

37.
201



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFFECTOS CUANTICOS EN LA DISPERSION DE UNA
PARTICULA DE DIRAC POR CAMPOS
MAGNETICOS EXTERNOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C A
P R E S E N T A :
GABRIELA MURGUIA ROMERO



DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO MATIAS MORENO YNTRIAGO

MEXICO, D. F.

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FACULTAD DE CIENCIAS
EDICION RECORRIDA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Efectos Cuánticos en la dispersión de una partícula de Dirac por campos magnéticos externos"

realizado por Gabriela Murguía Romero
con número de cuenta 8938912-8 , pasante de la carrera de Física
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario
Propietario
Propietario
Suplente
Suplente

DR. FERNANDO MATIAS MORENO YNTRIAGO
DR. GERMINAL COCHO GIL
DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS
DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ
DRA. ROSA MARIA MENDEZ VARGAS

Mateo M...
R. Cocho
Luis F. Urrutia
J. C. Saez
Rosa M. Mendez



Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dedico este trabajo a todas aquellas personas que me apoyaron en todo momento e hicieron posible que estas páginas tuvieran una razón de ser.

En especial, a mis padres, Mamita y Jani, porque siempre me han apoyado incondicionalmente.

A los Drs. Virgilio Beltrán, Alicia Oliver y Luis Rodríguez, porque me ayudaron a encontrar mi camino.

A mis compañeros y amigos de la Facultad de Ciencias, porque junto con ellos aprendí a caminar por el sendero de la Ciencia.

A Raúl Espejel y Enrique Moreno, por su invaluable amistad.

Al Dr. Matías Moreno, porque con su carácter tan alegre y optimista encontré que la Física puede llegar a ser el mejor de los juegos que haya yo aprendido.

Gabriela Murguía Romero

Contenido

Resumen	3
Introducción	4
1 Propagador no relativista	6
1.1 Propagador libre	9
1.2 Matriz de dispersión	11
1.3 Amplitud de dispersión	12
2 Propagador relativista	15
2.1 Propagador libre	16
2.2 Propagador exacto	17
2.3 Matriz de dispersión	18
2.4 Sección diferencial	19
3 Dispersión de una partícula cargada por un campo magnético solenoidal: Caso no relativista	22
4 Dispersión de una partícula de Dirac por un campo magnético uniforme	27
5 Dispersión de una partícula cargada por un campo magnético solenoidal: Caso relativista	31
5.1 Sección diferencial	31
5.2 Haz inicialmente despolarizado	35
5.3 Unidades electromagnéticas	41
5.4 Cuantización del flujo magnético	43
5.5 La sección diferencial en términos del flujo magnético elemental	44
5.6 Haz inicialmente polarizado	45

6	Conclusiones	48
A	Método WKB	52
B	Aproximación de la Iconal	54
C	Cálculo de algunas integrales	57
C.1	$\int x e^{-iqx} dx$	57
C.2	$\int_{r < r_0} e^{-iqx} x_i d^2x$	57
C.3	$\int_{r > r_0} e^{-iqx} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^2x$	59
D	Cálculo de $\bar{u}_f \not{x} u_i ^2$	60
D.1	Algebra de Dirac y teoremas de trazas	61
D.2	Primer método para calcular $ \bar{u}_f \not{x} u_i ^2$	62
D.3	Segundo método para calcular $ \bar{u}_f \not{x} u_i ^2$	63
	Bibliografía	68

Resumen

En este trabajo se presenta un cálculo cuántico relativista a primer orden en teoría de perturbaciones de la sección diferencial del proceso de dispersión de una partícula de Dirac por un campo magnético solenoidal.

Se obtuvo que la sección diferencial es simétrica respecto al ángulo de dispersión y realizando un análisis de la polarización del haz, se mostró que esta simetría es independiente de un efecto tipo Stern-Gerlach.

También se obtuvo que la sección diferencial es singular en \hbar si el flujo magnético del solenoide se considera clásico. Este comportamiento de la sección diferencial lleva a implicaciones físicas muy importantes, pues el problema clásico está ampliamente estudiado y se sabe que la sección diferencial es finita y asimétrica respecto al ángulo de dispersión. Sin embargo, cuantizar el flujo magnético hace que la dependencia en \hbar de la sección diferencial desaparezca al introducir la longitud de onda de de Broglie. Este cálculo es enteramente compatible con el que realizaron, por otro método, Landau y Lifshitz [1] para la sección diferencial en el caso cuántico no relativista a la que le asignan un carácter puramente cuántico.

Introducción

En este trabajo se presenta un cálculo cuántico relativista de la sección diferencial del proceso de dispersión de una partícula de Dirac (fermión relativista) con dos tipos de campo magnético utilizando teoría de perturbaciones.

Este problema surgió como un primer paso para el estudio de fenómenos de polarización, principalmente el de autopolarización de haces.

Una de las motivaciones más importantes fue que Landau y Lifshitz [1] resuelven una manifestación del efecto Bohm y Aharonov [2] utilizando la aproximación de la iconal. Calculan la dispersión de una partícula cargada no relativista por el campo magnético de un solenoide. El resultado que obtienen es que, sorprendentemente, la sección diferencial del proceso es singular en \hbar , lo cual llevaría a consecuencias físicas muy importantes.

En contraste, el proceso clásico de la dispersión de partículas cargadas por campos magnéticos está ampliamente estudiado: se sabe que las partículas describen trayectorias circulares bien definidas y que la sección diferencial del proceso es finita.

Respecto al comportamiento singular en \hbar de la sección diferencial del proceso cuántico no relativista, Landau y Lifshitz comentan que es debido a efectos puramente cuánticos y no presentan argumento alguno para tan importante aseveración.

En el presente trabajo se realiza un estudio a primer orden en teoría de perturbaciones de la dispersión cuántica relativista de partículas cargadas por un campo magnético solenoidal. Se obtiene que la sección diferencial es singular en \hbar en concordancia con lo obtenido por otro método por Landau y Lifshitz. Realizando un detallado análisis de las cantidades clásicas que intervienen en el proceso estudiado, particularmente del flujo magnético, se pudo entender y presentar argumentos plausibles para explicar el comportamiento singular en \hbar de la sección diferencial.

A continuación se muestra cómo es que se ha organizado el presente

trabajo:

En el capítulo 1 se presenta el desarrollo matemático para encontrar el propagador de la ecuación de Schrödinger. Se encuentra la forma general de la matriz de dispersión en una serie de Born utilizando estados asintóticos de partícula libre.

En el capítulo 2 se generaliza el estudio realizado en el capítulo anterior al caso relativista utilizando la ecuación de Dirac. También se presenta la definición de sección diferencial y su forma para problemas con una simetría cilíndrica.

En el capítulo 3 se presenta el cálculo que Landau y Lifshitz [1] llevaron a cabo para encontrar la sección diferencial de la dispersión de partículas cargadas por el campo magnético de un solenoide utilizando la ecuación de Schrödinger, es decir, en el caso cuántico no relativista. Como caso particular se obtiene la sección diferencial para ángulos pequeños de dispersión.

En el capítulo 4 se calcula la sección diferencial de la dispersión de partículas de Dirac por un campo magnético uniforme en todo el espacio.

En el capítulo 5 se encuentra la sección diferencial del proceso de dispersión de una partícula de Dirac por un campo magnético solenoidal. Se analizan los casos límite de ángulos pequeños de dispersión y de radios pequeños del solenoide. Se analiza la polarización del haz dispersado y se obtiene la sección diferencial cuantizando el flujo de campo magnético.

En el apéndice D se presenta el cálculo de $|\bar{u}_f \not{p}_f u_i|^2$ mediante dos métodos: el "tradicional" como lo presentan Bjorken y Drell [3] y el que presenta M. Moreno [4] utilizando una expresión general y compacta para el producto de n matrices γ de Dirac. Se compara la facilidad de cálculo entre estos dos métodos.

Capítulo 1

Propagador no relativista

En este capítulo se revisará la teoría de propagadores en la Mecánica Cuántica no relativista a partir de la ecuación de Schrödinger utilizando el principio de Huygens. Así mismo se presentan los conceptos de matriz y amplitud de dispersión. Estos temas se encuentran desarrollados ampliamente en varios libros de texto de Mecánica Cuántica, en particular, en los libros de Bjorken y Drell [3] y de Schiff [5] en los que se basó el tratamiento que aquí se presenta.

El interés principal en problemas de dispersión es conocer cómo se comporta un paquete de ondas que representa a una partícula tiempo después de haber interactuado con algún potencial. La teoría de propagadores se basa en el principio de Huygens, ya que éste se puede aplicar en problemas en donde la ecuación diferencial que los caracteriza es de primer orden en el tiempo, como lo es la ecuación de Schrödinger en donde la combinación lineal de soluciones es solución.

