36
29.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
CAMPUS ARAGON

"INTRODUCCION A LA LOGICA BORROSA Y LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS CON ALGUNAS APLICACIONES"

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACION
P R E S E N T A N :

JOSE FERNANDO LOPEZ MONTES
ALEJANDRO MEDINA GONZALEZ

ASESOR: MAT. LUIS RAMIREZ FLORES

SAN JUAN DE ARAGON EDO. DE MEXICO 1997.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primeramente al Profr. Luis Ramírez por su valiosísima ayuda en la realización de este trabajo y por sus enseñanzas que me servirán para toda la vida.

A ustedes papá y mamá, mi más profundo agradecimiento por haberme encausado y aguantado durante todo este tiempo, este logro no sería realidad sin su paciencia, cariño y dedicación, muchas gracias.

A mis hermanos, Miguel, Juan Carlos, gracias por su apoyo durante todo este tiempo.

Fer, gracias por compartir este esfuerzo conmigo y por tu paciencia y dedicación para llegar hasta el final, a ti amigo, muchas gracias.

Finalmente, y no por eso menos importantes, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mis demás amigos que nos apoyaron para realizar este trabajo, ustedes son lo mejor.

Alejandro.

Agradezco la gran ayuda que nos brindó el profesor Luis Ramírez Flores para realizar este trabajo.

A ti mamá, te agradezco todo tu apoyo, compresión y dedicación que me has brindado para salir adelante y terminar esta carrera. A ti te dedico con mucho cariño este trabajo, muchas gracias.

Facundo, te agradezco todo el apoyo que me has brindado, que aunque estes lejos, este trabajo también te lo dedico, ya que eres como un padre para mí, muchas gracias.

A ustedes hermanos, Jacqueline, Juan Carlos, Ana, Araceli, Carmela, gracias por el cariño y el apoyo que me han brindado.

Ale, gracias por compartir este trabajo que con tanto esfuerzo hemos terminado, por tu paciencia y tu apoyo. Gracias amigo.

También les agradezco a mis amigos,Argelia, Ana, Manuel, Jorge, Alfredo, Víctor y Martín, por el apoyo y su amistad que me han brindado en estos años, a quienes les dedico este trabajo.

Fernando.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A lo largo de los años hemos aprendido que las matemáticas sirven para tener precisión en las cosas. En ese afán de búsqueda de la precisión hemos intentado siempre ajustar las cosas del mundo real a modelos matemáticos precisos. Debido a lo anterior nos hemos alejado de una verdadera representación del mundo que nos rodea, es decir, aquellos modelos que hemos utilizado no están completos porque siempre queremos tomar todo en forma exacta, descartando la incertidumbre existente.

Por tanto, existe la necesidad de una teoría en cuyos conceptos se acepte la incertidumbre ("lo borroso") como parte ligada a la realidad de las cosas.

En 1965 L. A. Zadeh basándose en la lógica multivalente de Lukasiewicz introduce la noción de membresía ponderada. Un elemento entonces puede pertenecer, más o menos, a un subconjunto, y de ahí partir a un concepto fundamental, el de subconjunto borroso, como una generalización funcional de la teoria de conjuntos.

Así, la teoría borrosa es un paso al acercamiento entre la precisión deseada y la imprecisión del mundo real. La teoría borrosa maneja las matemáticas y lo borroso en forma conjunta, lo que hace que se encuentren nuevas líneas de investigación en diversos campos como: la psicología, sociología, filosofía, ciencias políticas, economía, lingüística, investigación de operaciones, administración, inteligencia artificial, y otros.

Es interesante observar que a pesar de sus múltiples aplicaciones, la teoría borrosa es poco conocida y su difusión no ha sido muy fortuita, perdiéndose así la oportunidad de conocer otra forma, y en ocasiones más adecuada, de resolver los problemas que se pueden presentar en algún momento.

Por esta razón hemos querido hacer un trabajo que sea lo más fácil de comprender, de manera que se pueda utilizar como de consulta y que no resulte tedioso y aburrido tratando de evitar tecnicismos, aunque en ocasiones esto no sea posible, de manera que resulte lo más sencillo de entender. Con esto queremos sentar un precedente que sirva como base y referencia para trabajos futuros de quienes quisieran ahondar en este interesantísimo y fascinante campo.

El presente trabajo está realizado con la finalidad de dar a conocer en forma general los principios matemáticos de la teoría borrosa, así como algunas aplicaciones actuales de esta teoría. Para ello, lo hemos dividido en seis capítulos.

El primer capítulo presenta los antecedentes de la teoría de subconjuntos borrosos. Damos a conocer algunos antecedentes que dieron lugar a la teoría borrosa, como una necesidad para representar la realidad.

El capítulo dos nos presenta las nociones básicas de la teoría de conjuntos ordinarios tales como el concepto de conjunto, relación, función, y otras, así como sus propiedades y operaciones; y las nociones sobre lógica booleana y sus operaciones, que serán necesarias para poder comprender la teoría borrosa.

En el tercer capítulo presentamos el concepto de subconjuntos borrosos, operaciones y propiedades, y el manejo de la función de membresía como parte fundamental de la teoría borrosa.

El capítulo cuatro muestra el concepto de relación y correspondencia a partir de la noción de subconjuntos borrosos, y las propiedades que poseen las relaciones.

En el capítulo cinco vemos la lógica desde el punto de vista borroso, para ello basándonos en parte de la lógica booleana.

En el capítulo seis se propone una extensión de los subconjuntos borrosos hacia una estructura muy general como lo son los reticulados.

De este modo nos introducimos poco a poco en la teoría borrosa. de manera que se comprendan los conceptos dados en cada capítulo y así ver algunas aplicaciones en las que es posible aplicarlos.

Debido a que este trabajo es sólo introductorio. las aplicaciones que presentamos no están completamente desarrolladas. sólo se aplica la teoría borrosa en la parte que lo amerita. dando así una idea general de manera que. en trabajos futuros. se pueda indagar más a fondo sobre cada aplicación.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 LA MATEMÁTICA Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

El desconocimiento de los fenómenos naturales. entre los que hay que incluir a la naturaleza humana. las relaciones entre los hombres y sus organizaciones. han producido las interrogaciones a las que la ciencia trata de responder con los métodos más seguros. con los que ofrezca una mayor garantía de que las respuestas se ajustarán a los hechos observados previamente.

Todo ello es posible debido. en principio. a la especial condición del cerebro humano y a la posesión del instrumento del lenguaje. Hay que aclarar no obstante. que los fenómenos que se dan en nuestra propia naturaleza y en el mundo exterior deben ser tal como sean. y no exactamente como se expresan. se traducen. se representan. por medio del lenguaje. En este sentido. el lenguaje natural con el que nos expresamos presenta vacíos de precisión. por una parte. y exceso de sobreentendidos. por otra: al margen en que los sentidos y el cerebro no pueden. por sí solos y sin la ayuda de la experimentación. traducir la realidad de la mayor parte de los fenómenos.

A través de los años el ser humano ha comprendido todo esto. y para satisfacer su ineludible necesidad de conocer y comprender. ha debido ayudarse de "técnicas" que precisen y depuren los procesos para llegar al conocimiento. De ahí que el estudio de la Lógica. como ciencia que intenta comprender como se produce el razonamiento. y regular sus leyes para controlar su corrección e incorrección. sea tan antigua como nuestra propia civilización.

Tenemos el lenguaje que es una superestructura en la que debemos representar el conocimiento, pero en el cual no podemos confiar totalmente. Una de las técnicas de control empleada por el ser humano desde hace mucho tiempo es la Matemática, sea en la forma de cálculos que ayuden al razonamiento, sea con el establecimiento de *Modelos Matemáticos* que permitan una explicación satisfactoria, hasta un cierto grado, de los fenómenos que se estudian.

Para "matematizar" un problema se precisa de una fase previa de conocimiento, de clasificación de sus componentes, de la ordenación de las mismas y esencialmente, del establecimiento de variables cuantificables numéricamente, evaluables o medibles, que permitan volcar sobre el problema los conocimientos, los resultados, de que la matemática dispone. Esencialmente, un modelo matemático debe traducirse hoy por hoy en ecuaciones, que permitan seguir efectuando medidas.

Para lograrlo hay que situarse en una posición desde la cual se tenga una visión de los problemas del conocimiento de naturaleza FUNCIONAL, esto es, la búsqueda de modelos mediante el uso sistemático de los recursos del análisis matemático.

De esta manera y a partir de una clasificación más o menos buena del conjunto de variables básicas dadas por las primeras evaluaciones que parezcan tener éxito, se llega a un modelo inicial que, de una parte, da las primeras relaciones entre aquellas clases de variables, generalmente traducidas por ecuaciones, y de otra parte lleva a la realización de nuevas mediciones o evaluaciones que, entre otros puntos, obliguen a rechazar otras que no se correspondan con la experimentación verificada. La realización de experimentos es esencial, debido a que comporta una simulación de los fenómenos a estudiar.

Tal experimentación produce un conocimiento empírico del comportamiento del fenómeno en condiciones bien conocidas, lo que conlleva a la perfección del modelo, el cual tarde o temprano se volverá obsoleto y deberá sustituirse por otro que explique más o mejor las cosas. Parece claro que cuantas más cosas explique el modelo tanto mejor será la "realidad" que con él *nos representemos*, aunque muchas veces un modelo más simple puede ser muy satisfactorio para iniciar el trabajo de investigación en un área dada.

En conclusión, sucede que en la "realidad" se nos escapa y que sólo tiene sentido el representarla mediante modelos en evolución y permanentemente contratados por una cierta vía experimental que comporta la "fabricación de artefactos de control", sea ésta material o puramente conceptual.

Pero además de los modelos es necesario el establecimiento, es decir, la construcción de "artefactos de evaluación", de comparación, de medida, etc. Sin tales artefactos, aparatos, escalas, etc., generalmente traducidos en números (es decir, que traducen las variables básicas en ciertos números relativos a ciertos de sus estados) por comparación con situaciones iniciales o ideales, es difícilmente controlable la confianza que puede tenerse en el modelo y, históricamente, el proceso de avance en el *dominio* del fenómeno se estanca.

Desde el punto de vista filosófico, el mayor éxito alcanzado hasta ahora está en la modelización matemática de los juegos de azar y de todos los fenómenos que se producen análogamente. Su formalización se ha realizado en el marco de la teoría de conjuntos asociada a la lógica "clásica", y el artefacto de evaluación, es decir la probabilidad.

George Boole aplicó el modelo que construye la lógica aristotélica a la fundamentación del cálculo de la probabilidades, de las medidas del azar. Había empezado, aunque los artefactos fuesen primitivos, el análisis matemático de los fenómenos involucrando IMPRECISIÓN.

Quedaban por estudiar otros tipos de fenómenos comportando imprecisión. Todo ello parece romper con el esquema de la lógica clásica pero para su análisis es preciso utilizar la matemática, que está fundada en ella.

1.2 COMENTARIOS DE LA LÓGICA BOOLEANA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Desde Aristóteles a Boole los lógicos se han preocupado del estudio de la leyes que rigen el pensamiento, tal es la creencia de que todo esta reglamentado, que se ha dado por descontado que el propio razonamiento humano sigue unas leyes descritas por los propios hombres. El estudio de dichas leyes está siguiendo una evolución paralela a la del conocimiento, siendo en el siglo pasado cuando las matemáticas empezaron a hacer acto de presencia en él.

Posiblemente es uno de los más prometedores campos de investigación de los próximos años. Además de la creencia en la posibilidad de establecer leyes lógicas y de poder efectuar su análisis matemático en base al desarrollo lógico de los últimos años.

En ciertos momentos, puede señalarse más o menos cuando en el campo de las matemáticas, se tropieza con las llamadas paradojas, aparece propiamente la *lógica matemática*, el estudio de las propiedades y las leyes de los sistemas formales a que dan origen proposiciones matemáticas como "ningún número racional tiene cuadrado igual a 2", así como el análisis de las deducciones precisas para establecer su carácter de verdad; y todo ello con los mismos métodos de las matemáticas.

1.3 VARIABLE ALEATORIA Y EXPERIMENTOS BOOLEANOS

El cálculo de probabilidades facilita al investigador o al ingeniero los modelos matemáticos que le permiten solucionar numerosos problemas. En general cualquier estudio sobre la evolución de carácter aleatorio de un fenómeno, nos descubre procesos aleatorios; este fenómeno puede ser de orden físico (pluviometría de una región, por ejemplo), social, económico (cosumo de un producto por una población), etc.

Se entiende por proceso la evolución en el tiempo de un sistema en el que el azar interviene continuamente (o al menos, en una serie indefinida de instantes).

Un proceso que genera un conjunto de datos es conocido por los estadísticos como experimento.

En un experimento se genera un conjunto de posibles resultados. a este conjunto se le denomina espacio muestral. Un experimento puede ser el número de reservaciones no canceladas para un vuelo. el número de llegadas a un servicio o la duración de un determinado componente. Todos estos son ejemplos de fenómenos impredecibles con un determinado número de posibles resultados. pero estos resultados pueden ser finitos o infinitos.

Los experimentos se conciben de manera que los resultados en un espacio muestral sean cualitativos o cuantitativos. Algunos ejemplos de resultados cualitativos son: el lanzamiento de una moneda es "cara" o "cruz"; un producto manufacturado en una fábrica que puede estar "defectuoso" o "no defectuoso". Mediante la cuantificación de los resultados cualitativos[1] de un espacio muestral se puede estudiar su comportamiento aleatorio. es decir. proporcionar una *variable aleatoria* para relacionar cualquier resultado de una medida cuantitativa.

La variable aleatoria[2] es una función de probabilidad que se encuentra definida en un espacio muestral. Esta función transforma los resultados del espacio muestral en puntos sobre la recta de los reales. es decir. cantidades numéricas. Por ejemplo; un espacio muestral está constituído por dos posibles resultados. "cara" y

---

[1] Por ejemplo. el espacio muestral que da una descripción detallada de cada uno de los resultados posibles del lanzamiento de una moneda en 3 ocaciones, puede escribirse:

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT \}$$

Si lo que interesa es sólo el número de caras que se obtienen. entonces se podría asignar un valor numérico de 0. 1, 2 ó 3 a cada uno de los puntos muestrales.

[2] El término de variable aleatoria es un poco confuso; la función aleatoria sería más apropiado pues la variable independiente es un punto en un espacio muestral. es decir. constituye el resultado de un experimento.

"cruz". Sea X(cruz=0) y X(cara=1); de esta manera se han transformado los dos posibles resultados del espacio muestral en puntos sobre la recta.

El gran auge que han tenido los estudios sobre álgebras de Boole se ha debido en buena parte a dos derivaciones: las aplicaciones a la teoría de circuitos, de importancia vital para el diseño de ordenadores y las aplicaciones a la descripción de los llamados "sucesos aleatorios" sobre los cuales se define la probabilidad.

A partir de la observación de los juegadores de azar, de sus propios juegos, a causa de la necesidad de proveer de alguna forma las posibilidades de ganar, de obtener un as, etc., se inició el estudio matemático de las llamadas leyes del azar, que intentaron describirse mediante leyes estadísticas a partir del concepto de frecuencia, que lleva directamente a la noción de probabilidad.

El razonamiento sobre juegos como el de lanzar un dado y preguntarse acerca de qué número de puntos se obtendrá, lleva a la idea de establecer una definición de experiencia al azar. Para realizar una experiencia al azar es algo que se efectúa en las siguientes condiciones:

Existe una descripción de la experiencia que puede ser de tipo físico o conceptual.

Tal descripción ha de ser reducible a la elección de un subconjunto y uno sólo, de cierto conjunto X sobre cuyos elementos se actúa.

No obstante hay que notar que la experiencia en sí no interesa sino la predicción acerca de preguntas sobre los resultados de la misma; por ejemplo, en el caso del dado, interesan preguntas del tipo ¿saldrá un número impar como resultado? o ¿existe algún número que mida la salida de números impares?. Con esto se ha llegado al punto crucial, el de la "medida" en el sentido de interrogaciones acerca de los posibles resultados de las experiencias al azar; para ello es preciso conocer la estructura de las variables o magnitudes a medir, que aquí son nada menos que preguntas.

Pero tengamos en cuenta que no basta con efectuar una pregunta acerca de los posibles resultados, sino que se querrá hacer más de una.

Análogamente, ha de interesar el no-algo: ¿saldrá un número que no sea múltiplo de 3?. Por consiguiente, hay que aceptar que sobre una experiencia al azar interesa no sólo preguntas, sino más bien familias razonables de ellas. Por tanto, cada pregunta ha de traducirse en un subconjunto de un cierto conjunto X, al aplicar aquí el mismo tipo de razonamiento que ha servido para representar proposiciones o enunciados afirmativos, resulta que la familia de preguntas se traduce, por su razonabilidad, en una clase de subconjuntos de X que será cerrada para uniones, intersecciones y paso al complementario, por lo que será un álgebra de Boole de partes de X, ya que si A es cualquiera de sus elementos al hacerlo también $\overline{A}$, lo son $\varnothing = A \cap \overline{A}$ y $X = A \cup \overline{A}$.

De esta manera los resultados de una experiencia al azar sobre los elementos de un conjunto X se traducen por medio de un álgebra de Boole de subconjuntos o de "sucesos" de X, que puede ser como mínimo la $\{\varnothing, X\}$ (la menor álgebra de Boole de partes de X) o como máximo P(X) (la mayor álgebra de Boole de partes de X). Designaremos dicha álgebra por $\mathscr{B}$. Al par $(X,\mathscr{B})$ se conoce como "expansión medible" o "experimental booleano" y ha sido deducido de acuerdo con el cálculo proposicional clásico, llegándose a una estructura "conjunto-familia de subconjuntos".

Entonces reconsideremos el establecimiento de medidas de las preguntas y pensemos en medidas de los subconjuntos que las traducen. Tales medidas serán aplicaciones $\mu:\mathscr{B} \rightarrow R^{+}$, y nada aparece en contra de que $\mu(\varnothing) = 0$, pero es preciso que tengan más propiedades: una de ellas, que aparece de inmediato, es que si $A \subset B$ (ambos de $\mathscr{B}$) entonces es $\mu(A) \leq \mu(B)$, que traduce el hecho "a más resultados posibles, más medida". Además, como $\forall A \in \mathscr{B}$ es $A \subset X$, resulta que

$\mu(X)$ es el valor mayor de μ. No se aceptan medidas que no sean de R^+ y que $\mu(X)=1$, con lo que será:

$$\mu: \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$$

Analicemos el crecimiento de μ; para ello se consideran dos sucesos A y B de $\mathcal{B}$ tales que $A \subset B$. Como $A - B = B \cap \overline{A}$, es $A - B \in B$, y como $(B - A) \cap A = (B - \overline{A}) \cap A = B \cap B = \varnothing$, resulta que $B = A \cup (B - A)$ es la reunión disjunta de elementos de $\mathcal{B}$, a causa de la variable del principio de no-contradicción entre las preguntas. Visto esto, se requiere una elección acerca de si se pretende o no que la medida μ sea una valoración o por lo menos si se pretende que la media de una reunión disjunta sea la suma de las medidas de sus componentes.

Es decir, que se ha visto que los sucesos crecen por yuxtaposición disjunta. Está claro que, en principio, cabe pensar que el crecimiento de la medida sea según el máximo, es decir, de la forma $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$, $A \cap B = \varnothing$. Por ejemplo, Una urna que contiene 20 bolas numeradas e indistinguibles al tacto, las cuales se extraen al azar y sobre los que consideramos sucesos como A= "bolas que llevan un número múltiplo de 3" = {3, 6, 9, 12, 15, 18}. Tal suceso es reunión de los A_1={6, 12, 18} y A_2={3, 9, 15}.

Parece claro, por la forma de sacar las bolas y por su naturaleza, que cada una tiene la misma probabilidad de salir que las otras y como todas están juntas en la urna y las sacamos de una en una, entonces se admite que $^1/_{20}$ es la medida de cada suceso {1}, {2}, ... lo que se amplia a que por ejemplo, $\mu(A_1) = 3 \cdot {^1/_{20}}$, que es la hipótesis de aditividad implícitamente. Con ella $\mu(A) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Nótese que no se nos ocurre

$$\mu(A) = \max\left\{\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right\} = \frac{1}{20}$$

porque ello significaría que la agregación de elementos de medida no-nula no aumentaría la medida.

Tales medidas han sido llamadas *PROBABILIDADES* y se definen, por tanto, sobre un experimental booleano $(X, \mathcal{B})$ como funciones $P: \mathcal{B} \to [0,1]$ tales que:

a) Si $A \cap B = \emptyset$, es $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

b) $P(X) = 1$, con lo cual se garantiza que.

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; ya que

$$1 = P(X) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

d) $P(\emptyset) = 0$, ya que $P(\emptyset) = P(\overline{X}) = 1 - P(X)$;

e) Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$; ya que $B = A \cup B$ $(B - A)$ y de ahí que $P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$

Además, se trata de valoraciones del reticulado $\mathcal{B}$, ya que para A, B de $\mathcal{B}$ cualquiera, es $P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$ de una parte, y $P(B) = ((B - A) \cup (A \cap B)) = P(B - A) + P(A \cap B)$ de otra, de donde resulta $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, cualquiera que sea la probabilidad P. Por consiguiente, la modelización matemática de las experiencias al azar del tipo lanzar un dado, lanzar una moneda, extraer bolas de una urna, etc., nos ha llevado a la terna $(X, \mathcal{B}, P)$ o "espacio de propabilidad", donde $\mathcal{B}$ tiene una estructura de álgebra de Boole debido al supuesto conocimiento total de los resultados de la experiencia al azar y donde P es una valoración ADITIVA del retículo $\mathcal{B}$, debido precisamente a las características de los tipos de problemas que requieren modelizarse matemáticamente con P.

Ahora consideremos un tipo particular de álgebra de Boole de partes de X, que se presenta en muchos casos en que la observación lleva a una clasificación de X en un número finito de partes disjuntas; sean $A_1, \ldots, A_n$ tales partes. Es $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = X$ en tanto que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Si estos A_i son los sucesos iniciales, al considerar los del tipo $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_r}$, donde $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ es una variación sin repetición de (1, 2, ..., n), se tiene que todos los posibles dan un álgebra de Boole. Tal álgebra de Boole es la más pequeña que contiene a las clases $A_1, \ldots, A_n$, que son sus átomos. Entonces, se le designa a tal álgebra por $\mathcal{A}$; en el experimento booleano $(X, \mathcal{A})$ es posible determinar todas las probabilidades $P: \mathcal{A} \to [0,1]$, ya que un elemento $A \in \mathcal{A}$ arbitrario se verificará $P(A) = P(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_r}) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \ldots + P(A_{i_r})$, con lo que basta el conocimiento de números $p_i = P(A_i) \in [0,1]$, $1 \leq i \leq n$, que verifiquen $1 = P(X) = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, para conocer la probabilidad de cualquier $A \in \mathcal{A}$.

Con ello, hay tantas probabilidades sobre $(X, \mathcal{A})$ como selecciones de n números $0 \leq p_i \leq 1$, de suma uno $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, se puede hacer, con asignaciones $p_i = P(A_i)$ convenientes. Queda de manifiesto cómo en este sencillo caso de experimental booleano hay una gran familia de probabilidades: su elección en cada caso dependerá de las condiciones del problema.

CAPÍTULO 2

NOCIONES BÁSICAS

2.1 TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1.1 DEFINICIÓN DE CONJUNTO

Un conjunto es una lista, colección, o clase de objetos bien definidos, objetos que pueden ser cualquiera: números, personas, letras, etc. Estos elementos se llaman elementos o miembros del conjunto. Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas y los elementos se representan por letras minúsculas. Ejemplos:

$A = \{1, 3, 7, 10\}$ *forma tabular*

$B = \{x \mid x \text{ es par}\}$ *forma de definición por comprensión*

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, es decir, si A contiene a x como uno de sus elementos, se escribe

$$x \in A$$

que puede leerse también "x pertenece a A" o "x está en A". Si por el contrario, un objeto x no es elemento de un conjunto A, es decir, si A no contiene a x entre sus elementos, se escribe

$$x \in A$$

2.1.2 DEFINICIÓN DE SUBCONJUNTO

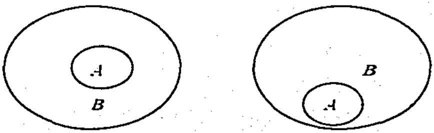
Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un *subconjunto* de B. En otras palabras, A es un subconjunto de B si $x \in A$ implica $x \in B$, y se denota esta relación como

$$A \subset B \text{ ó } B \supset A$$

2.1.3 DIAGRAMAS DE VENN-EULER

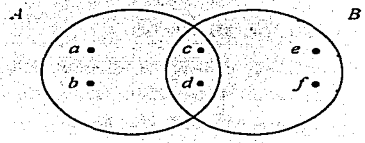
Los diagramas de Venn-Euler son utilizados para representar gráficamente de manera sencilla e instructiva las relaciones entre conjuntos.

Ejemplo 2-1. Supóngase $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces A y B se describen con uno de los diagramas:



Ejemplo 2-2. Si A y B no son comparables se les puede representar por el diagrama de la derecha si son disjuntos o por el de la izquierda si no lo son.

Ejemplo 2-3. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$. Se ilustran estos conjuntos con un diagrama de Venn.



2.1.4 DIAGRAMAS LINEALES

Otra manera útil e instructiva para ilustrar las relaciones entre conjuntos es el empleo de los llamados diagramas lineales. Si $A \subset B$, se escribe entonces B más arriba que A y se les conecta por un segmento

$$\begin{array}{c} B \\ | \\ A \end{array}$$

Si $A \subset B$ y $B \subset C$, se pone

$$\begin{array}{c} C \\ | \\ B \\ | \\ A \end{array}$$

2.1.5 OPERACIONES CON CONJUNTOS

En aritmética se suma, resta y multiplica, es decir, a cada par de números x, y se le asigna un número x+y llamados suma de x e y. Estas asignaciones se llaman operaciones de adición, sustracción y multiplicación de números. En el caso de conjuntos se definen las operaciones de *unión*, *intersección*, y *diferencia*, es decir, se van a asignar o a hacer corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B.

UNIÓN

La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota la unión de A y B por $A \cup B$.

Ejemplo 2-4: Sean $S = \{ a, b, c, d \}$ y $T = \{ f, b, d, g \}$. Entonces

$$S \cup T = \{ a, b, c, d, f, g \}$$

En algunos casos la unión de A y B se denota por $A + B$ y se llama suma conjuntista de A y B.

INTERSECCIÓN

La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que son comunes a A y B. Se denota la intersección de A y B por $A \cap B$.

Ejemplo 2-5: Sean $S = \{ a, b, c, d \}$ y $T = \{ f, b, d, g \}$. Entonces

$$S \cap T = \{b, d\}$$

En algunos casos, sobre todo en probabilidad, la intersección de A y B se denota por AB y se llama producto conjuntista de A y B.

DIFERENCIA

La *diferencia* de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota la diferencia de A y B por $A - B$.

Ejemplo 2-6: Sean $S = \{ a, b, c, d \}$ y $T = \{ f, b, d, g \}$. Se tiene

$$S - T = \{a, c\}$$

La diferencia de A y B se denota a veces por A/B o bien por $A \sim B$.

2.1.6 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto B, se dice que esa correspondencia es una *función*. Denotando esta correspondencia por f, y se escribe

$$f : A \rightarrow B$$

El conjunto A se llama *dominio* de la función f, y B se llama *codominio* de f. Por otra parte, si $a \in A$, el elemento de B que le corresponde a a se llama *imagen* de a y se denota por $f(a)$.

Ejemplo 2-7: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Defínase una función f de A en B por la correspondencia $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = c$, y $f(d) = b$. Según esta definición, la imagen por ejemplo de b es c.

APLICACIONES, OPERADORES, TRANSFORMACIONES

Si A y B son conjuntos en general, no necesariamente conjunto de números, se dice por lo común que una función f de A en B es una aplicación de A en B y la notación

$$f : A \rightarrow B$$

se lee entonces "f aplica A en B". También se puede simbolizar como $A \xrightarrow{f} B$ o por el diagrama

FUNCIONES INYECTIVAS

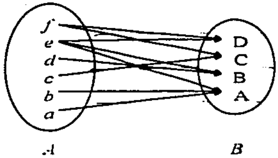
Sea f una aplicación de A en B. Entonces f se dice inyectiva si elementos distintos de B corresponden a elementos distintos de A, es decir, si dos elementos de A tienen imágenes distintas. $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$.

Ejemplo 2-8: Sea la función $f : R \rightarrow R$ definida por la fórmula $f(x) = x^3$. f es una aplicación inyectiva puesto que los cubos de dos números reales distintos son distintos ellos mismos.

FUNCIONES SOBREYECTIVAS

Sea f una función de A en B. El dominio de imágenes de $f(A)$ de la función f es un subconjunto de B, esto es, $f(A) \subset B$. Si $f(A) = f(B)$, es decir, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A, se dice entonces que "f es una función *sobreyectiva* de A en B" o "f aplica a A sobre B".

Ejemplo 2-9: Sea $A = \{ a, b, c, d, e, f \}$ y $B = \{$ A, B, C, D $\}$



Es una función sobreyectiva ya que a todo elemento de B recibe al menos un elemento de A.

FUNCIÓN RECÍPROCA

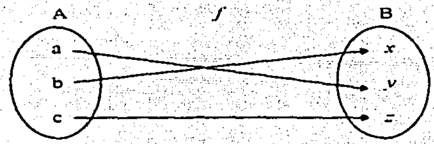
Sea f una función de A en B. En general, $f^{-1}(b)$ puede tener más de un elemento o aún ser el conjunto vacío. Ahora bien, si $f: A \rightarrow B$ es una función inyectiva y sobreyectiva, entonces para cada $b \in B$, la recíproca $f^{-1}(b)$ consta de un sólo elemento de A. Se tiene entonces una correspondencia que asigna a cada $b \in B$ un elemento único de $f^{-1}(b)$ de A. Así que, f^{-1} es una función de B en A y se puede escribir:

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

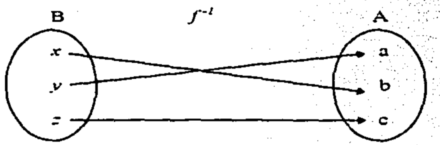
En este caso, cuando $f: A \rightarrow B$ es inyectiva y sobreyectiva[1], f^{-1} se llama función recíproca de f.

[1] La función f se dice que es biyectiva

Ejemplo 2-10: Sea la función $f: A \rightarrow B$ definida por el diagrama



Nótese que f es inyectiva y sobreyectiva. Por tanto, existe una f^{-1}, la función recíproca.



2.1.7 RELACIONES

Una *relación* $\mathcal{R}$ consiste en lo siguiente:

(1) Un conjunto A

(2) Un conjunto B

(3) Un enunciado formal $P(x, y)$ tal que $P(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado (a, b) de $A \times B$.

Se dice entonces que $\mathcal{R}$ es una *relación entre* A y B y se le denota por

$$\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$$

Además, si $P(a, b)$[2] es verdadero se escribe $a \mathcal{R} b$.

[2] En algunos casos se llama relación a la expresión $P(x, y)$, dando por sentado implícitamente que las variables x e y tienen por dominios respectivos ciertos conjuntos A y B, es decir, que $P(x, y)$ es una función lógica definida sobre cierto conjunto producto $A \times B$.

GRAFOS DE RELACIONES

Sea $\mathcal{R} = (A, B, P(x, <<))$ una relación. El conjunto de los elementos (a, b) de $A \times B$ para los cuales $P(a, b)$ es verdadero, se llama *conjunto solución* $\mathcal{R}^*$ de la relación $\mathcal{R}$. Es decir,

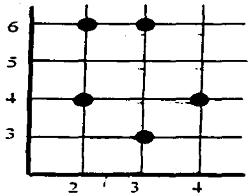
$$\mathcal{R}^* = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B, P(a, b) \text{ es cierto } \}$$

El *grafo* de una relación $\mathcal{R}$ entre A y B consta de los puntos del diagram de coordenadas de $A \times B$ que pertenece al conjunto solución de $\mathcal{R}$.

Ejemplo 2-11: Sea $\mathcal{R} = (A, B, P(x, y))$, donde $A = \{ 2, 3, 4 \}$, $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ y $P(x, y)$ significa "x divide a y. Entonces el conjunto solución es

$$\mathcal{R}^* = \{ (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4) \}$$

El diagrama de coordenadas $A \times B$ se muestra el conjunto solución de $\mathcal{R}$.



RELACIONES REFLEXIVAS

Sea $\mathcal{R} = (A, A, P(x, y))$ una relación en un conjunto A, es decir, sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times A$. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *relación reflexiva* si, para todo $a \in A$,

$$(a, a) \in \mathcal{R}$$

o lo que es lo mismo. $\mathcal{R}$ es reflexiva si todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Ejemplo 2-12: Sea $V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

Esta $\mathcal{R}$ no es una relación reflexiva, ya que (2,2) no pertenece a $\mathcal{R}$. Téngase en cuenta que todos los pares ordenados (a, a) deben petenecer a $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}$ sea reflexiva.

Ejemplo 2-13: Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos y sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{A}$ por "x es un subconjunto de y". Esta relación $\mathcal{R}$ es reflexiva porque todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

RELACIONES SIMÉTRICAS

Sea $\mathcal{R}$ un subconjunto de $A \times A$, es decir, sea $\mathcal{R}$ una relación en A. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *relación simétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ implica } (b, a) \in \mathcal{R}$$

esto es, que si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a.

Ejemplo 2-14: Sea $\mathcal{R}$ la relación en los números naturales N que viene definida por "x divide a y". Esta $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues si 2 divide a 4, 4 no divide a 2. Es decir, $(2, 4) \in \mathcal{R}$ pero $(4, 2) \notin \mathcal{R}$.

Ejemplo 2-15: Sea $V = \{ 1, 2, 3 \}$ y $\mathcal{R} = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$

Esta $\mathcal{R}$ es una relación simétrica, puesto que $(2,3) \in \mathcal{R}$ y también $(3,2) \in \mathcal{R}$.

RELACIONES ANTISIMÉTRICAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A, o sea un subconjunto de $A \times A$, se dice *relación antisimétrica* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, a) \in \mathcal{R} \text{ implican } a = b$$

O, en otras palabras, si $a \neq b$, entonces puede a estar relacionado con b, o bien b relacionado con a, pero no las dos cosas.

Ejemplo 2-16: Sea $W = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y sea $\mathcal{R} = \{ (1,3), (2,4), (4,4) \}$

Es una relación antisimétrica en W, puesto que $(2, 4) \in \mathcal{R}$ pero $(4, 2) \notin \mathcal{R}$.

Ejemplo 2-17: Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{A}$ por "x es un subconjunto de y". Esta relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica porque

$$A \subset B \text{ y } B \subset A \text{ implica } A = B$$

RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se dice *relación transitiva* si

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, c) \in \mathcal{R} \text{ implica } (a, c) \in \mathcal{R}$$

O sea que si a está relacionado con b, y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c.

Ejemplo 2-18: Sea $W = \{ a, b, c \}$ y sea $\mathcal{R} = \{ (a,b), (c,b), (b,a), (a,c) \}$

Esta relación $\mathcal{R}$ no es transitiva porque $(c, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implica $(c, a) \notin \mathcal{R}$

Ejemplo 2-19: Dada $\mathcal{A}$, una familia de conjuntos, sea $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{A}$ por "x es un subconjunto de y". Aquí $\mathcal{R}$ es una relación transitiva porque $A \subset B$ y $B \subset C$ implica $A \subset C$.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una *relación de equivalencia* si

1) $\mathcal{R}$ es reflexiva, esto es, para toda $a \in A$, a está relacionado consigo mismo.

2) $\mathcal{R}$ es simétrica, esto es, si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a.

3) $\mathcal{R}$ es transitiva, esto es, si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c.

Ejemplo 2-20: Sea $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $\mathcal{R} = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$.

R es una relación de equivalencia ya que se cumple por ejemplo

(1,1), (2,2), (3,3) pertenecen a $\mathcal{R}$. *reflexividad*

(1,2), (2,1), (1,3), (3,1) pertenecen a $\mathcal{R}$ *simetría*

(1,2), (2,3), (1,3) pertenecen a $\mathcal{R}$. *transitividad*

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Un *orden parcial* en un conjunto A es una relación $\mathcal{R}$ en A

1) reflexiva, es decir, $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in \mathcal{R}$,

2) antisimétrica, esto es, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, a) \in \mathcal{R}$ implican $a = b$.

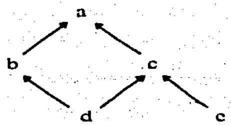
3) transitiva, es decir, $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ implican $(a, c) \in \mathcal{R}$.

Si una relación $\mathcal{R}$ en A define un orden parcial en A, entonces $(a, b) \in \mathcal{R}$ se denota por

$$a \leq b$$

que se lee "a anterior a b".

Ejemplo 2-21: Sea $W = \{ a, b, c, d, e \}$. El diagrama



define un orden parcial en W de la siguiente manera: $x \leq y$ si $x = y$ o si se puede ir de x a y en el diagrama yendo en la dirección ascendente indicada. Nótese que $b \leq a$, $d \leq a$, y $e \leq c$.

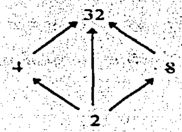
CONJUNTOS TOTALMENTE ORDENADOS

Si cada par de elementos de un conjunto parcialmente ordenado A son comparables entonces el orden parcial en A se llama *orden total* en A. Entonces un orden total en un conjunto A es un orden parcial en A más la propiedad

$$a \prec b, \;\; a = b \;\text{ ó }\; a \succ b$$

Para cualesquiera dos elementos a y b de A. Un conjunto A y un orden total dado en A constituyen un *conjunto totalmente ordenado.*

Ejemplo 2-22: Sean el conjunto $V = \{ 2, 8, 32, 4 \}$ representado por el siguiente diagrama



El conjunto es totalmente ordenado porque $2 \prec 4 \prec 8 \prec 32$.

2.1.8 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Las operaciones de unión. intersección y de complemento entre conjuntos cumplen varia leyes.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS	
Leyes de idempotencia	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Leyes Asociativas	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes Conmutativas	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Leyes Distributivas	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de Identidad	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = A$
$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Leyes de Complemento	
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varnothing$
$(A')' = A$	$U' = \varnothing$, $\varnothing' = U$
Leyes de De Morgan	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ejemplo 2-23: Demostrar $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$	Ley distributiva
$B \cap B' = \varnothing$	Ley del complemento
$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \varnothing$	Sustitución
$A \cup \varnothing = A$	Ley de identidad

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$ Sustitución

2.2 ÁLGEBRA BOOLEANA

2.2.1 DEFINICIÓN

Las leyes que se emplean para definir una estructura matemática abstracta llamada álgebra booleana, por el nombre del George Boole.

Un álgebra booleana es un conjunto B de elementos a, b, ... dotado de dos operadores binarias llamas *suma* y *producto*, que se detonan respectivamente por + y * tal que:

1) **Ley Conmutativa:**

A. $a + b = b + a$ B. $a * b = b * a$

2) **Ley Asociativa:**

A. $(a+b) + c = a + (b+c)$ B. $(a*b) * c = a * (b*c)$

3) **Ley Distributiva:**

A. $a + (b*c) = (a+b) * (a+c)$ B. $a * (b+c) = (a*b) + (a*c)$

4) **Elementos Neutros:**

A. $a + 0 = a$ B. $a * U = a$

5) **Complemento:**

A. $a + a' = U$ B. $a * a' = U$

2.2.2 TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema 2.1. Ley de Idempotencia:

I) $a + a = a$ *II)* $a * a = a$

Teorema 2.2. *I)* $a + U = U$ *II)* $a * 0 = 0$

Teorema 2.3. Ley de Involución:

$$(a')' = a$$

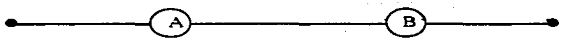
Teorema 2.4. *I)* $U' = 0$ *II)* $0' = U$

Teorema 2.5. Ley de De Morgan:

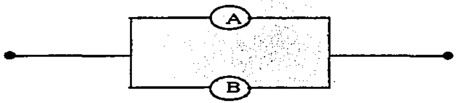
I) $(a + b)' = a' * b'$ *II)* $(a * b)' = a' + b'$

2.2.3 DISEÑOS DE CIRCUITOS

Sean A, B sendos interruptores eléctricos y sean A y A' interruptores tales que cuando el uno está abierto el otro está cerrado, y viceversa. Dos interruptores, A y B, por ejemplo, se pueden conectar por un alambre en serie o en paralelo:



Conexión en serie . $A \wedge B$

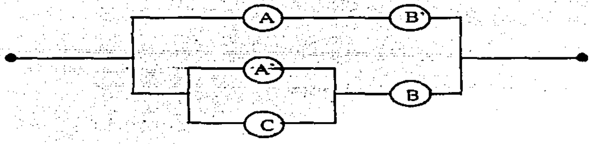


Conexión en paralelo. $A \vee B$

Sean $A \wedge B$ y $A \vee B$, la indicación de que A y B están en serie y de que A y B están en paralelo, respectivamente.

Un circuito conmutador booleano es un dispositivo de alambres e interruptores que se puede construir mediante combinaciones en serie y en paralelo; por tanto, se le puede describir con las conectivas $\wedge$ y $\vee$.

Ejemplo 2-24.



El circuito se puede describir por $(A \wedge B') \vee [(A' \vee C) \wedge B]$.

Se indica ahora por 1 y 0 respectivamente, que un interruptor esta cerrado o abierto. Las dos tablas siguientes describen el funcionamiento de un circuito en paralelo $A \vee B$.

A	B	$A \wedge B$
0	1	0
1	1	1
0	0	0
1	0	0

A	B	$A \vee B$
0	1	1
1	1	1
0	0	0
1	0	1

La tabla siguiente muestra la relación entre un interruptor A y un interruptor A'.

A	A'
0	1
1	0

El álgebra de un circuito booleano es un álgebra booleana. Para averiguar el funcionamiento de un circuito booleano se construye una tabla de verdad.

Ejemplo 2-25. El funcionamiento del circuito anterior se indica en la siguiente tabla de verdad para $(A \wedge B') \vee [\,(A' \vee C) \wedge B\,]$:

A	B	C	$(A$	$\wedge$	$B')$	$\vee$	$[(A'$	$\vee$	$C)$	$\wedge$	$B]$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1

CAPÍTULO 3

SUBCONJUNTOS BORROSOS

3.1 INTRODUCCIÓN

La "borrosidad" no es un concepto que se entienda en primera instancia y por lo tanto exige alguna explicación. La teoría de los subconjuntos borrosos es un paso hacia un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la imprecisión existente en el mundo real, nacido de la interminable búsqueda del hombre por lograr una mejor comprensión de los procesos mentales y del conocimiento.

El concepto fundamental, en matemáticas, es el del conjunto (una colección de objetos). Pero en el mundo real mucho, o casi la totalidad del saber y de la interrelación de los humanos con el mundo implica construcciones abstractas que no son "conjuntos" estrictamente hablando, sino más bien "conjuntos borrosos" (o "subconjuntos borrosos"), es decir clases con límites indeterminados, en las que la transición de membresía a no membresía es más bien gradual que brusca.. ¿Qué significa para un matemático la palabra borroso (o sus sinónimos)? Significa que un elemento es miembro de un subconjunto sólo de manera incierta; mientras que, por el contrario, la matemática nos enseña que sólo hay dos situaciones aceptables para un elemento: pertenecer o no pertenecer a un subconjunto. Toda la lógica formal, la lógica booleana, reposa en esta base: pertenecer o no pertenecer a un subconjunto de un conjunto referencia.

Es importante recalcar que debe decirse "subconjunto borroso" y no "conjunto borroso" debido a que el conjunto de referencia no es borroso; la teoría de los conjuntos ordinarios (*basados en la lógica formal*) es un caso particular de la teoría de los subconjuntos borrosos.

La teoría borrosa es una teoría matemática, y lo que es llamado borrosidad se toma en un aspecto de incertidumbre. La borrosidad es la ambigüedad que puede encontrarse en la definición de un concepto o el significado de una palabra. Por ejemplo, la incertidumbre en expresiones como "persona vieja", "temperatura alta", o "número pequeño" puede ser llamada borrosidad.

Hasta ahora la probabilidad ha sido la única incertidumbre con la cual han trabajado las matemáticas. La incertidumbre de la probabilidad generalmente se relaciona a la ocurrencia de fenómenos, y está simbolizada por el concepto de aleatoriedad. Por ejemplo, "lloverá mañana", "tirar los dados y obtener un tres" tienen la incertidumbre de ocurrencias fenomenológicas.

La aleatoriedad y la borrosidad difieren en naturaleza; eso es, son aspectos diferentes de la incertidumbre. Por ejemplo, la incertidumbre de la expresión "lloverá mañana" es si sucederá debido a una predicción hecha antes de que llegue el "mañana", pero ésta se aclarará por el paso del tiempo y la llegada del mañana. La incertidumbre en "tirar los dados y obtener un tres" es también un producto de adivinar antes de la tirada, y si efectivamente tiramos el dado y probamos, la proposición se vuelve cierta. Sin embargo, la incertidumbre encontrada en "persona vieja" o "temperatura alta" no se pierde con el paso del tiempo o probando. La ambigüedad yace en el significado de las palabras, y puesto que ésta es una característica esencial de las palabras, siempre las acompaña en alguna manera.

Toda la gente piensa y transmite sus pensamientos e información por medio de palabras. Si la probabilidad no fuera conocida por la gente a través de reportes climáticos, por ejemplo, sólo la gente que gusta de los juegos de azar, aquéllos que se preparan para exámenes de ingreso, etc., tendrían algo que ver con ella. Sin embargo, todo el mundo está involucrado con la borrosidad, y éste es un tipo de incertidumbre que cualquiera puede entender. Si este tipo de incertidumbre pudiera ser manejada con matemáticas y la ingenieria pudiera hacer uso de ella. los efectos serian inmensurables. Se dice que la diferencia entre las computadoras (las cuales pueden procesar solamente información de dos valores) y la gente. es que esta última puede tratar con la ambigüedad. pero ahora esta sobresaliente habilidad humana puede ser expresada por la teoria borrosa. manejada sobre computadoras y aplicada a la ingeniería.

La teoria de los conjuntos borrosos se expandió a áreas tales como la medición y la lógica para la teoria de sistemas. y fue desarrollada ampliamente para incluir metodologías para aplicaciones tales como modelado. evaluación. optimización. toma de decisiones. control. diagnóstico e información. También se han realizado pruebas en varios problemas reales tales como control. inteligencia artificial. y administración. y la teoria borrosa de hecho está siendo utilizada en algunas de estas áreas. Las aplicaciones de la teoría de los sistemas borrosos no están restringidas a su introducción directa. y hay planes para un desarrollo difundido de los conceptos básicos de la teoría borrosa. Además. los efectos de la ambigüedad están reconocidos desde el punto de vista de la ingenieria borrosa. y este campo está avanzando activamente en la incorporación de estos conceptos.

Ya que la teoria de los sistemas borrosos está en el punto de inicio para desarrollar modelos de pensamientos ambiguos y procesos de juicio. se pueden concebir los siguientes campos de aplicación:

1) La creación de modelos humanos que pueden ser utilizados para problemas de administración y sociales.

2) La imitación de las habilidades humanas de alto nivel para el uso en automatización y en sistemas de información.

3) Desarrollo de interfaces orientadas al usuario. para una mejor comunicación entre las personas y las máquinas.

4) Otras aplicaciones sociales y en inteligencia artificial (análisis de riesgos y predicción, desarrollo de dispositivos funcionales).

La tabla 3.1 da una visión general de los campos de aplicación de la teoría de los sistemas borrosos.

