37
24j.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERCA DE UNA EXTENSION GÖDELIANA DEL PUNTO DE VISTA FINITISTA Y DE LA CONSISTENCIA DE LA ARITMETICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

FRANCISCO RUIZ BENJUMEDA

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. CARLOS TORRES ALCARAZ.

MEXICO, D. F. 1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
Acerca de una extensión Gödeliana del punto de vista finitista y de la consistencia de la Aritmética.
realizado por Francisco Ruiz Benjumeda.

con número de cuenta 8955439-3 , pasante de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Carlos Torres Alcaraz.
Propietario	M. en C. Rafael Rojas Barbachano.
Propietario	M. en C. José Alfredo Amor Montaño.
Suplente	M. en C. María Asunción Preisser Rodríguez
Suplente	Mat. Fernando Rene Martínez Ortiz.

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Manuel Falconi Magaña

A Claudia...

Indice

Capítulo 1

A MANERA DE INTRODUCCIÓN

1.1 La prueba de Gödel de la consistencia de la aritmética (1958)

A raíz de los teoremas de incompletud de Gödel (1931)[1] es bien sabido que una prueba[2] de la consistencia de una teoría axiomática, que contenga al menos tanto poder expresivo como el de la teoría de números, no puede llevarse a cabo utilizando exclusivamente los medios y recursos disponibles en el sistema.

En este contexto cualquier prueba de consistencia para la Aritmética de Peano ($\mathcal{AP}$). deberá utilizar conceptos o recursos no formalizables en $\mathcal{AP}$. La mayoría de las pruebas de consistencia conocidas hasta antes de 1958 utilizaron como recursos no formalizables en el sistema la teoría constructiva de los ordinales y el concepto de *accesibilidad*.

En 1958 Kurt Gödel publicó en Dialectica un artículo titulado "Acerca de una extensión aún no utilizada del punto de vista finitista".[3] En este trabajo Gödel expone el concepto de *funcional de tipo finito*, y propone utilizarlo como alternativa al concepto de *accesibilidad* para demostrar la consistencia de $\mathcal{AP}$.

El presente trabajo pretende desarrollar una prueba (siguiendo a Gödel 1958) de consistencia para la Aritmética de Peano, utilizando el concepto de funcional de tipo finito. A continuación

[1] Para una exposición completa en español, véase Torres (1988).
[2] Aquí, la palabra prueba debe entenderse como demostración formal.
[3] "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", Dialectica 1958.

haremos un breve análisis del escrito de 1958, siguiendo la nota introductoria a Gödel 1958 y 1972 escrita por A.S. Troelstra en Gödel (1990) y mencionaremos algunos cambios y adaptaciones que hicimos a la idea original de Gödel para obtener la prueba que aquí presentamos.

Escrito en 1958 para festejar el 70 aiversario de P. Bernays, las ideas de esta publicación se remontan por lo menos al 15 de Abril de 1941, fecha en la que Gödel leyó en Yale la conferencia "In what sense is intuitionistic logic constructive?".

En 1965 Leo F. Boron tradujo al inglés el original de Gödel, con la intención de volver a publicarlo en Dialectica. La traducción fue entregada a Gödel para su revisión y hacia 1967 Gödel pareció quedar satisfecho con el resultado; pero en 1968, al releer la introducción filosófica que hizo al escrito original, se dio cuenta que no reflejaba correctamente sus ideas y la reescribió de nuevo. Como tampoco quedó satisfecho con la segunda versión la sustituyó por una serie de notas adicionales a pie de página (notas de la *b* a la *n* de *1972*, en Gödel (1990)). Finalmente, para 1970, el trabajo pareció estar listo, pero despues de leer las pruebas de impresión decidió cambiar casi totalmente las notas *h* e *i*. Las pruebas nunca fueron regresadas y al parecer Gödel siguió trabajando en ellas por lo menos hasta 1972. Estas notas no fueron publicadas en vida de Gödel y aparecieron por primera vez en la versión del escrito de 1958 denominada como Gödel 1972 publicada en Gödel Collected Works Vol. II.

Aunque según Kleene (1973 nota 7), la intención original de Gödel era la de probar la inderivabilidad de $\neg\neg\forall x\,(A\,(x) \vee \neg A\,(x))$ en el cálculo intuicionista de predicados, y según Kreisel era la de establecer que las demostraciones intuicionistas de teoremas existenciales siempre conllevan a realizaciones explícitas, Gödel presentó sus resultados de 1958 como una contribución al programa relativizado de Hilbert.

La idea original de Gödel para probar la consistencia de la aritmética se aplica directamente a la Aritmética Formal Intuicionista $\mathcal{AH}$ (Aritmética de Heyting), pero a partir de los resultados de Gödel (1933), por medio de su *Traducción Negativa*, se sabe que la consistencia de la Aritmética de Peano es equivalente a la consistencia de la Aritmética de Heyting. Esto se basa en el hecho de que, despues de interpretar las nociones básicas de la lógica clásica en términos de nociones intuicionistas, se puede definir una fórmula F' de $\mathcal{AH}$ para cada fórmula F de $\mathcal{AP}$ con la propiedad de que

$$\text{Si } \mathcal{AP} \vdash F, \text{ entonces } \mathcal{AH} \vdash F'$$

donde la interpretación $'$ es tal que $(\neg F)' = \neg F'$,[4] y así, la consistencia de $\mathcal{AP}$, se sigue de probar la consistencia de $\mathcal{AH}$.

Para probar la consistencia de $\mathcal{AH}$, Gödel introduce en 1958 un sistema formal $\mathcal{T}$ libre de cuantificadores y procede construyendo para cada fórmula F de $\mathcal{AH}$ una fórmula F^* (la fórmula de interpretación de F) de $\mathcal{T}$, tal que si F es derivable en $\mathcal{AH}$, entonces una *cierta instancia* de F^* es derivable en $\mathcal{T}$.[5]

Tomemos la fórmula $0 = S0$ (donde el símbolo S denota a la función sucesor) de $\mathcal{AH}$. Como consecuencia de la definición recursiva de fórmula de interpretación que se dará en el Capítulo 4, tenemos que $(0 = S0)^*$ es precisamente la fórmula $0 = S0$ de $\mathcal{T}$. Por otra parte se demostrará que la ecuación $0 = S0$ no es derivable en $\mathcal{T}$, de donde se sigue que $0 = S0$ no es derivable en $\mathcal{HA}$ (ya que el resultado del que se habla en el parrafo anterior y en la nota a pie de página 5, garantiza que para una fórmula en la que no figuran variables, derivabilidad en $\mathcal{HA}$ implica derivabilidad en $\mathcal{T}$), por lo que $\mathcal{HA}$ es consistente.

Nuestra prueba de consistencia se aplica directamente a $\mathcal{AP}$,[6] permitiéndonos evitar el uso de la traducción negativa de Gödel. Debemos mencionar que nuestro sistema de Funcionales de Tipo Finito $\mathcal{FTF}$ difiere un poco del sistema $\mathcal{T}$ de Gödel, tanto en su presentación, como en cuanto a la concepción filosófica subyacente, como se verá con detalle en lo que sigue.

Al igual que el sistema $\mathcal{T}$ de Gödel, el sistema $\mathcal{FTF}$ se basa en una estructura de tipos generada recursivamente a partir del tipo o (números naturales) bajo la regla de que, si σ, $\tau_1, \cdots, \tau_n$ son tipos previamente definidos, entonces $(\tau_1 \cdots \tau_n \sigma)$ es también un tipo.

Intuitivamente los objetos de tipo $(\tau_1 \cdots \tau_n \sigma)$ son funciones, que aplicadas a argumentos de tipos $\tau_1, \cdots, \tau_n$ dan como resultado objetos de tipo σ. Como en general los argumentos de estas funciones (excepto para el tipo o) son a su vez funciones, a estos objetos se les llama funcionales.[7]

[4] En $\mathcal{AH}$, la fórmula $\neg F$ es interpretada como la fórmula $F \to \perp$, donde el símbolo $\perp$ denota al absurdo.

[5] En realidad F^* no es propiamente una fórmula de $\mathcal{T}$, sino una fórmula *generalizada* de $\mathcal{T}$. Como se explicó arriba, para cada fórmula F de $\mathcal{AH}$ se construye recursivamente una fórmula *generalizada* F^* de $\mathcal{T}$, donde por una "fórmula *generalizada*" de $\mathcal{T}$ entenderemos una expresión de la forma

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m \forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

donde A es una fórmula de $\mathcal{T}$. A continuación se prueba por inducción sobre los teoremas de $\mathcal{AH}$ que, si $\mathcal{AH} \vdash F$, entonces $\mathcal{T} \vdash A(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_n)$, para una sucesion de terminos $t_1, \cdots, t_n$ de $\mathcal{T}$.

[6] A diferencia de la original de Gödel (1958), que como hemos dicho, para demostrar la consistencia de $\mathcal{AP}$ demuestra primero la de $\mathcal{HA}$ y despues aplica la Traducción Negativa (1933).

[7] Durante el presente capítulo usaremos como sinónimos las palabras "función", "funcional" y eventualmente

Mediante el isomorfismo de Schönfinkel $X^{Y\times Z} \cong \left(X^Y\right)^Z$, las funciones n-arias, pueden ser vistas como funciones unarias y el tipo $(\tau_1\cdots\tau_n\sigma)$ puede pensarse como una abreviatura de $(\tau_1)\cdots(\tau_n)\,\sigma$.

En $\mathcal{FTF}$ definiremos la noción de *tipo* recursivamente a partir del tipo o (que se interpreta como el tipo de los números naturales), de forma que, si σ y τ son tipos previamente definidos, entonces $(\sigma)\,\tau$ es tambien un tipo. Interpretamos al tipo $(\sigma)\,\tau$ como el tipo de los mapeos del conjunto de los objetos de tipo σ al conjunto de los objetos de tipo τ. Siempre que el tipo σ esté denotado con un sólo símbolo escribiremos $\sigma\tau$ en vez de $(\sigma)\,\tau$.

El lenguaje para $\mathcal{T}$ tiene como símbolos primitivos, en primer lugar, un número numerable de variables distintas para cada tipo, un símbolo primitivo de igualdad $=_\tau$ para cada tipo τ, y las constantes funcionales 0 (para el número natural cero) y S (para la función sucesor $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), de tipos o y oo respectivamente.

Los términos del sistema son definidos recursivamente a partir de variables, de la constante 0, de la constante S y de las constantes funcionales que se especifican más abajo, mediante la regla de que si $a^{\sigma\tau}$ es un término de tipo $\sigma\tau$ y b^σ es un término de tipo σ, entonces $a^{\sigma\tau}b^\sigma$ es un término de tipo τ.

Acerca de los términos primitivos que mencionamos arriba, como Gödel señala, es necesario que existan, para cada tipo, constantes funcionales introducidas por medio de una definición explicita, esto es, siempre que t esté construido por aplicación de variables $x_1,\cdots,x_n$ y de constantes previamente introducidas, existe una constante Φ tal que:

$$\Phi x_1,\cdots,x_n = t$$

Lo anterior puede ser garantizado por medio de abstracción λ ó, como se hará en $\mathcal{FTF}$, por medio de la inclusiòn en el lenguaje de símbolos primitivos para la constante combinatoria $K_{\sigma\tau}$ de tipo $\tau\sigma\tau$, y la constante cobinatoria $S_{\rho\sigma\tau}$ de tipo $(\rho\sigma\tau)\,(\rho\sigma)\,\rho\tau$, para cualesquiera tipos ρ, σ y τ, definidas mediante las siguientes ecuaciones:

$$S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^\rho = a^{\rho\sigma\tau}c^\rho\,(b^{\rho\sigma}c^\rho) \qquad \text{y} \qquad K_{\sigma\tau}a^\tau b^\sigma = a^\tau$$

"término".

donde los superíndices de los términos a, b y c indican el tipo del término en cada caso.

Para garantizar la introducción de constantes por recursión primitiva, como se pide en $\mathcal{T}$, incluiremos en $\mathcal{FTF}$ una constante funcional J_τ para cada tipo τ (a la que llamaremos iterador[8]), de tipo $o(\tau\tau)(\tau\tau)$, para la que se tiene las siguientes ecuaciones:

$$J_\tau 0 a^{\tau\tau} b^\tau = b^\tau \qquad \text{y} \qquad J_\tau (\mathrm{S}c^o)\, a^{\tau\tau} b^\tau = a^{\tau\tau}\,(J_\tau c^o a^{\tau\tau} b^\tau)$$

Las fórmulas de $\mathcal{T}$ se definen recursivamente a partir de igualdades entre términos por medio de los conectivos lógicos para el cálculo proposicional (el lenguaje para $\mathcal{T}$ no incluye a los símbolos $\forall$ y $\exists$). Originalmente la base lógica del sistema $\mathcal{T}$ fue pensada como la lógica intuicionista de proposiciones, pero en vista del carácter de nuestra prueba (que no involucra ningun sistema intuicionista), hemos decidido tomar como base lógica para el sistema $\mathcal{FTF}$ la lógica clásica de proposiciones, formalizada con los conectivos $\vee$ y $\neg$.

Como axiomas no lógicos para $\mathcal{T}$, además de aquellos que garantizan la completud combinatoria (introducción de constantes por medio de definición explícita) y la introducción de constantes funcionales por recursión,[9] es necesario tomar axiomas para la igualdad y el esquema de inducción completa:

$$A(0)\,,\quad A(x) \rightarrow A(\mathrm{S}x) \vdash A(a)$$

donde A es un fórmula, x es una variable de tipo o y a un término cualquiera también de tipo o.

Originalmente se piden en $\mathcal{T}$ el 3° y 4° axiomas de Peano, pero como Gödel señala en su nota m,[10] debido a la definibilidad de la función predecesor en $\mathcal{T}$, el axioma de inyectividad para sucesor es obtenido en el sistema como teorema, por lo que es redundante.[11] Cabe mencionar que el axioma de Peano $\neg(\mathrm{S}x = 0)$, puede ser omitido en los sistemas con base lógica intuicionista formalizados con $\rightarrow$, en los que la negación no figura como símbolo primitivo, y en los que $\neg A$ se define con la fórmula $A \rightarrow 0 = 1$. Para una realización concreta en este sentido véase el

[8] Quizá debiera usarse la palabra recursor, pero la hemos reservado para la definición de un término auxiliar que introduciremos en el Capítulo 3.

[9] Dichos axiomas son dados en $\mathcal{FTF}$ por medio de las ecuaciones que definen a los términos $K_{\sigma\tau}$, $S_{\rho\sigma\tau}$ y J_τ dadas más arriba.

[10] De 1972, en Gödel (1990).

[11] Hecho que hemos tomado en cuenta al no incluirlo como axioma sino como teorema de $\mathcal{FTF}$.

sistema formal $\mathcal{FT}$ de Shütte (1977).

Como se verá en la siguiente sección, uno de los puntos delicados de la prueba de consistencia es la interpretación del predicado $=_\tau$(que en primera instancia se considera decidible). En la nota 7 de Gödel (1958) se especifica que la igualdad debe ser considerada como igualdad *intencional*, es decir, dos funciones (funcionales) son considerados iguales syss tienen el mismo procedimiento de cálculo.

En $\mathcal{FTF}$ hemos definido la igualdad en este sentido, pues para cada funcional f de $\mathcal{FTF}$ que, en un principio, pudo ser definido por diferentes medios y a partir de funcionales de tipo superior, siempre es posible hallar una escritura única (la forma normal de f), de manera que en ella no figuren expresiones del tipo $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^{\rho}$, $K_{\sigma\tau}a^{\tau}b^{\sigma}$, $J_\tau 0a^{\tau\tau}b^{\tau}$ ó J_τ $(Sc^{o})\, a^{\tau\tau}b^{\tau}$, de forma que el funcional f puede ser escrito (mediante su forma normal) de manera única en términos de los funcionales que los definen. A continuación se define la igualdad entre funciones del mismo tipo de manera que dos funcionales son iguales syss ellos tienen la misma forma normal (lo que en nuestra interpretación implica indiscutiblemente el mismo procedimiento de cálculo).

Es quizá la idea de reducir la igualdad entre funciones al concepto de identidad sintáctica lo que da un enorme poder expresivo a $\mathcal{FTF}$ (ó a $\mathcal{T}$), a pesar de que cuenta con tan pocos recursos lógicos (como el lector habra observado, ni siquiera se permiten cuantificaciones en estos sistemas).

A partir de esta definición de igualdad y de ciertos resultados sobre formas normales,[12] usando una noción intuitiva de verdad, es que se demuestra que la fórmula $0 = 1$ no es derivable en el sistema, hecho que implica la consistencia de $\mathcal{FTF}$ y por ende la de $\mathcal{AP}$.

Como ya hemos mencionado, la interpretación *(originalmente denotada por Gödel como $'$) y la definición de formula generalizada que usamos, difieren ligeramente de las de Gödel y son directamente aplicables a $\mathcal{AP}$ (evitando el pasar por la aritmética intuicionista). Ambas, la interpretación * y la definición de fórmula generalizada utilizadas en nuestra prueba de consistecia, fueron tomadas de Shoenfield (1967), donde $\mathcal{AP}$, al igual que en el presente trabajo, se formaliza usando $\vee$, $\neg$, y $\forall$.

Creemos importante mencionar que nuestro sistema $\mathcal{FTF}$ corresponde a una versión clásica

[12]Los resultados a que hacemos referencia son los siguientes: 1. Todo término funcional tiene una forma normal. 2. La forma normal de cualquier término es única. Ambos resultados se demuestran en el Capítulo 2.

del sistema $\mathcal{FT}$ de Shütte (1977), pero donde los resultados sobre formas normales son obtenidos como en el sistema $\mathcal{HA}^{\omega}_{\rightarrow}$ de Troelstra (1988).

1.2 Algunas consideraciones importantes.

En esta sección pretendemos exponer brevemente dos de las líneas de pensamiento más importantes que se desprenden de la interpretación de 1958. En primer lugar quisiéramos mencionar la relación que existe entre la lógica intuicionista y la interpretación de Gödel.

Para ello analizemos el modelo de $\mathcal{T}$ que A. S. Troelstra nombra como el de los "*funcionales calculables*", el cual se obtiene al interpretar a los funcionales calculables de tipo o como números naturales, y a todo funcional calculable de tipo $\sigma\tau$ como "un procedimiento matemático bien definido", que aplicado a argumentos funcionales de tipo σ, da como resutado un funcional calculable de tipo τ.

En esta interpretación la nociòn de "procedimiento matemático bien definido" debe entenderse como noción primitiva, sin ninguna explicación posterior, exactamente del mismo modo en que son consideradas las nociones abstractas intuicionistas (como la de prueba constructiva) en la interpretación de Heyting de los operadores lógicos.

El paralelismo existente entre ambos conceptos (el de funcional calculable y el de prueba constructiva) ha hecho del sistema $\mathcal{T}$ y de la interpretación $'$ de Gödel (1958), un recurso sumamente valioso en la teoría intuicionista de la demostración y en general para las matemáticas constructivistas.[13]

Pero a pesar de que mediante la interpretación de Gödel se logra sumergir a la lógica intuicionista en el sistema de funcionales $\mathcal{T}$, haciendo de las nociones abstractas intuicionistas algo más concreto y tangible (como lo es la noción de funcional), algunos problemas de impredicatividad impiden distinguir de manera clara el adelanto epistemológico que se obtiene al considerar la interpretación de Gödel en vez de la de Heyting.

En segundo lugar quisieramos hablar del nivel de finitud alcanzado en la prueba de Gödel de 1958. Así, con el fin de ubicar dicha prueba dentro del marco del programa de Hilbert es

[13]Entendemos por matemáticas constructivistas aquellas matemáticas desarrolladas dentro de las diversas corrientes intuicionistas, en las que se trabaja siempre con objetos previamente construidos y donde los teoremas existenciales sólo pueden ser probados por medio de la construcción concreta del objeto acerca del que se afirma la existencia.

conveniente destacar los siguientes aspectos:

Primero, todos los procedimientos usados en el sistema $\mathcal{T}$ asi como los usados en la demostración del resultado principal acerca de la interpretación de 1958,[14] son finitistamente aceptables (pues ellos están basados exclusivamente en nociones combinatorias de símbolos).

