida ni ganancia

□

4.4 Relaciones de arbitraje para los valores de un put.

En esta sección se desarrollan las restricciones para los valores de puts europeos, análogas a las restricciones para los valores de los calls, vistas en la sección anterior.

Proposición 4.3 *Sea P_t el valor de un put al tiempo t $(0 \leq t \leq T)$, sobre un activo financiero con valor S_t al tiempo t, precio de ejercicio K y vencimiento T. Entonces*

$$0 \leq P_t \leq K\,(1+r)^{-(T-t)}.$$

Demostración:

Supongamos $K\,(1+r)^{-(T-t)} < P_t$. entonces al tiempo t realizamos la siguiente transacción: emitimos un put en P_t e invertimos $K\,(1+r)^{-(T-t)}$ a la tasa de interés r, dándonos como resultado una ganancia. Al tiempo T tenemos K por nuestra inversión de $K\,(1+r)^{-(T-t)}$; si $S_T < K$, nos ejercen el put, y no obtenemos pérdida ni ganancia; si $K \leq S_T$, no ejercen el put, y nuestra ganancia será K.

Por otra parte, P_t no puede ser menor que cero, pues al tiempo t compraríamos un put en P_t, dándonos como resultado una ganancia; y al tiempo T obtendríamos una ganancia si $S_T < K$, y no tendríamos pérdida ni ganancia en el otro caso.

Por lo tanto, si no hay oprtunidad de arbitraje entonces $0 \leq P_t \leq K\,(1+r)^{-(T-t)}$

□

Al igual que para los calls, la siguiente proposición relaciona a los precios de los puts con sus precios de ejercicio.

Proposición 4.4 *Sea $P_t(K_i)$, con $i \in \{1,2,3\}$, el precio de un put al tiempo t $(t \leq T)$, sobre una unidad del activo financiero con precio S_t al tiempo t, precio de ejercicio K_i y vencimiento T.*

a) *Si $K_1 < K_2$ entonces*

$$P_t(K_1) \leq P_t(K_2).$$

b) *Si $K_1 < K_2$ entonces*

$$P_t(K_2) - P_t(K_1) \leq (K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}.$$

c) *Sea $\lambda = \dfrac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$. Si $K_1 < K_2 < K_3$; entonces*

$$P_t(K_2) \leq \lambda P_t(K_1) + (1-\lambda)\, P_t(K_3).$$

Demostración:

a) Supongamos $P_t(K_2) < P_t(K_1)$; entonces al tiempo t compramos el put con precio de ejercicio K_2 y emitimos el put con precio de ejercicio K_1, con lo que obtenemos una ganancia. Al tiempo, T si $S_T < K_1$, se ejerce los dos puts, y nuestra ganancia será

$$(K_2 - S_T) - (K_1 - S_T) = K_2 - K_1;$$

si $K_1 \leq S_T < K_2$, ejercemos el put que compramos, obteniendo una ganancia de $K_2 - S_T$; si $K_2 < S_T$, no se ejerce ningún put.

b) Supongamos que $(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)} < P_t(K_2) - P_t(K_1)$; entonces al tiempo t emitimos el put con precio de ejercicio K_2, compramos el put con precio de ejercicio K_1 e invertimos $(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}$ a la tasa de interés r, lo que nos dá una ganancia. Al tiempo T obtenemos $K_2 - K_1$ por nuestra inversión de $(K_2 - K_1)(1+r)^{-(T-t)}$; si $S_T \leq K_1$, se ejercen los dos puts, y no tenemos pérdida ni ganancia; si $K_1 < S_T \leq K_2$, ejercen el put que emitimos, y también tenemos una ganancia de

$$K_2 - K_1 - (S_T - K_2) = S_T - K_1;$$

si $K_2 < S_T$, no se ejerce ningún put, y nuestra ganancia es $K_2 - K_1$.

c) Supongamos $\lambda P_t(K_1)+(1-\lambda)\,P_t(K_3) < P_t(K_2)$; entonces al tiempo t emitimos el put con precio de ejercicio K_2, compramos λ puts con precio de ejercicio K_1 y compramos $(1-\lambda)$ puts con precio de ejercicio K_3, lo que nos dá una ganancia. Al tiempo T si $S_T < K_1$, se ejerce todos los puts, con lo que no obtenemos pérdida ni ganancia; si $K_1 \leq S_T < K_2$, ejercemos los $(1-\lambda)$ puts con precio de ejercicio K_3 y ejercen el put con precio de ejercicio K_2, obteniendo una ganancia de

$$(1-\lambda)\,(K_3 - S_T) - (K_2 - S_T) = \lambda\,(S_T - K_1)\,;$$

si $K_2 \leq S_T < K_3$, ejercemos los $(1-\lambda)$ puts con precio de ejercicio K_3, lo que nos dá una ganancia de $(1-\lambda)\,(K_3 - S_T)$; si $K_3 \leq S_T$, no se ejerce ningún put

□

4.5 Relación de paridad call-put.

En esta sección se introduce la importante relación de paridad call-put, que involucra al valor del call y al del put, al precio del activo financiero y al de ejercicio, y a la tasa de interés para préstamos de efectivo.

Proposición 4.5 *Sean C_t y P_t los precios de un call y un put europeos, respectivamente, al tiempo t $(t \leq T)$, con igual precio de ejercicio K, sobre una unidad del activo financiero con precio S_t al tiempo t; entonces*

$$C_t - P_t = S_t - K\,(1+r)^{-(T-t)}.$$

Demostración:

Supongamos que al tiempo t compramos una acción en S_t y un put con precio P_t, además vendemos un call en C_t. Esta transacción nos cuesta la cantidad $C_t - P_t - S_t$, que puede ser positiva o negativa; si es positiva, la invertimos a la tasa de interés r; si es negativa, la pedimos prestado a la misma tasa de interés. Al tiempo T la ganancia neta de nuestra inversión inicial será $(C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)}$; si $S_T \leq K$, ejercemos el put, y nuestra ganancia neta será $K + (C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)}$; si $K < S_T$, ejercen el call, y nuestra ganancia neta vuelve a ser $K + (C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)}$.

Supongamos que $0 < K + (C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)}$; entonces siempre ganamos sin arriesgar nada. Por el contrario, si $K + (C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)} < 0$, siempre perdemos.

Por lo tanto, si no hay oportunidad de arbitraje, entonces

$$K + (C_t - P_t - S_t)(1+r)^{(T-t)} = 0,$$

es decir,

$$C_t - P_t = S_t - K(1+r)^{-(T-t)}$$

□

Los modelos de valuación de opciones europeas deben ser tales que los valores de las opciones cumplan con estas relaciones.

En el Capítulo 5 se verán las características de los mercados en los que no existe oportunidad de arbitraje por medio de transacciones con los activos financieros y con los activos con rendimiento seguro.

Capítulo 5

Teoría de los modelos discretos de valuación de opciones europeas.

5.1 Introducción.

Como vimos en el Capítulo 4, las relaciones de arbitraje para los valores de las opciones no son suficientes para obtener los precios de éstas; sólo nos dicen entre que valores se encuentran para que no se pueda hacer arbitraje con las opciones. Una parte de la teoría matemática de las opciones se enfoca a modelos discretos que simulan el comportamiento de los instrumentos financieros de inversión. En este capítulo trataremos de desarrollar la teoría de un modelo discreto, en el que se cumpla que no haya oportunidad de arbitraje, el dinero de la prima se invierte en los activos considerados en el mercado utilizando estrategias que no ocupen información privilegiada, es decir, sólo ocupan la información disponible en el mercado a los tiempos en que se realizan las inversiones y en cada tiempo n, se reinvierte la totalidad del dinero y sólo eso, esto es, no se aportan ni se retiran fondos. El objetivo de este modelo es el de resolver dos problemas fundamentales en las opciones: el problema del "pricing" o valuación de la opción y el de la cobertura. El "pricing" consiste en encontrar el valor justo de la opción a un tiempo n. La cobertura consiste en que, con el valor de la opción al tiempo n, el vendedor de la opción invierta dicha cantidad en un activo sin riesgo y en d activos con riesgo o activos financiero, siguiendo una estrategia de inversión que no utiliza información privilegiada, tal que al tiempo N obtenga una cantidad que le permita afrontar su obligación ante el poseedor de la opción, es decir, cubrirse perfectamente.