Tabla 3.1 Visión General de Aplicaciones de la Teoría de Sistemas Borrosos.

Campo / Clasificación	Administración/ Sociedad	Inteligencia Artificial e Información	Ingeniería de Control
(1) modelos humanos	planeación evaluación toma de decisiones organización relaciones humanas		
(2) imitación de las capacidades humanas	toma de decisiones sistemas de apoyo diagnóstico médico sistemas de apoyo	sistemas expertos bases de datos	control de procesos operaciones de entrenamiento robots
(3) interfaces humanas	señalamientos/publicidad equipo para personas discapacitadas	entrada de voz letras/figuras despliegue y reconocimiento de patrones	
(4) otros	análisis de riesgos predicción de fallas (reactores nucleares, etc.) predicción de terremotos	desarrollo de dispositivos de razonamiento	

3.2 COMENTARIOS SOBRE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Como con otros modelos, hay tanto puntos buenos como desventajas en los conjuntos borrosos. Si se utilizan sin considerar sus desventajas o cuando otro modelo fuera más apropiado, el resultado será que uno se dirigirá al problema de realizar los cálculos y construir el modelo, pero será incapaz de interpretarlo y no se entenderán los resultados.

Cuando hacemos uso de los conjuntos borrosos, debemos aclarar los siguientes puntos:

(1) ¿ Qué parte del problema la hacemos borrosa, y para qué propósito ?

(2) ¿ Qué tipo de modelo borroso utilizaremos ?

Para entender las características de los subconjuntos borrosos y como se aplican al modelado, es mejor dividir nuestra forma de pensar en dos categorias. "modelos conjunto" y "borrosidad". Demos primero un vistazo al problema de modelar con conjuntos ordinarios . Puesto que los conjuntos son grupos hechos de constantes, variables, y funciones del sistema objeto, la expresión es macroscópica y más ambigua que los modelos que no están basados en agrupamientos, como cuando se muestra el rango en el cual un valor numérico existe, pero no es tan estricto como para declarar un valor. Si el estado y limitantes de un sistema o sus entradas, salidas y evaluación están expresadas como un conjunto ordinario, eso en sí introduce un tipo de ambigüedad. En este caso, las "leyes" del sistema (relaciones entrada/salida, limitantes, etc.) son los "mapeos" que expresan las relaciones entre los conjuntos. Cuando las funciones son utilizadas para el mapeo, el modelo se acerca a ser un modelo matemático, pero también las operaciones lógicas son comunes, y en este caso obtenemos un modelo de tipo lógico.

A continuación viene la conversión a conjuntos borrosos, esto es hecho mediante la graduación de los límites de los estados, relaciones, limitantes, y metas del modelo del sistema hecho con conjuntos ordinarios. Hacer que los límites de los conjuntos sean vagos tiene un significado completamente diferente de la variación estadística, ya que se puede delinear libremente una situación ambigua utilizando elementos como la subjetividad individual, experiencias, y el sentido común. Por otro lado, la variación estadística expresa que proporción del total de un número grande datos está ocupada por un cierto tipo de datos. Por consiguiente, cuando hay pocos datos, cuando el número total de datos está ocupado, o cuando la ocurrencia de los eventos no es clara, la probabilidad no puede expresar la cantidad de ambigüedad.

Después nos encaminamos a utilizar estos subconjuntos borrosos para realizar una meta del modelo para el cual las metas deben ser aclaradas primero. Podríamos elegir dentro de tres campos de aplicación (sistemas de máquina, sistemas humanos y sistemas humano-máquina) para los siguientes fines:

(1) Expresar la experiencias humanas, el sentido común, etc., en una forma que las máquinas puedan usar.

(2) Realizar modelos de los sentimientos humanos o del lenguaje.

(3) Imitar el reconocimiento de patrones humanos, juicios, o entendimiento en general.

(4) Convertir información a una forma que la gente pueda entender fácilmente.

(5) Comprimir grandes cantidades de información.

(6) Realizar modelos de la psicología humana o del comportamiento.

(7) Realizar modelos de sistemas sociales.

Una vez que se ha decidido la meta, surge el problema de qué parte del sistema y de qué forma se tomará la conversión a subconjuntos borrosos. Hay muchas formas de modelos de sistemas, muchos de ellos incluyen lo siguiente: variables de estado, variables independientes, variables de decisión, perturbaciones, leyes de causa y efecto (transición), sus valores de verdad, metas, limitantes, funciones de evaluación, y varios tipos de constantes.

Hay dos métodos para desarrollar modelos borrosos: utilizar las leyes de causa y efecto y utilizar las leyes de transición. Las primeras hacen uso de las leyes para las operaciones con conjuntos, de manera que las reglas para composición y razonamiento expresan las relaciones entre las variables en los conjuntos.

El otro método utiliza ecuaciones ordinarias para expresar relaciones de causa y efecto, y los subconjuntos borrosos son utilizados para las variables. En este caso el significado del modelo en sí está claro, de manera que los resultados de la conversión a subconjuntos borrosos es fácil de explicar.

El procedimiento para desarrollar un modelo borroso sigue idealmente un orden de dos etapas. Los conjuntos y las relaciones lógicas se establecen primero, y después tiene lugar la conversión a subconjuntos borrosos.

3.3 CONCEPTO DE SUBCONJUNTO BORROSO

Una representación abstracta de un subconjunto borroso de un conjunto X podría asemejarse a algo parecido a la figura 3.1.

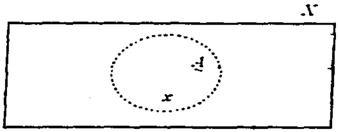


Fig. 3.1 Subconjunto Borroso $\underset{\sim}{A}$

El marco rectangular representa al conjunto X, el círculo punteado representa el borde ambiguo de lo que está fuera o dentro de él y es $\underset{\sim}{A}$, un subconjunto borroso de X. La teoría de los subconjuntos borrosos define el grado al cual un elemento x del conjunto X está incluido en este subconjunto. La función que da el grado al cual el elemento está incluido en el subconjunto se llama *función de membresía*. El miembro es el elemento x. Por ejemplo, el grado de membresía del elemento x en el área $\underset{\sim}{A}$ está expresado por

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 1, \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 0.8,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0.3, \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 0.$$

etc. μ es la función de membresía y da el grado de membresía, un valor desde cero hasta 1. El subíndice $\underset{\sim}{A}$, muestra que $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ es la función de membresía de $\underset{\sim}{A}$.

La figura 3.1 es un intento por definir cuantitativamente la ambigüedad de $\underset{\sim}{A}$ por medio de la función $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$. Matemáticamente, no podemos asumir la existencia de un área ambigua, de manera que este proceso no define subconjuntos borrosos. Una definición formal sería como sigue.

DEFINICIÓN

Sea X un conjunto, enumerable o no, y x un elemento de X. Entonces, un "subconjunto borroso" $\underset{\sim}{A}$ de X es un conjunto de pares ordenados:

$$\{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\}, \forall x \in X.$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ es una "función característica de membresía" que toma sus valores en un conjunto totalmente ordenado M que indica el "grado" o "nivel" de membresía. M se denominará "conjunto de membresía".

Un conjunto o un subconjunto lo representaremos por medio de letras: A, X, E, ... Un subconjunto borroso se designará por letras debajo de las cuales se colocará el símbolo $\sim$. Así,

$$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{E},$$

representarán subconjuntos borrosos.

Ejemplo 3-1. Sea un conjunto finito:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

y el conjunto finito ordenado:

$$M = \{ 0,\ 1/2,\ 1 \}$$

Entonces.

$$\underset{\sim}{A} = \{ (a|0),\ (b|1),\ (c|1/2),\ (d|0),\ (e|1/2),\ (f|0) \}$$

3.4 OPERACIONES DE SUBCONJUNTOS BORROSOS

Puesto que los subconjuntos borrosos están definidos por la función de membresía debemos emplearla en la definición de las operaciones.

INCLUSIÓN

Sean X un conjunto y M subconjunto de membresía asociado. $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de X; se dirá que $\underset{\sim}{A}$ está incluido en $\underset{\sim}{B}$ si:

$$\forall x \in X: \quad \mu_{\underset{\sim}{A}} \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}$$

esto se representará por:

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$$

Ejemplo 3-1:

$$X = \{ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \},\ M = [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1|0.4),\ (x_2|0.2),\ (x_3|0),\ (x_4|1) \}$$

$$\underset{\sim}{B} = \{ (x_1|0.3),\ (x_2|0),\ (x_3|0),\ (x_4|0) \}$$

Se tiene:

$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, pues $0.3 < 0.4$, $0 < 0.2$, $0 = 0$, $0 < 1$.

Ejemplo 3-2:

$$\text{Sean } \underset{\sim}{A} \subset E,\ \underset{\sim}{B} \subset E,\ M = [0,\ 1].$$

Si

$$\forall x \in E: \qquad \mu^2_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

entonces

$$\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A}.$$

IGUALDAD

Sea X un conjunto y M su conjunto de membresía asociado. $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de X: se dirá que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son iguales si y solamente si :

$$\forall x \in X: \qquad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

y se representará por

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}.$$

COMPLEMENTACIÓN

Sea X un conjunto y M su conjunto de membresía asociado. $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de X: se dirá que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son complementarios si :

$$\forall x \in X: \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

y se representará por

$$\underset{\sim}{B} = \overline{\underset{\sim}{A}} \text{ ó } \overline{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{B}.$$

Ejemplo 3-3:

$$E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}, \quad M = [0,\ 1]$$

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1 \mid 0.13), (x_2 \mid 0.61), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 1), (x_6 \mid 0.03) \}$$
$$\underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.87), (x_2 \mid 0.39), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 1), (x_5 \mid 0), (x_6 \mid 0.97) \}$$

se tiene que:

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{B}.$$

INTERSECCIÓN

Sea X un conjunto y M su conjunto de membresía asociado. $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de X; se define la intersección:

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}.$$

como el subconjunto borroso más grande contenido, a la vez, en $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$. Es decir:

$$\forall x \in X: \qquad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mathrm{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)).$$

Ejemplo 3-4:

$$E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}, \quad M = [0, 1]$$

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5) \}$$

$$\underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0.4), (x_5 \mid 0.5) \}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5) \}.$$

UNIÓN

Sea X un conjunto y M su conjunto de membresía asociado, $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de X; se define la unión:

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B},$$

por el subconjunto borroso más pequeño que contiene tanto a $\underset{\sim}{A}$ como a $\underset{\sim}{B}$. Es decir:

$$\forall x \in X: \qquad \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \text{MÁX}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)).$$

Ejemplo 3-5:

Tomando en cuenta los conjuntos del ejemplo (3-4) la unión queda de la siguiente forma:

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0.1), (x_5 \mid 0.5) \}$$

SUMA DISYUNTIVA

La suma disyuntiva de dos subconjuntos borrosos se define en términos de la unión e intersección de la manera siguiente:

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}) \cup (\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B})$$

Veamos un ejemplo, en este caso emplearemos los utilizados en la intersección y en la unión.

Ejemplo 3-6:

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0.1), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1 \mid 0.8), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 1), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0.9), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0.1), (x_5 \mid 0.5) \}$$
$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = \{ (x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0.1), (x_5 \mid 0.5) \}$$

DIFERENCIA

La diferencia se define por la relación:

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$$

Considerando los conjuntos del ejemplo (3-6) obtenemos:

$$\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}} = \{ (x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5) \}$$

Excepto en casos particulares, tenemos que:

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A}$$

3.4.1 OTRAS OPERACIONES CON SUBCONJUNTOS BORROSOS

DISTANCIA DE HAMMING

Consideremos tres subconjuntos borrosos $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C} \subset X$, X finito, y card $X = n$.

$\underset{\sim}{A}$ =

x_1	x_2	x_3		x_n
a_1	a_2	a_3		a_n

$\underset{\sim}{B}$ =

x_1	x_2	x_3		x_n
b_1	b_2	b_3		b_4

$\underset{\sim}{C}$ =

x_1	x_2	x_3		x_n
c_1	c_2	c_3		c_4

Podemos definir la distancia $\mathcal{D}(a_i,b_i)$ entre a_i y b_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, e igualmente para (b_i,c_i) y (a_i,c_i) como

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i,c_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i,b_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(b_i,c_i)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(a_i,c_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(a_i,b_i)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}^2(b_i,c_i)}$$

Considerando el caso en que la función de membresía toma sus valores en $M = [0, 1]$, se tiene que $a_i, b_i, c_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tomando ahora:

$$\mathcal{D}(a_i,b_i) = | a_i - b_i |,\ \mathcal{D}(b_i,c_i) = | b_i - c_i |,\ \mathcal{D}(a_i,c_i) = | a_i - c_i |$$

Se definen dos tipos de distancias:

DISTANCIA DE HAMMING GENERALIZADA O LINEAL

Ésta se define por:

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} | \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) |.$$

DISTANCIA EUCLIDIANA O DISTANCIA CUADRÁTICA

Ésta se define por:

$$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i))^2}.$$

La cantidad $e^2(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ se llama "*Norma Euclidiana*"

$$e^2(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i))^2.$$

DISTANCIA DE HAMMING GENERALIZADA RELATIVA

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) |.$$

DISTANCIA EUCLIDIANA RELATIVA

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i))^2}.$$

Ejemplo 3-7: Sean:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\underset{\sim}{A} =$	0.7	0.2	0	0.6	0.5	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\underset{\sim}{B} =$	0.2	0	0	0.6	0.8	0.4	1

Se tiene:

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = |0.7 - 0.2| + |0.2 - 0| + |0 - 0| + |0.6 - 0.6| + |0.5 - 0.8| + |1 - 0.4| + |0 - 1|$$
$$= 0.5 + 0.2 + 0 + 0 + 0.3 + 0.6 + 1 = 2.6$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (1/7)\, d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 2.6/7 = 0.37$$

$$e^2(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (0.7 - 0.2)^2 + (0.2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0.6 - 0.6)^2 + (0.5 - 0.8)^2 + (1 - 0.4)^2 + (0 - 1)^2$$
$$= (0.5)^2 + (0.2)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (0.3)^2 + (0.6)^2 + (1)^2$$
$$= 1.74$$

$$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{1.74} = 1.32$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}))/\sqrt{7} = (1.32)/\sqrt{7} = 0.49$$

ÍNDICE DE BORROSIDAD

Se pueden considerar, entre otros, dos índices de borrosidad: el "índice lineal de borrosidad", definido a partir de la distancia de Hamming generalizada relativa, y el "índice cuadrático de borrosidad", definido a partir de la distancia euclidiana relativa.

Se designarán respectivamente por

$$\nu(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{n} d(\underset{\sim}{A}, \overline{\underset{\sim}{A}}) \text{ ó } \nu(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n} \text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i), \mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x_i))$$

$$\eta(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} e(\underset{\sim}{A}, \overline{\underset{\sim}{A}}) \text{ ó } \eta(\underset{\sim}{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{x=1}^{n} \text{MIN}(\mu^2_{\underset{\sim}{A}}(x_i), \mu^2_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x_i))}$$

El número 2 aparece en el numerador para obtener:

$$0 \leq \nu(\underset{\sim}{A}) \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \eta(\underset{\sim}{A}) \leq 1$$

pues:

$$0 \leq \delta(\underset{\sim}{A}, \overline{\underset{\sim}{A}}) \leq 1/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \varepsilon(\underset{\sim}{A}, \overline{\underset{\sim}{A}}) \leq 1/2$$

EVALUACIÓN DE LA BORROSIDAD MEDIANTE LA ENTROPÍA

La entropia de un sistema mide el nivel de desorden de las componentes del sistema a partir de las probabilidades de estado. Si un sistema tiene N estados e_1, e_2, ..., e_N, éstos son asociados con probabilidades p_1, p_2, ..., p_N; entonces "la entropia" del sistema está definida por

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_N) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

Es fácil de demostrar que:

$H = 0$ (H mín) para $p_r = 1, \quad r \in \{1, 2, \ldots, N\}$

$p_r = 0, \quad i \neq r.$

$H = \ln N$ (H máx) para $p_1 = p_2 = \ldots = p_N = p = \dfrac{1}{N}.$

Si se toma la fórmula:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_N) = -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

entonces la entropía es una cantidad que varía entre 0 y 1.

Ejemplo 3-8: Sea un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 0.7,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 0.9,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 0.6,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_5) = 0.5,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_6) = 1$$

Haciendo:

$$\pi_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{6}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}$$

$$\pi_{\underset{\sim}{A}}(x_1) = 7/37,\ \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_2) = 9/37,\ \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_3) = 0,\ \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_4) = 6/37,\ \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_5) = 5/37,$$

$$\pi_{\underset{\sim}{A}}(x_6) = 10/37$$

Entonces:

$$H(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6) = -\frac{1}{\ln 6}\sum_{i=1}^{6} \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \ln \pi_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$$

$$= -\frac{1}{\ln 6}\left(\frac{7}{37}\ln\frac{7}{37} + \frac{9}{37}\ln\frac{9}{37} + \frac{6}{37}\ln\frac{6}{37} + \frac{5}{37}\ln\frac{5}{37} + \frac{10}{37}\ln\frac{10}{37}\right)$$

$$= 0.89$$

SUBCONJUNTO ORDINARIO DE NIVEL α

Sea $\alpha \in [0, 1]$, se llamará "subconjunto ordinario de nivel α" de un conjunto borroso $\underset{\sim}{A}$, al subconjunto ordinario:

$$A_\alpha = \{ x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \alpha \}$$

Ejemplo 3-9: Sea

$\underset{\sim}{A}$ =

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0.8	0.1	1	0.3	0.6	0.2	0.5

$A_{0.3}$ =

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0	1	1	1	0	1

$A_{0.55}$ =

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0	1	0	1	0	0

3.5 PROPIEDADES DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$ son subconjuntos borrosos de X, se verifican todas las propiedades para los subconjuntos ordinarios a excepción de dos. Se puede definir un complemento único, pero las propiedades que no se cumplen sólo existen para los conjuntos ordinarios.

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$ conmutativa

$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$

$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$ asociativa

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ idempotencia

$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$ distributiva

$\underset{\sim}{A} \cap \varnothing = \varnothing$

$\underset{\sim}{A} \cup \varnothing = \underset{\sim}{A}$ donde $\varnothing$ es el subconjunto ordinario tal que: $\forall x_i \in X$: $\mu_{\varnothing}(x_i) = 0$.

$\underset{\sim}{A} \cap X = \underset{\sim}{A}$
$\underset{\sim}{A} \cup X = X$

donde X es el subconjunto ordinario tal que $\forall x_i \in X$: $\mu_X(x_i) = 1$, es decir, el conjunto referencia.

$\overline{\left(\overline{\underset{\sim}{A}}\right)} = \underset{\sim}{A}$ involución

$\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{B}}$
$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$

Teoremas de De Morgan

3.6 APLICACIONES

BASES DE DATOS

Un ejemplo claro de aplicaciones reales donde los subconjuntos borrosos pueden ser aplicados lo tenemos en las bases de datos. Muchas de las bases de datos actuales están clasificadas de acuerdo a un modelo de cómo los datos están vistos por el usuario. Entre todos los tipos de bases de datos empleados, el modelo relacional es en el que mejor se pueden aplicar los subconjuntos borrosos.

En un modelo relacional, la base de datos es un grupo de relaciones. Las relaciones son esencialmente las mismas como en la teoría de conjuntos, y son expresadas usualmente en forma de tablas como las de la figura 3.2, la cual muestra una base de datos conformada de tres relaciones: PARTE, PROVEEDOR, y EM (embarque). En las tablas, los datos en cada renglón están conectados: por ejemplo, si miramos al primer renglón de la relación PARTE, nos muestra que el número de parte (P#) es P1, el nombre de la parte (PNOMBRE) tuerca, de color rojo, el peso 12, y la localidad de almacenamiento (CIUDAD) Londres. La línea de elementos que conforman un renglón se le llama *tupla*, se escribe con la siguiente notación <P1, tuerca, rojo, 12, Londres>. Los nombres dados a las columnas tales como P#, PNOMBRE, etc. son llamados *atributos*. Los elementos de la tabla tales como P1, tuerca. etc. son llamados *valores de atributo*. El conjunto de valores de atributo de un atributo es llamada el *dominio del atributo*.

PARTE

P#	PNOMBRE	COLOR	PESO	CIUDAD
P1	tuerca	rojo	12	Londres
P2	perno	verde	17	Paris
P3	tornillo	azul	17	Roma
P4	tornillo	rojo	14	Londres

PROVEEDOR

S#	SNOMBRE	ESTADO	CIUDAD
S1	Smith	20	Londres
S2	Jones	10	Paris
S3	Blake	30	Paris

EM

S#	P#	CANT
S1	P1	3000
S1	P2	2000
S1	P3	4000
S2	P1	3000
S2	P2	4000
S3	P2	2000

Fig. 3.2 Expresión Tabular de una Base de Datos

Si escribimos tan sólo el entorno de la base de datos de la figura 3.2, obtenemos

PARTE(P#, PNOMBRE. COLOR. PESO, CIUDAD)

PROVEEDOR(S#. SNOMBRE, ESTADO, CIUDAD)

EM(S#. P#. CANT)

Para almacenar. recuperar. y procesar los datos ambiguos que existen en el mundo real. los modelos de datos utilizados hasta ahora no han sido los suficientemente buenos. de manera que han sido propuestas las bases de datos borrosas. Casi todas las bases de datos borrosas son extensiones de los modelos relacionales, pero su formulación difiere de acuerdo al tipo de ambigüedad que estén intentando expresar y manipular.

Primero, podemos considerar un modelo de datos para relaciones estándar, el cual utiliza la teoría borrosa en la condiciones de recuperación de datos para los *queries* (peticiones de información a la base de datos). Se puede utilizar un método de procesamiento para los queries borrosos basado en el lenguaje de manipulación de datos llamado SQL.

Consideremos un base de datos de empleados como en la figura 3.3. Podemos considerar en primer lugar el conjunto de valores lingüísticos borrosos que puede ser utilizado para los atributos. Por ejemplo podemos usar

T(EDAD) = { viejo, joven, muy viejo, no viejo, más o menos viejo, ... }

T(SALARIO) = { alto, bajo, muy alto, más o menos alto, ... }

T(EMP-AÑO) = { reciente, más o menos reciente, muy reciente, ... }.

donde no podemos realizar queries borrosos para nombres. Los conjuntos T(X) equivalen a los conjuntos de referencia y los valores lingüísticos borrosos equivalen a los subconjuntos borrosos. Al hacer esto, estamos en la posibilidad de escribir los siguientes queries los cuales contienen condiciones borrosas.

EMP

NOMBRE	EDAD	SALARIO	EMP-AÑO
Anderson	30	20 000	1974
Brown	30	15 000	1974
Long	25	40 000	1972
Nelson	55	20 000	1950
Smith	25	25 000	1975

Fig. 3.3 Tabla de Empleados

QUERY 1

¿ De la gente, quién es joven o se empleó recientemente, y cuáles son los nombres de aquellos quienes tienen salarios altos ?

SELECT NOMBRE

```
FROM EMP
WITH ( EDAD = "joven" o EMP-AÑO = "reciente" )
        y SALARIO = "alto"
```

QUERY 2

¿ De la gente, quién es viejo, o se empleó más o menos recientemente y con salarios muy altos ?

```
SELECT NOMBRE, EDAD, SALARIO
FROM EMP
WITH EDAD = "viejo" o
        EMP-AÑO = "más o menos reciente"
        y SALARIO = "muy alto"
```

Consideremos el método para procesar el query 1. La primer tupla para la base de datos EMP, (Anderson, 30, 20000, 1974), tiene una función de membresía $\mu_{joven}(30)$ para el valor de atributo de EDAD. Puesto que "joven" está en T(EDAD), el método para calcular $\mu_{joven}(30)$ se puede obtener a partir de las gráficas de la figura 3.4, en este caso $\mu_{joven}(30) = 0.5$.

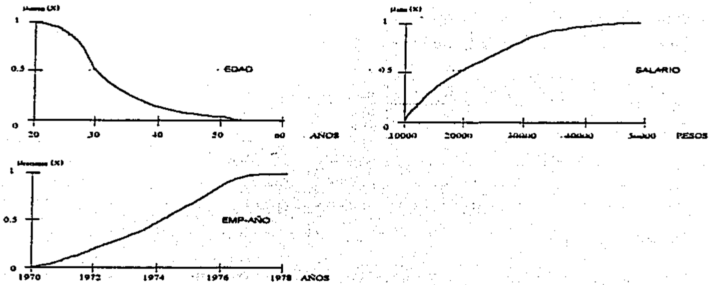


Fig. 3.4 Gráficas de las Funciones de Membresía

De la misma forma, el valor de EMP-AÑO es 1974, así que hacemos $\mu_{reciente}(1974) = 0.6$. El salario es 20000, entonces $\mu_{alto}(20\,000) = 0.5$.

En los queries se emplean las operaciones "and" y "or" en las condiciones, que están definidas como

$$\gamma(p \textit{ and } q) = \min(\gamma(p), \gamma(q))$$
$$\gamma(p \textit{ or } q) = \text{máx}(\gamma(p), \gamma(q))$$

El query completo tiene un grado de

$$\text{mín}(\text{máx}(0.5, 0.6), 05) = \underline{\text{mín}}(0.6, 0.5) = 0.5$$

Esto puede ser llevado a cabo para las tuplas restantes. Los resultados están resumidos en la tabla 3.2.

Condición / Tupla	EDAD = "Joven"	EMP-AÑO = "Reciente"	SALARIO = "Alto"	QUERY COMPLETO
⟨Anderson, 30, 20000, 1974⟩	0.5	0.6	0.5	0.5
⟨Brown, 30, 15000, 1974⟩	0.5	0.6	0	0
⟨Long, 25, 40000, 1972⟩	1	0	1	1
⟨Nelson, 55, 20000,1950⟩	0	0	0.5	0
⟨Smith, 25, 25000, 1975⟩	1	0.8	0.8	0.8

Tabla 3.2 Valores de Verdad para Queries Borrosos

CAPÍTULO 4

RELACIONES BORROSAS

4.1 CONCEPTO DE RELACIÓN BORROSA

Una relación borrosa está definida por P un conjunto producto de n conjuntos y M su conjunto de membresía: una relación *n-aria* borrosa es un conjunto borroso de P que toma sus valores en M.

Ejemplo 4-1: Sean:

$$X_1 = \{ x_1, x_2, x_3 \}, \quad X_2 = \{ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \}$$

y $M = [\,0,\ 1\,]$.

La tabla siguiente expresa una relación 2-*aria* borrosa:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0.1	0.3	1
x_2	0	0.8	0	0	1
x_3	0.4	0.4	0.5	0	0.2

Una relación borrosa en $X_1 \times X_2$ se expresa también como:

$$x \in X_1,\ y \in X_2 \ :\ x \underset{\sim}{\mathcal{R}}\ y$$

Los símbolos empleados para las relaciones borrosas son:

$\bigvee_{x}$ Este símbolo representa el máximo respecto a un elemento o variable x.

$\bigwedge_{x}$ Este símbolo representa el mínimo respecto a un elemento o variable x.

De esta forma se puede escribir:

$\mu_1(x) = \bigvee_y \mu(x, y)$ equivale a $\mu_1(x) = \text{MAX}_y (x, y)$

y

$\mu_2(x) = \bigwedge_y \mu(x, y)$ equivale a $\mu_2(x) = \text{MIN}_y (x, y)$

4.2 OPERACIONES CON RELACIONES BORROSAS

UNIÓN DE DOS RELACIONES

La "unión" de dos relaciones $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, es representada por $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$ ó $\underset{\sim}{\mathcal{R}} + \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$ es una relación tal que:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \vee \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y)$$
$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \text{MAX}[\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y),\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y)].$$

Ejemplo 4-2: Sea las siguientes relaciones

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0.1	0	0.4
x_2	0.5	1	0	0.7
x_3	0.8	0.9	0.9	1

$\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.5	0	0.2	0
x_2	0	1	0.1	0.2
x_3	0.9	0.4	0	1

Calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.5	0.1	0.2	0.4
x_2	0.5	1	0.1	0.7
x_3	0.9	0.9	0.9	1

INTERSECCIÓN DE DOS RELACIONES

Se define la "intersección" de dos relaciones $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, representada por $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, por la expresión:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \mathrm{MIN}[\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y),\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y)].$$

Ejemplo 4-3:

Sean las siguientes relaciones

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0.1	0	0.4
x_2	0.5	1	0	0.7
x_3	0.8	0.9	0.9	1

$\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0	0.2	0.5
x_2	0	1	0.1	1
x_3	0.9	0.4	0.7	0

Calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0.4
x_2	0	1	0	0.7
x_3	0.8	0.4	0.7	0

PRODUCTO ALGEBRAICO DE DOS RELACIONES

Se define el producto algebraico de dos relaciones $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, representado por $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, mediante la expresión:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \bullet \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y).$$

En el miembro de la derecha, el símbolo (•) indica el producto numérico.

Ejemplo 4-4:

Sean las siguientes relaciones

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0.1	0	0.4
x_2	0.5	1	0	0.7
x_3	0.8	0.9	0.9	1

$\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0	0.2	0.5
x_2	0	1	0.1	1
x_3	0.9	0.4	0.7	0

Calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	0.2
x_2	0	1	0	0.7
x_3	0.72	0.36	0.63	0

SUMA ALGEBRAICA DE DOS RELACIONES

Se define la suma algebraica de dos relaciones $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ y $\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, representada por $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \hat{+} \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, mediante la expresión:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \hat{+} \underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) + \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y) - \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \bullet \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}(x, y)$$

donde el símbolo "•" indica la multiplicación ordinaria, y "+" la suma algebraica.

Ejemplo 4-5:

Sean las siguientes relaciones

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0.1	0	0.4
x_2	0.5	1	0	0.7
x_3	0.8	0.9	0.9	1

$\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0	0.2	0.5
x_2	0	1	0.1	1
x_3	0.9	0.4	0.7	0

Calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \hat{+} \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \hat{+} \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0.1	0.2	0.7
x_2	0.5	1	0.1	1
x_3	0.98	0.94	0.97	1

COMPLEMENTO DE UNA RELACIÓN

El complemento de una relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$, representado por $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$ es tal que:

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2 : \qquad \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Ejemplo 4-5:

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0.4	0.2	0
x_2	0.5	0	1	0.7
x_3	0.4	0	0.1	0.4

$\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.7	0.6	0.8	1
x_2	0.5	1	0	0.3
x_3	0.6	1	0.9	0.6

SUMA DISYUNTIVA DE DOS RELACIONES BORROSAS

Se define la suma disyuntiva como $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$, mediante la siguiente expresión:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{Z}} = (\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \overline{\underset{\sim}{\mathcal{Z}}}) \cup (\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{Z}})$$

Ejemplo 4-6:

Calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	1	0
x_2	0.8	0.9	0.9

$\underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	1	0.1
x_2	0.9	0.4	0

$\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0	1
x_2	0.2	0.1	0.1

$\overline{\underset{\sim}{\mathcal{S}}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	0.9
x_2	0.1	0.6	1

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \overline{\underset{\sim}{\mathcal{S}}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0	0
x_2	0.1	0.6	0.9

$\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{S}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	0.1
x_2	0.2	0.1	0

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{S}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0	0.1
x_2	0.2	0.6	0.9

De manera similar, se define la operación complementaria:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \;\overline{\oplus}\; \underset{\sim}{\mathcal{S}} = \overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{S}}}$$

$$= (\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \overline{\underset{\sim}{\mathcal{S}}}) \cap (\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{S}}).$$

Ejemplo 4-7:

Tomando en cuenta

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{S}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0	0.1
x_2	0.2	0.6	0.9

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \;\overline{\oplus}\; \underset{\sim}{\mathcal{S}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	1	0.9
x_2	0.8	0.4	0.1

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0	0.1
x_2	0.2	0.6	0.9

$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \overline{\ominus} \underset{\sim}{\mathcal{Z}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	1	0.9
x_2	0.8	0.4	0.1

4.3 COMPOSICIÓN DE RELACIONES BORROSAS

4.3.1 COMPOSICIÓN MAX-MIN

Sean dos relaciones borrosas que no pertenecen al mismo conjunto de referencia:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1 \subset X \times Y \text{ y } \underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \subset Y \times Z.$$

Se define la "composición MAX-MIN" de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$ y $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2$ borrosas, representada por $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$, por la expresión:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y, z)]$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x, z) = \underset{y}{\mathrm{MAX}}[\mathrm{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y, z))]$$

donde $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

El siguiente ejemplo muestra la composición MAX-MIN de dos relaciones borrosas.

Ejemplo 4-8:

Sean las siguientes relaciones $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$ y $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2$

$\mathscr{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0	1	0.7
x_2	0.3	0.5	0	0.2	1
x_3	0.8	0	1	0.4	0.3

$\mathscr{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.3	0.4
y_2	0.2	1	0.8	0
y_3	0.8	0	0.7	1
y_4	0.4	0.2	0.3	0
y_5	0	1	0	0.8

Obtener la composición MAX-MIN $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$:

Solución: Para obtener los valores de la composición MAX-MIN se toma la expresión que la define

$$\mu_{\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1}(x, z) = \underset{y}{\mathrm{MAX}}\,[\mathrm{MIN}(\mu_{\mathscr{R}_1}(x, y)\,,\ \mu_{\mathscr{R}_2}(y, z))]$$

El primer valor de la composición a determinar es $(x, z) = (x_1, z_1)$. Para ello se toman todos los $\mathrm{MIN}(\mu_{\mathscr{R}_1}(x_1, y_i)\,,\ \mu_{\mathscr{R}_2}(y_i, z_1))$ donde i = 1, 2, 3, 4, 5.

$\mathrm{MIN}(\mu_{\mathscr{R}_1}(x_1, y_1)\,,\ \mu_{\mathscr{R}_2}(y_1, z_1)) = \mathrm{MIN}\ (0.1, 0.9) = 0.1$

$\mathrm{MIN}(\mu_{\mathscr{R}_1}(x_1, y_2)\,,\ \mu_{\mathscr{R}_2}(y_2, z_1)) = \mathrm{MIN}\ (0.2, 0.2) = 0.2$

$\mathrm{MIN}(\mu_{\mathscr{R}_1}(x_1, y_3)\,,\ \mu_{\mathscr{R}_2}(y_3, z_1)) = \mathrm{MIN}\ (0, 0.8) = 0$

$\text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x_1, y_4), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y_4, z_1)) = \text{MIN}(1, 0.4) = 0.4$

$\text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x_1, y_5), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y_5, z_1)) = \text{MIN}(0.7, 0) = 0$

Ahora se toma el máximo de los y_i, el cual será el valor (x_1, z_1).

$\underset{yi}{\text{MAX}}[\text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x_1, y_i), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y_i, z_1))]$

$= \text{MAX}(0.1, 0.2, 0, 0.4, 0)$

$= 0.4$

Sea $(x, z) = (x_1, z_2)$

$\text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x_1, y_1), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y_1, z_2)) = \text{MIN}(0.1, 0) = 0$

$\text{MIN}(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x_1, y_2), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y_2, z_2)) = \text{MIN}(0.2, 1) = 0.2 \ldots$

y así sucesivamente hasta llegar a determinar (x_3, z_4) en este caso.

Los resultados están dados en la siguiente relación:

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.4	0.7	0.3	0.7
x_2	0.3	1	0.5	0.8
x_3	0.8	0.3	0.7	1

Ejemplo 4-9:

Sean dos relaciones borrosas $x \; \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1 \; y$ y $y \; \underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 \; z$ donde $x, y, z \in \mathbf{R}^+$.

Supongamos:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1}(x, y) = e^{-k(x-y)^2}, \; k \geq 1.$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2}(y, z) = e^{-k(y-z)^2}, \; k \geq 1.$$

Se quiere determinar ahora $\mu_{\underset{\sim}{\mathscr{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathscr{R}}_1}(x, z)$. Consideremos dos valores $x = a$ y $z = b$ de las variables x y z. En este caso las funciones de membresía anteriores son continuas en el intervalo $[0, \infty]$; podemos escribir:

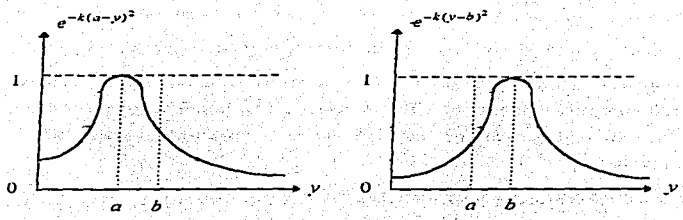
$$\mu_{\underset{\sim}{\mathscr{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathscr{R}}_1}(a, b) = \bigvee_{y} [\mu_{\underset{\sim}{\mathscr{R}}_1}(a, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathscr{R}}_2}(y, b)]$$

$$= \bigvee_{y} [e^{-k(a-y)^2} \wedge e^{-k(y-b)^2}].$$

La composición de $\underset{\sim}{\mathscr{R}}_1$ y de $\underset{\sim}{\mathscr{R}}_2$ mediante la operación máx-mín se representa en la figura 4.1:

Puede verse fácilmente que se tiene

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathscr{R}}_2 \circ \underset{\sim}{\mathscr{R}}_1}(a, b) = e^{-k\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2} = e^{-k\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$



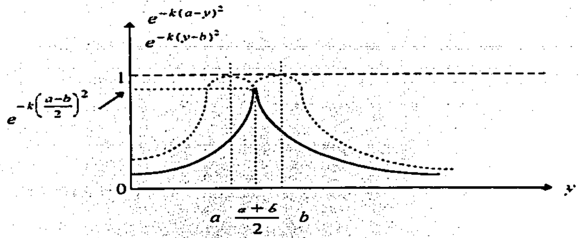


Fig. 4.1 Composición MAX-MIN

Y para todo valor de x y z:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x, z) = e^{-k\frac{(a-b)^2}{4}}$$

Por simplicidad se ha considerado aquí dos funciones $\mu_{R_1}(x, y)$ y $\mu_{R_2}(y, z)$ idénticas, pero el razonamiento sería el mismo para funciones distintas. Sobreponer $\mu_{R_1}(a, y)$ y $\mu_{R_2}(y, b)$ y determinar la curva $\mu_{R_1}(a, y) \wedge \mu_{R_2}(y, b)$ en función de y. Tomar el valor máximo de la curva, lo cual da la abscisa y la ordenada de este máximo en función de y. El problema se complica si la abscisa del máximo no es única. Es necesario entonces hacer intervenir consideraciones más complicadas.

4.3.2 COMPOSICIÓN MAX-PRODUCTO

En este caso, el operador $\wedge$ de la composición MAX-MIN se reemplazará por el operador ($\bullet$) para representar el producto; entonces la fórmula de la composición máx-producto quedará de la forma siguiente:

$$\mu_{R \bullet S}(x, z) = \bigvee_{y} \left[\mu_R(x, y) \bullet \mu_S(y, z) \right]$$

$$= \underset{y}{\mathrm{MAX}} \left[\left(\mu_R(x, y) \bullet \mu_S(y, z) \right) \right]$$

4.3.3 SUBCONJUNTO ORDINARIO DE NIVEL α EN UNA RELACIÓN BORROSA

Sea $\alpha \in [0, 1]$; se llama "subconjunto ordinario de nivel α" de una relación borrosa $\mathcal{R} \subset X \times Y$, al subconjunto ordinario:

$$G_\alpha = \{(x, y) \mid \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha\}.$$

Ejemplo 4-10:

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.3	0.8	1	0
x_2	0.5	1	0.3	0.9
x_3	1	0.2	0.6	0.7

$$G_{0.8} = \{(x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_1)\}.$$

Se puede definir el subconjunto ordinario G_α de otra forma, con la ayuda de una relación $\mathcal{R}_\alpha$ tal que:

$$\mu_{\mathcal{R}_\alpha}(x, y) = 1 \text{ si } \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha$$
$$= 0 \text{ " } \quad \text{ " } < \alpha.$$

Entonces la relación anterior puede quedar como:

$\mathcal{R}_{0.8} =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	0	0

4.3.4 TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN

Toda composición borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ puede descomponerse en la forma :

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \underset{\alpha}{\vee}\, \alpha \bullet \mathcal{R}_\alpha \,,\ 0 < \alpha \leq 1$$

donde

$$\mu_{\mathcal{R}_\alpha}(x, y) = 1 \quad \text{si} \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \geq \alpha$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) < \alpha$$

Y $\alpha \bullet \mathcal{R}_\alpha$ significa que todos los elementos de la relación ordinaria $\mathcal{R}_\alpha$ son multiplicados por α.

Ejemplo 4-11:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.3 & 0.8 & 1 & 0 \\ \hline 0.5 & 1 & 0.3 & 0.9 \\ \hline 1 & 0.2 & 0..6 & 0.7 \\ \hline \end{array} = \vee \left(0.2 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 0.3 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$0.5 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 0.6 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$0.7 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 0.8 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\left. 0.9 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad 1 \bullet \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right)$$

4.4 SUBCONJUNTO BORROSO INDUCIDO POR UNA APLICACIÓN

Sea una aplicación[1] del conjunto X_1 en el conjunto X_2, representada por:

$$X_1 \quad \Gamma \quad X_2$$

o, también, si $x \in X_1$ y $y \in X_2$:

$$y \in \Gamma \{ x \}$$

Sea $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ la función de membresía del subconjunto borroso $\underset{\sim}{A} \subset X_1$: entonces, la aplicación Γ induce en X_2 un subconjunto borroso $\underset{\sim}{B} \subset X_2$ cuya función de membresía es:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in \Gamma^{-1}\{y\}}{MAX} [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)], \text{ si } \Gamma^{-1}\{y\} \neq \varnothing,$$

$$= 0, \text{ si } \Gamma^{-1}\{y\} = \varnothing$$

Ejemplo 4-12: **Sean**

$$X_1 = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \}$$

$$X_2 = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$$

Y una aplicación Γ tal que:

$$\Gamma\{ x_1 \} = \{ y_2 \}, \quad \Gamma\{ x_2 \} = \{ y_1, y_4 \},$$

$$\Gamma\{ x_3 \} = \{ y_1 \}, \quad \Gamma\{ x_4 \} = \{ y_3 \},$$

$$\Gamma\{ x_5 \} = \{ y_1 \}, \quad \Gamma\{ x_6 \} = \{ y_2 \},$$

$$\Gamma\{ x_7 \} = \{ y_4 \}.$$

Sea también la aplicación inversa Γ^{-1}:

[1] La relación no es necesariamente unívoca.

$$\Gamma^{-1}\{y_1\} = \{x_2, x_3, x_5\}, \quad \Gamma^{-1}\{y_2\} = \{x_1, x_6\},$$

$$\Gamma^{-1}\{y_3\} = \{x_4\}, \quad \Gamma^{-1}\{y_4\} = \{x_2, x_7\}.$$

Y, finalmente, sea el subconjunto borroso $\underset{\sim}{A} \subset X_1$:

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1 \mid 0.3), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.2), (x_6 \mid 0.9), (x_7 \mid 0.8)\}$$

Se tiene entonces

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1) = \underset{\{x_2, x_3, x_5\}}{\mathrm{MAX}} (0.7;\ 1;\ 0.2) = 1.$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_2) = \underset{\{x_1, x_6\}}{\mathrm{MAX}} (0.3;\ 0.9) = 0.9.$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_3) = \underset{\{x_4\}}{\mathrm{MAX}} (0) = 0.$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_4) = \underset{\{x_2, x_7\}}{\mathrm{MAX}} (0.7;\ 0.8) = 0.8.$$

Estos resultados se muestran en la siguiente figura 4.2.

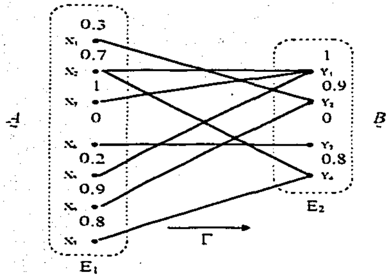


Fig. 4.2 Subconjunto Borroso Inducido por una Aplicación.

4.5 SUBCONJUNTO BORROSO CONDICIONADO

Un subconjunto borroso $\underset{\sim}{B}(x) \subset X_2$ se llama "condicionado en X_1" si su función de membresía depende de $x \in X_1$ como parámetro.

La función condicional de membresía se escribirá entonces:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \| x), \text{ donde } x \in X_1 \quad \text{y} \quad y \in X_2 .$$

Esta función define una aplicación de X_1 en el conjunto de los subconjuntos borrosos definidos en X_2. Así un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A} \subset X_1$ inducirá un subconjunto borroso $\underset{\sim}{B} \subset X_2$ cuya función de membresía será:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in X_1}{MAX}\left(\mathrm{MIN}[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \| x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)]\right)$$

Ejemplo 4-13:

Sea una relación borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ que existe entre

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ X_2 = \{y_1, y_2, y_3\},$$

y definida por:

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.3	0.7	0
x_2	0.2	0.5	0
x_3	1	0	0.8
x_4	0	1	0.5
x_5	0.3	1	0.4
x_6	0.8	0	0

Esta relación $\mathcal{R}$ expresa una función condicional de membresía:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \,||\, x).$$

Supongamos que se tiene un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ de X_1 definido por:

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1\,|\,0.5),\ (x_2\,|\,0.2),\ (x_3\,|\,0.8),\ (x_4\,|\,1),\ (x_5\,|\,0.7),\ (x_6\,|\,0)\}.$$

A este conjunto borroso $\underset{\sim}{A} \subset X_1$ le corresponde entonces un subconjunto borroso en X_2, digamos $\underset{\sim}{B} \subset X_2$, que estará dado por $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in X_1}{MAX}\,(MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y \,||\, x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)])$.

Solución:

Calculemos $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1)$.

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_1),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)] = MIN[0.3, 0.5] = 0.3,$$

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_2),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)] = MIN[0.2, 0.2] = 0.2,$$

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_3),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3)] = MIN[1, 0.8] = 0.8,$$

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_4),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_4)] = MIN[0, 1] = 0,$$

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_5),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_5)] = MIN[0.3, 0.7] = 0.3,$$

$$MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_6),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_6)] = MIN[0.8, 0] = 0,$$

$$\underset{x_i}{MAX}\,(MIN[\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1 \,||\, x_i),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)])$$
$$= MAX[0.3, 0.2, 0.8, 0, 0.3, 0] = 0.8.$$

Se hará lo mismo para y_2, y luego para y_3. Finalmente se tendrá:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1) = 0.8,\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y_2) = 1,\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y_3) = 0.8.$$

Es decir,

$$\underset{\sim}{B} = \{(y_1 \mid 0.8), (y_2 \mid 1), (y_3 \mid 0.8)\}.$$

Otra forma de representar los subconjuntos borrosos condicionados consiste en lo siguiente. Sean: $X \subset E_1$, $Y \subset E_2$ y la relación borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ que existe entre E_1 y E_2. Esto puede expresarse por la frase: si $X = \underset{\sim}{A}$, entonces $Y = \underset{\sim}{B}$ por la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$; lo que puede escribirse:

$$\underset{\sim}{A} \xrightarrow[\underset{\sim}{\mathcal{R}}]{} \underset{\sim}{B}.$$

Si $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y)$ es la función de membresía de la relación borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ la de $\underset{\sim}{A}$, $\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)$ la de $\underset{\sim}{B}$, entonces se tiene:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y) = \underset{x \in X_1}{MAX}\,(MIN[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y)])$$

$$= \underset{x}{\vee}\,[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y)].$$

Ejemplo 4-14: Sea:

$$E_1 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1 \mid 0.3), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1)\},$$

$$E_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.8	1	0	0.3	0.7
x_2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.7
x_3	0.2	0.3	0	0.2	1

$\underset{\sim}{A}$ se puede presentar como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \underset{\sim}{A} = & \boxed{\begin{array}{c|c|c} 0.3 & 0.7 & 1 \end{array}} \end{array}$$

Solución:

Se efectúa la operación MIN para todos los elementos de $\underset{\sim}{A}$ con la columna y_1 de $\underset{\sim}{\mathscr{R}}$: esto da como resultado:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0.3 & 0.7 & 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} y_1 \\ \hline 0.8 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ \hline 0.3 \wedge 0.8 \\ 0.7 \wedge 0.8 \\ 1 \wedge 0.2 \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \\ \hline 0.3 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{array}$$

Ahora se efectúa la operación MAX en los elementos de la columna obtenida: esto da:

$$0.3 \vee 0.7 \vee 0.2 = 0.7.$$

Así tenemos que:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_1) = 0.7.$$

Lo mismo se hará entre los elementos de $\underset{\sim}{A}$ y las columnas de $\underset{\sim}{\mathscr{R}}$, lo que da como resultado:

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(y_2) = 0.3, \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y_3) = 0.7, \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y_4) = 0.4, \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(y_5) = 1.$$

Y finalmente obtenemos $\underset{\sim}{B}$:

$$\underset{\sim}{B} = \{(y_1 \mid 0.7), (y_2 \mid 0.3), (y_3 \mid 0.7), (y_4 \mid 0.4), (y_5 \mid 1)\}.$$

o bien

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\underset{\sim}{B} =$	0.7	0.3	0.7	0.4	1

4.5.1 SUBCONJUNTOS BORROSOS QUE SE CONDICIONAN SUCESIVAMENTE

Si $\underset{\sim}{A}_1$ induce a $\underset{\sim}{A}_2$ por $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$, si $\underset{\sim}{A}_2$ induce a $\underset{\sim}{A}_3$ por $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2$, ... $\underset{\sim}{A}_{n-1}$ induce a $\underset{\sim}{A}_n$ por $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_{n-1}$, entonces $\underset{\sim}{A}_1$ induce a $\underset{\sim}{A}_n$ por $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_{n-1} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_{n-2} \circ \ldots \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$.