El principio de Huygens establece que si se conoce la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \psi(x)$ en un determinado tiempo t fijo, entonces se podrá determinar la función de onda $\psi(\mathbf{x}', t') \equiv \psi(x')$ para cualquier otro tiempo posterior t' . Al tiempo t cada punto del espacio se considera como una fuente de ondas esféricas $\Delta\psi$ que se propagan libremente hacia el frente de tal forma que la función de onda $\psi(x')$ será proporcional a la función de onda original $\psi(x)$:

$$\psi(x') = i \int G(x'; x) \psi(x) d^3x; \quad t' > t. \quad (1.1)$$

A la constante de proporcionalidad $G(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) = G(x', x)$ se le conoce como función de Green. La ecuación (1.1) se puede escribir de tal forma que sea válida para todo tiempo introduciendo la función escalón $\theta(t)$ definida

como:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$\theta(t' - t)\psi(x') = i \int G(x'; x)\psi(x)d^3x. \quad (1.2)$$

Con esta condición (validéz para todo tiempo) a la función de Green se le llama el propagador.

Supóngase que durante el intervalo de tiempo Δt una partícula libre representada por la función de onda $\varphi(x)$ que satisface la ecuación de Schrödinger $i\partial_t\varphi = H_0\varphi$, interactúa con un potencial $V(\mathbf{x}_1, t_1) \equiv V(1)$. Aplicando el principio de Huygens $V(1)$ es fuente de nuevas funciones de onda $\psi(1)$ que satisfacen la ecuación de Schrödinger

$$[i\partial_{t_1} - H_0]\psi(1) = V(1)\psi(1) \quad (1.3)$$

y que se pueden representar como la combinación lineal

$$\psi(1) = \varphi(1) + \Delta\psi(1). \quad (1.4)$$

Substituyendo este valor de ψ en la ecuación (1.3) y considerando que φ es solución de partícula libre:

$$i\partial_1\Delta\psi(1) = [H_0 + V(1)]\Delta\psi(1) + V(1)\varphi(1) = H\Delta\psi(1) + V(1)\varphi(1). \quad (1.5)$$

En términos de teoría de perturbaciones $\Delta\psi$ sería el término perturbativo, de tal forma que $H\Delta\psi \ll V\varphi$. Integrando la ecuación (1.5) en el intervalo de tiempo Δt_1 y considerando que $H\Delta\psi \simeq 0$ se obtiene para $\Delta\psi$ la siguiente expresión:

$$\Delta\psi(1) = -iV(1)\varphi(1)\Delta t_1. \quad (1.6)$$

Para tiempos t' mayores que t_1 , $\Delta\psi$ se propagará libremente, así que si $G_0(x'; x)$ es el propagador libre, $\Delta\psi$ estará dada como:

$$\Delta\psi(x') = i \int G_0(x'; 1)\Delta\psi(1)d^3x_1. \quad (1.7)$$

Lo mismo sucede para φ en cualquier punto x' para tiempos mayores o iguales que t' :

$$\varphi(x') = i \int G_0(x'; x)\varphi(x)d^3x \quad (1.8)$$

de tal forma que $\psi(x')$ se puede conocer en términos de soluciones de partícula libre [substituyendo las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) en la ecuación (1.4)]:

$$\begin{aligned}
 \psi(x') &= \varphi(x') + \Delta\psi(x') \\
 &= i \int G_0(x'; x) \varphi(x) d^3x \\
 &\quad + i \int G_0(x'; 1) V(1) G_0(1; x) \varphi(x) \Delta t_1 d^3x_1 d^3x \\
 &= i \int [G_0(x'; x) + G_0(x'; 1) V(1) G_0(1; x) \Delta t_1 d^3x_1] \varphi(x) d^3x \\
 &= i \int G(x'; x) \varphi(x) d^3x.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si el potencial V actúa durante un número arbitrario de intervalos de tiempo Δt_i se tendrá que la solución exacta $\psi(x')$ y el propagador exacto $G(x'; x)$ se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
 \psi(x') &= \varphi(x') + \sum_{i=1}^n \int G_0(x'; i) V(i) \varphi(i) \Delta t_i d^3x_i \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n \int G_0(x'; i) V(i) G_0(i; j) V(j) \varphi(j) \Delta t_i \Delta t_j d^3x_i d^3x_j + \dots
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
 G(x'; x) &= G_0(x'; x) + \sum_{i=1}^n \int G_0(x'; i) V(i) G_0(i; x) \Delta t_i d^3x_i \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n \int G_0(x'; i) V(i) G_0(i; j) V(j) G_0(j; x) \Delta t_i \Delta t_j d^3x_i d^3x_j + \dots
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Para interacciones continuas en el tiempo del potencial V , las sumas se convierten en integrales en el tiempo, de tal forma que ambas series se pueden sumar:

$$\begin{aligned}
 \psi(x') &= \varphi(x') + \int G_0(x'; 1) V(1) \varphi(1) d^4x_1 \\
 &\quad + \int G_0(x'; 1) V(1) G_0(1; 2) V(2) \varphi(2) d^4x_1 d^4x_2 + \dots \\
 &= \varphi(x') + \int G_0(x'; 1) V(1) \psi(1) d^4x_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(x'; x) &= G_0(x'; x) + \int G_0(x'; 1)V(1)G_0(1; x)d^4x_1 \\
 &\quad + \int G_0(x'; 1)V(1)G_0(1; 2)V(2)G_0(2; x)d^4x_1d^4x_2 + \dots \\
 &= G_0(x'; x) + \int G_0(x'; 1)V(1)G(1; x)d^4x_1. \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

1.1 Propagador libre

Para encontrar la forma explícita del propagador libre $G_0(x'; x)$ considérese la ecuación que define al propagador exacto:

$$\theta(t' - t)\psi(x') = i \int G(x'; x)\psi(x)d^3x$$

$\psi(x')$ satisface la ecuación de Schrödinger $[i\partial_{t'} - H(x')]\psi(x') = 0$. Aplicando el operador $i\partial_{t'} - H(x')$ a la ecuación anterior y utilizando que la derivada de la función escalón es una delta de Dirac $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \delta(t)$:

$$i\delta(t' - t)\psi(x') = i \int [i\partial_{t'} - H(x')] G(x'; x)\psi(x)d^3x.$$

Poniendo $\psi(x', t') = \int \delta(x' - x)\psi(x)d^3x$, se encuentra la ecuación diferencial que satisface el propagador exacto:

$$[i\partial_{t'} - H(x')] G(x'; x) = \delta(x' - x)\delta(t' - t) = \delta^4(x' - x). \quad (1.13)$$

En el caso libre $H(x') = H_0(x') = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^2}{2m}$ y $G(x'; x) \equiv G_0(x'; x)$ por lo que la ecuación diferencial que satisface el propagador libre es:

$$\left[i\partial_{t'} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^2}{2m} \right] G_0(x'; x) = \delta^4(x' - x).$$

Como el hamiltoniano de partícula libre $H_0(x')$ es invariante ante traslaciones, el propagador libre será función de la diferencia $x' - x$: $G_0(x'; x) \equiv G_0(x' - x)$ de tal forma que

$$\left[i\partial_{t'} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^2}{2m} \right] G_0(x' - x) = \delta^4(x' - x). \quad (1.14)$$

Utilizando la transformada de Fourier de $G_0(x' - x)$ y la forma integral de la exponencial compleja para $\delta^4(x' - x)$:

$$\begin{aligned} \left[i\partial_{t'} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}^2}{2m} \right] G_0(x' - x) &= \\ \int \frac{d^3 p d\omega}{(2\pi)^4} \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right] e^{-i\omega(t'-t)} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} G_0(\mathbf{p}, \omega) &= \\ = \int \frac{d^3 p d\omega}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t'-t)} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} & \end{aligned}$$

con lo que se ha obtenido la ecuación que satisface el propagador libre en el espacio de momentos $G_0(\mathbf{p}, \omega)$:

$$\left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right] G_0(\mathbf{p}, \omega) = 1.$$

Si $\omega \neq \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ entonces

$$G_0(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}.$$

Esta función no está definida cuando $\omega = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. A continuación se mostrará que la modificación

$$G_0(\mathbf{p}, \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}$$

es consistente con la condición de frontera $G_0(x' - x) = 0$ para $t' < t$.

Calculando la integral en $d\omega$ de la transformada de Fourier de $G_0(x' - x)$ haciendo el cambio de variable $\omega' = \omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} G_0(x' - x) &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t'-t)} \times \\ &\times \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega'}{(-2\pi i)} \frac{e^{-i\omega'(t'-t)}}{\omega' + i\epsilon} \\ &= -i\theta(t' - t) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \exp \left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t' - t) \right] \quad (1.15) \end{aligned}$$

ya que

$$\theta(t' - t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} - \int \frac{d\omega'}{(2\pi i)} \frac{e^{-i\omega'(t'-t)}}{\omega' + i\epsilon}.$$

La forma integral del propagador libre aún se puede escribir de manera equivalente utilizando soluciones de partícula libre normalizadas

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$$

como:

$$G_0(x' - x) = -i\theta(t' - t) \int d^3p \varphi_p(x') \varphi_p^*(x). \quad (1.16)$$

En general, para cualquier hamiltoniano H cuyas soluciones sean $\psi_n(x)$ ortonormales para un mismo tiempo t , el propagador exacto será:

$$G(x'; x) = -i\theta(t' - t) \sum_n \psi_n(x') \psi_n^*(x). \quad (1.17)$$

Esta forma es conocida como la representación espectral del propagador.