5.2 Activos financieros.

Un modelo de mercado financiero discreto se construye sobre un espacio finito de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, provisto de una filtración $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$, cuyos elementos $\mathcal{F}_n$ representan la información disponible hasta el tiempo n, donde N es la fecha de vencimiento de las opciones. Además supondremos que $\mathcal{F}_0 = (\phi, \Omega)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathbf{P}[\{\omega\}] > 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

Consideremos que en el mercado existen $d+1$ activos financieros, cuyos precios al instante n están dados por las variables aleatorias positivas $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$ $\mathcal{F}_n-$medibles, de tal suerte que

$$S_n = \left(S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d\right)$$

es el vector de precios al tiempo n.

El activo con precio S_n^0 al tiempo n es el único activo con rendimiento seguro, y además supondremos que $S_0^0 = 1$. En particular, si la tasa de interés de las inversiones sin riesgo sobre un período de tiempo es constante e igual a r, entonces

$$S_n^0 = S_0^0 (1+r)^n = (1+r)^n .$$

$\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ es el coeficiente de actualización, o de valor presente, del tiempo n al tiempo 0; es la cantidad de dinero que invertida en el activo con rendimiento seguro permite tener una unidad de capital al tiempo n.

Los d activos restantes serán activos con riesgo. Esto quiere decir que, a diferencia del otro activo, los precios de los activos a cada tiempo $n \geq 1$ solamente serán conocidos hasta dicho instante.

5.3 Estrategias.

Definición 5.1 *Una* **estrategia** *es una sucesión de vectores aleatorios predecibles* $\Phi = \left(\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)_{0 \leq n \leq N}$, *con valores en* $\mathbb{R}^{d+1}$, *donde* $\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d$ *representan las cantidades de cada activo, invertidas al tiempo* n.

Para cada $n \in \{0, 1, ..., N\}$, al conjunto $\left(\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)$ le llamaremos el **portafolio al tiempo** n, ya que éste se constituye precisamente por las cantidades $\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d$ de sus correspondientes activos al tiempo n.

La suposición de que para todo $j \in \{0, 1, .., d\}$, $(\Phi_n^j)_{0 \leq n \leq N}$ sea un proceso predecible significa que no se toma en cuenta información privilegiada, es decir, la información requerida para decidir las cantidades de los activos que compondrán el portafolio al tiempo n es toda la información disponible en el mercado hasta el tiempo $n-1$; con la información que se dispone al tiempo $n-1$ se deciden las cantidades $\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d$, de sus respectivos activos, que formarán el portafolio al tiempo n.

El valor del portafolio al instante n será el producto escalar

$$V_n(\Phi) = \Phi_n \circ S_n = \sum_{j=0}^{d} \Phi_n^j S_n^j,$$

y su valor presente será

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_n &= \beta_n \Phi_n \circ S_n \\ &= \Phi_n \circ \widetilde{S}_n \\ &= \sum_{j=0}^{d} \Phi_n^j \widetilde{S}_n^j,\end{aligned}$$

donde $\widetilde{S}_n^i = \beta_n S_n^i$, y $\widetilde{S}_n = \left(1, \widetilde{S}_n^1, ..., \widetilde{S}_n^d\right)$ es el vector de precios actualizados.

Como mencionamos en la introducción, consideraremos sólo estrategias en las que se reinvierte la totalidad del dinero en cada tiempo n. Estas estrategias seran llamadas *autofinanciables*. Esta propiedad se expresa en la siguiente definición.

Definición 5.2 *Una estrategia es autofinanciable si para todo* $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$,

$$\Phi_n \circ S_n = \Phi_{n+1} \circ S_n.$$

Esto significa que al tiempo n el portafolio vale $\Phi_n \circ S_n$, y exactamente esa cantidad se va a reinvertir en los $d+1$ activos, después de tener conocimiento de los precios S_n, para pasar a la composición o portafolio Φ_{n+1}. Este reajuste se hace con los precios de los activos para el tiempo n.

Por ejemplo, consideremos sólo dos activos: uno sin riesgo y el otro con riesgo. Sean $S_0^1 = 2, \Phi_0^0 = 4$ y $\Phi_0^1 = 3$; entonces $V_0(\Phi) = 4(1) + 3(2) = 10$ unidades. Para el tiempo 1 la estrategia es: $\Phi_1^0 = 3$ y $\Phi_1^1 = 4$, pero el capital invertido en esta inversión es $\Phi_1 \circ S_0 = 3(1) + 4(2) = 11$ unidades$\neq V_0(\Phi)$. En este caso Φ no es autofinanciable, pues se aportaron fondos adicionales al capital inicial $V_0(\Phi)$.

Como puede observarse, en una estrategia autofinanciable las variaciones del valor del portafolio sólo están dadas por las variaciones de los precios de los activos:

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(\Phi) - V_n(\Phi) &= \Phi_{n+1} \circ S_{n+1} - \Phi_n \circ S_n \\
&= \Phi_{n+1} \circ S_{n+1} - \Phi_{n+1} \circ S_n \\
&= \Phi_{n+1} \circ (S_{n+1} - S_n).
\end{aligned}$$

Proposición 5.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *La estrategia Φ es autofinanciable.*

ii) *Para todo $n \in \{1, 2, ..., N\}$,*

$$V_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \circ (S_i - S_{i-1}).$$

iii) *Para todo $n \in \{1, 2, ..., N\}$,*

$$\tilde{V}_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \circ \left(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}\right).$$

Demostración:

i) si y sólo si **ii)**. Sea Φ autofinanciable; entonces

$$V_n(\Phi) \;=\; \Phi_n \circ S_n$$

$$\begin{aligned}
&= V_{n-1}(\Phi) + \Phi_n \circ (S_n - S_{n-1}) \\
&= V_{n-2}(\Phi) + \Phi_{n-1} \circ (S_{n-1} - S_{n-2}) + \Phi_n \circ (S_n - S_{n-1}) \\
&= \ldots \\
&= V_0(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \circ (S_i - S_{i-1}).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos ii); entonces para todo $n \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$V_{n+1}(\Phi) - V_n(\Phi) = \Phi_{n+1} \circ (S_{n+1} - S_n),$$

y por lo tanto

$$\Phi_n \circ S_n = \Phi_{n+1} \circ S_n.$$

ii) si y sólo si iii). Notemos que para todo $n \in \{0, \ldots, \ N-1\}$, $\Phi_n \circ S_n = \Phi_{n+1} \circ S_n$ es equivalente a $\Phi_n \circ \widetilde{S}_n = \Phi_{n+1} \circ \widetilde{S}_n$, con lo que la demostración es inmediata.

Usando esta segunda equivalencia de autofinanciabilidad de Φ, la demostración de iii) si y sólo si i) es similar a la de i) si y sólo si ii)

□

En una estrategia autofinanciable

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_n(\Phi) &= V_0(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} \left(\Phi_i^0 \left(\widetilde{S}_i^0 - \widetilde{S}_{i-1}^0 \right) + \ldots + \Phi_i^d \left(\widetilde{S}_i^d - \widetilde{S}_{i-1}^d \right) \right) \\
&= V_0(\Phi) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \Phi_i^j \circ \left(\widetilde{S}_i^j - \widetilde{S}_{i-1}^j \right),
\end{aligned}$$

pues $\left(\widetilde{S}_i^0 - \widetilde{S}_{i-1}^0 \right) = 0$ para todo $n \in \{1, \ldots, \ N\}$, por lo que el valor actualizado del portafolio está determinado por la riqueza inicial y por el proceso $\left(\left(\Phi_n^1, \ldots, \Phi_n^d \right) \right)_{0 \le n \le N}$ de las cantidades de los activos con riesgo, lo que se establece en la siguiente proposición.