Ejemplo 4-15: Sean:

$$E_1 = \{x_1, x_2\}.$$

	x_1	x_2
$\underset{\sim}{A} =$	0.8	0.3

$$E_2 = \{y_1, y_2, y_3\}.$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1 =$		y_1	y_2	y_3
	x_1	0.3	1	0
	x_2	0.8	0	0.7

$$E_3 = \{z_1, z_2, z_3\}.$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2 =$		z_1	z_2	z_3
	y_1	0.7	0.4	1
	y_2	0.2	0	0.8
	y_3	0	0.3	0.9

Solución:

$$
\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}
\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}
\circ
\begin{array}{c|ccc} \mathscr{R}_1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline & 0.3 & 1 & 0 \\ & 0.8 & 0 & 0.7 \end{array}
\circ
\begin{array}{c|ccc} \mathscr{R}_2 & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline & 0.7 & 0.4 & 1 \\ & 0.2 & 0 & 0.8 \\ & 0 & 0.3 & 0.9 \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ \end{array}
\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}
\circ
\begin{array}{c|ccc} \mathscr{R}_2 & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline & 0.7 & 0.4 & 1 \\ & 0.2 & 0 & 0.8 \\ & 0 & 0.3 & 0.9 \end{array}
= \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \end{array}
\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \subset E_3
$$

4.6 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES BINARIAS BORROSAS

Se consideran los siguientes conjuntos donde:

$$E_1 = E_2 = E \text{ y } M = [0, 1]$$

los cuales se ocuparán de las propiedades de las relaciones borrosas en $E \times E$.

Ejemplo 4-16: Sean:

$$E = \{A, B, C, D, E\}.$$

$$M = [0, 1];$$

la tabla o matriz de la figura 4.3 representa una relación en $E \times E$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	0.1	0	0	1	0.8
B	0.8	0.3	0	0.7	1
C	0.8	0.3	0.2	0	0.9
D	0.6	0	1	0.5	0
E	0.2	0.5	1	0.6	0.4

Fig. 4.3

En seguida se examinarán las principales propiedades de las relaciones borrosas. Para representar la función de membresía que define a la relación borrosa, se utilizará la notación $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y)$.

4.6.1 SIMETRÍA

Una relación binaria borrosa simétrica está definida por:

$$\forall\ (x, y) \in E \times E: (\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu) \Rightarrow (\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x) = \mu).$$

Ejemplo 4-17:

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.1	0	0.1	0.9
B	0.1	1	0.2	0.3	0.4
C	0	0.2	0.8	0.8	1
D	0.1	0.3	0.8	0.7	1
E	0.9	0.4	1	1	0

4.6.2 REFLEXIVIDAD

Esta propiedad está definida por:

$$\forall\ (x, x) \in E \times E:\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1.$$

Ejemplo 4-18:

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	1	0	0.2	0.3
B	0	1	0.1	1
C	0.2	0.7	1	0.4
D	0	1	0.4	1

4.6.3 TRANSITIVIDAD

Esta propiedad en una relación borrosa se define:

Sean: $x, y, z \in E$,

$$\forall\ (x, y), (y, z), (x, z) \in E \times E:$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \underset{y}{MAX}\ [\text{MIN}\ (\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y), \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z))].$$

Tal relación también se puede escribir usando otros símbolos:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)].$$

Donde: $\vee$ es un símbolo que significa "máximo de".

$\wedge$ es un símbolo que significa "mínimo de".

En otro caso la propiedad de transitividad en las relaciones formales se define como:

$$\forall\ (x, y), (y, z), (x, z) \in E \times E:$$

$$(x, y) \in G \text{ y } (y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G.$$

Lo que también se escribe

$$\mu_G(x, y) = 1 \text{ y } \mu_G(y, z) = 1 \Rightarrow \mu_G(x, z) = 1.$$

es un caso particular de la propiedad de transitividad para las relaciones borrosas.

La operación $\wedge$ (MIN) corresponde al "y" de la proposición lógica, y la operación $\underset{y}{\vee}$ (MAX respecto a todas las y) corresponde al resultado que se puede obtener por la $\Rightarrow$.

Ejemplo 4-19:

Verificar si la siguiente relación es transitiva.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	0.2	1	0.4	0.4
B	0	0.6	0.3	0
C	0	1	0.3	0
D	0.1	1	1	0.1

Solución:

Arco (A, A).

$\mu(A, A) \wedge \mu(A, A) = 0.2 \wedge 0.2 = 0.2,$

$\mu(A, B) \wedge \mu(B, A) = 1 \wedge 0 = 0,$

$\mu(A, C) \wedge \mu(C, A) = 0.4 \wedge 0 = 0,$

$\mu(A, D) \wedge \mu(D, A) = 0.4 \wedge 0.1 = 0.1,$

MAX $[0.2, 0, 0, 0.1] = 0.2,$

$\mu(A, A) = 0.2 \geq 0.2.$

Arco (A, B).

$\mu(A, A) \wedge \mu(A, B) = 0.2 \wedge 1 = 0.2,$

$\mu(A, B) \wedge \mu(B, B) = 1 \wedge 0.6 = 0.6,$

$\mu(A, C) \wedge \mu(C, B) = 0.4 \wedge 1 = 0.4,$

$\mu(A, D) \wedge \mu(D, B) = 0.4 \wedge 1 = 0.4,$

MAX $[0.2, 0.6, 0.4, 0.4] = 0.6,$

$\mu(A, B) = 1 \geq 0.6.$

Arco (A, C).

$\mu(A, A) \wedge \mu(A, C) = 0.2 \wedge 0.4 = 0.2$.

$\mu(A, B) \wedge \mu(B, C) = 1 \wedge 0.3 = 0.3$,

$\mu(A, C) \wedge \mu(C, C) = 0.4 \wedge 0.3 = 0.3$.

$\mu(A, D) \wedge \mu(D, C) = 0.4 \wedge 1 = 0.4$,

$\text{MAX}\ [0.2, 0.3, 0.3, 0.4] = 0.4$,

$\mu(A, C) = 0.4 \geq 0.4$.

Arco (A, D).

$\mu(A, A) \wedge \mu(A, D) = 0.2 \wedge 0.4 = 0.2$.

$\mu(A, B) \wedge \mu(B, D) = 1 \wedge 0 = 0$,

$\mu(A, C) \wedge \mu(C, D) = 0.4 \wedge 0 = 0$.

$\mu(A, D) \wedge \mu(D, D) = 0.4 \wedge 0.1 = 0.1$,

$\text{MAX}\ [0.2, 0, 0, 0.1] = 0.2$.

$\mu(A, D) = 0.4 \geq 0.2$.

Arco (B, A).

$\mu(B, A) \wedge \mu(A, A) = 0 \wedge 0.2 = 0$.

$\mu(B, B) \wedge \mu(B, A) = 0.6 \wedge 0 = 0$,

$\mu(B, C) \wedge \mu(C, A) = 0.3 \wedge 0 = 0$.

$\mu(B, D) \wedge \mu(D, A) = 0 \wedge 0.1 = 0$,

$\text{MAX}\ [0, 0, 0, 0] = 0$.

$\mu(B, A) = 0 \geq 0$.

Arco (B, B).

$\mu(B, A) \wedge \mu(A, B) = 0 \wedge 1 = 0$,

$\mu(B, B) \wedge \mu(B, B) = 0.6 \wedge 0.6 = 0.6$,

$\mu(B, C) \wedge \mu(C, B) = 0.3 \wedge 1 = 0.3$,

$\mu(B, D) \wedge \mu(D, B) = 0 \wedge 1 = 0$,

$\text{MAX}\ [0, 0.6, 0.3, 0] = 0.6$.

$\mu(B, B) = 0.6 \geq 0.6$.

Arco (B, C).

$\mu(B, A) \wedge \mu(A, C) = 0 \wedge 0.4 = 0$,

$\mu(B, B) \wedge \mu(B, C) = 0.6 \wedge 0.3 = 0.3$.

$\mu(B, C) \wedge \mu(C, C) = 0.3 \wedge 0.3 = 0.3$.

$\mu(B, D) \wedge \mu(D, C) = 0 \wedge 1 = 0$.

$\text{MAX}\ [0, 0.3, 0.3, 0] = 0.3$.

$\mu(B, C) = 0.3 \geq 0.3$.

Arco (B, D).

$\mu(B, A) \wedge \mu(A, D) = 0 \wedge 0.4 = 0$.

$\mu(B, B) \wedge \mu(B, D) = 0.6 \wedge 0 = 0$.

$\mu(B, C) \wedge \mu(C, D) = 0.3 \wedge 0 = 0$,

$\mu(B, D) \wedge \mu(D, D) = 0 \wedge 0.1 = 0$,

$\text{MAX}\ [0, 0, 0, 0] = 0$.

$\mu(B, D) = 0 \geq 0$.

Arco (C, A).

$\mu(C, A) \wedge \mu(A, A) = 0 \wedge 0.2 = 0$.

$\mu(C, B) \wedge \mu(B, A) = 1 \wedge 0 = 0$.

$\mu(C, C) \wedge \mu(C, A) = 0.3 \wedge 0 = 0$.

$\mu(C, D) \wedge \mu(D, A) = 0 \wedge 0.1 = 0$.

MAX $[0, 0, 0, 0] = 0$.

$\mu(C, A) = 0 \geq 0$.

Arco (C, B).

$\mu(C, A) \wedge \mu(A, B) = 0 \wedge 1 = 0$,

$\mu(C, B) \wedge \mu(B, B) = 1 \wedge 0.6 = 0.6$,

$\mu(C, C) \wedge \mu(C, B) = 0.3 \wedge 1 = 0.3$,

$\mu(C, D) \wedge \mu(D, B) = 0 \wedge 1 = 0$,

MAX $[0, 0.6, 0.3, 0] = 0.6$.

$\mu(C, B) = 1 \geq 0.6$.

Arco (C, C).

$\mu(C, A) \wedge \mu(A, C) = 0 \wedge 0.4 = 0$.

$\mu(C, B) \wedge \mu(B, C) = 1 \wedge 0.3 = 0.3$,

$\mu(C, C) \wedge \mu(C, C) = 0.3 \wedge 0.3 = 0.3$.

$\mu(C, D) \wedge \mu(D, C) = 0 \wedge 1 = 0$.

MAX $[0, 0.3, 0.3, 0] = 0.3$.

$\mu(C, C) = 0.3 \geq 0.3$.

Arco (C, D).

$\mu(C, A) \wedge \mu(A, D) = 0 \wedge 0.4 = 0$,

$\mu(C, B) \wedge \mu(B, D) = 1 \wedge 0 = 0$.

$\mu(C, C) \wedge \mu(C, D) = 0.3 \wedge 0 = 0$,

$\mu(C, D) \wedge \mu(D, D) = 0.1 \wedge 0 = 0$.

MAX $[0, 0, 0, 0] = 0$.

$\mu(C, D) = 0 \geq 0$.

Arco (D, A).

$\mu(D, A) \wedge \mu(A, A) = 0.1 \wedge 0.2 = 0.1$.

$\mu(D, B) \wedge \mu(B, A) = 1 \wedge 0 = 0$.

$\mu(D, C) \wedge \mu(C, A) = 1 \wedge 0 = 0$,

$\mu(D, D) \wedge \mu(D, A) = 0.1 \wedge 0.1 = 0.1$.

MAX $[0.1, 0, 0, 0.1] = 0.1$.

$\mu(D, A) = 0.1 \geq 0.1$.

Arco (D, B).

$\mu(D, A) \wedge \mu(A, B) = 0.1 \wedge 1 = 0.1$,

$\mu(D, B) \wedge \mu(B, B) = 1 \wedge 0.6 = 0.6$,

$\mu(D, C) \wedge \mu(C, B) = 1 \wedge 1 = 1$.

$\mu(D, D) \wedge \mu(D, B) = 0.1 \wedge 1 = 0.1$,

MAX $[0.1, 0.6, 1, 0.1] = 1$.

$\mu(D, B) = 1 \geq 1$.

Arco (D, C).

$\mu(D, A) \wedge \mu(A, C) = 0.1 \wedge 0.4 = 0.1.$

$\mu(D, B) \wedge \mu(B, C) = 1 \wedge 0.3 = 0.3.$

$\mu(D, C) \wedge \mu(C, C) = 1 \wedge 0.3 = 0.3.$

$\mu(D, D) \wedge \mu(D, C) = 0.1 \wedge 1 = 0.1.$

MAX $[0.1, 0.3, 0.3, 0.1] = 0.3.$

$\mu(D, C) = 1 \geq 0.3.$

Arco (D, D).

$\mu(D, A) \wedge \mu(A, D) = 0.1 \wedge 0.4 = 0.1.$

$\mu(D, B) \wedge \mu(B, D) = 1 \wedge 0 = 0.$

$\mu(D, C) \wedge \mu(C, D) = 1 \wedge 0 = 0.$

$\mu(D, D) \wedge \mu(D, D) = 0.1 \wedge 0.1 = 0.1.$

MAX $[0.1, 0, 0, 0.1] = 0.1.$

$\mu(D, D) = 0.1 \geq 0.1.$

Por lo tanto la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es transitiva.

La operación definida para la propiedad transitiva se efectúa "renglones por columnas", como se hace ordinariamente en el cálculo matricial.

La figura 4.4 indica como proceder para obtener:

$$\vee\ [(x_{i1} \wedge x_{1j}), (x_{i2} \wedge x_{2j}), (x_{i3} \wedge x_{3j}), \ldots, (x_{i,n-1} \wedge x_{n-1,j}), (x_{in} \wedge x_{nj})].$$

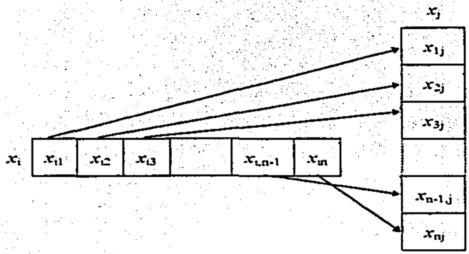


Fig. 4.4

4.6.4 CLAUSURA TRANSITIVA DE UNA RELACIÓN BINARIA BORROSA

Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación borrosa en $E \times E$, que se define como sigue:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}},$$

por

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2}(x, z) = \underset{y}{\mathrm{MAX}}\,[\mathrm{MIN}\,(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y),\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z))],$$

donde $x, y, z \in E$.

La expresión anterior puede escribirse también de la siguiente manera:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2}(x, z) = \underset{y}{\vee}\,[\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)].$$

La propiedad que define la transitividad también se puede presentar de la manera siguiente:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}} \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}}.$$

Sea:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}},$$

y de aquí:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+1} \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k},\ k = 1, 2, 3, ...$$

Y también, evidentemente:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k} \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}},\ k = 1, 2, 3......$$

Se llama "clausura transitiva" de una relación binaria borrosa $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$, la relación:

$$\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^3 \cup ...$$

Teorema I. La clausura transitiva de una relación binaria borrosa cualquiera es una relación borrosa transitiva.

Demostración. Se tienen las propiedades siguientes:

$$(\underset{\sim}{\mathcal{R}} \supset \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2) \Leftrightarrow (\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}) \Leftrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{R}} \text{ es transitiva.}$$

$$(\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2) \Rightarrow (\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}) \Leftrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{R}} \text{ es transitiva.}$$

El teorema *I* da pues. el medio de construir una relación transitiva a partir de una relación cualquiera.

Teorema II. Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación borrosa binaria cualquiera. si a partir de un cierto k se tiene:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+1} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k}.$$

Entonces:

$$\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k.$$

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} &= \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+1} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+2} \cup \ldots \\ &= \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k \cup \ldots \\ &= \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \ldots \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k.\end{aligned}$$

Pero se puede igualmente ver aparecer un fenómeno cíclico tal que:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+2} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+4} = \ldots \text{ y } \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+1} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+3} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^{k+5} = \ldots$$

Ejemplo 4-20:

Se da una relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ cualquiera .

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}} & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0 & 0.2 \\
\hline
\end{array}$$

Obtener la clausura transitiva $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$.

Solución: Primero se calcula $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}} & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0 & 0.2 \\
\hline
\end{array}
\;\circ\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}} & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0 & 0.2 \\
\hline
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\
\hline
\end{array}$$

Ahora calculamos $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^3$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\
\hline
\end{array}
\;\circ\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}} & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0 & 0.2 \\
\hline
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}}^3 & A & B & C \\
\hline
A & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\
\hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\
\hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\
\hline
\end{array}$$

Se puede ver que $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^3 = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$ y debido al Teorema *II* ya no es necesario continuar con el proceso.

Finalmente

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}} & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0 & 0.2 \\ \hline
\end{array}
\;\cup\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ \hline
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ \hline
\end{array}$$

También se puede verificar que $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}^2 \subset \hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$ se cumple.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ \hline
\end{array}
\;\circ\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 1 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ \hline
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{c|c|c|c|}
\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}^2 & A & B & C \\ \hline
A & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\ \hline
B & 0 & 0.4 & 0 \\ \hline
C & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ \hline
\end{array}$$

4.6.5 RELACIÓN DE PREORDEN BORROSA

Una relación binaria borrosa que posee las propiedades de reflexividad y de transitividad es una relación de preorden borrosa.

Teorema.I. Si $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es transitiva y reflexiva, entonces:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^k = \underset{\sim}{\mathcal{R}},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Demostración. Basta recordar la definición de transitividad y demostrar:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}}, \text{ si se impone que}$$

$$\forall\, x:\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1.$$

Puesto que:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}, \text{ si tiene}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2}(x, z) = \bigvee_y \left[\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z) \right].$$

El miembro de la derecha de la igualdad anterior contiene dos términos iguales:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(z, z) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z).$$

Y se tiene

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(z, z) = 1 \qquad \textit{(reflexividad)}.$$

Recordemos que $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es transitiva, es decir:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)];$$

resulta entonces que $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$ es mayor o igual que todos los términos $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)$, esto es el valor del miembro de la derecha de $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2}(x, z)$, y se tiene

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}}.$$

Teorema II. Si $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es un preorden entonces:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \ldots = \underset{\sim}{\mathcal{R}}^k = \ldots = \hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}.$$

Ejemplo 4-21:

Verificar que la figura 4.5 representa un preorden en:

$$E = \{ A, B, C, D, E \}$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

Fig. 4.5

Solución:

Primero se verifica la transitividad con ayuda de la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}}$.

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \circ \underset{\sim}{\mathcal{R}}$$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

$\circ$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

$=$

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

Entonces la relación es transitiva.

A continuación se verifica la reflexividad. La reflexividad aparece directamente por la presencia de los 1, en la diagonal principal.

Por último se verifica que $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 = \underset{\sim}{\mathcal{R}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

=

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$	A	B	C	D	E
A	1	0.7	0.8	0.5	0.5
B	0	1	0.3	0	0.2
C	0	0.7	1	0	0.2
D	0.6	1	0.9	1	0.6
E	0	0	0	0	1

SEMIPREORDEN BORROSO

Una relación borrosa transitiva pero no reflexiva se llama "semipreorden borroso", o también preorden borroso no reflexivo.

Ejemplo 4-22:

La relación representada en la figura 4.6 es transitiva pero no reflexiva, es un "semipreorden".

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C
A	0.2	1	0.4
B	0	0.6	0.3
C	0	1	0.3

Fig. 4.6

PREORDEN BORROSO ANTIRREFLEXIVO

Un caso particular de semipreorden borroso es en el que:

$$\forall\, x \in E:\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 0$$

Se dice entonces que el preorden es antirreflexivo.

Ejemplo 4-23:

La relación de preorden representada en la figura 4.7 es antirreflexiva.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C
A	0	1	0,4
B	0	0	0
C	0	1	0

Fig. 4.7

4.6.6 RELACIÓN DE SIMILITUD

Una relación binaria borrosa que es:

- Transitiva.
- Reflexiva.
- Simétrica.

se llama *"relación de similitud"* o *"relación de equivalencia borrosa"*. Es, evidentemente un preorden.

Teorema I. Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \subset E \times E$ una relación de similitud. Sean tres elementos $x, y, z \in E$. Se establece que:

$$c = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(z, x).$$

$$a = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x).$$

$$b = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(z, y).$$

Entonces:

$$c \geq a = b \;\text{ y }\; a \geq b = c \;\text{ y }\; b \geq c = a.$$

Dicho de esta forma, estas tres cantidades a, b y c, dos al menos son iguales y la tercera es menor que las otras dos.

Demostración. Se tiene ya, por hipótesis:

$$c \geq a \wedge b.$$

$$b \geq c \wedge a.$$

$$a \geq b \wedge c.$$

Supongamos que se tiene:

$$c \geq b > a.$$

Entonces $c \geq a \wedge b$ y $b \geq c \wedge a$ se verifican, pero no $a \geq b \wedge c$; y si se toma que $b = a$, se verifican las tres relaciones.

Supongamos que se tiene:

$$c \geq a > b.$$

Entonces $c \geq a \wedge b$ y $a \geq b \wedge c$ se verifican, pero no $b \geq c \wedge a$; y si se toma que $a = b$, se verifican las tres relaciones.

No se puede tener $c \geq b > a$ ni $c \geq a > b$, pero, por lo contrario:

$$c \geq a = b \text{ concuerda.}$$

De la misma manera se demostrará que no se puede tener $a \geq b > c$ ó $a \geq c > b$. Pero

$$a \geq b > c \text{ concuerda.}$$

También se demostrará que no se puede tener $b \geq c > a$ o $b \geq a > c$, pero

$$b \geq a = c \text{ concuerda.}$$

Así, es necesario que sean iguales dos de los tres valores.

Por consiguiente las desigualdades quedan como sigue:

Si $a = b$: $\quad c \geq a \wedge b.$

$$b = c \wedge a.$$

$$a = b \wedge c.$$

Si $b = c$: $\quad c = a \wedge b.$

$$b = c \wedge a.$$

$$a \geq b \wedge c.$$

Si $c = a$: $\quad c = a \wedge b.$

$$b \geq c \wedge a.$$

$$a = b \wedge c.$$

Ejemplo 4-24:

Verificar que la siguiente relación sea relación de similitud.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.8	0.7	1	0.9
B	0.8	1	0.7	0.8	0.8
C	0.7	0.7	1	0.7	0.7
D	1	0.8	0.7	1	0.9
E	0.9	0.8	0.7	0.9	1

Solución:

Se puede verificar directamente la reflexividad y la simetría de la relación. Para verificar la transitividad, basta calcular $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$	A	B	C	D	E
A	1	0.8	0.7	1	0.9
B	0.8	1	0.7	0.8	0.8
C	0.7	0.7	1	0.7	0.7
D	1	0.8	0.7	1	0.9
E	0.9	0.8	0.7	0.9	1

Entonces $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es transitiva, ya que $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{R}}$, por lo tanto $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es de similitud.

4.6.7 SUBRELACIÓN DE SIMILITUD EN UN PREORDEN BORROSO

Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \subset E \times E$ una relación de preorden borroso. Si existe un subconjunto ordinario $E_1 \subset E_2$ tal que: $\forall\ x, y \in E_1 : \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x)$, los elementos de E_1 formarán entre ellos una relación de similitud que denominaremos "subrelación de similitud" en el preorden $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$.

Se considera que una subrelación de similitud es maximal si no es una subrelación de similitud de ninguna otra de la misma naturaleza en la relación considerada. Todas las subrelaciones de similitud maximales son disjuntas, es decir, si cada uno de los elementos del conjunto referencia respectivo, si éste pertenece a una subrelación maximal de similitud, no pertenece a ninguna otra. Los subconjuntos originados por tales subrelaciones maximales de similitud disjuntas forman lo que se conoce como "clases de similitud" del preorden.

Ejemplo 4-25:

Sea la relación

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	E	F	D	G
A	1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.4
B	0.2	1	0.5	0.2	0.2	0.3	0.5
C	0.2	0.5	1	0.2	0.2	0.3	0.5
E	0.2	0.2	0.2	1	0.8	0.3	0.5
F	0.2	0.2	0.2	0.8	1	0.3	0.5
D	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1	0.4
G	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1

Se puede verificar que la relación es un preorden, pero no es una relación simétrica. Podemos ver que la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ puede descomponerse en tres subrelaciones: $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_1$ relativa a $\{A, B, C, E, F\}$; $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_2$ relativa a $\{D\}$, y $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_3$ relativa a $\{G\}$. Los subconjuntos ordinarios $K_1 = \{A, B, C, E, F\}$, $K_2 = \{D\}$, $K_3 = \{G\}$ son maximales para la propiedad de similitud. De acuerdo a esto la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ de preorden borroso se puede descomponer en las clases de similitud formadas por las subrelaciones maximales de similitud disjuntas que forman K_1, K_2, y K_3.

Ejemplo 4-26: La figura 4.8 representa una relación de preorden borrosa.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	1	0.2	0.2	0.5
B	0.2	1	0.2	0.2
C	0.5	0.2	1	0.5
D	0.2	0.2	0.2	1

Fig. 4.8

En esta relación encontramos tres subrelaciones de similitud: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, y $\mathcal{R}_3$, pero si bien son maximales no son disjuntas y, por tanto, no constituyen clases de similitud.

$\mathcal{R}_1$	A	B
A	1	0.2
B	0.2	1

$\mathcal{R}_2$	B	C
B	1	0.2
C	0.2	1

$\mathcal{R}_3$	B	D
B	1	0.2
D	0.2	1

PREORDEN BORROSO REDUCIBLE

Cuando un preorden borroso se puede descomponer en clases de similitud se denomina "preorden borroso reducible". Así, el ejemplo anterior podemos decir que no es reducible.

Aún cuando los ejemplos anteriores hacen referencia a un conjunto finito, la descomposición en clases de similitud es válida si el conjunto es infinito, es decir, las clases pueden ser finitas o no, y su número finito o infinito.

BÚSQUEDA DE SUBRELACIONES DE SIMILITUD MAXIMALES DE UN PREORDEN

Cuando se tienen casos simples, al examinar los pares de elementos para los que se tiene la simetría, se obtienen inmediatamente las subrelaciones de similitud maximales, que pueden ser disjuntas o no. En casos no tan simples se dispone de un procedimiento más general que se describe a continuación, y que posteriormente se utilizará para la búsqueda de subrelaciones maximales de similitud.

Algoritmo de Malgrange. En este algoritmo se trabaja con una matriz booleana asociada a un grafo, de la cual se consideran ciertas submatrices necesarias para la aplicación del algoritmo, y son:

- "Submatriz completa", es una submatriz cuyos elementos son 1 sin excepción.
- "Submatriz principal" o "Submatriz completa maximal", es una submatriz completa que no está contenida en ninguna otra submatriz completa.
- "Cobertura" de una matriz booleana, es un conjunto de submatrices completas que cubren todos los coeficientes de valor 1 de esta matriz.

Para iniciar, partamos de una matriz booleana $[M]$.

$$[M] = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Sean I el conjunto de renglones y J el conjunto de columnas de una matriz booleana. Cada submatriz completa se define por la pareja de subconjuntos ordinarios $(I_p\ ,\ J_q)$ con $I_p \subset I$ y $J_q \subset J$. Definamos a dos submatrices completas cualesquiera de la matriz booleana $[M]$:

$[M_1]$ definida por $(I_1\ ,\ J_1)$ y $[M_2]$ definida por $(I_2\ ,\ J_2)$.

Las operaciones $\cup$ y $\cap$ hacen corresponder a las dos submatrices:

$[M_1] \cup [M_2] = [M']$ definida por la pareja $(I_1 \cup I_2\ .\ J_1 \cap J_2)$.

$[M_1] \cap [M_2] = [M'']$ definida por la pareja $(I_1 \cap I_2\ .\ J_1 \cup J_2)$.

y se demuestra que son operaciones internas en el conjunto M de submatrices completas de $[M]$.

Al aplicar de manera alternada las reglas siguientes a las submatrices completas de una cobertura:

$$C = \{[M_1], [M_2], \ldots, [M_p]\},$$

hasta donde ya no sea posible, nos permite obtener todas las submatrices principales de la matriz $[M]$ en un número finito de pasos.

Primera regla. Se suprime toda matriz $[M_k]$ contenida en otra submatriz $[M_l]$ de la cobertura C.

Segunda regla. Se añaden a C las submatrices obtenidas por las operaciones $\cup$ y $\cap$ definidas anteriormente y aplicadas a todos los pares de matrices $[M_k]$ y $[M_l]$ conservadas en la cobertura (excepto si la submatriz completa está contenida en una submatriz que figure en C, lo que evita un proceso infinito).

Veamos un ejemplo empleando la matriz $[M]$ definida anteriormente.

Calculemos las submatrices principales de la matriz booleana $[M]$.

Fase 1. Escojamos la cobertura.

$$[M_1]=A \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{d} & \multicolumn{1}{c}{e} & \multicolumn{1}{c}{f} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad [M_2]=B \quad \begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{c} \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$[M_3]=C \quad \begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{d} & \multicolumn{1}{c}{e} \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad [M_4]=D \quad \begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{f} \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Fase 2. **(Segunda regla).**

Vamos a calcular las uniones e intersecciones.

$I_1 \cup I_2 = \{A, B\}$, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$,
$I_1 \cup I_3 = \{A, C\}$, $J_1 \cap J_3 = \{b, d, e\}$.

de donde se obtiene una nueva submatriz:

$$[M_5]= \begin{array}{c|c|c|c|} & b & d & e \\ \hline A & 1 & 1 & 1 \\ \hline C & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$I_1 \cup I_4 = \{A,\ D\}\ ,\ J_1 \cap J_4 = \{b, f\},$$

de donde se obtiene una nueva submatriz:

$$[M_6]= \begin{array}{c|c|c|} & b & d \\ \hline A & 1 & 1 \\ \hline D & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$I_2 \cup I_3 = \{B,\ C\}\ ,\ J_2 \cap J_3 = \varnothing,$$
$$I_2 \cup I_4 = \{B,\ D\}\ ,\ J_2 \cap J_4 = \{c\}$$

de donde se obtiene una nueva submatriz:

$$[M_7]= \begin{array}{c|c|} & c \\ \hline B & 1 \\ \hline D & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$I_3 \cup I_4 = \{C,\ D\}\ ,\ J_3 \cap J_4 = \{b\},$$

de donde se obtiene una nueva sumbatriz:

$$[M_8]= \begin{array}{c|c|} & b \\ \hline C & 1 \\ \hline D & 1 \\ \hline \end{array}$$

Todas las intersecciones $I_i \cap I_j$, $\forall\ i,\ j$, son vacías: por lo tanto, no es necesario calcular los $J_i \cup J_j$.

Fase 3. (Primera regla). La nueva cobertura es:

$$C' = \{[M_1], [M_2], [M_3], [M_4], [M_5], [M_6], [M_7], [M_8]\}.$$

No se conserva $[M_3]$, ya que está contenida en $[M_5]$.

Fase 4. (Segunda regla). Calcularemos las uniones e intersecciones:

$I_1 \cup I_5 = \{A, C\}$, $\quad J_1 \cap J_5 = \{b, d, e\}$, $\quad$ da $[M_5]$.
$I_1 \cup I_6 = \{A, D\}$, $\quad J_1 \cap J_6 = \{b, f\}$, $\quad$ da $[M_6]$.
$I_1 \cup I_7 = \{A, B, D\}$, $\quad J_1 \cap J_7 = \varnothing$.
$I_1 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $\quad J_1 \cap J_8 = \{b\}$.

Esto da una nueva submatriz:

$$[M_9] = \begin{array}{c|c|} & b \\ \hline A & 1 \\ \hline C & 1 \\ \hline D & 1 \\ \hline \end{array}$$

$I_2 \cup I_5 = \{A, B, C\}$, $\quad J_2 \cap J_5 = \varnothing$.
$I_2 \cup I_6 = \{A, B, D\}$, $\quad J_2 \cap J_6 = \varnothing$.
$I_2 \cup I_7 = \{B, D\}$, $\quad J_2 \cap J_7 = \{c\}$, $\quad$ da $[M_7]$:
$I_2 \cup I_8 = \{B, C, D\}$, $\quad J_2 \cap J_8 = \varnothing$.
$I_4 \cup I_5 = \{A, C, D\}$, $\quad J_4 \cap J_5 = \{b\}$, $\quad$ da $[M_9]$:
$I_4 \cup I_6 = \{A, D\}$, $\quad J_4 \cap J_6 = \{b, f\}$, $\quad$ da $[M_6]$:
$I_4 \cup I_7 = \{B, D\}$, $\quad J_4 \cap J_7 = \{c\}$, $\quad$ da $[M_7]$:
$I_4 \cup I_8 = \{C, D\}$, $\quad J_4 \cap J_8 = \{b\}$, $\quad$ incluida en $[M_9]$:
$I_5 \cup I_6 = \{A, C, D\}$, $\quad J_5 \cap J_6 = \{b\}$, $\quad$ da $[M_9]$:
$I_5 \cup I_7 = \{A, B, C, D\}$, $\quad J_5 \cap J_7 = \varnothing$.
$I_5 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $\quad J_5 \cap J_8 = \{b\}$, $\quad$ da $[M_9]$:
$I_6 \cup I_7 = \{A, B, D\}$, $\quad J_6 \cap J_7 = \varnothing$.
$I_6 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $\quad J_6 \cap J_8 = \{b\}$, $\quad$ da $[M_9]$:
$I_7 \cup I_8 = \{A, C, D\}$, $\quad J_1 \cap J_8 = \{b\}$.
$I_7 \cup I_8 = \{B, C, D\}$, $\quad J_7 \cap J_8 = \varnothing$.
$I_1 \cap I_5 = \{A\}$, $\quad J_1 \cup J_5 = \{b, d, e, f\}$, $\quad$ da $[M_1]$:

$I_1 \cap I_6 = \{A\}$, $J_1 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$, da $[M_1]$;
$I_1 \cap I_7 = \varnothing$, $I_1 \cap I_8 = \varnothing$.
$I_2 \cap I_5 = \varnothing$. $I_2 \cap I_6 = \varnothing$.
$I_2 \cap I_7 = \{B\}$, $J_2 \cup J_7 = \{a, c\}$, da $[M_2]$;
$I_2 \cap I_8 = \varnothing$. $I_4 \cap I_5 = \varnothing$;
$I_4 \cap I_6 = \{D\}$, $J_4 \cup J_6 = \{b, c, f\}$, da $[M_4]$;
$I_4 \cap I_7 = \{D\}$, $J_4 \cup J_7 = \{b, c, f\}$, da $[M_4]$;
$I_4 \cap I_8 = \{D\}$, $J_4 \cup J_8 = \{b, c, f\}$, da $[M_4]$;
$I_5 \cap I_6 = \{A\}$, $J_5 \cup J_6 = \{b, d, e, f\}$, da $[M_1]$;
$I_5 \cap I_7 = \varnothing$.
$I_5 \cap I_8 = \{C\}$, $J_5 \cup J_8 = \{b, d, e\}$, incluida en $[M_5]$;
$I_6 \cap I_7 = \{D\}$, $J_6 \cup J_7 = \{b, d, f\}$, da $[M_4]$;
$I_6 \cap I_8 = \{D\}$, $J_6 \cup J_8 = \{b, f\}$, incluida en $[M_4]$;
$I_7 \cap I_8 = \{D\}$, $J_7 \cup J_8 = \{b, c\}$, incluida en $[M_4]$;

Fase 5. (Primera regla). La nueva cobertura es:

$$C^{**} = \{[M_1], [M_2], [M_3], [M_4], [M_6], [M_7], [M_8], [M_9]\}$$

$[M_8]$ ha sido eliminada porque está contenida en $[M_9]$.

Fase 6. (Segunda regla). Haciendo el cálculo de las uniones e intersecciones notamos que ya no es posible encontrar submatrices completas que no sean iguales o que no estén contenidas en las submatrices de la última cobertura: por lo que ésta cobertura da el conjunto de submatrices principales:

$$[M_1]=A \begin{array}{cccc} b & d & e & f \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \qquad [M_2]=B \begin{array}{cc} a & c \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}$$

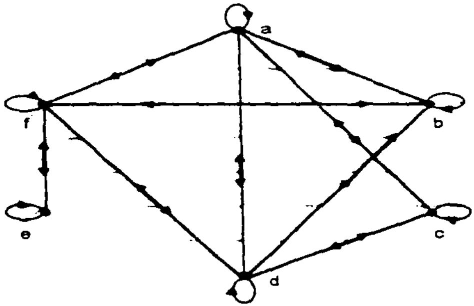
$$[M_4]=D \begin{array}{ccc} b & c & f \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \qquad [M_5]= \begin{array}{c|ccc} & b & d & e \\ \hline A & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$[M_6]= \begin{array}{c|cc} & b & f \\ \hline A & 1 & 1 \\ D & 1 & 1 \end{array} \qquad [M_7]= \begin{array}{c|c} & c \\ \hline B & 1 \\ D & 1 \end{array} \qquad [M_8]= \begin{array}{c|c} & b \\ \hline A & 1 \\ C & 1 \\ D & 1 \end{array}$$

Búsqueda de subrelaciones maximales de similitud

Una vez que se ha descrito el algoritmo de Malgrange, podemos ahora emplearlo para la búsqueda de las subrelaciones maximales de similitud.

Tomaremos como ejemplo el grafo ordinario simétrico y reflexivo que a continuación se muestra y del cual determinaremos, a partir de la matriz booleana asociada, las submatrices principales que forman una cobertura de esta matriz. De éstas últimas, las que sean cuadradas darán las subrelaciones buscadas.



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	1	1	1	1	0	1
b	1	1	0	1	0	1
c	1	0	1	1	0	0
d	1	1	1	1	0	1
e	0	0	0	0	1	1
f	1	1	0	1	1	1

Antes de iniciar, reordenaremos la matriz de manera que se encuentren sus elementos en orden correspondiente a los renglones (y por tanto a las columnas) que tengan el mayor número de 1's.

	a	*d*	*f*	*b*	*c*	*e*
a	1	1	1	1	1	0
d	1	1	1	1	1	0
f	1	1	1	1	0	1
b	1	1	1	1	0	0
c	1	1	0	0	1	0
e	0	0	1	0	0	1

Fase 1. **Tomaremos la cobertura siguiente:**

$[M_1]=$

	a	*d*	*f*	*b*
a	1	1	1	1
d	1	1	1	1
f	1	1	1	1
b	1	1	1	1

$[M_2]=$

	a	*d*	*c*
c	1	1	1

$[M_3]=$

	f	*e*
e	1	1

$$[M_4]= \begin{array}{cc} & c \\ \begin{matrix} a \\ d \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [M_5]= \begin{array}{cc} & e \\ \begin{matrix} f \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fase 2. **(Segunda regla).**

$$I_1 \cup I_2 = \{a, d, f, b, c\} \quad , \quad J_1 \cap J_2 = \{a, d\} \; ,$$

de donde obtenemos una nueva submatriz:

$$[M_6]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ d \\ f \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing,$$
$$I_1 \cup I_3 = \{a, d, f, b, e\} \quad , \quad J_1 \cap J_3 = \{f\} \; ,$$

de donde se obtiene una nueva sumbatriz:

$$[M_7]= \begin{array}{cc} & f \\ \begin{matrix} a \\ d \\ f \\ b \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$I_1 \cap I_3 = \varnothing,$$
$$I_1 \cup I_4 = \{a, d, f, b, c\} \; , \quad J_1 \cap J_4 = \varnothing,$$
$$I_1 \cap I_4 = \{a, d\} \; , \qquad J_1 \cup J_4 = \{a, d, f, b, c\} \; .$$

de donde obtenemos una nueva submatriz:

$$[M_8]= \begin{array}{c} \\ a \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & d & f & b & c \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$I_1 \cup I_5 = \{a, d, f, b, e\}$, $\quad J_1 \cap J_5 = \varnothing$,

$I_1 \cap I_5 = \{f\}$, $\quad J_1 \cup J_5 = \{a, d, f, b, e\}$,

de donde obtenemos una nueva submatriz:

$$[M_9]= \begin{array}{c} \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & d & f & b & e \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$I_2 \cup I_3 = \{c, e\}$, $\quad J_2 \cap J_3 = \varnothing$,
$I_2 \cap I_3 = \varnothing$.
$I_2 \cup I_4 = \{a, d, c\}$, $\quad J_2 \cap J_4 = \{c\}$, $\quad$ da $[M_4]$
$I_2 \cap I_4 = \{c\}$, $\quad J_2 \cup J_4 = \{a, d, c\}$, $\quad$ da $[M_2]$
$I_2 \cup I_5 = \{c, f, e\}$, $\quad J_2 \cap J_5 = \varnothing$,
$I_2 \cap I_5 = \varnothing$.
$I_3 \cup I_4 = \{a, d, c, e\}$, $\quad J_3 \cap J_4 = \varnothing$,
$I_3 \cap I_4 = \varnothing$.
$I_3 \cup I_5 = \{f, e\}$, $\quad J_3 \cap J_5 = \{e\}$, $\quad$ da $[M_5]$
$I_3 \cap I_5 = \{e\}$, $\quad J_3 \cup J_5 = \{f, e\}$, $\quad$ da $[M_3]$
$I_4 \cup I_5 = \{a, d, c, e, f\}$, $\quad J_4 \cap J_5 = \varnothing$,
$I_4 \cap I_5 = \varnothing$.

Fase 3. (Segunda regla). La nueva cobertura es:

$$C = \{[M_1], [M_2], [M_3], [M_4], [M_5], [M_6], [M_7], [M_8], [M_9]\}$$

Fase 4. (Primera regla).

$I_1 \cup I_6 = \{a, d, f, b, c\}$, $\quad J_1 \cap J_6 = \{a, d\}$ $\quad$ da $[M_6]$.
$I_1 \cap I_6 = \{a, d, f, b\}$, $\quad J_1 \cup J_6 = \{a, d, f, b\}$ $\quad$ da $[M_1]$,

$I_1 \cup I_7 = \{a, d, f, b, e\}$, $J_1 \cap J_7 = \{f\}$ da $[M_7]$,
$I_1 \cap I_7 = \{a, d, f, b\}$, $J_1 \cup J_7 = \{a, d, f, b\}$ da $[M_1]$,
$I_1 \cup I_8 = \{a, d, f, b\}$, $J_1 \cap J_8 = \{a, d, f, b\}$ da $[M_1]$,
$I_1 \cap I_8 = \{a, d\}$, $J_1 \cup J_8 = \{a, d, f, b, c\}$ da $[M_8]$,
$I_1 \cup I_9 = \{a, d, f, b\}$, $J_1 \cap J_9 = \{a, d, f, b\}$ da $[M_1]$,
$I_1 \cap I_9 = \{f\}$, $J_1 \cup J_9 = \{a, d, f, b, e\}$ da $[M_9]$,
$I_2 \cup I_6 = \{a, d, f, b, c\}$, $J_2 \cap J_6 = \{a, d\}$ da $[M_6]$,
$I_2 \cap I_6 = \{c\}$, $J_2 \cup J_6 = \{a, d, c\}$ da $[M_2]$,
$I_2 \cup I_7 = \{a, d, f, b, e, c\}$, $J_2 \cap J_7 = \varnothing$,
$I_2 \cap I_7 = \varnothing$,
$I_2 \cup I_8 = \{a, d, c\}$, $J_2 \cap J_8 = \{a, d, c\}$,

esto da una nueva submatriz:

$$[M_{10}] = \begin{array}{c|c|c|c|} & a & d & c \\ \hline a & 1 & 1 & 1 \\ \hline d & 1 & 1 & 1 \\ \hline c & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$I_2 \cap I_8 = \varnothing$,
$I_2 \cup I_9 = \{c, f\}$, $J_2 \cap J_9 = \{a, d\}$, incluida en $[M_6]$,
$I_2 \cap I_9 = \varnothing$,
$I_3 \cup I_6 = \{a, d, f, b, c, e\}$, $J_3 \cap J_6 = \varnothing$,
$I_3 \cap I_6 = \varnothing$,
$I_3 \cup I_7 = \{a, d, f, b, e\}$, $J_3 \cap J_7 = \{f\}$, da $[M_7]$,
$I_3 \cap I_7 = \{e\}$, $J_3 \cup J_7 = \{f, e\}$, da $[M_3]$,
$I_3 \cup I_8 = \{a, d, e\}$, $J_3 \cap J_8 = \{f\}$, incluida en $[M_7]$,
$I_3 \cap I_8 = \varnothing$,
$I_3 \cup I_9 = \{f, e\}$, $J_3 \cap J_9 = \{f, e\}$,

esto da una nueva submatriz:

$$[M_{11}] = \begin{array}{c|c|c|} & f & e \\ \hline f & 1 & 1 \\ \hline e & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$I_3 \cap I_9 = \varnothing.$

$I_4 \cup I_6 = \{a, d, f, b, c\}$. $J_4 \cap J_6 = \varnothing.$

$I_4 \cap I_6 = \{a, d, c\}$. $J_4 \cup J_6 = \{a, d, c\}.$ **da $[M_{10}]$.**

$I_4 \cup I_7 = \{a, d, f, b, c, e\}$. $J_4 \cap J_7 = \varnothing.$

$I_4 \cap I_7 = \{a, d\}$. $J_4 \cup J_7 = \{f, c\}.$ **incluida en $[M_6]$.**

$I_4 \cup I_8 = \{a, d, c\}$. $J_4 \cap J_8 = \{c\}.$ **da $[M_4]$.**

$I_4 \cap I_8 = \{a, d\}$. $J_4 \cap J_8 = \{a, d, f, b, c\}.$ **da $[M_8]$.**

$I_4 \cup I_9 = \{a, d, c, f\}$. $J_4 \cap J_9 = \varnothing.$

$I_4 \cap I_9 = \varnothing.$

$I_5 \cup I_6 = \{a, d, f, b, c, e\}$, $J_5 \cap J_6 = \varnothing.$

$I_5 \cap I_6 = \{f\}$. $J_5 \cup J_6 = \{a, d, e\}.$ **incluida en $[M_9]$.**

$I_5 \cup I_7 = \{a, d, f, b, e\}$. $J_5 \cap J_7 = \varnothing.$

$I_5 \cap I_7 = \{f, e\}$. $J_5 \cup J_7 = \{f, e\}.$ **da $[M_{11}]$.**

$I_5 \cup I_8 = \{a, d, f, e\}$. $J_5 \cap J_8 = \varnothing.$

$I_5 \cap I_8 = \varnothing.$

$I_5 \cup I_9 = \{f, e\}$. $J_5 \cap J_9 = \{e\}.$ **da $[M_5]$.**

$I_5 \cap I_9 = \{f\}$. $J_5 \cup J_9 = \{a, d, f, b, e\}.$ **da $[M_9]$.**

$I_6 \cup I_7 = \{a, d, f, b, c, e\}$. $J_6 \cap J_7 = \varnothing.$

$I_6 \cap I_7 = \{a, d, f, b\}$. $J_6 \cup J_7 = \{a, d, f\}.$ **incluida en $[M_1]$.**

$I_6 \cup I_8 = \{a, d, f, b, c\}$, $J_6 \cap J_8 = \{a, d\}.$ **da $[M_6]$.**

$I_6 \cap I_8 = \{a, d\}$. $J_6 \cup J_8 = \{a, d, f, b, c\}.$ **da $[M_8]$.**

$I_6 \cup I_9 = \{a, d, f, b, c\}$, $J_6 \cap J_9 = \{a, d\}.$ **da $[M_6]$.**

$I_6 \cap I_9 = \{f\}$. $J_6 \cup J_9 = \{a, d, f, b, e\}.$ **da $[M_9]$.**

$I_7 \cup I_8 = \{a, d, f, b, e\}$. $J_7 \cap J_8 = \{f\}.$ **da $[M_7]$.**

$I_7 \cap I_8 = \{a, d\}$. $J_7 \cup J_8 = \{a, d, f, b, c\}.$ **da $[M_8]$.**

$I_7 \cup I_9 = \{a, d, f, b, e\}$, $J_7 \cap J_9 = \{f\}.$ **da $[M_7]$.**

$I_7 \cap I_9 = \{f\}$, $J_7 \cup J_9 = \{a, d, f, b, e\}$, da $[M_9]$.