Segundo, tenemos que la cosistencia de $\mathcal{T}$ sólo puede ser probada si se garantiza la decibilidad del predicado de igualdad entre funcionales, pero debido a la impredicatividad surgida a raíz de la posibilidad de definir funcionales a partir de funcionales de tipos posiblemente más complejos,[15] la decibilidad de la igualdad, aún para el tipo o, no es de ninguna forma obvia. Es así que, para garantizar lo anterior, se construye un modelo sintáctico de términos funcionales (que corresponde en nuestra exposición al sistema de terminos funcionales definido en el Capítulo 2), el cual se basa en el concepto general de construcción de funciones dado implicitamente en la definición de funcional calculable (ó término) de tipo $\sigma\tau$. Se procede entonces a definir el predicado de igualdad entre términos funcionales del mismo tipo a partir de dividir al conjunto de términos en clases de equivalencia, donde la partición se hace con base en las formas normales de éstos. Y como la igualdad entre términos del mismo tipo se reduce al concepto de identidad sintáctica (recuerdese que la relación de igualdad entre dos términos t y s se define a partir de sus formas normales t^N y s^N, esto es, $t = s$ syss $t^N \equiv s^N$) tenemos entonces que es trivialmente decidible, por lo que el problema de establecer la consistencia del sistema $\mathcal{T}$[16] se reduce al de garantizar la existencia y unicidad de una forma normal para todo término del sistema.

Se han favorecido dos caminos para hacerlo. El primero de ellos (el que hemos adoptado en el presente trabajo) se basa en la utilización de los Predicados de Calculabilidad de Tait (1967) y en la propiedad de Chuch-Rosser tal como se expone en el Capítulo 2. La otra forma que se conoce para garantizar la existencia y unicidad de formas normales consiste en poner en correspondencia a los términos del sistema con una serie de ordinales constructivos, de forma que el resultado se obtiene por medio de una ε_o-inducción sobre estos. De ahí que la ganancia, que en términos finitistas se obtiene al reemplazar la noción abstracta de accesibilidad usada

[14] El resultado a que hacemos mención es el siguiente: Si F es derivables en $\mathcal{AP}$, entonces una *cierta instancia* de F^* es derivable en $\mathcal{T}$.

[15] Misma impredicatividad que surge en la interpretación de los funcionales como pruebas constructivas. Ver más arriba donde se habla acerca de la interpretación de Gödel y la lógica intuicionista.

[16] Si es que no hemos de aceptar como decidible en primera instancia el predicado de igualdad.

en las pruebas de consistencia de tipo Gentzen[17] por el concepto de "funcional de tipo finito", es casi inexistente excepto por el hecho de que la prueba de Gödel no recurre a eliminación de cortes.

Por último mencionaremos que las extensiones de $\mathcal{T}$, ya sea permitiendo cuantificaciones para constantes funcionales o permitiendo que los tipos de las funciones varíen sobre la serie de los ordinales constructivos (en vez de sobre los números naturales), ha resultado una herramienta bastante poderosa en la teoría clásica de la demostración. Como un ejemplo en este sentido podríamos mencionar, entre otras, las pruebas de Feferman (1971 y 1972, 8.6.2) acerca de la consistencia de algunos subsistemas del análisis.[18]

Para un estudio más profundo sobre las diferentes investigaciones surgidas a partir del artículo de Gödel, sugerimos la lectura de la nota introductoria a 1958 y 1972 de A. S. Troelstra, publicada en Gödel Collected Works Vol. II.

---

[17] Para una versión en español de una de estas pruebas vease Miranda (1997). Si se desean más versiones consúltese la nota *b* de Gödel 1972 en Gödel (1990).

[18] En estos trabajos la extensión de $\mathcal{T}$, se hace por medio de permitir el uso de tipos transfinitos.

Capítulo 2

UN SISTEMA DE TÉRMINOS FUNCIONALES

En el presente capítulo desarrollaremos un sistema de términos funcionales basado en una estructura de tipos definida recursivamente. Además de las definiciones pertinentes, demostraremos los resultados de normalización y unicidad para términos que serán fundamentales para la definición del predicado de igualdad y para la prueba de consistencia del sistema formal $\mathcal{FTF}$ que se expone en el Capítulo 3.

2.1 Tipos

DEFINICIÓN (de tipo).

i) El símbolo o es un tipo.

ii) Si σ y τ son tipos previamente definidos entonces $(\sigma)\tau$ es también un tipo.

iii) Solamente son tipos aquellas cadenas de símbolos generadas a partir de un número finito de aplicaciones de las cláusulas i y ii.

Interpretación: El tipo o denota al tipo de los números naturales. Si σ y τ son tipos, entonces el tipo $(\sigma)\tau$ denota el tipo de los mapeos $\sigma \rightarrow \tau$, del conjunto de los objetos de tipo σ al conjunto de los objetos de tipo τ. Como abreviatura escribiremos $\sigma\tau$ en lugar de $(\sigma)\tau$, siempre que el tipo σ este representado por un sólo símbolo.

Observación: Nótese que a partir de la definición y convenciones anteriores todo tipo distinto de o es de la forma $\tau_1 \cdots \tau_n o$, con $n \geq 1$.

2.2 Términos

Introducimos los siguientes términos primitivos.

1) Para cada tipo τ un número numerable de variables.

2) Los términos aritméticos 0 y $\mathbb{S}$ (para el número natural cero y para la función sucesor respectivamente).

3) Combinadores $K_{\sigma\tau}$ y $S_{\rho\sigma\tau}$, para cualesquiera tipos ρ, σ y τ.

4) El iterador J_τ, para todo tipo τ.

DEFINICIÓN (de término y sus tipos).

i) Toda variable de tipo τ es un término primitivo de tipo τ.

ii) El término aritmético 0 es un término primitivo de tipo o.

iii) El término aritmético $\mathbb{S}$ es un término primitivo de tipo oo.

iv) El combinador $K_{\sigma\tau}$ es un término primitivo de tipo $\tau\sigma\tau$.

v) El combinador $S_{\rho\sigma\tau}$ es un término primitivo de tipo $(\rho\sigma\tau)(\rho\sigma)\rho\tau$.

vi) El iterador J_τ es un término primitivo de tipo $o(\tau\tau)\tau\tau$.

vii) Si $a^{\sigma\tau}$ y b^σ son términos de tipos $\sigma\tau$ y σ respectivamente, entonces $a^{\sigma\tau}(b^\sigma)$ es un término de tipo τ.

viii) Sólo son términos aquellas cadenas de símbolos obtenidas mediante un número finito de aplicaciones de las cláusulas i a vii.

Como abreviatura escribiremos $a^{\sigma\tau}b^{\sigma}$, en vez de $a^{\sigma\tau}(b^{\sigma})$, siempre que b^{σ} no sea un término compuesto. Diremos que un término es *cerrado* syss no contiene variables.

Símbolos sintácticos

1.- Los símbolos x^{τ}, y^{τ} y z^{τ} se usaran para denotar variables de tipo τ.

2.- Los símbolos $a^{\tau}, b^{\tau}, c^{\tau}, d^{\tau}, t^{\tau}$, etc. se usaran para denotar términos de tipo τ.

También usaremos subíndices en algunos casos. Los superíndices por lo general estarán referidos al tipo. De acuerdo con la definición y convenciones anteriores todo término no primitivo de tipo τ es de la forma:

$$a^{\sigma_1\cdots\sigma_n\tau}b^{\sigma_1}\ldots b^{\sigma_n} \qquad (n \geq 1)$$

donde $a^{\sigma_1\cdots\sigma_n\tau}$ es un término primitivo.

DEFINICIÓN (de funcional)

Un funcional de tipo finito o, simplemente funcional, es un término que no contiene variables, es decir un término cerrado.

DEFINICIÓN (recursiva de numeral)

1) $N_0 = 0$

2) $N_{n+1} = \mathbf{S}N_n$

Así, los numerales son términos cerrados, es decir, funcionales de tipo o.

2.3 Interpretación

El término $a^{\sigma\tau}b^{\sigma}$ denota la imagen de b^{σ} bajo el mapeo $a^{\sigma\tau} : \sigma \to \tau$. Esta imagen es claramente de tipo τ.

El funcional $\mathbf{S}$ de tipo oo es un mapeo $\mathbf{S} : o \to o$, que asocia a cada término a^{o} (número natural) su sucesor $\mathbf{S}a^{o}$.

El término $K_{\sigma\tau}a^{\tau}$ denota al mapeo constante $\sigma \to \tau$, que a cualquier término b^{σ}, de tipo σ, le asocia el término a^τ de tipo τ. Por lo que $K_{\sigma\tau}a^\tau b^\sigma = a^\tau$. El término $K_{\sigma\tau}a^\tau$ es claramente de tipo $\sigma\tau$, y el combinador $K_{\sigma\tau}$ denota al mapeo $\tau \rightarrow \sigma\tau$, que asocia a a^τ, el mapeo constante $K_{\sigma\tau}a^\tau$, evidentemente, $K_{\sigma\tau}$ es de tipo $\tau\sigma\tau$.

El término $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}$, denota al mapeo $\rho \rightarrow \tau$, que asocia a cualquier término c^ρ de tipo ρ el término $a^{\rho\sigma\tau}c^\rho\,(b^{\rho\sigma}c^\rho)$, de tipo τ, es decir:

$$S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^\rho = a^{\rho\sigma\tau}c^\rho\,(b^{\rho\sigma}c^\rho)$$

Por lo tanto $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}$ es de tipo $\rho\tau$, $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}$ es de tipo $(\rho\sigma)\,\rho\tau$ y $S_{\rho\sigma\tau}$ es un término de tipo $(\rho\sigma\tau)\,(\rho\sigma)\,\rho\tau$.

El iterador J_τ, sólo adquiere significado junto con un numeral N_n. Así, el funcional $J_\tau N_n$ mapea a un término $a^{\tau\tau}$ en su n-ésima aplicación. Esto es:

$$J_\tau N_n a^{\tau\tau}b^\tau = a^{\tau\tau}(a^{\tau\tau}(\cdots(a^{\tau\tau}b^\tau)\cdots))$$

donde $a^{\tau\tau}$ figura n-veces en el lado derecho de la ecuación, en particular tenemos que

$$\begin{aligned} J_\tau 0 a^{\tau\tau}b^\tau &= b^\tau \\ J_\tau N_{n+1}a^{\tau\tau}b^\tau &= a^{\tau\tau}\,(J_\tau N_n a^{\tau\tau}b^\tau) \end{aligned}$$

De esta manera, $J_\tau N_n a^{\tau\tau}$ es de tipo $\tau\tau$, y $J_\tau N_n$ es de tipo $(\tau\tau)\,\tau\tau$ siendo, por lo tanto, el iterador J_τ un término de tipo $o\,(\tau\tau)\,\tau\tau$.

2.4 Normalización y Unicidad

Intuitivamente, todo término de tipo o representa un número natural, pero como un término cerrado de tipo o puede ser construido vía términos de tipos arbitrariamente complejos, se presenta el problema de si dado un término cerrado a^o de tipo o, puede entonces este ser siempre efectivamente evaluado.

2.4.1 Normalización

El objetivo de esta y de la siguiente sección es el de probar que todo término del sistema tiene una forma normal, y que esta es única. Actualmente se conocen dos alternativas para hacerlo, la primera, por medio de predicados de calculabilidad, y la segunda por medio de asignar un ordinal a cada término[1]. Optamos por la primera ya que pensamos que se apega más a las intenciones de Gödel (1958).

DEFINICIÓN (de Conversión)

Decimos que $t_1^\tau conv t_2^\tau$ syss

Conv1.-	$t_1^\tau \equiv K_{\sigma\tau}a^\tau b^\sigma$	y	$t_2^\tau \equiv a^\tau$
Conv2.-	$t_1^\tau \equiv S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^\rho$	y	$t_2^\tau \equiv (a^{\rho\sigma\tau}c^\rho)(b^{\rho\sigma}c^\rho)$
Conv3.-	$t_1^\tau \equiv J_\tau 0 a^{\tau\tau}b^\tau$	y	$t_2^\tau \equiv b^\tau$
Conv3.-	$t_1^\tau \equiv J_\tau\,(Sc^o)\,a^{\tau\tau}b^\tau$	y	$t_2^\tau \equiv a^{\tau\tau}(J_\tau c^o a^{\tau\tau}b^\tau)$

DEFINICIÓN (de Redex)

Decimos que t^τ es un *redex* syss t^τ tiene alguna de las formas t_1^τ de la definición anterior.

DEFINICIÓN (de Forma Normal)

Decimos que un término t está en Forma Normal syss t no contine ningun redex como subtérmino.

DEFINICIÓN (de Reducción $\rhd$)

La relación de *Reducción*,[2] representada por $\rhd$, está generada por las siguientes reglas:

Red1.- $t_1^\tau \rhd t_1^\tau$

Red2.- $t_1^\tau conv t_2^\tau \Longrightarrow t_1^\tau \rhd t_2^\tau$

---

[1]A cada término de sistema se le asigna un ordinal y se definen relaciones de reducción similares a las usadas en esta sección. Se procede a probar la existencia y unicidad de términos normales por medio de una inducción transfinita hasta ϵ_0, siendo este otro camino para demostrar la consistencia de la aritmética al estilo Gentzen. Ver Shütte 1977.

[2]En la literatura existen otras relaciones de reducción de términos más estrictas (como ejemplo véase Shütte 1977), para las que la forma normal resultante es trivialmente única. Sin embargo, hemos decidido optar por una relación reductiva más libre por parecernos más natural.

Red3.- $t_1^{\tau} \rhd t_2^{\tau} \Longrightarrow t_3^{\tau\sigma} t_1^{\tau} \rhd t_3^{\tau\sigma} t_2^{\tau}$

Red4.- $t_1^{\sigma\tau} \rhd t_2^{\sigma\tau} \Longrightarrow t_1^{\sigma\tau} t_3^{\sigma} \rhd t_2^{\sigma\tau} t_3^{\sigma}$

Red5.- $t_1^{\tau} \rhd t_2^{\tau}$ y $t_2^{\tau} \rhd t_3^{\tau} \Longrightarrow t_1^{\tau} \rhd t_3^{\tau}$

Si $t_1^{\tau} \rhd t_2^{\tau}$, decimos que t_1^{τ} se reduce a t_2^{τ}. Escribimos $t_1^{\tau} \rhd_1 t_2^{\tau}$, si es que t_2^{τ} se obtuvo de t_1^{τ} por medio de convertir un *redex* de t_1^{τ}. Nótese que la relación $\rhd$, es la cerradura reflexiva y transitiva de $\rhd_1$.

Una sucesión reductiva es una sucesión de términos $t_1, \cdots, t_n$ tal que $t_1 \rhd \cdots \rhd t_n$. Diremos que una sucesión reductiva termina si t_n está en forma normal. Así, nuestro objetivo fundamental es el de mostrar que para cualquier término del sistema existe una sucesión reductiva que termina.

DEFINICIÓN (de *FN, CFN, FN$_\tau$, CFN$_\tau$*)

FN es el conjunto de todos los términos en forma normal. CFN es el conjunto de todos los términos cerrados en forma normal. FN$_\tau$ es el conjunto de todos los términos en forma normal de tipo τ y, por último, CFN$_\tau$ es el conjunto de todos los términos cerrados en forma normal de tipo τ.

PROPOSICIÓN.[3]

Para todo término t, $t \in FN$ syss t tiene una de las siguientes formas:

0, Sc^{o}, $K_{\sigma\tau}$, $K_{\sigma\tau}a^{\tau}$, $S_{\rho\sigma\tau}$, $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}$, $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}$, J_{τ}, $J_{\tau}t_0 \cdots t_2$, x^{τ}, $x^{\tau}t_1 \cdots t_n$.

Donde $t_1, \cdots, t_n \in FN$, $t_0 \in FN$, $t_0 \neq 0$, y t_0 no de la forma $\mathbf{S}t'$.

Demostración.- Directo de las definiciones anteriores. ■

[3] Debido a que el símbolo t se utiliza en la presente proposición como metavariable de distintos tipos según el caso, no hacemos referencia explícita al mismo. Lo mismo debe hacerse notar de los términos $t_0, \cdots, t_n$ y t'. Siempre que no hagamos referencia explícita a los tipos consideraremos que "encajan correctamente". Por ejemplo en $x^{\tau}t_1 \cdots t_n$, se supondrá que existen tipos $\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n$, tales que $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n \sigma$, donde t_i es de tipo τ_i para $i \leq n$, y $x^{\tau}t_1 \cdots t_n$ es de tipo σ. A partir de ahora y cuando no se preste a confusiones, en algunos casos, para facilitar la notación, no se hará referencia al tipo.

PROPOSICIÓN.- Si $t^o \in CFN_o$, entonces t^o es un numeral.

Demostración.- Sea $t^o \in CFN_o$. Probaremos por inducción sobre la complejidad de t^o, que t^o es un numeral.

Ahora bien, t^o no puede comenzar con un combinador $K_{\sigma\tau}$ o $S_{\rho\sigma\tau}$, pues entonces t^o es un redex y $t^o \notin CFN_o$.

Supongamos que $t^o \equiv J_\tau a_1 t_1 \cdots t_n$. Por H.I. a_1 es un numeral (pues a_1 es un término cerrado de tipo o de longitud menor que t^o) y t^o es un redex. Por lo tanto $t^o \notin CFN_o$.

Supongamos que $t^o \equiv \mathbf{S}t_1^o$ o que $t^o \equiv 0$. Como por H.I. t_1^o es un numeral, de cualquier forma tenemos que t^o es un numeral. ■

Como consecuencia relevante de la proposición anterior tenemos que los elementos de CFN_o pueden ser evaluados, pues si todo término cerrado de tipo cero puede ser llevado a una forma normal única,[4] entonces todo término cerrado de tipo cero puede ser evaluado efectivamente y por lo tanto la igualdad entre términos de tipo o, definida a partir de la identidad sintáctica de sus formas normales, es trivialmente decidible.

Observación: Nótese que $t \rhd t'$ y $t \not\equiv t'$, sólo puede darse si t contiene un redex, pues la relación de reducción $\rhd$ está generada a partir de $t \rhd t$ y $t\,conv\,t'$ por las cláusulas *Red3-Red5*. por lo que si $t \in FN$ y $t \rhd t'$, entonces tenemos que $t \equiv t'$.

PROPOSICIÓN.- Todo termino t^τ es reducible a forma normal.

Demostración[5].- La presente demostración utiliza los *Predicados de Calculabilidad*[6] de Tait(1967) en su forma más sencilla.

---

[4]La unicidad de la forma normal se demuestra más adelante en la sección 2.4.2.

[5]Durante la presente demostración los símbolos lógicos $\forall$, $\vee$, $\wedge$, etc. , deberan entenderse como símbolos en el metalenguaje.

[6]En Tait "*Computability Predicates*" ($Comp_\tau$).

Para cada tipo τ definimos recursivamente el predicado $Calc_\tau$ por medio de las siguientes cláusulas:

i) $Calc_o(t^o) \leftrightarrow t^o$ es reducible a forma normal, y t^o es de tipo o.

ii) $Calc_{\sigma\tau}(t^{\sigma\tau}) \leftrightarrow \forall t_1^\sigma\,(Calc_\sigma(t_1^\sigma) \to Calc_\tau(t^{\sigma\tau}t_1^\sigma))$ y $t^{\sigma\tau}$ es reducible a forma normal.

$Calc_\tau(t^\tau)$ debe interpretarse o leerse como "t^τ es un término calculable de tipo τ".

Nótese que basta con demostrar que todo término primitivo es calculable, pues si $Calc_{\sigma\tau}(t_1^{\sigma\tau})$ y $Calc_\sigma(t_2^\sigma)$, entonces $Calc_\tau(t_1^{\sigma\tau}t_2^\sigma)$.

Para comenzar, recordemos que si σ es un tipo, entonces puede ser escrito en forma única como $\sigma_1\cdots\sigma_n o$ de modo que:

$$(1)....Calc_\sigma(t^\sigma) \leftrightarrow \forall t_1^{\sigma_1}\cdots\forall t_n^{\sigma_n}\,(Calc_{\sigma_1}(t_1^{\sigma_1}) \wedge \cdots \wedge Calc_{\sigma_n}(t_n^{\sigma_n}) \to Calc_o(t^\sigma t_1^{\sigma_1}\cdots t_n^{\sigma_n}))$$

Observación 1: Si $t_1^\tau \rhd t_2^\tau$ y $Calc_\tau(t_2^\tau)$, entonces se tiene que $Calc_\tau(t_1^\tau)$.

$\mathbf{Calc}_o$ (0)

Inmediato, pues $0 \in FN_o$ y $0 \rhd 0$.