Proposición 5.4 *Para todo proceso predecible* $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ *y, para toda variable aleatoria* V_0*,* $\mathcal{F}_0-$*medible, existe un sólo proceso predecible* $(\Phi_n^0)_{0\leq n\leq N}$ *tal que la estrategia* $\left(\left(\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ *es autofinanciable de valor inicial* V_0*.*

Demostración:

Para todo proceso predecible $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ y para toda variable aleatoria V_0 $\mathcal{F}_0-$medible, sea

$$\Phi_n^0 = V_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\Phi_i^1\left(\tilde{S}_i^1 - \tilde{S}_{i-1}^1\right) + ... + \Phi_i^1\left(\tilde{S}_i^d - \tilde{S}_{i-1}^d\right)\right) - \left(\Phi_n^1\tilde{S}_{n-1}^1 + ... + \Phi_n^d\tilde{S}_{n-1}^d\right)$$

para todo $n \in \{1, ...N\}$. Φ_n^0 es una función $\mathcal{F}_{n-1}-$medible. Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_n(\Phi) &= \Phi_n^0 + \Phi_n^1\tilde{S}_n^1 + ... + \Phi_n^d\tilde{S}_n^d \\
&= V_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\Phi_i^1\left(\tilde{S}_i^1 - \tilde{S}_{i-1}^1\right) + ... + \Phi_i^1\left(\tilde{S}_i^d - \tilde{S}_{i-1}^d\right)\right),
\end{aligned}$$

por lo que $\left(\left(\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ es una estrategia autofinanciable de valor inicial V_0

$\square$

5.4 Estrategias admisibles y arbitraje.

Cuando sucede que $\Phi_n^0 < 0$, significa que hemos pedido prestada la cantidad $-\Phi_n^0$ del activo sin riesgo. Por su parte, si $\Phi_n^j < 0$ para $j \in \{1, ..., d\}$, significa que vendimos al descubierto la cantidad $-\Phi_n^i$ del activo i. A pesar de que los préstamos y las ventas al descubierto son permitidos, el valor del portafolio a todo momento debe ser mayor o igual a cero. Para todo $n \in \{0, ..., N\}$, sean $I_n = \{j \in \{0, ..., d\} : \Phi_n^j < 0\}$ y $J_n = \{j \in \{0, ..., d\} : \Phi_n^j \geq 0\}$; entonces

$$V_n(\Phi) = \sum_{j \in I_n} \Phi_n^j S_n^j + \sum_{j \in J_n} \Phi_n^j S_n^j \geq 0,$$

por lo que

$$\sum_{j \in J_n} \Phi_n^j S_n^j \geq - \sum_{i \in I_n} \Phi_n^i S_n^i;$$

y así el inversionista puede pagar sus préstamos y sus ventas al descubierto a todo momento.

Definición 5.5 *Una* **estrategia** Φ *es* **admisible** *si es autofinanciable y si* $V_n(\Phi) \geq 0$ *para todo* $n \in \{0, 1, ..., N\}$.

De acuerdo con esta definición, podemos formalizar la noción de arbitraje como sigue:

Definición 5.6 *Una* **estrategia de arbitraje** *es una estrategia admisible de valor inicial nulo y de valor final no nulo.*

Como ya dijimos, la mayor parte de los modelos financieros que consideraremos deberán excluir toda oportunidad de arbitraje. Es aquí donde las martingalas juegan un papel fundamental, pues caracterizan a tales modelos, debido a su relación con el arbitraje.

5.5 Mercados financieros viables.

En esta sección se caracterizan a los mercados financieros viables.

Definición 5.7 *Un mercado es* **viable** *si no existen estrategias de arbitraje.*

Teorema 5.8 *El mercado es viable si y sólo si existe una probabilidad* $\mathbf{P}^*$ *equivalente a* $\mathbf{P}$[1]*, sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$*, bajo la cual los precios actualizados de los activos son martingalas.*

Demostración:

Supongamos que existe una probabilidad $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$, bajo la cual los precios actualizados de los activos son $\mathcal{F}_n$−martingalas. Para toda estrategia Φ autofinanciable, el valor del portafolio al tiempo $n \geq 1$ es:

$$\tilde{V}_n = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j \circ \left(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}\right).$$

Por la proposición 2.6, $\left(\tilde{V}_n(\Phi)\right)$es una $\mathcal{F}_n$−martingala. Por lo tanto, si $\mathbf{E}^*$ denota la esperanza bajo $\mathbf{P}^*$,

$$\mathbf{E}^*\left[\tilde{V}_N(\Phi)\right] = \mathbf{E}^*\left[V_0(\Phi)\right].$$

Si además Φ es admisible con valor inicial nulo, $\mathbf{E}^*\left[\tilde{V}_N(\Phi)\right] = 0$, con $\tilde{V}_N(\Phi) \geq 0$; entonces $\tilde{V}_N(\Phi) \equiv 0$, con lo que se concluye que el mercado es viable.

Para la demostración del recíproco, consideraremos a las variables aleatorias reales X definidas sobre Ω como vectores $(X(\omega_1), ..., X(\omega_M)) \in \mathbb{R}^M$, donde $M = |\Omega|$. Supongamos que el mercado es viable. El conjunto de todas las variables aleatorias positivas y no nulas es un conjunto convexo que denotaremos por Γ. Para todo proceso predecible $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0 \leq n \leq N}$, sea

$$\tilde{G}_n(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\Phi_i^1\left(\tilde{S}_i^1 - \tilde{S}_{i-1}^1\right) + ... + \Phi_i^d\left(\tilde{S}_i^d - \tilde{S}_{i-1}^d\right)\right)$$

[1] $\mathbf{P}^*$ es equivalente a $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} \sim \mathbf{P}^*$) si y sólo si para todo evento A, $\mathbf{P}(A) = 0$ si y sólo si $\mathbf{P}^*(A) = 0$. En nuestro caso, $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ significa que para todo $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$.

para todo $n \geq 1$. $\left(\tilde{G}_n(\Phi)\right)_{0\leq n\leq N}$ es el proceso de ganancias netas de $\left(\left(\Phi_n^1,...,\Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$, pues

$$\tilde{G}_n(\Phi) = \tilde{V}_n(\Phi) - V_0(\Phi).$$

Por la proposición 5.4, existe un único proceso predecible $(\Phi_n^0)_{0\leq n\leq N}$ tal que la estrategia $\left(\left(\Phi_n^0,...,\Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ es autofinanciable de valor inicial nulo. Por lo tanto $\tilde{G}_n(\Phi)$ es el valor actualizado al tiempo n de esta estrategia.

Lema 5.9 *Si el mercado es viable, entonces para todo proceso predecible* $\left(\left(\Phi_n^1,...,\Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$, $\tilde{G}_N(\Phi) \notin \Gamma$.