$I_8 \cup I_9 = \{a, d, f\}$, $J_8 \cap J_9 = \{a, d, f, b\}$, incluida en $[M_1]$.

$I_8 \cap I_9 = \varnothing$.

Fase 5 (Segunda regla). La nueva cobertura es:

$$C'' = \{[M_1], [M_6], [M_7], [M_8], [M_9], [M_{10}], [M_{11}]\}$$

Se han eliminado $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, $[M_5]$, incluidas en otras submatrices.

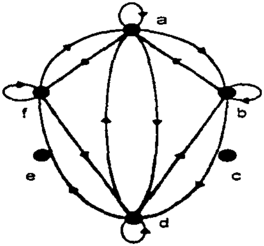
Fase 6. (Primera regla). Debido a que ya no es posible obtener nuevas matrices, la cobertura C'' es la que da todas las matrices principales:

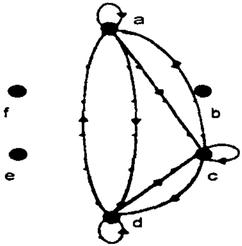
$$[M_1]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d & f & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ d \\ f \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [M_6]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ d \\ f \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [M_7]= \begin{array}{cc} & f \\ \begin{matrix} a \\ d \\ f \\ b \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[M_8]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d & f & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [M_9]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d & f & b & e \end{matrix} \\ f & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[M_{10}]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} a & d & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ d \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [M_{11}]= \begin{array}{cc} & \begin{matrix} f & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} f \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

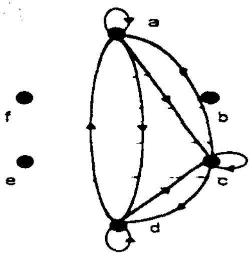
Como se puede ver, hay tres submatrices cuadradas $[M_1]$, $[M_{10}]$, y $[M_{11}]$; éstas dan las tres subrelaciones que son no disjuntas. En la figura siguiente se presentan estas subrelaciones.





	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	1	1		1		1
b	1	1		1		1
c						
d	1	1		1		1
e						
f	1	1		1		1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	1		1	1		
b						
c	1		1	1		
d	1		1	1		
e						
f						



	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e					1	1
f					1	1

4.6.8 ANTISIMETRÍA

Una relación borrosa se dice que es "antisimétrica" si:

$\forall\ (x, y) \in E \times E$ con $x = y$:

$$(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \neq (\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x)) \quad \text{donde} \quad \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x) = 0.$$

La figura 4.9 da algunos ejemplos de relaciones borrosas antisimétricas.

$\mathcal{R}$	A	B	C	D	E
A	0	0.3	0	0.9	1
B	0..5	0.8	0.6	0.8	0
C	0	0.5	1	0	1
D	0.5	1	0.2	1	0.3
E	0	0	0	0.2	0

$\mathcal{R}$	A	B	C	D
A	0	0	0	0.8
B	0	0	0.6	0
C	1	0.2	0.3	1
D	1	0	0	1

Fig. 4.9 Relaciones *Borrosas Antisimétricas.*

Otro ejemplo puede ser la relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$, tal que:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = e^{-(ax + by)} \qquad a > b > 1,$$

y también es antisimétrica.

GRAFO ANTISIMÉTRICO ORDINARIO ASOCIADO A UNA RELACIÓN BORROSA ANTISIMÉTRICA

A toda relación borrosa antisimétrica $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ se le asociará un (y uno solo) grafo antisimétrico **G** ordinario tal que:

$\forall (x, y) \in E \times E$:

1) $x \neq y$ y $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) > \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x) \Rightarrow (x, y) \in \mathbf{G}$ y $(y, x) \notin \mathbf{G}$.

2) $x \neq y$ y $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) \notin \mathbf{G}$ y $(y, x) \notin \mathbf{G}$.

Se tomará (arbitrariamente) para G:

$$\forall (x, y) \in E \times E: \; (x, x) \in \mathbf{G}.$$

Ejemplo 4-27:

Las figuras 4.10 y 4.11 representan los grafos antisimétricos ordinarios asociados a las relaciones de la figura 4.9.

G	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	1
B	1	1	1	0	0
C	0	0	1	0	1
D	0	1	1	1	1
E	0	0	0	0	1

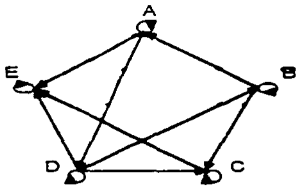


Fig. 4.10

G	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	1	0
C	1	0	1	1
D	1	0	0	1

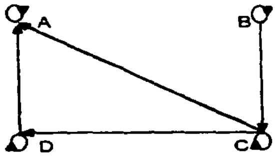


Fig. 4.11

ANTISIMETRÍA PERFECTA

Una relación "antisimétrica perfecta" es la que:

$$\forall\ (x, y) \in E \times E \text{ con } x = y:$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, x) = 0.$$

Ejemplo 4-28:

La figura 4.12 representa una relación antisimétrica perfecta.

$\underset{\sim}{R}$	A	B	C	D	E	F
A	0	0.8	0.4	0.6	0	0
B	0	0.3	0	0.6	0	0.7
C	0	0.3	1	0.2	1	0.6
D	0	0	0	0.8	0	0.3
E	0	0.5	0	0	0	1
F	0.7	0	0	0	0	1

Fig. 4.12

4.6.9 RELACIÓN DE ORDEN BORROSA

Una relación binaria que es:

1. Reflexiva
2. Transitiva
3. Antisimétrica

es una relación de orden borrosa. Se puede enunciar también esta propiedad de la manera siguiente: una relación de preorden borrosa que es antisimétrica es una relación de orden borrosa.

Ejemplo 4-29:

Las figuras 4.13 y 4.14 representan relaciones de orden borroso. Se verifican que son:

- reflexivas
- transitivas
- antisimétricas .

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	1	0.8	0	0
B	0.2	1	0.1	0
C	0.3	0.4	1	0.1
D	0	0	0	1

Fig. 4.13

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	1	0.8	0.8	0.8
B	0.5	1	0.6	1
C	0.5	1	1	1
D	0.5	0.6	0.6	1

Fig. 4.14

Teorema. Toda relación de orden borrosa induce un orden en el conjunto referencia, por la relación:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \geq \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x).$$

Este orden se representa así: $y \geq x$.

Demostración. Basta considerar el grafo antisimétrico ordinario asociado a la relación de orden borrosa.

Ejemplo 4-30:

Las figuras 4.15 y 4.16 representan respectivamente los grafos antisimétricos ordinarios asociados a las relaciones de orden borrosas dadas las figuras 4.13 y 4.14.

G	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	1	0	0
B	0	1	0	0
C	1	1	1	1
D	0	0	0	1

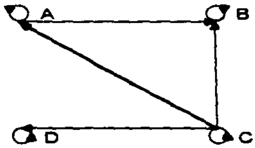


Fig. 4.15

G	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	1	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	1
D	0	0	0	1

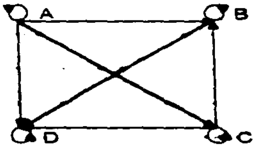


Fig. 4.16

Relación Borrosa de Orden Total.

Una relación borrosa es de orden total si su grafo ordinario asociado representa un orden total.

Utilizando la notación:

$$y \geq x \text{ si } \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) > \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, x).$$

En la figura 4.16 se representa la relación borrosa de orden total. Se tiene entonces:

$$D \geq B \geq C \geq A.$$

Relación Borrosa de Orden Parcial.

Una relación borrosa es de orden parcial si su grafo ordinario asociado es de orden parcial.

En la figura 4.15 se representa esta relación. Se tiene:

$$B \geq A \geq C.$$

$$D \geq C.$$

Relación de Orden no Estricto y Relación de Orden Estricto.

Una relación de orden no estricto es aquella que se puede distinguir por su transitividad, reflexividad, y antisimetría (también es llamada "relación de orden"). Esta relación se representa por:

$$y \geq x.$$

Una relación de orden estricto es aquella que presenta transitividad, antirreflexividad, y antisimetría (también es llamada "relación de orden no reflexiva"). Un orden estricto se representa por:

$$y > x.$$

Ejemplo 4-31:

La figura 4.17 da un ejemplo de relación de orden estricto (también es una relación de orden perfecto y de orden total).

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D
A	0	0.8	0.7	0.7
B	0	0	0.6	0.4
C	0	0	0	0.4
D	0	0	0	0

Fig. 4.17

Se puede verificar que se tiene:

$$A < B < C < D.$$

4.6.10 RELACIÓN DE DISIMILITUD

Para definir la relación de disimilitud consideremos una relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ de similitud y sus tres propiedades:

1. $\forall\ (x, y), (y, z), (z, x), \in E \times E$:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)\ ],\ (\textit{transitividad}).$$

2. $\forall\ (x, x) \in E \times E$: $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1$, (*reflexividad*).

3. $\forall\ (x, y) \in E \times E$: $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x)$, (*simetria*).

En seguida asociemos a $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$ tal que:

$$\forall\ (x, y) \in E \times E:\ \mu_{\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y).$$

Como $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ tiene las propiedades de transitividad, reflexividad y simetria, por lo tanto, $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$ tiene las mismas.

Comencemos por la propiedad de transitividad. Se tiene:

$$1 - \mu_{\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\ [1 - \mu_{\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(x, y)] \wedge [1 - \mu_{\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(y, z)]\ ].$$

De acuerdo a los Teorema de Morgan:

$$[1 - \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y)] \wedge [1 - \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, z)] = 1 - \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) \vee \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, z).$$

Así tendremos lo siguiente:

$$1 - \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \bigvee_{y} [\, 1 - \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) \vee \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, z) \,].$$

o también:

$$\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, z) \leq \bigwedge_{y} [\, \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) \vee \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, z) \,].$$

Esta propiedad se denomina transitividad MIN-MAX.

Ahora tomemos la reflexividad, se tendrá:

$$\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, x) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1 - 1 = 0.$$

Por último, la simetría se conserva. Así, tenemos lo siguiente:

1. $\forall\ (x, y), (y, z), (z, x), \in E \times E$:

$$\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, z) \leq \bigwedge_{y} [\, \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) \vee \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, z) \,],\ (\textit{transitividad MIN-MAX}).$$

2. $\forall\ (x, x) \in E \times E$: $\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, x) = 0$, (*antirreflexividad*).

3. $\forall\ (x, y) \in E \times E$: $\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\bar{\mathcal{R}}}(y, x)$, (*simetría*).

Una relación binaria que posee las propiedades anteriores se denomina "relación de disimilitud".

Ejemplo 4-32:

La figura 4.18 representa una relación de disimilitud.

$\tilde{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.2	0.3	0	0.1
B	0.2	0	0.3	0.2	0.2
C	0.3	0.3	0	0.3	0.3
D	0	0.2	0.3	0	0.1
E	0.1	0.2	0.3	0.1	0

Fig. 4.18

Para verificar que la relación tiene transitividad MIN-MAX tomaremos algunos pares de elementos.

Arco (A, B)

$\mu(A, A) \vee \mu(A, B) = 0 \vee 0.2 = 0.2.$

$\mu(A, B) \vee \mu(B, B) = 0.2 \vee 0 = 0.2,$

$\mu(A, C) \vee \mu(C, B) = 0.3 \vee 0.3 = 0.3.$

$\mu(A, D) \vee \mu(D, B) = 0 \vee 0.2 = 0.2,$

$\mu(A, E) \vee \mu(E, B) = 0.1 \vee 0.2 = 0.2.$

MIN $[0.2, 0.2, 0.3, 0.2, 0.2] = 0.2.$

$\mu(A, B) = 0.2 \leq 0.2.$

Arco (A, C)

$\mu(A, A) \vee \mu(A, C) = 0 \vee 0.3 = 0.3.$

$\mu(A, B) \vee \mu(B, C) = 0.2 \vee 0.3 = 0.3,$

$\mu(A, C) \vee \mu(C, C) = 0.3 \vee 0 = 0.3,$

$\mu(A, D) \vee \mu(D, C) = 0 \vee 0.3 = 0.3,$

$\mu(A, E) \vee \mu(E, C) = 0.1 \vee 0.3 = 0.3.$

MIN $[0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3] = 0.3.$

$\mu(A, C) = 0.3 \leq 0.3.$

y así sucesivamente.

La simetría y la antirreflexividad se pueden observar fácilmente en la figura.

Distancia MIN-MAX entre elementos en una relación de similitud.

Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación de similitud. Se llama "distancia MIN-MAX" entre los elementos x y y , $x,y \in E$, $\underset{\sim}{\mathcal{R}} \subset E \times E$:

$$d_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y).$$

Esta definición respeta los axiomas de la noción de distancia:

- No negatividad: $d(x, y) \geq 0$.
- Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$.
- Transitividad MIN-ESTRELLA: $d(x, z) \leq d(x, y) * (y, z)$, donde * es la operación considerada entre las distancias $d(x, y)$.
- $d(x, x) = 0$.

Ejemplo 4-33: La figura 4.19 representa una relación de similitud $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ y la figura 4.20 representa la relación de disimilitud asociada a la relación de similitud.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.8	0.7	1	0.9
B	0.8	1	0.7	0.8	0.8
C	0.7	0.7	1	0.7	0.7
D	1	0.8	0.7	1	0.9
E	0.9	0.8	0.7	0.9	1

Fig. 4.19

$\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.2	0.3	0	0.1
B	0.2	0	0.3	0.2	0.2
C	0.3	0.3	0	0.3	0.3
D	0	0.2	0.3	0	0.1
E	0.1	0.2	0.3	0.1	0

Fig. 4.20

Se tiene finalmente:

$$d_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(A, B) = 0.2,$$

$$d_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(A, C) = 0.3,$$

$$d_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(A, D) = 0\ ,$$

... etc.

4.6.11 RELACIÓN DE SEMEJANZA

Una relación $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ tal que:

1. $\forall\ (x, x) \in E \times E$: $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1$ (*reflexividad*),

2. $\forall\ (x, y) \in E \times E$: $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x)$ (*simetría*).

se denomina relación de semejanza.

Ejemplo 4-34:

La figura 4.21 representa una relación de semejanza.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.1	0.8	0.2	0.3
B	0.1	1	0	0.3	1
C	0.8	0	1	0.7	0
D	0.2	0.3	0.7	1	0.6
E	0.3	1	0	0.6	1

Fig. 4.21

DISTANCIA MIN-MAX EN UNA RELACIÓN DE SEMEJANZA

Si $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es una relación de semejanza entonces $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$, su clausura transitiva, es una relación de similitud. Se puede definir entonces la noción de distancia MIN-MAX en $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ por la de $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$. Así:

$$d_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(x, y).$$

Ejemplo 4-35:

Considerando la figura 4.21 se ha calculado la clausura transitiva de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$, es decir, $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$. La figura 4.22 representa a $\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$. Luego se ha calculado $\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}$ tal que:

$$\mu_{\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}}(x, y) = 1 - \mu_{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}(x, y);$$

el resultado se indica en la figura 4.23.

$\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.6	0.8	0.7	0.6
B	0.6	1	0.6	0.6	1
C	0.8	0.6	1	0.7	0.6
D	0.7	0.6	0.7	1	0.6
E	0.6	1	0.6	0.6	1

Fig. 4.22

$\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.4	0.2	0.3	0.4
B	0.4	0	0.4	0.4	0
C	0.2	0.4	0	0.3	0.4
D	0.3	0.4	0.3	0	0.4
E	0.4	0	0.4	0.4	0

Fig. 4.23

Se tiene, finalmente:

$$d_{\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}}(A, B) = 0.4,$$

$$d_{\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}}(A, C) = 0.2,$$

$$d_{\bar{\hat{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}}}(A, D) = 0.3; \ldots \text{ etc.}$$

CLAUSURA TRANSITIVA "MAX-PRODUCTO" DE UNA RELACIÓN DE SEMEJANZA

Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación de semejanza. La distancia que existe entre los elementos de una relación de semejanza se mide mediante la operación MAX-PRODUCTO, es decir, utilizar la siguiente función de membresía:

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}'}(x, z) = \bigvee_{y} [\ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \bullet \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)\ ].$$

La clausura transitiva MAX-PRODUCTO de una relación es:

$$\dot{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^2 \cup \underset{\sim}{\mathcal{R}}^3 \cup \ldots$$

donde

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^k = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \underset{\sim}{\mathcal{R}} \bullet \ldots \underset{\sim}{\mathcal{R}}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ejemplo 4-36:

En la figura 4.24 se pueden observar los cálculos de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$, $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^3$, $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^4$, $\underset{\sim}{\mathcal{R}}^5$, $\dot{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}$.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	0.1	0.8	0.2	0.3
B	0.1	1	0	0.3	1
C	0.8	0	1	0.7	0
D	0.2	0.3	0.7	1	0.6
E	0.3	1	0	0.6	1

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}^2$	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	0.3	0.8	0.56	0.3
B	0.3	1	0.21	0.6	1
C	0.8	0.21	1	0.7	0.42
D	0.56	0.6	0.7	1	0.6
E	0.3	1	0.42	0.6	1

$\mathcal{R}^3$	A	B	C	D	E
A	1	0.3	0.8	0.56	0.336
B	0.3	1	0.42	0.6	1
C	0.8	0.2	1	0.7	0.42
D	0.56	0.6	0.7	1	0.6
E	0.336	1	0.42	0.6	1

$\mathcal{R}^4$	A	B	C	D	E
A	1	0.336	0.8	0.56	0.336
B	0.336	1	0.42	0.6	1
C	0.8	0.42	1	0.7	0.42
D	0.56	0.6	0.7	1	0.6
E	0.336	1	0.42	0.6	1

$\mathcal{R}^5$	A	B	C	D	E
A	1	0.336	0.8	0.56	0.336
B	0.336	1	0.42	0.6	1
C	0.8	0.2	1	0.7	0.42
D	0.56	0.6	0.7	1	0.6
E	0.336	1	0.42	0.6	1

$\hat{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.336	0.8	0.56	0.336
B	0.336	1	0.42	0.6	1
C	0.8	0.42	1	0.7	0.42
D	0.56	0.6	0.7	1	0.6
E	0.336	1	0.42	0.6	1

Fig. 4.24

4.6.12 RELACIÓN DE DESEMEJANZA

Una relación $\mathcal{R}$ es denominada "*relación de desemejanza*", si cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall\ (x, x) \in E \times E :\ \mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 0$ (*antirreflexividad*).

2. $\forall\ (x, y) \in E \times E :\ \mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$ (*simetría*).

Ejemplo 4-37:

La figura 4.25 muestra una relación de desemejanza.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.3	0.9	1	0.2
B	0.3	0	0.4	0.1	0
C	0.9	0.4	0	0.8	0.1
D	1	0.1	0.8	0	1
E	0.2	0	0.1	1	0

Fig. 4.25

4.6.13 PROPIEDADES REFERENTES A LA SEMEJANZA Y A LA SIMILITUD

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE UNA RELACIÓN DE SIMILITUD.

Sea $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ una relación de similitud en $E \times E$. Entonces $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ puede descomponerse bajo la forma

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \bigvee_{\alpha} \alpha \bullet \mathcal{R}_{\alpha} \qquad\qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

con $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow \mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_1$, donde las $\mathcal{R}_\alpha$ son relaciones de equivalencia en el sentido de la teoría de los conjuntos ordinarios y $\alpha \bullet \mathcal{R}_\alpha$ significa que todos los elementos de la relación ordinaria $\mathcal{R}_\alpha$ son multiplicados por α.

Demostración.

Primero, $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1$; se sigue que $(x, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ para $\alpha \in [0, 1]$ y así $\mathcal{R}_\alpha$ tiene la propiedad de reflexividad.

Luego, haciendo $(x, y) \in \mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, esto implica que $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \geq \alpha$ y, por simetría de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$: $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, x) \geq \alpha$. Así, $\mathcal{R}_\alpha$ tiene la propiedad de simetría.

Por último, $\forall\ \alpha \in [0\ ,\ 1]$, suponemos que $(x, y) \in \mathcal{R}_\alpha$ y $(y, z) \in \mathcal{R}_\alpha$, entonces $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) < \alpha$ y $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z) \geq \alpha$; luego por transitividad $\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \alpha$ y así $\mathcal{R}_\alpha$ es transitiva.

Dado que $\mathcal{R}_\alpha$ es reflexiva, simétrica y transitiva, es entonces una relación de equivalencia.

El teorema recíproco es igualmente válido.

Demostración del recíproco.

$\mathcal{R}_1$ no es vacia, $(x, x) \in \mathcal{R}_1$ y así

$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, x) = 1,\ \ \forall\ x \in E$, entonces $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ es una relación borrosa reflexiva.

Por otra parte, refiriéndose a $\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \bigvee_\alpha \alpha \bullet \mathcal{R}_\alpha$, se puede escribir:

$$\forall\ (x, y) \in E \times E\text{:}\ \ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \bigvee_\alpha \alpha \bullet \mu_{\mathcal{R}_\alpha}(x, y).$$

Es evidente que la simetría de cada $\mathcal{R}_\alpha$ implica la simetría de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$.

Por último, sea

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) = \alpha \text{ y } \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z) = \beta;$$

entonces:

$$(x, y) \in \mathcal{R}_{\alpha\wedge\beta} \text{ y } (y, z) \in \mathcal{R}_{\alpha\wedge\beta}.$$

Como consecuencia:

$$(x, z) \in \mathcal{R}_{\alpha\wedge\beta};$$

porque $\mathcal{R}_{\alpha\wedge\beta}$ es transitiva.

Se sigue que:

$$\forall\ x, y, z \in E\text{:}\ \ \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \alpha\wedge\beta;$$

y así

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) \geq \bigvee_y \left(\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)\right).$$

Lo que demuestra la transitividad de $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$. Esta recíproca permite la síntesis de las relaciones de similitud.

Ejemplo 4-38:

En la figura 4.26 se presenta la descomposición de una relación de similitud.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	1	0.8	0.7	1	0.9
B	0.8	1	0.7	0.8	0.8
C	0.7	0.7	1	0.7	0.7
D	1	0.8	0.7	1	0.9
E	0.9	0.8	0.7	0.9	1

$= \vee$

$$\left((0.7)\ \overset{\mathcal{R}_{0.7}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}},\ (0.8)\ \overset{\mathcal{R}_{0.8}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \right.$$

$$\left. (0.9)\ \overset{\mathcal{R}_{0.9}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}\ .\ (1)\ \overset{\mathcal{R}_{1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \right)$$

Fig. 4.26

Ejemplo 4-38:

Ahora se muestra un ejemplo de síntesis. Sean las cuatro relaciones de equivalencia incluidas sucesivamente unas en otras (mostradas en la figura 4.27).

Se tiene entonces:

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} = \vee\,(0.2 \bullet \mathcal{R}_{0.2},\ 0.6 \bullet \mathcal{R}_{0.6},\ 0.8 \bullet \mathcal{R}_{0.8},\ 1 \bullet \mathcal{R}_1)$$

$\mathcal{R}_{0.2}$	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	1

$\mathcal{R}_{0.6}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	1
D	0	0	1	1

$\mathcal{R}_{0.8}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

$\mathcal{R}_1$	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

Fig. 4.27

GRAFOS TRANSITIVOS DE DISTANCIAS

Cada relación de similitud presenta grafos transitivos que corresponden a las distancias MIN-MAX. Algunos ejemplos se muestran enseguida.

Ejemplo 4-39:

La figura 4.28 da un ejemplo de relación de similitud. En la siguiente figura se representan los grafos transitivos correspondientes a las diferentes distancias.

$\underset{\sim}{\mathcal{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.2	0.8	0	0.1
B	0.2	0	0.8	0.2	0.2
C	0.8	0.8	0	0.8	0.8
D	0	0.2	0.8	0	0.1
E	0.1	0.2	0.8	0.1	0

Fig. 4.28

Distancias iguales a 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1

Distancias inferiores o iguales a 0.1:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	1	1
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	1	0	0	1	1
E	1	0	0	1	1

Distancias inferiores o iguales a 0.2:

	A	B	C	D	E
A	1	1	0	1	1
B	1	1	0	1	1
C	0	0	1	0	0
D	1	1	0	1	1
E	1	1	0	1	1

Distancias inferiores o iguales a 0.8:

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

Fig. 4.29

Ejemplo 4-40:

Sea la clausura transitiva de la relación de semejanza, obtener la descomposición.

$\vec{\tilde{R}}$	A	B	C	D	E
A	0	0.4	0.2	0.3	0.4
B	0.4	0	0.4	0.4	0
C	0.2	0.4	0	0.3	0.4
D	0.3	0.4	0.3	0	0.4
E	0.4	0	0.4	0.4	0

Distancias iguales a 0:

	A	B	C	D	E
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	1
C	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	1

Distancias inferiores o iguales a 0.2:

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	0	0
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	0	0
D	0	0	0	1	1
E	0	1	0	0	1

Distancias inferiores o iguales a 0.3:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	0	1	1	1
B	0	1	0	0	1
C	1	0	1	1	0
D	1	0	1	1	0
E	0	1	0	0	1

Distancias inferiores o iguales a 0.4:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1

Fig. 4.30

ARBORESCENCIA DE DESCOMPOSICIÓN

En la figura 4.26 se observa que, a medida que α toma los valores 0.7, 0.8, 0.9 y 1, la partición del conjunto E en clases de equivalencia incluye más y más subconjuntos. Esta descomposición se efectúa de acuerdo a un esquema arborescente, que se ha representado en la figura 4.31. Tales esquemas ordenados se denominan "arborescencia de descomposición".

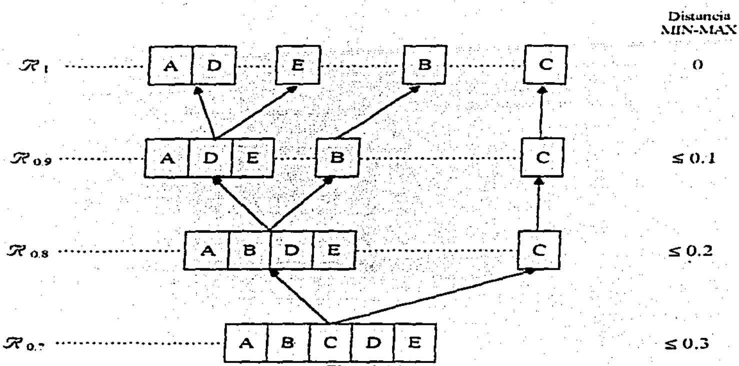


Fig. 4.31

Se constata que dos elementos x y y que pertenecen a E, pertenecen a la misma clase en el nivel α si, y solamente si, $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha$.

Esta arborescencia de descomposición refleja la estructura de la relación de similitud o agrupamientos de los elementos por sus distancias transitivas, unos respecto a los otros.

Una arborescencia se puede representar de diferentes maneras.

1. Se puede utilizar la notación de lingüistas y escribir secuencialmente, siguiendo la arborescencia, por ejemplo el de la figura 4.31.

$$0.7(0.8(0.9(1\{A, D\}, 1\{E\}), 0.9(1\{B\})), 0{,}8(0.9(1\{C\})))$$

2. Se puede utilizar también la notación de pila y representar secuencialmente la arborescencia (de la figura 4.31), con la secuencia:

$$0.7(A\ B\ C\ D\ E)\ \ 0.8(A\ B\ D\ E)\ \ 0.9(A\ D\ E)\ \ 1(A\ D)$$

$$0.9(A\ D\ E)\ \ 1(E)\ \ 0.9(A\ D\ E)\ \ 0.8(A\ B\ D\ E)\ \ 0.9(B)$$

$$1(B)\ \ 0.9(B)\ \ 0.8(A\ B\ D\ E)\ \ 0.7(A\ B\ C\ D\ E)\ \ 0.8(C)\ \ 0.9(C)$$

$$1(C)\ \ 0.9(C)\ \ 0.8(C)\ \ 0.7(A\ B\ C\ D\ E).$$

Esta notación está asociada a otra, denominada "*notación polaca*".

SELECCIÓN DE MENSAJES MÁS TRANSITIVAMENTE CERCANOS

Se puede considerar un subconjunto borroso como un mensaje que es borroso en lugar de ser binario.

Sea F un conjunto ordinario de subconjuntos borrosos $\underset{\sim}{A}_i$ que pertenecen al mismo conjunto de referencia E:

$$F = \{\ \underset{\sim}{A}_1,\ \underset{\sim}{A}_2,\ \dots,\ \underset{\sim}{A}_n\ \}.$$

Se propone determinar cuáles son los subconjuntos borrosos o mensajes borrosos más transitivamente cercanos.

Se opera de la siguiente manera (al mismo tiempo se explicará lo que se entiende por transitivamente cercano):

1. Para cada par $(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, se evalúa la distancia de Hamming generalizada relativa $\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j)$, lo que da una relación de desemejanza $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$.

2. Se toma la clausura transitiva MIN-MAX, la cual se expresa por:

$$\check{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} = \underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap (\underset{\sim}{\mathcal{R}} * \underset{\sim}{\mathcal{R}}) \cap (\underset{\sim}{\mathcal{R}} * \underset{\sim}{\mathcal{R}} * \underset{\sim}{\mathcal{R}}) \cap \dots$$

y

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}} * \underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, z) = \bigwedge_{y} [\mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{\mathcal{R}}}(y, z)].$$

La relación $\check{\underset{\sim}{\mathcal{F}}}$ obtenida de las distancias transitivas MIN-MAX:

$$\check{\delta}(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j).$$

3. Se descompone luego $\check{\underset{\sim}{\mathcal{F}}}$ y se obtienen los subconjuntos ordinarios de F siguientes:

- Mensajes transitivamente vecinos para los cuales se tiene:

$$\check{\delta}(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = 0.$$

- Mensajes transitivamente vecinos para los cuales se tiene:

$$0 < \check{\delta}(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$$

- Mensajes transitivamente vecinos para los cuales se tiene:

$$0 < \alpha_1 < \check{\delta}(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$$

... etc.

4. Construir la arborescencia de la descomposición correspondiente.

Ejemplo 4–41:

Sea E un conjunto de referencia finito con card(E) = 7 y los seis subconjuntos o mensajes $\underset{\sim}{A}_i$, i=1, 2, 3,...., 6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\underset{\sim}{A}_1 =$	0.1	0.8	0.3	1	0.1	0	1
$\underset{\sim}{A}_2 =$	0.3	0.8	0.1	1	0	1	0.7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$\underset{\sim}{A}_3 =$	0.7	1	0	1	0.8	0.3	0.7
$\underset{\sim}{A}_4 =$	0.1	0.8	0.7	0	0.1	1	0.3
$\underset{\sim}{A}_5 =$	0.6	1	0	0.7	0.8	0	1
$\underset{\sim}{A}_6 =$	0	0.3	0.5	0.1	0.1	0.5	0.8

Se calculan entonces las distancias de Hamming generalizadas relativas:

$$\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = \frac{d\left(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j\right)}{7}.$$

lo que da la relación de desemejanza $\underset{\sim}{Z}$ (figura 4.32). Se calcula entonces, la clausura transitiva MIN-MAX $\overset{\vee}{\underset{\sim}{Z}}$, lo cual da las distancias transitivas $\acute{\delta}$.

$\underset{\sim}{Z}$	$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$
$\underset{\sim}{A}_1$	0	0.25	0.34	0.44	0.28	0.34
$\underset{\sim}{A}_2$	0.25	0	0.31	0.32	0.42	0.40
$\underset{\sim}{A}_3$	0.34	0.31	0	0.61	0.14	0.54
$\underset{\sim}{A}_4$	0.44	0.32	0.61	0	0.64	0.27
$\underset{\sim}{A}_5$	0.28	0.42	0.14	0.64	0	0.54
$\underset{\sim}{A}_6$	0.34	0.40	0.54	0.27	0.54	0

$\overset{\vee}{\underset{\sim}{Z}}$	$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$
$\underset{\sim}{A}_1$	0	0.25	0.28	0.32	0.28	0.32
$\underset{\sim}{A}_2$	0.25	0	0.28	0.32	0.28	0.32
$\underset{\sim}{A}_3$	0.28	0.28	0	0.32	0.14	0.32
$\underset{\sim}{A}_4$	0.32	0.32	0.32	0	0.32	0.27
$\underset{\sim}{A}_5$	0.28	0.28	0.14	0.32	0	0.32
$\underset{\sim}{A}_6$	0.32	0.32	0.32	0.27	0.32	0

Fig. 4.32

Distancias transitivas = 0

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2		1				
3			1			
4				1		
5					1	
6						1

Distancias transitivas ≤ 0.3

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2		1				
3			1		1	
4				1		
5			1		1	
6						1

Distancias transitivas ≤ 0.25

	1	2	3	4	5	6
1	1	1				
2	1	1				
3			1		1	
4				1		
5			1		1	
6						1

Distancias transitivas ≤ 0.27

	1	2	3	4	5	6
1	1	1				
2	1	1				
3			1		1	
4				1		1
5			1		1	
6				1		1

Distancias transitivas ≤ 0.28

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1		1	
2	1	1	1		1	
3	1	1	1		1	
4				1		1
5	1	1	1		1	
6				1		1

Distancias transitivas ≤ 0.32

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1

Fig. 4.33 Grafos Transitivos

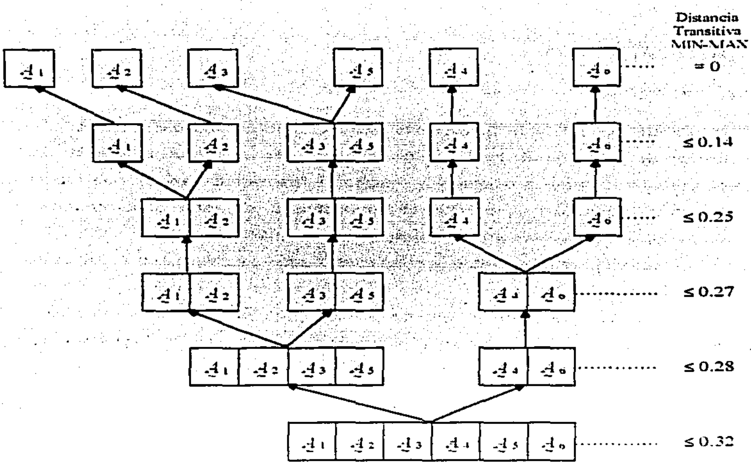


Fig. 4.34 Arborescencia de Descomposición

PROPIEDADES DE LAS PRINCIPALES RELACIONES BORROSAS

	Reflexividad	Antirreflexividad	Transitividad MAX-MIN	Transitividad MIN-MAX	Simetría	Antisimetría
Preorden	✓		✓			
Similitud	✓		✓		✓	
Disimilitud		✓		✓	✓	
Semejanza	✓				✓	
Desemejanza		✓			✓	
Orden no estricto	✓		✓			✓
Orden estricto		✓	✓			✓

4.7 APLICACIONES

DIAGNÓSTICO

Dentro de este tema hablaremos sobre la ambigüedad que acompaña al diagnóstico de fallas y al diagnóstico médico y de cómo es manejada esa ambigüedad. Hay varias propuestas y mucha investigación experimental sobre métodos para diagnóstico que incluyen ambigüedad; de éstos consideraremos solamente dos métodos básicos. En primer lugar, hablaremos sobre casos en los cuales las relaciones entre los síntomas y las causas están expresadas en términos de ecuaciones borrosas relacionales y sobre la correspondencia entre el proceso de diagnóstico y la resolución de problemas inversos involucrando tales relaciones. Finalmente hablaremos sobre algunos enfoques por medio de la ingeniería del conocimiento.

AMBIGÜEDAD EN EL DIAGNÓSTICO

Cuando hablamos acerca de fallas o enfermedad queremos decir que una facilidad o un cuerpo humano está en una condición que se desvía de la norma. Diagnóstico significa, en el caso de una falla, las características de satisfacción, sistema, área, y grado; en el caso de enfermedad, significa características como la parte afectada y el grado y nombre de la enfermedad. En muchos casos, el diagnóstico está enlazado a medidas que traen un regreso a lo normal, eso es, la reparación de la falla o el tratamiento de la enfermedad.

Especialmente en las etapas tempranas de una falla o enfermedad, hay casos en los cuales obtenemos solamente información ambigua, con frecuencia sensorial, tal como un ruido extraño intermitente y el olor a quemado, o una ligera elevación de la temperatura. En general podemos decir que entre más pronto tratamos de diagnosticar una anormalidad, los indicadores son más ambiguos. No importa cuanto diagnostiquemos, no es común tener circunstancias en las cuales debamos hacer algún juicio o predicción utilizando este tipo de información ambigua.

En contraste con fallas en plantas o fábricas. el objeto del diagnóstico médico es la gente. y hay una necesidad de un diagnóstico preciso basado en la enorme cantidad del conocimiento existente. Sin embargo. en casos donde la diferencia entre lo normal y lo anormal no es clara. tales como en la detección temprana de una enfermedad psicológica. tenemos que tratar con información ambigua.

Resumiendo simplemente. el diagnóstico médico es la realización de juicios acerca de una enfermedad del paciente utilizando el conocimiento de especialistas. pero la observación de los síntomas incluye resultados de pruebas. observación directa de la dolencia principal. varios signos del paciente. la historia médica del paciente. y además. las circunstancias del diagnóstico.

Las palabras que usamos concernientes a los síntomas a menudo contienen expresiones de frecuencia y probabilidad. tales como "en muchos casos". "de vez en cuando". "al principio". y "casi". En contraste a este tipo de ambigüedad lingüística. existen circunstancias ambiguas en la observación de la condición del paciente. tales como tener resultados diferentes en distintos laboratorios de la medición de concentración de una sustancia en solución. o cuando faltan los datos necesarios para un diagnóstico. En aflicciones como las barreras psicológicas. y por encima de la dificultad de especificar la parte afectada. hay casos en los cuales la frontera entre lo normal y lo anormal cubre un rango amplio en las primeras etapas.

DIAGNÓSTICO UTILIZANDO RELACIONES BORROSAS

En este método consideraremos los síntomas. los cuales son indicadores de las anormalidades. como el resultado de una cierta causa. y el diagnóstico como un especificador de esa causa.

Sea el conjunto formado por elementos sintomáticos $Y = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$. Además, sea r_{ij} la expresión de la existencia de una conexión entre x_i y y_j y su profundidad, y consideremos una matriz de m renglones y n columnas, $R = \{r_{ij}\}$. En este caso, la relación borrosa está expresada por

$$y = x \circ R$$

lo cual significa que se tienen las operaciones de la ecuación

$$y_j = \bigvee_i \{ x_i \wedge r_{ij} \}; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$\vee$ y $\wedge$ significan máximo y mínimo respectivamente.

En general, encontramos x, dado y y la relación R, y esto corresponde al proceso de diagnóstico. Especialmente cuando y_j y r_{ij} son valores dentro del intervalo [0, 1], este problema es llamado *el problema inverso* de una ecuación relacional borrosa. Antes de continuar con la solución, examinemos el significado de la ecuación $y_j = \bigvee_i \{ x_i \wedge r_{ij} \}$. Por simplicidad, consideramos la lógica de dos valores: en otras palabras, $\vee$ y $\wedge$ corresponden a las operaciones booleanas *and* y *or*. Eso es,

Cuando el factor primario i ocurre, $x_i = 1$.

Cuando el síntoma j aparece, $y_j = 1$.

Cuando el factor i ocurre y el síntoma j aparece, $r_{ij} = 1$.

Cualquier otra circunstancia es cero.

En este caso, podemos escribir

$$y_j = (x_1 \text{ y } r_{1j}) \text{ o } (x_2 \text{ y } r_{2j}) \text{ o } \ldots \text{ o } (x_m \text{ y } r_{mj}) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

para el síntoma j. Cuando $y_j = 1$, eso es, cuando el síntoma j aparece, por lo menos uno de los factores conectados con este elemento ocurre, y del mismo modo, cuando $y_j = 0$ ninguno de los factores conectados con este elemento ocurre, lo cual puede ser confirmado con la ecuación anterior.

En seguida, mostraremos como resolver el problema inverso en el cual encontramos x_i cuando todos los y_j y r_{ij} están dados.

Primero, definiremos las composiciones ω y $\widetilde{\omega}$.

Definición. Dado $p, q \in [0, 1]$

$$p\omega q = \begin{cases} q & \text{si } p > q \\ [q, 1] & \text{si } p = q \\ \varnothing & \text{si } p < q \end{cases}$$

$$p\,\widetilde{\omega}\,q = \begin{cases} [0, q] & \text{si } p > q \\ [0, 1] & \text{si } p \leq q \end{cases}$$

En esta definición la composición de ω es la solución al problema inverso "p y q están dados: encontrar z tal que $p \wedge z = q$". Entonces $\varnothing$ indica que no hay solución. Usando los símbolos de esta composición, el algoritmo para la solución puede dividirse en tres partes:

(1) Encontrar las matrices U y $\widetilde{U}$.

$$U = \{u_{ij}\} = \{r_{ij}\omega y_j\}.$$

$$\widetilde{U} = \{\widetilde{u}_{ij}\} = \{r_{ij}\,\widetilde{\omega}\,y_j\}.$$

(2) Encontrar la matriz $W = \{w_{ij}\}$.

$$w_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & \text{para } \exists_1\ i \in \{i \mid u_{ij} \neq \varnothing\} \\ \widetilde{u}_{ij} & \text{para otras } i \end{cases}$$

Donde $\exists_1\ i$ significa seleccionar solamente un elemento del renglón i tal que $\mu_{ij} \neq \varnothing$ para cada columna j. En general, puesto que hay muchas maneras posibles de hacer esta selección, podemos encontrar muchos tipos de matriz W. Para distinguirlas, utilizamos el super índice k, y escribimos $W^k = \{w^k_{ij}\}$.

(3) Para cada k, calculamos

$$x^k_i = \bigcap_j w^k_{ij}\ ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

lo cual da la solución.

Cuando no existe al menos una solución para W en la ecuación del punto (2), significa que no hay solución que satisfaga la ecuación original.

El algoritmo anterior puede ser extendido fácilmente para cubrir casos en los cuales los elemento de R y y están dados por intervalos dentro de [0, 1].

Ejemplo: Sean R y y definidos como

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = (1 \quad 0.5).$$

(1) Encontrar U y $\widetilde{U}$.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \varnothing \\ 1 & [0.5,1] \\ \varnothing & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{U} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \\ - & [0,0.5] \end{pmatrix}$$

(2) Encontrar W.

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & - \\ - & [0.5,1] \\ - & [0.5,1] \end{pmatrix} \qquad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & - \\ - & - \\ - & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$W^3 = \begin{pmatrix} - & - \\ 1 & [0.5,1] \\ - & [0,0.5] \end{pmatrix} \qquad W^4 = \begin{pmatrix} - & - \\ 1 & - \\ - & 0.5 \end{pmatrix}$$

(3) Encontrar x.

$$x^1 = (1, [0.5,1], [0,0.5]),$$
$$x^2 = (1, [0,1], 0.5),$$
$$x^3 = ([0,1], 1, [0,0.5]),$$
$$x^4 = ([0,1], 1, 0.5).$$

Podemos confirmar que estas cuatro soluciones satisfacen la ecuación relacional borrosa original calculando $y = x^k \circ R$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. En el caso de diagnóstico, de estas cuatro soluciones, x^3 está excluida, pero x^1 y x^2 se juzgan como que van a ocurrir.

APLICACIONES DE LA INGENIERÍA DEL CONOCIMIENTO Y DIAGNÓSTICO

En lo que va del uso de la ingeniería del conocimiento, desde que Shortliffe publicó su sistema llamado MYCIN, el cual tuvo como su objeto el diagnóstico y tratamiento de síntomas de infección bacterial, en 1976, más de veinte sistemas han sido propuestos, de los cuales hay explicaciones sobresalientes.

Hay dos grandes partes de los son llamados sistemas de la ingeniería del conocimiento. Eso es, existe la colección de conocimiento expresado en la forma "SI A ENTONCES B", y el mecanismo de inferencia que corresponde para el uso de ese conocimiento. MYCIN ha sido puesto en uso para el diagnóstico médico y tratamiento, pero en su desarrollo ha sido enlazado al sistema llamado TEIREISIAS de R. Davis, y más adelante, en 1980 W. Van Melle construyó el sistema llamado EMYCIN, el cual va más allá del diagnóstico médico y puede ser utilizado muy ampliamente. Si el conocimiento de un experto en cualquier campo puede expresado de la forma "SI A ENTONCES B", éste puede ser utilizado. Debido a que este tipo de sistema coloca el conocimiento de expertos o la experiencia de especialistas en la memoria de una computadora y lo utiliza, es llamado un sistema experto, y muchos investigadores han centrado su atención en tales sistemas.

Hay casos en los cuales la A y la B de "SI A ENTONCES B" son preposiciones borrosas, y por lo cual la veracidad de "SI A ENTONCES B" en sí misma no está completa. K. P. Adlassing desarrolló un sistema experto llamado CADIAG (Computer Assisted Medical Diagnosis) en el cual los diagnósticos son hechos dejando la ambigüedad en el sistema. Podemos considerar los siguientes cuatro elementos en este sistema:

S: síntomas, indicadores y resultados de pruebas

D: nombre de la enfermedad o diagnóstico

SC: combinaciones de síntomas

IC: combinaciones internas.