$\mathbf{Calc}_{oo}$ (S)

Si t^o es un término cualquiera tal que $Calc_o(t^o)$, entonces existe $t_1^o \in FN_o$ tal que $t^o \rhd t_1^o$. Por lo tanto tenemos que $\mathbf{S}t^o \rhd \mathbf{S}t_1^o$, donde $\mathbf{S}t_1^o \in FN_o$, y $Calc_o(\mathbf{S}t^o)$. Finalmente por (1) se tiene que $Calc_{oo}(\mathbf{S})$.

$\mathbf{Calc}_{\tau\sigma\tau}$ ($K_{\sigma\tau}$)

Sean t_1^τ y t_2^σ tales que $Calc_\tau(t_1^\tau)$ y $Calc_\sigma(t_2^\sigma)$. En tal caso $K_{\sigma\tau}t_1^\tau t_2^\sigma \rhd_1 t_1^\tau$ y por la Observación 1 tenemos que $Calc_\tau(K_{\sigma\tau}t_1^\tau t_2^\sigma)$. Como

$$\forall t_1^\tau \forall t_2^\sigma(Calc_\tau(t_1^\tau) \wedge Calc_\sigma(t_2^\sigma) \to Calc_\tau(K_{\sigma\tau}t_1^\tau t_2^\sigma))$$

tenemos que $Calc_{\tau o \tau}(K_{o\tau})$.

Calc$_{(\rho\sigma\tau)(\rho\sigma)\rho\tau}(S_{\rho\sigma\tau})$

Sean $t_1^{\rho\sigma\tau}$, $t_2^{\rho\sigma}$, t_3^{ρ}, términos cualesquiera tales que $Calc_{\rho\sigma\tau}(t_1^{\rho\sigma\tau})$, $Calc_{\rho\sigma}(t_2^{\rho\sigma})$, y $Calc_{\rho}(t_3^{\rho})$. En tal caso $S_{\rho\sigma\tau}t_1^{\rho\sigma\tau}t_2^{\rho\sigma}t_3^{\rho} \rhd_1 t_1^{\rho\sigma\tau}t_3^{\rho}(t_2^{\rho\sigma}t_3^{\rho})$ y como $Calc_{\tau}(t_1^{\rho\sigma\tau}t_3^{\rho}(t_2^{\rho\sigma}t_3^{\rho}))$, tenemos que $Calc_{\tau}(S_{\rho\sigma\tau}t_1^{\rho\sigma\tau}t_2^{\rho\sigma}t_3^{\rho})$. Es decir:

$$\forall t_1^{\rho\sigma\tau}\forall t_2^{\rho\sigma}\forall t_3^{\rho}(Calc_{\rho\sigma\tau}(t_1^{\rho\sigma\tau}) \wedge Calc_{\rho\sigma}(t_2^{\rho\sigma}) \wedge Calc_{\rho}(t_3^{\rho}) \rightarrow Calc_{\tau}(S_{\rho\sigma\tau}t_1^{\rho\sigma\tau}t_2^{\rho\sigma}t_3^{\rho}))$$

por lo que $Calc_{(\rho\sigma\tau)(\rho\sigma)\rho\tau}(S_{\rho\sigma\tau})$.

Calc$_{\tau}(x^{\tau})$

Sea $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n o$ y sean $t_i^{\tau_i}$ tales que $Calc_{\tau_i}(t_i^{\tau_i})$, para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$. En tal caso para cada $t_i^{\tau_i}$ existe un término $a_i^{\tau_i}$ tal que $a_i^{\tau_i} \in FN_{\tau_i}$ y $t_i^{\tau_i} \rhd a_i^{\tau_i}$.

Por lo tanto, $x^{\tau}t_1^{\tau_1} \cdots t_n^{\tau_n} \rhd x^{\tau}a_1^{\tau_1} \cdots a_n^{\tau_n}$ y como $Calc_o(x^{\tau}a_1^{\tau_1} \cdots a_n^{\tau_n})$, se tiene que $Calc_o(x^{\tau}t_1^{\tau_1} \cdots t_n^{\tau_n})$. En resumen:

$$\forall t_1^{\tau_1} \cdots \forall t_n^{\tau_n}(Calc_{\tau_1}(t_1^{\tau_1}) \wedge \cdots Calc_{\tau_n}(t_n^{\tau_n}) \rightarrow Calc_o(x^{\tau}t_1^{\tau_1} \cdots t_n^{\tau_n}))$$

de donde tenemos que $Calc_{\tau}(x^{\tau})$.

Calc$_{o(\tau\tau)\tau\tau}(J_{\tau})$

Sea t^o, un término tal que $Calc_o(t^o)$. Definimos para cada $k \in \mathbf{N}$ un conjunto D_k :

$$t^o \in D_k \leftrightarrow t^o \text{ tiene forma normal } \mathbf{S}^k t_1^o \text{ con } t_1^o \text{ normal y } t_1^o \text{ no es de la forma } \mathbf{S}t_2^o$$

donde $\mathbf{S}^k$ denota k-aplicaciones del funcional sucesor. Diremos que $t^o \in D_o$, si no existe tal k.

Observación 2: Nótese que $Calc_o = \cup\{D_k : k \in \mathbf{N}\}$

Mostraremos por inducción sobre k que :

$$\forall k \forall t^o \forall a^{\tau\tau} \forall b^\tau \left(t^o \in D_k \wedge Calc_{\tau\tau}\left(a^{\tau\tau}\right) \wedge Calc_\tau\left(b^\tau\right) \rightarrow Calc_\tau\left(J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau\right)\right)$$

Sean t^o, $a^{\tau\tau}$ y b^τ tales que $t^o \in D_k$, $Calc_{\tau\tau}\left(a^{\tau\tau}\right)$ y $Calc_\tau\left(b^\tau\right)$.

Caso 1.1) $k = 0$, y $t^o \rhd 0$.

En este caso $J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau \rhd b^\tau$, y como $Calc_\tau\left(b^\tau\right)$, tenemos que $Calc_\tau\left(J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau\right)$.

Caso 1.2) $k = 0$, $t^o \rhd t_1^o \not\equiv 0$.

En este caso $J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau$ tiene forma normal $J_\tau t_1^o a_1^{\tau\tau} b_1^\tau$, donde $a_1^{\tau\tau}$ y b_1^τ son las formas normales de $a^{\tau\tau}$ y b^τ respectivamente. Sea $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n o$ y tomemos términos s_i de tipo τ_i para cada $i \in \{1, \cdots n\}$ tales que $Calc_{\tau_i}\left(s_i\right)$ y $s_i \rhd s_i'$, con $s_i' \in FN_{\tau_i}$. Entonces $J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau s_1 \cdots s_n \rhd J_\tau t_1^o a_1^{\tau\tau} b_1^\tau s_1' \cdots s_n'$, donde $J_\tau t_1^o a_1^{\tau\tau} b_1^\tau s_1' \cdots s_n' \in FN_o$. Por lo tanto $Calc_o\left(J_\tau t_1^o a_1^{\tau\tau} b_1^\tau s_1' \cdots s_n'\right)$ y entonces de (1) se sigue que $Calc_\tau\left(J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau\right)$.

Caso 3) Paso inductivo.

Sea t^o tal que $t^o \rhd \mathbf{S}^{k+1} t_1^o$, donde $\mathbf{S}^{k+1} t_1^o \in FN_o$, y t_1^o no comienza con $\mathbf{S}$. Entonces:

$$J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau \rhd J_\tau\left(\mathbf{S}^{k+1} t_1^o\right) a^{\tau\tau} b^\tau \rhd a^{\tau\tau}\left(J_\tau\left(\mathbf{S}^k t_1^o\right) a^{\tau\tau} b^\tau\right) \equiv d^\tau$$

Como $\mathbf{S}^k t_1^o \in D_k$, tenemos por HI que $Calc_\tau\left(J_\tau\left(\mathbf{S}^k t_1^o\right) a^{\tau\tau} b^\tau\right)$. Se sigue que $Calc_\tau\left(d^\tau\right)$ y, por lo tanto que $Calc_\tau\left(J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau\right)$

En resumen:

$$\forall t^o \forall a^{\tau\tau} \forall b^\tau \left(Calc_o\left(t^o\right) \wedge Calc_{\tau\tau}\left(a^{\tau\tau}\right) \wedge Calc_\tau\left(b^\tau\right) \rightarrow Calc_\tau\left(J_\tau t^o a^{\tau\tau} b^\tau\right)\right)$$

de donde se observa que $Calc_{o(\tau\tau)\tau\tau}\left(J_\tau\right)$.

Por lo que, para todo tipo τ y todo término t^τ, tenemos que $Calc_\tau\left(t^\tau\right)$ y por lo tanto existe un término t_1^τ tal que $t^\tau \rhd t_1^\tau$ y $t_1^\tau \in FN_\tau$. ■

2.4.2 Unicidad

DEFINICIÓN.- (de $\rhd^*$)

La relación $\rhd^*$, entre términos del mismo tipo[7] se define recursivamente mediante las siguientes cláusulas:

i) $t \rhd^* t$

ii) $t conv t' \Rightarrow t \rhd^* t'$

iii) $t \rhd^* t'$ y $s \rhd^* s' \Rightarrow ts \rhd^* t's'$ [8]

Escribiremos $t \rhd^*_n t'$, cuando exista una sucesión de términos $t_0, \cdots, t_n$ tal que:

$$t \equiv t_0 \rhd^* t_1 \rhd^* \cdots \rhd^* t_n \equiv t'$$

Observación 1: Nótese que $\rhd^*$ no es transitiva; pues $t \rhd^* t'$ syss $t \equiv t'$ o t' se obtiene por medio de convertir simultáneamente un conjunto finito de redexes disjuntos dos a dos.

Observación 2: Nótese además, que como $\rhd$ es la cerradura transitiva de $\rhd^*$, entonces se sigue de las definiciónes anteriores que $a \rhd b$ syss $\exists\, m > 0$ tal que $a \rhd^*_m b$

LEMA (Lema del Diamante)

Si $t \rhd^* t'$ y $t \rhd^* t''$, entonces existe un término t''', tal que $t' \rhd^* t'''$ y $t'' \rhd^* t'''$.

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "\rhd^*"'] \arrow[dr, "\rhd^*"] & \\ t' \arrow[dr, "\rhd^*"'] & & t'' \arrow[dl, "\rhd^*"] \\ & t''' & \end{tikzcd}$$

Demostración:[9] Por definición de $t \rhd^* t'$, t' puede ser obtenido por medio de un número finito de aplicaciones de las cláusulas (i) a (iii) y los pasos pueden ser arreglados linealmente. Por

[7] Por lo tanto, en lo que sigue suprimiremos el uso de la referencia al tipo.

[8] Debe entenderse que existen tipos σ y τ, tales que t (y por lo tanto t') es de tipo $\sigma\tau$, y s (y por lo tanto s') es de tipo σ.

[9] Obviamente supondremos que $t' \not\equiv t''$, ya que este caso es trivial.

ejemplo, si $t \rhd^* t'$, entonces existe una sucesión finita

$$t_0 \rhd^* t'_0,\ t_1 \rhd^* t'_1, \cdots,\ t_n \rhd^* t'_n \qquad (\text{donde } t_n \equiv t \text{ y } t'_n \equiv t')$$

en la que para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $t_i \equiv t'_i$, o $t_i conv t'_i$, o $\exists k,m < i\,(t_i \equiv t_k t_m \wedge t'_i \equiv t'_k t'_m)$. Si tal sucesión existe, diremos que $t \rhd^* t'$, tiene una prueba de longitud n.

Supongamos que $t \rhd^* t'$ y $t \rhd^* t''$ se obtienen mediante pruebas de longitud n y m, respectivamente. Demostraremos el Lema por inducción sobre $n + m$.

Caso Base (n + m = 0)

Caso 1.- $t \rhd^* t'$ porque $t conv t'$

1.1) $t \equiv K_{\sigma\tau} a^\tau b^\sigma$, y $t' \equiv a^\tau$. En tal caso $t'' \equiv K_{\sigma\tau} a_1^\tau b_1^\sigma$, donde $a^\tau \rhd^* a_1^\tau$ y $b^\tau \rhd^* b_1^\tau$. El lema se obtiene al tomar $t''' \equiv a_1^\tau$.

1.2) $t \equiv S_{\rho\sigma\tau} a^{\rho\sigma\tau} b^{\rho\sigma} c^\rho$, y $t' \equiv a^{\rho\sigma\tau} c^\rho (b^{\rho\sigma} c^\rho)$. En este caso $t'' \equiv S_{\rho\sigma\tau} a_1^{\rho\sigma\tau} b_1^{\rho\sigma} c_1^\rho$, donde $a^{\rho\sigma\tau} \rhd^* a_1^{\rho\sigma\tau}$, $b^{\rho\sigma} \rhd^* b_1^{\rho\sigma}$ y $c^\rho \rhd^* c_1^\rho$. Si tomamos $t''' \equiv a_1^{\rho\sigma\tau} c_1^\rho (b_1^{\rho\sigma} c_1^\rho)$ tenemos el resutado esperado.

1.3) $t \equiv J_\tau 0 a^{\tau\tau} b^\tau$, y $t' \equiv b^\tau$. En tal caso $t'' \equiv J_\tau 0 a_1^{\tau\tau} b_1^\tau$, donde $b^\tau \rhd^* b_1^\tau$ y $a^{\tau\tau} \rhd^* a_1^{\tau\tau}$. Si ahora tomamos $t''' \equiv b_1^\tau$ tenemos el resultado buscado.

1.4) $t \equiv J_\tau(\mathbb{S}^{k+1} c^o) a^{\tau\tau} b^\tau$, y $t' \equiv a^{\tau\tau}\left(J_\tau(\mathbb{S}^k c^o) a^{\tau\tau} b^\tau\right)$. En este caso $t'' \equiv J_\tau(\mathbb{S}^{k+1} c^o) a_1^{\tau\tau} b_1^\tau$, donde $a^{\tau\tau} \rhd^* a_1^{\tau\tau}$, y b_1^τ. En este último caso basta con tomar $t''' \equiv a_1^{\tau\tau}\left(J_\tau(\mathbb{S}^k c^o) a_1^{\tau\tau} b_1^\tau\right)$.

Caso 2.- $t \rhd^* t''$, pues $t conv t''$

Se procede como en el caso 1.

Paso Inductivo

Sean $t \equiv t_1 t_2$, $t' \equiv t'_1 t'_2$, y $t'' \equiv t''_1 t''_2$, donde $t_1 t_2 \rhd^* t'_1 t'_2$ y $t_1 t_2 \rhd^* t''_1 t''_2$ (que tienen pruebas de longitud n y m, respectivamente) se obtuvieron a partir de $t_1 \rhd^* t'_1$, $t_1 \rhd^* t''_1$, $t_2 \rhd^* t'_2$, y $t_2 \rhd^* t''_2$. Por HI podemos encontrar t'''_1, y t'''_2, tales que $t'_1 \rhd^* t'''_1$, $t''_1 \rhd^* t'''_1$ y $t'_2 \rhd^* t'''_2$, $t''_2 \rhd^* t'''_2$. Tomando a $t''' \equiv t'''_1 t'''_2$ tenemos que $t' \rhd^* t'''$ y $t'' \rhd^* t'''$. ■

PROPOSICIÓN.- (Propiedad de Church-Rosser).

Si $t \rhd_n^* t'$ y $t \rhd_m^* t''$, entonces existe t''' tal que $t' \rhd_m^* t'''$ y $t'' \rhd_n^* t'''$.

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "\rhd_n^*"'] \arrow[dr, "\rhd_m^*"] & \\ t' \arrow[dr, "\rhd_m^*"'] & & t'' \arrow[dl, "\rhd_n^*"] \\ & t''' & \end{tikzcd}$$

Demostración.- Por inducción sobre $k = n + m$.

Caso base ($k = 2$).

Lema del diamante.

Paso Inductivo.

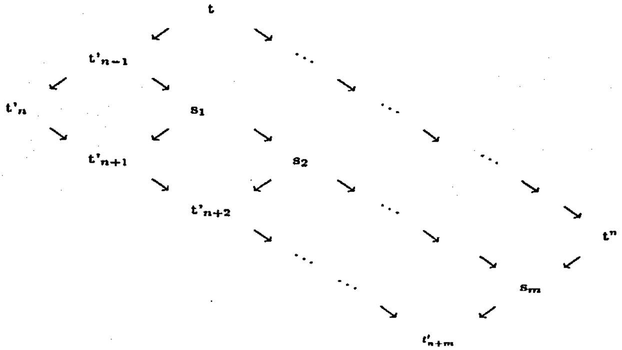
Sean t, t', y t'', tales que $t \rhd_n^* t'$, y $t \rhd_m^* t''$, en tal caso existe una sucesión $t'_1, \cdots, t'_n$ tal que

$$t \rhd^* t'_1 \rhd^* t'_2 \rhd^* \cdots \rhd^* t'_{n-1} \rhd^* t'_n \equiv t'$$

de donde $t \rhd_{n-1}^* t'_{n-1}$. Por HI sabemos que existe s_m tal que $t'_{n-1} \rhd_m^* s_m$ y $t'' \rhd_{n-1}^* s_m$.

$$\begin{tikzcd} & & t \arrow[dl, "n-1"'] \arrow[dr, "m"] & \\ & t'_{n-1} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "m"'] & & t'' \arrow[dl, "n-1"] \\ t' & & s_m & \end{tikzcd}$$

En resumen: tenemos $t'_{n-1} \rhd^* t'_n \equiv t'$ y $t'_{n-1} \rhd_m^* s_m$, de donde se sigue que existe una sucesión de términos $s_1, \cdots, s_m$, tales que $t'_{n-1} \rhd^* s_1 \rhd^* \cdots \rhd^* s_m$. Aplicando el lema del diamante m veces obtenemos una sucesión de m términos $t'_{n+1}, \cdots, t'_{n+m}$ tales que, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, se tiene que $t'_{n+i-1} \rhd^* t'_{n+i}$, y $s_i \rhd^* t'_{n+i}$.



Por lo tanto $t''_m \rhd^*_{n-1} s_m \rhd^* t'_{n+m}$; es decir, $t'' \rhd^*_n t'_{n+m}$.

Por otro lado tenemos la sucesión $t'_n, \cdots, t'_{n+m}$ para la que $t'_n \rhd^* t'_{n+1} \rhd^* \cdots \rhd^* t'_{n+m}$, y por lo tanto $t' \equiv t'_n \rhd^*_m t'_{n+m}$. Si tomamos $t''' \equiv t'_{n+m}$, hemos encontrado el término buscado. ■

COROLARIO.- Si $t \rhd t'$ y $t \rhd t''$, entonces existe t''', tal que $t' \rhd t''$ y $t'' \rhd t'''$.

Demostración: Inmediato de la proposición anterior y de la observación 2. ■

COROLARIO: La forma normal de cualquier término es única.

Demostración: De la sección anterior, se tiene que todo término es reducible a forma normal, es decir, sabemos que para todo término t existe $t' \in FN$, tal que $t \rhd t'$. Supongamos que para t existen dos términos t' y t'' en forma normal y con la propiedad de que $t \rhd t'$ y $t \rhd t''$. Por el corolario anterior sabemos que existe t''' tal que $t' \rhd t'''$ y $t'' \rhd t'''$, sin embargo recordemos que si $t \in FN$ y $t \rhd t'$, entonces $t \equiv t'$, de donde se sigue que $t' \equiv t'' \equiv t'''$. ■

Capítulo 3

EL SISTEMA FORMAL $\mathcal{FTF}$

3.1 Descripción

En este capítulo se expondrá el sistema formal $\mathcal{FTF}$ (Funcionales de Tipo Finito). $\mathcal{FTF}$ es un sistema basado en la lógica clásica de proposiciones, sin cuantificadores, cuyos términos son los términos funcionales descritos y definidos en el capítulo precedente. Además de los símbolos introducidos para el sistema de términos, el lenguaje para el sistema $\mathcal{FTF}$ incluye a los símbolos $=$, $\vee$ y $\neg$.

DEFINICIÓN (de Igualdad)[1]

Se dice que dos términos a^τ y b^τ del mismo tipo son iguales ($a^\tau = b^\tau$), syss ambos tienen la misma forma normal.

Nótese que la relación $=$ es una relación de equivalencia tal que $a^\sigma = b^\tau$, implica que $\sigma = \tau$; y que $a^\tau \rhd b^\tau$, implica que $a^\tau = b^\tau$.

Sea c^σ un término de tipo σ, a^τ un término de tipo τ y x^τ una variable de tipo τ. Por $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau}$, denotaremos al término que se obtiene de sustituir todas las presencias de x^τ por a^τ en c^σ.