1.2 Matriz de dispersión

En problemas de dispersión interesa la probabilidad de encontrar un estado final $|f\rangle$ muy lejos del centro dispersor V o mucho tiempo después de la interacción dado que el estado inicial $|i\rangle$ (antes de interactuar con el potencial V) provino de una solución de partícula libre φ_i . Después de la interacción φ_i se propagará según el principio de Huygens como:

$$\psi_i(x') = i \int G(x'; x) \varphi_i(x) d^3x; \quad t' \rightarrow -\infty.$$

El estado final será una solución de partícula libre φ_f ya que la partícula dispersada se encontrará fuera del potencial V .

La matriz de dispersión S_{fi} o la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula después de la dispersión en el estado $|f\rangle$ proveniente de una partícula en el estado $|i\rangle$ anterior a la interacción con el centro dispersor V será:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \varphi_f | \psi_i \rangle = \int \varphi_f^*(x') \psi_i(x') d^3x' \\ &= i \int \varphi_f^*(x') G(x'; x) \varphi_i(x) d^3x d^3x'. \end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo en serie de $G(x'; x)$ en términos de $G_0(x'; x)$ [ecuación (1.12)] y el hecho de que

$$\theta(t' - t) \psi_m^*(x) = i \int G(x'; x) \psi_m^*(x') d^3x'$$

[que se puede obtener fácilmente de la ecuación (1.17) multiplicando por $\psi_n^*(\mathbf{x})$, integrando en d^3x' y utilizando la ortonormalidad de las funciones $\psi_n(\mathbf{x})$] se obtiene para la matriz de dispersión:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - i \int \varphi_f^*(1) V(1) \varphi_i(1) d^4x_1 \\ &\quad - i \int \varphi_f^*(1) V(1) G_0(1, 2) V(2) \varphi_i(2) d^4x_1 d^4x_2 - \dots \\ &= \delta_{fi} - i \int \varphi_f^*(1) V(1) \psi_i(1) d^4x_1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.3 Amplitud de dispersión

La transformada de Fourier del propagador exacto es

$$G(\mathbf{x}', \tau; \mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (1.19)$$

en donde por conveniencia se ha realizado una traslación temporal, de tal forma que $\tau = t' - t$.

A continuación se mostrará que la elección

$$G(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x})}{\omega - \omega_n + i\epsilon} \quad (1.20)$$

con $\psi_n(\mathbf{x})$ soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger:

$$[H_0 + V - E_n] \psi = 0 \quad (1.21)$$

es consistente con la ecuación (1.17) que define al propagador exacto:

Substituyendo la ecuación (1.20) en la ecuación (1.19) e intercambiando el orden de integración se llega a:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}', \tau; \mathbf{x}, 0) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \int \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_n + i\epsilon} d\omega \psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x}) \\ &= -i \sum_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-i\omega'\tau}}{\omega' + i\epsilon} d\omega' e^{-i\omega_n\tau} \psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

en donde se ha hecho el cambio de variable $\omega' = \omega - \omega_n$. Finalmente, utilizando la forma integral de la función escalón se obtiene que el propagador exacto está dado por

$$G(\mathbf{x}', \tau; \mathbf{x}, 0) = -i\theta(\tau) \sum_n e^{-i\omega_n\tau} \psi_n(\mathbf{x}') \psi_n^*(\mathbf{x})$$

que es exactamente la ecuación (1.17) para el caso en el que $\psi_n(\mathbf{x})$ sean soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger.

Si las funciones $\psi_n(\mathbf{x})$ son soluciones de partícula libre, $\psi_n(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}$, la suma discreta se convierte en una integral en d^3k_n y se obtendría el propagador libre $G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega)$ a partir de la ecuación (1.20):

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}}{\omega - \omega_n + i\epsilon} d^3k_n \\ &= \frac{2m}{\hbar(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}}{k^2 - k_n^2 + i\epsilon} d^3k_n \end{aligned}$$

en donde $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$. Si θ es el ángulo entre \mathbf{k} y $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ y se considera a \mathbf{r} como el eje polar:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) &= \frac{2m}{\hbar(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} \cos \theta}}{k^2 - k_n^2 + i\epsilon} k_n^2 \sin \theta dk_n d\theta d\varphi \\ &= \frac{m}{\pi^2 \hbar r} \int_0^\infty \frac{\sin k_n r}{k^2 - k_n^2 + i\epsilon} k_n dk_n \\ &= -\frac{m}{2\pi \hbar r} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Como se mencionó al principio de la sección 1.2, en problemas de dispersión interesa analizar la función de onda de las partículas dispersadas muy lejos del centro dispersor, por lo que considerando el caso en el que $x' \gg x$: r y $\frac{1}{r}$ se pueden aproximar como

$$\begin{aligned} r &\simeq x' - x \cos \theta \\ \frac{1}{r} &\simeq \frac{1}{x'}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación para $G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega)$ para $x' \rightarrow \infty$ queda como:

$$G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) = \frac{m}{2\pi \hbar x'} e^{i\mathbf{k}_n(x' - x \cos \theta)}. \quad (1.22)$$

En general, en los problemas de dispersión estacionarios, con base en el principio de Huygens, se busca una solución exacta ψ del problema muy lejos del centro dispersor ($x \rightarrow \infty$) en términos de una solución de partícula libre φ más una onda esférica saliente ϕ :

$$\begin{aligned} \psi_n(\mathbf{x}) &= \varphi_n(\mathbf{x}) + \phi_n(\mathbf{x}) \\ x \rightarrow \infty \quad \psi_n(\mathbf{x}) &+ \frac{f(\theta)}{x} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

La función $f(\theta)$ se conoce como amplitud de dispersión y se relaciona con la sección diferencial en la forma:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

con $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido. Así, el problema principal en los procesos de dispersión se convierte en encontrar explícitamente el valor de la función $f(\theta)$.

Substituyendo la ecuación (1.23) en la ecuación (1.21) se encuentra la ecuación que satisface ϕ_n :

$$[H_0 - E_n] \phi_n(\mathbf{x}) = -V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) \quad (1.24)$$

ya que la energía del estado incidente φ_n se supuso la misma que la energía de la onda dispersada ϕ_n . Esta suposición se basa en la aproximación adiabática del potencial V (Ver el libro de Shiff [5]).

Utilizando que el propagador libre $G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega)$ satisface la ecuación

$$[E_n - H_0(\mathbf{x}')] G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) = \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$$

junto con la ecuación (1.24) se llega a que ϕ_n está dada por

$$\phi_n(\mathbf{x}') = \int G_0(\mathbf{x}'; \mathbf{x}; \omega) V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x.$$

Substituyendo la ecuación (1.22) en esta última y comparando con la ecuación (1.23) finalmente se obtiene la amplitud de dispersión $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{m}{2\pi\hbar} \int e^{-ik_n z \cos\theta} V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{m}{2\pi\hbar} \int e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Capítulo 2

Propagador relativista

En este capítulo se generalizan las ideas del capítulo anterior al caso relativista y se introduce el concepto de sección diferencial.

En la generalización relativista del propagador, en lugar de la ecuación de Schrödinger, se considera la ecuación de Dirac:

$$[i\nabla - e\mathcal{A} - m] \psi = 0 \quad (2.1)$$

en donde en general $\mathcal{A} = A_\mu \gamma^\mu$ con γ^μ matrices de 4×4 dadas en términos de las matrices de Pauli de 2×2 :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de Dirac es una ecuación espinorial de cuatro componentes. Dos de sus soluciones corresponden a eigenvalores positivos de la energía (espín hacia arriba y hacia abajo) y las otras dos a eigenvalores negativos de la energía (espín hacia arriba y hacia abajo).

El propagador relativista, $S'_F(x', x)$, se define en analogía a como se hizo en el caso no relativista en la ecuación (1.13):

$$[i\nabla - e\mathcal{A} - m] S'_F(x'; x) = \delta^4(x' - x) \quad (2.2)$$

En donde $S'_F(x'; x)$ es una matriz de 4×4 .

Primero se analizará el caso del propagador libre $S_F(x'; x)$ para poder expresar al propagador exacto en términos de éste como se hizo en el caso no relativista.

El subíndice F. de Feynman, significa que las soluciones de energía negativa se propagarán de manera adelantada y las de energía positiva de manera retrasada, para tomar en cuenta la interpretación de agujeros de Dirac.