Diremos que $\varnothing$ significa *desconocido* o *indeterminado*. T está determinada por la ecuación siguiente:

$$T = [0, 1] \cup \varnothing.$$

Cada síntoma S_i está caracterizado por μ_{S_i}, la cual tiene un valor en esta T, y su tamaño se entiende como el grado al cual el síntoma aparece. Sin embargo, a diferencia de las funciones de membresía normales, ésta toma el valor $\varnothing$; y la intersección, unión, y complemento de los conjuntos borrosos están definidas por:

$$X_1 \wedge X_2 = \begin{cases} \min\{x_1, x_2\} & \text{si } X_1 \in [0, 1] \quad \text{y} \quad X_2 \in [0, 1] \\ \varnothing & \text{si } X_1 = \varnothing \quad \text{y/o} \quad X_2 = \varnothing \end{cases}$$

$$X_1 \vee X_2 = \begin{cases} \max\{x_1, x_2\} & \text{si } X_1 \in [0, 1] \quad \text{y} \quad X_2 \in [0, 1] \\ X_1 & \text{si } X_1 \in [0, 1] \quad \text{y} \quad X_2 = \varnothing \\ X_2 & \text{si } X_1 = \varnothing \quad \text{y} \quad X_2 \in [0, 1] \\ \varnothing & \text{si } X_1 = \varnothing \quad \text{y} \quad X_2 = \varnothing \end{cases}$$

$$\overline{X}_1 = \begin{cases} 1 - X1 & \text{si } X_1 \in [0, 1] \\ \varnothing & \text{si } X_1 = \varnothing \end{cases}$$

Además, podemos considerar las siguientes relaciones borrosas entre elementos: síntoma-enfermedad (SD), combinación de síntoma - enfermedad ((SC)D), síntoma - síntoma (SS) y enfermedad-enfermedad (DD). La profundidad de la relación entre cada elemento está dada a partir de dos lados: la frecuencia y la fuerza de confirmación. Por ejemplo, para hacer SD, escribimos el conocimiento que relaciona síntoma - enfermedad en la siguiente forma:

SI A ENTONCES B CON (O, C)

A es el término relacionado al síntoma y B es el término relacionado al diagnóstico. Las expresiones lingüísticas encontradas en la tabla siguiente pueden ser empleadas para O y C, pero finalmente las relaciones borrosas son construidas utilizando números representativos.

Valor Lingüístico (Fuerza de confirmación $m()$)		Intervalo	Valor Representativo
siempre	(siempre)	[1, 1]	1
casi siempre	(casi siempre)	[0.98, 0.99]	0.99
muy frecuente	(muy fuerte)	[0.83, 0.97]	0.9
frecuente	(fuerte)	[0.68, 0.82]	0.75
algunas veces	(medio)	[0.33, 0.67]	0.5
raramente	(débil)	[0.18, 032]	0.25
muy rara vez	(muy débil)	[0.03, 0.17]	0.1
casi nunca	(casi nunca)	[0.01, 0.02]	0.01
nunca	(nunca)	[0, 0]	0
desconocido	(desconocido)	∅	∅

Si los datos concernientes al paciente están dados, todo lo que tenemos que hacer es realizar la composición de las relaciones borrosas y los datos borrosos. En otras palabras, utilizando las reglas composicionales de la inferencia de Zadeh, la confirmación o la exclusión de la enfermedad puede ser llevada a cabo.

En cuanto a aplicaciones de diagnóstico con conjuntos borrosos, un punto importante es el de cómo manejar la ambigüedad que crece con el proceso de diagnóstico. Debemos buscar en los resultados de la investigación especializada, en cada campo, el conocimiento necesario y la lógica para el diagnóstico.

Existen aún pocos sistemas de ingeniería del conocimiento, y es necesario desarrollar sistemas expertos borrosos para procesar la ambigüedad apropiada y simultáneamente con la construcción de sistemas que se enfoquen en un nivel de habilidad de doctores especialistas.

CAPÍTULO 5

LÓGICA BORROSA

5.1 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE UN SUBCONJUNTO BORROSO. VARIABLES BORROSAS.

Sabemos que en el álgebra binaria de Boole, las variables tales como a, b, ... sólo pueden tomar los valores 0 ó 1. Asimismo, en la teoría borrosa se tienen correspondencias con la teoría booleana, y se refieren no sólo a las funciones características o funciones de membresía booleana M = {0, 1}, sino también a las borrosas con M = [0, 1].

Sea x un elemento del conjunto referencia E y $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, ... subconjuntos borrosos de este conjunto referencia. Establecemos

$$\underset{\sim}{a} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \underset{\sim}{b} = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x), \ldots, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots \in M = [0, 1].$$

Se definirá las operaciones siguientes para las cantidades $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ...

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}),$$

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} = \mathrm{MAX}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}),$$

$$\overline{\underset{\sim}{a}} = 1 - \underset{\sim}{a},$$

$$\underset{\sim}{a} \oplus \underset{\sim}{b} = (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}).$$

Refiriéndonos a las propiedades de los subconjuntos borrosos, podemos escribir:

$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{a}$ Conmutatividad

$$(\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \wedge \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c})$$

$$(\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \vee \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) \qquad \text{Asociatividad}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a} \qquad \text{Idempotencia}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{c})$$

$$\underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{c}) \qquad \text{Distributividad}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge 0 = 0$$

$$\underset{\sim}{a} \vee 0 = \underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge 1 = \underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{a} \vee 1 = 1$$

$$\overline{\left(\overline{\underset{\sim}{a}}\right)} = \underset{\sim}{a}$$

$$\overline{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}} = \overline{\underset{\sim}{a}} \vee \overline{\underset{\sim}{b}} \qquad \text{Teoremas de De Morgan generalizados}$$

$$\overline{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}} = \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \qquad \text{al caso donde } M = [0,\ 1]$$

VARIABLES BORROSAS. FUNCIONES DE VARIABLES BORROSAS.

Las variables $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... $\in [0,1]$ se denominarán, en esta teoría, "*variables borrosas*". Las funciones construidas con la ayuda de estas variables se denominarán "*funciones de variables borrosas*", cumpliendo con la siguiente condición:

Sea $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots)$ una función de $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... Para que esta función se pueda denominar "función de variables borrosas", es necesario que sólo dependa de variables borrosas y que

$$0 \leq \underset{\sim}{f} \leq 1.$$

Teorema. Si $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots)$ contiene sólo variables borrosas y los operadores $(\wedge)$, $(\vee)$, y $(-)$, entonces la condición anterior se satisface.

Demostración. Es evidente ya que ninguna operación $(\wedge)$, $(\vee)$ o $(-)$ con las variables $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, ... $\in [0, 1]$ puede hacer salir el resultado fuera de los límites 0 y 1.

5.1.1 SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES DE VARIABLES BORROSAS

Las funciones de variables borrosas, a diferencia de la funciones binarias booleanas no pueden ser analizadas en tablas de verdad. Tampoco pueden simplificarse fácilmente, debido a la ausencia de dos propiedades:

$$a \bullet \overline{a} = 0 \qquad \text{y} \qquad a \dotplus \overline{a} = 1$$

para las cuales las expresiones correspondientes no se satisfacen:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{a}} \neq 0, \text{ excepto para } \underset{\sim}{a} = 0 \text{ ó } \underset{\sim}{a} = 1.$$

$$\underset{\sim}{a} \vee \overline{\underset{\sim}{a}} \neq 1, \text{ excepto para } \underset{\sim}{a} = 0 \text{ ó } \underset{\sim}{a} = 1.$$

También a causa de esto, no se les puede descomponer en formas canónicas (minitérminos y maxitérminos). Sin embargo, empleando únicamente las demás propiedades, puede efectuarse útilmente cierto número de simplificaciones.

Ejemplo 5-1:

Simplifíquese la función

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b})$$

$$= \underset{\sim}{a} \wedge (1 \vee \underset{\sim}{b}) \qquad \text{De acuerdo a}$$

$$\underset{\sim}{a} \wedge (1 \vee \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge 1) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b})$$

$$= \underset{\sim}{a} \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b})$$

$$= \underset{\sim}{a} \wedge 1 \qquad \text{Según } 1 \vee \underset{\sim}{b} = 1$$

$$= \underset{\sim}{a}$$

Así $\underline{a} \vee (\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{a}$. Esto se denomina *"propiedad de absorción"*; de manera similar se tiene que $\underline{a} \wedge (\underline{a} \vee \underline{b}) = \underline{a}$.

Ejemplo 5-2: Simplifíquese la función

$$f(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}) \vee [\overline{\underline{a}} \wedge (\overline{\underline{b}} \vee \underline{c})] \vee \overline{\underline{a}} \vee (\underline{b} \wedge \overline{\underline{c}})$$

$$= (\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \overline{\underline{b}}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{c}) \vee \overline{\underline{a}} \vee (\underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}).$$

Observación. Toda operación $\vee$ puede reemplazarse por una operación $\wedge$, y recíprocamente. En efecto:

$$\begin{aligned} \underline{a} \wedge \underline{b} &= \mathrm{MIN}(\underline{a}, \underline{b}) \\ &= 1 - \mathrm{MAX}(\overline{\underline{a}}, \overline{\underline{b}}) \\ &= \overline{\overline{\underline{a}} \vee \overline{\underline{b}}}. \end{aligned}$$

Así, basta utilizar los operadores ($\wedge$) y (-) o los operadores ($\vee$) y (-) para representar cualquier función de variables borrosas donde intervienen los símbolos ($\wedge$), ($\vee$) y (-), pero la escritura entonces se vuelve más pesada.

5.1.2 TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLES BORROSAS

En el estudio de las funciones binarias booleanas se utilizan lo que se llaman *"tablas de verdad"*, donde se asignan a las variables booleanas todos los valores posibles y se obtienen así los valores de la función. En el caso de las funciones de las variables borrosas tal tabla de verdad no tendría sentido, pero pueden construirse tablas de naturaleza diferente que desempeñen un papel similar.

Para estudiar una función de 1 variable $\underline{a}$ borrosa, se examina su valor en los dos casos siguientes:

$$\underline{a} \leq \overline{\underline{a}}, \quad \overline{\underline{a}} \leq \underline{a}.$$

Para estudiar una función de 2 variables $\underline{a}$ y $\underline{b}$ borrosas, se examina su valor en los 8 casos siguientes:

$$\underset{\sim}{a}\le\underset{\sim}{b}\le\overline{\underset{\sim}{b}}\le\overline{\underset{\sim}{a}},\ \underset{\sim}{a}\le\overline{\underset{\sim}{b}}\le\underset{\sim}{b}\le\overline{\underset{\sim}{a}}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{a}}\le\underset{\sim}{b}\le\overline{\underset{\sim}{b}}\le\underset{\sim}{a},\ \overline{\underset{\sim}{a}}\le\overline{\underset{\sim}{b}}\le\underset{\sim}{b}\le\underset{\sim}{a}.$$

$$\underset{\sim}{b}\le\underset{\sim}{a}\le\overline{\underset{\sim}{a}}\le\overline{\underset{\sim}{b}},\ \underset{\sim}{b}\le\overline{\underset{\sim}{a}}\le\underset{\sim}{a}\le\overline{\underset{\sim}{b}}.$$

$$\overline{\underset{\sim}{b}}\le\underset{\sim}{a}\le\overline{\underset{\sim}{a}}\le\underset{\sim}{b},\ \overline{\underset{\sim}{b}}\le\overline{\underset{\sim}{a}}\le\underset{\sim}{a}\le\underset{\sim}{b}.$$

Para estudiar una función de 3 variables $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ y $\underset{\sim}{c}$ borrosas, se examina su valor en los 48 casos siguientes, se presentan sin el signo $\le$ para ahorrar espacio:

$\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$
$\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$
$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$
$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$
$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}$	$\underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$
$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}$
$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}$
$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}$
$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}$	$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}$
$\underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$	$\underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$	$\underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$
$\underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$	$\underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$	$\underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$
$\underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$	$\underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$	$\underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$
$\underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}$	$\underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$	$\underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{c}}$
$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}$
$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{c}$
$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{a}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}$
$\overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}\ \underset{\sim}{b}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{c}$	$\overline{\underset{\sim}{c}}\ \overline{\underset{\sim}{b}}\ \overline{\underset{\sim}{a}}\ \underset{\sim}{a}\ \underset{\sim}{b}\ \underset{\sim}{c}$

Ejemplo 5-3:

Enumere todos los valores de la función:

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a} \wedge \overline{\underline{a}}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{b}}):$$

el resultado lo da la tabla de la figura 5.1.

$\leq$	$\leq$	$\leq$		$\underline{a} \wedge \overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{b}}$	$(\underline{a} \wedge \overline{\underline{a}}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{b}})$
$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\overline{\underline{b}}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{b}$
$\underline{a}$	$\overline{\underline{b}}$	$\underline{b}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{b}}$	$\overline{\underline{b}}$
$\overline{\underline{a}}$	$\underline{b}$	$\overline{\underline{b}}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{a}}$
$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{b}}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{a}}$
$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{b}}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$
$\underline{b}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{b}}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{b}$	$\overline{\underline{a}}$
$\overline{\underline{b}}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{b}$	$\underline{a}$	$\overline{\underline{b}}$	$\underline{a}$
$\overline{\underline{b}}$	$\overline{\underline{a}}$	$\underline{a}$	$\underline{b}$	$\overline{\underline{a}}$	$\overline{\underline{b}}$	$\overline{\underline{a}}$

Fig. 5.1

IGUALDAD DE DOS FUNCIONES DE VARIABLES BORROSAS

Podemos decir que dos funciones de variables borrosas $\underline{f}_1$ y $\underline{f}_2$ son iguales (o idénticas) si producen la misma tabla de valores mediante la enumeración de todos los casos posibles.

OPERACIONES MIXTAS

Las variables $\underline{a}$, $\underline{b}$, ... $\in [0,\ 1]$ pueden someterse a otro tipo de operaciones diferentes a ($\vee$), ($\wedge$) y ($-$) para formar lo que se llamarán *"funciones mixtas de variables borrosas"*.

Entre estas operaciones se incluyen:

Producto: $\underline{a} \bullet \underline{b}$, donde se verifica fácilmente que

$$\underline{a} \in [0,\ 1],\ \underline{b} \in [0,\ 1] \Rightarrow \underline{a} \bullet \underline{b} \in [0,\ 1]$$

Suma: $\underline{a} \dot{+} \underline{b} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} \bullet \underline{b}$ donde la propiedad anterior también se verifica.

Considerando lo anterior la función:

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \dot{+} \underline{b}) \wedge (\underline{b} \dot{+} \overline{\underline{c}}) \wedge \underline{a} \wedge \underline{c},$$

es una función mixta.

5.2 FORMAS POLINOMIALES

Dadas las propiedades de distributividad, toda función $\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \ldots)$ puede expresarse en una forma polinomial respecto a $\wedge$ o respecto a $\vee$.

Ejemplo 5-4: Sea:

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\overline{\underline{a}} \wedge \overline{\underline{b}}) \vee (\underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}).$$

Esta función esta presentada en una forma polinomial respecto a $\vee$ (dos monomios en $\wedge$ conjuntados por $\vee$). Se puede transformar a una forma polinomial respecto a $\wedge$:

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\overline{\underline{a}} \vee \underline{a}) \wedge (\overline{\underline{a}} \vee \underline{b}) \wedge (\overline{\underline{a}} \vee \overline{\underline{c}}) \wedge (\overline{\underline{b}} \vee \underline{a}) \wedge (\overline{\underline{b}} \vee \underline{b}) \wedge (\overline{\underline{b}} \vee \overline{\underline{c}}).$$

Ejemplo 5-5: Sea la función

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge\underset{\sim}{c}\wedge(\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{b}\vee\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge\underset{\sim}{c}.$$

Esto por absorción del tercer término por el segundo.

Desarrollando se tiene:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\underset{\sim}{a}\wedge\underset{\sim}{c})\vee(\overline{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c}),$$

que da una forma polinomial respecto a $\vee$, en tanto que $(\underset{\sim}{a}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge\underset{\sim}{c}$ está en forma polinomial respecto a $\wedge$.

MONOMIO MAXIMAL

Sea una función $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\ldots)$ expresada en forma polinomial respecto a $\wedge$: un monomio de esta forma polinomial se llamará "*maximal*" si no es absorbido por ningún otro monomio de forma polinomial.

5.2.1 FORMA POLINOMIAL REDUCIDA

Cuando una forma polinomial respecto a $\vee$ contiene sólo monomios maximales en $\wedge$, se denomina "*forma polinomial reducida respecto a* $\vee$". Intercambiando $\vee$ y $\wedge$ se obtiene una definición simétrica que corresponde a una "*forma polinomial reducida respecto a* $\wedge$".

Ejemplo 5-6: La función

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\overline{\underset{\sim}{a}}\wedge\underset{\sim}{b}\wedge\overline{\underset{\sim}{c}})\vee(\overline{\underset{\sim}{b}}\wedge\underset{\sim}{c})$$

se presenta bajo una forma polinomial reducida respecto a $\vee$.

Su forma polinomial reducida respecto a $\wedge$ es:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c})=(\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge(\overline{\underset{\sim}{a}}\vee\underset{\sim}{c})\wedge(\underset{\sim}{b}\vee\overline{\underset{\sim}{b}})\wedge(\underset{\sim}{b}\vee\underset{\sim}{c})\wedge(\underset{\sim}{c}\vee\overline{\underset{\sim}{c}})\wedge(\overline{\underset{\sim}{b}}\vee\overline{\underset{\sim}{c}}).$$

Teorema. El número de formas polinomiales reducidas distintas de n variables borrosas es finito y este número es una cota superior del número de funciones analíticas distintas de n variables borrosas.

5.3 ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLES BORROSAS. ~~MÉTODO DE MARINOS~~.

Descompongamos el intervalo $M = [0, 1]$ en m intervalos unidos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha, a excepción del último.

$$I_1 = [\, \alpha_0 = 0, \alpha_1 \,[\;,\; I_2 = [\, \alpha_1, \alpha_2 \,[\;, \ldots\ldots, I_m = [\, \alpha_{m-1}, \alpha_m = 1],$$

donde

$$M = ([\alpha_0 = 0, \alpha_1 \,[\,) \cup (\, [\, \alpha_1, \alpha_2 \,[\,) \cup \ldots\ldots \cup ([\, \alpha_{m-1}, \alpha_m = 1]).$$

Busquemos, entonces, las condiciones en las que una función de n variables borrosas

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_n) \;,\quad \underset{\sim}{a}_i \in [0, 1] \;,\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

pertenece a un intervalo I_k.

Ejemplo 5-7: Sea:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \overline{\underset{\sim}{c}}).$$

En cuyas condiciones se tiene:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \in I_k, \text{ es decir, } \alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \leq \alpha_k.$$

El miembro de la derecha de la función está formado por dos términos de los que se debe tomar el más grande. Se parte de una primera hipótesis.

Hipótesis I:

$$\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \geq \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \overline{\underset{\sim}{c}}$$

lo que implica que:

$$\alpha_{k-1} \leq \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} < \alpha_k \;=\; \alpha_{k-1} \leq \mathrm{MIN}(\overline{\underset{\sim}{a}}, \overline{\underset{\sim}{b}}) < \alpha_k$$

lo que es igual a

$$\alpha_{k-1} \leq \mathrm{MIN}(1 - \underset{\sim}{a},\ 1 - \underset{\sim}{b}) < \alpha_k.$$

Como $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ no se sitúan arbitrariamente el uno respecto al otro, es necesario:

$$1 - \underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1} \quad \text{y} \quad 1 - \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1}.$$

y

$$1 - \underset{\sim}{a} < \alpha_k \ \text{y/o}\ 1 - \underset{\sim}{b} < \alpha_k.$$

También se puede escribir como

$$\underset{\sim}{a} \leq 1 - \underset{\sim}{a}_{k-1} \quad \text{y} \quad \underset{\sim}{b} \leq 1 - \alpha_{k-1}$$

y

$$\underset{\sim}{a} > 1 - \alpha_k \ \text{y/o}\ \underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k$$ [1]

Hipótesis II:

$$\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} < \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \overline{\underset{\sim}{c}}$$

esto implica:

$$\alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \overline{\underset{\sim}{c}} < \alpha_k = \alpha_{k-1} \leq \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \overline{\underset{\sim}{c}}) < \alpha_k$$

o lo que es también

$$\alpha_{k-1} \leq \mathrm{MIN}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, 1 - \underset{\sim}{c}) < \alpha_k$$

Como $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ y $\underset{\sim}{c}$ no están situados los unos respecto a los otros es necesario primero:

$$\underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1} \quad \text{y} \quad \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1} \quad \text{y} \quad 1 - \underset{\sim}{c} \geq \alpha_{k-1}$$

y

$$\underset{\sim}{a} < \alpha_k \ \text{y/o}\ \underset{\sim}{b} < \alpha_k \ \text{y/o}\ 1 - \underset{\sim}{c} < \alpha_k$$

Lo que también se puede escribir así:

---

[1] En lo que respecta a la cota inferior α_{k-1}, es necesario que $1 - \underset{\sim}{a}$ y $1 - \underset{\sim}{b}$ sean, ambos, superiores o iguales a α_{k-1}. Pero en lo que se refiere a α_k, basta que sólo una de las cantidades $1 - \underset{\sim}{a}$ ó $1 - \underset{\sim}{b}$ sea inferior a α_k.

$$\underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1} \text{ y } \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1} \text{ y } \underset{\sim}{c} \leq 1-\alpha_{k-1}$$

y $$\underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ y/o } \underset{\sim}{b} < \alpha_k \text{ y/o } \underset{\sim}{c} > 1-\alpha_k$$

Finalmente, estos resultados se pueden reagrupar en dos propiedades:

Propiedad $\mathcal{P}_1$.

$$[(\underset{\sim}{a} \leq 1-\underset{\sim}{a}_{k-1}) \text{ y } (\underset{\sim}{b} \leq 1-\alpha_{k-1})] \text{ y/o } [(\underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1}) \text{ y } (\underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1}) \text{ y } (\underset{\sim}{c} \leq 1-\alpha_{k-1})].$$

Propiedad $\mathcal{P}_2$.

$$[(\underset{\sim}{a} > 1-\alpha_k) \text{ y/o } (\underset{\sim}{b} > 1-\alpha_k)] \text{ y } [(\underset{\sim}{a} < \alpha_k) \text{ y/o } (\underset{\sim}{b} < \alpha_k) \text{ y/o } (\underset{\sim}{c} > 1-\alpha_k)].$$

Para que se satisfaga $\alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \leq \alpha_k$ es necesario y suficiente que las propiedades $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se satisfagan. A manera de indicación para el cálculo de $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c})$, para ciertos valores numéricos, supongamos que:

$$\underset{\sim}{a} = 0.55,\ \underset{\sim}{b} = 0.57,\ \underset{\sim}{c} = 0.80.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) &= \underset{\sim}{f}(0.55, 0.57, 0.80) \\
&= (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \overline{\underset{\sim}{c}}) \\
&= (0.45 \wedge 0.43) \vee (0.55 \wedge 0.57 \wedge 0.20) \\
&= 0.43 \vee 0.20 \\
&= 0.43.
\end{aligned}$$

Veamos un ejemplo numérico completo.

Ejemplo 5-8: Sea:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}) \vee (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \overline{\underset{\sim}{c}},$$

y supondremos que [0, 1] se divide en tres intervalos:

$$[0, 0.2[\ , [0.2, 0.3[\ , [0.3, 1].$$

Analicemos primero el intervalo [0, 0.2].

Hipótesis I: $\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} > \overline{\underline{a}} \wedge \underline{c}$, $\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} > \overline{\underline{c}}$.

Se tiene entonces $0 \leq \underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} < 0.2$, es decir

$$0 \leq \mathrm{MIN}(\underline{a}, 1 - \underline{b}) < 0.2,$$

$$\underline{a} \geq 0 \text{ y } \underline{b} \leq 1$$

y $$\underline{a} < 0.2 \text{ y/o } \underline{b} > 0.8$$

Hipótesis II: $\overline{\underline{a}} \wedge \underline{c} > \underline{a} \wedge \overline{\underline{b}}$, $\overline{\underline{a}} \wedge \underline{c} > \overline{\underline{c}}$.

Se tiene entonces $0 \leq \overline{\underline{a}} \wedge \underline{c} < 0.2$, es decir

$$0 \leq \mathrm{MIN}(1 - \underline{a}, \underline{c}) < 0.2,$$

$$\underline{a} \leq 1 \text{ y } \underline{c} \geq 0$$

y $$\underline{a} > 0.8 \text{ y/o } \underline{c} < 0.2.$$

Hipótesis III: $\overline{\underline{c}} > \underline{a} \wedge \overline{\underline{b}}$, $\overline{\underline{c}} > \overline{\underline{a}} \wedge \underline{c}$.

Se tiene entonces $0 \leq \overline{\underline{c}} < 0.2$ es decir

$$0 \leq 1 - \underline{c} < 0.2,$$

$$0.8 < \underline{c} \leq 1.$$

Analicemos para el intervalo [0.2, 0.3].

Hipótesis I: $\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} > \overline{\underline{a}} \wedge \underline{c}$, $\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} > \overline{\underline{c}}$.

$$0.2 \leq \underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} < 0.3,$$

$$\underline{a} \geq 0.2 \text{ y } \underline{b} \leq 0.8$$

y $$\underline{a} < 0.3 \text{ y/o } \underline{b} > 0.7$$

Hipótesis II: $\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}},\ \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \overline{\underset{\sim}{c}}.$

$$0.2 \leq \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} < 0.3,$$

$$\underset{\sim}{a} \leq 0.8 \ \text{ y } \ \underset{\sim}{c} \geq 0.2$$

y

$$\underset{\sim}{a} > 0.7 \ \text{ y/o } \ \underset{\sim}{c} < 0.3.$$

Hipótesis III: $\overline{\underset{\sim}{c}} > \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}},\ \overline{\underset{\sim}{c}} > \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}.$

$$0.2 \leq \overline{\underset{\sim}{c}} < 0.3,$$

y

$$\underset{\sim}{c} \leq 0.8 \ \text{ y } \ \underset{\sim}{c} > 0.7.$$

Analicemos para el intervalo [0.3, 1].

Hipótesis I: $\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} > \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} > \overline{\underset{\sim}{c}}.$

$$0.3 \leq \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \leq 1.$$

$$\underset{\sim}{a} \geq 0.3 \ \text{ y } \ \underset{\sim}{b} \leq 0.7$$

y

$$\underset{\sim}{a} \leq 1 \ \text{ y/o } \ \underset{\sim}{b} \geq 0$$

Hipótesis II: $\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}},\ \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} > \overline{\underset{\sim}{c}}.$

$$0.3 \leq \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c} \leq 1.$$

$$\underset{\sim}{a} \leq 0.7 \ \text{ y } \ \underset{\sim}{c} \geq 0.3$$

y

$$\underset{\sim}{a} \geq 0 \ \text{ y/o } \ \underset{\sim}{c} \leq 1.$$

Hipótesis III: $\overline{\underset{\sim}{c}} > \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}},\ \overline{\underset{\sim}{c}} > \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{c}.$

$$0.3 \leq \overline{\underset{\sim}{c}} \leq 1.$$

y

$$\underset{\sim}{c} \leq 0.7 \ \text{ y } \ \underset{\sim}{c} \geq 0.$$

Finalmente, los resultados se pueden reagrupar de la forma siguiente:

a) $0 \le \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < 0.2.$

Propiedad $\mathcal{P}_1^{(1)}$:

$[(\underset{\sim}{a} \ge 0)$ y $(\underset{\sim}{b} \le 1)]$ y/o $[(\underset{\sim}{a} \le 1)$ y $(\underset{\sim}{c} \ge 0)]$ y/o $(\underset{\sim}{c} \le 1)$.

Propiedad $\mathcal{P}_2^{(1)}$:

$[(\underset{\sim}{a} < 0.2)$ y/o $(\underset{\sim}{b} > 0.8)]$ y $[(\underset{\sim}{a} > 0.8)$ y/o $(\underset{\sim}{c} < 0.2)]$ y $(\underset{\sim}{c} > 0.8)$.

Si se cumplen las propiedades anteriores, entonces se verifica *a*.

b) $0.2 \le \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) < 0..3.$

Propiedad $\mathcal{P}_1^{(2)}$:

$[(\underset{\sim}{a} \ge 0.2)$ y $(\underset{\sim}{b} \le 0.8)]$ y/o $[(\underset{\sim}{a} \le 0.8)$ y $(\underset{\sim}{c} \ge 0.2)]$ y/o $(\underset{\sim}{c} \le 0.8)$.

Propiedad $\mathcal{P}_2^{(2)}$:

$[(\underset{\sim}{a} < 0.3)$ y/o $(\underset{\sim}{b} > 0.7)]$ y $[(\underset{\sim}{a} > 0.7)$ y/o $(\underset{\sim}{c} < 0.3)]$ y $(\underset{\sim}{c} > 0.7)$.

Al satisfacerse las dos propiedades anteriores, entonces se tiene *b*.

c) $0.3 \le \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \le 1.$

Propiedad $\mathcal{P}_1^{(3)}$:

$[(\underset{\sim}{a} \ge 0.3)$ y $(\underset{\sim}{b} \le 0.7)]$ y/o $[(\underset{\sim}{a} \le 0.7)$ y $(\underset{\sim}{c} \ge 0.3)]$ y/o $(\underset{\sim}{c} \le 0.7)$.

Propiedad $\mathcal{P}_2^{(3)}$:

$[(\underset{\sim}{a} \le 1)$ y/o $(\underset{\sim}{b} \ge 0)]$ y $[(\underset{\sim}{a} \ge 0.7)$ y/o $(\underset{\sim}{c} \le 1)]$ y $(\underset{\sim}{c} \ge 0)$.

Si se las propiedades anteriores se verifican se tiene *c*.

5.4 ESTRUCTURA LÓGICA DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLES BORROSAS.

El álgebra proposicional en la que intervienen las proposiciones:

"y" representada por ($\triangle$)

"y/o" representada por (∇)

complemento representado por (-)

siguen las mismas reglas que el álgebra del Boole.

Para presentar la estructura lógica de las relaciones que intervienen en una función lógica utilizaremos los siguientes símbolos:

($\triangle$) está asociada a ($\cap$).

(∇) está asociada a ($\cup$).

($-$) está asociada a ($-$).

considerando un intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$.

Sea $\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots, \underset{\sim}{l})$ una función de las variables borrosas $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots, \underset{\sim}{l}$ y un intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$. Si $\underset{\sim}{x}$ y $\underset{\sim}{y}$ son variables de $\underset{\sim}{f}$, utilizaremos los símbolos siguientes:

$$\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} \geq \alpha_{k-1}).$$
$$\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{x}}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} \leq 1 - \alpha_{k-1}),$$
$$\mathcal{P}_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} < \alpha_k).$$
$$\mathcal{P}_{\bar{\underset{\sim}{x}}} = (\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} > 1 - \alpha_{k-1}).$$

Supongamos que $\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots, \underset{\sim}{l})$ esté presentada en forma polinomial reducida respecto a $\vee$. Para obtener la estructura lógica reducida en el intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, se operará como sigue:

1. Toda expresión de la forma $\underline{x} \wedge \underline{y}$ se reemplazará por una expresión $\mathcal{P}_{\underline{x}} \Delta \mathcal{P}_{\underline{y}}$. Así, por ejemplo, una expresión como $\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}$ será reemplazada por $\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{b} \Delta \mathcal{P}\,\overline{\underline{c}}$.

2. Los monomios de $\underline{f}$ unidos por el símbolo $\vee$ serán reemplazados por monomios en $\mathcal{P}$ obtenidos en 1) y unidos por el símbolo ∇. Así por ejemplo, $(\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}) \vee (\overline{\underline{b}} \wedge \underline{c})$ será reemplazada por $(\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{b} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c}) \nabla (\mathcal{P}\,\overline{\underline{b}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c})$.

3. Tomar el dual y la forma lógica obtenida en 2), reemplazando $\mathcal{P}_{\underline{x}}$ por $\mathcal{P}\ \underline{x}$, $\mathcal{P}\,\overline{\underline{x}}$ por $\mathcal{P}\ \underline{x}$, Δ por ∇, ∇ por Δ. Así, por ejemplo, $(\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{b} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c}) \nabla (\mathcal{P}\,\overline{\underline{b}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c})$ se convertirá en $(\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \nabla \mathcal{P}\,\underline{b} \nabla \mathcal{P}\,\underline{c}) \Delta (\mathcal{P}\,\overline{\underline{b}} \nabla \mathcal{P}\,\underline{c})$.

4. Reunir con el símbolo Δ los resultados obtenidos en 2) y 3). Esto da la expresión lógica relativa a $\underline{f}$ en el intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$. Así, por ejemplo, en lo que se refiere al ejemplo ya examinado anteriormente en 1), 2) y 3), se tendrá para

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \wedge \overline{\underline{c}}) \vee (\overline{\underline{b}} \wedge \underline{c}),$$

la expresión lógica:

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{b} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c}) \nabla (\mathcal{P}\,\overline{\underline{b}} \Delta \mathcal{P}\,\underline{c})] \Delta [(\mathcal{P}\,\overline{\underline{a}} \nabla \mathcal{P}\,\underline{b} \nabla \mathcal{P}\,\underline{c}) \Delta (\mathcal{P}\,\overline{\underline{b}} \nabla \mathcal{P}\,\underline{c})].$$

Si $\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \ldots, \underline{l})$ está presentada en forma polinomial respecto a $\wedge$, las reglas 1) a 4) anteriores se modifican como sigue:

1. Toda expresión de la forma $\underline{x} \vee \underline{y}$ se reemplazará por una expresión $\mathcal{P}_{\underline{x}} \nabla \mathcal{P}_{\underline{y}}$.

2. Los monomios de $\underset{\sim}{f}$ unidos por el símbolo $\wedge$ serán reemplazados por monomios en $\mathcal{P}$ correspondientes unidos por el símbolo Δ.

3. Tomar el dual de 2).

4. Unir los resultados de 2) y 3) por medio del símbolo Δ.

Ejemplo 5-9: Sea:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a} \vee \overline{\underset{\sim}{b}}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \overline{\underset{\sim}{d}}) \wedge (\overline{\underset{\sim}{c}} \vee \underset{\sim}{d}).$$

Se tendrá:

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}\,\underset{\sim}{a} \nabla \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{b}}) \Delta (\mathcal{P}\,\underset{\sim}{b} \nabla \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{d}}) \Delta (\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{c}} \nabla \mathcal{P}\,\underset{\sim}{d})] \Delta$$

$$[(\mathcal{P}\,\underset{\sim}{a} \Delta \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{b}}) \nabla (\mathcal{P}\,\underset{\sim}{b} \Delta \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{d}}) \nabla (\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{c}} \Delta \mathcal{P}\,\underset{\sim}{d})].$$

Suponiendo que:

$$[\alpha_{K-1}, \alpha_K[= [0.6, 0.8[.$$

Entonces $\mathcal{P}$ se escribirá como:

$[(\underset{\sim}{a} \geq 0.6$ y/o $\underset{\sim}{b} \leq 0.4)$ y $(\underset{\sim}{b} \geq 0.6$ y/o $\underset{\sim}{d} \leq 0.4)$ y $(\underset{\sim}{c} \leq 0.4$ y/o $\underset{\sim}{d} \geq 0.6)]$ y

$[(\underset{\sim}{a} < 0.8$ y $\underset{\sim}{b} > 0.2)$ y/o $(\underset{\sim}{b} < 0.8$ y $\underset{\sim}{d} > 0.2)$ y/o $(\underset{\sim}{c} > 0.2$ y $\underset{\sim}{d} < 0.8)]$.

Nota. Si una variables borrosa $\underset{\sim}{a}$ toma sus valores en un intervalo:

$$\mathcal{D}\,\underset{\sim}{a} = [a_1, a_2[\subset [0, 1],$$

entonces la variable $\overline{\underset{\sim}{a}} = 1 - \underset{\sim}{a}$ tomará sus valores en el intervalo:

$$\mathcal{D}\,\overline{\underset{\sim}{a}} =]1 - a_2, 1 - a_1] \subset [0, 1].$$

Si $\underset{\sim}{a}$ toma sus valores en el intervalo:

$$\overline{\mathcal{D}}\,\underset{\sim}{a} = [0, a_1[\cup [a_2, 1],$$

entonces $\overline{\underset{\sim}{a}}$ tomará sus valores en el intervalo:

$$\overline{\mathcal{D}}\,\overline{\underset{\sim}{a}} = [0, 1 - a_2] \cup [1 - a_1, 1].$$

5.5 COMPOSICIÓN DE LOS INTERVALOS

Sean:

$$\underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1, a_2[\quad \text{y} \quad \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1, b_2[$$

entonces se tiene que el intervalo $\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}}$ al que pertenece $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}} = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2[.$$

De igual manera se obtendrá:

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}} = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2[.$$

Ejemplo 5-10: *Sean:*

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [0.6, 0.9[\text{ y } \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [0.2, 0.7[$$

Se tendrá:

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}} = [0.6 \wedge 0.2, 0.9 \wedge 0.7[$$

$$= [0.2, 0.7[.$$

$$\mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}} = [0.6 \vee 0.2, 0.9 \vee 0.7[$$

$$= [0.6, 0.9[.$$

Debido a las propiedades de asociatividad, se tendrá por extensión; si:

$$\underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a}} = [a_1, a_2[, \quad \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{b}} = [b_1, b_2[, \quad \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{c}} = [c_1, c_2[.$$

entonces:

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c}} = [a_1 \wedge b_1 \wedge c_1, a_2 \wedge b_2 \wedge c_2[.$$

y

$$\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c} \in \mathcal{D}_{\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c}} = [a_1 \vee b_1 \vee c_1, a_2 \vee b_2 \vee c_2[.$$

Cuando se da el caso de variables borrosa que toman sus valores en el intervalo complementario, si:

$$\overline{\mathcal{D}}_{\underset{\sim}{a}} = [0, a_1[\cup [a_2, 1].$$

y $$\overline{\mathcal{D}}\ \underset{\sim}{b} = [0,\ b_1[\cup [b_2,\ 1],$$

se tendrán los resultados siguientes

$$f(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b},\quad \underset{\sim}{a} \in \mathcal{D}\underset{\sim}{a},\ \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}\underset{\sim}{b},$$

entonces: $$\mathcal{D}\,\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = [a_1 \wedge b_1,\ a_2 \wedge b_2[.$$

$$f(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{a} \in \overline{\mathcal{D}}\ \underset{\sim}{a},\ \ \underset{\sim}{b} \in \mathcal{D}\underset{\sim}{b},$$

entonces: $$\mathcal{D}\,\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = [0,\ a_1 \wedge b_2[\cup [a_2 \wedge b_2,\ b_2[.$$

Ejemplo 5-11: Se va a determinar el dominio de:

$$f(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}:$$

sabiendo que:

$$\mathcal{D}\,\overline{\underset{\sim}{a}} =]1 - a_2,\ 1 - a_1] \text{ y } \mathcal{D}\underset{\sim}{b} = [b_1,\ b_2[.$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\,\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} &=](1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2], && 1 - a_2 \le b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,\\
&= [(1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2], && 1 - a_2 > b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,\\
&=](1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2[, && 1 - a_2 \le b_1 \text{ y } 1 - a_1 > b_2,\\
&= [(1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2[, && 1 - a_2 > b_1 \text{ y } 1 - a_1 > b_2,
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\,\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} &=](1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2], && 1 - a_2 \le b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,\\
&= [(1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2], && 1 - a_2 > b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,\\
&=](1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2[, && 1 - a_2 \le b_1 \text{ y } 1 - a_1 > b_2,\\
&= [(1 - a_2) \wedge b_1,\ (1 - a_1) \wedge b_2[, && 1 - a_2 > b_1 \text{ y } 1 - a_1 > b_2,
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\,\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} &=]1 - a_2,\ 1 - a_1],\ \text{si } 1 - a_2 \le b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,\\
&= [b_1,\ 1 - a_1],\quad \text{si } 1 - a_2 > b_1 \text{ y } 1 - a_1 \le b_2,
\end{aligned}$$

$$= \,]1 - a_2,\, b_2[, \qquad \text{si} \quad 1 - a_2 \leq b_1 \;\; \text{y} \;\; 1 - a_1 > b_2,$$
$$= [b_1,\, b_2[, \qquad \text{si} \quad 1 - a_2 > b_1 \;\; \text{y} \;\; 1 - a_1 > b_2.$$

CASO DE UNA FUNCIÓN DE MEMBRESÍA DISCRETA

Supongamos que el intervalo [0, 1] se descompone en diez partes iguales, esto determina once valores discretos:

$$M = \{0,\, 0.1,\, 0.2,\, 0.3,\, 0.4,\, 0.5,\, 0.6,\, 0.7,\, 0.8,\, 0.9,\, 1\}.$$

Podemos establecer tablas para las principales funciones de variables borrosas[2], las cuales se presentan en la figura 5.2.

$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
.2	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.3	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.4	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.7	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.9	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

$\bar{a} \wedge b$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.3	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.7	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.8	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.9	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

[2] Estas tablas juegan un papel similar al de las tablas de verdad en el estudio de las funciones de variables booleanas, pero en lugar de utilizar dos valores para cada variable, se tendrán aquí once valores de 0 a 1.

$\bar{a} \wedge \bar{b}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.2	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.3	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.3	.2	.1	0
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.2	.1	0
.7	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.2	.1	0
.8	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.1	0
.9	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a \vee b$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.2	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.3	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.6	.7	.8	.9	1
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.7	.8	.9	1
.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.8	.9	1
.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.9	1
.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\bar{a} \vee b$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	1
.2	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.9	1
.3	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.8	.9	1
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.7	.8	.9	1
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.6	.7	.8	.9	1
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.7	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.8	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.9	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

$\underline{\bar{a}} \vee \underline{\bar{b}}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	1	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9
.2	1	.9	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8
.3	1	.9	.8	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7
.4	1	.9	.8	.7	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6
.5	1	.9	.8	.7	.6	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.7	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.8	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.9	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

$(\underline{a} \wedge \underline{\bar{b}}) \vee (\underline{\bar{a}} \wedge \underline{b})$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.1
.1	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.3	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.7	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.8	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.9	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

$(\underline{a} \vee \underline{\bar{b}}) \wedge (\underline{\bar{a}} \vee \underline{b})$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
.2	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.3	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.4	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	.4	.4	.4	.4	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.7	.3	.3	.3	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	.2	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.9	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Fig. 5.2

Veamos algunos ejemplos de como se emplean estas tablas.

Ejemplo 5-12: Sea:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}.$$

con $\underset{\sim}{a} \in \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.

$\underset{\sim}{b} \in \{0, 0.1\} \cup \{0.7, 0.8, 0.9\}$.

En la figura 5.3 se muestran los dominios (sombreados) de $\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}$.

$$\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \in \{0, 0.1\} \cup \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}.$$

$\overline{a} \wedge b$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
.1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
.2	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.3	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.4	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.7	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.8	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.9	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig. 5.3

Ejemplo 5-13: Sea:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \overline{\underset{\sim}{c}}.$$

donde $\underset{\sim}{a} \in \{0.3, 0.4, 0.5\}$.

$\underset{\sim}{b} \in \{0.1, 0.2\} \cup \{0.6\}$.

$\underset{\sim}{c} \in \{0, 0.1\} \cup \{0.7, 0.8, 0.9, 1\}$

Solución:

Primero vamos a definir: $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}$

y calculemos el dominio de $\underset{\sim}{d}$ con la ayuda de la tabla de la figura 5.4 (la cual es la transpuesta a la tabla de la figura 5.3), en la cual se encuentra que:

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \in \{0.3, 0.4, 0.5\}.$$

Ahora calculemos el dominio de:

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{d} \wedge \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c},$$

con la ayuda de la tabla de la figura 5.5, en la cual se encuentra que:

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{d} \wedge \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c} \in \{0, 0.1\} \cup \{0.3, 0.4, 0.5\}.$$

Por último, calculemos el dominio de:

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{e} \vee \overline{\underset{\sim}{c}} = (\underset{\sim}{d} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \overline{\underset{\sim}{c}} = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee \overline{\underset{\sim}{c}},$$

con la ayuda de la tabla de la figura 5.6, se encuentra que:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\} \cup \{0.9, 1\}.$$

$d = a \wedge \bar{b}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	0
.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.1	0
.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.2	.1	0
.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.2	.1	0
.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.3	.2	.1	0
.6	.6	.6	.6	.6	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.7	.7	.7	.7	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.8	.8	.8	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.9	.9	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0

Fig. 5.4

$e = d \wedge c$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1	0	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1	.1
.2	0	.1	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2	.2
.3	0	.1	.2	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3
.4	0	.1	.2	.3	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4
.5	0	.1	.2	.3	.4	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.6	.6	.6	.6
.7	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.7	.7	.7
.8	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.8	.8
.9	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.9
1	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Fig. 5.5

$f = e \vee \bar{c}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
0	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	0
.1	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.1
.2	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.2	.2
.3	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.3	.3	.3
.4	1	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.4	.4	.4	.4
.5	1	.9	.8	.7	.6	.5	.5	.5	.5	.5	.5
.6	1	.9	.8	.7	.6	.6	.6	.6	.6	.6	.6
.7	1	.9	.8	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7	.7
.8	1	.9	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8	.8
.9	1	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9	.9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fig. 5.6

5.6 SÍNTESIS DE UNA FUNCIÓN DE VARIABLES BORROSAS

Examinemos un problema, en el cual tenemos dos variables $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$, para construir una función $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ que tome sus valores en el intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$. Pero la función tiene varias soluciones, este caso escojamos una función del tipo $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ que tome sus valores en el intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$.

Para esto, es necesario satisfacer una forma polinomial respecto a ∇ o respecto a Δ en lo que refiere a las condiciones del tipo $\mathcal{P}$. Para esta función escojamos la forma polinomial respecto a Δ.

$$(\mathcal{P}\underset{\sim}{a}) \Delta (\mathcal{P}\underset{\sim}{b}) \Delta (\mathcal{P}\underset{\sim}{a} \nabla \mathcal{P}\underset{\sim}{b}).$$

es decir refiriéndose a las convenciones de la estructura lógica:

$$\{\ \underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1} \text{ y } \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1}\ \} \text{ y } \{\ \underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ y/o } \underset{\sim}{b} < \alpha_k\ \}.$$

Ahora supongamos que las cotas inferiores o superiores referentes a las variables $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ están dadas por los siguientes valores:

$$\{\ \underset{\sim}{a} \geq w_1 \text{ y } \underset{\sim}{b} \geq w_2\ \} \text{ y } \{\ \underset{\sim}{a} < w_3 \text{ y/o } \underset{\sim}{b} < w_4\ \}.$$

Se introducirán entonces los "*coeficientes de ajuste*" λ_{ij} también llamados "*multiplicadores*" de las tecnologías; sean:

$$\lambda_{11} w_1 = \alpha_{k-1},\ \lambda_{12} w_2 = \alpha_{k-1},\ \lambda_{21} w_3 = \alpha_k \text{ y } \lambda_{22} w_4 = \alpha_k.$$

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_1},\ \lambda_{12} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_2},\ \lambda_{21} = \frac{\alpha_k}{w_3} \text{ y } \lambda_{22} = \frac{\alpha_k}{w_4}.$$

Para construir tecnológicamente una función $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$ que tome sus valore en el intervalo $[\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, cuando las dos variables $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ de las que ella depende se sitúen en los intervalos de $[w_1, w_2[$ y $[w_3, w_4[$, se construirá un *esquema de principio*.

Un esquema de principio emplea los símbolos siguientes:

(λ_{ij}) dispositivo de ajuste paramétrico para restituir los α_{k-1} y α_k.

(AND) elemento lógico que realiza el "y" (and).

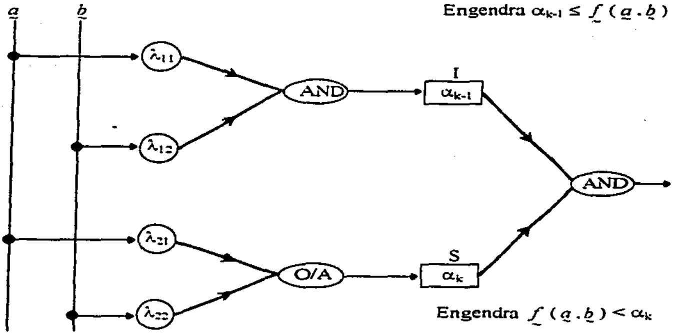
(O/A) elemento lógico que realiza el "y/o" (or/and).