Demostración:

Supongamos que existe un proceso predecible $\left(\left(\Phi_n^1,...,\Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ tal que $\tilde{G}_N(\Phi) \in \Gamma$. Si $\tilde{G}_n(\Phi) \geq 0$ para todo $n \in \{0,...,N\}$, entonces existe un sólo proceso $((\Phi_n^0))_{0\leq n\leq N}$ tal que la estrategia $\left(\left(\Phi_n^0,\Phi_n^1,...,\Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ es de arbitraje. Si $\tilde{G}_n(\Phi) < 0$ para algún $n \in \{0,...,N\}$, entonces sea $c = \sup\left\{n : \mathbf{P}\left[\tilde{G}_n(\Phi) < 0\right] > 0\right\}$. $c \leq N-1$ y para todo $n > c$ $\tilde{G}_n(\Phi) \geq 0$. Definamos un nuevo proceso Ψ como:

$$\Psi_n(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq c \\ 1_A(\omega)\,\Phi_n(\omega) \text{ si } n > c, \end{cases}$$

donde $A = \left\{\omega : \tilde{G}_c(\Phi) < 0\right\}$. Ψ es un proceso predecible, pues Φ es predecible y A es un conjunto $\mathcal{F}_c$−medible. Notemos que

$$\tilde{G}_n(\Psi) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \leq c \\ 1_A\left(\tilde{G}_n(\Phi) - \tilde{G}_c(\Phi)\right) \text{ si } n > c, \end{cases}$$

por lo que $\tilde{G}_n(\Psi) \geq 0$ para todo $n \in \{0,...,N\}$ y $\tilde{G}_N(\Psi) > 0$ sobre el conjunto A

□

Sea $\mathbb{R}^{\Omega}$ el conjunto de todas las variables aleatorias reales definidas sobre Ω. Es fácil demostrar que el conjunto $\tilde{\mathcal{V}}$ de todas las variables aleatorias de la forma $\widetilde{G}_N(\Phi)$, con Φ predecible, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\Omega}$ que no intersecta a Γ, por el lema 5.9, ni al conjunto convexo compacto $\mathbf{K} = \left\{X \in \Gamma : \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = 1\right\} \subset \Gamma$. Usando el teorema 7.2 del apéndice, existe $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ tal que:

1) Para toda $X \in \mathbf{K}$ $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$

2) Para toda sucesión predecible $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$, $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\widetilde{G}_N(\Phi)(\omega) = 0$.

Por **1)**, $\lambda(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, por lo que la probabilidad $\mathbf{P}^*$ definida por:

$$\mathbf{P}^*[\{\omega\}] = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega}\lambda(\omega)},$$

es equivalente a $\mathbf{P}$.

Por **2)**, para toda sucesión predecible $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega}\widetilde{G}_N(\Phi)(\omega)\,\mathbf{P}^*[\{\omega\}] &= \mathbf{E}^*\left[\widetilde{G}_N(\Phi)\right]\\ &= \mathbf{E}^*\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\Phi_i \circ \left(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}\right)\right)\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

En particular, para todo $j \in \{1, ..., d\}$

$$\mathbf{E}^*\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\Phi_i^j\left(\tilde{S}_i^j - \tilde{S}_{i-1}^j\right)\right)\right] = 0,$$

por lo que,usando la proposición 2.7, $(\tilde{S}_n^1)_{0\leq n\leq N}, ..., (\tilde{S}_n^d)_{0\leq n\leq N}$ son $\mathcal{F}_n-$martingalas

□

5.6 Mercados completos.

En esta sección se caracterizan a los mercados viables y completos, que, como veremos, son los mercados que nos interesan.

Definimos el valor de una opción europea con fecha de vencimiento N, precio de ejercicio K, sobre una unidad del activo 1, por una variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$−medible, que representa el beneficio del ejercicio de la opción. Así, para un call

$$h = \left(S_N^1 - K\right)_+,$$

y para un put

$$h = \left(K - S_N^1\right)_+.$$

Un **activo condicional** es un activo financiero cuyo valor al tiempo N está dado por una variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$−medible.

Definición 5.10 *Se dice que un activo condicional con valor h es* **simulable** *si existe una estrategia admisible cuyo valor al instante N sea igual a h.*

Observación 5.1 *Si el mercado es viable, es suficiente que exista una estrategia autofinanciable con valor h al tiempo N para que la opción h sea simulable.*

En efecto, sea $\mathbf{P}^*$ una probabilidad equivalente a $\mathbf{P}$ tal que los precios actualizados de los activos son $\mathcal{F}_n$−martingalas. Si Φ es una estrategia autofinanciable, entonces $\left(\tilde{V}_n(\Phi)\right)$ es una $\mathcal{F}_n$−martingala. Por lo tanto para todo $n \in \{0, ..., N\}$,

$$\tilde{V}_n(\Phi) = \mathbf{E}^*\left[\tilde{V}_N(\Phi) \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Si $\widetilde{V}_N(\Phi) \geq 0$, en particular $\widetilde{V}_N(\Phi) = h$, entonces $\widetilde{V}_n(\Phi) \geq 0$ para todo $n \in \{0, ..., N\}$, por lo que Φ es admisible.

Definición 5.11 *El mercado es* **completo** *si todo activo condicional es simulable.*

Los mercados completos son de gran interés, pues en ellos se tiene solución a los problemas de la valuación y de la cobertura de activos condicionales.

Teorema 5.12 *Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única probabilidad* $\mathbf{P}^*$ *equivalente a* $\mathbf{P}$, *sobre* $(\Omega, \mathcal{F}_N)$ *bajo la que los precios actualizados de los activos son* $\mathcal{F}_n$*−martingalas.*

Demostración:

Supongamos que el mercado es viable y completo. Entonces para tova variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$−medible, existe una estrategia admisible Φ tal que $h = V_N(\Phi)$, además

$$\begin{aligned} \frac{h}{S_N^0} &= \widetilde{V}_N(\Phi) \\ &= V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^{N} \Phi_j \circ \left(\widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}\right). \end{aligned}$$

Si $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son dos probabilidades equivalentes a $\mathbf{P}$ bajo las cuales los precios actualizados de los activos son $\mathcal{F}_n$−martingalas, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i[\widetilde{V}_N(\Phi)] &= \mathbf{E}_i[V_0(\Phi)] \\ &= V_0(\Phi), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_i$ denota la esparanza bajo $\mathbf{P}_i$, para $i = 1, 2$. Entonces

$$\mathbf{E}_1\left[\frac{h}{S_N^0}\right] = \mathbf{E}_2\left[\frac{h}{S_N^0}\right],$$

y por lo tanto $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_N)$, debido a que h es arbitraria.

Recíprocamente, supongamos que el mercado es viable y no completo. Entonces existe una variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N-$medible, no simulable. Sea $\tilde{\mathcal{V}}$ el conjunto de variables aleatorias de la forma

$$V_0 + \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \circ \left(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}\right),$$

con V_0 $\mathcal{F}_0-$medible y $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$ predecible con valores en $\mathbb{R}^d$. Entonces, por la proposición 5.4 y por la observación 5.1, $\frac{h}{S_N^0} \notin \tilde{\mathcal{V}}$. Es fácil demostrar que $\tilde{\mathcal{V}}$ es un subespacio vectorial del espacio de todas las variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}_N)$. Entonces existe una variable aleatoria no nula Z que es ortogonal a $\tilde{\mathcal{V}}$. Sea $\mathbf{P}^*$ una probabilidad equivalente a $\mathbf{P}$ bajo la cual los precios actualizados de los activos son $\mathcal{F}_n-$martingalas. Proveamos al espacio de variables aleatorias del producto escalar $(X, Y) \to \mathbf{E}^*[XY]$. Si hacemos

$$\mathbf{P}^{**}[\{\omega\}] = \left(1 + \frac{Z(\omega)}{2\|Z\|_\infty}\right)\mathbf{P}^*[\{\omega\}],$$

donde $\|Z\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|Z(\omega)|$, entonces $\mathbf{P}^{**}$ es una probabilidad equivalente a $\mathbf{P}$ y diferente de $\mathbf{P}^*$, pues $X \equiv 1 \in \tilde{\mathcal{V}}$, y así