[1] Como el lector habrá observado, de los resultados del Capítulo anterior se sigue que la decibilidad del predicado de igualdad definido en este sentido puede ser siempre garantizada para cualquier tipo τ.

TEOREMA (de sustitución en términos).- Si $a^\tau = b^\tau$ entonces $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = c^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau}$.

Demostración:

(1) Si x^τ no figura en c^σ, el resultado es trivial.

(2) Supongamos que x^τ figura en c^σ. Si $a^\tau = b^\tau$, entonces existe $e^\tau \in FN_\tau$, tal que $a^\tau \rhd e^\tau$ y $b^\tau \rhd e^\tau$. Basta con demostrar que si $a^\tau \rhd e^\tau$, entonces $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = c^\sigma\binom{e^\tau}{x^\tau}$, mas esto último es inmediato, pues de la definición de $\rhd$ se sigue que $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} \rhd c^\sigma\binom{e^\tau}{x^\tau}$, y por lo tanto existe $d^\sigma \in FN_\sigma$ tal que $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} \rhd d^\sigma$ y $c^\sigma\binom{e^\tau}{x^\tau} \rhd d^\sigma$, y por lo tanto $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = c^\sigma\binom{e^\tau}{x^\tau}$ ■

DEFINICIÓN (de fórmula)

(1) Si a^τ y b^τ son términos de tipo τ entonces $a^\tau = b^\tau$ es un formula.

(2) Si A y B son fórmulas entonces $(A \vee B)$, y $\neg A$, son fórmulas.

Diremos que una formula es cerrada syss no contiene variables.

Ahora introduciremos las abreviaturas usuales. Con $A \to B$, denotamos a la fórmula $(\neg A \vee B)$. Algunas veces, y siempre que no se preste a confusiones, omitiremos el uso de paréntesis. Así, en cadenas de implicaciones siempre supondremos asociación por la derecha. Con base en lo anterior debe entenderse que la fórmula $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n$, denota a la fórmula $A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_{n-1} \to A_n))\cdots)$.

DEFINICIÓN (de fórmula cerrada).- Se dice que una fórmula del sistema $\mathcal{FTF}$ es cerrada si y solo si no contiene variables.

DEFINICIÓN (de forma nominal)

Una forma nominal $\mathcal{F}$ de n lugares, es una cadena finita de símbolos del lenguaje en la que figuran, además de los símbolos del lenguaje, los símbolos nominales $*_1, \cdots, *_n$. Si $\mathcal{F}$ es una forma nominal de n lugares, denotaremos con $\mathcal{F}[r_1, \cdots, r_n]$ a la cadena de símbolos que resulta de substituir en $\mathcal{F}$ todas las presencias de $*_1, \cdots, *_n$. por $r_1, \cdots, r_n$ respectivamente.

Denotaremos a las formas nominales con la siguiente caligrafia: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.

DEFINICIÓN (recursiva del funcional cero 0^τ, de tipo τ)

(1) $0^o \equiv 0$

(2) $0^{\sigma\tau} \equiv K_{\sigma\tau}0^\tau$

AXIOMAS DE $\mathcal{FTF}$

(AX_k)	$K_{\sigma\tau}a^\tau b^\sigma = a^\tau$
(AX_S)	$S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^\rho = a^{\rho\sigma\tau}c^\rho\,(b^{\rho\sigma}c^\rho)$
(AX_{J0})	$J_\tau 0a^{\tau\tau}b^\tau = b^\tau$
(AX_{JS})	$J_\tau\,(\mathbf{S}c^o)\,a^{\tau\tau}b^\tau = a^{\tau\tau}\,(J_\tau c^o a^{\tau\tau}b^\tau)$
(AX_{Suc})	$\neg\,(\mathbf{S}a^o = 0)$
$(AX_=)$	$a^\tau = b^\tau \to \mathcal{F}\,[a^\tau] \to \mathcal{F}\,[b^\tau]$

REGLAS BÁSICAS DE INFERENCIA DE $\mathcal{FTF}$

Inducción (Ind.)	$\mathcal{F}\,[0]\,,\,\mathcal{F}\,[x^o] \to \mathcal{F}\,[\mathbf{S}x^0] \vdash \mathcal{F}\,[a^o]$, donde x^o no figura en $\mathcal{F}$.
Expansión (Exp.)	$A \vdash A \vee B$
Contracción (Contr.)	$A \vee A \vdash A$
Asociativa (Asoc.)	$(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$
Corte	$A \vee B,\, \neg A \vee C \vdash B \vee C$

DEFINICIÓN (B es deducible de orden n $(\vdash^n B)$)

(1) Si B es un axioma, entonces $\vdash^0 B$

(2) Si $A \vdash B$ por *Exp*, *Cont* o *Asoc.* y, $\vdash^n A$, entonces $\vdash^{n+1} B$

(3) Si $A_1, A_2 \vdash B$, por *Ind* o *Corte* y, $\vdash^{n_1} A_1$ y $\vdash^{n_2} A_2$, entonces $\vdash^n B$, donde $n = \max\,(n_1, n_2) + 1$.

Escribiremos $\vdash A$, siempre que exista una $n \in \mathbf{N}$ tal que $\vdash^n A$.

3.2 Reglas Derivadas de Inferencia

TEOREMA(de sustitución en fórmulas).- Si $\vdash^n \mathcal{F}\,[x^\tau]$ y x^τ no figura en $\mathcal{F}$, entonces $\vdash^n \mathcal{F}\,[a^\tau]$, para todo término a^τ de tipo τ.

Demostración.- Por inducción sobre n.

1) Si $\mathcal{F}[x^\tau]$ es un axioma, entonces claramente $\mathcal{F}[a^\tau]$ también lo es.

2) Supongamos que $\vdash^n \mathcal{F}[x^\tau]$, por medio de Exp, Cont, Asoc. o Corte. Por H.I., las fórmulas obtenidas a partir de las premisas al sustituir en ellas todas las presencias de x^τ por a^τ, son deducibles y del mismo orden que las premisas. Aplicando Exp, Cont, Asoc. o Corte, según sea el caso, obtenemos $\vdash^n \mathcal{F}[a^\tau]$.

3) Supongamos que $\vdash^n \mathcal{F}[x^\tau]$ se obtuvo por Ind.. En tal caso $\mathcal{F}[x^\tau]$ es una fórmula $\mathcal{E}[b^o]$ tal que

$$\vdash^{n_1} \mathcal{E}[0] \qquad y \qquad \vdash^{n_2} \mathcal{E}[y^o] \to \mathcal{E}[\mathbf{S}y^o]$$

Donde $n = \max(n_1, n_2) + 1$, y y^o no figura en $\mathcal{E}$. Escojamos una variable z^o distinta de x^τ que no figure ni en $\mathcal{E}$, ni en a^τ. Por H.I. tenemos que

$$\vdash^{n_2} \mathcal{E}[z^o] \to \mathcal{E}[\mathbf{S}z^o]$$

Sea $\mathcal{E}^*$ la forma nominal obtenida al sustituir a^τ en vez de x^τ en la forma nominal $\mathcal{E}$. Por H.I. tenemos que

$$\vdash^{n_1} \mathcal{E}^*[0] \qquad y \qquad \vdash^{n_2} \mathcal{E}^*[z^o] \to \mathcal{E}^*[\mathbf{S}z^o]$$

y usando Ind.

$$\vdash \mathcal{E}^*\left[b^o\begin{pmatrix}a^\tau\\x^\tau\end{pmatrix}\right]$$

pero $\mathcal{E}^*\left[b^o\binom{a^\tau}{x^\tau}\right] \equiv \mathcal{F}[a^\tau]$ ■

TEOREMA(modus ponens).- Si $\vdash A$ y $\vdash A \to B$, entonces $\vdash B$.

Demostración:

$\vdash A$ ....Hipótesis

$\vdash A \to B$ ....Hipótesis

$\vdash \neg A \vee B$ ....Lo mismo que lo anterior

$\vdash A \vee B$............................Expansión

$\vdash B \vee B$............................Corte

$\vdash B$..................................Contracción ■

TEOREMA(del tercero excluido).- $\vdash A \vee \neg A$.

Demostración:

$\vdash K_{oo}00 = 0$..............................(AX_K).

$\vdash K_{oo}00 = 0 \to (A \to A)$ ....$(AX_=)$.

$\vdash A \to A$ ...................................M.P.

$\vdash \neg A \vee A$ ....lo mismo que lo anterior.

$\vdash A \vee \neg A$ ....Conmutatividad de $\vee$[2]. ■

TEOREMA(algunos resultados básicos del cálculo proposicional).

(1) $\vdash A$ syss $\vdash \neg\neg A$

(2) $\vdash A \to B$ syss $\vdash \neg B \to \neg A$

(3) $\vdash A \vee B$ syss $\vdash B \vee A$

(4) Si $\vdash A \to C$ y $\vdash B \to C$, entonces $\vdash (A \vee B) \to C$

Demostración:

La demostración se deja al lector como ejercicio. ■

TEOREMA.- Si A es una fórmula cualquiera, entonces $\vdash \mathbf{S}a^o = 0 \to A$

Demostración:

$\vdash \neg(\mathbf{S}a^o = 0)$...............................$(AX_{\mathbf{S}uc})$

$\vdash \neg(\mathbf{S}a^o = 0) \vee A$........................Exp.

$\vdash \mathbf{S}a^o = 0 \to A$...........................lo mismo que lo anterior. ■

---

[2]Las demostraciones de la conmutatividad de $\vee$, así como de otros resultados básicos del cálculo proposicional es piden como ejercicio para el lector en el siguiente teorema.

TEOREMA (Reglas para la Igualdad).

(= 1) Si $\vdash \mathcal{F}[a^\tau]$ entonces $\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow \mathcal{F}[b^\tau]$

(= 2) $\vdash a^\tau = a^\tau$

(= 3) $\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow b^\tau = a^\tau$

(= 4) $\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow b^\tau = c^\tau \rightarrow a^\tau = c^\tau$

(= 5) $\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = c^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau}$

(= 6) Si $\vdash a^\tau = b^\tau$ y $\vdash \mathcal{F}[a^\tau]$, entonces $\vdash \mathcal{F}[b^\tau]$

Demostración:

(= 1).

$\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow \mathcal{F}[a^\tau] \rightarrow \mathcal{F}[b^\tau]$ ....($AX_=$).

$\vdash \neg(a^\tau = b^\tau) \vee (\neg\mathcal{F}[a^\tau] \vee \mathcal{F}[b^\tau])$ ....lo mismo que lo anterior.

$\vdash \neg(a^\tau = b^\tau) \vee (\mathcal{F}[b^\tau] \vee \neg\mathcal{F}[a^\tau])$ ....Conmutatividad de $\vee$.

$\vdash (\neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau]) \vee \neg\mathcal{F}[a^\tau]$ ....Asoc. de $\vee$.

$\vdash \neg\mathcal{F}[a^\tau] \vee (\neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau])$ ....Conmutatividad de $\vee$.

$\vdash \mathcal{F}[a^\tau]$ ....Hipótesis.

$\vdash \mathcal{F}[a^\tau] \vee (\neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau])$ ....Expansión.

$\vdash (\neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau]) \vee (\neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau])$ ....Corte.

$\vdash \neg(a^\tau = b^\tau) \vee \mathcal{F}[b^\tau]$ ....Contracción.

$\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow \mathcal{F}[b^\tau]$ ....lo mismo que lo anterior.

(= 2)

$\vdash K_{o\tau}a^\tau 0 = a^\tau$ ....(AX_K).

$\vdash K_{o\tau}a^\tau 0 = a^\tau \rightarrow a^\tau = a^\tau$ ....(= 1).

$\vdash a^\tau = a^\tau$ ....................M.P.

(= 3)

Inmediato de (= 2), aplicando (= 1).

(= 4)

$\vdash b^\tau = c^\tau \rightarrow a^\tau = b^\tau \rightarrow a^\tau = c^\tau$ ....($AX_=$).

$\vdash \neg b^\tau = c^\tau \vee (\neg a^\tau = b^\tau \vee a^\tau = c^\tau)$ ....lo mismo que lo anterior.

$\vdash (\neg b^\tau = c^\tau \vee \neg a^\tau = b^\tau) \vee a^\tau = c^\tau$ ....Asoc.

$\vdash (\neg a^\tau = b^\tau \vee \neg b^\tau = c^\tau) \vee a^\tau = c^\tau$ ....Conmutatividad de $\vee$.

$\vdash \neg a^\tau = b^\tau \vee (\neg b^\tau = c^\tau \vee a^\tau = c^\tau)$ ....Asoc.

$\vdash a^\tau = b^\tau \rightarrow b^\tau = c^\tau \rightarrow a^\tau = c^\tau$ ....lo mismo que lo anterior.

(= 5)

Por (= 2) tenemos que $\vdash c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau}$, y por (= 1) obtenemos (= 5).

(= 6)

De $(AX_=)$, $a^\tau = b^\tau \rightarrow \mathcal{F}[a^\tau] \rightarrow \mathcal{F}[b^\tau]$, aplicando dos veces Modus Ponens tenemos (6).

TEOREMA(Indución Implícita).- Si $\vdash \mathcal{F}[0]$ y $\vdash \mathcal{F}[Sx^o]$ donde x^o no figura en $\mathcal{F}$, entonces $\vdash \mathcal{F}[a^o]$, para todo término a^o de tipo o.

Demostración: En el sistema $\mathcal{FTF}$ se tiene la siguiente deducción:

$\vdash \mathcal{F}[Sx^o]$	... por hipótesis.
$\vdash \neg\mathcal{F}[x^o] \vee \mathcal{F}[Sx^o]$	... por Exp.
$\vdash \mathcal{F}[x^o] \rightarrow \mathcal{F}[Sx^o]$	... lo mismo que lo anterior.
$\vdash \mathcal{F}[0]$	... por hipótesis.
$\vdash \mathcal{F}[a^o]$	... por Ind. ■

COROLARIO.- Si A es una fórmula cerrada tal que $\vdash a^o = 0 \rightarrow A$ y $\vdash a^o = Sx^o \rightarrow A$, donde x^o no figura en a^o, entonces $\vdash A$.

Demostración: Como x^o, no figura ni en a^o ni en A, entonces por el Teorema anterior se tiene $\vdash a^o = a^o \rightarrow A$ y, por (= 2), que $\vdash A$. ■

3.3 Algunos Resultados en $\mathcal{FTF}$

Esta sección es la más extensa de la exposición y en ella se presentan los resultados artiméticos y las herramientas técnicas indispensables para poder subordinar la consistencia de la Aritmética de Peano a la del sistema $\mathcal{FTF}$.

3.3.1 Definición por Casos

DEFINICIÓN (de los funcionales auxiliares D_τ y ϑ).

$D_\tau\,[a^o, b^\tau, c^\tau] \equiv J_\tau a^o (K_{\tau\tau} c^\tau) b^\tau$

$\vartheta\,[a^o] \equiv J_\tau a^o\,(K_{oo}0)\,(\mathbb{S}0)$

El funcional auxiliar D_τ permite definir un término por casos. El funcional auxiliar ϑ corresponde a la función signo, que asocia a todo número natural distinto de cero el cero y a éste su sucesor.

COROLARIO.- Las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

$(D0)\quad D_\tau\,[0, b^\tau, c^\tau] = b^\tau$

$(D\mathbb{S})\quad D_\tau\,[\mathbb{S}a^o, b^\tau, c^\tau] = c^\tau$

$(\vartheta 0)\quad \vartheta\,[0] = \mathbb{S}0$

$(\vartheta\mathbb{S})\quad \vartheta\,[\mathbb{S}a^o] = 0$

Demostración:

Por (AX_{J0}), $(AX_{J\mathbb{S}})$ y (AX_K) tenemos que las siguientes ecuaciones son derivables en $\mathcal{FTF}$.

$D_\tau\,[0, b^\tau, c^\tau] \equiv J_\tau 0 (K_{\tau\tau} c^\tau) b^\tau = b^\tau$

$D_\tau\,[\mathbb{S}a^o, b^\tau, c^\tau] \equiv J_\tau\,(\mathbb{S}a^o)\,(K_{\tau\tau} c^\tau) b^\tau = K_{\tau\tau} c^\tau\,(J a^o\,(K_{\tau\tau} c^\tau)\,b^\tau) = c^\tau$

Las fórmulas $(\vartheta 0)$ y $(\vartheta\mathbb{S})$ son casos especiales de $(D0)$ y $(D\mathbb{S})$. ■

3.3.2 Adición y Multiplicación

DEFINICIÓN (de $+$, y de $\cdot$)[3]

(1) $a^o + b^o \equiv J_o b^o \mathbb{S} a^o$

(2) $a^o \cdot b^o \equiv J_o b^o\,(J_o a^o \mathbb{S})\,0$

[3]Siempre que no se preste a confusiones omitiremos el uso de paréntesis y convendremos, como es usual, que el producto tiene precedencia sobre la suma.

COROLARIO.- Las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

(+0) $\quad a^o + 0 = a^o$

(+S) $\quad a^o + \mathbf{S}b^o = \mathbf{S}\,(a^o + b^o)$

(·0) $\quad a^o \cdot 0 = 0$

(·S) $\quad a^o \cdot \mathbf{S}b^o = a^o \cdot b^o + a^o$

Demostración:

$a^o + 0 \equiv J_o 0 \mathbf{S} a^o = a^o$, por (AX_{J0}).

$a^o + \mathbf{S}b^o \equiv J_o(\mathbf{S}b^o)\mathbf{S}a^o = \mathbf{S}\,(J_o b^o \mathbf{S} a^o) = \mathbf{S}(a^o + b^o)$, por (AX_{JS}).

$a^o \cdot 0 \equiv J_o 0\,(J_o a^o \mathbf{S})\,0 = 0$, por (AX_{J0}).

$a^o \cdot \mathbf{S}b^o \equiv J_o\,(\mathbf{S}b^o)\,(J_o a^o \mathbf{S})\,0 = J_o a^o \mathbf{S}\,(J_o b^o\,(J_o a^o \mathbf{S})\,0) = (a^o \cdot b^o) + a^o$, por (AX_{JS}). ∎

Observación. Todas las propiedades básicas de + y de · se siguen de las ecuaciones anteriores y son deducibles en $\mathcal{FTF}$ por medio de inferencias Ind..

Como ejercicio se deja al lector demostrar que las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

(1) $a^o + (b^o + c^o) = (a^o + b^o) + c^o$

(2) $a^o \cdot (b^o \cdot c^o) = (a^o \cdot b^o) \cdot c^o$

(3) $a^o + b^o = b^o + a^o$

(4) $a^o \cdot b^o = b^o \cdot a^o$

3.3.3 El Funcional Identidad I_τ y Abstracción λ.

DEFINICIÓN (del funcional identidad I_τ).

$I_\tau \equiv S_{\tau(\tau\tau)\tau} K_{(\tau\tau)\tau} K_{\tau\tau}$

COROLARIO.- El funcional I_τ es de tipo $\tau\tau$ y $\vdash I_\tau a^\tau = a^\tau$.

Demostración: Por (AX_S) y (AX_K) tenemos:

$I_\tau a^\tau \equiv S_{\tau(\tau\tau)\tau} K_{(\tau\tau)\tau} K_{\tau\tau} a^\tau = K_{(\tau\tau)\tau} a^\tau\,(K_{\tau\tau} a^\tau) = a^\tau$. ∎

DEFINICIÓN (de $\lambda x^\rho(c^\tau)$)

El símbolo λ sólo tiene sentido cuando aparece junto a una variable como se ve en la definición.

(1) $\lambda x^\rho (x^\rho) \equiv I_\rho$

(2) $\lambda x^\rho (c^\tau) \equiv K_{\rho\tau} c^\tau$, siempre que x^ρ no figure en c^τ

(3) $\lambda x^\rho (a^{\sigma\tau} b^\sigma) \equiv S_{\rho\sigma\tau} (\lambda x^\rho (a^{\sigma\tau})) (\lambda x^\rho (b^\sigma))$

COROLARIO.- Para todo término c^τ, $\lambda x^\rho (c^\tau)$ es un término de tipo $\rho\tau$ en el que no figura la variable x^ρ.

Demostración: Inmediato a partir de la definición. ■

TEOREMA (de abstacción-λ).- $\vdash \lambda x^\rho (c^\tau)\, d^\rho = c^\tau \binom{d^\rho}{x^\rho}$.

Demostración: Por inducción sobre la complejidad de c^τ.