(NO) elemento lógico que realiza la negación (no).

I
$\boxed{\alpha_{k-1}}$ dispositivo que realiza una cota inferior.

S
$\boxed{\alpha_k}$ dispositivo que realiza una cota superior.

Entonces el esquema de principio del problema $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ es:



Ejemplo 5-14: **Realizar una síntesis que dé:**

$$\alpha_{k-1} \geq \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) < \alpha_k$$

utilizando la función:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}}) \vee (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}).$$

Refiriéndose a la regla dada en *Estructura Lógica de una Función* (tema 5.4), se tendrá que:

$$\mathcal{P} = [(\mathcal{P}\,\underset{\sim}{a}\ \Delta\ \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{b}})\ \nabla\ (\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{a}}\ \Delta\ \mathcal{P}\,\underset{\sim}{b})]\ \Delta\ [(\mathcal{P}\,\underset{\sim}{a}\ \nabla\ \mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{b}})\ \Delta\ (\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{a}}\ \nabla\ \mathcal{P}\,\underset{\sim}{b})].$$

Lo que se escribirá de la siguiente forma:

$$(\underset{\sim}{a} \geq \alpha_{k-1} \text{ y } \underset{\sim}{b} \leq 1-\alpha_{k-1}) \text{ y/o } (\underset{\sim}{a} \leq 1-\alpha_{k-1} \text{ y } \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1})$$

$$\text{y } (\underset{\sim}{a} < \alpha_k \text{ y/o } \underset{\sim}{b} > 1-\alpha_k) \text{ y } (\underset{\sim}{a} > 1-\alpha_k \text{ y/o } \underset{\sim}{b} < \alpha_k).$$

Si las cotas son las siguientes:

$$(\underset{\sim}{a} \geq w_1 \text{ y } \underset{\sim}{b} \leq w_2) \text{ y/o } (\underset{\sim}{a} \leq w_3 \text{ y } \underset{\sim}{b} \geq w_4)$$

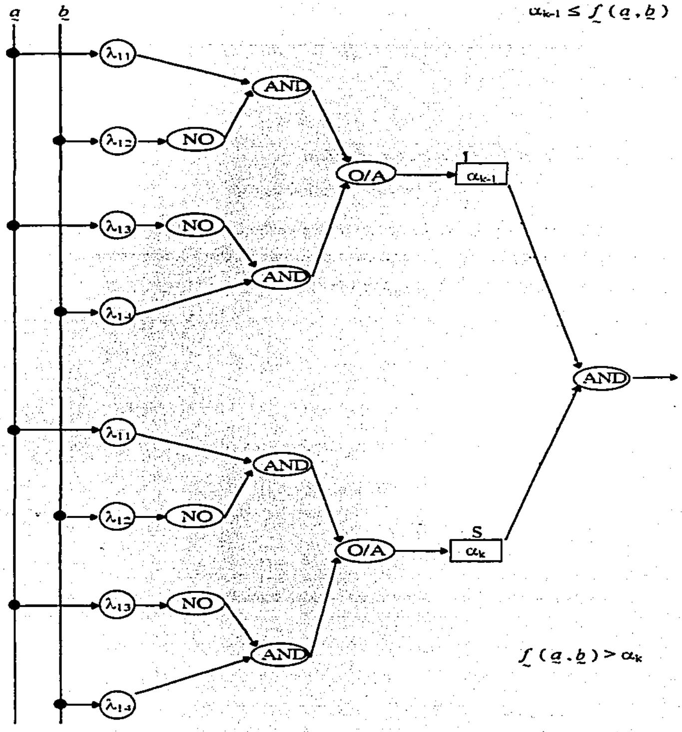
$$\text{y } (0\,\underset{\sim}{a} < w_5 \text{ y/o } \underset{\sim}{b} > w_6) \text{ y } (\underset{\sim}{a} > w_7 \text{ y/o } \underset{\sim}{b} < w_8).$$

se tendrá entonces:

$$\lambda_{11} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_2}, \quad \lambda_{13} = \frac{1-\alpha_{k-1}}{w_3}, \quad \lambda_{14} = \frac{\alpha_{k-1}}{w_4}.$$

$$\lambda_{21} = \frac{\alpha_k}{w_5}, \quad \lambda_{22} = \frac{1-\alpha_k}{w_6}, \quad \lambda_{23} = \frac{1-\alpha_k}{w_7}, \quad \lambda_{24} = \frac{\alpha_k}{w_8}.$$

Por lo tanto, se obtendrá el esquema de principio de la función.


$\alpha_{k-1} \leq f(a, b)$
a
b
λ_{11}
AND
λ_{12}
NO
O/A
I
α_{k-1}
λ_{13}
NO
AND
λ_{14}
AND
λ_{11}
AND
λ_{12}
NO
O/A
S
α_k
λ_{13}
NO
AND
λ_{14}
$f(a, b) > \alpha_k$

CIRCUITOS MIXTOS

Para construir un circuito mixto, se utilizaran los *primales* que serán las condiciones que dan:

$$\alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,,\ldots)$$

y los *duales* que serán las condiciones que dan:

$$\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,,\ldots) < \alpha_k.$$

Con estas condiciones se puede hacer perfectamente un circuito mixto, sólo basta ensamblar, mediante un operador tecnológico AND, un circuito primal para $\alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,,\ldots)$ con un circuito dual para $\underset{\sim}{f}\,(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,,\ldots) < \alpha_k$.

Ejemplo 5-15: Sea:

$$\alpha_{k-1} \leq \underset{\sim}{f}_1(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,) = \overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b}$$

y

$$\underset{\sim}{f}_2(\underset{\sim}{a}\,,\underset{\sim}{b}\,,\underset{\sim}{c}\,) = (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}\,) \vee (\overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}\,) < \alpha_k.$$

Para $\underset{\sim}{f}_1$ se tienen las siguientes condiciones primales:

$$\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{a}} \;\Delta\; \mathcal{P}\,\underset{\sim}{b}\,.$$

es decir:

$$(\,\underset{\sim}{a} \leq 1 - \alpha_{k-1} \;\; \text{y} \;\; \underset{\sim}{b} \geq \alpha_{k-1}\,).$$

Para $\underset{\sim}{f}_2$ se tienen las siguientes condiciones duales:

$$(\mathcal{P}\,\underset{\sim}{a} \;\nabla\; \mathcal{P}\,\underset{\sim}{b}\,) \,\Delta\, (\mathcal{P}\,\overline{\underset{\sim}{b}} \;\nabla\; \mathcal{P}\,\underset{\sim}{c}\,)$$

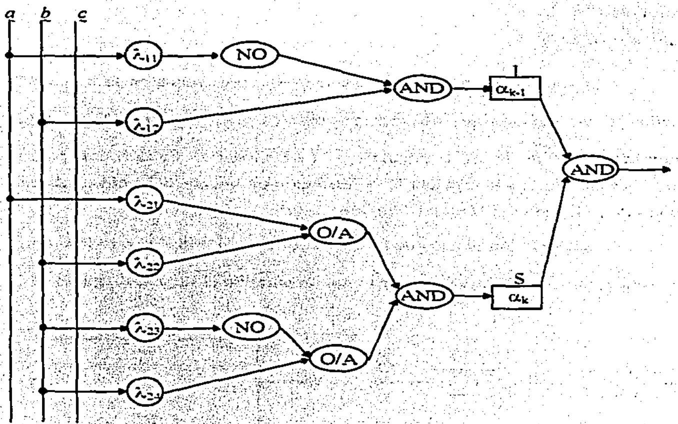
es decir:

$$(\,\underset{\sim}{a} < \alpha_k \;\; \text{y/o} \;\; \underset{\sim}{b} < \alpha_k\,) \;\; \text{y} \;\; (\,\underset{\sim}{b} > 1 - \alpha_k \;\; \text{y/o} \;\; \underset{\sim}{c} < \alpha_k\,).$$

Agrupando las condiciones primales y duales por medio de la conjunción "y" se tiene:

$(\underline{a} \leq 1 - \alpha_{k-1}$ y $\underline{b} \geq \alpha_{k-1})$ y $[(\underline{a} < \alpha_k$ y/o $\underline{b} < \alpha_k)$ y $(\underline{b} > 1 - \alpha_k$ y/o $\underline{c} < \alpha_k)]$.

Y finalmente se obtiene la síntesis del circuito mixto, presentada en la siguiente figura:



Así se ha asegurado que se tendrá, a la vez:

$$\alpha_{k-1} \leq \overline{\underline{a}} \wedge \underline{b} \quad \text{y} \quad (\underline{a} \wedge \underline{b}) \vee (\overline{\underline{b}} \wedge \underline{c}) < \alpha_k.$$

mediante un ajuste de λ_{ij}.

5.7 RED DE ELEMENTOS BORROSOS

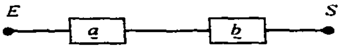
Es interesante emplear la representación de una red como se hace en algunas teorías donde se puede reducirse a asociaciones en serie y/o paralelo.

ELEMENTO BORROSO DE UNA RED

A toda variable borrosa $\underset{\sim}{a} \in [0, 1]$ le asociaremos un elemento $\underset{\sim}{a}$ representado por el mismo símbolo; y se construiremos entonces una red que posee elementos como $\underset{\sim}{a}$.

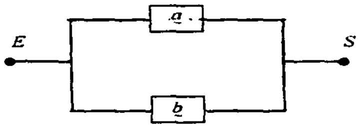
A la función $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ asociaremos una red representada en la figura 5.7. A la función $\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}$ asociaremos una red representada en la figura 5.8. La primera se denominará *"red en serie"*, la segunda *"red en paralelo"*. Se definirá, para ambas redes, una entrada E y una salida S. Al resultado de la operación efectuada entre los elementos de la red se le llamará *"flujo en la red"*.

Por ejemplo, en el caso de la red en serie, si $\underset{\sim}{a} = 0.7$ y $\underset{\sim}{b} = 0.4$, entecos el flujo será igual a 0.4. Y en el caso de la red en paralelo el flujo será igual a 0.7.



$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$

Fig. 5.7



$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}$

Fig. 5.8

Teorema I. A toda función analítica de variables borrosas $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots)$ se le puede asociar una "red de elementos borrosos" donde la colocación en serie está asociada a la operación $\wedge$, y la colocación en paralelo está asociada a la operación $\vee$.

Demostración. A toda función $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \ldots)$ analítica se le puede asociar por definición una forma polinomial reducida respecto a $\wedge$ o respecto a $\vee$. Por lo que se le puede asociar una red a cada una de ellas.

Ejemplo 5-17:

A la siguiente función presentada en forma polinomial reducida respecto a $\vee$:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{b}} \wedge \underset{\sim}{c}) \vee (\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) \vee (\overline{\underset{\sim}{a}} \wedge \underset{\sim}{b} \wedge \underset{\sim}{c})$$

se le asocia la red de la figura 5.9.

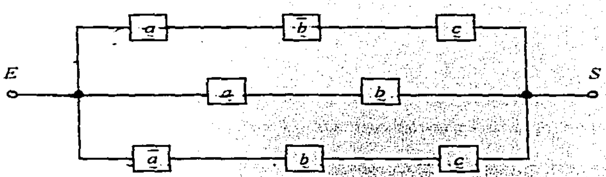


Fig. 5.9

La red correspondiente a la misma función, pero presentada en forma polinomial reducida respecto a $\wedge$ es:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} \wedge \overline{\underset{\sim}{a}}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{b}) \wedge (\underset{\sim}{a} \vee \underset{\sim}{c}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \overline{\underset{\sim}{b}}) \wedge (\underset{\sim}{b} \vee \underset{\sim}{c})$$

está representada en la figura 5.10.

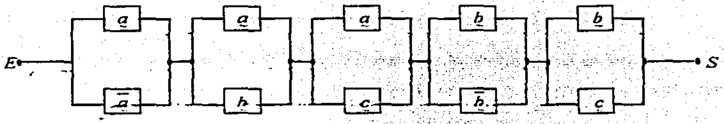


Fig. 5.10

ITINERARIO

Se llama *"itinerario"* o *"camino"* a una secuencia de elementos encontrados unidos E (entrada) y S (salida), en la figura 5.9 se puede observar un itinerario ($\underline{a}$. $\overline{\underline{b}}$. $\underline{c}$).

Un itinerio es *"simple"* si contiene sólo una vez al elemento x y no más de una vez al mismo elemento x. En la figura 5.10 contiene un itinerario simple.

($\underline{a}$. $\underline{a}$. $\underline{c}$. $\overline{\underline{b}}$. $\underline{b}$) es un itinerario.

($\underline{a}$. $\underline{c}$. $\overline{\underline{b}}$. $\underline{b}$) es un itinerario simple.

Se considera que un itinerario, respecto a la operación $\wedge$, es conmutativo y asociativo; el orden en que se encuentran los elementos es indiferente.

ITINERARIO SIMPLE MAXIMAL

Sea I el conjunto ordinario de los itinerarios simples de una red: entonces, todo itinerio simple que no está contenido en otro itinerio de I, es un *itinerario simple maximal.*

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Colocando en paralelo todos los itinerarios simples maximales, se construye una red equivalente a una forma polinomial reducida respecto a $\vee$. Esta propiedad es evidente dada la forma en que se construyen.

Ejemplo 5-18: Consideremos la red de la figura 5.11. que corresponde a la función:

$$\underline{f}(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = [\underline{a} \wedge [(\underline{b} \wedge \underline{c}) \vee (\underline{a} \wedge \overline{\underline{c}})]] \vee \overline{\underline{c}}.$$

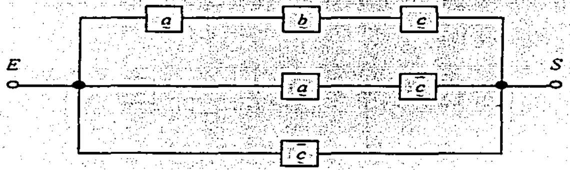


Fig. 5.11

El conjunto de itinerarios es:

$$\{ (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}),\ (\underline{a}, \underline{a}, \overline{\underline{c}}),\ (\overline{\underline{c}}) \}.$$

El conjunto de itinerarios simples es:

$$\{ (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}),\ (\underline{a}, \overline{\underline{c}}),\ (\overline{\underline{c}}) \}.$$

El conjunto de itinerarios simples maximales es:

$$\{ (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}), (\overline{\underline{c}}) \}.$$

A éste le corresponde la forma polinomial reducida en $\vee$:

$$\underline{f}(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \vee (\overline{\underline{c}}).$$

y la red simplificada es (figura 5.12):

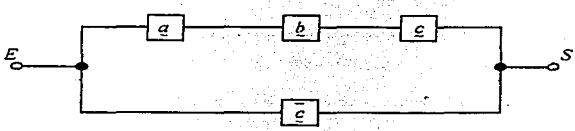


Fig. 5.12

Ejemplo 5-19:

En este caso se tendrá algo más complicado. El conjunto de itinerarios es:

$$(a, b, \bar{c}),\ (a, c, a),\ (a, c, c, \bar{a}, \bar{c}),\ (a, b, \bar{a}, c, a),\ (a, b, \bar{a}, c, c, b, \bar{c}),$$

$$(b, c, a),\ (b, \bar{a}, \bar{c}),\ (b, \bar{a}, b, c, a),\ (b, c, c, b, \bar{c}),\ (b, c, c, b, \bar{a}, c, a).$$

y su red es (figura 5.13):

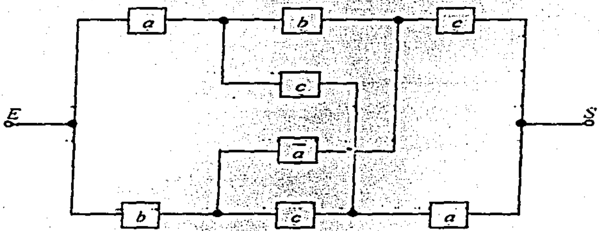


Fig. 5.13

El conjunto de itinerarios simples es:

$$\{(a, b, \bar{c}),\ (a, c),\ (a, \bar{a}, c, \bar{c}),\ (a, \bar{a}, b, c),\ (a, \bar{a}, b, c, \bar{c}),\ (a, b, c),$$

$$(\bar{a}, b, \bar{c}),\ (a, \bar{a}, b, c),\ (b, c, \bar{c}),\ (a, \bar{a}, b, c)\}$$

El conjunto de itinerarios simples maximales es:

$$\{(a, b, \bar{c}),\ (\bar{a}, b, \bar{c}),\ (b, c, \bar{c}),\ (a, c)\}$$

A éste le corresponde la forma polinomial reducida en $\vee$:

$$f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge c).$$

y su red serie-paralelo se muestra en la figura 5.14.

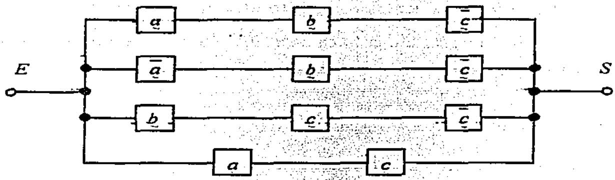


Fig. 5.14

RED PLANAR

Si en una red no existen entre dos líneas que se corten una a otra cuando se dibuja en un plano entre E y S. se dice que la red es *"aplicable en un plano"* o *"planar"*. en caso contrario. se dice que la red es *"no planar"*. Un ejemplo de una red planar es la red de la figura 5.11 y de un red no planar es la red de la figura 5.13.

Propiedad. Las redes que corresponden a las formas polinomiales en $\wedge$ o en $\vee$ son planares.

En efecto . a toda forma polinomial en $\wedge$ corresponde una red paralelo-serie que es planar. y a toda forma polinomial en $\vee$ corresponde una red serie-paralelo que es planar.

DUAL DE UNA RED PLANAR

Sea R una red planear. en la cual se pueden definir las caras α. β,..., limitadas por líneas y elementos (ver fig. 5.15). En cada una de las caras se colocará un punto de unión de líneas y se hará lo mismo para la cara definida arriba de ES y la definida abajo de ES.

Se aplica la siguiente regla para obtener el dual de una red planar:

Unir mediante una línea cada elemento con el punto de unión de toda cara que le es adyacente, se forma una nueva red R' que se denomina el "*dual*" de R.

Ejemplo 5-20:

En la figura 5.15 se ha representado con líneas punteadas la red R' dual de R. Enseguida, en la figura 5.16, se ha representado definitivamente R'.

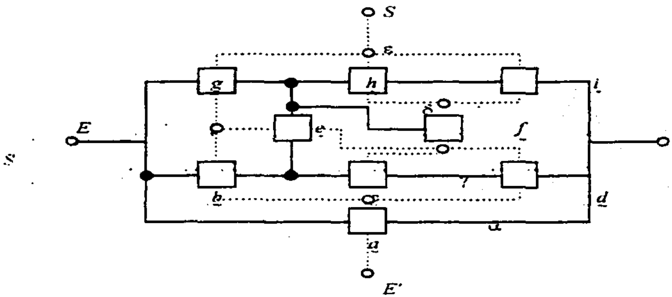


Fig. 5.15

Una red y su dual tiene la propiedad de demostrar que:

$$(R') = R.$$

es decir, el dual del dual de una red es este red.

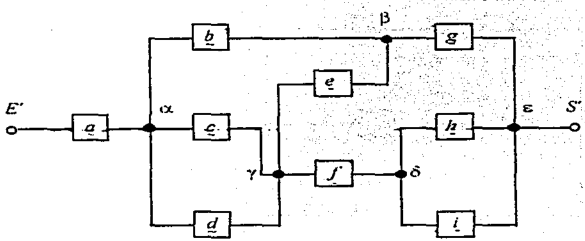


Fig. 5.16

MÉTODO DE LOS CONTRA-ITINERARIOS.

Sea una red planar R y su dual R'. Se llama *"contra-itinerario"* de R al itinerio que corresponde a R'. Los itinerarios minimales de R' darán contra-itinerarios reducidos minimales de R, y estos últimos darán una forma polinomial en $\wedge$ de la función $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a} . \underset{\sim}{b} . \underset{\sim}{c})$ representada por la red R. A esta forma polinomial en $\wedge$ se le asociará una red paralelo-serie equivalente a la red dada.

Ejemplo 5-21:

Sea la red R de la figura 5.17 cuyo dual R' se reproduce en la figura 5.18.

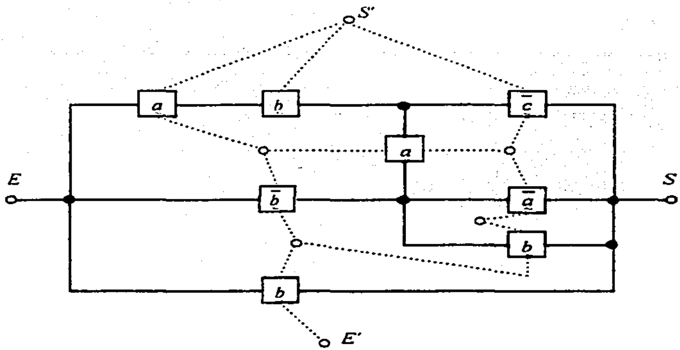


Fig. 5.17

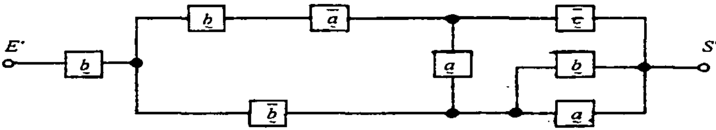


Fig. 5.18

Los contra-itinerarios de R' son los contra-itinerarios de R.

El conjunto de itinerarios de R' (el conjunto de contra-itinerario de R) es:

$$\{(\underline{b}, \underline{b}, \overline{\underline{a}}, \overline{\underline{c}}), (\underline{b}, \underline{b}, \overline{\underline{a}}, \underline{a}, \underline{b}), (\underline{b}, \underline{b}, \overline{\underline{a}}, \underline{a}, \underline{a}), (\underline{b}, \overline{\underline{b}}, \underline{a}, \overline{\underline{c}}),$$

$$(\underline{b}, \overline{\underline{b}}, \underline{b}), (\underline{b}, \overline{\underline{b}}, \underline{a})\}.$$

El conjunto[3] de itinerarios simples es:

$$\{(\underline{b}, \overline{\underline{a}}, \overline{\underline{c}}),\ (\underline{b}, \overline{\underline{a}}, \underline{a})_1,\ (\underline{b}, \overline{\underline{a}}, \underline{a})_2,\ (\underline{b}, \overline{\underline{b}}, \underline{a}, \overline{\underline{c}}),\ (\underline{b}, \overline{\underline{b}}),\ (\underline{b}, \overline{\underline{b}}, \underline{a})\}.$$

El conjunto de contra-itinerarios simples maximales es:

$$\{(\overline{\underline{a}}, \underline{b}, \overline{\underline{c}}),\ (\underline{a}, \overline{\underline{a}}, \underline{b}),\ (\underline{b}, \overline{\underline{b}})\}$$

La forma reducida en $\wedge$ que corresponde a la red paralelo-serie (fig. 19) es:

$$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\overline{\underline{a}} \vee \underline{b} \vee \overline{\underline{c}}) \wedge (\underline{a} \vee \overline{\underline{a}} \vee \underline{b}) \wedge (\underline{b} \vee \overline{\underline{b}}).$$

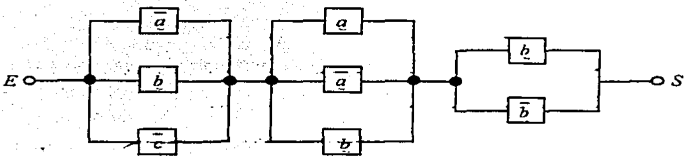


Fig. 5.19

Por el método de itinerarios se encontrará, para la forma polinomial en $\vee$:

$\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} \wedge \underline{c}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{b})$, cuya red correspondiente serie-paralelo está representada en la figura 5.20. Se puede verificar, efectuando desarrollos adecuados, que $\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\overline{\underline{a}} \vee \underline{b} \vee \overline{\underline{c}}) \wedge (\underline{a} \vee \overline{\underline{a}} \vee \underline{b}) \wedge (\underline{b} \wedge \overline{\underline{b}})$ y $\underline{f}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \wedge \overline{\underline{b}} \wedge \underline{c}) \vee (\overline{\underline{a}} \wedge \underline{b}) \vee (\underline{b})$, representan la misma función.

[3] El itinerario se puede representar con los mismos símbolos, como $(a,b,c)_1$ y $(a,b,c)_2$, pero se trata de diferentes itinerarios; La distinción desaparece cuando se pasa a itinerarios maximales reducidos.

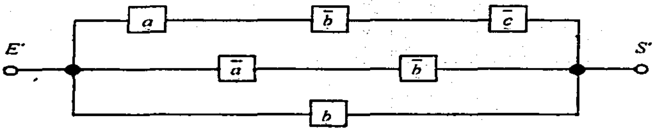


Fig. 5.20

5.8 APLICACIONES

CONTROL

Cuando las ideas de la lógica borrosa son aplicadas al control, se le llama generalmente *control borroso*. El control borroso fue la primera aplicación de la teoría borrosa en llamar la atención, y es un campo que ha dado grandes pasos. El control de molinos de cemento, trenes eléctricos, plantas de purificación de agua, y otras tareas están siendo llevadas a cabo actualmente. Aquí nos centraremos en las herramientas necesarias para llevar a cabo el control borroso y se dará un bosquejo del pensamiento detrás de ello.

LA FORMA DE LAS REGLAS DE CONTROL BORROSO Y MÉTODOS DE INFERENCIA

El control borroso describe el algoritmo para el control de procesos como una relación borrosa entre la información sobre la condición del proceso a ser controlado, x y y, y la entrada para el proceso (cantidad de trabajo) z. El algoritmo de control está dado en expresiones "si - entonces", tales como

Si x es pequeño y y es grande, entonces z es mediano.

Si x es grande y y es mediano, entonces z es grande.

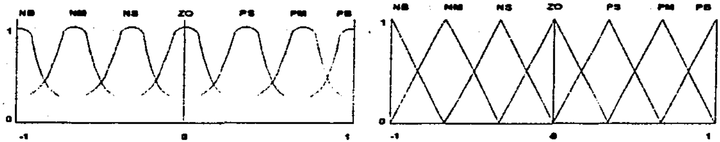
Éstas son llamadas *reglas de control borroso*. La cláusula "si" de las reglas es llamada *antecedente* y la cláusula "entonces" se llama *consecuente*. En general, las variables x y y son llamadas *entradas* y z es la *salida*. "Pequeño" y "grande" son valores borrosos para x y y (algunas veces llamadas variables borrosas), y están expresados por conjuntos borrosos.

Los *controladores borrosos* están construidos por grupos de estas reglas de control borroso, y cuando es dada una entrada, la salida es calculada por medio de *inferencia borrosa*. La inferencia borrosa está basada en la lógica borrosa, pero son usados métodos simples por considerar el tiempo para los cálculos. La inferencia para el control borroso es diferente de la inferencia borrosa estándar en la que las proposiciones (las entradas actuales para el controlador borroso) son comúnmente valores numéricos estándar, no valores borrosos. La principal diferencia entre los métodos utilizados en áreas tales como las reglas de producción para la ingeniería del conocimiento y el control borroso es que éste último permite expresiones borrosas (inferencia de una sola etapa) mientras que el anterior es casi siempre multi-etapa.

Por simplicidad, se utilizará la notación $A(x)$ para indicar la función de membresía al conjunto borroso A. Las formas tomadas por las reglas de control borroso están clasificadas por tres puntos -la forma de los antecedentes y consecuentes, la forma de las variables borrosas, y el método de inferencia.. Del último punto hablaremos sobre tres de ellos.

Método de Inferencia 1

Existen dos tipo de variables borrosas, continuas y discretas. La figura siguiente muestra las variables continuas y discretas, las primeras adoptan un tipo de campana y las discretas un tipo triangular, ambas especifican una variable borrosa con dos parámetros: NB, ZO, PS, etc. indicando significados como Grande Negativo, Cero y Pequeño Positivo (Negative Big, Zero, Positive Small).



Variables Borrosas Continuas

Éstas expresan subconjuntos borrosos (o números borrosos) del intervalo [-1, 1]. En el caso del control borroso, el dominio de las variables de entrada y de salida que pueden tener ya sea valores positivos o negativos, está comúnmente estandarizado a [-1, 1], y para las que pueden tener solamente valores positivos está estandarizado a [0, 1]. Debido a esto, podemos usar variables borrosas similares para todas las variables. La tabla siguiente es un ejemplo de variables borrosas discretas. Sin embargo, el grado está expresado por enteros de cero a 10. El dominio de las variables de entrada y salida es discreto en el rango de los enteros desde -6 a 6, y está especificada una variable borrosa única para tres parámetros.

Tabla de Variables Borrosas Discretas

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	7	10
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	3	7	10	7	3
PS	0	0	0	0	0	0	3	7	10	7	3	0	0
ZO	0	0	0	0	3	7	10	7	3	0	0	0	0
NS	0	0	3	7	10	7	3	0	0	0	0	0	0
NM	3	7	10	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	10	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En el método de inferencia 1, es común tener de cinco a siete variables borrosas. Sin embargo, el ajuste de parámetros no es necesario, y pueden ser usadas las variables estándar. Un ejemplo de dos entradas y una salida de este método es como sigue: Fijamos las siguientes dos reglas de control

Si x_1 es A_{11}, x_2 es A_{12}, entonces y es B_1.

Si x_1 es A_{21}, x_2 es A_{22}, entonces y es B_2.

Un ejemplo de este tipo es un control de proceso de punto establecido con una entrada y una salida, y podemos considerar el caso en el cual e y Δe (el cambio en e durante un muestreo) son elegidos para la entrada del controlador, y Δu (el cambio en el control) para la salida.

Ahora sean las entradas $x_1 = x_1°$ y $x_2 = x_2°$. Primero encontremos la compatibilidad para cada una de las condiciones antecedentes de las reglas y la entrada. En general, sea $A(x°)$ la compatibilidad para el antecedente "x es A", eso es, la función de membresia de $x°$ para el conjunto borroso A. Aquí el antecedente es bidimensional, de ese modo, sea la compatibilidad

$$\omega_1 = A_{i1}(x_1°) * A_{i2}(x_2°); \qquad i = 1,2.$$

i es el número de la regla, y * es la multiplicación.

Enseguida, sean los resultados de la inferencia para la i - ésima regla

$$y \text{ es } \omega_i B_i, \qquad \text{pero } \omega_i B_i(y) = \omega_i \times B_i(y).$$

Hay casos donde una operación mín, como en

$$\omega_i B_i(y) = \omega_i \wedge B_i(y).$$

reemplaza la multiplicación.

El resultado completo de la inferencia $y°$ está construido a partir de $\omega_1 B_1$ y $\omega_2 B_2$,

$$B^* = \omega_1 B_1 \cup \omega_2 B_2.$$

y encontrado en términos del eje central de la función de membresía de B^*. En otras palabras, tenemos

$$y^o = \int B^*(y) y dy \Big/ \int B^*(y) dy$$

El proceso de inferencia mostrado anteriormente está conformado de tres pasos. Son esencialmente los mismos para todos los métodos de inferencia.

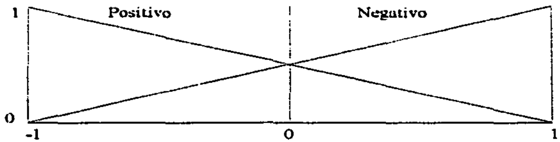
(1) Calcular la compatibilidad para la entrada y antecedentes de las reglas.

(2) Encontrar los resultados de la inferencia para cada regla.

(3) Encontrar los resultados completos de la inferencia como una media ponderada de los resultados de la inferencia para cada regla con respecto a las compatibilidades.

Método de inferencia 2

Este método está especialmente indicado para las variables que tienen funciones de membresía monotónicas, como se muestra en la siguiente figura.



Variables Borrosas Monotónicas

Como puede ser visto, hay sólo dos tipos de variables, Positivas y Negativas, y se utiliza $\arctan(x)$ para la función de membresía, por lo que hay algunos cambios consecuentes.

Como ejemplo, consideremos las siguientes dos reglas.

Si x_1 es N, x_2 es P, entonces y es N.

Si x_1 es P, x_2 es N, entonces y es P.

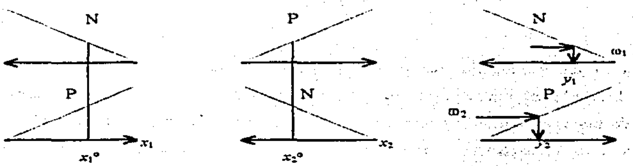
La compatibilidad de los antecedentes para las entradas $x_1°$ y $x_2°$ es encontrada como en el método previo con ω_1 y ω_2. Los resultados de la inferencia y_1 y y_2 (valores no borrosos) para cada regla son encontrados utilizando las siguientes ecuaciones relacionales:

$$\omega_1 = N(y_1), \qquad \omega_2 = P(y_2).$$

El resultado global de la inferencia está dado por

$$y° = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

tomando la media ponderada de y_1 y y_2. El proceso de inferencia es mostrado en la figura siguiente.



Método de Inferencia 2

Generalmente se dice que son necesarias menos reglas para este método que para el primero, y es apropiado cuando hay muchas variables de entrada. Sin embargo, al haber menos variables borrosas, no es un método muy apropiado para poner el conocimiento de expertos, el cual toma una forma lingüística, dentro de una forma lógica.

Método de Inferencia 3

Los antecedentes utilizados en este método se hacen de proposiciones borrosas, y los consecuentes son ecuaciones relacionales estándar de entradas y salidas. Ésto fue concebido más bien para el modelado de procesos borrosos que para el control borroso.

Las variables borrosas usadas en los antecedentes son, como se muestra en la figura más adelante, aquéllas que tienen funciones de membresía de forma trapezoidal construída con líneas rectas.

Variable Borrosa Trapezoidal

Consideremos las siguientes dos reglas.

Si x_1 es A_{11}, x_2 es A_{12}, entonces $y = f_1(x_1, x_2)$.

Si x_1 es A_{21}, x_2 es A_{22}, entonces $y = f_2(x_1, x_2)$.

Si la compatibilidad de los antecedentes para $x_1°$ y $x_2°$ es ω_1 y ω_2, los resultados de la inferencia para cada una de las reglas son calculados directamente a partir de las ecuaciones escritas en los consecuentes. El resultado completo de la inferencia es encontrado usando la siguiente ecuación, como en el método de inferencia 2:

$$y° = \frac{\omega_1 f_1(x_1°, x_2°) + \omega_2 f_2(x_1°, x_2°)}{\omega_1 + \omega_2}$$

Aquí, f es usualmente una ecuación relacional lineal. Si el número de reglas es 1, las partes antecedente ya no son necesarias, sólo queda la parte consecuente; así el resultado es el mismo como tener una expresión lineal. Si hay más de una regla, el intervalo de entrada es particionado en subespacios y es encontrada una relación lineal de entrada/salida para cada subespacio: ese grupo nos da algo muy similar a la relación no lineal de entrada/salida global. Este método no es apropiado para expresiones lingüísticas, pero excede a los otros en capacidad descriptiva. Las reglas usadas en el método de inferencia 1 no van más allá de la descripción de relaciones cuantitativas. Por ejemplo, no hay diferencia en la estructura de la relación

Si $x_1 = PB$, $x_2 = PS$, entonces $y = NM$

y

Si $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, entonces $y = -6$.

En otras palabras, son tablas numéricas y solamente cuantifican cantidad. En contraste, las reglas que surgen usando las condiciones (subespacios) especificadas en los antecedentes en el tercer método son escritas directamente en los consecuentes.

Los antecedentes en las reglas en las tres formas son más fáciles de entender cuando son interpretados como particionamientos ambiguos de los espacios de entrada, eso es, especificadores de subespacios borrosos, más bien que descripciones de condiciones. Hay tantas reglas como particiones haya. Además, la compatibilidad de los antecedentes no es otra cosa que el grado al cual la entrada ($x_1°$, $x_2°$) pertenece al subespacio borroso especificado por el antecedente, eso es, el valor de membresía.

PLANEACIÓN DE CONTROLADORES BORROSOS

El problema cuando el control borroso va a ser usado en un proceso actual es el diseño del controlador. Diseñar un controlador significa determinar la forma de las reglas de control y escribirlas concretamente, y el problema puede dividirse en dos partes, la determinación de los antecedentes y la determinación de los consecuentes. En lo que concierne a los antecedentes, se tienen que determinar tres cosas. Primero, es seleccionada la información de entrada para x_1, x_2, etc., la cual tiene que ser usada en los antecedentes; segundo, la determinación de las condiciones, eso es, las particiones borrosas de la entrada; y tercero, la determinación de los parámetros para las variables borrosas. Por lo que toca al consecuente, la salida es generalmente el control de entrada para el proceso. El único problema restante es los parámetros borrosos. De allí, la determinación de los consecuentes no es difícil, y el problema completamente es la determinación de los antecedentes. Generamente hablando existen tres métodos diseñados para ésto.

La Experiencia y Conocimiento de Expertos

Éste es el enfoque de los sistemas expertos. Se puede decir que el control borroso es actualmente el primer ejemplo real de un sistema experto. La experiencia de operadores calificados y el conocimiento de ingenieros en control es expresada cualitativamente en palabras, y si éstas son colocadas en formas lógicas como reglas de control borroso, puede ser planeado un controlador.

El principal problema es las particiones borrosas del espacio de entrada, el cual debe ser determinado básicamente por medio de entrevistas con los operadores y mediante el uso del instinto de los ingenieros de control. Si se utiliza el método de inferencia 1, el cual es apropiado para este tipo de diseño, no es necesario preocuparse demasiado por los parámetros para las variables borrosas.

Modelos del Operador

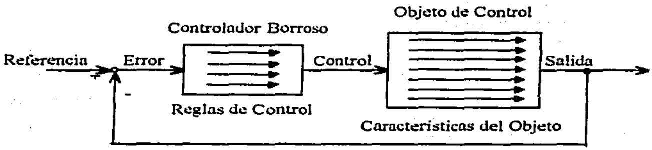
La operación de procesos complicados es desempeñada hábilmente por expertos, pero no es siempre fácil poner el cómo lo hacen en una forma lógica. Por ejemplo, los expertos no podrían ser capaces de expresar su trabajo en palabras; como el conducir un auto, para ello el experto aprende una operación con sus manos y pies, y en consecuencia es imposible expresar las habilidades en palabras. Además hay ocasiones en las que no podemos obtener la cooperación de los operadores por no estar en el mismo sitio.

Un método de diseño efectivo en estos casos es un modelo de las funciones llevadas a cabo por el operador. Esto significa hacer un modelo de la relación de entrada/salida entre la información usada por el operador y su salida funcional. Si una forma "si - entonces" como en las reglas de control es elegida para el modelo, éste puede ser utilizado como lo que es, un controlador borroso. La identificación del modelo emplea la entrada y salida del operador.

Modelos Borrosos de los Procesos

En los métodos anteriores se construye un modelo experto y se forma un controlador borroso, pero este modelo no puede superar a los expertos. Cuando el objeto es un proceso sin la ayuda de expertos u operadores humanos, se tiene un método mejor basado en un modelo borroso del proceso para el diseño de un controlador dirigido al control de alta calidad.

Aquí un modelo borroso significa describir las características del proceso usando una forma "si - entonces" de la misma manera que en las reglas de control borroso. Una forma de este tipo es llamada una *acción del proceso* o *regla del proceso*, o sea el modelo borroso siendo un número de estas reglas del proceso agrupadas conjuntamente. Los conceptos de un sistema de control borroso se muestran en la siguiente figura.



Sistema de Control Borroso

Usando el método de inferencia 3, en el cual el consecuente es una descripción de la relación de entrada/salida del proceso, nos da una forma del modelo que es conveniente para los casos en los cuales un sistema multi-variado de alto orden es el objeto. La identificación está dividida en lo que es el antecedente y el consecuente, pero la identificación de la conclusión es esencialmente la misma como la identificación de un modelo lineal. El consecuente para cada regla de proceso corresponde a los modelos lineales empleados hasta ahora, de ese modo hay un incremento en la cantidad de cálculos. Por lo que se refiere a la estructura del antecedente, debemos considerar las siguientes dos cosas:

1. la selección de variables de entrada, es decir, aquellas variables de entrada saliendo de todos los procesos de entrada deben ir en los antecedentes;
2. las particiones borrosas, un problema similar a la situación anterior de particionamiento del espacio de entrada.

Hay dos formas posibles de ver el diseño de controladores borrosos a partir de modelos borrosos; ambos emplean conjuntos de reglas de procesos que describen acciones parciales del proceso.

- regla de proceso $\times$ objeto de control = regla de control.
- regla de proceso $\times$ regla de control = acción de proceso ideal.

La primera es un método para encontrar la regla de control que, por ejemplo, minimice una función de evaluación particular, y la segunda es un método que compensa las reglas de proceso (acciones) mediante reglas de control, y busca traer la mejor acción de proceso posible. La idea común en ambas es hacer que las características de las expresiones del sistema de control borroso trabajen bien encontrando una regla de control que corresponda a cada regla de proceso. Puesto que una regla expresa una acción parcial, la regla de control correspondiente es parcial en naturaleza (en un subespacio borroso) y hecha condicional por el "si"

CARACTERÍSTICAS DEL CONTROL BORROSO

El control borroso tiene las siguientes tres características:

1. control lógico:
2. control paralelo (disperso):
3. control lingüístico

En el punto uno, "lógico" quiere decir la expresión libre de los algoritmos de control usando la forma "si - entonces". La cláusula "si", en particular, puede describir una amplia variedad de condiciones utilizando combinaciones lógicas con "or" y "and". El punto dos significa que las políticas generales de control pueden ser hechas para trabajar en una manera dispersa por medio de reglas de control. Esto difiere cualitativamente de los métodos de una sola ecuación empleados hasta ahora, y podríamos decir que es posible la coexistencia del control con lógicas diferentes. En el punto tres se entiende que es posible utilizar variables lingüísticas ambiguas, especialmente en los antecedentes de las reglas. Para la gente es fácil de entender el lenguaje cualitativamente, y el control empleando diálogo con los operadores es posible. Además, por medio del uso efectivo de las características anteriores, será posible usar los "ojos" entrenados por la experiencia de los operadores en procesos de observación como entradas externas y otras cosas como las condiciones del proceso, como una información efectiva para el control. Entre otras ventajas, los procedimientos inusuales que siempre acompañan las operaciones de un proceso real pueden ser traídas dentro del algoritmo de control.

CAPÍTULO 6

GENERALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE SUBCONJUNTOS BORROSOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se verá una generalizacion de los trabajos de Zadeh propuesta por J.A. Goguen. Tal proposición. a diferencia de la teoría desarrollada por Zadeh en la que se toman los valores de la función de membresía en un intervalo totalmente ordenado M=[0, 1], consiste en escoger tales valores en una estructura de orden parcial L. que es más general. La estructura utilizada más habitualmente será el reticulado.

Debido a lo anterior. se tendrán entonces "subconjuntos borrosos" en el sentido de Zadeh. y "L-subconjuntos borrosos" en el sentido de Goguen.

Para entender mejor este estudio. se dará también un breve repaso a las nociones sobre la teoría de reticulados.

6.2 OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS ORDINARIOS

En el capítulo dos efectuamos operaciones con subconjuntos ordinarios de un conjunto referencia; ahora veremos de nuevo tres de estas operaciones. pero referidas esta vez no a subconjuntos de un mismo conjunto referencia. sino a conjuntos distintos o no.

PRODUCTO DE DOS SUBCONJUNTOS

Sean dos conjuntos E_1 y E_2 donde $x \in E_1$, $y \in E_2$; el conjunto de parejas (x, y) se llamará "producto de E_1 por E_2" o "conjunto producto" formado por E_1 con E_2, y se representará por $E_1 \times E_2$.

Se tiene:

$$E_1 \times E_2 \neq E_2 \times E_1,\ \text{excepto si } E_2 = E_1.\ (\textit{no conmutatividad}).$$

$$(E_1 \times E_2) \times E_3 = E_1 \times (E_2 \times E_3),\ (\textit{asociatividad}).$$

Ejemplo 6-1:

$$E_1 = \{A, B\} \quad , \quad E_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$E_1 \times E_2 = \{(A, \alpha), (A, \beta), (A, \gamma), (B, \alpha), (B, \beta), (B, \gamma)\}.$$

$$E_2 \times E_1 = \{(\alpha, A), (\alpha, B), (\beta, A), (\beta, B), (\gamma, A), (\gamma, B)\}.$$

Si: $\quad E_3 = \{a, b\}$,

entonces: $\quad (E_1 \times E_2) \times E_3 = \{(A, \alpha, a), (A, \alpha, b), (A, \beta, a), (A, \beta, b),$

$(A, \gamma, a), (A, \gamma, b), (B, \alpha, a), (B, \alpha, b),$

$(B, \beta, a), (B, \beta, b), (B, \gamma, a), (B, \gamma, b)\}.$

De igual manera se puede realizar $E_1 \times (B_2 \times E_3)$.

Para n conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$, se definirá:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n .$$

Interviniendo el orden, se pueden definir, si todos estos conjuntos son diferentes:

$$n! = n\,(n-1) \ldots, 2, 1$$

conjuntos productos distintos.

SUMA DISYUNTIVA DE DOS CONJUNTOS

Se definirá la suma disyuntiva $E_1 \oplus E_2$ como el conjunto formado por los elementos de E_1 y de E_2, con excepción de los que pertenecen a la vez a E_1 y a E_2.

Ejemplo 6-2:

Considerando de nuevo los conjuntos del ejemplo 6-1 tenemos que:

$$E_1 \oplus E_2 = \{A, B, \alpha, \beta, \gamma\}.$$

Lo anterior es resultado de que E_1 y E_2 no tienen ningún elemento en común.

Veamos las propiedades de la suma disyuntiva:

$$E_1 \oplus E_2 = E_2 \oplus E_1 \qquad \textit{(conmutatividad).}$$

$$(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3 = E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) \quad \textit{(asociatividad).}$$

Existe la propiedad de distributividad entre el producto y la suma disyuntiva:

$$E_1 \times (E_2 \oplus E_3) = (E_1 \times E_2) \oplus (E_1 \times E_3).$$

$$(E_1 \oplus E_2) \times E_3 = (E_1 \times E_3) \oplus (E_2 \times E_3).$$

(distributividad a la izquierda y a la derecha para $\oplus$*).*

Ejemplo 6-3:

Vamos a considerar de nuevo los conjuntos del ejemplo 6-1:

$E_2 \oplus E_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, a, b\}$,

$E_1 \times (E_2 \oplus E_3) = \{(A, \alpha), (A, \beta), (A, \gamma), (A, a), (A, b)$

$(B, \alpha), (B, \beta), (B, \gamma), (B, a), (B, b)\}$,

$E_1 \times E_2 = \{(A, \alpha), (A, \beta), (A, \gamma), (B, \alpha), (B, \beta), (B, \gamma)\}$,

$E_1 \times E_3 = \{(A, a), (A, b), (B, a), (B, b)\}$,

$$(E_1 \times E_2) \oplus (E_1 \times E_3) = \{(A, \alpha), (A, \beta), (A, \gamma), (B, \alpha), (B, \beta),$$
$$(B, \gamma), (A, a), (A, b), (B, a), (B, b)\}.$$

Podemos verificar que existe una igualdad entre $E_1 \times (E_2 \oplus E_3)$ y $(E_1 \times E_2) \oplus (E_1 \times E_3)$.