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*[Z] &= \mathbf{E}^*[XZ] \\ &= 0; \end{aligned}$$

además, para todo proceso predecible $\left(\left(\Phi_n^1, ..., \Phi_n^d\right)\right)_{0\leq n\leq N}$

$$\mathbf{E}^{**}\left[\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \circ \left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}\right)\right] = \mathbf{E}^*\left[\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \circ \left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}\right)\right] +$$

$$\frac{\mathbf{E}^*\left[Z\left(\sum_{n=1}^{N}\Phi_n \circ \left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}\right)\right)\right]}{2\,\|Z\|_\infty}$$

$$= \quad 0;$$

y por lo tanto, usando la proposición 2.7, $\left(\tilde{S}_n^1\right)_{0\leq n\leq N}, ..., \left(\tilde{S}_n^d\right)_{0\leq n\leq N}$ son $\mathcal{F}_n$−martingalas

□

5.7 Valuación y cobertura de los activos condicionales en mercados viables y completos.

Supongamos que el mercado es viable y completo, y sea $\mathbf{P}^*$ la única probabilidad, sobre $(\Omega, \mathcal{F}_N)$, bajo la cual los precios actualizados de los activos son martingalas. Consideremos un activo condicional cuyo valor está definido por la variable aleatoria $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$−medible, y sea Φ una estrategia admisible que simule a h, es decir, $V_N(\Phi) = h$. La sucesión $\left(\tilde{V}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n$−martingala, por lo que, para todo $n \in \{0, ...N\}$

$$V_n(\Phi) = S_n^0\mathbf{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Por lo tanto, el valor a todo momento de cualquier estrategia admisible que simule a h está completamente determinado por h y por $\mathbf{P}^*$. Llamaremos a $V_n(\Phi)$ el valor de la opción al tiempo n, pues es el monto que, siguiendo la estrategia Φ a partir del tiempo n, permite producir exactamente el monto h al tiempo N. Si al tiempo 0 un inversionista vende la opción al precio $\mathbf{E}^*\left[\frac{h}{S_N^0}\right]$, siguiendo la estrategia Φ, él podrá obtener la riqueza $h = (S_N - K)_+$ para un call, o $h = (K - S_N)_+$ para un put, al tiempo N, es decir, se podrá cubrir perfectamente.

Notemos que para el cálculo del precio de las opciones, sólo se requiere conocer $\mathbf{P}^*$. Pero surge un problema: antes de conocer a $(\Omega, \mathcal{F})$ y a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es inútil tratar de determinar a $\mathbf{P}^*$; por lo tanto no se conocen los valores exactos de las opciones. En el siguiente capítulo veremos el modelo Cox-Ross-Rubinstein, con el cual en la práctica, los cálculos del precio y de la cobertura pueden considerarse como una buena aproximación.

Capítulo 6

Modelo de Cox-Ross-Rubinstein (Modelo Binomial).

6.1 Introducción.

En este capítulo desarrollaremos uno de los modelos más conocidos y fáciles para la valuación de opciones, el modelo Cox-Ross-Rubinstein, o Binomial. El modelo Cox-Ross-Rubinstein es una versión discreta del modelo Black-Scholes, lo que se verá en la parte final de este capítulo.

Primero desarrollaremos el modelo Binomial, probando que cumple con la teoría de los modelos discretos y resolviendo los problemas del precio y de la cobertura. Posteriormente, propondremos otro modelo que no la cumple, y, finalmente, se dará la aproximación al modelo Black-Scholes.

6.2 Desarrollo del Modelo Binomial.

Supuestos:

i) Sólo existe un activo con riesgo, con precio S_n al tiempo $n \in \{0, 1, ..., N\}$, y la tasa de interés de las inversiones en el activo con rendimiento seguro, sobre un período, es constante e igual a r, por lo que $S_n^0 = (1+r)^n$. La cobertura consiste en invertir el precio de la opción en estos dos activos, siguiendo una estrategia que no utiliza información privilegiada.

ii) Entre dos períodos consecutivos

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n (1+a) \\ S_n (1+b), \end{cases}$$

donde $-1 < a < b$. El valor inicial S_0 es dado. Entonces el espacio de resultados posibles es $\Omega = \{(x_1, ..., x_N) : x_i \in \{1+a, 1+b\}\}$, donde cada $N-$ada representa la sucesión de valores $\frac{S_n}{S_{n-1}}$, para todo $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$. Se toma $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$. Para todo $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n)$ es la $\sigma-$álgebra generada por las variables aleatorias $S_1, ..., S_n$.

Definamos las variables aleatorias T_n como: $T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$, para $n \in \{1, ..., N\}$. Entonces

$$\mathbf{P}[(x_1, ..., x_N)] = \mathbf{P}[T_1 = x_1, ..., T_N = x_N],$$

para todo $(x_1, ..., x_N) \in \Omega$, por lo que el conocimiento de P equivale a conocer la distribución de $(T_1, ..., T_N)$.

Observemos que, para todo $n \in \{1, ..., N\}$ $S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} T_i$, es decir, S_n es función de $T_1, ..., T_n$, por lo que $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, ..., T_n)$, para todo $n \geq 1$.

Las proposiciones que a continuación damos caracterizan las condiciones necesarias para que el modelo Binomial se ajuste a la teoría de los modelos de valuación. Iniciaremos mostrando las relaciones que deben existir entre a, b y r. A continuación daremos algunos ejemplos de arbitraje en el caso en que no se cumplan tales relaciones. Después encontraremos la única probabilidad $\mathbf{P}^*$, bajo la cual el precio del activo con riesgo es martingala. Posteriormente reconstruiremos la relación de paridad call-put. Por último obtendremos las fórmulas explícitas de valuación de un call y de su estrategia de cobertura perfecta.

Proposición 6.1 *El precio actualizado* $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$*, del activo con riesgo, es* $\mathcal{F}_n-$*martingala si y sólo si para todo* $n \in \{0,\ 1, ..., N-1\}$,

$$\mathbf{E}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + r$$

Demostración:

$\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si para todo $n \in \{0,\ 1, ..., N-1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} \mid \mathcal{F}_n\right] &= 1 \\ &\mathbf{E}\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)\,S_n} \mid \mathcal{F}_n\right], \end{aligned}$$

por ser $\tilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n-$medible, si y sólo si para todo $n \in \{0,\ 1, ..., N-1\}$,

$$\mathbf{E}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + r$$

□

La siguiente proposición restringe a la tasa de interés para los préstamos de efectivo, cuando no existe oportunidad de arbitraje.

Proposición 6.2 *Si el mercado es viable, entonces* $r \in (a, b)$.

Demostración:

Si el mercado es viable, entonces existe una probabilidad $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$, bajo la cual $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ es $\mathcal{F}_n$−martingala. Por la proposición 6.1, $\mathbf{E}^*[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r$ para todo $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*[\mathbf{E}^*[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]] &= \mathbf{E}^*[T_{n+1}] \\ &= 1 + r. \end{aligned}$$

Puesto que $T_{n+1} \in \{1 + a, \ 1 + b\}$ y toma estos dos valores con probabilidades diferentes de cero, $1 + r \in (1 + a, 1 + b)$.

□

Ahora veremos ejemplos de arbitraje que se dan en el caso en que no se cumple la condición de la proposición anterior, necesaria para la viabilidad del mercado:

i) Supongamos $r \leq a$. Al tiempo 0 pedimos a préstamo la cantidad S_0, a la tasa r por período, y compramos una unidad de activo. Al tiempo N, cuando

$$S_N \geq S_0 (1 + a)^N \geq S_0 (1 + r)^N,$$

vendemos el activo con riesgo y pagamos nuestro préstamo, obteniendo un beneficio de $S_N - S_0 (1 + r)^N \geq 0$, que es positivo con una probabilidad no nula, es decir, existe oprtunidad de arbitraje

ii) Supongamos $b \leq r$. Al tiempo 0 vendemos al descubierto una unidad del activo con riesgo e invertimos S_0 a la tasa r por período. Al tiempo N, en el cual

$$S_0 (1+r)^N \geq S_0 (1+b)^N \geq S_N,$$

pagamos la venta al descubierto, obteniendo un beneficio de $S_0 (1+r)^N - S_N \geq 0$, que es positivo con una probabilidad no nula.