(1) Si $x^\rho \equiv c^\tau$, entonces:

$$\lambda x^\rho (x^\rho)\, d^\rho = I_\rho d^\rho = d^\rho = x^\rho \binom{d^\rho}{x^\rho}$$

(2) Si x^ρ no figura en c^τ, entonces:

$$\lambda x^\rho (c^\tau) d^\rho = K_{\rho\tau} c^\tau d^\rho = c^\tau = c^\tau \binom{d^\rho}{x^\rho}$$

(3) Si x^ρ figura en $a^{\sigma\tau} b^\sigma$, entonces la siguiente igualdad es deducible en $\mathcal{FTF}$

$$\lambda x^\rho (a^{\sigma\tau} b^\sigma)\, d^\rho \equiv S_{\rho\sigma\tau} (\lambda x^\rho (a^{\sigma\tau})) (\lambda x^\rho (b^\sigma))\, d^\rho = \lambda x^\rho (a^{\sigma\tau})\, d^\rho\, (\lambda x^\rho (b^\sigma)\, d^\rho)$$

y por H.I. tenemos

$$\lambda x^\rho (a^{\sigma\tau})\, d^\rho\, (\lambda x^\rho (b^\sigma)\, d^\rho) = a^{\sigma\tau} \binom{d^\rho}{x^\rho} \left(b^\sigma \binom{d^\rho}{x^\rho} \right) = a^{\sigma\tau} b^\sigma \binom{d^\rho}{x^\rho} = c^\tau \binom{d^\rho}{x^\rho} \; ■$$

Notación: Para facilitar la escritura adoptaremos la siguiente convención:

$$\lambda x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} \equiv \lambda x_1^{\sigma_1} (\lambda x_2^{\sigma_2} (\cdots (\lambda x_n^{\sigma_n} (c^\tau)) \cdots))$$

donde $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ deben ser siempre variables distintas. Si las variables $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ no figuran en $a_1^{\sigma_1} \cdots a_n^{\sigma_n}$, entonces por el teorema anterior tenemos que:

$$\vdash \lambda x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} (c^\tau) \, a_1^{\sigma_1} \cdots a_n^{\sigma_n} = c^\tau \binom{a_1^{\sigma_1}}{x_1^{\sigma_1}} \cdots \binom{a_n^{\sigma_n}}{x_n^{\sigma_n}}$$

3.3.4 El Funcional Predecesor y Diferencia Entera.

DEFINICIÓN (del funcional auxiliar U).

$U \equiv \lambda x^{oo} y^o \left(J_o y^o \mathbf{S} \left(x^{oo} (\mathbf{S}0)\right)\right)$

COROLARIO.- El funcional U es de tipo $(oo)\,oo$ y las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

(1) $U a^{oo} 0 = a^{oo} (\mathbf{S}0)$

(2) $U a^{oo} (\mathbf{S}0) = \mathbf{S} \left(a^{oo} (\mathbf{S}0)\right)$

Demostración:

Por el teorema anterior tenemos que

$$\vdash U a^{oo} b^o = J_o b^o \mathbf{S} \left(a^{oo} (\mathbf{S}0)\right)$$

Usando (AX_{J0}) y $(AX_{J\mathbf{S}})$ tenemos inmediatamente (1) y (2). ■

DEFINICIÓN.- (del funcional predecesor P).

$P \equiv \lambda z^o \left(J_{oo} z^o U \left(K_{oo} 0\right) 0\right)$

COROLARIO.- El funcional predecesor P es un funcional de tipo oo y las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

$(P0)\ P0 = 0$

$(P\mathbb{S})\ P(\mathbb{S}a^o) = a^o$

Demostración: Por el teorema de abstracción-λ y la definición del funcional P tenemos que

$$\vdash Pc^o = J_{oo}c^oU\,(K_{oo}0)\,0$$

usando (AX_{J0}) tenemos lo siguiente:

$$\vdash P0 = J_{oo}0U\,(K_{oo}0)\,0 = K_{oo}00 = 0$$

que es precisamente $(P0)$. Por otra parte usando $(AX_{J\mathbb{S}})$ se tiene que

$$\vdash P(\mathbb{S}c^o) = J_{oo}\,(\mathbb{S}c^o)\,U\,(K_{oo}0)\,0 = U\,(J_{oo}c^oU\,(K_{oo}0))\,0$$

y, usando (1) del corolario anterior, tenemos que

$$\vdash P\,(\mathbb{S}c^o) = J_{oo}c^oU\,(K_{oo}0)\,(\mathbb{S}0)$$

de donde por (AX_{J0}) y (AX_K) se siguen

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots \vdash P\,(\mathbb{S}0) = J_{oo}0U\,(K_{oo}0)\,(\mathbb{S}0) = K_{oo}0(\mathbb{S}0) = 0$$

y

$$\vdash P\,(\mathbb{S}\,(\mathbb{S}x^o)) = J_{oo}\,(\mathbb{S}\,(\mathbb{S}x^o))\,U\,(K_{oo}o)\,(\mathbb{S}0) = U\,(J_{oo}\,(\mathbb{S}x^o)\,U\,(K_{oo}0))\,(\mathbb{S}0)$$

Con base en (2) del corolario anterior, tenemos que

$$\vdash P\,(\mathbb{S}\,(\mathbb{S}x^o)) = \mathbb{S}\,(J_{oo}\,(\mathbb{S}x^o)\,U\,(K_{oo}0)\,(\mathbb{S}0)) = \mathbb{S}\,(P\,(\mathbb{S}x^o))$$

Ahora bien de $\vdash P(\mathbf{S}(\mathbf{S}x^o)) = \mathbf{S}(P(\mathbf{S}x^o))$ y de $(=1)$ tenemos

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash P(\mathbf{S}x^o) = x^o \to P(\mathbf{S}(\mathbf{S}x^o)) = \mathbf{S}x^o$$

Finalmente usando Ind. de (1) y (2) tenemos que

$$\vdash P(\mathbf{S}a^o) = a^o \ \blacksquare$$

TEOREMA.- $\vdash \mathbf{S}a^o = \mathbf{S}b^o \to a^o = b^o$.

Demostración: De $(=5)$ tenemos que

$$\vdash \mathbf{S}a^o = \mathbf{S}b^o \to P(\mathbf{S}a^o) = P(\mathbf{S}b^o)$$

y por $(P\mathbf{S})$ obtenemos $\vdash \mathbf{S}a^o = \mathbf{S}b^o \to a^o = b^o \ \blacksquare$

DEFINICIÓN.- (de diferencia entera $a^o \dot{-} b^o$)

$a^o \dot{-} b^o \equiv J_o b^o P a^o$

COROLARIO.- Las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

$(\dot{-}0)$ $a^o \dot{-} 0 = a^o$

$(\dot{-}\mathbf{S})$ $a \dot{-} (\mathbf{S}b^o) = P(a^o \dot{-} b^o)$

Demostración: Por la definición de diferencia entera y por (AX_{J0}) tenemos que

$$\vdash a^o \dot{-} 0 \equiv J_o 0 P a^o = a^o$$

y usando $(AX_{J\mathbf{S}})$

$$\vdash a \dot{-} (\mathbf{S}b^o) \equiv J_o(\mathbf{S}b^o) P a^o = P(J_o b^o P a^o) \equiv P\left(a^o \dot{-} b^o\right) \ \blacksquare$$

TEOREMA

(1) $\vdash 0 \dot{-} b^o = 0$

(2) $\vdash \mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}b^o = a^o \dot{-} b^o$

(3) $\vdash \mathbb{S}a^o \dot{-} a^o = \mathbb{S}0$

(4) $\vdash a^o \dot{-} a^o = 0$

Demostración:

(1) Por el corolario anterior tenemos que

$$(1.1) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash 0 \dot{-} 0 = 0$$

Además, sabemos que $\vdash 0 \dot{-} (\mathbb{S}x^o) = P\left(0 \dot{-} x^o\right)$. De esto y usando $P0 = 0$ por $(=1)$ y $(=6)$, tenemos que

$$(1.2) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash 0 \dot{-} x^o = 0 \to 0 \dot{-} (\mathbb{S}x^o) = 0$$

Finalmente de (1.1) y (1.2) se obtiene (1) por medio de un inferencia Ind.

(2) En $\mathcal{FTF}$ son deducibles las siguientes ecuaciones

$$\mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}0 = P\left(\mathbb{S}a^o \dot{-} 0\right) = P\left(\mathbb{S}a^o\right) = a^o = a^o \dot{-} 0$$

y por lo tanto:

$$(2.1) \ldots\ldots\ldots \vdash \mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}0 = a^o \dot{-} 0$$

También sabemos que $\vdash \mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}(\mathbb{S}x^o) = P\left(\mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}x^o\right)$ y, por $\left(\dot{-}\mathbb{S}\right)$, $(=1)$ y $(=6)$ tenemos que

$$(2.2) \ldots\ldots \vdash \mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}x^o = a^o \dot{-} x^o \to \mathbb{S}a^o \dot{-} \mathbb{S}(\mathbb{S}x^o) = a^o \dot{-} \mathbb{S}x^o$$

De (2.1) y (2.2) se obtiene (2) por medio de una inferencia Ind.

(3) De $\left(\dot{-}\ 0\right)$ tenemos que

$$(3.1) \ldots\ldots \vdash \mathbf{S}0 \dot{-} 0 = \mathbf{S}0$$

y de (2) tenemos que

$$\vdash \mathbf{S}\left(\mathbf{S}x^{o}\right) \dot{-} \mathbf{S}x^{o} = \mathbf{S}x^{o} \dot{-} x^{o}$$

de donde, con base en (= 1) obtenemos lo siguiente:

$$(3.2) \ldots\ldots \vdash \mathbf{S}x^{o} \dot{-} x^{o} = \mathbf{S}0 \to \mathbf{S}\left(\mathbf{S}x^{o}\right) \dot{-} \mathbf{S}x^{o} = \mathbf{S}0$$

Finalmente de (3.1) y (3.2) se obtiene (3) mediante una inferencia Ind.

(4) Por (2) y (3) tenemos la siguiente serie de ecuaciones deducibles

$$a^{o} \dot{-} a^{o} = \mathbf{S}a^{o} \dot{-} \mathbf{S}a^{o} = P\left(\mathbf{S}a^{o} \dot{-} a^{o}\right) = P\left(\mathbf{S}0\right) = 0$$

y por lo tanto $\vdash a^{o} \dot{-} a^{o} = 0$. ■

3.3.5 El Recursor

Definimos un término auxiliar Q_{τ} de tipo $(o\tau\tau)(o\tau)o\tau$ de la siguiente forma:

$$Q_{\tau} \equiv \lambda x^{o\tau\tau} y^{o\tau} z^{o}\left[x^{o\tau\tau}\left(Pz^{o}\right)\left(y^{o\tau}\left(Pz^{o}\right)\right)\right]$$

Por el teorema de abstracción-λ tenemos que

$$\vdash Q_{\tau} b^{o\tau\tau} d^{o\tau} c^{o} = b^{o\tau\tau}\left(Pc^{o}\right)\left(d^{o\tau}\left(Pc^{o}\right)\right)$$

De donde por ($P\mathbf{S}$) se obtiene

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash Q_{\tau} b^{o\tau\tau} d^{o\tau}\left(\mathbf{S}c^{o}\right) = b^{o\tau\tau} c^{o}\left(d^{o\tau} c^{o}\right)$$

DEFINICIÓN (del recursor R_τ)

$R_\tau \equiv \lambda x^\tau y^{o\tau\tau} z^o \left[J_{o\tau} z^o \left(Q_\tau y^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} x^\tau\right) z^o\right]$

COROLARIO.- R_τ es un término de tipo $\tau\,(o\tau\tau)\,o\tau$, y en $\mathcal{FTF}$ se tiene que

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau} c^o = J_{o\tau} c^o \left(Q_\tau b^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} a^\tau\right) c^o$$

Demostración: Inmediata a partir de la definición y del teorema de abstracción-λ. ■

TEOREMA (Recursión Primitiva Simple)

$(R0) \vdash R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau} 0 = a^\tau$

$(RS) \vdash R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau}\left(\mathbb{S} c^o\right) = b^{o\tau\tau} c^o \left(R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau} c^o\right)$

Demostración:

$(R0)$

Por (2) se tiene que $R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau} 0 = J_{o\tau} 0 \left(Q_\tau b^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} a^\tau\right) 0$, que por (AX_{J0}) y (AX_K) es precisamente igual a a^τ.

(RS)

A partir de (2) y con base en (AX_{JS}) y (AX_K) se tienen las siguientes ecuaciones deducibles en $\mathcal{FTF}$:

$$R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau}\left(\mathbb{S} c^o\right) = J_{o\tau}\left(\mathbb{S} c^o\right)\left(Q_\tau b^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} a^\tau\right)\left(\mathbb{S} c^o\right) = Q_\tau b^{o\tau\tau}\left(J_{o\tau} c^o \left(Q_\tau b^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} a^\tau\right)\right)\left(\mathbb{S} c^o\right)$$

de lo anterior, con base en (1) y (2) se obtiene lo siguiente:

$$R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau}\left(\mathbb{S} c^o\right) = b^{o\tau\tau} c^o \left(J_{o\tau} c^o \left(Q_\tau b^{o\tau\tau}\right)\left(K_{o\tau} a^\tau\right) c^o\right) = b^{o\tau\tau} c^o \left(R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau} c^o\right)$$

que es precisamente (RS) ■

Nótese que $R_\tau a^\tau b^{o\tau\tau}$ es un funcional, digamos $f^{o\tau}$ de tipo $o\tau$, que dependiendo de $b^{o\tau\tau}$ y de a^τ define una función recursiva para la que se tienen los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
&\vdash \quad f^{o\tau}0 = a^\tau \\
&\vdash \quad f^{o\tau}(\mathrm{S}c^o) = b^{o\tau\tau}c^o\,(f^{o\tau}c^o)
\end{aligned}
$$

3.3.6 Recursión Simultánea.

TEOREMA (Recursión Primitiva n-simultánea).

Dados $2n$ términos $a_i^{\tau_i}$ y $b_i^{o\tau_1\cdots\tau_n\tau_i}$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$, existen términos $f_i^{o\tau_i}$ tales que las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ y para todo término c^o de tipo o.

$$f_i^{o\tau_i}0 = a_i^{\tau_i}$$

$$f_i^{o\tau_i}(\mathrm{S}c^o) = b_i^{o\tau_1\cdots\tau_n\tau_i}c^o\,(f_1^{o\tau_1}c^o)\cdots(f_n^{o\tau_n}c^o)$$

Demostración: Por inducción sobre n

$(n = 1)$ Este caso es precisamente el teorema de recursión primitiva simple donde

$$f_1^{o\tau_1} \equiv R_{\tau_1}a^{\tau_1}b^{o\tau_1\tau_1}$$

Supondremos cierto el enunciado para una cantidad menor a n, y lo probaremos para n. Para facilitar la escritura, usaremos b_i en lugar de $b_i^{o\tau_1\cdots\tau_n\tau_i}$, c en lugar de c^o y d en lugar de d^o. Además introduciremos las siguientes abreviaturas:

$$
\begin{aligned}
\sigma &\equiv (o\tau_1)\cdots(o\tau_{n-1})\,\tau_n \\
s^\sigma &\equiv \lambda x_1^{o\tau_1}\cdots x_{n-1}^{o\tau_{n-1}}\,(a_n^{\tau_n}) \\
t^{o\sigma\sigma} &\equiv \lambda x^o y^\sigma z_1^{o\tau_1}\cdots z_n^{o\tau_n}\,(b_n x^o\,(z_1^{o\tau_1}x^o)\cdots(z_{n-1}^{o\tau_{n-1}}x^o)\,(y^\sigma z_1^{o\tau_1}\cdots z_{n-1}^{o\tau_{n-1}}))
\end{aligned}
$$

$$g \equiv R_\sigma s^\sigma t^{o\sigma\sigma}$$

donde las variables $x_1^{o\tau_1}, \cdots, x_{n-1}^{o\tau_{n-1}}$ no figuran en $a_n^{\tau_n}$ y las variables $z_1^{o\tau_1}, \cdots, z_{n-1}^{o\tau_{n-1}}, x^o$ y y^σ no figuran en b_n.

Nótese que g es un término de tipo $\sigma = (o\tau_1) \cdots (o\tau_{n-1})\, \tau_n$, y que debido al teorema de recursión primitiva simple tenemos lo siguiente:

$$\vdash \quad g0 = s^\sigma$$
$$\vdash \quad g\,(\mathbb{S}c) = t^{o\sigma\sigma} c\,(gc)$$

Por la definición de s^σ y de $t^{o\sigma\sigma}$, y con base en el teorema de abstracción-λ tenemos que

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad g0e_1^{o\tau_1} \cdots e_{n-1}^{o\tau_{n-1}} = a_n^{\tau_n}$$
$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad g\,(\mathbb{S}c)\, e_1^{o\tau_1} \cdots e_{n-1}^{o\tau_{n-1}} = b_n c\,(e_1^{o\tau_1} c) \cdots (e_{n-1}^{o\tau_{n-1}} c)\; (gce_1^{o\tau_1} \cdots e_{n-1}^{o\tau_{n-1}})$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ definimos los funcionales auxiliares u y ν como sigue:

$$u_i^{o\tau_i} \equiv K_{o\tau_i} a_i^{\tau_i}$$
$$\nu_i \equiv \lambda x^o y_1^{o\tau_1} \cdots y_{n-1}^{o\tau_{n-1}} z^o \left(D_{\tau_i} \left[z^o \dot{-} x^o, y_i^{o\tau_i} z^o, b_i x^o\,(y_1^{o\tau_1} x^o) \cdots (y_{n-1}^{o\tau_{n-1}} x^o)\; (gx^o y_1^{o\tau_1} \cdots y_{n-1}^{o\tau_{n-1}})\right]\right)$$

Como el lector puede verificar ν_i es un término de tipo $o\,(o\tau_1) \cdots (o\tau_{n-1})\, o\tau_i$.