Se observará que la distributividad a la izquierda o a la derecha no es verdadera para el producto.

$$E_1 \oplus (E_2 \times E_3) \neq (E_1 \oplus E_2) \times (E_1 \oplus E_3)^1$$

$$E_2 \times E_3 = \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\beta, a), (\beta, b), (\gamma, a), (\gamma, b)\}$$

$$E_1 \oplus (E_2 \times E_3) = \{A, B, (\alpha, a), (\alpha, b), (\beta, a), (\beta, b), (\gamma, a), (\gamma, b)\}.$$

$$E_1 \oplus E_2 = \{A, B, \alpha, \beta, \gamma\},$$

$$E_1 \oplus E_3 = \{A, B, a, b\},$$

$$(E_1 \oplus E_2) \times (E_1 \oplus E_3) = \{(A, A), (A, B), (A, a), (A, b), (B, A), (B, B),$$
$$(B, a), (B, b), (\alpha, A), (\alpha, B), (\alpha, a), (\alpha, b),$$
$$(\beta, A), (\beta, B), (\beta, a), (\beta, b), (\gamma, A), (\gamma, B),$$
$$(\gamma, a), (\gamma, b)\}.$$

CONJUNTO DE LAS APLICACIONES DE E_1 EN E_2

El conjunto de las aplicaciones funcionales (aplicaciones unívocas) de R_1 en E_2 se representará por:

$$E_2^{E_1} \qquad , (como\ una\ potencia).$$

---

[1] Esto es lo mismo que sucede para el producto y la adición ordinarios con los números:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad ✓$$
$$a + bc = (a+b)(a+c) \qquad ✗$$

Ejemplo 6-4: Vamos a considerar de nuevo los conjuntos del ejemplo 6-1 y utilizaremos las aplicaciones de la figura 6.1

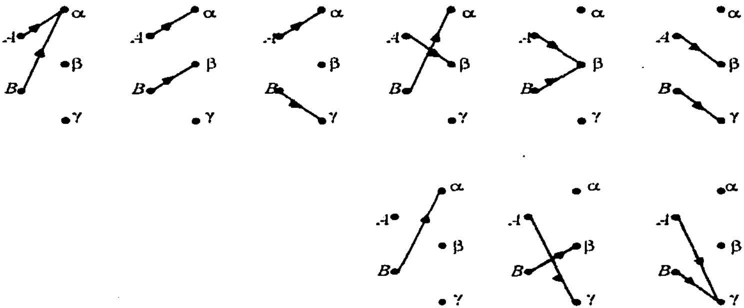


Fig. 6.1

Se ve en la figura 6.1 que si:

$$E_1 = \{A, B\} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

entonces:

$$E_2^{E_1} = \{\{(A \mid \alpha), (B \mid \alpha)\}, \{(A \mid \alpha), (B \mid \beta)\}, \{(A \mid \alpha), (B \mid \gamma)\},$$
$$\{(A \mid \beta), (B \mid \alpha)\}, \{(A \mid \beta), (B \mid \beta)\}, \{(A \mid \beta), (B \mid \gamma)\},$$
$$\{(A \mid \gamma), (B \mid \alpha)\}, \{(A \mid \gamma), (B \mid \beta)\}, \{(A \mid \gamma), (B \mid \gamma)\}.$$

La cardinalidad de $E_2^{E_1}$ es:

$$card\,(E_2^{E_1}) = (card\,E_2)^{(card\,E_1)}$$

Para este ejemplo: card ($E_2^{E_1}$) = $3^2 = 9$.

Si E_1 y/o E_2 es infinito, card ($E_2^{E_1}$) es infinito.

PRINCIPALES OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS

En la tabla 6.1 se muestran las principales operaciones que se pueden realizar con conjuntos.

Tabla 6.1 Principales Operaciones con los Conjuntos
$E_1 \oplus E_2 = E_2 \oplus E_1$
$E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) = (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3$
$E_1 \times (E_2 \times E_3) = (E_1 \times E_2) \times E_3$
$E_1 \times (E_2 \oplus E_3) = (E_1 \times E_2) \oplus (E_1 \times E_3)$
$(E_1 \oplus E_2) \times E_3 = (E_1 \times E_3) \oplus (E_2 \times E_3)$
$\left(E_1 \times E_2\right)^{E_3} = E_1{}^{E_3} \times E_2{}^{E_3}$
$\left(E_1{}^{E_2}\right)^{E_3} = E_1{}^{E_2 \cdot E_3}$

6.3 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL CONJUNTO DE LAS APLICACIONES DE UN CONJUNTO EN OTRO

Se representa al conjunto de las aplicaciones de E en L como sigue:

$$L^E$$

Se enuncia entonces la propiedad fundamental siguiente: *Toda ley interna $\circledast$ definida en L induce una ley interna * correspondiente en L^E.*

Ejemplo 6-5: Consideremos

$$E_2^{E_1} = \{\{(A\mid\alpha),(B\mid\alpha)\},\{(A\mid\alpha),(B\mid\beta)\},\{(A\mid\alpha),(B\mid\gamma)\},$$
$$\{(A\mid\beta),(B\mid\alpha)\},\{(A\mid\beta),(B\mid\beta)\},\{(A\mid\beta),(B\mid\gamma)\},$$
$$\{(A\mid\gamma),(B\mid\alpha)\},\{(A\mid\gamma),(B\mid\beta)\},\{(A\mid\gamma),(B\mid\gamma)\}.$$

y vamos a establecer

$$A_1 = \{(A\mid\alpha),(B\mid\alpha)\},$$
$$A_2 = \{(A\mid\alpha),(B\mid\beta)\},$$
$$A_3 = \{(A\mid\alpha),(B\mid\gamma)\},$$
$$A_4 = \{(A\mid\beta),(B\mid\alpha)\},$$
$$A_5 = \{(A\mid\beta),(B\mid\beta)\},$$
$$A_6 = \{(A\mid\beta),(B\mid\gamma)\},$$
$$A_7 = \{(A\mid\gamma),(B\mid\alpha)\},$$
$$A_8 = \{(A\mid\gamma),(B\mid\beta)\},$$
$$A_9 = \{(A\mid\gamma),(B\mid\gamma)\}.$$

con $E = \{A, B\}$ y $L = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Consideremos la ley interna * definida en L:

*	α	β	γ
α	β	β	α
β	γ	β	α
γ	β	α	γ

y veamos cómo se induce una ley en L^E.

Por ejemplo: $\quad A_2 \circledast A_6 = \{(A \mid \alpha) , (B \mid \beta) * \{(A \mid \beta) , (B \mid \gamma)\}$

$$= \{(A \mid \alpha * \beta) , (B \mid \beta * \gamma)\}$$

$$= \{(A \mid \beta) , (B \mid \alpha)\}$$

$$= A_4 \,.$$

Se obtiene de esta manera una ley $\circledast$ para L^E, como sigue:

$\odot$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	A_5	A_5	A_4	A_5	A_5	A_4	A_2	A_2	A_1
A_2	A_5	A_5	A_4	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
A_3	A_5	A_4	A_9	A_5	A_4	A_6	A_2	A_1	A_3
A_4	A_8	A_8	A_7	A_5	A_5	A_4	A_2	A_2	A_1
A_5	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
A_6	A_8	A_7	A_9	A_5	A_4	A_6	A_2	A_1	A_3
A_7	A_5	A_5	A_4	A_2	A_2	A_1	A_8	A_8	A_7
A_8	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_9	A_8	A_7
A_9	A_5	A_4	A_9	A_2	A_1	A_3	A_8	A_7	A_9

Ejemplo 6-6: $\quad$ Sea un conjunto finito:

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

y

$$L = \{0, 1\} ;$$

entonces L^E da el conjunto de subconjuntos (conjunto de subconjuntos ordinarios incluyendo a $\varnothing$).

El operador producto (•) en L induce al operador $\cap$ en L^E; el operador suma ($\hat{+}$) en L induce el operador $\cup$ en L^E; el operador complementación en L induce el operador complementación en L^E.

Las conclusiones anteriores son válidas para todo E que tenga la potencia de los enteros naturales o del continuo.

Ejemplo 6-7: Sea un conjunto finito:

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

y

$$L = [0, 1] .$$

entonces L^E da el conjunto de subconjuntos borrosos.

El operador $\wedge$ en L induce el operador $\cap$ en L^E; el operador $\vee$ en L induce $\cup$ en L^E; el operador complementación en L induce la complementación en L^E; el operador producto (•) en L induce (•) L^E; el operador ($\hat{+}$) en L induce $\oplus$ en L^E.

De nuevo, las conclusiones anteriores también son válidas cuando E tiene la potencia de los enteros naturales o del continuo.

Ejemplo 6-8: Sean:

$$E = L$$

$$L = [0, 1] .$$

entonces L^L representa al conjunto de todos los números borrosos $\underset{\sim}{X}$ tales que $x \in \underset{\sim}{X} \subset [0, 1]$, $\mu_{\underset{\sim}{X}}(x) \in [0,1]$.

Es fácil demostrar que: si * es la ley de L y $\circledast$ es la ley de L^E inducido por *, entonces se tienen las implicaciones formales siguientes:

* es asociativa	$\Rightarrow$	$\circledast$ es asociativa.
* es conmutativa	$\Rightarrow$	$\circledast$ es conmutativa.
* es idempotente	$\Rightarrow$	$\circledast$ es idempotente.

ESTRUCTURAS POSIBLES DE L

Se pueden tener para L tantas estructuras como se desee; para una operación $\circleddash$ se tendrá una operación $*$ en L^E. Se pueden imaginar dos operaciones $*_1$ y $*_2$ asociadas; eso induce dos operaciones correspondientes en L^E. Así, si existe una estructura con un operador (monoide, grupo, etc.) en L, se tendrá que verificar si esta estructura también se encuentra en L^E, o bien cuál otra estructura es la de L^E.

En la teoría de los subconjuntos borrosos, L tiene la estructura de un reticulado vectorial distributivo para las operaciones $\wedge$ y $\vee$; este reticulado es el intervalo $[0, 1]$ de R, el cual induce en L^E un reticulado vectorial distributivo para $\cap$ y $\cup$, formando el conjunto de los subconjuntos borrosos.

6.4 RETICULADOS

Sea un conjunto ordenado L. Supongamos que para todo conjunto ordinario $\{X_i, X_j\}$ de L existe un elemento de L, y solamente uno, que constituye una cota inferior de $\{X_i, X_j\}$, y que también existe un elemento de L, y solamente uno, que constituye una cota superior de $\{X_i, X_j\}$; en este caso se dice que L es un "reticulado" o "conjunto reticulado".

Se establecerá:

para la cota inferior de $\{X_i, X_j\}$: $X_i \vartriangle X_j$.

para la cota superior de $\{X_i, X_j\}$: $X_i \triangledown X_j$.

La definición de un reticulado puede expresarse así:

$$(\forall X_i)\ (\forall X_j)\ (X_i \in L \text{ y } X_j \in L):$$

$$\exists\, !\, X_k = X_i \vartriangle X_j \quad \text{y} \quad X_k \in L\ ,$$

y

$$\exists\, !\, X_k = X_i \triangledown X_j \quad \text{y} \quad X_i \in L\ ,$$

(el símbolo $\exists\, !$ significa "existe uno, y sólo uno").

Las operaciones Δ y ∇ también pueden considerarse como aplicaciones de $L \times L$ en L, que a todo par $\{X_i, X_j\}$, $X_i, X_j \in L$ le hacen corresponder el elemento $X_i \Delta X_j$ de una parte y el elemento $X_i \nabla X_j$ de la otra. Se demuestra que, en un reticulado, se tienen las cuatro propiedades duales siguientes:

sean: $A, B, C \in L$:

$A \Delta B = B \Delta A$

$A \nabla B = B \nabla A$ *conmutatividad,*

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$A \nabla (B \nabla C) = (A \nabla B) \nabla C$ *asociatividad,*

$A \Delta A = A$

$A \nabla A = A$ *idempotencia,*

$A \Delta (A \nabla B) = A$

$A \nabla (A \Delta B) = A$ *absorción.*

Ejemplo 6-9: En la figura 6.2 se presenta un ejemplo de reticulado. En la misma figura se presenta el diagrama de las cadenas maximales o diagrama de Hasse.

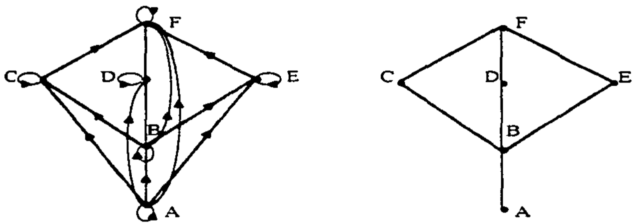


Fig. 6.2

Se tiene:

$$L = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Se puede verificar que se tiene:

$$\begin{array}{lcl}
A \vartriangle A = A & , & A \triangledown A = A \ , \\
A \vartriangle B = A & , & A \triangledown B = B \ , \\
A \vartriangle C = A & , & A \triangledown C = C \ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
C \vartriangle D = B & , & C \triangledown D = F \ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
E \vartriangle F = E & , & E \triangledown F = F \ , \\
F \vartriangle F = F & , & F \triangledown F = F \ .
\end{array}$$

Examinando el conjunto ordenado de la figura 6.2 se puede escribir, utilizando la noción $X_i \prec X_j$ si X_i precede a X_j:

$$\begin{cases} A \prec B \prec C \prec F, \\ A \prec B \prec D \prec F, \\ A \prec B \prec E \prec F. \end{cases}$$

Así este conjunto ordenado posee tres cadenas que se califican como maximales, ya que ninguna está incluida en otra cadena del conjunto ordenado. El grafo ordinario no orientado que forman las cadenas maximales se llama "diagrama de las cadenas maximales" o "diagrama de Hasse".

6.4.1 TIPOS DE RETICULADOS

RETICULADO MODULAR

Se dice que un reticulado L es "modular" cuando, para tres elementos cualesquiera $X_1, X_2, X_3 \in L$, se tiene:

$$(X_1 \leq X_3) \Rightarrow (X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = ((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle X_3) \ .$$

donde $\leq$ representa a la relación de orden del reticulado.

De este modo, el reticulado de la figura 6.3 es modular. Podemos verificar esto para A, B, y C.

Se tiene:

$$A \leq C \quad .$$

y también, tomando arbitrariamente B:

$$A \triangledown (B \vartriangle C) = A \triangledown A = A \quad .$$

$$(A \triangledown B) \vartriangle C = B \vartriangle C = A \quad .$$

Se verificará igualmente la propiedad $(X_1 \leq X_3) \Rightarrow (X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3)) = ((X_1 \triangledown X_2) \vartriangle X_3)$ para las otras tripletas.

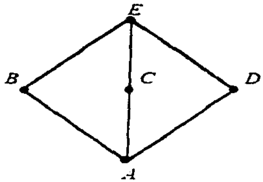


Fig. 6.3

RETICULADO DISTRIBUTIVO

Un reticulado L es "distributivo" cuando satisface las condiciones:

$$\forall X_1, X_2, X_3 \in L:$$

$$X_1 \triangledown (X_2 \vartriangle X_3) = (X_1 \triangledown X_2) \vartriangle (X_1 \triangledown X_3) \quad .$$

$$X_1 \vartriangle (X_2 \triangledown X_3) = (X_1 \vartriangle X_2) \triangledown (X_1 \vartriangle X_3) \quad .$$

Se puede verificar que estas condiciones se satisfacen por las 20 tripletas del reticulado de la figura 6.4.

Por ejemplo:

$$B \vartriangle (C \triangledown E) \qquad = B \vartriangle E = B$$

$$(B \vartriangle C) \triangledown (B \vartriangle E) \qquad = A \triangledown B = B$$

Se demuestra que todo reticulado distributivo es modular.

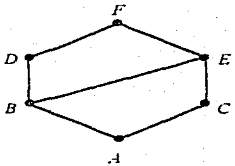


Fig. 6.4

Subreticulado. Consideremos un reticulado L y sea $A \subset L$ donde A está ordenado por el orden inducido. Si $\forall X \in A,\ \forall Y \in A,\ X \vartriangle Y \in A,$ y $X \triangledown Y \in A,$ entonces A es un subreticulado de L.

Se demuestra que todo subreticulado L' de un reticulado L distributivo es distributivo.

RETICULADO COMPLEMENTADO

Si suponemos que un reticulado L posee un elemento 0 que sea la cota inferior del reticulado L complemento, y que posee también un elemento U que sea la cota superior de este mismo reticulado, entonces, se llama "complemento de X_i" a un elemento X_j, ambos pertenecientes a L, tal que

$$X_i \vartriangle X_j = 0\ ,$$

$$X_i \triangledown X_j = U\ .$$

Un complemento de X_i se representa por $\overline{X}_i$. Este complemento de X_i, cuando existe, no es forzosamente único.

En la figura 6.5, todos los elementos tienen un complemento:

$\overline{0} = U$, $\overline{D} = B$ o C o A , $\overline{C} = D$, $\overline{B} = D$, $\overline{A} = D$, $\overline{U} = 0$.

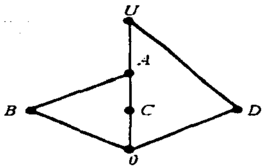


Fig. 6.5

Se dice que un reticulado L es "complementado" cuando:

1. Posee un elemento único $0 = \text{INF}\ (L)$ y un elemento único $U = \text{SUP}\ (L)$.

2. Cada $X_i \in L$ posee en L al menos un complemento.

Puede entonces decirse que el reticulado que contiene la figura 6.5 es complementado.

En un reticulado distributivo, se demuestra que, cuando existe el complemento de un elemento X_i, siempre es único.

RETICULADO DISTRIBUTIVO Y COMPLEMENTADO O "RETICULADO DE BOOLE"

Cuando un reticulado es a la vez distributivo y complementado se le llama "reticulado de Boole" (reticulado booleano).

En la figura 6.6 se muestra un ejemplo de reticulado booleano.

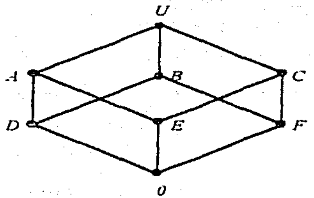


Fig. 6.6

Algunas propiedades de los reticulados booleanos son:

1. Para cada elemento existe un complemento, y sólo uno.

2. Para cada X_i se tiene:

$$\overline{\left(\overline{X_i}\right)} = X_i$$

3. Se verifican las relaciones:

$$\overline{X_i \Delta X_j} = \overline{X}_i \nabla \overline{X}_j$$

$$\overline{X_i \nabla X_j} = \overline{X}_i \Delta \overline{X}_j$$

4. Todo reticulado booleano finito es isomorfo al reticulado del conjunto de subconjuntos de un conjunto para la inclusión, y recíprocamente.

RETICULADO VECTORIAL

Sean n conjuntos A, B .... S, cada uno totalmente ordenado por una relación $\prec$; entonces el conjunto producto:

$$A \times B \times \ldots \times S$$

es ordenado y forma un reticulado llamado "reticulado vectorial", y la relación de orden es la de dominancia.

Un ejemplo de reticulado vectorial se puede ver en la figura 6.7, formado por el producto de los conjuntos:

$$A = \{A_1, A_2\},$$

$$B = \{B_1, B_2, B_3\},$$

$$C = \{C_1, C_2, C_3\}.$$

Es deseable recalcar una propiedad importante: todo reticulado vectorial es distributivo, pero no complementado, a menos, evidentemente, que este reticulado vectorial sea un reticulado de Boole.

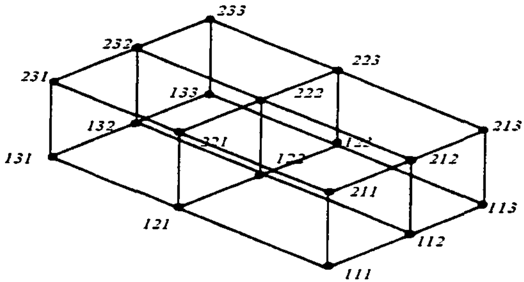


Fig. 6.7

RETICULADO VECTORIAL LEXICOGRÁFICO

Es un reticulado vectorial que se reduce a un orden total. En este tipo de reticulado se considera la relación de dominancia siguiente. Una n - upla $(A_i, B_j, \ldots, S_t)$ dominará a una n - upla $(A_{i'}, B_{j'}, \ldots, S_{t'})$ si los r primeros elementos (partiendo arbitrariamente de la izquierda) de las dos n - uplas son iguales, pero el $(r + 1)^{\text{ésimo}}$

elemento de la primera es superior (para la relación de orden que le concierne) al $(r+1)^{\text{ésimo}}$ elemento de la segunda, obteniéndose así un orden total.

Los reticulados de la figura 6.8 son reticulados lexicográficos.

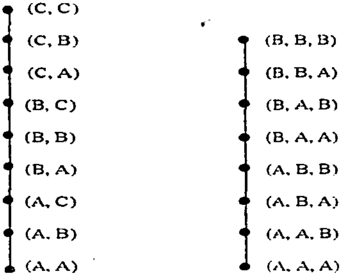


Fig. 6.8

6.4.2 PRODUCTO DE RETICULADOS

Sean dos reticulados L_1 y L_2, entonces el producto de estos dos conjunto da un reticulado. Es decir:

$$(L_1 \text{ es un reticulado y } L_2 \text{ es un reticulado}) \Rightarrow (L_1 \times L_2 \text{ es un reticulado}).$$

Ejemplo 6-10: Sean:

$$L_1 = \{A, B, C, D, E, F\}\ ,$$

$$L_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$

teniendo cada uno respectivamente la estructura de reticulado indicada en la figura 6.9

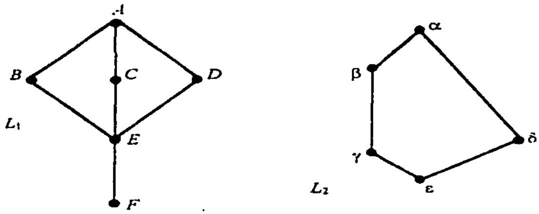


Fig. 6.9

En el reticulado L_1 se detectan las cadenas maximales:

$$F \prec E \prec B \prec A\ ,\ F \prec E \prec C \prec A\ ,\ F \prec E \prec D \prec A$$

y en el reticulado L_2:

$$\varepsilon \prec \gamma \prec \beta \prec \alpha\ ,\ \varepsilon \prec \delta \prec \alpha .$$

Ahora consideremos dos parejas $(X_i, Y_j) \in L_1 \times L_2$. $(X_{i'}, Y_{j'})$ domina a (X_i, X_j) se escribirá:

$$(X_{i'}, X_{j'}) \succ (X_i, X_j)$$

donde $\succ$ representa aquí la relación de orden de dominancia. Así, $L_1 \times L_2$ es ordenado y se puede constatar que las relaciones de asociatividad, idempotencia y absorción se verifican para esta estructura; por lo tanto, es un reticulado.

Para construir el reticulado

$$L = L_1 \times L_2 ,$$

se examinan todas las parejas (X_i, X_j), unas respecto a otras, para determinar cuáles son las que dominan a las otras; esto dará las cadenas maximales de $L = L_1 \times L_2$ y permite especificar el reticulado producto. Por ejemplo:

$$(F, \varepsilon) \prec (F, \gamma) \prec (F, \beta) \prec (F, \alpha)$$

$$(F, \varepsilon) \prec (E, \varepsilon) \prec \ldots \text{ etc.}$$

Es necesario comparar todas las parejas unas con otras. Las operaciones pueden simplificarse considerando las cadenas maximales tanto de L_1 como las de L_2 unas respecto a otras.

Un caso particular importante es aquel donde L_1 y L_2 son totalmente ordenados, entonces $L = L_1 \times L_2$ forma un reticulado vectorial.

También se tiene una propiedad general que si L_1 y L_2 son distributivos, entonces $L = L_1 \times L_2$ es distributivo.

6.4.3 CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO QUE NO FORMA UN RETICULADO

Es evidente, todo conjunto parcialmente ordenado no forma un reticulado (ver figura 6.10).

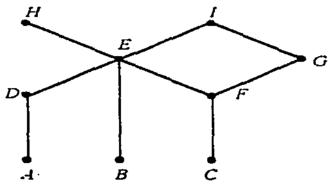


Fig. 6.10

Por ejemplo:

$$H \nabla I \notin L .$$

$$A \Delta B \notin L .$$

Propiedad. Para todo subconjunto ordinario (X_i, X_j) de L, la cota superior de $\{X_i, X_j\}$ pertenece a L, se dice entonces que L es un "sup-semirreticulado". Si se trata de la cota inferior, se dice que L es un "inf-semirreticulado". Un reticulado es a la vez un inf y un sup-semirreticulado.

En la figura 6.11 se presentan semirreticulados y, como se puede ver, el conjunto ordenado representado en la figura 6.10 no es ni un inf ni un sup-semirreticulado.

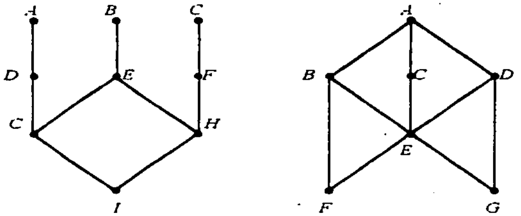


Fig. 6.11

6.4.4 ESTRUCTURA DE ANILLO

Consideremos un conjunto F dotado de dos leyes internas $*$ y $\circ$, tales que, para todo $X_i, X_j, X_k \in F$:

1. $(X_i * X_j) * X_k = X_i * (X_j * X_k)$, asociatividad para $*$.

   $X_i * e = e * X_i = X_i$, existencia de un neutro e para $*$.

   $X_i * \overline{X}_i = \overline{X}_i * X_i = e$ existencia de un simétrico para todo X_i.

   $X_i * X_j = X_j * X_i$, conmutatividad para $*$.

2. $(X_i \circ X_j) \circ X_k = X_i \circ (X_j \circ X_k)$ asociatividad para $\circ$.

3. $(X_i \circ X_j) \circ X_k = (X_i \circ X_k) * (X_j \circ X_k)$ distributividad a la izquierda y a la derecha

$X_k \circ (X_i \circ X_j) = (X_k \circ X_i) * (X_k \circ X_j)$ respecto a *.

Se dice entonces que F tiene una estructura de anillo. Si la ley ° es también conmutativa, se dice entonces que el anillo es conmutativo.

La figura 6.12 da un ejemplo de estructura de anillo. A es el neutro.

*	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	C	D	A
C	C	D	A	B
D	D	A	B	C

°	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	C	D
C	A	C	A	C
D	A	D	C	B

Fig. 6.12

RETICULADO DE BOOLE Y ANILLO DE BOOLE

Debido a que el reticulado de Boole es un reticulado distributivo y complementado, se verifican en él, para $X_i, X_j, X_k \in L$:

$X_i \Delta X_j = X_j \Delta X_i$. *conmutatividad.*

$X_i \nabla X_j = X_j \nabla X_i$.

$X_i \Delta (X_j \Delta X_k) = (X_i \Delta X_j) \Delta X_k$. *asociatividad.*

$X_i \Delta (X_j \Delta X_k) = (X_i \Delta X_j) \Delta X_k$.

$X_i \Delta X_i = X_i$. *idempotencia.*

$X_i \nabla X_i = X_i$

$X_i \Delta (X_j \nabla X_k) = (X_i \Delta X_j) \nabla (X_i \Delta X_k)$, *distributividad de ∇ respecto*

$X_i \nabla (X_j \Delta X_k) = (X_i \nabla X_j) \Delta (X_i \nabla X_k)$, *a Δ, y recíprocamente.*

$X_i \Delta \overline{X}_i = 0$.

$X_i \nabla \overline{X_i} = U$.

$X_i \Delta 0 = 0$.

$X_i \nabla 0 = X_i$.

$X_i \Delta U = X_i$.

$X_i \nabla U = U$.

$\left(\overline{\overline{X_i}}\right) = X_i$.

$\overline{X_i \Delta X_j} = \overline{X_i} \nabla \overline{X_j}$ *Teorema de De Morgan.*

$\overline{X_i \nabla X_j} = \overline{X_i} \Delta \overline{X_j}$

Ahora, se puede considerar un conjunto E y L^E donde L tiene una estructura de anillo y donde se pueden definir las operaciones $\circledast$ y $\odot$ a partir de $*$ y $\circ$.

Entonces, para todo A, B, $C \in L^E$, se podrá verificar:

$(A \circledast B) \circledast C = A \circledast (B \circledast C)$.	*asociatividad para* $\circledast$.
$A \circledast \varnothing = \varnothing \circledast A = A$.	*existencia de un neutro para* $\circledast$.
$A \circledast A = \varnothing$.	*existencia de un simétrico, que es* A *mismo.*
$A \circledast B = B \circledast A$.	*conmutatividad para* $\circledast$.
$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$.	*asociatividad para* $\odot$.
$(A \circledast B) \odot C = (A \odot C) \circledast (B \odot C)$.	*distributividad a la izquierda y*
$C \odot (A \circledast B) = (C \odot A) \circledast (C \odot B)$.	*a la derecha.*

Así, la estructura de L^E es la de un anillo que se llama "anillo de Boole". Se puede demostrar que en este anillo, si $E = \{0, 1\}$, entonces $\circledast$ corresponde a la suma disyuntiva $\oplus$, y $\odot$ corresponde a la intersección $\cap$.

6.5 GENERALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE SUBCONJUNTO BORROSO

Para comprender mejor la generalización, veamos algunos ejemplos donde se aplica la generalización de la noción de los subconjuntos borrosos.

Ejemplo 6-11: Supongamos que:

$$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}, \quad \text{y} \quad E = \{A, B\}.$$

Supongamos también que L tiene la estructura de un reticulado booleano (es decir, distributivo y complementado), como se muestra en la figura 6.13.

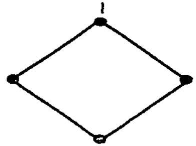


Fig. 6.13

Para las operaciones Δ y ∇ se tendrán los resultados siguientes para L

Δ	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	0	α
β	0	0	β	β
1	0	α	β	1

y

∇	0	α	β	1
0	0	α	β	1
α	α	β	1	1
β	β	1	β	1
1	1	1	1	1

Se establecen las siguientes propiedades de L^E :

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \{0, \alpha, \beta, 1\}$$

$$X_1 = \{(A \mid x_1), (B \mid y_1)\},$$

$$X_2 = \{(A \mid x_2), (B \mid y_2)\},$$

$$X_3 = \{(A \mid x_3), (B \mid y)\}.$$

y se tiene que:

$$X_1 \mathbin{\underline{\cap}} X_2 = \{(A \mid x_1 \nabla x_2), (B \mid y_1 \nabla y_2)\},$$

$$X_1 \mathbin{\overline{\cup}} X_2 = \{(A \mid x_1 \nabla x_2), (B \mid y_1 \nabla y_2)\}.$$

Puesto que L tiene la estructura de un reticulado de Boole, se tienen para Δ y ∇ las propiedades siguientes:

asociatividad,
conmutatividad,
idempotencia,
absorción,
distributividad respecto a Δ y respecto a ∇,
existencia de un complemento.

Ahora examinemos las propiedades, de L^E, para $\underline{\cap}$ y $\overline{\cup}$.

Se puede observar que $\underline{\cap}$ es asociativa debido a que Δ lo es, lo mismo para $\overline{\cup}$ debido a ∇. También se puede demostrar fácilmente la conmutatividad, la idempotencia y la absorción.

Demostremos la distributividad:

$$X_1 \mathbin{\overline{\cup}} (X_2 \mathbin{\underline{\cap}} X_3) = \{A \mid x_1 \nabla (x_2 \Delta x_3)), (B \mid y_1 \nabla (y_2 \Delta y_3))\}$$

$$X_1 \mathbin{\overline{\cup}} (X_2 \mathbin{\underline{\cap}} X_3) = \{A \mid x_1 \nabla x_2) \Delta (x_1 \nabla x_3)), (B \mid y_1 \nabla y_2) \Delta (y_1 \nabla y_3))\}$$

$$X_1 \mathbin{\overline{\cup}} (X_2 \mathbin{\underline{\cap}} X_3) = (X_1 \mathbin{\overline{\cup}} X_2) \mathbin{\underline{\cap}} (X_1 \mathbin{\overline{\cup}} X_3)$$

Demostremos la complementación.

Se establece: $\overline{X}_1 = \{(A \mid \overline{x}_1), (B \mid \overline{y}_1)$.

Se verifica que: $X_1 \sqcap \overline{X}_1 = \{(A \mid x_1 \Delta \overline{x}_1), (B \mid y_1 \Delta \overline{y}_1)\}$

$= \{(A \mid 0), (B \mid 0).$

De igual manera: $X_1 \sqcup \overline{X}_1 = \{(A \mid 1), (B \mid 1).$

Por lo tanto, L^E posee la estructura de un reticulado de Boole, como L. Esta estructura se representa en la figura 6.14.

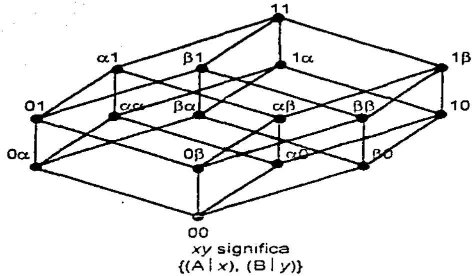


Fig. 6.14

Ejemplo 6-12: Sea

$$L = \{0, \alpha, \beta, 1\}, \qquad 0 < \alpha < \beta < 1 \qquad \text{y} \qquad E = \{A, B\}$$

En este ejemplo la estructura de L es la de un reticulado con una cadena única, figura 6.15. Este reticulado es distributivo pero no complementado (es decir, es un reticulado vectorial). Para las operaciones Δ y ∇ se tienen los resultados dados por:

Δ	0	α	β	1
0	0	0	0	0
α	0	α	α	α
β	0	α	β	β
1	0	α	β	1

y

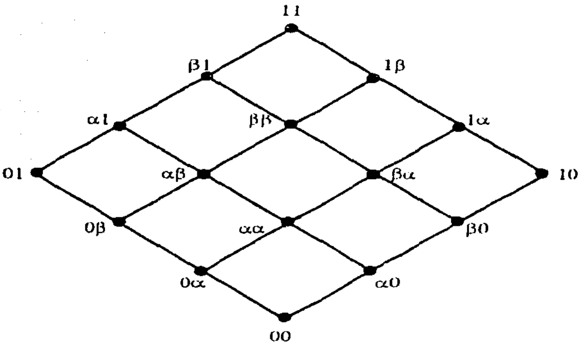
∇	0	α	β	1
0	0	α	β	1
α	α	α	β	1
β	β	β	β	1
1	1	1	1	1

Fig. 6.15

L posee las siguientes propiedades:

asociatividad.
conmutatividad.
idempotencia.
absorción.
distributividad respecto a Δ y respecto a ∇.

Se verifica fácilmente que L^{E} posee las mismas propiedades, por lo tanto también es un reticulado vectorial. En la figura 6.16 se muestra el reticulado vectorial.



xy significa
$\{(A \mid x), (B \mid y)\}$

Fig. 6.16

Ejemplo 6-13: Sean

$$L = \{o, \alpha, \beta, 1\}, \qquad E = \{A, B\}.$$

La estructura de L es la de un inf-semirreticulado, como se muestra en la figura 6.17. Puesto que es un inf-semirreticulado, sólo se define la operación de Δ:

Δ	0	α	β	γ
0	0	0	0	0
α	0	α	α	α
β	0	α	β	α
1	0	α	α	γ

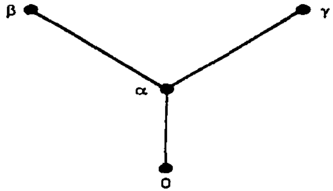


Fig. 6.17

Se obtienen para L las siguientes propiedades:

Asociatividad para Δ.
conmutatividad para Δ.
idempotencia para Δ,
y se tiene por estructura un inf-semirreticulado (figura 6.18).

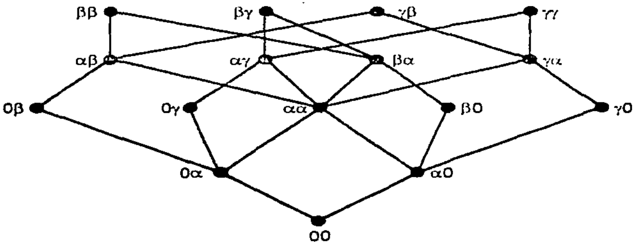


Fig. 6.18

Ejemplo 6-14: Sean:

$$L = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \qquad \text{y} \qquad E = \{A, B\}.$$

La estructura de L que se muestra en la figura 6.19. no es un semirreticulado. Ya que no tiene cota inferior ni superior para algunas parejas. Pero. se puede definir una estructura de L^E para la relación de dominancia. De esta manera se obtiene la estructura de la figura 6.20.

Fig. 6.19

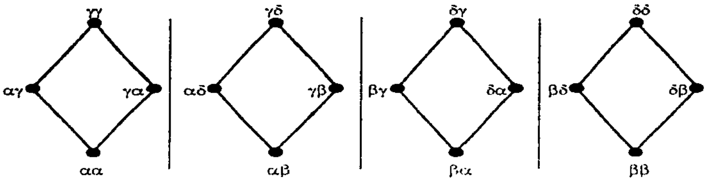


Fig. 6.20

6.5.1 CASO DONDE *L* TIENE UNA CONFIGURACIÓN DE PREORDEN

Si L tiene una configuración de preorden ordinario, entonces es posible encontrar en este conjunto preordenado clases de equivalencia. y estas clases forman entre ellas un orden (parcial o total). De esta forma se operará donde el caso de que L tiene una configuración de preorden. Por ejemplo:

$$L = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \mu, \nu\} \qquad \text{y} \qquad E = \{A, B\}$$

Consideremos que L tenga una configuración de preorden como se muestra en la figura 6.21 (grafo ordinario). De esta configuración de preorden obtendremos: cuatro clases de equivalencia (fig. 6.22). el orden de estas clases (fig. 6.23). y las cadenas maximales de este orden (fig. 6.24)

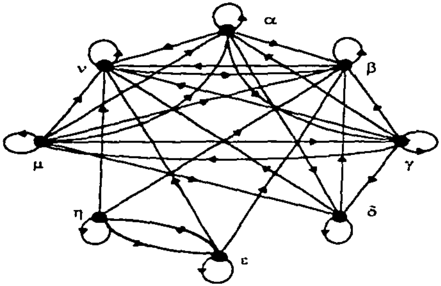


Fig. 6.21

Se puede observar que las clases forman un sup-semirreticulado. Para un empleo inmediato, se nota que:

$$\nu \approx \beta, \quad \alpha \approx \gamma \approx \mu, \quad \varepsilon \approx \eta, \quad \delta \approx \delta.$$

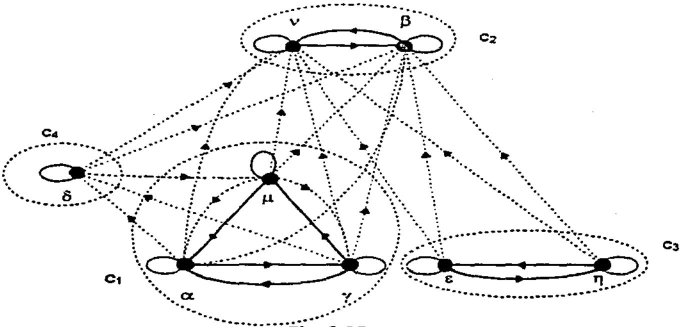


Fig. 6.22

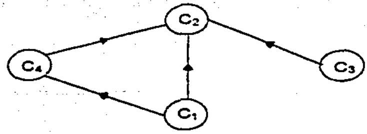


Fig. 6.23

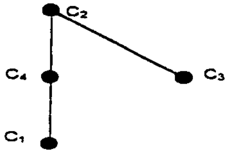


Fig. 6.24

Por comodidad de la escritura, asociaremos una letra a cada clase para representarla:

$$a \in C_1, \quad b \in C_2, \quad c \in C_3, \quad d \in C_4.$$

El sup-semirreticulado L puede expresarse en la relación siguiente:

∇	a	b	c	d
a	a	b	b	d
b	b	b	b	b
c	b	b	c	b
d	d	b	b	d

La figura 6.25 representa el sup-semirreticulado L^E donde x_v es el representante de la clase.

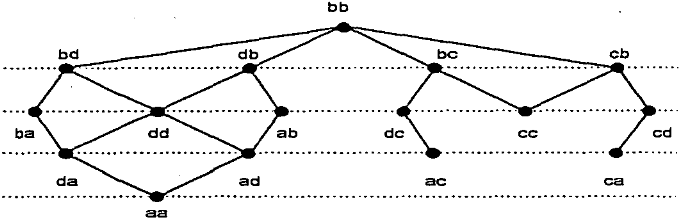


Fig. 6.25

En este sup-semirreticulado existe 16 clases de equivalencias. Así, la clase ab es:

$$C_{ab} = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \nu), (\gamma, \beta), (\gamma, \nu), (\mu, \beta), (\mu, \gamma)\}.$$

Y se observa que los 64 elementos de L^E se descompone como sigue:

C_{bb} contiene 4 elementos.
C_{bd} " 2 " .
C_{db} " 2 " .
C_{bc} " 4 " .
C_{cb} " 4 " .
C_{ba} " 6 " .
C_{dd} " 1 " .
C_{ab} " 6 " .
C_{dc} " 2 " .
C_{cc} " 4 " .
C_{cd} " 2 " .
C_{da} " 3 " .
C_{ad} " 3 " .
C_{ac} " 6 " .
C_{ca} " 6 " .
C_{aa} " 9 " .

Por lo tanto, L^E es un preorden ordinario que contiene 16 clases de equivalencias.

6.5.2 CASO DONDE *L* TIENE UNA ESTRUCTURA DE ANILLO

Para este caso tenemos que:

$L = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad E = \{A, B\}$, $\quad$ y

*	•	α	β	γ
•	•	α	β	γ
α	α	β	γ	•
β	β	γ	•	α
γ	γ	•	α	β

∘	•	α	β	γ
•	•	•	•	•
α	•	α	β	γ
β	•	γ	•	β
γ	•	γ	β	α

Se estable que :

$$\boldsymbol{A} = \{(A \mid x_1), (B \mid y_2)\}$$
$$\boldsymbol{B} = \{(A \mid x_2), (B \mid y_2)\}$$

donde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ y $A, B \in E$:

$$A * B = \{(A \mid x_1 \odot x_2), (B \mid y_1 * y_2)\}.$$
$$A \circ B = \{(A \mid x_1 \odot x_2), (B \mid y_1 \circ y_2)\}.$$

Se obtiene para L^E una estructura de anillo, presentadas en dos tablas (fig. 6.26 y fig. 6.27), donde se ha utilizado xy para representar $\{(A\ \ x), (B\ \ y)\}$.

En los casos presentados anteriormente se pudo demostrar que:

Si L es un preorden ordinario entonces L^E es un preorden ordinario.

Si L es un orden ordinario entonces L^E es un orden ordinario.

Si L es un inf-semirreticulado entonces L^E es un inf-semirreticulado.

Si L es un sup-semirreticulado entonces L^E es un sup-semirreticulado.

Si L es un reticulado entonces L^E es un reticulado.

Si L es un anillo entonces L^E es un anillo.

Por lo tanto, existe una transferencia de propiedades.

⊛	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ
ee	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ
eα	eα	eβ	eγ	ee	αα	αβ	αγ	αe	βα	ββ	βγ	βe	γα	γβ	γγ	γe
eβ	eβ	eγ	ee	eα	αβ	αγ	αe	αα	ββ	βγ	βe	βα	γβ	γγ	γe	γα
eγ	eγ	ee	eα	eβ	αγ	αe	αα	αβ	βγ	βe	βα	ββ	γγ	γe	γα	γβ
αe	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ	ee	eα	eβ	eγ
αα	αα	αβ	αγ	αe	βα	ββ	βγ	βe	γα	γβ	γγ	γe	eα	eβ	eγ	ee
αβ	αβ	αγ	αe	αα	ββ	βγ	βe	βα	γβ	γγ	γe	γα	eβ	eγ	ee	eα
αγ	αγ	αe	αα	αβ	βγ	βe	βα	ββ	γγ	γe	γα	γβ	eγ	ee	eα	eβ
βe	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ
βα	βα	ββ	βγ	βe	γα	γβ	γγ	γe	eα	eβ	eγ	ee	αα	αβ	αγ	αe
ββ	ββ	βγ	βe	βα	γβ	γγ	γe	γα	eβ	eγ	ee	eα	αβ	αγ	αe	αα
βγ	βγ	βe	βα	ββ	γγ	γe	γα	γβ	eγ	ee	eα	eβ	αγ	αe	αα	αβ
γe	γe	γα	γβ	γγ	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ
γα	γα	γβ	γγ	γe	eα	eβ	eγ	ee	αα	αβ	αγ	αe	βα	ββ	βγ	βe
γβ	γβ	γγ	γe	γα	eβ	eγ	ee	eα	αβ	αγ	αe	αα	ββ	βγ	βe	βα
γγ	γγ	γe	γα	γβ	eγ	ee	eα	eβ	αγ	αe	αα	αβ	βγ	βe	βα	ββ

Fig. 6.26

⊙	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ
ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee	ee
eα	ee	eα	eβ	eγ	ee	eα	eβ	eγ	ee	eα	eβ	eγ	ee	eα	eβ	eγ
eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ	ee	eβ
eγ	ee	eγ	eβ	eα	ee	eγ	eβ	eα	ee	eγ	eβ	eα	ee	eγ	eβ	eα
αe	ee	ee	ee	ee	αe	αe	αe	αe	βe	βe	βe	βe	γe	γe	γe	γe
αα	ee	eα	eβ	eγ	αe	αα	αβ	αγ	βe	βα	ββ	βγ	γe	γα	γβ	γγ
αβ	ee	eβ	ee	eβ	αe	αβ	αe	αβ	βe	ββ	βe	ββ	γe	γβ	γe	γβ
αγ	ee	eγ	eβ	eα	αe	αγ	αβ	αα	βe	βγ	ββ	βα	γe	γγ	γβ	γα
βe	ee	ee	ee	ee	βe	βe	βe	βe	ee	ee	ee	ee	βe	βe	βe	βe
βα	ee	eα	eβ	eγ	βe	βα	ββ	βγ	ee	eα	eβ	eγ	βe	βα	ββ	βγ
ββ	ee	eβ	ee	eβ	βe	ββ	βe	ββ	ee	eβ	ee	eβ	βe	ββ	βe	ββ
βγ	ee	eγ	eβ	eα	βe	βγ	ββ	βα	ee	eγ	eβ	eα	βe	βγ	ββ	βα
γe	ee	ee	ee	ee	γe	γe	γe	γe	βe	βe	βe	βe	αe	αe	αe	αe
γα	ee	eα	eβ	eγ	γe	γα	γβ	γγ	βe	βα	ββ	βγ	αe	αα	αβ	αγ
γβ	ee	eβ	ee	eβ	γe	γβ	γe	γβ	ee	eβ	ee	eβ	γe	γβ	γe	γβ
γγ	ee	eγ	eβ	eα	γe	γγ	γβ	γα	βe	βγ	ββ	βα	αe	αγ	αβ	αα

Fig. 6.27

6.5.3 DISTANCIA DE HAMMING GENERALIZADA RELATIVA EN EL CASO DONDE *L* ES UN RETICULADO.

En este caso examinaremos la distancia de Hamming generalizada relativa donde *L* es un reticulado y además, en una forma más generalizada, el grafo no orientado. Para comprender este caso primero veamos a lo que se llama "*distancia entre dos vértices*" en un grafo no orientado conexo.