2.1 Propagador libre

La ecuación que satisface el propagador libre relativista es la ecuación (2.2) con $\mathcal{A} = 0$:

$$[i\nabla - m] S_F(x'; x) = \delta^4(x' - x). \quad (2.3)$$

Como $i\nabla$ es invariante ante traslaciones, S_F será una función que dependa sólo de la diferencia $x' - x$: $S_F(x'; x) \equiv S_F(x' - x)$. Escribiendo $S_F(x' - x)$ en espacio de momentos utilizando su transformada de Fourier y la representación integral de la exponencial compleja para la función delta de Dirac, se consigue la siguiente relación:

$$\begin{aligned} [i\nabla - m] S_F(x'; x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\not{p} - m] e^{-ip(x'-x)} S_F(p) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

de tal forma que $S_F(p)$ satisface la ecuación matricial:

$$[\not{p} - m] S_F(p) = 1.$$

Multiplicando por $[\not{p} + m]$ a la izquierda y despejando:

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \equiv \frac{1}{\not{p} - m}; \quad p^2 \neq m^2. \quad (2.5)$$

Para conocer $S_F(p)$ en $p^2 = m^2$, en analogía con lo que se hizo para el caso no relativista, se hará el cambio de variable $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$ en la ecuación (2.5), y se integrará en $d^4 p$ en la ecuación (2.4). En este paso es importante tomar en cuenta la teoría de hoyos de Dirac, en donde es permitido tener frecuencias positivas propagándose hacia el futuro así como frecuencias negativas propagándose hacia el pasado, de tal forma

que $S_F(x' - x)$ es:

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (\not{p} + m) \\ &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}(x'-x)}}{2E} \left[e^{-iE(t'-t)} (E\gamma_0 - \mathbf{p}\vec{\gamma} + m)\theta(t' - t) \right. \\ &\quad \left. + e^{iE(t'-t)} (-E\gamma_0 - \mathbf{p}\vec{\gamma} + m)\theta(t - t') \right]. \end{aligned}$$

Utilizando soluciones normalizadas de partícula libre de la ecuación de Dirac

$$\psi_{\mathbf{p}}^r(x) = \sqrt{\frac{m}{E(2\pi)^3}} w^r(\mathbf{p}) e^{-ie_r p x}$$

[en donde $r = 1, 2, 3, 4$, e_r es $+1$ si $r = 1, 2$ y es -1 si $r = 3, 4$ y $w^r(\mathbf{p})$ son los espinores que corresponden a soluciones de partícula y antipartícula con espín hacia arriba ($r = 1, 4$) y hacia abajo ($r = 2, 3$) que satisfacen la relación $w^r(\mathbf{p})\bar{w}^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}\epsilon_r$], el propagador libre S_F se puede escribir como:

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i\theta(t' - t) \int d^3 \mathbf{p} \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p}}^r(x') \bar{\psi}_{\mathbf{p}}^r(x) \\ &\quad + i\theta(t - t') \int d^3 \mathbf{p} \sum_{r=3}^4 \psi_{\mathbf{p}}^r(x') \bar{\psi}_{\mathbf{p}}^r(x). \end{aligned}$$

Con esta forma de escribir al propagador libre, es claro que soluciones de energía positiva se propagan hacia el futuro y soluciones de energía negativa se propagan hacia el pasado, lo cual es fácil de verificar haciendo uso de la condición de ortonormalización $\int d^3 x \psi_{r'}^\dagger(x) \psi_r(x) = \delta_{rr'}$. Así, si $\psi^{(+)}$ y $\psi^{(-)}$ son soluciones de energía positiva y energía negativa:

$$\begin{aligned} \theta(t' - t) \psi^{(+)}(x') &= i \int S_F(x' - x) \psi^{(+)}(x) d^3 x \\ \theta(t - t') \psi^{(-)}(x') &= i \int S_F(x' - x) \psi^{(-)}(x) d^3 x. \end{aligned}$$

2.2 Propagador exacto

El propagador exacto satisface la ecuación (2.2). Reacomodando términos y utilizando la ecuación (2.3) que satisface el propagador libre se obtiene la

siguiente ecuación integral para el propagador exacto S'_F :

$$\begin{aligned}(i\nabla_{x'} - m) S'_F(x'; x) &= \delta^4(x' - x) + e\mathcal{A}(x') S'_F(x'; x) \\ &= \int \delta^4(x' - y) \left[\delta^4(y - x) + e\mathcal{A}(y) S'_F(y; x) \right] d^4y \\ &= \int (i\nabla_{x'} - m) S_F(x' - y) \left[\delta^4(y - x) + e\mathcal{A}(y) S'_F(y; x) \right] d^4y\end{aligned}$$

cuya solución es

$$S'_F(x'; x) = S_F(x' - x) + e \int d^4y S_F(x' - y) \mathcal{A}(y) S'_F(y; x). \quad (2.6)$$

La solución exacta de algún problema de dispersión, $\Psi(x)$, se puede escribir en términos del propagador exacto S'_F (en analogía con la ecuación (1.1) del caso no relativista) como:

$$\Psi(x) = i \int S'_F(x; y) \Psi(y) d^4y \quad (2.7)$$

y utilizando sucesivamente la ecuación (2.6) como:

$$\Psi(x) = \psi(x) + ie \int d^4y S_F(x - y) \mathcal{A}(y) \Psi(y) + \dots \quad (2.8)$$

2.3 Matriz de dispersión

La matriz de dispersión S_{fi} está dada por el producto interno

$$S_{fi} = \langle \psi_f | \Psi_i \rangle = \int d^3x \bar{\psi}_f(x) \Psi_i(x)$$

y su interpretación es equivalente a aquella que se mencionó en el caso no relativista en la sección 1.2. Utilizando el adjunto de la ecuación (2.7) para el caso libre, la ortonormalidad entre las funciones de onda libres ψ y la ecuación (2.8), se encuentra la matriz de dispersión en una forma análoga a la ecuación (1.18):

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie\epsilon_f \int d^4y \bar{\psi}_f(y) \mathcal{A}(y) \Psi_i(y) \quad (2.9)$$

en donde $\epsilon_f = \pm 1$ dependiendo si el estado final ψ_f es de partícula o de antipartícula.

Substituyendo la serie para $\Psi_i(y)$ [ecuación (2.8)] en la ecuación anterior, se obtiene una serie para la matriz de dispersión en términos del propagador libre S_F y de soluciones libres ψ :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie\epsilon_f \int d^4y \bar{\psi}_f(y) \mathcal{A}(y) \psi_i(y) - \epsilon_f \int d^4y d^4x \bar{\psi}_f(y) \mathcal{A}(y) S_F(y-x) \mathcal{A}(x) \psi_i(x) + \dots \quad (2.10)$$

2.4 Sección diferencial

Supóngase que en el origen de cierto sistema de referencia (x_1, x_2, x_3) existe un centro dispersor V . En el punto $D = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ se ha colocado un detector a un ángulo θ con respecto al eje x_1 y a un ángulo φ del eje x_3 de tal manera que subtende el ángulo sólido $d\Omega$. El detector servirá para analizar la dispersión de partículas que inciden a V desde una región muy lejana en x_1 ($x_1 \rightarrow -\infty$).

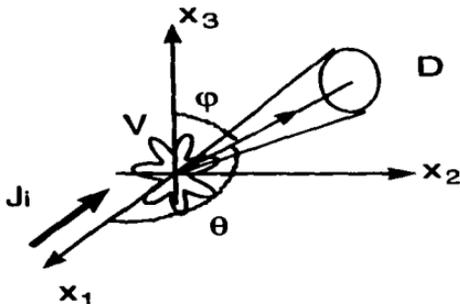


Figura 1: Dispersión de partículas por V .

Sea J_i el flujo de partículas incidentes (J_i es el número de partículas que atraviesan la unidad de área perpendicular a x_1 por unidad de tiempo).

Un número dn de partículas dispersadas serán detectadas en D por unidad de tiempo dentro del ángulo sólido $d\Omega$. dn será proporcional a J_i y a $d\Omega$:

$$dn = d\sigma(\theta, \varphi, V) J_i d\Omega$$

en donde la constante de proporcionalidad se ha denotado por $d\sigma(\theta, \varphi, V)$ y se le conoce como sección diferencial.

Como se verá a continuación, la matriz de dispersión S_{fi} está directamente relacionada con la sección diferencial $d\sigma$:

Por construcción, $|S_{fi}|^2$ es la probabilidad de transición de un estado inicial $|i\rangle$ a uno final $|f\rangle$.

Utilizando la regla de oro de Fermi, que dice que en el volumen d^3p_f existen $\frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}$ estados finales, y el flujo inicial de partículas $J_i = \frac{v_i}{V} = \frac{p_i}{E_i V}$, se obtiene la densidad de probabilidad de transición de un estado inicial $|i\rangle$ a uno final $|f\rangle$ con momento en el intervalo $p_f + d^3p_f$ por partícula incidente por unidad de tiempo T y por unidad de volumen V :

$$|S_{fi}|^2 \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{J_i} \frac{1}{TV} = \frac{|S_{fi}|^2 V d^3p_f E_i}{T (2\pi)^3 p_i}. \quad (2.11)$$

A las cantidades que multiplican a $|S_{fi}|^2$ se les llama factores de fase.