En todo lo que sigue supondremos que $r \in (a, b)$.

Proposición 6.3 *Sea $\mathbf{P}$ una probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Entonces $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si las variables aleatorias $T_1, ..., T_N$ son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución :*

$$\mathbf{P}[T_1 = 1+a] = 1 - \mathbf{P}[T_1 = 1+b] = p,$$

donde $p = \dfrac{b-r}{b-a}$.

Demostración:

Sean $T_1, ..., T_N$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbf{P}[T_1 = 1+a] = 1-\mathbf{P}[T_1 = 1+b] = p$. Entonces, para todo $n \in \{0, 1, .., N-1\}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[T_{n+1}] \\
&= (1+a)p + (1+b)(1-p) \\
&= 1 + \frac{(b-r)a + b(r-a)}{b-a} \\
&= 1+r.
\end{aligned}$$

Por la proposición 6.1 se obtiene que $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n-$martingala.

Recíprocamente, supongamos que $\left(\tilde{S}_n\right)_{0\leq n\leq N}$ es una $\mathcal{F}_n$–martingala, es decir, para todo $n \in \{0,\ 1, .., N-1\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= (1+a)\,\mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+a \mid \mathcal{F}_n\right] + (1+b)\,\mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+b \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= 1+r.\end{aligned}$$

Usando que

$$\mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+a \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+b \mid \mathcal{F}_n\right] = 1,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+a \mid \mathcal{F}_n\right] &= p \\ &= 1 - \mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1+b \mid \mathcal{F}_n\right].\end{aligned}$$

Para todo $x \in \{1+a, 1+b\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[T_1 = x \mid \mathcal{F}_0\right] &= \mathbf{P}\left[T_1 = x\right] \\ &= p_1,\end{aligned}$$

donde $p_1 = p$ si $x = 1+a$ y $p_1 = 1-p$ si $x = 1+b$. Ahora, para todo $x_i \in \{1+a, 1+b\}$, con $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[T_1 = x_1, T_2 = x_2\right] &= \mathbf{P}\left[T_2 = x_2 \mid T_1 = x_1\right]\mathbf{P}\left[T_1 = x_1\right] \\ &= \mathbf{P}\left[T_2 = x_2 \mid \sigma\left(T_1\right)\right]\mathbf{P}\left[T_1 = x_1\right] \\ &= p_2 p_1,\end{aligned}$$

donde $p_i = p$ si $x_i = 1 + a$ y $p_i = 1 - p$ si $x_i = 1 + b$. Nuevamente, para todo $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$, con $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[T_1 = x_1, T_2 = x_2, T_3\right] &= \mathbf{P}\left[T_3 = x_3 \mid T_2 = x_2, T_1 = x_1\right] \cdot \\
&\quad \mathbf{P}\left[T_2 = x_2, T_1 = x_1\right] \\
&= \mathbf{P}\left[T_3 = x_3 \mid \sigma\left(T_1, T_2\right)\right] p_2 p_1 \\
&\quad p_3 p_2 p_1,
\end{aligned}$$

donde $p_i = p$ si $x_i = 1 + a$ y $p_i = 1 - p$ si $x_i = 1 + b$. Así, por recurrencia sobre n, obtenemos que, para todo $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$, con $i = 1, ..., n$,

$$\mathbf{P}\left[T_1 = x_1, ..., T_n = x_n\right] = \prod_{i=1}^{n} p_i,$$

donde $p_i = p$ si $x_i = 1 + a$ y $p_i = 1 - p$ si $x_i = 1 + b$, lo que prueba que las variables T_i son independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbf{P}\left[T_1 = 1 + a\right] = p = 1 - \mathbf{P}\left[T_1 = 1 + b\right]$

$\square$

Este resultado nos dice que la condición de que $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ sea una $\mathcal{F}-$martingala determina de manera única la distribución de $(T_1, ..., T_N)$, la cual determina de manera única a $\mathbf{P}$, con lo que se concluye que el mercado es viable y completo.

Denotemos por C_n y P_n a los valores de un call y de un put, respectivamente, al tiempo n, sobre una unidad de activo con riesgo, con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento N.

Nuestro siguiente paso es obtener la relación de paridad call-put. Denotemos por $\mathbf{E}^*$ a la esperanza bajo $\mathbf{P}^*$, la única probabilidad tal que $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ es $\mathcal{F}-$martingala. Sabemos que

$$C_n = S_n^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{(S_N - K)_+}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n \right] \text{ y } P_n = S_n^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{(K - S_N)_+}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n \right];$$

entonces

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left[(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left[S_N - K \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= \tilde{S}_n (1+r)^n - K (1+r)^{-(N-n)} \\ &= S_n - K (1+r)^{-(N-n)}, \end{aligned}$$

con lo que este modelo cumple con la relación de paridad.

Ahora desarrollaremos el valor explícito del call al tiempo n, y veremos que puede escribirse en función de K, a, b, r, n, N y p. Usando que $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i$, tenemos:

$$\begin{aligned} C_n &= S_n^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{(S_N - K)_+}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left[\left(S_n \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)_+ \mid \mathcal{F}_n \right]. \end{aligned}$$

Bajo $\mathbf{P}^*$, la variable aleatoria $\prod_{i=n+1}^{N} T_i$ es independiente de $\mathcal{F}_n$, y como S_n es $\mathcal{F}_n$−medible, usando la proposición 1.21, podemos escribir la igualdad anterior como:

$$\begin{aligned} C_n &= c(n,x) \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left[\left(x \prod_{i=n+1}^{N} T_i - K \right)_+ \right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)! \cdot j!} \cdot p^{N-n-j} (1-p)^j \left(x (1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K \right)_+, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbf{R}(S_n)$, la cual es la fórmula del modelo binomial para el "pricing" de un call al tiempo n, sobre una unidad de activo con riesgo, con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento N.

Por último sólo nos resta encontrar la estrategia de cobertura que simula a un call. Sean Φ_n y Φ_n^0 las cantidades, al tiempo n, de los activos con y sin riesgo, respectivamente, en el portafolio de una estrategia admisible Φ que simula al call. Esto es

$$\begin{aligned} V_n(\Phi) &= \Phi_n^0(1+r)^n + \Phi_n S_n \\ &= c(n, S_n). \end{aligned}$$

Como Φ_n^0 y Φ_n son funciones $\mathcal{F}_{n-1}-$medibles, sólo están determinadas por $S_1, ..., S_{n-1}$ y S_n es igual a $S_{n-1}(1+a)$ o $S_{n-1}(1+b)$, entonces podemos reescribir la igualdad anterior como:

$$\Phi_n^0(1+r)^n + \Phi_n x(1+a) = c(n, x(1+a))$$

y

$$\Phi_n^0(1+r)^n + \Phi_n x(1+b) = c(n, x(1+b)),$$

para todo $x \in \mathbf{R}(S_{n-1})$. Despejando, obtenemos que

$$\Phi_n = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)},$$

para todo $x \in \mathbf{R}(S_{n-1})$; es decir, al tiempo $n-1$, cuando se conoce el precio S_{n-1}, el vendedor de la opción debe redistribuir las cantidades de los activos en el portafolio, de manera que la nueva cantidad invertida en el activo con riesgo sea la diferencia de los posibles valores del call entre la diferencia de los posibles precios del activo con riesgo al tiempo n, y así mantiene su portafilio hasta tal momento, en el que tendrá conocimiento del precio del activo con riesgo. Siguiendo esta estrategia se tiene la cobertura perfecta al tiempo N, y la solución al problema de la cobertura.