La distancia entre dos vértices de un grafo ordinario no orientado conexo es la longitud del camino más corto no orientado (número de aristas del camino más corto). Se representara con $\mathcal{D}(X_i, X_j)$ la distancia que existe entre X_i y X_j definida de esta manera.

Ahora se comprobará si los axiomas referentes a la distancia se verifican. Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de los vértices del grafo no orientado considerando que:

$$\forall\ X_i, X_j\ X_k \in \mathcal{X}$$
$$\mathcal{D}(X_i, X_j) \geq 0$$
$$\mathcal{D}(X_i, X_j) = \mathcal{D}(X_j, X_i).$$
$$\mathcal{D}(X_i, X_k) \leq \mathcal{D}(X_i, X_j) + \mathcal{D}(X_j, X_k).$$

Además

$$\mathcal{D}(X_i, X_i) = 0.$$

Estas condiciones se cumplen para la "*la distancia entre dos vértices*". Por ejemplo, en la figura 6.28 se puede observar un grafo ordinario no orientado conexo, y en la figura 6.29 se tiene la matriz de las distancias $\mathcal{D}(X_i, X_j)$ en este grafo.

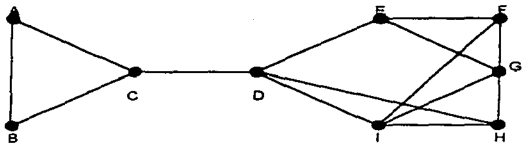


Fig. 6.28

$\mathcal{D}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	MAX
A	0	1	1	2	3	4	3	3	3	4
B	1	0	1	2	3	4	3	3	3	4
C	1	1	0	1	2	3	2	2	2	3
D	2	2	1	0	1	2	1	1	1	2
E	3	3	2	1	0	1	1	2	2	3
F	4	4	3	2	1	0	1	2	1	4
G	3	3	2	1	1	1	0	1	1	3
H	3	3	2	1	2	2	1	0	1	3
I	3	3	2	1	2	1	1	1	0	3

Fig. 6.29

Consideremos ahora el caso donde se tenga un conjunto E cuyos subconjuntos ordenados tomen los valores en L, sabiendo que L es un conjunto ordenado. Se construirá un diagrama de Hasse del conjunto ordenado para obtener un grafo ordenado no orientado; en este grafo no orientado se utilizarán la distancia $\mathcal{D}(X_i, X_j)$ entre los vértices.

Sea:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

un conjunto cuya función de membresía de los elementos toma sus valores de un conjunto ordenado L, su diagrama de Hasse esta representado en la figura 6.30 y su matriz de distancias $\mathcal{D}(X_i, X_j)$ en la figura 6.31.

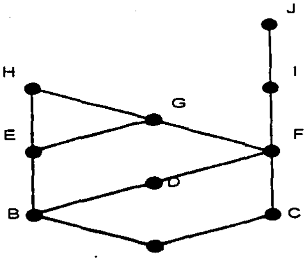


Fig. 6.30

D	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	MAX
A	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
B	1	0	2	1	1	2	2	2	3	4	4
C	1	2	0	2	3	1	2	3	2	3	3
D	2	1	2	0	2	1	2	3	2	3	3
E	2	1	3	2	0	2	1	1	3	4	4
F	2	2	1	1	2	0	1	2	1	2	2
G	3	2	2	2	1	1	0	1	2	3	3
H	3	2	3	3	1	2	1	0	3	4	4
I	3	3	2	2	3	1	2	3	0	1	3
J	4	4	3	3	4	2	3	4	1	0	4

Fig. 6.31

Supongamos que consideramos dos subconjuntos A y B de E.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A	D	A	C	J	F	J

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
B	G	E	C	A	H	C

Se evaluarán primero las distancias D(Xi., Xj) que existen entre los "valores" o "vértices del grafo", esto para cada elemento $x_i \in E$. Estas distancias se deducen de la matriz de distancias (fig. 6.31).

Entonces se tiene

$\mathcal{D}_{x1}$ (D, G) = 2, $\mathcal{D}_{x2}$ (A, E) = 2

$\mathcal{D}_{x3}$ (C, C) = 0, $\mathcal{D}_{x4}$ (J, A) = 4,

$\mathcal{D}_{x5}$ (F, H) = 2, $\mathcal{D}_{x6}$ (J, C) = 3.

Estas distancias son presentadas en una misma línea.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	2	0	4	2	3

Ahora se determinará el diámetro de las distancias, es decir, el mayor de los caminos más cortos que existen entre dos vértices cualesquiera en un grafo ordinario no orientado conexo. Por ejemplo, en la matriz de distancias de la figura 6.29, el diámetro es igual a 4 (ver columna MAX). Para este caso, el diámetro del grafo de la figura 6.31 es igual a 4. Entonces, las distancias serán divididas entre 4 y s: obtendrá:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.5	0.5	0	1	0.5	0.75

De esta manera se obtienen números que pertenecen a [0, 1].

Enseguida se determina la distancia de Hamming generalizada relativa entre $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ por:

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{1}{6}[0.5 + 0.5 + 0 + 1 + 0.5 + 0.75] = 0.54$$

La distancia de Hamming generalizada relativa entre dos subconjuntos borrosos de un mismo conjunto de referencia puede generalizarse si se admite que cada elemento $x_i \in E$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$ puede ser evaluado según un criterio que le será particular o no. De aquí que se de un algoritmo general.

ALGORITMO GENERAL

1. Presentar cada criterio bajo la forma de una matriz del camino más corto en un grafo ordinario no orientado.

2. Considerar dos subconjuntos borrosos:

$\underset{\sim}{A}$ =

x_1	x_2	x_3		x_n
a_1	b_2	c_3		l_n

y

$\underset{\sim}{B}$ =

x_1	x_2	x_3		x_n
a'_1	b'_2	c'_3		l'_n

donde a_1 y a'_1 son las evaluaciones por posición para el criterio de x_1 al cual corresponderá un diámetro λ_1.

b_2 y b'_2 son las evaluaciones por posición para el criterio de x_2 al cual corresponderá un diámetro λ_2.

l_n y l'_n son las evaluaciones por posición para el criterio de x_n al cual corresponderá un diámetro λ_n.

3. Calcular las distancias $\mathcal{D}(a_1, a'_1)$, $\mathcal{D}(b_1, b'_1)$, ..., $\mathcal{D}(l_1, l'_1)$ y dividir cada distancia entre el diámetro, sea

$$\Delta (a_1, a'_1) = \frac{\mathcal{D}(a_1, a'_1)}{\lambda_1}, \Delta (b_1, b'_1) = \frac{\mathcal{D}(b_2, b'_2)}{\lambda_2}, \ldots, \Delta (l_n, l'_n) = \frac{\mathcal{D}(l_n, l'_n)}{\lambda_n}.$$

4. Tomar la distancia de Hamming generalizada relativa:

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{1}{n}[\Delta (a_1, a'_1) + \Delta (b_1, b'_1) + \ldots + \Delta (l_n, l'_n)].$$

6.6 OPERACIONES CON LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS GENERALIZADOS

En todo reticulado L, por definición, a todo par $\{\alpha, \beta\}$ se le puede hacer corresponder un elemento, y sólo uno, de L llamado "cota inferior de $\{\alpha, \beta\}$" (representado por $\alpha \vartriangle \beta$), y también se puede hacer corresponder un elemento, y sólo uno, de L llamado "cota superior de $\{\alpha, \beta\}$" (representado por $\alpha \triangledown \beta$). Por tanto, el conjunto de los elementos de L posee dos leyes internas $\vartriangle$ y $\triangledown$ definidas para todos los elementos.

Empleando los reticulados L, se puede generalizar lo desarrollado para los conjuntos M de membresía, los cuales estaban limitados a conjuntos totalmente ordenados. Considerando lo anterior, veremos lo realizado para los conjuntos M pero ahora sustituídos por un reticulado L.

Sea E el conjunto referencia y L un reticulado y sea $\alpha \in L$. Sabemos que el conjunto de conjuntos es L^E. Un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A} \subset E$ o también $\underset{\sim}{A} \in L^E$ será tal que a cada $x \in E$ se le agregará un elemento $\alpha \in L$; este elemento α estará representado por $\lambda_{\underset{\sim}{A}}(x)$. De acuerdo con esto, ahora veremos algunas extensiones de las propiedades ya vistas, pero en un ejemplo de reticulado, siendo válidas para un conjunto de referencia E finito o no, y no importando cuál reticulado L finito o no.

INCLUSIÓN

Sea $\preceq$ la relación de orden del reticulado L: se escribirá que $\underset{\sim}{A}$ está incluido en $\underset{\sim}{B}$ si:

$$\forall\, x_i \in E: \qquad \lambda_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \preceq \lambda_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\ ,$$

y se representará

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}\ .$$

Se puede escribir también:

$$((\forall\, x_i \in E) \quad : \quad \lambda_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \preceq \lambda_{\underset{\sim}{B}}(x_i)) \Leftrightarrow (\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B})\ .$$

Dos subconjuntos borrosos son comparables si

1) Los valores respectivos, tomados por la función de membresía en el reticulado L, son comparables.

2) Existe una relación de dominancia entre los dos subconjuntos borrosos.

Ejemplo 6-15:

Sea el reticulado como se muestra en la figura 6.32 y $E = \{A, B, C\}$:

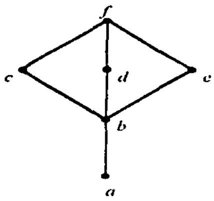


Fig. 6.32

$$A = \{(A \mid b), (B \mid a), (C \mid c)\},$$
$$B = \{(A \mid d), (B \mid e), (C \mid c)\};$$

A y B son comparables, pues $b \preceq d$, $a \preceq e$, $c \preceq c$, y se tiene:

$$A \subset B.$$

Sea también:

$$C = \{(A \mid f), (B \mid b), (C \mid d)\}.$$

Se ve que C no es comparable con A pues c y d, que intervienen para C no son comparables; tampoco C es comparable con B.

Sea también:

$$D = \{(A \mid d), (B \mid e), (C \mid b)\}.$$

D no es comparable con A; se tiene $b \preceq d$, $a \preceq e$, $c \succeq b$, pero no existe dominancia entre D y A.

IGUALDAD

Dos subconjuntos borrosos son iguales si, y sólo si,

$$\forall x_i \in E \qquad : \qquad \lambda_A(x_i) = \lambda_B(x_i).$$

También se puede escribir como:

$$(\forall x_i \in E : \quad \lambda_A(x_i) = \lambda_B(x_i)) \quad \Leftrightarrow (A = B).$$

COMPLEMENTACIÓN

En el caso de los reticulados, no se trata de la misma complementación empleada por Zadeh cuando se considera un conjunto $M = [0, 1]$. Para los subconjuntos borrosos en este último caso se tenía:

$$(\overline{B} = A) \Leftrightarrow (\forall x_i \in E : \ \mu_B(x_i) = 1 - \mu_A(x_i)).$$

Para que los reticulados sean complementados, hemos visto que se tiene que cumplir que

$$X_i \Delta X_i = 0 \ \text{ y } \ X_i \nabla X_j = U \,,$$

pero es necesario también que su complemento sea único. Esto es posible cuando el reticulado es distributivo, por tanto se deben considerar reticulados distributivos y complementados; los distributivos (reticulados de Boole) son necesarios para hacer corresponder a cada elemento de L un complemento único, y por consiguiente a cada elemento de L^E. Y, puesto que L es entonces un reticulado de Boole, también lo es L^E.

Se escribe entonces:

$$(\overline{B} = A) \Leftrightarrow (\forall x_i \in E \,:\, \mu_A(x_i) \,\Delta\, \mu_B(x_i) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_A(x_i) \,\nabla\, \mu_B(x_i) = U) \,.$$

donde 0 es la cota inferior del reticulado de Boole L y U es la cota superior; en este caso 0 y U no son números, sino los elementos extremos definidos en $X_i \Delta X_i = 0$ y $X_i \nabla X_j = U$.

Observación. Si el reticulado L es un reticulado distributivo y complementado, entonces trabajar con las funciones de membresía de E es idéntico a trabajar con probabilidades. Con lo que se muestra cómo esta generalización generaliza tambien la teoria de las probabilidades.

INTERSECCIÓN

La intersección $A \cap B$ se define en los reticulados por la propiedad:

$$\forall x_i \in E \quad : \quad \lambda_{A \cap B}(x) = \lambda_A(x) \,\Delta\, \lambda_B(x) \,.$$

La intersección sólo puede tener sentido a condición de que la relación de orden que define a L sea un inf-semirreticulado.

Ejemplo 6-16: Considerando

$$\underset{\sim}{A} = \{(A \mid b), (B \mid a), (C \mid c)\}, \quad \underset{\sim}{C} = \{(A \mid f), (B \mid b), (C \mid d)\}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C} &= \{(A \mid b \vartriangle f), (B \mid a \vartriangle b), (C \mid c \vartriangle d)\} \\ &= \{(A \mid b), (B \mid a), (C \mid b)\}. \end{aligned}$$

UNIÓN

Se define la unión

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$$

por la propiedad:

$$\forall x \in E: \qquad \lambda_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \lambda_{\underset{\sim}{A}}(x) \triangledown \lambda_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

La unión sólo puede tener sentido a condición de que la relación de orden que define a L sea un sup-semirreticulado.

Ejemplo 6-17: Consideremos:

$$\underset{\sim}{A} = \{(A \mid b), (B \mid a), (C \mid c)\}, \quad \underset{\sim}{C} = \{(A \mid f), (B \mid b), (C \mid d)\}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C} &= \{(A \mid b \triangledown f), (B \mid a \triangledown b), (C \mid c \triangledown d)\} \\ &= \{(A \mid f), (A \mid b), (C \mid f)\}. \end{aligned}$$

SUMA DISYUNTIVA

Esta se define a condición de que L sea un reticulado distributivo y complementado, es decir, un reticulado de Boole. Entonces se tendrá:

$$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}).$$

DIFERENCIA

Esta tiene las mismas limitaciones que la suma disyuntiva, por tanto se tendrá:

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}.$$

Todas las propiedades de L^E para $\cap$, $\cup$ y la complementación (en el caso de que exista) se deducen de las de L para $\wedge$, ∇ y la complementación (cuando existe). Entonces, como se puede ver, la generalización de la teoría de los subconjuntos borrosos en el sentido de Zadeh ($M = [0, 1]$) es aquella donde L es un reticulado vectorial con:

$$L = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \quad \text{con} \quad M_i = [0, 1] \; i = 1, 2, \dots, n$$

En este caso, si $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_2$, ... $\alpha_n \in M_n$ se tendría:

$$\left(\overline{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\right) = (1 - \alpha_1,\ 1 - \alpha_2,\ \dots\ \alpha_n)\ .$$

Otra generalización se refiere al caso donde se toma:

$$L = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \quad \text{con } M_i = 1, 2, \dots n\ .$$

que tiene la configuración de un reticulado de Boole.

En el caso cuando no se introduce la noción de complementación se puede construir una teoría de los subconjuntos borrosos no importando para qué tipo de reticulado.

6.7 CONCEPTO DE CATEGORÍA

Consideremos un conjunto E_1 y un conjunto E_2.

CORRESPONDENCIA

Γ es una correspondencia entre E_1 y E_2 si se da un grafo ordinario $G \subset E_1 \times E_2$, el cual constituye el grafo de la correspondencia Γ.

APLICACIÓN

Correspondencia que para $\forall\, x \in E_1$ hace corresponder al menos una $x \in E_2$

SOBREYECCIÓN

Aplicación tal que toda $y \in E_2$ es la imagen del al menos una $x \in E_1$.

INYECCIÓN

Aplicación tal que a toda $y \in E_2$ es la imagen de sólo una o ninguna $x \in E_1$.

BIYECCIÓN

Aplicación que es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

FUNCIÓN

Aplicación tal que a $\forall\, x \in E_1$ corresponde una, y sólo una, $y \in E_2$.

ISOTONÍA ENTRE DOS CONJUNTOS ORDENADOS

Una aplicación Γ será isótona si conserva el orden, es decir, si $\forall\, x_i \in E_1$, $\forall\, x_j \in E_1 : (x_i \succeq x_j) \Rightarrow (\forall\, y_k \in \Gamma\{x_i\} \subset E_2, \forall\, y_l \in \Gamma\{x_j\} \subset E_2 : y_k \succeq y_l)$.

MORFISMO ENTRE DOS CONJUNTOS ORDENADOS

Una aplicación Γ de un conjunto ordenado E_1 en un conjunto ordenado E_2 que es isótona es un morfismo.

EPIMORFISMO

Es un morfismo en el cual la aplicacion Γ de E_1 en E_2 es sobreyectiva.

MONOMORFISMO

Es un morfismo en el cual la aplicación Γ de E_1 en E_2 es inyectiva.

ISOMORFISMO

Es un morfismo que es, a la vez, un epimorfismo y un monomorfismo. Es decir, tal que la aplicación Γ es biyectiva.

ENDOMORFISMO

Un morfismo de un conjunto ordenado E en sí mismo es llamado "endomorfismo".

AUTOMORFISMO

Un isomorfismo de E en sí mismo se llama "automorfismo".

DUALIDAD

Dos conjuntos ordenados E y E^* se llaman "duales" uno respecto del otro, si sus aplicaciones recíprocas Γ y Γ^{-1} son biyectivas y antitonas.

COMPOSICIÓN DE MORFISMOS

Teorema I. Si Γ_1 es un morfismo de conjuntos estructurados X en Y y Γ_2 es un morfismo de conjuntos estructurados Y en Z, entonces $\Gamma_{1,2} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ es un morfismo de X en Z.

Teorema II. Si Γ_1 es un morfismo de conjuntos ordenados X en Y y Γ_2 es un morfismo de conjuntos ordenados Y en Z, entonces $\Gamma_{1,2} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ es un morfismo de X en Z.

CONCEPTO DE CATEGORÍA

Una categoría C es un conjunto de objetos tal que, $\forall (X, Y)$, $X \in C$, y $Y \in C$, existe un conjunto de morfismos de X en Y que tienen una propiedad especificada y representada por $\mathrm{MOR}(X, Y)$.

Estos morfismos llamados C-morfismos, tendrán por definición las propiedades siguientes:

1. $\mathrm{MOR}(X, Y) \cap \mathrm{MOR}(X', Y') = \varnothing$ sí y sólo si , $(X, Y) \neq (X', Y')$.
2. Si $\Gamma_1 \in \mathrm{MOR}(X, Y)$ y $\Gamma_2 \in \mathrm{MOR}(Y, Z)$,
   entonces $\Gamma_{1,2} = \Gamma_2 \circ \Gamma_1 \in \mathrm{MOR}(X, Z)$.
3. $\Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1) = (\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1 = \Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$: *asociatividad*
   donde $\Gamma_1 \in \mathrm{MOR}(X, Y)$, $\Gamma_2 \in \mathrm{MOR}(Y, Z)$ y $\Gamma_3 \in \mathrm{MOR}(Z, T)$.
4. Existe Γ' tal que $\Gamma \circ \Gamma'_x = \Gamma$ y $\Gamma'_x \circ \Gamma^* = \Gamma^*$,
   donde $\Gamma \in \mathrm{MOR}(X, Y)$ y $\Gamma^* \in \mathrm{MOR}(Y, X)$.

Ejemplo 6-18: Sean dos conjuntos ordenados E y F como se muestra en la figura 6.33. Estos dos son dos sup-semirreticulados N_1 y N_2 que constituirán el conjunto de objetos de la categoría C.

$N_1 = (E, \nabla)$ $N_2 = (F, \nabla)$

Fig. 6.33

Estos dos sup-semirreticulados pueden considerarse como dos conjuntos estructurados para las relaciones respectivas ∇ y ∇' (figura 6.34) que definen a las cotas superiores de las parejas de E y las parejas de F.

∇	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

$E = \{a, b, c\}$

∇^*	a^*	b^*	c^*
a^*	a^*	c^*	c^*
b^*	c^*	b^*	c^*
c^*	c^*	c^*	c^*

$F = \{a^*, b^*, c^*\}$

Fig. 6.34

La noción de morfismo de N_i en N_j, $i, j = 1,2$ es la aplicación funcional isótona. Los cuatro conjuntos MOR(N_1 , N_1), MOR(N_1 , N_2), MOR(N_2, N_1) y MOR(N_2 , N_2) se dan en la figura 6.35.

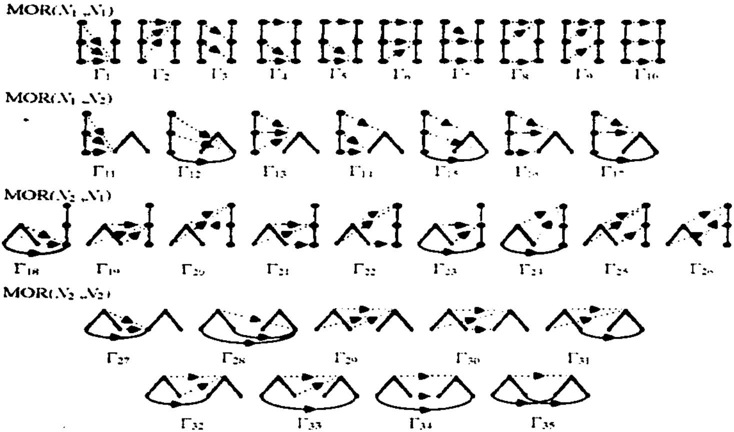


Fig. 6.35

La categoría formada por los dos conjuntos estructurados $\{X_1, X_2\}$ es tal que:

$$|\mathrm{MOR}(X_1, X_1)| = 10.$$
$$|\mathrm{MOR}(X_1, X_2)| = 7.$$
$$|\mathrm{MOR}(X_2, X_1)| = 9.$$
$$|\mathrm{MOR}(X_2, X_2)| = 9.$$

La aplicación idéntica de X_1 en sí misma es Γ_{10}, y la aplicación idéntica a X_2 en sí misma es Γ_{35}. Se tiene:

$$\Gamma_i \circ \Gamma_{10} = \Gamma_i, \; i = 1, 2, \ldots, 17$$

$$\Gamma_{10} \circ \Gamma_i = \Gamma_i, \; i = 1, 2, \ldots, 10, \; i = 18, 19, \ldots, 26$$

$$\Gamma_j \circ \Gamma_{35} = \Gamma_j, \; j = 18, 19, \ldots, 35$$

$$\Gamma_{35} \circ \Gamma_i = \Gamma_j, \; j = 11, 12, \ldots, 17, \; i = 27, 28, \ldots, 35$$

Se observa que no todos los Γ_i se componen con un Γ_j para la ley de composición ordinaria $\circ$ de relaciones: la tabla siguiente da los resultados (figura 6.36).

$$\Gamma_{1\text{ a }10} \in \mathrm{MOR}(X_1, X_1).$$
$$\Gamma_{11\text{ a }17} \in \mathrm{MOR}(X_1, X_2).$$
$$\Gamma_{18\text{ a }26} \in \mathrm{MOR}(X_2, X_1).$$
$$\Gamma_{27\text{ a }35} \in \mathrm{MOR}(X_2, X_2).$$

	$\Gamma_{1\text{ a }10}$	$\Gamma_{11\text{ a }17}$	$\Gamma_{18\text{ a }26}$	$\Gamma_{27\text{ a }35}$
$\Gamma_{1\text{ a }10}$	$\Gamma_{1\text{ a }10}$	$\Gamma_{11\text{ a }17}$		
$\Gamma_{11\text{ a }17}$			$\Gamma_{1\text{ a }10}$	$\Gamma_{11\text{ a }17}$
$\Gamma_{18\text{ a }26}$	$\Gamma_{18\text{ a }26}$	$\Gamma_{27\text{ a }35}$		
$\Gamma_{27\text{ a }35}$			$\Gamma_{18\text{ a }26}$	$\Gamma_{27\text{ a }35}$

Fig. 6.36

6.8 APLICACIONES

TEORÍA DE LA CUANTIFICACIÓN

En términos generales. los métodos de cuantificación son un medio de tratar los datos de manera semejante a los juicios y evaluaciones humanas. los cuales no están dados normalmente en expresiones numéricas. o en términos de cantidades para poder entenderlos. En la actualidad. el reconocimiento y las actividades de juicio y evaluación que los humanos llevan a cabo están expresadas comúnmente en término cualitativos lingüísticos tales como pesado. extremadamente ligero. o rápido. Sería más fácil comparar los juicios cualitativos y aprender la estructura evaluativa inherente a ellos si pudiéramos reemplazar las expresiones cualitativas con expresiones numéricas. Para lograr esto. utilizamos métodos de cuantificación que son un tipo de análisis multivariado.

En Japón. la teoría de cuantificación propuesta por Chikio Hayashi en 1950 es bien conocida como un método para la cuantificación de juicios cualitativos y evaluaciones. Esta teoría de cuantificación consiste de cuatro métodos. I. II. III y IV.

Esta serie de métodos de cuantificación hace uso de los valores {1. 0} los cuales indican juicios {si. no}. y el análisis puede llevarse a cabo por simples métodos tales como a resolver problemas de eigenvalores. El análisis por computadora es fácil en consecuencia. por lo que estos métodos de cuantificación son empleados para el análisis de problemas reales en numerosas áreas como Ciencias de la Administración. Mercadotecnia. Psicología. Sociología. Ingeniería. y Medicina.

En este punto nos centraremos en el método de cuantificación III: la teoría de cuantificación borrosa manejada será explicada en términos del concepto de eventos borrosos. usando valores sobre [0. 1] que expresa juicios cualitativos.

CARACTERÍSTICAS DE LA TEORÍA DE LA CUANTIFICACIÓN BORROSA

Aquí explicaremos el manejo de los datos y eventos borrosos que proporcionan la base para la teoría de la cuantificación borrosa. Puesto los conjuntos de muestras son llamados comúnmente grupos en análisis multivariado, llamaremos a los conjuntos borrosos que forman las muestras como grupos borrosos.

Consideremos primero un estudio concerniente a las rasuradoras realizado por dos fabricantes de electrodomésticos, la compañía A y la compañía B para determinar los factores de compra primarios. Ambas compañías especificaron las características, el precio, y la apariencia de su producto. Preguntaron cuál es el grado de disposición para comprar y el grado de observación (consideración) de las características, precio y apariencia, especificados en valores sobre $[0, 1]$. Por ejemplo, la disposición del entrevistado a para comprar la rasuradora de la compañía A fue 0.8, y sus grados de consideración de las características, del precio y de la apariencia fueron 0.9, 0.2 y 0.7 respectivamente. En este caso tenemos un conjunto borroso para la preferencia por la rasuradora de la compañía A, y el valor de membresía del entrevistado a para este conjunto borroso es 0.8.

Utilizando este tipo de información puede realizarse un análisis a partir de la información detallada obtenida de la gente que respondió al estudio, y es posible basar el análisis sobre la realidad. Los eventos definidos por este tipo de conjuntos borrosos son llamados eventos borrosos.

La probabilidad $P(A)$ del evento borroso determinado por el conjunto borroso A sobre el intervalo n-dimensional R^n, está definida por el grado de probabilidad P utilizando la ecuación:

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x)\, dP$$

$$= E(\mu_A).$$

Donde $E(\mu_A)$ es el valor esperado para la función de membresía μ_A.

Ejemplo: La probabilidad discreta

$$P = \{ p^{x_1}, p^{x_2}, p^{x_3}, p^{x_4}, p^{x_5} \}$$

$$= \{0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1\}$$

está definida sobre $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. En este ejemplo la probabilidad $P(F)$ para el evento borroso

$$F = 0.6/x_1 + 1.0/x_2 + 0.5/x_3 + 0.2/x_4$$

puede ser calculada como sigue:

$$P(F) = 0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 1.0 + 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 0.2 = 0.5.$$

Utilizando la ecuación que define a $P(A)$, la media borrosa y la varianza borrosa para la variable x puede ser calculada como sigue:

$$m_A = \frac{1}{P(A)} \left\{ \int_{R^n} x \mu_A(x) dP \right\}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{P(A)} \left\{ \int_{R^n} (x - m_A)^2 \mu_A(x) dP \right\}.$$

También, cuando sabemos que el evento borroso A va a ocurrir, la probabilidad del evento borroso B, $P_A(B)$ es

$$P_A(\mathrm{B}) = \frac{1}{P(A)} \left\{ \int_{R^n} \mu_B(x) \mu_A(x) dP \right\} = E_A(\mu_B).$$

Ejemplo: Cuando la variable x del ejemplo anterior es $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$ y $x_5 = 2$, la media borrosa y la varianza borrosa resultan como sigue

$$m_A = \frac{1}{0.5} \{6 \times 0.1 \times 0.6 + 2 \times 0.2 \times 1.0 + 5 \times 0.4 \times 0.5 + 1 \times 0.2 \times 0.2\}$$

$$= 3.6$$

$$\sigma_A^2 = 3.04.$$

Surgen las siguientes relaciones en lo que toca al evento borroso.

$$\sigma_A^2 = E_A\{(x - m_A)^2\}$$

$$= E_A(x^2) - E_A^2(x).$$

Definiremos los datos estadísticos (media muestral, varianza muestral) para la muestra dada $(x_1, \ldots, x_n)$, concernientes al evento borroso A. El tamaño del conjunto borroso es expresado como sigue, empleando los elementos del conjunto:

$$N(A) = \sum_{\omega=1}^{n} \mu_A(x_\omega).$$

Aplicando esta idea del tamaño del conjunto borroso $N(A)$ a la muestra, podemos definir la media muestral m_A y la varianza σ_A^2 como sigue:

$$m_A = \frac{1}{N(A)}\left\{\sum_{\omega=1}^{n} x_\omega \mu_A(x_\omega)\right\}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N(A)}\left\{\sum_{\omega=1}^{n} (x_\omega - m_A)^2 \mu_A(x_\omega)\right\}.$$

Utilizando estas definiciones, podremos explicar la variación entre grupos, la variación dentro de grupos, y la variación total de los grupos borrosos.

Sea la muestra x_ω $(\omega = 1, \ldots, n)$ dada, y la función de membresía del grupo borroso A_i $(i = 1, \ldots, K)$ definida por $\mu_{A_i}(x_\omega)$. En este caso, la media total m y la media m_{A_i} empleando el grupo borroso A_i están expresados por las siguientes ecuaciones:

$$m = \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{K} \sum_{\omega=1}^{n} x_\omega \mu_{A_i}(x_\omega)\right\}$$

$$m_{A_i} = \frac{1}{N(A_i)}\left\{\sum_{\omega=1}^{n} x_\omega \mu_{A_i}(x_\omega)\right\}$$

Aquí tenemos que

$$N = \sum_{i=1}^{k} N(A_i)\ .$$

La variación total T, la variación entre los grupos borrosos B, y la variación dentro de un grupo borroso E están definidas como

$$T = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(x_\omega - m)^2 \mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$B = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(m_{A_i} - m)^2 \mu_{A_i}(x_\omega)$$

$$E = \sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}(x_\omega - m_{A_i})^2 \mu_{A_i}(x_\omega)$$

respectivamente. Aparece la siguiente relación:

$$T = B + E.$$

TEORÍA DE LA CUANTIFICACIÓN BORROSA III

La Teoría de la Cuantificación Borrosa III es un método en el cual es hecha una clasificación de patrones; fueron desarrollados varios métodos independientemente en diferentes países. Son conocidos con nombres diferentes tales como *escalamiento dual, análisis de correspondencia, clasificación de patrones*, etc.

La Teoría de la Cuantificación Borrosa es un método en el cual, si la muestras son tomadas por ejemplo de gente joven, pensamos en estas muestras como elementos pertenecientes a un conjunto borroso B, "gente joven", y se intenta clasificar cuantitativamente cada muestra ω y cada categoría al considerar los valores de membresía de este conjunto borroso. En este caso, la respuesta a cada categoría está dada como un grado de atribución, no sobre $\{0, 1\}$ sino sobre $[0, 1]$, y determinamos si el patrón de respuesta para cada muestra difiere. Especialmente cuando la respuesta a las categorías están dadas por $\{0, 1\}$, podemos pensar en la frecuencia de los patrones como un grado de atribución.

Ejemplo: En la tabla siguiente se encuentran los datos recolectados de la gente joven sobre las tiendas y marcas que prefieren cuando compran productos. La clasificación de patrones fue hecha para aprender sobre el comportamiento que tiene al comprar la gente.

Datos sobre las actividades de compra de la gente joven

	LUGAR DE COMPRA			CONOCIMIENTO DEL PRODUCTO		MARCA-NOMBRE DEL PRODUCTO		
MUESTRA	SUPER MERCADOS	TIENDAS ESPECIALIZADAS	TIENDAS DEPARTAMENTALES	NINGUNO	MUCHO	NO IMPORTA	COMPRADOS USUALMENTE	JUVENTUD
1	1			1		1		0.2
2		1			1		1	1.0
3			1	1			1	0.8
4			1	1			1	0.1
5		1			1	1		1.0
6			1		1		1	0.8
7			1	1		1		0.8

En este punto, fue posible captar las actividades como consumidor de la gente joven considerando el grado de juventud de cada encuestado como se muestra en la tabla siguiente.

	No. ω	GRUPO BORROSO B	CATEGORÍA $1 \ldots i \ldots K$ $u_1 \ldots u_i \ldots u_K$	TOTAL
v_1	1	$\mu_B(1)$	$\mu_1(1) \ldots \mu_i(1) \ldots \mu_K(1)$	m_1
v_2	2	$\mu_B(2)$	$\mu_1(2) \ldots \mu_i(2) \ldots \mu_K(2)$	m_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$
v_ω	ω	$\mu_B(\omega)$	$\mu_1(\omega) \ldots \mu_i(\omega) \ldots \mu_K(\omega)$	m_ω
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$
v_n	n	$\mu_B(n)$	$\mu_1(n) \ldots \mu_i(n) \ldots \mu_K(n)$	m_n

$m_\omega = \Sigma\mu_i(\omega)$; $\quad \omega = 1, \ldots, n$

La tabla anterior muestra una generalización de los datos manejados por la teoría de cuantificación borrosa III. El objeto de esta teoría es el de dar un valor numérico mutuamente cercano a las reacciones semejantes de las muestras, cuando los valores numéricos reales v_ω y u_i son asignados a las muestras ω y a las diferentes categorías i, y al mismo tiempo dar un valor numérico cercano a las categorías semejantes. Para lograr esto, el coeficiente de correlación de la categoría es utilizado como un indicador.

El tamaño de las reacciones para todas las categorías por muestra ω está definido como

$$m_\omega = \sum_{i=1}^{K} \mu_i(\omega) .$$

Las muestras con un valor de membresía grande al conjunto borroso B son evaluadas altamente en este análisis, y las que tienen un valor bajo no se toman mucho en consideración. Como resultado, la reacción para todos los datos está definida como el producto de los valores de membresía al conjunto borroso B y la ecuación anterior:

$$T = \sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega).$$

Las medias u y v, las varianzas σ^2_u y σ^2_v, y la covarianza σ_{uv} para los valores numéricos u_i y v_ω, basadas en el evento borroso B, quedan como sigue:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\left\{\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i\right\}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\left\{\sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega)v_\omega\right\}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T}\left\{\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i^2\right\} - \bar{u}^2$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{T}\left\{\sum_{\omega=1}^{n} m_\omega \mu_B(\omega)v_\omega^2\right\} - \bar{v}^2$$

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{T}\left\{\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}\mu_i(\omega)\mu_B(\omega)u_i v_\omega\right\} - \bar{u}\bar{v}$$

Basándose en la condición de que $\bar{u} = 0$, y $\bar{v} = 0$, el problema aquí es determinar los u_i y v_ω que maximicen el coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{\sigma_{uv}}{\sqrt{\sigma_u^2 \sigma_v^2}}$$

Una diferenciación parcial de los coeficientes de correlación u_K y v_τ nos da

$$\frac{\partial\rho}{\partial u_k} = 0; \qquad k = 1, \ldots, K$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial v_\tau} = 0; \qquad \tau = 1, \ldots, n.$$

Si realizamos estos cálculos. obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{\omega=1}^{n} \mu_k(\omega)\mu_B(\omega)v_\omega = \rho\frac{\sigma_v}{\sigma_u}\sum_{\omega=1}^{n} \mu_k(\omega)\mu_B(\omega)u_k$$

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\tau)\mu_B(\tau)u_i = \rho\frac{\sigma_u}{\sigma_v}m_\tau\mu_B(\tau)v_\tau .$$

Eliminando v_τ obtenemos

$$\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{i=1}^{K}\frac{\mu_B(\omega)}{m_\omega}\mu_k(\omega)\mu_i(\omega)u_i = \rho^2\cdot\sum_{\tau=1}^{n}\mu_k(\tau)\mu_B(\tau)u_k \;;\; k == 1. \ldots. K.$$

Para consolidar lo anterior. introducimos la notación siguiente:

$$b_k = \sum_{\omega=1}^{n}\mu_k(\omega)\mu_B(\omega) \;; \quad k = 1. \ldots. K$$

$$z_k = \sqrt{b_k u_k} \;; \quad k = 1. \ldots. K$$

$$c_{ki} = \frac{1}{\sqrt{b_k b_i}}\sum_{\omega=1}^{n}\frac{\mu_B(\omega)}{m_\omega}\mu_k(\omega)\mu_i(\omega) \;; \quad k.i = 1. \ldots. K$$

$$c = [c_{ki}]$$

$$z' = [z_1. \ldots. z_k].$$

Utilizando esto. la expresión matricial de la ecuación anterior da por resultado lo siguiente:

$$b_k = \sum_{\omega=1}^{n}\mu_k(\omega)\mu_B(\omega) \;; \quad k = 1. \ldots. K$$

$$z_k = \sqrt{b_k u_k} \;; \quad k = 1. \ldots. K$$

$$c_{ki} = \frac{1}{\sqrt{b_k b_i}}\sum_{\omega=1}^{n}\frac{\mu_B(\omega)}{m_\omega}\mu_k(\omega)\mu_i(\omega) \;; \quad k.i = 1. \ldots. K$$

$c = [c_{kl}]$

$z' = [z_1, \ldots, z_k]$

$cz = p^2 z.$

En otras palabras, bajo las condiciones de $u = 0$ y $v = 0$, todo lo que tenemos que hacer es encontrar los valores máximos para la ecuación de eigenvalor. Además, si se resuelve basándose en la condición de que v_τ es $(1/p \cdot \sigma_u/\sigma_v) = 1$, nos da

$$v_\tau = \frac{1}{m_\tau}\left\{\sum_{i=1}^{K} \mu_i(\tau)u_i\right\}.$$

Una vez que analizamos el ejemplo por medio de la teoria de cuantificación borrosa III, descrita anteriormente, se muestran en las tablas siguientes los resultados obtenidos: los coeficientes de correlación para cada eje, el porcentaje de contribución acumulado, y los pesos de las categorias.

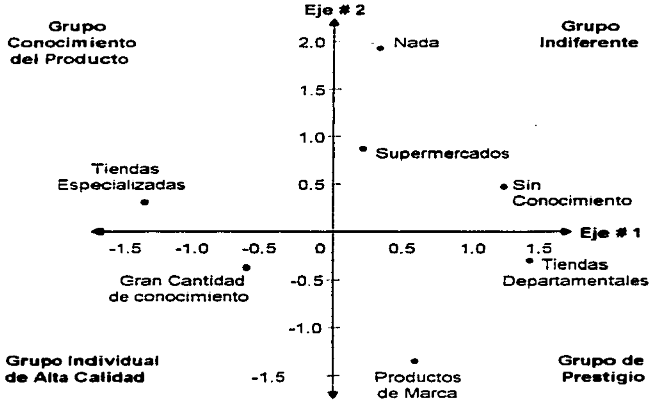
Coeficientes de correlación y porcentajes de contribución para el estudio sobre la compra de la gente joven

	COEFICIENTE DE CORRELACIÓN	PORCENTAJE DE CONTRIBUCIÓN ACUMULADO
EJE #1	6.13	50.4%
EJE #2	4.98	83.7%

Pesos de las categorías para la compra de la gente joven

	LUGAR DE COMPRA			CONOCIMIENTO DEL PRODUCTO		MARCA-NOMBRE DEL PRODUCTO	
	SUPER MERCADOS	TIENDAS ESPECIALIZADAS	TIENDAS DEPARTAMENTALES	NINGUNO	MUCHO	NO IMPORTA	COMPRADOS USUALMENTE
EJE #1	0.337	-1.404	1.411	1.255	-0.616	0.311	0.560
EJE #2	0.902	0.408	-0.253	0.503	-436	1.949	-1.286

La figura muestra el arreglo por categoría utilizando los pesos de las categorías. De este arreglo, podemos clasificar las muestras en cuatro grupos. El primer grupo es de aquellos que no tienen conocimiento del producto y confían en el prestigio de las tiendas departamentales o nombres de marca (*grupo de prestigio*). El segundo grupo es de aquellos que compran en supermercados, sin hacer caso del producto (*grupo indiferente*). El tercer grupo es de aquellos que compran principalmente productos de marca en tiendas especializadas que tienen amplio conocimiento acerca de ellos (*grupo individual de alta calidad*). El cuarto grupo es de aquellos que confían en sus propios conocimientos de los productos y compraran productos de marca si son de su preferencia (*grupo de conocimiento del producto*). Las muestras 3, 4, y 6 pueden ser clasificadas en el grupo 1, las muestras 1 y 7 en el grupo 2, la muestra 2 en el grupo 3 y la muestra 5 en el grupo 4.



Distribución de Categorías en el Estudio de Rasuradoras Eléctricas

CONCLUSIONES

Con este trabajo se presentan los elementos que conforman a la teoría borrosa y su estructura; iniciando por las nociones básicas sobre lógica y conjuntos ordinarios que permiten comprender los conocimientos primordiales utilizados para definir los conceptos de lo borroso tales como los subconjuntos borrosos, relaciones borrosas, lógica borrosa, categoría, etc. Un concepto fundamental es el de la función de membresía, la cual es la base de está teoría, ya que define el grado al cual pertenece o no una variable borrosa a un subconjunto borroso, y opera en el intervalo [0, 1].

Al operar sobre este intervalo tenemos una aproximación más cercana a la realidad, porque en ella se presentan situaciones "borrosas", es decir, existe incertidumbre que no puede ser representada por un si o un no, una verdad o una falsedad, un cero o un uno, como se hace en los subconjuntos ordinarios o en la lógica booleana.

Queda claro que se llaman subconjuntos borrosos y no conjuntos borrosos porque el conjunto de referencia no es borroso, es siempre un conjunto ordinario y son los subconjuntos empleados en esta teoría los que son borrosos.

Todas las propiedades de los subconjuntos ordinarios se encuentran en los subconjuntos borrosos, excepto $A \cap \bar{A} = \varnothing$ y $A \cup \bar{A} = E$ (donde E es el conjunto referencia), debido a que ya no se maneja un álgebra en el sentido de la teoría de los conjuntos ordinarios; la estructura es la de un reticulado vectorial.

Las aplicaciones se escogieron de tal modo que concordaran con los temas presentados en cada capitulo, de forma que se lograra tener una visión real de la teoría borrosa, y que fueran fáciles de explicar y comprender mejor los conceptos vistos previamente.

Las aplicaciones que se muestran en cada capítulo, son sólo una pequeña parte de lo que se puede hacer utilizando la teoría borrosa. Quedan por desarrollar muchas aplicaciones en muchos campos, y mejorar las ya existentes: en este sentido, para quienes así lo deseen, se pueden enfocar sobre un campo en especial de aplicación y desarrollar aún más el trabajo que aquí hemos mostrado de una manera muy general.

A pesar de sus múltiples ventajas, la teoría borrosa tiene algunas desventajas. Por ejemplo, si se quiere implementar la teoría borrosa en sistemas con computadoras actuales, se nos presenta un problema, ya que al operar la computadora con señales digitales (0, 1) se tiene que realizar en un principio una transformación hacia una forma discreta de la situación borrosa para que de este modo sea posible manejar el problema, y como resultado obtenemos un alargamiento del proceso de resolución del mismo. Esto se podrá mejorar con el advenimiento de computadoras u otros dispositivos más modernos que permitan un manejo en paralelo de la información, a diferencia del manejo en forma secuencial con que se cuenta en las computadoras actuales.

Se ha investigado bastante sobre la teoría borrosa, pero falta mucho por hacer aún, sobre todo en el desarrollo de metodologías para llegar a una "borrosificación" de las situaciones reales, debido a que no se tienen reglas bien definidas que nos lleven a establecer cuándo se debe aplicar la teoría borrosa.

Esperamos que al concluir este trabajo se haya logrado despertar el interés por descubrir nuevos caminos hacia el mejor entendimiento de la borrosidad como otra alternativa para la conceptualización matemática del mundo real.

GLOSARIO

Categoría. Es un conjunto de objetos tales que $\forall$ (X, Y), X $\in$ C y Y $\in$ C, existe un conjunto de morfismos de X en Y que tienen una propiedad especificada y representada por MOR(X,Y).

Conjunto. Es una lista, colección, o clase de objetos bien definidos (números, personas, letras, etc.) que se llaman elementos o miembros del conjunto.

Conjunto de membresía. Es el conjunto de valores que toma la función de membresía en el intervalo [0, 1].

Distancia de Hamming. Se llama distancia de Hamming entre A y B a la cantidad

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \mid \mu_{A}(x_i) - \mu_{B}(x_i) \mid$$

Entropía. Es una medida del grado de desorden existente en un sistema.

Forma polinomial. Es una forma de expresión de una función borrosa basada en las propiedades de distributividad mediante la cual toda función borrosa puede expresarse en una serie de monommios respecto a $\wedge$ o respecto a $\vee$.

Función de membresía. Es el grado al cual el elemento está incluido en el subconjunto y se denota por $\mu_{A}(x)$.

Query. Petición de información a una base de datos.

Reticulado. Es un conjunto ordenado de elementos, que tiene una y sólo una cota inferior y una y sólo una cota superior, que forman una red.

SQL. (System Query Language) Lenguaje de manipulación de datos para procesar los queries.

Subconjunto. Es un conjunto cuyos elementos están contenidos en otro conjunto denotado por $A \subset B$ ó $B \supset A$.

Subconjunto borroso. Es un conjunto $\underset{\sim}{A}$ cuyos elementos, que tienen un grado o nivel de membresía, pertenecen a un conjunto ordinario X, y se denota por $\{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\}, \forall x \in X$.

BIBLIOGRAFÍA

DUBOIS, Didier J./PRADE, Henry M.,
"Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications".
New York, 1980.
Ed. Academic.
385 págs.

FELLER, William.
"Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones".
México, 1975.
Ed. Limusa.
504 págs.

GIRAULT, Maurice.
"Los Procesos Aleatorios".
España, 1991.
Ed. Hispanoeuropea.
155 págs.

HOPCROFT, J. E./ULLMANN, J. D.,
"Formal Languages and Their Relations to Automata".
U.S.A., 1980.
Ed. Addison Wesley.
183 págs.

KAUFMANN. A..
"Introducción a la Teoria de los Subconjuntos Borrosos".
México. 1982.
Ed. Continental.
491 págs.

KRAIZSIG. Erwin.
"Introducción a la Estadística Matemática. Principios y Métodos".
México. 1983.
Ed. Limusa.
505 págs.

LIPSCHUTZ. Seymour.
"Teoria de Conjuntos".
México. 1970.
Ed. McGraw Hill.
231 págs.

NOVAK. Vilem.
" Fuzzy Sets and their Applications".
Bristol. 1989.
Ed. A. Hilger.
248 págs.

SZASZ. G..
"Introduction to Lattice Theory".
Boston. 1990.
Ed. Academic.
210 págs.

TERANO. Toshiro. et. al.
"Fuzzy Systems. Theory and Its Applications".
Boston. 1992.
Ed. Academic.
205 págs.

ZADEH. Lotfi Asker.
" Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty".
New York. 1992.
Ed. John Willey.
676 págs.