Por la hipóteis de inducción, existen términos h_i de tipo $oo\tau_i$, tales que:

$$\vdash \quad h_i 0 = u_i^{o\tau_i}$$
$$\vdash \quad h_i\,(\mathbb{S}c) = \nu_i c\,(h_1 c) \cdots (h_{n-1} c)$$

para toda $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ y todo término c de tipo o. Ahora bien, por el teorema de abstracción-λ tenemos que, si d es un término cualquiera de tipo o, entonces

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash h_i 0 d = a_i^{\tau_i}$$

De

$$\vdash h_i\,(Sc)\,d = \nu_i c\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1}c)\,d$$

por el teorema de abstracción-λ tenemos que

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vdash h_i\,(Sc)\,d = D_{\tau_i}\left[d \dot{-} c, h_i cd, b_i c\,(h_1 cc)\cdots(h_{n-1}cc)\,(gc\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1}c))\right]$$

y usando $(D0)$ y (DS) :

$$(4.1) \ldots\ldots\quad \vdash \quad d \dot{-} c = 0 \rightarrow h_i\,(Sc)\,d = h_i cd$$

$$(4.2) \ldots\ldots\quad \vdash \quad d \dot{-} c = S0 \rightarrow h_i\,(Sc)\,d = b_i c\,(h_1 cc)\cdots(h_{n-1}cc)\,(gc\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1}c))$$

Para cada $i \in \{1,\cdots,n-1\}$ definimos $f_i^{o\tau_i}$ como sigue:

$$f_i^{o\tau_i} \equiv \lambda x^o\,(h_i x^o x^o)$$

para el caso de que $i = n$ definimos

$$f_n^{o\tau_n} \equiv \lambda x^o\,(gx^o\,(h_1 x^o)\cdots(h_{n-1}x^o))$$

De las definiciones anteriores, por el teorema de abstracción-λ tenemos:

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash f_i^{o\tau_i} c = h_i cc \qquad \text{para } i \in \{1,\cdots,n-1\}$$

$$\vdash f_n^{o\tau_n} c = gc\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1}c)$$

y para toda $i \in \{1,\cdots,n-1\}$ se siguen de (3), (4.2) y (5):

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash f_i^{o\tau_i} 0 = a_i^{\tau_i}$$

$$\vdash f_i^{o\tau_i}\,(Sc) = h_i\,(Sc)\,(Sc) = b_i c\,(f_1^{o\tau_1} c)\cdots(f_{n-1}^{o\tau_{n-1}} c)\,(f_n^{o\tau_n} c)$$

Finalmente de (1) y (5) se sigue que

$$(7) \ldots\ldots\ \vdash f_n^{o\tau_n}0 = a_n^{\tau_n}$$

Por otra parte, de (4.1) se sigue que

$$\vdash x^o \dot{-} c = 0 \rightarrow h_i\,(\mathbf{S}c)\,x^o = h_i c x^o$$

y por (2)

$$\begin{aligned}(8)\ldots\ldots\quad \vdash x^o \dot{-} c = 0 \rightarrow g\,(\mathbf{S}x^o)\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = \\ = b_n x^o\,(h_1 c x^o)\cdots(h_{n-1} c x^o)\,(g x^o\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)))\end{aligned}$$

Tambien de $\mathbf{S}x^o \dot{-} c = 0$ tenemos, por el teorema de diferencia entera, las siguientes ecuaciones:

$$x^o \dot{-} c = \mathbf{S}x^o \dot{-} \mathbf{S}c = P(\mathbf{S}x^o \dot{-} c) = P0 = 0$$

y usando (8) y (2) tenemos que

$$\begin{aligned}(9)\ldots\vdash \Big(x^o \dot{-} c = 0 \rightarrow g x^o\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = g x^o\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1} c)\Big) \rightarrow \\ \rightarrow \Big(\mathbf{S}x^o \dot{-} c = 0 \rightarrow g\,(\mathbf{S}x^o)\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = g\,(\mathbf{S}x^o)\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1} c)\Big)\end{aligned}$$

De (1) tenemos que

$$(10)\ldots\ \vdash 0 \dot{-} c = 0 \rightarrow g0\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = g0\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1} c)$$

ahora, de (9) y (10) por medio de Ind. se sigue que

$$\vdash c \dot{-} c = 0 \rightarrow gc\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = gc\,(h_1 c)\cdots g\,(h_{n-1} c)$$

de donde, por el teorema de diferencia entera $\left(\vdash c \dot{-} c = 0\right)$ y (8) se obtiene que

$$\vdash g\,(\mathbf{S}c)\,(h_1\,(\mathbf{S}c))\cdots(h_{n-1}\,(\mathbf{S}c)) = b_n c\,(h_1 cc)\cdots(h_{n-1}cc)\,(gc\,(h_1 c)\cdots(h_{n-1}c))$$

Finalmente por (5) se tiene que

$$(11)\,\ldots\ldots\ldots\ \vdash f_n^{o\tau_n}\,(\mathbf{S}c) = b_n c\,(f_1^{o\tau_1}c)\cdots(f_n^{o\tau_n}c)$$

Con (6), (7), y (11) el teorema queda demostrado. ■

COROLARIO.- Dados términos $a_i^{\tau_i}$ y $b_i^{o\tau_1\cdots\tau_n\tau_i}$ con $i \in \{1,\cdots,n\}$ y un término a_o de tipo o, existen términos $f_i^{o\tau_i}$ tales que las siguientes ecuaciones son deducibles en $\mathcal{FTF}$ para toda $i \in \{1,\cdots,n\}$ y para todo término c^o de tipo o.

$$f_i^{o\tau_i}0 = a_i^{\tau_i}$$

$$f_i^{o\tau_i}\,(\mathbf{S}c^o) = b_i^{o\tau_1\cdots\tau_n\tau_i}\,(a_o - \mathbf{S}c^o)\,(f_1^{o\tau_1}c^o)\cdots(f_n^{o\tau_n}c^o)$$

Demostración:

Para cada $i \in \{1,\cdots n\}$ definamos unos términos auxiliares u_i y ν_i como sigue:

$$\begin{aligned} u_i^{o\tau_i} &\equiv K_{o\tau_i}a_i^{\tau_i} \\ \nu_i &\equiv \lambda x^o y_1^{o\tau_1}\cdots y_n^{o\tau_n} z^o \left(b_i\left(a^o \dot{-} \mathbf{S}x^o\right)(y_1^{o\tau_1}x^o)\cdots(y_n^{o\tau_n}x^o)\right) \end{aligned}$$

Por el teorema anterior, existen términos h_i de tipo $oo\tau_i$ tales que:

$$\vdash h_i 0 = u_i^{o\tau_i}$$
$$\vdash h_i\,(\mathbf{S}c^o) = \nu_i c^o\,(h_1 c^o)\cdots(h_n c^o)$$

de donde para cualquier término d^o de tipo o se tienen

$$(1) \ldots\ldots \vdash h_i 0 d^o = K_{o\tau_i} a_i^{\tau_i} d^o = a_i^{\tau_i}$$

$$y$$

$$(2) \ldots\ldots \vdash h_i \left(\mathbb{S}c^o\right) d^o = \nu_i c^o \left(h_1 c^o\right) \cdots \left(h_n c^o\right) d^o = b_i \left(a^o \dot{-} \mathbb{S}c^o\right) \left(h_1 c^o c^o\right) \cdots \left(h_n c^o c^o\right)$$

Definamos $f_i^{o\tau_i}$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ como

$$f_i^{o\tau_i} \equiv \lambda x^o \left(h_i x^o x^o\right)$$

por lo que

$$(3) \ldots\ldots \vdash f_i^{o\tau_i} c^o = h_i c^o c^o$$

de donde por (1) tenemos que

$$\vdash f_i^{o\tau_i} 0 = h_i 00 = a_i^{\tau_i}$$

Finalmente por (2) y (3) tenemos

$$\vdash f_i^{o\tau_i} \left(\mathbb{S}c^o\right) = h_i \left(\mathbb{S}c^o\right)\left(\mathbb{S}c^o\right) = b_i \left(a^o \dot{-} \mathbb{S}c^o\right) \left(f_1^{o\tau_1} c^o\right) \cdots \left(f_n^{o\tau_n} c^o\right) \blacksquare$$

3.3.7 Inducción

TEOREMA (Inducción)

Para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ sea b_i un término de tipo $o\tau_1 \cdots \tau_n \tau_i$, y sea $\mathcal{F}[x^o, y_1^{\tau_1}, \cdots, y_n^{\tau_n}]$ una fórmula cuyas variables $x^o, y_1^{\tau_1}, \cdots, y_n^{\tau_n}$ son todas distintas y no figuran en la forma nominal $\mathcal{F}$, ni en los términos $b_1, \cdots, b_n$. Supongamos además que:

i) $\vdash \mathcal{F}[0\ y_1^{\tau_1}, \cdots, y_n^{\tau_n}]$

ii) $\vdash \mathcal{F}[x^o, b_1 x^o y_1^{\tau_1} \cdots y_n^{\tau_n}, \cdots, b_n x^o y_1^{\tau_1} \cdots y_n^{\tau_n}] \to \mathcal{F}[\mathbb{S}x^o, y_1^{\tau_1}, \cdots, y_n^{\tau_n}]$

en tal caso $\vdash \mathcal{F}[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}]$ para cualesquiera términos $a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$.

Demostración:

Por el Corolario del Teorema de Recursión Primitiva n-simultánea, dados los términos $a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$ existen términos $f_i^{o\tau_i}$ de tipo $o\tau_i$, tales que para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ y todo término c^o de tipo o se tienen:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad f_i^{o\tau_i} 0 = a_i^{\tau_i}$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad f_i^{o\tau_i}(\mathbf{S}c^o) = b_i \left(a^o \dot{-} \mathbf{S}c^o\right)(f_1^{o\tau_1} c^o) \cdots (f_n^{o\tau_n} c^o)$$

De la igualdad $a^o \dot{-} z^o = \mathbf{S}x^o$ se siguen las siguientes ecuaciones

$$a^o \dot{-} \mathbf{S}z^o = P\left(a^o \dot{-} z^o\right) = P(\mathbf{S}x^o) = x^o$$

Al sustituir $y_i^{\tau_i}$ por $f_i^{o\tau_i} z^o$ en (ii), de lo anterior y (2) se sigue que

$$(3) \vdash a^o \dot{-} z^o = \mathbf{S}x^o \to \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} \mathbf{S}z^o, f_1^{o\tau_1}(\mathbf{S}z^o), \cdot\cdot, f_n^{o\tau_n}(\mathbf{S}z^o)\right] \to \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} z^o, f_1^{o\tau_1} z^o, \cdot\cdot, f_n^{o\tau_n} z^o\right]$$

Repitiendo la misma sustitución en (i) obtenemos

$$(4) \vdash a^o \dot{-} z^o = 0 \to \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} \mathbf{S}z^o, f_1^{o\tau_1}(\mathbf{S}z^o), \cdots, f_n^{o\tau_n}(\mathbf{S}z^o)\right] \to \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} z^o, f_1^{o\tau_1} z^o, \cdots, f_n^{o\tau_n} z^o\right]$$

Por el Teorema de inducción implícita a partir de (3) y de (4) se sigue que

$$\vdash \mathcal{F}\left[a \dot{-} \mathbf{S}z^o, f_1^{o\tau_1}(\mathbf{S}z^o), \cdots, f_n^{o\tau_n}(\mathbf{S}z^o)\right] \to \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} z^o, f_1^{o\tau_1} z^o, \cdots, f_n^{o\tau_n} z^o\right]$$

y por lo tanto

$$(5) \vdash \left(\mathcal{F}\left[a^o \dot{-} z^o, f_1^{o\tau_1} z^o, \cdots, f_n^{o\tau_n} z^o\right] \to \mathcal{F}\left[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}\right]\right) \to$$
$$\to \left(\mathcal{F}\left[a^o \dot{-} \mathbb{S}z^o, f_1^{o\tau_1}(\mathbb{S}z^o), \cdots, f_n^{o\tau_n}(\mathbb{S}z^o)\right] \to \mathcal{F}\left[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}\right]\right)$$

Por otra parte, de (1) se sigue que

$$(6) \ldots \vdash \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} 0, f_1^{o\tau_1} 0, \cdots, f_n^{o\tau_n} 0\right] \to \mathcal{F}\left[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}\right]$$

Aplicando Ind. a (5) y (6) se obtiene

$$\vdash \mathcal{F}\left[a^o \dot{-} a^o, f_1^{o\tau_1} a^o, \cdots, f_n^{o\tau_n} a^o\right] \to \mathcal{F}\left[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}\right]$$

pero como $a^o \dot{-} a^o = 0$, por (i) , se sigue que

$$\vdash \mathcal{F}\left[a^o, a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}\right] \blacksquare$$

COROLARIO.- Sea $\mathcal{F}[x^o, y^o]$ una fórmula y sean x^o y y^o variables distintas de tipo o, que no figuran en $\mathcal{F}$. Supongase además que

$i)$ $\vdash \mathcal{F}[x^o, 0]$

$ii)$ $\vdash \mathcal{F}[0, y^o]$

$iii)$ $\vdash \mathcal{F}[x^o, y^o] \to \mathcal{F}[\mathbb{S}x^o, \mathbb{S}y^o]$

En tal caso $\vdash \mathcal{F}[a^o, b^o]$ para cualesquiera términos a^o y b^o de tipo o.

Demostración:

De $z^o = P(\mathbb{S}z^o)$ y (iii) tenemos

$$(1) \ldots\ldots\ldots \vdash y^o = \mathbb{S}z^o \to \mathcal{F}[x^o, Py^o] \to \mathcal{F}[\mathbb{S}x^o, y^o]$$

Por (i), también se tiene que

$$(2) \ldots\ldots\ldots \vdash y^o = 0 \rightarrow \mathcal{F}[x^o, Py^o] \rightarrow \mathcal{F}[\mathbf{S}x^o, y^o]$$

de (1) y (2), usando el Teorema de inducción implícita, se sigue que

$$(3) \ldots\ldots\ldots \vdash \mathcal{F}[x^o, Py^o] \rightarrow \mathcal{F}[\mathbf{S}x^o, y^o]$$

y, finalmente, de (3) y (ii) tenemos por el Teorema de Inducción que

$$\vdash \mathcal{F}[a^o, b^o] \blacksquare$$

3.3.8 El Término Característico de una Fórmula Básica.

DEFINICIÓN (De fórmula básica)

Se dice que una fórmula es básica syss contiene únicamente igualdades de tipo o.

DEFINICIÓN (del término característico $\chi[C]$ de una fórmula básica C)

Sean a^o y b^o términos de tipo cero y sean A y B fórmulas básicas. Definimos recursivamente el término característico de una fórmula básica C como sigue:

(1) $\chi[a^o = b^o] \equiv \left(a^o \dot{-} b^o\right) + \left(b^o \dot{-} a^o\right)$

(2) $\chi[A \vee B] \equiv \chi[A] \cdot \chi[B]$

(3) $\chi[\neg A] \equiv \vartheta[\chi[A]]$

Nótese que $\chi[C]$ es un término de tipo o para toda fórmula básica C.

LEMA 1.- Las siguientes fórmulas son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

(1) $0 + b^o = b^o$

(2) $0 \cdot b^o = 0$

(3) $\mathbf{S}0 \cdot b^o = b^o$

(4) $a^o + b^o = 0 \rightarrow b^o = 0$

(5) $a^o + b^o = 0 \rightarrow a^o = 0$

(6) $a^o \cdot b^o = 0 \rightarrow (a^o = 0 \vee b^o = 0)$

Demostración:

(1) De (+0) y (+S) tenemos

$$(1.1) \ldots\ldots \vdash 0+0=0 \qquad y \qquad \vdash 0+\mathbf{S}x^o = \mathbf{S}\,(0+x^o)$$

y por tanto

$$(1.2) \ldots\ldots \vdash 0+x^o = x^o \rightarrow 0+\mathbf{S}x^o = \mathbf{S}x^o$$

Al aplicar Ind. a (1.1) y (1.2) obtenemos (1).

(2) De (·0) y (·S) tenemos

$$(2.1) \ldots\ldots \vdash 0\cdot 0=0 \qquad y \qquad \vdash 0\cdot\mathbf{S}x^o = 0\cdot x^o+0 = 0\cdot x^o$$

y por tanto

$$(2.2) \ldots\ldots \vdash 0\cdot x^o = 0 \rightarrow 0\cdot\mathbf{S}x^o = 0$$

Al aplicar Ind. a (2.1) y (2.2) obtenemos (2).

(3) De (·0) tenemos

$$(3.1) \ldots\ldots \vdash \mathbf{S}0\cdot 0=0$$

Por (·S) y (+S)

$$\mathbf{S}0\cdot\mathbf{S}x^o = \mathbf{S}0\cdot x^o+\mathbf{S}0 = \mathbf{S}\,(\mathbf{S}0\cdot x^o+0) = \mathbf{S}\,(\mathbf{S}0\cdot x^o)$$

y por tanto

$$(3.2) \ldots\ldots \vdash \mathbf{S}0 \cdot x^o = x^o \rightarrow \mathbf{S}0 \cdot \mathbf{S}x^o = \mathbf{S}x^o$$

Al aplicar Ind. a (3.1) y (3.2) se obtiene (3).

(4) De $(= 2)$, $\vdash 0 = 0$ por Exp. tenemos

$$(4.1) \ldots\ldots \vdash a^o + 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Como $a^o + \mathbf{S}x^o = \mathbf{S}(a^o + x^o)$ y $\vdash \mathbf{S}a^o = 0 \rightarrow A$, para todo término a^o y toda fórmula A tenemos que

$$(4.2) \ldots\ldots \vdash a^o + \mathbf{S}x^o = 0 \rightarrow \mathbf{S}x^o = 0$$

De (4.1) y (4.2) por el teorema de inducción implícita, tenemos (4).

(5) Se sigue fácilmente de (4).

(6) De $0 = 0$ por Exp. tenemos

$$(6.1) \qquad \vdash a^o \cdot 0 = 0 \rightarrow (a^o = 0 \lor 0 = 0)$$

Además por (4) tenemos que

$$\vdash (a^o \cdot x^o) + a^o = 0 \rightarrow a^o = 0$$

Y por $(\cdot\mathbf{S})$ se tiene que $\vdash a^o \cdot \mathbf{S}x^o = 0 \rightarrow a^o = 0$. Por medio de una inferencia Exp. se tiene que

$$(6.2) \qquad \vdash a^o \cdot \mathbb{S}x^o = 0 \to (a^o = 0 \vee \mathbb{S}x^o = 0)$$

Finalmente usando el Teorema de Inducción Implícita de (6.1) y (6.2) se obtiene (6). ■

LEMA 2.- $\vdash \left(b^o \dot{-} a^o\right) + a^o = \left(a^o \dot{-} b^o\right) + b^o$

Demostración:

Por el teorema de diferencia entera y el lema anterior tenemos

$$\left(0 \dot{-} x^o\right) + x^o = 0 + x^o = x^o \qquad \text{y} \qquad \left(x^o \dot{-} 0\right) + 0 = x^o + 0 = x^o$$

De donde se sigue que

$$(1) \ldots\ldots \vdash \left(0 \dot{-} x^o\right) + x^o = \left(x^o \dot{-} 0\right) + 0$$

De igual forma podemos obtener lo siguiente:

$$(2) \ldots\ldots \vdash \left(y^o \dot{-} 0\right) + 0 = \left(0 \dot{-} y^o\right) + y^o$$

Del teorema de diferencia entera, también se siguen

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{S}y^o \dot{-} \mathbb{S}x^o\right) + \mathbb{S}x^o &= \left(y^o \dot{-} x^o\right) + \mathbb{S}x^o = \mathbb{S}\left(\left(y^o \dot{-} x^o\right) + x^o\right) \\
\left(\mathbb{S}x^o \dot{-} \mathbb{S}y^o\right) + \mathbb{S}y^o &= \left(x^o \dot{-} y^o\right) + \mathbb{S}y^o = \mathbb{S}\left(\left(x^o \dot{-} y^o\right) + y^o\right)
\end{aligned}$$

de modo que

$$(3) \ldots\ldots \vdash \left(y^o \dot{-} x^o\right) + x^o = \left(x^o \dot{-} y^o\right) + y^o \to \left(\mathbb{S}y^o \dot{-} \mathbb{S}x^o\right) + \mathbb{S}x^o = \left(\mathbb{S}x^o \dot{-} \mathbb{S}y^o\right) + \mathbb{S}y^o$$

De (1) y (3) por el corolario del teorema de inducción tenemos finalmente que

$$\vdash \left(b^o \dot{-} a^o\right) + a^o = \left(a^o \dot{-} b^o\right) + b^o \blacksquare$$

TEOREMA (Del término característico).- Para toda fórmula básica C se tiene

(1)...................$\vdash \chi[C] = 0 \to C$

(2)...................$\vdash C \to \chi[C] = 0$

Demostración: Por inducción sobre la complejidad de C.

(1) $C \equiv a^o = b^o$

De la definición de $\chi[a^o = b^o]$ y por el lema 1 se tienen

$$\vdash \quad \chi[a^o = b^o] = 0 \to a^o \dot{-} b^o = 0$$
$$\vdash \quad \chi[a^o = b^o] = 0 \to b^o \dot{-} a^o = 0$$

Y aplicando los Lemas 1(1) y 2 se sigue que

$$\vdash a^o \dot{-} b^o = 0 \to b^o \dot{-} a^o = 0 \to a^o = b^o$$

y por lo tanto:

(1.1) .... $\vdash \chi[a^o = b^o] = 0 \to a^o = b^o$

Ahora, como $\chi[a^o = a^o] = \left(a^o \dot{-} a^o\right) + \left(a^o \dot{-} a^o\right) = 0 + 0 = 0$, se tiene que

(1.2) .... $\vdash a^o = b^o \to \chi[a^o = b^o] = 0$

(2) $C \equiv \neg A$

De $\vdash \neg(0=0) \rightarrow \vartheta[0]=0$ y $\vdash \neg(\mathbf{S}x^o=0) \rightarrow \vartheta[\mathbf{S}x^o]=0$ tenemos que

$$\vdash \neg(a^o=0) \rightarrow \vartheta[a^o]=0$$

Por H.I. se tiene $\vdash \chi[A]=0 \rightarrow A$ ó, lo que es lo mismo, $\vdash \neg A \rightarrow \neg(\chi[A]=0)$ de donde se sigue que

$$\vdash \quad \neg A \rightarrow \vartheta[\chi[A]]=0$$

$$(2.1) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash \quad \neg A \rightarrow \chi[\neg A]=0$$

De $\vdash \vartheta[0]=0 \rightarrow \neg(0=0)$ y $\vdash \vartheta[\mathbf{S}x^o]=0 \rightarrow \neg(\mathbf{S}x^o=0)$ se sigue que

$$\vdash \vartheta[a^o]=0 \rightarrow \neg(a^o=0)$$

Por H.I. tenemos que $\vdash A \rightarrow \chi[A]=0$ o, lo que es lo mismo, $\vdash \neg(\chi[A]=0) \rightarrow \neg A$, de esto y de lo anterior se sigue que

$$\vdash \quad \vartheta[\chi[A]]=0 \rightarrow \neg A$$

$$(2.2) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash \quad \chi[\neg A]=0 \rightarrow \neg A$$

(3) $C \equiv A \vee B$

Como $\chi[A \vee B] = \chi[A] \cdot \chi[B]$, por el Lema 1(2)

$$\vdash \chi[A]=0 \rightarrow \chi[A \vee B]=0$$

Por H.I. tenemos que $\vdash A \rightarrow \chi[A] = 0$ y $\vdash B \rightarrow \chi[B] = 0$, y por lo anterior tenemos $\vdash A \rightarrow \chi[A \vee B] = 0$ y $\vdash B \rightarrow \chi[A \vee B] = 0$ de donde se sigue

$$(3.1) \ldots\ldots\ldots \vdash (A \vee B) \rightarrow \chi[A \vee B] = 0$$

Del Lema 1 (6) se sigue que

$$\vdash \chi[A] \cdot \chi[B] = 0 \rightarrow (\chi[A] = 0 \vee \chi[B] = 0)$$

Por H.I. tenemos $\vdash \chi[A] = 0 \rightarrow A$ y $\vdash \chi[B] = 0 \rightarrow B$, y como por definición $\chi[A \vee B] = \chi[A] \cdot \chi[B]$, se tiene que

$$(3.2) \ldots\ldots\ldots \vdash \chi[A \vee B] = 0 \rightarrow (A \vee B) \blacksquare$$

COROLARIO.- $\vdash \chi[A] = S0 \rightarrow (A \rightarrow B)$, para cualesquiera fórmulas básicas A y B.