Con ésto, hemos terminado el desarrollo del modelo binomial para la valuación de las opciones.

Analicemos otro modelo propuesto para la valuación de opciones.

6.3 Un modelo Trinomial.

En este modelo, la única diferencia, con respecto al Binomial, es que, entre dos períodos consecutivos, existen tres posibles valores para el precio del activo con riesgo, es decir, el precio puede irse a la alza, a la baja o bien a un valor intermedio. Así tenemos que

$$S_n = \begin{cases} (1+a)\, S_{n-1} \\ (1+b)\, S_{n-1} \\ (1+c)\, S_{n-1}, \end{cases}$$

donde $-1 < a < b < c$.

Al igual que en el modelo binomial, encontramos varios eventos $\{\omega\}$ que llevan a un mismo resultado. Mientras se construye este modelo observaremos que existe un problema en el mercado, razón por la que este modelo no será de interés para la valuación de las opciones.

El precio actualizado del activo con riesgo es $\mathcal{F}_n-$martingala si y sólo si

$$\mathbf{E}\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + r$$

para todo $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, donde $T_{n+1} = \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$; lo cual se demuestra igual que la proposición equivalente para el modelo Binomial.

Ahora veremos que si el mercado es viable, entonces $r \in (a, c)$. Si el mercado es viable, entonces existe $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$, bajo la cual $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ es $\mathcal{F}_n-$martingala, es decir, $\mathbf{E}^*\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + r$, para todo $n \in \{0, .., N-1\}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*\left[\mathbf{E}^*\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] &= \mathbf{E}^*\left[T_{n+1}\right] \\ &= 1 + r. \end{aligned}$$

Puesto que $T_{n+1} \in \{1 + a,\ 1 + b, 1 + c\}$ y toma estos dos valores con probabilidades diferentes de cero, se tiene necesariamente que $1 + r \in (1 + a, 1 + c)$.

Como siguiente paso el mercado debe ser viable y completo, es decir, debe existir una única probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ bajo la cual los precios de los activos sean martingalas, pero, como veremos enseguida, encontraremos más de una probabilidad con esta característica:

Supongamos que $1 + r \in (1 + a, 1 + c)$ y que el mercado es viable. Entonces existe una probabilidad $\mathbf{P}$ tal que $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ es $\mathcal{F}-$martingala. Si hacemos $\alpha = \mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n\right], \beta = \mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1 + b \mid \mathcal{F}_n\right]$y $\gamma = \mathbf{P}\left[T_{n+1} = 1 + c \mid \mathcal{F}_n\right]$, entonces, para todo $n \in \{0, 1, ...N-1\}$,

$$\mathbf{E}^*\left[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 + r$$

$$= (1+a)\,\alpha + (1+b)\,\beta + (1+c)\,\gamma.$$

Usando que $\alpha + \beta + \gamma = 1$,

$$\begin{aligned}
\gamma &= 1 - \alpha - \beta \\
\alpha &= \frac{r - c + \beta\,(c - b)}{a - c} \\
\beta &= \beta,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que existe más de una probabilidad , bajo la cual $\left(\tilde{S}_n\right)_{0 \leq n \leq N}$ es $\mathcal{F}_n-$martingala, con lo que se concluye que el mercado no es completo.

Así, demostramos que en la práctica se tendrán que emplear otros modelos de valuación, pues con un modelo trinomial no se podrán simular a todos los precios de las opciones.

6.4 Aproximación al modelo Black-Scholes.

El propósito de esta sección es pasar del modelo binomial de valuación de opciones europeas en los instantes $0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \ldots, T$ a un modelo continuo de valuación de opciones en cualquier instante dentro de su intervalo de vida, estableciendo un modelo binomial en cada partición del intervalo $[0, T]$ y aproximando éstas a la partición con un número infinito de elementos, o períodos.

Para lo anterior se establecen las siguientes relaciones:

i) $r = \frac{RT}{N}$, donde R representa la tasa de interés instantánea entre los instantes 0 y T, ya que $\exp(RT) = \lim_{N \to \infty} (1 + r)^N$.

ii) $\ln\left(\frac{1+a}{1+r}\right) = -\frac{\sigma}{N}$, $\ln\left(\frac{1+b}{1+r}\right) = \frac{\sigma}{N}$, donde σ^2 es la varianza límite bajo $\mathbf{P}^*$ de la variable aleatoria $\ln(S_N)$, cuando N tiende a infinito. S_N es el valor del activo con riesgo al instante T.

La idea es hacer tender a cero las longitudes $\frac{T}{N}$ de los subintervalos de $[0,T]$, para así obtener los valores de la opción a todo instante.

Para N fija, el precio del put al instante 0 está dado por:

$$\begin{aligned}
P_0^N &= \mathbf{E}^*\left[\frac{h}{S_0^N}\middle|\mathcal{F}_0\right] \\
&= (1+r)^{-N}\,\mathbf{E}^*\left[\left(K - S_0\prod_{n=1}^{N} T_n\right)_+\right] \\
&= \mathbf{E}^*\left[\left((1+r)^{-N}K - S_0\exp\left\{\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{T_n}{1+r}\right)\right\}\right)_+\right] \\
&= \mathbf{E}^*\left[\left(\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N}K - S_0\exp\{Y_N\}\right)_+\right],
\end{aligned}$$

donde $Y_N = \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{T_n}{1+r}\right)$. Por la hipótesis ii), las variables aleatorias $\ln\left(\frac{T_n}{1+r}\right)$ toman sus valores en $\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$, y son independientes e idénticamente distribuidas bajo $\mathbf{P}^*$. Además

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^*\left[\ln\left(\frac{T_n}{1+r}\right)\right] &= -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}p + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}(1-p) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\left(1 - 2\left(\frac{b-r}{b-a}\right)\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\left(\frac{2 - \frac{1+b}{1+r} - \frac{1+a}{1+r}}{\frac{1+b}{1+r} - \frac{1+a}{1+r}}\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\left(\frac{2 - \exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\} - \exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}}{\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\} - \exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}}\right);
\end{aligned}$$

Por su parte

$$\mathbf{E}^*\left[Y_N\right] = N\mathbf{E}^*\left[\ln\left(\frac{T_n}{1+r}\right)\right],$$

y tomando límite

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}^*\left[Y_N\right] = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\left(2-\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right)/\frac{1}{N}}{\left(\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right)/\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\right);$$

desarrollando el límite del numerador, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{N\to\infty}\left(2-\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right)/\frac{1}{N}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty}\left(-\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\left(-\frac{\sigma}{2}N^{-\frac{3}{2}}\right)-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\left(\frac{\sigma}{2}N^{-\frac{3}{2}}\right)\right)\Big/-\frac{1}{N^2}\\
&= \lim_{N\to\infty}-\frac{\sigma\sqrt{N}}{2}\left(\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right)\\
&= -\frac{\sigma^2}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\left(\exp\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}-\exp\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right);
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}^*\left[Y_N\right] = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Utilizando el teorema 1.30, de convergencia en distribución de variables binomiales, obtenemos que $(Y_N)_{N>1}$ converge en distribución a una $N\left(-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2\right)$.