La sección diferencial $d\sigma$ es, precisamente, la probabilidad de transición de un estado inicial con momento p_i a un estado final con momento entre $p_f + d^3p_f$ por partícula incidente por unidad de tiempo y por unidad de volumen:

$$d\sigma = \int \frac{|S_{fi}|^2 V E_i}{(2\pi)^3 T p_i} d^3p_f. \quad (2.12)$$

En problemas con simetría esférica $d^3p_f = p_f^2 dp_f d\Omega$, siendo la sección diferencial por unidad de ángulo sólido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{|S_{fi}|^2 V E_i}{(2\pi)^3 T p_i} p_f^2 dp_f. \quad (2.13)$$

En problemas que presentan una simetría cilíndrica respecto al eje x_3 : $d^3p_f = p_f dp_f dp_{f3} d\theta$ y la sección diferencial por unidad de ángulo polar θ es:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \int \frac{|S_{fi}|^2 V E_i}{(2\pi)^3 T p_i} p_f dp_f dp_{f3}. \quad (2.14)$$

Las unidades de la sección diferencial $d\sigma$ son las de área, con lo que una interpretación más tangible de la sección diferencial viene siendo el área

efectiva que el centro dispersor (ya sean otras partículas o un potencial) presenta a las partículas incidentes.

Capítulo 3

Dispersión de una partícula cargada por un campo magnético solenoidal: Caso no relativista

En este capítulo se repetirá detalladamente el cálculo realizado por Landau y Lifshitz [1] de la sección diferencial de la dispersión de partículas cargadas por el campo magnético de un solenoide en el caso no relativista. En su cálculo, Landau y Lifshitz utilizan la aproximación de la Iconal (ver apéndice B).

Considérese la ecuación de Schrödinger con interacciones electromagnéticas, en la que el hamiltoniano es $H = \frac{1}{2m} [\hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}]^2$. Para el caso del campo magnético de un solenoide, el potencial vectorial \mathbf{A} está dado, en coordenadas cilíndricas, como:

$$\mathbf{A}(r) = \begin{cases} \frac{\Phi}{2\pi r_0} r \hat{\theta} & \text{para } r < r_0 \\ \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\theta} = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \theta & \text{para } r > r_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

en donde se considera al solenoide centrado en el eje x_3 , de radio r_0 y con flujo magnético Φ constante. θ es el ángulo polar, $\theta \in (0, 2\pi)$ y r el radio vector, $r \geq 0$. En la siguiente figura se muestra el sistema de referencia utilizado.

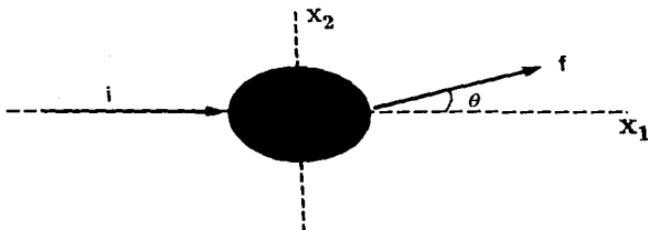


Figura 2: Sistema de referencia utilizado para B solenoidal.

Como la elección del potencial vectorial no es única, también es válida la transformación $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f$ ya que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\nabla \times \nabla f = 0$. Con esta norma y el cambio de fase en la función de onda $\psi \rightarrow e^{\frac{ie\mathbf{A}}{\hbar c}} \psi$, $|\psi|^2$ permanece invariante. Precisamente el potencial de la ecuación (3.1) para $r > r_0$ es de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla f$ con $\mathbf{A}' = \mathbf{0}$ y $f = \frac{\Phi}{2\pi}\theta$. Así, si ψ es solución exacta del problema que se analiza, $\psi e^{\frac{ie\Phi\theta}{2\pi\hbar c}}$ también lo es.

Por lo tanto, si las partículas que interactuarán con el campo magnético del solenoide son libres y sus ímpetus se encuentran en la dirección del eje x_1 , la función de onda que las representa estará dada por

$$\psi = e^{ikx_1} e^{\frac{ie\Phi\theta}{2\pi\hbar c}}. \quad (3.2)$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (B.5) del apéndice B resulta que la función $F(x)$ está dada como

$$F(x) = \exp\left(\frac{ie\Phi\theta}{2\pi\hbar c}\right).$$

En una región muy cercana al solenoide, la solución ψ dada por la ecuación (3.2) no es válida, puesto que la presencia del campo magnético aún puede perturbar a las partículas dispersadas. Esto se refleja en la falta de periodicidad de la función $F(x)$ cuando el ángulo polar θ recorre múltiplos enteros de 2π al rededor del origen. Es decir, entre las regiones $x_1 > 0$ y $x_1 < 0$ el valor de θ difiere en 2π y F es discontinua a menos de que $\Phi = n\frac{h c}{e}$.

Como las partículas dispersadas serán analizadas en una región lejana de donde se encuentra el campo magnético, en muy buena aproximación basta

analizar lo que sucede en la dirección x_1 despreciando la dependencia en x_2 de la solución ψ .

Tomando en cuenta estos dos últimos hechos, la función ψ de la ecuación (3.2) se puede redefinir por intervalos como:

$$\psi(x_1) = \begin{cases} e^{ikx_1} e^{\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} & \text{para } x_1 < 0 \\ e^{ikx_1} e^{-\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} & \text{para } x_1 > 0 \end{cases}$$

de tal forma que al pasar de la región $x_1 < 0$ a la región $x_1 > 0$, el ángulo θ pasa de ser $-\pi$ a π , con lo que θ difiere en 2π al pasar de una región a otra, como se mencionó párrafos arriba. Con esto, $F(x)$ también se redefine por intervalos como:

$$F(x) = \begin{cases} e^{\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} & \text{para } x_1 < 0 \\ e^{-\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} & \text{para } x_1 > 0 \end{cases}$$

Substituyendo el valor de F en la ecuación para la amplitud de dispersión en el caso de una simetría cilíndrica [ecuación (B.4)] siendo q la transferencia de momento se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -i\sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-iqx_1} \left[e^{\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} - e^{-\frac{i\pi\Phi}{2\hbar c}} \right] dx_1 \\ &= \frac{i}{q} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \sin\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) \end{aligned}$$

en donde para calcular la integral se multiplicó por el factor $e^{-i\lambda}$ y finalmente se tomó el límite $\lambda \rightarrow 0$.

La sección diferencial que se busca es

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{2k}{q^2\pi} \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin^2\left(\frac{e\Phi}{2\hbar c}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ya que $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$

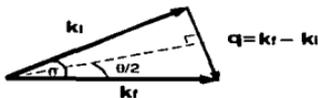


Figura 3: Esquema de la aproximación utilizada.

Aharonov y Bohm [2] calculan de manera exacta la sección diferencial del mismo proceso para el caso en el que el radio del solenoide tiende a cero ($r_0 \rightarrow 0$) manteniendo el flujo magnético Φ constante, obteniendo¹

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{AB} = \frac{\sin^2 \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right)}{2\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.4)$$

la cual tiene el mismo comportamiento sinusoidal que la sección diferencial obtenida por Landau y Lifshitz [ecuación (3.3)].

Si en ambos casos [ecuaciones (3.3) y (3.4)] el flujo magnético está cuantizado (ver sección 5.4), es decir

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

entonces la sección diferencial es nula:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \equiv 0$$

y consecuentemente tiene un límite clásico nulo, al hacer $\hbar \rightarrow 0$. Este límite clásico es consistente con el que se obtiene en la ecuación (3.3) al hacer $\hbar \rightarrow 0$ manteniendo fijos y como clásicos a e, Φ, k, θ .

A continuación se obtendrá el límite clásico de la sección diferencial de la ecuación (3.3) siguiendo el análisis realizado por Landau y Lifshitz, el cual se cree que pueda ser la causa de un resultado tan inesperado y contradictorio como en seguida se muestra:

Supóngase que $\frac{e\Phi}{2\hbar c} \ll 1$, de tal forma que $\sin \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right) \approx \frac{e\Phi}{2\hbar c}$. Supóngase también que se tienen ángulos pequeños de dispersión θ , para los que la

¹En realidad, Aharonov y Bohm obtienen una dependencia en $\cos^2 \frac{\theta}{2}$, pero el sistema de referencia que utilizan es tal que el ángulo de dispersión está desplazado en π respecto al que aquí se ha utilizado: $\theta_{AB} = \theta + \pi$

transferencia de momento se puede aproximar como $q \approx k\theta$. Considerando que $\hbar k = p$ se obtiene para la sección diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \Big|_{\theta \ll 1} = \frac{e^2 \Phi^2}{2\pi \hbar c^2 p} \frac{1}{\theta^2}. \quad (3.5)$$

la cual es singular en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

Cuando Landau y Lifshitz obtienen la sección diferencial de la ecuación (3.5) comentan que la divergencia de la sección diferencial cuando $\theta \rightarrow 0$ (aunque el campo magnético se mantenga concentrado en una pequeña región del espacio) y la periodicidad con el flujo del campo magnético, son ambos efectos puramente cuánticos, sin dar ninguna justificación de tal aseveración. Como se hizo notar antes, este problema proviene de haber omitido el carácter cuántico del flujo magnético. En el capítulo 5 se discutirá en qué sentido es que la sección diferencial obtenida es puramente cuántica.