Demostración:

Por el Teorema anterior, tenemos que para toda fórmula A, $\vdash A \rightarrow \chi[A] = 0$ y por lo tanto

$$\vdash \chi[A] = S0 \rightarrow (A \rightarrow S0 = 0)$$

y como para toda fórmula B, $\vdash S0 = 0 \rightarrow B$ tenemos el resultado deseado. $\blacksquare$

3.4 Consistencia de $\mathcal{FTF}$

Durante esta sección se definirá un concepto de verdad para fórmulas cerradas (es decir fórmulas en las que no figuran variables) de $\mathcal{FTF}$ que eventualmente terminará por demostrar la consistencia del sistema. Nótese que el concepto de verdad[4] definido en lo que sigue solamente

[4]Y por ende la consitencia del sitema.

descansa en la decibilidad efectiva del predicado de igualdad, la cual a su vez está basada en la existencia y unicidad de formas normales.

Para comenzar recordemos que una fórmula es cerrada syss no contiene variables.

DEFINICIÓN (Recursiva de fórmula verdadera).

(1) Una fórmula cerrada $a^\tau = b^\tau$ es verdadera syss a^τ y b^τ tienen la misma forma normal.

(2) Una fórmula cerrada $\neg A$ es verdadera syss A no lo es.

(3) Una fórmula cerrada $A \vee B$ es verdadera syss A es verdadera o B es verdadera.

LEMA.- Si dos funcionales a^τ y b^τ tienen la misma forma normal, entonces una fórmula cerrada $\mathcal{F}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{F}[b^\tau]$ lo es.

Demostración: Por inducción sobre la complejidad de $\mathcal{F}[a^\tau]$.

(1) Sea $\mathcal{F}[a^\tau] \equiv c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau} = d^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau}$ y $\mathcal{F}[b^\tau] \equiv c^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau} = d^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau}$ por el teorema de sustitución en términos, los funcionales $c^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau}$ y $d^\sigma\binom{a^\tau}{x^\tau}$ tienen la misma forma normal que los funcionales $c^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau}$ y $d^\sigma\binom{b^\tau}{x^\tau}$, y por lo tanto $\mathcal{F}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{F}[b^\tau]$ lo es.

(2) Sean $\mathcal{F}[a^\tau] \equiv \neg\mathcal{G}[a^\tau]$ y $\mathcal{F}[b^\tau] \equiv \neg\mathcal{G}[b^\tau]$, por H.I. $\mathcal{G}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{G}[b^\tau]$ es verdadera y por lo tanto $\mathcal{F}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{F}[b^\tau]$ lo es.

(3) Sea $\mathcal{F}[a^\tau] \equiv \mathcal{G}[a^\tau] \vee \mathcal{H}[a^\tau]$ y $\mathcal{F}[b^\tau] \equiv \mathcal{G}[b^\tau] \vee \mathcal{H}[b^\tau]$. En este caso $\mathcal{F}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{G}[a]$ es verdadera o $\mathcal{H}[a^\tau]$ es verdadera.. Por H.I. tenemos que lo anterior sucede syss $\mathcal{G}[b^\tau]$ es verdadera o $\mathcal{H}[b^\tau]$ es verdadera, y esto, por la definición de fórmula verdadera, se tiene syss $\mathcal{F}[b^\tau]$ es verdadera. ■

TEOREMA.- Toda fórmula cerrada deducible es verdadera.

Demostración: Supongamos C cerrada y $\vdash^n C$. Procederemos por inducción sobre n.

Caso base $n = 0$

(1.1) Sea C un axioma (AX_K), (AX_S), (AX_{J0}) ó (AX_{JS})

En este caso C es una ecuación $c^\tau = d^\tau$ para la que $c^\tau \rhd_1 d^\tau$, y por lo tanto C es verdadera.

(1.2) Sea C una axioma $(AX_{\mathbf{S}uc})$

Aquí $\neg(\mathbf{S}a^o = 0)$ es verdadera syss $\mathbf{S}a^o = 0$ no lo es. Pero la forma normal de $\mathbf{S}a^o$ es de la forma $\mathbf{S}b^o$ donde $b^o \in CNF_o$ y $a^o \rhd b^o$ y por lo tanto trivialmente $\mathbf{S}a^o$ y 0 no tienen la misma forma normal.

(1.3) Sea C un axioma $(AX_=)$

$C \equiv a^\tau = b^\tau \rightarrow \mathcal{F}[a^\tau] \rightarrow \mathcal{F}[b^\tau]$. Si $a^\tau = b^\tau$ no es verdadera, entonces a partir de la definición C es trivialmente verdadera. Si $a^\tau = b^\tau$ es verdadera, por el lema anterior se sigue que $\mathcal{F}[a^\tau]$ es verdadera syss $\mathcal{F}[b^\tau]$ lo es, y por lo tanto, con base en la definición, de cualquier forma se tiene que C es verdadera.

Paso Inductivo, supongamos cierta la afimación para toda $k < n$

(2.1) Sea $\vdash^n C \equiv A \vee B$ obtenida por expansión a partir de una fórmula cerrada y deducible A. Por H.I. A es verdadera y, por ende, también C lo es.

(2.2) Sea $\vdash^n C$ obtenida por contracción de una fórmula cerrada y deducible $C \vee C$. Por H.I. $C \vee C$ es verdadera, de donde se sigue que C es verdadera.

(2.3) Sea $\vdash^n C \equiv A \vee (B \vee D)$ obtenida por asociatividad de una fórmula cerrada y deducible $(A \vee B) \vee D$. Por H.I. $(A \vee B) \vee D$ es verdadera de donde A es verdadera ó B es verdadera ó D lo es, y por lo tanto C es verdadera.

(2.4) Sea $\vdash^n C$ mediante un corte. Digamos que $\vdash^n C$ provino de $\vdash^{n_1} A \vee B$ y $\vdash^{n_2} \neg A \vee D$, y que $C \equiv B \vee D$, donde $n = \max(n_1, n_2) + 1$. Por H.I. $A \vee B$ y $\neg A \vee B$ son verdaderas: Si A es verdadera, entonces $\neg A$ no lo es, de donde D es verdadera. Si A no es verdadera, entonces B es verdadera. En cualquiera de los casos se tiene que $B \vee D$ es verdadera.

(2.5) Sea $\vdash^n C$ obtenida por Inducción. Supongamos que $C \equiv \mathcal{F}[a^o]$ se obtuvó por inducción a partir de $\vdash^{n_1} \mathcal{F}[0]$ y $\vdash^{n_2} \mathcal{F}[x^o] \rightarrow \mathcal{F}[\mathbb{S}x^o]$, donde $n = \max(n_1, n_2) + 1$. Por el teorema de sustitución para fórmulas se sigue que para toda $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\vdash^{n_2} \mathcal{F}[N_m] \rightarrow \mathcal{F}[N_{m+1}]$. Por H.I. tanto $\mathcal{F}[0]$ como $\mathcal{F}[N_m] \rightarrow \mathcal{F}[N_{m+1}]$ son fórmulas verdaderas. Por inducción sobre m en la metateoría tenemos que $\mathcal{F}[N_r]$ es verdadera para todo numeral N_r. Ahora, como la forma normal de a^o es un numeral (pues C es cerrada), al aplicar el resultado anterior se tiene que C es verdadera. ■

Observación: La conversa del teorema anterior no necesariamente es cierta, pues

$$J_o\,(\mathbb{S}0)\mathbb{S} = \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}0 = 0$$

es una fórmula cerrada verdadera y no deducible. Sin embargo, toda ecuación cerrada verdadera es deducible en $\mathcal{FTF}$. Esto se sigue del hecho de que toda ecuación $a^\tau = b^\tau$ tal que $a^\tau \rhd b^\tau$ es deducible en $\mathcal{FTF}$.

COROLARIO.- El sistema $\mathcal{FTF}$ es absolutamente consistente (i.e. no toda fórmula es deducible).

Demostración: La formula $\mathbb{S}0 = 0$ no es verdadera y por el teorema anterior no es deducible en $\mathcal{FTF}$. ■

Capítulo 4

INTERPRETACIÓN DE $\mathcal{AP}$ EN $\mathcal{FTF}$

4.1 El Sistema Formal $\mathcal{AP}$

En esta sección definiremos un sistema formal $\mathcal{AP}$ (Aritmética de Peano) para la aritmética clásica en el que varios de los resultados importantes de la teoría de los números pueden ser formalizados.

4.1.1 Símbolos Primitivos de $\mathcal{AP}$

1.- Un número numerable de variables *libres* y de variables *acotadas*.

2.- Los símbolos $0, \mathbf{S}, +, \cdot, =, \vee, \neg$ y $\forall$

3.- Parentesis redondos.

4.1.2 Términos y Fórmulas de $\mathcal{AP}$

DEFINICIÓN (de término).

1.- El símbolo 0 es un término.

2.- Toda variable libre es un término.

3.- Si t es un término, entonces $\mathbf{S}t$ también es un término.

4.- Si s y t son términos, entonces $(s+t)$ y $(s \cdot t)$ son términos.

5.- Sólo son términos aquellas cadenas de símbolos generadas por un número finito de aplicaciones de las cláusulas 1 a 4.

Por brevedad se omitirán en varias ocasiones los paréntesis exteriores, bajo la convención de que $\cdot$ tiene precedencia sobre $+$. Así $s \cdot t + r$ denota a $((s \cdot t) + r)$.

Símbolos Sintácticos:

u, u_i, v, v_i	para variables libres
x, x_i, y, y_i	para variables acotadas
s, s_i, t, t_i	para términos

DEFINICIÓN (de fórmula).

1.- Si s y t son términos entonces $s = t$ es una fórmula.

2.- Si A y B son fórmulas, entonces también los son $\neg A$ y $(A \vee B)$.

3.- Si $\mathcal{F}[u]$ es una fórmula en la que no figura la variable acotada x, entonces $\forall x \mathcal{F}[x]$ es una fórmula.

4.- Sólo son fórmulas aquellas cadenas de símbolos generadas por un número finito de aplicaciones de las cláusulas 1 a 3.

Las formas Nominales se definen en su forma usual[1] y se denotaran por lo general con la siguiente tipografia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$.

4.1.3 Convenciones y Abreviaturas en $\mathcal{AP}$

Además de los símbolos del lenguaje introducimos los símbolos $\rightarrow, \wedge, \leftrightarrow, \exists$, como abreviaturas:

1.- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

2.- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

[1] Para la definición vease al principio del Capítulo 2.

3.- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

4.- $\exists x \equiv \neg \forall x \neg$

4.1.4 Axiomas Lógicos de $\mathcal{AP}$

1.- Axioma Proposicional: $A \vee A$

2.- Axioma de Sustitución: $\forall x \mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[t]$

3.- Axioma de Identidad: $u = u$

4.- Axioma de Igualdad: $s = t \to \mathcal{F}[s] \to \mathcal{F}[t]$

4.1.5 Axiomas Matemáticos de $\mathcal{AP}$

$PA_1 : \neg(\mathbf{S}x = 0)$

$PA_2 : \mathbf{S}x = \mathbf{S}y \to x = y$

$PA_3 : x + 0 = x$

$PA_4 : x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$

$PA_5 : x \cdot 0 = 0$

$PA_6 : x \cdot \mathbf{S}y = (x \cdot y) + x$

4.1.6 Reglas de Inferencia de $\mathcal{AP}$

1.- Expansión: $A \vee B$ de A

2.- Contracción: A de $A \vee A$

3.- Asociativa: $(A \vee B) \vee C$ de $A \vee (B \vee C)$

4.- Corte: $B \vee C$ de $A \vee B$ y $\neg A \vee C$

5.- $\forall$-Introducción: $\forall x \mathcal{F}[x]$ de $\mathcal{F}[u]$, siempre que la variable acotada x no figure en $\mathcal{F}[u]$.

6.- Inducción: $\mathcal{F}[t]$ de $\mathcal{F}[0]$ y $\mathcal{F}[u] \to \mathcal{F}[\mathbf{S}u]$, siempre que la variable libre u no figure en la forma nominal $\mathcal{F}$.

4.2 Algunas Convenciones en $\mathcal{FTF}$

Para poder dar una interpretación de las formulas de $\mathcal{AP}$ en $\mathcal{FTF}$, debemos adoptar una serie de convenciones en la notación que presentamos en lo que sigue.

4.2.1 Sucesiones de Términos de $\mathcal{FTF}$.

En este capítulo trataremos de omitir el uso de superíndices siempre y cuando esto no se preste a confusiones. Si t_1 y t_2 son términos de $\mathcal{FTF}$, entonces deberá entenderse que en la expresión t_1t_2 los tipos de los términos t_1 y t_2 *encajan correctamente*.

Cambiaremos el uso de los símbolos sintàcticos en $\mathcal{FTF}$. De esta forma usaremos a los símbolos $x, x_i, y, y_i, z, z_i, w, w_i$ para denotar sucesiones finitas, posiblemente vacías, de variables distintas del sistema $\mathcal{FTF}$. De igual forma a, a_i, b, b_i, c, c_i denotan sucesiones finitas, posiblemente vacías de términos de $\mathcal{FTF}$. A veces denotaremos por "x, y" a la concatenación de las sucesiones x y y en ese orden. Si a denota a una sucesión de términos $a_1^{\sigma_1\cdots\sigma_m\tau_1}, \cdots, a_n^{\sigma_1\cdots\sigma_m\tau_n}$ y b a una sucesión de términos $b_1^{\sigma_1}, \cdots, b_m^{\sigma_m}$, entonces denotaremos por $a\,(b)$ a la sucesión de términos $a_1b_1\cdots b_m, \ldots, a_nb_1\cdots b_m$ con tipos $\tau_1, \cdots, \tau_n$ respectivamente. Por brevedad siempre que b esté denotado con un sólo símbolo escribiremos ab en lugar de $a\,(b)$.

Por $a = b$ entenderemos una sucesión de ecuaciones $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$. Obviamente el número de elementos de las sucesiones a y b deberá coincidir y los tipos de a_i y de b_i deberán ser los mismos para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Dadas dos sucesiones de términos $a \equiv a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$ y $b \equiv b_1^{\tau_1}, \cdots, b_n^{\tau_n}$, denotamos con $D\,[c^o, a, b]$ a la sucesión de términos dada por $D_{\tau_1}\,[c^o, a_1^{\tau_1}, b_1^{\tau_1}], \cdots, D_{\tau_n}\,[c^o, a_n^{\tau_n}, b_n^{\tau_n}]$. Usando $(D0)$ y (DS) tenemos que las sucesiones de fórmulas:

$$c^o = 0 \to D\,[c^o, a, b] = a \qquad y \qquad c^o = \mathrm{S}u^o \to D\,[c^o, a, b] = b$$

son deducibles en $\mathcal{FTF}$.

DEFINICIÓN (de comparabilidad).- Sean $a \equiv a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$ y $b \equiv b_1^{\sigma_1}, \cdots, b_m^{\sigma_m}$. Decimos que la sucesión a es comparable con la sucesión b ($a \sim b$) syss $n = m$ y $\tau_i = \sigma_i$ para toda

$i \in \{1, \cdots, n\}$. En particular se tiene en el caso en que a y b son sucesiones vacías.

LEMA 1.- Si a y b son dos sucesiones con el mismo número de términos, entonces existe una sucesión de variables x tal que xab.
Demostración: Sean $a \equiv a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$ y $b \equiv b_1^{\sigma_1}, \cdots, b_n^{\sigma_n}$. Si $x \equiv x_1^{\tau_1 \cdots \tau_n \sigma_1}, \cdots, x_n^{\tau_1 \cdots \tau_n \sigma_n}$, entonces por definición xab. ■

LEMA 2.- Si dadas k sucesiones $x_1, \cdots, x_k$ de variables distintas y una sucesión de términos a, entonces existe una sucesión de términos b que no contiene variables de la sucesión $x_1, \cdots, x_k$ tal que:

$$\vdash bx_1 \cdots x_k = a$$

Demostración.- Si $x_1, \ldots, x_k$, es la sucesión de variables $y_1^{\sigma_1}, \cdots, y_m^{\sigma_m}$ y a es la sucesión $a_1^{\tau_1}, \cdots, a_n^{\tau_n}$, entonces definimos una sucesión de términos b como sigue

$$b \equiv \lambda y_1^{\sigma_1} \cdots y_m^{\sigma_m} a_1^{\tau_1}, \ldots, \lambda y_1^{\sigma_1} \cdots y_m^{\sigma_m} a_n^{\tau_n}$$

y como el lector puede verificar, por el teorema de abstracción-λ, se tiene $\vdash bx_1 \cdots x_k = a$ ■

4.2.2 Fórmulas Generalizadas de $\mathcal{FTF}$.

Una fórmula generalizada es una expresión $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \cdots \exists y_n A$. Donde la variables que figuran en $x_1, \cdots, x_m$, $y_1, \cdots, y_n$ son todas distintas y A es una fórmula de $\mathcal{FTF}$. Obviamente una fórmula generalizada no es una expresión del sistema $\mathcal{FTF}$ pero es claro lo que se pretende decir con ella. Siguiendo las convenciones habituales para sucesiones de variables escribiremos expresiones de la forma $\forall x \exists y A$ para denotar a las formulas generalizadas de $\mathcal{FTF}$, donde x y y son sucesiones de variables distintas.

Para homogenizar la notación, por lo general escribiremos $\forall x \exists y \mathcal{F}[x, y]$ para denotar una fórmula generalizada, donde $\mathcal{F}$ es una forma nominal en la que no figuran variables de las sucesiones x e y. Adoptaremos la convención de que dos fórmulas generalizadas son la misma si sólo difieren entre ellas por la elección de sus variables cuantificadas. Siguiendo estas convenciones tenemos que dos fórmulas generalizadas siempre se pueden escribir como $\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{F}[x_1, y_1]$ y $\forall x_2 \exists y_2 \mathcal{G}[x_2, y_2]$, donde las variables que figuran en la sucesión x_1, x_2, y_1, y_2 son todas distintas y no figuran ni en $\mathcal{F}$ ni en $\mathcal{G}$.

4.3 Interpretación de $\mathcal{AP}$ en $\mathcal{FTF}$.

4.3.1 Fórmulas de Interpretación

DEFINICIÓN (de fórmula de interpretación[2]).- Para cada formula F del sistema $\mathcal{AP}$ se define una formula generalizada F^* (la fórmula de interpretación de F) de $\mathcal{FTF}$ como sigue:

1.- Si F es una ecuación $s = t$, entonces F^* es la misma ecuación, donde s y t deben ser entendidos como términos de tipo o.

2.- Si F es una fórmula $\neg A$ y A^* es la fórmula cuantificada $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y]$, entonces F^* es $\forall y_1 \exists x \neg \mathcal{A}[x, y_1(x)]$, donde y_1 es una nueva sucesión de variables de los tipos apropiados.[3]

3.- Si F es una fórmula $A \vee B$ donde A^* es $\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1]$ y B^* es $\forall x_2 \exists y_2 \mathcal{B}[x_2, y_2]$, entonces se define F^* como $\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 (\mathcal{A}[x_1, y_1] \vee \mathcal{B}[x_2, y_2])$ donde las variables en la sucesión x_1, x_2, y_1, y_2 son todas distintas.