Sea $\Psi\ (y) = (K\exp(-RT) - S_0\exp(y))_+$, la cual es una función continua y acotada. Entonces

$$\begin{aligned}
&\left|P_0^N - \mathbf{E}^*\left[\Psi\left(Y_N\right)\right]\right|\\
&= \left|\mathbf{E}^*\left[\left(K\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} - S_0\exp\left\{Y_N\right\}\right)_+ - \left(K\exp\left\{-RT\right\} - S_0\exp\left\{Y_N\right\}\right)_+\right]\right|\\
&\leq K\left|\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} - \exp\left\{-RT\right\}\right|,
\end{aligned}$$

por lo que $\left(P_0^N\right)_{N>1}$ converge hacia $\mathbf{E}^*\left[\Psi\left(Y_N\right)\right]$. Entonces, utilizando la convergencia en distribución de $\left(Y_N\right)_{N>1}$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P_0^N &= \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}^*\left[\Psi\left(Y_N\right)\right] \lim_{N\to\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K\exp\{-RT\} - S_0\exp\{y\}\right)_+ \exp\left\{\frac{-\left(y+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K\exp\{-RT\} - S_0\exp\left\{z\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right\}\right)_+ \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz.
\end{aligned}
$$

Notemos que para todo número real z menor o igual que $z^* = \left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - RT + \frac{\sigma^2}{2}\right)/\sigma$,

$$
\left(K\exp\{-RT\} - S_0\exp\left\{z\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right\}\right)_+ \geq 0,
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P_0^N &= \frac{k\exp\{-RT\}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z^*} \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z^*+\sigma} \exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
&= k\exp\{-RT\}\,\mathbf{F}(z^*) - S_0\mathbf{F}(z^*+\sigma),
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{F}(\cdot)$ es la función de distribución de una variable aleatoria con distribución $N(0,\ 1)$. Para un call, utilizando la relación de paridad call-put, se obtiene

$$
\lim_{N\to\infty} P_0^N = S_0\mathbf{F}(-z^*-\sigma) - k\exp\{-RT\}\,\mathbf{F}(-z^*).
$$

Estas última fórmula es la fórmula del modelo continuo Black Scholes para valuación de opciones europeas, con lo que concluimos el objetivo de esta sección.

Conclusiones

La investigación y el desarrollo de esta tesis ayudó a ampliar la visión que tenía acerca del quehacer matemático en el campo de las finanzas, siendo esta área una de las de mayor desarrollo y campo de trabajo. La Probabilidad, en particular los Procesos Estocásticos, también juegan un papel muy importante por ejemplo a través de los modelos teóricos podemos simular por ejemplo, el comportamiento de fenómenos naturales (sismos, el clima, reacciones químicas, etcétera) y con base en ello tomar decisiones o bien encontrar una solución a determinado problema.

Retomando el tema de las finanzas, los modelos de valuación de opciones involucran a los procesos estocásticos y excluyen toda posibilidad de obtener beneficios sin tomar riesgos, esto es, no permiten que haya arbitraje. En particular, en los modelos discretos esto se obtiene si existe una probailidad bajo la cual los precios actualizados de de los activos financieros sean martingalas; además si esta probabilidad es única, toda opción se podrá valuar; es decir, las martingalas caracterizan a los mercados viables y completos. Sin duda esta parte de la teoría fue la que más me atrajo y pienso que estos conceptos pueden aplicarse a otras areas.

Se desarrolló uno de los modelos más sencillos de valuación de opciones sobre acciones, el Modelo Binomial, y se demostró que en la teoría sí funciona aunque existen otros modelos que permiten la valuación de opciones con mayor precisión.

Encontramos que el valor de una opción europea, ya sea un call o un put, puede escribirse de manera explícita bajo las siguiente fórmula en el caso de un call europeo:

$$C_n = (1+r)^{-(N-n)} \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)! \cdot j!} \cdot p^{N-n-j}(1-p)^j \left(x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K\right)_+$$

y para un put europeo:

$$P_n = (1+r)^{-(N-n)} \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)! \cdot j!} \cdot p^{N-n-j}(1-p)^j \left(K - x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j}\right)_+$$

estas fórmulas están en función de una probabilidad p bajo la que los precios actualizados de los activos son martingala, esta probabilidad depende de los parámetros a, b y r y si éstos se conocen entonces la probabilidad de la que se habla estará completamente determinada.

Nótese que siempre se hizo el supuesto de que a, b y r eran fijos pero en la práctica existen técnicas que los estiman, en esta tesis no se desarrolló ninguna técnica de estimación de dichos parámetros, ni tampoco se realizó ninguna práctica con datos reales pues no fue sino hasta noviembre pasado cuando se introdujo la primera opción en la Bolsa Mexicana de Valores, emitida por el Banco de México; por lo que este tema puede considerarse relativamente novedoso en nuestro país, además tenía poca disponibilidad de tiempo para realizar cualquier ejercicio práctico relativo al tema.

Apéndice

En este Apéndice se presenta la versión del teorema de separación de convexos que utilizamos en el Capítulo 5. Primero veremos el siguiente teorema preliminar.

Teorema 7.1 *Sea C un conjunto convexo en $\mathbf{R}^n$ que no contiene al origen. Existe una función lineal ζ sobre $\mathbf{R}^n$ y $\alpha > 0$ tales que para todo $x \in C$,*

$$\zeta(x) \geq \alpha.$$

El hiperplano $\zeta(x) = 0$ no intersecta a C.

Demostración:

Sea λ un real positivo tal que la bola $B(\lambda)$ centrada en el origen y de radio λ intersecta a C, y sea x_0 el mínimo de la función continua $x \to \|x\|$ (donde $\|\cdot\|$ es la norma euclideana) sobre el conjunto compacto $C \cap B(\lambda)$. Entonces para todo $x \in C$,

$$\|x\| \geq \|x_0\|.$$

Sea $x \in C$; entonces para todo $t \in [0,1]$, $x_0 + t(x - x_0) \in C$, porque C es convexo. Desarrollando la desigualdad

$$\|x_0 + t(x - x_0)\|^2 \geq \|x_0\|^2,$$

obtenemos que para todo $c \in C$,

$$\begin{aligned} x_0 \cdot x &\geq \|x_0\|^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema lo utilizaremos para encontrar una probabilidad equivalente a la probabilidad original de los precios de los activos, que hará a dichos precios $\mathcal{F}_n$−martingalas.

Teorema 7.2 *Sea K un conjunto convexo compacto y sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, disjunto de K. Existe una función lineal ζ sobre $\mathbb{R}^n$ que verifica:*

1) *Para todo $x \in K$, $\zeta(x) > 0$.*

2) *Para todo $x \in V$, $\zeta(x) = 0$.*

El subespacio V está contenido en un hiperplano que no intersecta a K.

Demostración:

El conjunto

$$\begin{aligned} C &= K - V \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{existe } (y,z) \in K \times V, x = y - z\} \end{aligned}$$

es convexo, (pues V es y K es compacto) y no contiene al origen. Por el teorema 7.1, se puede encontrar una función lineal ζ sobre $\mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$ tales que para todo $x \in C$,

$$\zeta(x) \geq \alpha.$$

De donde para todo $y \in K$ y para todo $z \in V$

$$V\zeta(y) - \zeta(z) \geq \alpha. \tag{7.1}$$

Fijando a y y aplicando 7.1 a λz, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se obtiene que para todo $z \in V$, $\zeta(z) = 0$, pues para todo $y \in K$, $\zeta(x) > \alpha$

$\square$

Bibliografía

- Cox J.C. & Rubinstein M., **Options Markets**, Londres, Edit. Prentice-Hall, 1985.
- Hans A. & Stoll R., **Futures and Options**, E.U.A., 1991.
- Lamberton D. et Lapeyre B., **Introduction Au Calcul Stochastique Appliqué a la Financé**, Francia, Edit. Ellipses.
- Lamothe P., **Opciones Financieras, Un Enfoque Fundamental**, España, Edit. Mc Graw Hill, 1993.
- Mansell C.C., **Las Nuevas Finanzas en México**, Edit. Milenio.
- Neveu J., **Martingales A Temps Discret**, Saint Germain, París, Edit. Masson & Cie, 1972.