Obsérvese que tomar el límite clásico de la ecuación (3.5) al hacer tender $\hbar \rightarrow 0$ manteniendo e, Φ, p, θ fijos no es admisible, ya que ésta es una sección diferencial válida para θ pequeña. Como se mencionó párrafos arriba, el límite clásico, en este mismo sentido, para todo ángulo de dispersión es nulo.

Capítulo 4

Dispersión de una partícula de Dirac por un campo magnético uniforme

Como primer planteamiento del problema de dispersión de una partícula de Dirac por un campo magnético externo se calculará el caso más sencillo: el de un campo magnético uniforme en todo el espacio: $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{x}_3$ con B_0 una constante. El cálculo que aquí se presenta se realizará a primer orden en teoría de perturbaciones haciendo uso de estados asintóticos de partícula libre. El plantear el problema de esta manera quizá parezca erróneo, pues existe la duda de poder utilizar teoría de perturbaciones y más aún, soluciones de partícula libre. Sin embargo, más adelante, en el capítulo 5 se mostrará que el resultado aquí obtenido es correcto, en el sentido de que en la dispersión debida a un solenoide de radio r_0 , al tomar el límite $r_0 \rightarrow \infty$, se recupera el resultado obtenido en este capítulo.

Es importante mencionar que en Cromodinámica Cuántica (QCD) es común utilizar teoría de perturbaciones junto con estados asintóticos de partícula libre en problemas en los que quizá este planteamiento sea erróneo, como sucede en el problema de los quarks ligados en los hadrones. Es por eso que es importante entender los resultados que se obtienen al aplicar esta teoría y en este trabajo se estudiará uno de los casos que pareciera el más sencillo para tal efecto, el de un campo magnético uniforme.

El potencial vectorial para un campo magnético uniforme en todo el espacio es $\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{B}_0$ que con la transformación de norma $\mathbf{x} = 2x_2 \hat{x}_2$

se puede escribir en una forma más sencilla como:

$$\mathbf{A} = -x_2 B_0 \hat{\mathbf{x}}_1. \quad (4.1)$$

Las partículas se considerarán incidiendo a la región con campo magnético en la dirección $\hat{\mathbf{x}}_1$.

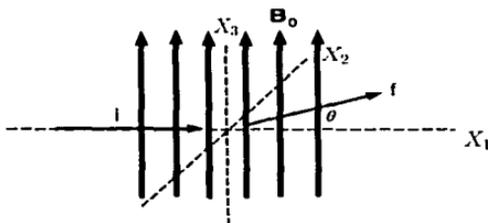


Figura 4: Sistema de referencia utilizado para B uniforme.

Para un cálculo a primer orden de la sección diferencial basta considerar tan sólo los dos primeros términos de la serie (2.10) que determina a la matriz de dispersión:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie \int d^4y \bar{\psi}_f(y) \mathcal{A}(y) \psi_i(y) \quad (4.2)$$

en donde $\psi(x)$ son soluciones de partícula libre de la ecuación de Dirac con momento p y espín s :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} u(p, s) e^{-ipx} \quad (4.3)$$

normalizadas a tener una sola partícula en el volumen V . $u(p, s) \equiv u$ es el espínor de una partícula libre con energía positiva y $\bar{\psi}$ es el adjunto de ψ : $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.

Substituyendo las expresiones de $\bar{\psi}_f(x)$, $\psi_i(x)$ y del potencial en estudio, $\mathcal{A}(x) = x_2 B_0 \gamma^1$, en la ecuación para S_{fi} a primer orden [ecuación (4.2)] se obtiene, en el caso $f \neq i$:

$$S_{fi} = \frac{iemB_0}{\sqrt{E_i E_f V}} \bar{u}_i \gamma^1 u_f \int x_2 e^{ix(p_f - p_i)} d^4x.$$

Las integrales en $dx_0 \equiv dt$, dx_1 , dx_3 son proporcionales a una delta de Dirac (por un factor de 2π), ya que en general

$$\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} dx = 2\pi\delta(\mathbf{q})$$

siendo $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ la transferencia de momento.

Consultando el apéndice C [ecuación (C.1)], la integral en dx_2 es:

$$\int x_2 e^{-ix_2 q_2} dx_2 = 2\pi i \frac{\delta(q_2)}{q_2}.$$

Con esto se obtiene para la matriz de dispersión:

$$S_{fi} = -\frac{emB_0}{\sqrt{E_i E_f} V} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(q)}{q_2} \bar{u}_f \gamma^1 u_i$$

Como

$$|2\pi\delta(\mathbf{q})|^2 = 2\pi L\delta(\mathbf{q}) \quad (4.4)$$

entonces:

$$\frac{|S_{fi}|^2}{TV} = \frac{(emB_0)^2 (2\pi)^4 \delta^4(q)}{E_i E_f V^2} \frac{1}{q_2^2} |\bar{u}_f \gamma^1 u_i|^2.$$

Considerando que la magnitud del momento se conserva ($|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$) y que $\mathbf{p}_f d\mathbf{p}_f = E_f dE_f$ (pues $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$) junto con la forma de la sección diferencial para un problema con simetría cilíndrica [ecuación (2.14)]:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi (emB_0)^2 \frac{\delta(q_1)\delta(q_2)}{p^3 \sin^2 \theta} |\bar{u}_f \gamma^1 u_i|^2 \quad (4.5)$$

ya que

$$q_2 = (p_f - p_i)_2 = p_f \sin \theta = p \sin \theta.$$

En este caso la sección diferencial obtenida tiene unidades de inverso de longitud, ya que se calculó por unidad de volumen de campo magnético.

La ecuación (4.5) es proporcional a una delta de Dirac de la transferencia de momento de la partícula, lo cual significa que las partículas incidentes no cambian su momento al interactuar con el campo magnético, siendo que en el problema clásico se observa que describen una trayectoria circular.

Obsérvese que al inicio de esta sección se supuso que el campo magnético ocupa todo el espacio y que para resolver el problema de la dispersión se utilizaron soluciones de partícula libre. Estas condiciones son físicamente

cuestionables, ya que debido a la presencia del campo magnético, desde un principio, las partículas no pueden comportarse como libres.

Otra forma de entender el significado físico de la ecuación (4.5) es realizando un encendido y apagado adiabático del campo magnético. Supóngase que el potencial se enciende al tiempo $t_0 \ll t_i$ y que una partícula, inicialmente libre, interactúa con el campo durante el intervalo de tiempo $t_f - t_i \equiv \Delta t$. Durante ese tiempo Δt la partícula pudo haber descrito un número arbitrario de trayectorias circulares y al apagar el potencial, al tiempo t_f , observar que el momento de la partícula no cambió o que lo hizo completamente al azar. Ver la siguiente figura.

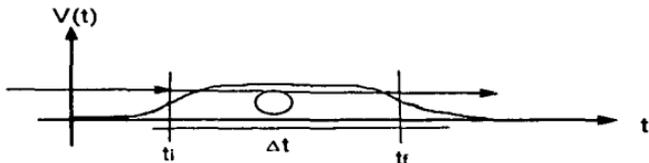


Figura 5: Encendido y apagado adiabático del potencial magnético.

Es importante mencionar que para poder utilizar teoría de perturbaciones a primer orden [cortar la serie de la ecuación (2.10) en el segundo término] es necesario imponer un límite de validez. Este consiste en que el producto del potencial por su alcance sea finito y muy pequeño. En el caso aquí estudiado el alcance del potencial es infinito, de tal forma que para poder hacer un cálculo perturbativo de primer orden se tendría que pedir que el potencial fuera nulo. Con esto, el resultado obtenido para la dispersión [ecuación (4.5)] resulta obvio, pues las partículas se comportarían como libres.

Así, la manera más natural de estudiar la dispersión de partículas por un campo magnético externo será confinando el campo magnético en el espacio, en donde sin llegar a contradicciones, será posible utilizar teoría de perturbaciones junto con estados asintóticos de partícula libre.

En el siguiente capítulo se estudia el caso para el campo magnético de un solenoide.

Capítulo 5

Dispersión de una partícula cargada por un campo magnético solenoidal: Caso relativista

En este capítulo se estudia la dispersión de una partícula de Dirac por el campo magnético de un solenoide de flujo constante, ya que es una de los problemas más sencillos en los que es posible utilizar soluciones de partícula libre. Se analiza la polarización del haz y se discute el problema al cuantizar el flujo magnético.

5.1 Sección diferencial

Considérese un solenoide de largo L y de radio $r_0 \ll L$ centrado en el eje \mathbf{x}_3 de cierto sistema de referencia determinado por los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Dentro del solenoide, en $r < r_0$, el campo magnético es uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{x}}_3$ siendo B_0 una constante. Fuera del solenoide, en $r > r_0$, el campo magnético es nulo. En la siguiente figura se muestra el sistema de referencia a utilizar.

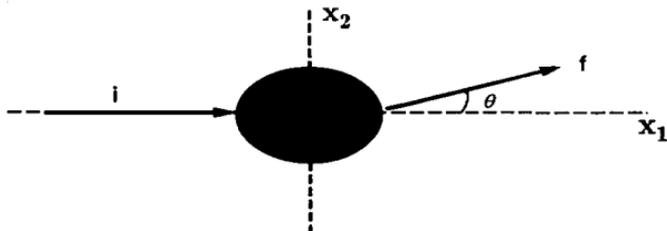


Figura 6: Sistema de referencia utilizado para B solenoidal.