4.- Si F es una fórmula $\forall x \mathcal{F}[x]$, donde la variable acotada x no figura en $\mathcal{F}$, u es una variable libre que tampoco figura en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}[u]^*$ está dada por la fórmula de interpretación $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, u]$, donde u no figura en la forma nominal $\mathcal{A}$ y es distinta de las variables que figuran en las sucesiones x y y, entonces definimos F^* como $\forall u \forall x \exists z \mathcal{A}[x, y, u]$.

[2]Como se señala en el Capítulo 1, esta variante de la interpretación de Gödel se debe a Shoenfield (1967).

[3]Nótese que en el apartado 2, la eleccción de la sucesión y_1 es siempre posible como consecuencia del Lema 1 de la sección 4.2.1. Aunque no es necesario dar una justificación para la elección de la fórmula de $(\neg B)^*$, esta puede ser motivada por el siguiente axioma de elección:

$$(AE) \qquad \forall x \exists y \mathcal{F}[x, y] \rightarrow \exists z \forall x \mathcal{F}[x, z(x)]$$

PROPOSICIÓN.- Si A es una formula de $\mathcal{AP}$ sin cuantificadores (a las fórmulas sin cuantificadores les llamaremos *abiertas*), entonces A^* es A.
Demostración: Por inducción sobre la complejidad de A

1.- Si A es de la forma $s = t$, entonces por definición A^* es A.

2.- Si A es de la forma $B \vee C$, entonces por H.I. que B^* es B y C^* es C. Por lo tanto $(B \vee C)^*$ es $B \vee C$.

3.- Si A es de la forma $\neg B$, entonces por H.I. B^* es B y por lo tanto $(\neg B)^*$ es $\neg B$.

Por lo que para toda fórmula abierta A de $\mathcal{AP}$ se tiene que A^* es A ■

4.3.2 Validez

DEFINICIÓN (de validez).- Una formula de interpretación $\forall x \exists y \mathcal{F}[x, y]$ se dice que es *válida* syss existe una sucesión a de términos de $\mathcal{FTF}$, tal que $\vdash \mathcal{F}[x, a]$.[4]

4.4 Consistencia de $\mathcal{AP}$.

En ésta sección demostraremos que $\mathcal{AP}$ es consistente. Primero enunciaremos el Teorema de Interpretación y demostraremos la consistencia de $\mathcal{AP}$ como un corolario de éste. Después de probar el corolario se dará la demostración del Teorema de Interpretación.

TEOREMA (de Interpretación).-. Si F es una fórmula deducible en $\mathcal{AP}$, entonces su fórmula de interpretación F^* es válida.

COROLARIO.- El sistema formal $\mathcal{AP}$ es consistente, es decir, no existe una fórmula A en $\mathcal{AP}$, tal que A y $\neg A$ sean ambas deducibles en $\mathcal{AP}$.

[4] Esta definición de validez basada en exhibir los objetos acerca de los cuales se asegura la existencia, es una de las caracteristicas que hacen de la interpretación de Gödel una herramienta tan apreciada dentro del ámbito de las matemáticas constructivas.

Demostración.- Si $F \equiv S0 = 0$, entonces por el corolario de la pàgina 59 (consistencia de $\mathcal{FTF}$) tenemos que F no es deducible en $\mathcal{FTF}$, y como $F^* \equiv F$, se tiene que F^* no es válida, de donde se sigue del teorema anterior que F no puede ser deducible en $\mathcal{AP}$. Supongamos que existe un fórmula A tal que $\mathcal{AP} \vdash A$ y $\mathcal{AP} \vdash \neg A$, en consecuencia en $\mathcal{AP}$ se tiene la siguiente deducción:

$\vdash A \vee S0 = 0$.........................por Expansión.

$\vdash \neg A \vee S0 = 0$.....................por Expansión.

$\vdash S0 = 0 \vee S0 = 0$................por Corte.

$\vdash S0 = 0$..............................por Contracción.

lo que es una contradicción (ya que F no es deducible), y por lo tanto $\mathcal{AP}$ es consistente. ■

Demostración del Teorema de Interpretación.[5]

Procedemos por inducción sobre los teoremas de $\mathcal{AP}$.

I.- Interpretación de los Axiomas Lógicos.

1.1 F es un axioma proposicional $\neg A \vee A$.

Si A^* es la fórmula de interpretación $\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1]$, entonces después de un cambio de variables, $(\neg A)^*$ es $\forall y_2 \exists x_2 \neg \mathcal{A}[x_2, y_2(x_2)]$ y F^* es

$$\forall x_1 \forall y_2 \exists y_1 \exists x_2 (\mathcal{A}[x_1, y_1] \vee \neg \mathcal{A}[x_2, y_2(x_2)])$$

Debemos hallar sucesiones de términos a y b tales que:

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{A}[x_1, a] \vee \neg \mathcal{A}[b, y_2(b)]$$

Si tomamos a a como $y_2(x_1)$ y a b como x_1, entonces

$\mathcal{A}[x_1, a] \vee \neg \mathcal{A}[b, y_2(b)]$ es la fórmula $\mathcal{A}[x_1, y_2(x_1)] \vee \neg \mathcal{A}[x_1, y_2(x_1)]$

[5] Durante la presente demostración se harà referencia constante a los resultados alcanzados en la sección 3.3.

que por el teorema del tercero excluido es deducible en $\mathcal{FTF}$.

I.2 F es un axioma de sustitución $\forall x \mathcal{F}[x] \rightarrow \mathcal{F}[t]$

Si $(\forall x \mathcal{F}[x])^*$ es la fórmula cuantificada $\forall u \forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1, u]$, entonces $(\neg \forall x \mathcal{F}[x])^*$ es

$$\forall y_2 \exists u \exists x_1 \neg \mathcal{A}[x_1, y_2(u, x_1), u]$$

y $\mathcal{F}[t]^*$ es

$$\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, t]$$

y por tanto F^* es

$$\forall y_2 \forall x \exists u \exists x_1 \exists y (\neg \mathcal{A}[x_1, y_2(u, x_1), u] \vee \mathcal{A}[x, y, t])$$

Debemos hallar sucesiones de términos b y c, y un término a^o tales que:

$$(1) \ldots\ldots \neg \mathcal{A}[b, y_2(a^o, b), a^o] \vee \mathcal{A}[x, c, t]$$

sea deducible en $\mathcal{FTF}$.

Si tomamos a^o como t, b como x y c como $y_2(t, x)$, entonces (1) es la fórmula:

$$\neg \mathcal{A}[x, y_2(t, x), t] \vee \mathcal{A}[x, y_2(t, x), t]$$

que por el teorema del tercero excluido es deducible en $\mathcal{FTF}$.

I.3 $\quad F$ **es un axioma de identidad** $\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Como F es abierta entonces F^* es F, y por $(=2)$, es deducible en $\mathcal{FTF}$.

I.4 $\quad F$ es un axioma de igualdad $s = t \rightarrow \mathcal{F}[s] \rightarrow \mathcal{F}[t]$

Si $\mathcal{F}[s]^*$ es la fórmula $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, s]$ y $\mathcal{F}[t]^*$ la fórmula $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, t]$, entonces $\neg \mathcal{F}[s]^*$ es $\forall y_1 \exists x_1 \neg \mathcal{A}[x_1, y_1(x_1), s]$ y por lo tanto $(\mathcal{F}[s] \rightarrow \mathcal{F}[t])^*$ es

$$\forall y_1 \forall x \exists x_1 \exists y (\neg \mathcal{A}[x_1, y_1(x_1), s] \vee \mathcal{A}[x, y, t])$$

y en consecuencia F^* es

$$\forall y_1 \forall x \exists x_1 \exists y (\neg s = t \vee \neg \mathcal{A}[x_1, y_1(x_1), s] \vee \mathcal{A}[x, y, t])$$

Debemos hallar términos a y b tales que

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \neg s = t \vee \neg \mathcal{A}[a, y_1(a), s] \vee \mathcal{A}[x, b, t]$$

sea deducible en $\mathcal{FTF}$. Tomando a como x y b como $y_1(x)$ la fórmula (1) es

$$\neg s = t \vee \neg \mathcal{A}[x, y_1(x), s] \vee \mathcal{A}[x, y_1(x), t]$$

que es un axioma de igualdad y por tanto deducible en $\mathcal{FTF}$.

II.- Interpretación de los Axiomas Matemáticos.

Si F es un axioma $PA_1 - PA_6$, entonces, como F es abierta, F^* (que es F) es una fórmula que por los resultados del capítulo anterior (sección 3.3) es deducible en $\mathcal{FTF}$.

III.- Interpretación de las Inferencias de $\mathcal{AP}$.

III.1 Expansión.- $F \equiv A \vee B$ obtenida a partir de A.

Si A^* es $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y]$ y B^* es $\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{B}[x_1, y_1]$, entonces por H.I. A^* es válida y existe una sucesión de términos a tal que:

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{A}[x, a]$$

Ahora, por Expansión en $\mathcal{FTF}$, si tomamos una sucesión cualquiera de términos b con los tipos apropiados y tal que $y_1 \sim b$, entonces tenemos

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{A}[x, a] \vee \mathcal{B}[x_1, b]$$

de donde F^* que es $\forall x \forall x_1 \exists y \exists y_1 (\mathcal{A}[x, y] \vee \mathcal{B}[x_1, y_1])$, es válida.

III.2 Contracción.- F inferida a partir de $F \vee F$.

Si F^* es $\forall x \exists y \mathcal{F}[x, y]$, entonces $(F \vee F)^*$ que es

$$\forall x \forall x_1 \exists y \exists y_1 (\mathcal{F}[x, y] \vee \mathcal{F}[x_1, y_1])$$

es válida, y por lo tanto existen sucesiones de términos a y b tales que

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{F}[x, a] \vee \mathcal{F}[x_1, b]$$

Sustituyendo x por x_1 en lo anterior se tiene que

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{F}[x_1, a] \vee \mathcal{F}[x_1, b]$$

Si definimos una sucesión de términos c por casos como sigue:

$$c \equiv D\left[\chi\left[\mathcal{F}[x_1, a]\right], a, b\right]$$

entonces se tiene que $\vdash \chi\left[\mathcal{F}[x_1, c]\right] = 0$ y, por el Teorema del **término característico** se infiere que que $\vdash \mathcal{F}[x_1, c]$.

III.3 Asociativa.- F es $(A \vee B) \vee C$, inferida de $A \vee (B \vee C)$.

Si A^* , B^* y C^* son las fórmulas

$$\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1]$$
$$\forall x_2 \exists y_2 \mathcal{B}[x_2, y_2]$$
$$\forall x_3 \exists y_3 \mathcal{C}[x_3, y_3]$$

respectivamente, entonces F^* es

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \left(\left(\mathcal{A}[x_1, y_1] \vee \mathcal{B}[x_2, y_2]\right) \vee \mathcal{C}[x_3, y_3]\right)$$

por H.I. existen sucesiones de términos a, b, y c tales que

$$\mathcal{FTF} \vdash \mathcal{A}[x_1, a] \vee \left(\mathcal{B}[x_2, b] \vee \mathcal{C}[x_3, c]\right)$$

que por Asociatividad en $\mathcal{FTF}$ implica que

$$\mathcal{FTF} \vdash (\mathcal{A}[x_1, a] \vee \mathcal{B}[x_2, b]) \vee \mathcal{C}[x_3, c]$$

III.4 Corte.- F es $B \vee C$, obtenida de $A \vee B$ y de $\neg A \vee C$

Si A^* , B^* y C^* son las fórmulas

$$\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1]$$
$$\forall x_2 \exists y_2 \mathcal{B}[x_2, y_2]$$
$$\forall x_3 \exists y_3 \mathcal{C}[x_3, y_3]$$

entonces $(A \vee B)^*$ es

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 (\mathcal{A}[x_1, y_2] \vee \mathcal{B}[x_2, y_2])$$

y $(\neg A \vee C)^*$ es

$$\forall y_1' \forall x_3 \exists x_1 \exists y_3 (\neg \mathcal{A}[x_1, y_1'(x_1)] \vee \mathcal{C}[x_3, y_3])$$

Por H.I. existen sucesiones de términos $a_1, a_2, b_1,$ y b_2 tales que en $\mathcal{FTF}$

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad \mathcal{A}[x_1, a_1] \vee \mathcal{B}[x_2, a_2]$$
$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad \vdash \quad \neg \mathcal{A}[b_1, y_1'(b_1)] \vee \mathcal{C}[x_3, b_2]$$

por el Lema 2 podemos encontrar una sucesión de términos c en la que no figuran variables de la sucesión x_1, x_2 tal que

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \vdash c x_2 x_1 = a_1$$

que por (1) y (3)

$$(4) \ldots\ldots\ \vdash \mathcal{A}[x_1, cx_2x_1] \vee \mathcal{B}[x_2, a_2]$$

Si sustituimos y'_1 por cx_2 en (2), entonces tenemos que

$$(5) \ldots\ldots\ \vdash \neg\mathcal{A}[b_1, cx_2b_1] \vee \mathcal{C}[x_3, b_3]$$

y si sustituimos x_1 por b_1 en (4), se sigue que

$$(6) \ldots\ldots\ \vdash \mathcal{A}[b_1, cx_2b_1] \vee \mathcal{B}[x_2, a_2]$$

Por lo que aplicando Corte a (6) y (5) se obtiene que

$$\vdash \mathcal{B}[x_2, a_2] \vee \mathcal{C}[x_3, b_3]$$

y puesto que F^* es

$$\forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \exists y_3 (\mathcal{B}[x_2, y_2] \vee \mathcal{C}[x_3, y_3])$$

se tiene que F^* es válida.

III.5 $\forall$-Introducción.- F es $\forall x \mathcal{F}[x]$, obtenida de $\mathcal{F}[u]$, donde la variable acotada x no figura en $\mathcal{F}[u]$.

Si $(\mathcal{F}[u])^*$ es la fórmula

$$\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1, u]$$

entonces F^* es

$$\forall u \forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1, u]$$

Pero como debido a que por H.I. $\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1, u]$ es válida, entonces existe una sucesión de términos a, tal que

$$\vdash \mathcal{A}[x_1, a, u]$$

y por tanto F^* es válida.

III.6 Inducción.- F es $\mathcal{F}[t]$, inferida de $\mathcal{F}[0]$ y de $\mathcal{F}[u] \rightarrow \mathcal{F}[\mathbf{S}u]$

Si $\mathcal{F}[0]^*$ es la fórmula

$$\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, 0]$$

entonces por H.I. existe una sucesión de términos a_1 tal que

$$(1) \ldots\ldots\ldots \vdash \mathcal{A}[x, a_1, 0]$$

Si $\mathcal{F}[u]^*$ y $\mathcal{F}[\mathbf{S}u]^*$ las fórmulas

$$\forall x_1 \exists y_1 \mathcal{A}[x_1, y_1, u] \quad \text{y} \quad \forall x_2 \exists y_2 \mathcal{A}[x_2, y_2, \mathbf{S}u]$$

respectivamente, entonces $(\mathcal{F}[u] \rightarrow \mathcal{F}[\mathbf{S}u])^*$ es la fórmula

$$\forall y_1' \forall x_2 \exists x_1 \exists y_2 \left(\mathcal{A}[x_1, y_1'(x_1), u] \rightarrow \mathcal{A}[x_2, y_2, \mathbf{S}u]\right)$$

Sabemos por H.I. que existen sucesiones de términos a_2 y a_3 tales que

$$(2) \ldots\ldots\ldots \vdash \mathcal{A}[a_2, y_1'(a_2), u] \rightarrow \mathcal{A}[x_3, a_3, \mathbf{S}u]$$

Ahora bien, por el lema 2, podemos encontrar una sucesión b de términos, en los que no figuran variables de la sucesión x_1 tal que

$$(3) \ldots\ldots\ldots \vdash b x_1 = a_1$$

De (1) y (3) se obtiene que

$$(4) \ldots\ldots \vdash \mathcal{A}\left[x, bx_1, 0\right]$$

ahora, sustituyendo x por x_1 en lo anterior se tiene que

$$(5) \ldots\ldots \vdash \mathcal{A}\left[x_1, bx_1, 0\right]$$

Tomemos una sucesión de términos d, tales que no figuren en ellos variables de la sucesión u, y_1', x_1 tal que

$$\vdash duy_1'x_1 = a_3$$

de esto y (2) obtenemos

$$(6) \ldots\ldots \vdash \mathcal{A}\left[a_2, y_1'\left(a_2\right), u\right] \rightarrow \mathcal{A}\left[x_3, duy_1'x_1, \mathbb{S}u\right]$$

Por el teorema de recursión simultánea sabemos que existe una sucesión de términos f tal que:

$$(7) \ldots\ldots \vdash f0 = b$$
$$(8) \ldots\ldots \vdash f\left(\mathbb{S}u\right) = du\left(fu\right)$$

De (5) y (7) se sigue

$$(9) \ldots\ldots \vdash \mathcal{A}\left[x_1, f0x_1, 0\right]$$

Por otro lado sustituyendo y_1' por fu en (6) tenemos

$$\vdash \mathcal{A}\left[a_2, fu\left(a_2\right), u\right] \rightarrow \mathcal{A}\left[x_3, du\left(fu\right)x_1, \mathbb{S}u\right]$$

de donde por (8) se sigue que

$$\vdash \mathcal{A}\left[a_2, fu\left(a_2\right), u\right] \rightarrow \mathcal{A}\left[x_3, f(\mathbb{S}u)x_1, \mathbb{S}u\right]$$

Usando de nuevo el lema 2 tomemos una sucesión g de términos en la que no figuren variables de las sucesiones u y x_1 tal que

$$\vdash gux_1 = a_2$$

por lo que

$$(11) \ldots\ldots \vdash \mathcal{A}\left[gux_1, fu\left(gux_1\right), u\right] \rightarrow \mathcal{A}\left[x_1, f(\mathrm{S}u)x_1, \mathrm{S}u\right]$$

ahora, al aplicar el Teorema de Inducción a (9) y (11), se obtiene que para todo término t de tipo o y para cualquier sucesión de variables x tal que $x \sim x_1$ se tiene que

$$\vdash \mathcal{A}\left[x, ftx, t\right]$$

Finalmente como $(\mathcal{F}[t])^*$ es una fórmula de la forma $\forall x \exists y \mathcal{A}[x, y, t]$, tenemos que $(\mathcal{F}[t])^*$ es válida. ■

Bibliografía

[1] Feferman, Salomon. **Hilbert's Program Realtivized: Proof-Theotherical and Foundational Reductions**. Journal of Simbolic Logic Vol 53, Num. 2, Junio 1988.

[2] Gödel, Kurt. **Collected Works Volume I: Publications, 1929-1936**. Editores: S. Feferman, J. W. Dawson, S. C. Kleen, G. H. Moore, R. M. Solovay, J van Heijenjoort. Oxford University Press. Oxford 1986.

[3] Gödel, Kurt. **Collected Works Volume II: Publications, 1938-1974**. Editores: S. Feferman, J. W. Dawson, S. C. Kleen, G. H. Moore, R. M. Solovay, J van Heijenjoort. Oxford University Press. Oxford 1990.

[4] Kleene, S. **Introducción a la Metamatemática**. Ed. Tecnos. Madrid 1974.

[5] Miranda, Favio. **Una Prueba de Consistencia de la Aritmética de Peano, del tipo de Gentzen**. Tesis de Licenciatura. Fac. de Ciencias UNAM, 1997.

[6] Schoenfield, Joseph. **Mathematical Logic**. Ed. Addison-Wesley, USA 1967.

[7] Shütte, Kurt. **Proof Theory**. Springer-Verlag, 1977.

[8] Tait, William W. **Intensional interpretations of functional of finite type**. Journal of Simbolic Logic 32, pp. 198-212.

[9] Torres, Carlos. **Los Teoremas de Gödel**. Tesis de Maestría. Fac. de Ciencias UNAM, 1988.

[10] Torres, Carlos. **El segundo problema de Hilbert**. Conferencia leida el el XXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Queretaro, Qro. Sin publicar.

[11] Troelstra, Anne S. **Mathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis**. Springer Lectures Notes in Mathematics no. 344. Berlin, 1973.

[12] Troelstra, Anne S. y D. van Dalen. **Constructivism in Mathematics Volume II**. Studies in Logic and The Foundations of Mathematics Vol. 123. North Holland, 1988.