El flujo del campo magnético Φ se mantendrá constante: $\Phi = \pi r_0^2 B_0$.

El potencial vectorial \mathbf{A}_i que describe al campo magnético en el interior del solenoide está dado como

$$\mathbf{A}_i = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{2} (r\hat{\mathbf{f}} + z\hat{\mathbf{x}}_3) \times B_0\hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{2} r B_0 \hat{\varphi}$$

ya que $\hat{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ siendo φ el ángulo polar y r el radio vector.

Fuera del solenoide, el potencial vectorial \mathbf{A}_e estará dado por

$$\mathbf{A}_e = \frac{\Phi}{2\pi} \nabla \varphi$$

de tal forma que $\nabla \times \mathbf{A}_e = 0$.

En coordenadas rectangulares $r\hat{\varphi} = r(-\sin \varphi, \cos \varphi) = (-x_2, x_1)$ y $\nabla \varphi = \frac{\hat{\varphi}}{r} = \frac{r\hat{\varphi}}{r^2} = \frac{(-x_2, x_1)}{x_1^2 + x_2^2}$. De tal forma, el potencial vectorial para el solenoide toma la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_i = \frac{\Phi}{2\pi r_0^2} (-x_2\hat{\mathbf{x}}_1 + x_1\hat{\mathbf{x}}_2) & \text{para } r < r_0 \\ \mathbf{A}_e = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (-x_2\hat{\mathbf{x}}_1 + x_1\hat{\mathbf{x}}_2) & \text{para } r > r_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Para hacer un cálculo a primer orden de la sección diferencial del proceso de dispersión, se considerarán los dos primeros términos de la serie para la matriz de dispersión con soluciones de partícula [ecuación (4.2)]:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie \int d^4y \bar{\psi}_f(y) \mathcal{A}(y) \psi_i(y) \quad (5.2)$$

en donde

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} u(p, s) e^{-ipx} \quad (5.3)$$

es solución de partícula libre de la ecuación de Dirac.

El potencial \mathcal{A} se puede escribir utilizando el símbolo de Levi-Civita en tres índices

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{si alguno de los índices se repite} \end{cases}$$

como:

$$\mathcal{A} = A_\mu \gamma^\mu = \frac{\Phi}{2\pi} \epsilon_{ij3} x_i \gamma^j \begin{cases} \frac{1}{r_0^2} & \text{para } r < r_0 \\ \frac{1}{x_i^2 + x_j^2} & \text{para } r > r_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Substituyendo los valores de $\bar{\psi}_f$, ψ_i , \mathcal{A} en la ecuación (5.2) se obtiene, para el caso $f \neq i$:

$$S_{fi} = -\frac{iem\Phi}{2\pi V \sqrt{E_i E_f}} \epsilon_{ij3} \left[\int_{r < r_0} e^{iqx} \frac{x_i}{r_0^2} d^4x + \int_{r > r_0} e^{iqx} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^4x \right] \bar{u}_f \gamma^j u_i$$

en donde $q = p_f - p_i$ es la transferencia de momento.

Para ambas integrales, las partes que corresponden a $dx_0 = dt$ y dx_3 son proporcionales a $2\pi\delta(q_0)$ y a $2\pi\delta(q_3)$ respectivamente. Con esto se asegura que en el proceso de dispersión la energía se conserva y que las partículas no cambian su momento en la dirección del campo magnético.

Para calcular las integrales en dx_1 y dx_2 se utilizará la siguiente notación, en la que los vectores están en el plano $x_1 x_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_1 \hat{x}_1 + q_2 \hat{x}_2 \\ \mathbf{x} &= x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 \\ q &= |\mathbf{q}| \\ r &= |\mathbf{x}| \\ \theta &= \angle(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \\ d^2x &= dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Consultando el apéndice C [ecuaciones (C.2) y (C.3)]:

$$\begin{aligned} \int_{r < r_0} e^{-iq \cdot \mathbf{x}} x_i d^2x &= 2\pi i r_0^3 \frac{q_i}{q} \left[\frac{J_0(qr_0)}{qr_0} - 2 \frac{J_1(qr_0)}{(qr_0)^2} \right] \\ \int_{r > r_0} e^{-iq \cdot \mathbf{x}} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^2x &= -2\pi i \frac{q_i}{q^2} J_0(qr_0) \end{aligned}$$

en donde J_n es la función de Bessel de orden n .

De tal forma, se obtiene para la matriz de dispersión S_{fi} con $f \neq i$:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \frac{em\Phi}{Vr\sqrt{E_i E_f}} [2\pi\delta(q_0)][2\pi\delta(q_3)] \epsilon_{ij3} \frac{q_i}{q} \bar{u}_f \gamma^j u_i \times \\
 &\times \left(\overbrace{\left[\frac{J_0(qr_0)}{q} - 2 \frac{J_1(qr_0)}{q^2 r_0} \right]}^{r < r_0} + \overbrace{\left[-\frac{J_0(qr_0)}{q} \right]}^{r > r_0} \right) \\
 &= -\frac{2em\Phi}{Vr_0\sqrt{E_i E_f}} [2\pi\delta(q_0)][2\pi\delta(q_3)] J_1(qr_0) \epsilon_{ij3} \frac{q_i}{q^3} \bar{u}_f \gamma^j u_i \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

en donde se ha indicado cual es la contribución de dentro del solenoide y cual la de fuera del solenoide.

Obsérvese que en la matriz de dispersión existe una contribución neta de la parte en donde el campo magnético no es nulo, pues la contribución del exterior del solenoide es anulada de manera exacta por una contribución de la parte interior.

Recuérdese que en el capítulo 3 se trató el caso no relativista de este problema utilizando la aproximación de la Iconal. En ese tratamiento tan sólo intervino la parte exterior del solenoide, donde no hay campo magnético, resultando un cálculo que describe el efecto Bohm-Aharonov.

A continuación se calculará la sección diferencial del proceso que se ha estado estudiando en este capítulo.

Haciendo uso de la ecuación (4.4) y del hecho de que

$$\epsilon_{ij3} q_i \gamma^j = -q_2 \gamma^1 + q_1 \gamma^2 \equiv \not{q} = q_\mu \gamma^\mu$$

[con lo que se ha redefinido a q como el cuadrivector $q = (0, -q_2, q_1, 0)$]:

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T L_3} = \frac{(4\pi em\Phi)^2}{V^2 r_0^2 E_i E_f} \delta(q_0) \delta(q_3) \frac{|J_1(qr_0)|^2}{q^6} |\bar{u}_f \not{q} u_i|^2.$$

Multiplicando por los factores de fase [ver ecuación (2.11)] se obtiene la sección diferencial por unidad de longitud del solenoide y por unidad de ángulo polar θ :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \int \frac{(2em\Phi)^2}{2\pi r_0^2 E_f} \delta(q_0) \delta(q_3) \frac{|J_1(qr_0)|^2}{p_i q^6} |\bar{u}_f \not{q} u_i|^2 \mathbf{p}_f d\mathbf{p}_f d\mathbf{p}_{f_3}.$$

Como la masa de las partículas se considera constante, de la relación $m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$ se obtiene $\mathbf{p}_f d\mathbf{p}_f = E_f dE_f$. Utilizando esto y que la energía

se conserva $[\delta(q_0)]$ se puede integrar en dE_f . Utilizando que las partículas no cambian su momento en la dirección del campo magnético $[\delta(q_3)]$ se puede realizar la integral en $d\mathbf{p}_f$. Obteniendo para la sección diferencial :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{(2em\Phi)^2}{2\pi r_0^2} \frac{|J_1(qr_0)|^2}{p_i q^6} |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2. \quad (5.6)$$

Las unidades de esta sección diferencial son las de longitud, ya que se calculó por unidad de longitud del solenoide para evitar una sección diferencial infinita.

5.2 Haz inicialmente despolarizado

En general

$$|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = \text{Tr}[\mathbf{P}_f \not{A} \mathbf{P}_i \not{A}]$$

con $\mathbf{P}_f, \mathbf{P}_i$ los proyectores de energía y espín:

$$\mathbf{P} = \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \not{s}}{2}.$$

En el apéndice D se encontró que para el caso en el que el cuadrivector q sea real [ecuación (D.2)]:

$$\begin{aligned} 4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 &= (1 - s_f s_i) [q^2 (m^2 - p_f p_i) + 2(p_i q)(p_f q)] \\ &+ 2(p_i s_f)(p_f q)(s_i q) + 2(p_f s_i)(p_i q)(s_f q) \\ &- (p_i s_f)(p_f s_i) q^2 + 2(m^2 - p_f p_i)(s_i q)(s_f q). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si la polarización del haz incidente se desconoce, se puede asignar la misma probabilidad a los diferentes estados de polarización, lo que equivale a promediar sobre los dos posibles estados s_i (espín hacia arriba y espín hacia abajo) al calcular $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$. Si además de esto también se desconoce la polarización del haz dispersado, que equivale a sumar sobre todas las posibles polarizaciones finales, $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$ se reduce a:

$$\frac{1}{2} \sum_{\pm s_i} \sum_{s_f} |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = 2q^2 (m^2 - p_f p_i) + 4(p_i q)(p_f q) \equiv M. \quad (5.8)$$

Otro caso interesante es ver si la interacción con el campo magnético polariza al haz inicialmente despolarizado. En este caso se tendrá que considerar la polarización final s_f y promediar las dos posibles polarizaciones

iniciales, quedando para $|\ddot{u}_f \ddot{u}_i|^2$

$$\frac{1}{2} \Sigma_s |\ddot{u}_f \ddot{u}_i|^2 = q^2 (m^2 - p_f p_i) + 2(p_i q)(p_f q) \equiv \frac{M}{2} \quad (5.9)$$

que es independiente de la polarización final s_f . Con lo que se observa que la interacción del haz inicialmente despolarizado con el campo magnético no polariza al haz.

Como se verá a continuación, la sección diferencial es simétrica con respecto al ángulo de dispersión. Con esto se concluye que el efecto observado cuando se considera la polarización final y se desconoce la inicial no es lo que sucede en el experimento de Stern-Gerlach¹, ya que en este caso, la simetría de la sección diferencial no se debe a que existan dos posibles estados de polarización.

Para obtener M explícitamente en términos de la magnitud del momento p y del ángulo de dispersión θ , se utilizará el sistema de referencia en el que el momento de las partículas incidentes coincide con el del eje x_1 . Considerando que la magnitud del momento y la energía se conservan, defínase $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i \equiv p$, $E_f = E_i \equiv E$, con lo que el momento de las partículas incidentes será $\mathbf{p}_i = p\hat{x}_1$. Además

$$\begin{aligned} p_i &= (E, p, 0, 0) \\ p_f &= (E, p \cos \theta, p \sin \theta, 0) \\ q &= (0, -q_2, q_1, 0) = \left(0, -p \sin \theta, -2p \sin^2 \frac{\theta}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

ya que $q = p_f - p_i$ y $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

De esta manera

$$\begin{aligned} q^2 &= qq = -(q_1^2 + q_2^2) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ p_i q &= pq_2 = p^2 \sin \theta \\ p_f q &= pq_2 \cos \theta - pq_1 \sin \theta = p^2 \sin \theta \left(\cos \theta + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ p_f p_i &= E^2 - p^2 \cos \theta \end{aligned}$$

¹ En el experimento de Stern-Gerlach se someten átomos de plata provenientes de un horno a un campo magnético inhomogéneo. En un detector, detrás del campo magnético, se observa que el haz inicial se divide en dos. Este efecto se explica con la existencia del momento magnético intrínseco o espín del electrón. El hecho de que el haz de plata se divida en dos haces al interactuar con el campo magnético implica que el electrón de valencia tiene dos posibles orientaciones del espín o polarizaciones.

y como $m^2 = E^2 - p^2$:

$$m^2 - p_j p_j = -2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Con lo que se obtiene para M :

$$\begin{aligned} M &= -8p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(-2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 4p^4 \sin^2 \theta \left(\cos \theta + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 16p^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, para la sección diferencial [ecuación (5.6)] se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{f} \left(\frac{e\Phi}{r_0} \right)^2 \frac{|J_1(2p \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{8\pi p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5.10)$$

en donde

$$f = \begin{cases} 1 & \text{para } \frac{1}{2} \Sigma_{\pm s_i} \Sigma_{s_j} \\ 2 & \text{para } \frac{1}{2} \Sigma_{s_i} \end{cases}$$

Ahora se obtendrá la dependencia en \hbar y c de la sección diferencial, que como se mencionó anteriormente, tiene unidades de longitud L .

Por un lado, el cociente $\frac{e^2}{2\pi\hbar c} = 2\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = 2\alpha$ no tiene unidades. Por otro lado, utilizando la relación de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ resulta que $\frac{\hbar}{p}$ tiene unidades de longitud, esto es $\left[\frac{\hbar}{p} \right] = L$. Por lo tanto, Φ^2 deberá ser adimensional para que las unidades de la sección diferencial sean las de longitud.

Φ es el flujo magnético dado por $\Phi = BA$. Como B^2 tiene unidades de densidad de energía (pues $u = \frac{1}{2} \int B^2 dV$) y las unidades de A son las de longitud cuadrada (área), entonces las unidades de Φ^2 serán las de energía por longitud, es decir $[\Phi^2] = EL$. Pero como se mencionó en el párrafo anterior, Φ^2 debe ser adimensional así que dividamos entre el producto $\hbar c$ que tiene unidades de energía por longitud para obtener el resultado correcto.

En conclusión, haciendo las transformaciones

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \frac{p}{\hbar} \\ e^2 &\rightarrow \frac{e^2}{\hbar c} \\ \Phi^2 &\rightarrow \frac{\Phi^2}{\hbar c} \end{aligned}$$

en la ecuación (5.10) se obtendrán las unidades correctas para la sección diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{f} \frac{h}{c^2} \left(\frac{e\Phi}{r_0} \right)^2 \frac{|J_1(2\frac{E}{h} \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{8\pi p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (5.11)$$

En las siguientes figuras se muestra el comportamiento angular de la sección diferencial en coordenadas rectangulares y polares para dos radios r_0 del solenoide.

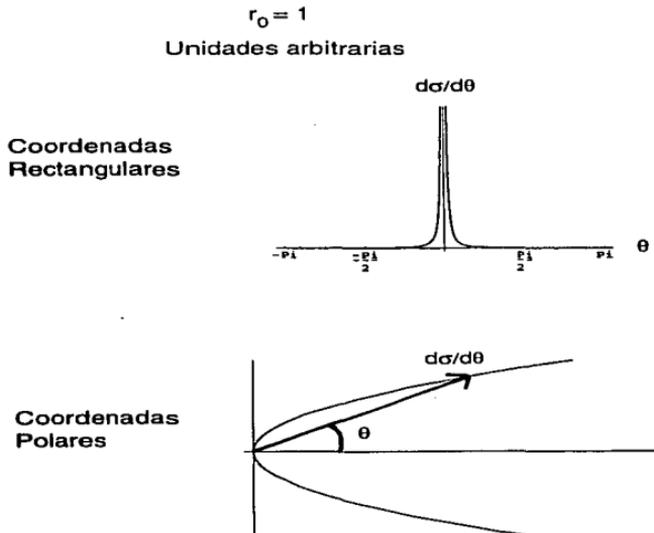


Figura 7: Gráfica de la sección diferencial para $r_0 = 1$ (unidades arbitrarias).

$$r_0 = 10$$

Unidades arbitrarias

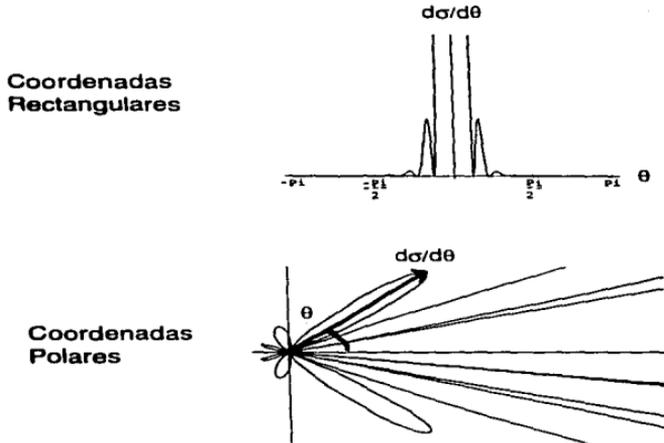


Figura 8: Gráfica de la sección diferencial para $r_0 = 10$ (unidades arbitrarias).

Un caso límite interesante es el de ángulos pequeños de dispersión. En ese límite

$$J_1 \left(2 \frac{p}{\hbar} r_0 \sin \frac{\theta}{2} \right) \approx \frac{2pr_0 \sin \frac{\theta}{2}}{2\hbar} \approx \frac{pr_0 \theta}{2\hbar}$$

con lo que la ecuación (5.11) se aproxima a

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta \ll 1} = \frac{1}{f} \frac{e^2 \Phi^2}{2\pi c^2 \hbar p \theta^2}. \quad (5.12)$$

La ecuación anterior es precisamente la sección diferencial que Landau y Lifshitz [1] obtuvieron para el caso de la dispersión no relativista en el mismo

límite de ángulos pequeños de dispersión [ver capítulo 3 y explícitamente la ecuación (3.5)].

Otro caso límite interesante es el de radios pequeños del solenoide. En este caso

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{r_0 \ll 1} = \frac{1}{f} \frac{e^2 \Phi^2}{8\pi c^2 \hbar p \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (5.13)$$

Obsérvese que en estas dos últimas expresiones el radio del solenoide y la masa de las partículas no juega ningún papel.

Como se mencionó en el capítulo 3, Aharonov y Bohm [2] obtienen

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{AH} = \frac{\sin^2 \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right)}{2\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

para radios muy pequeños del solenoide. Si $\frac{e\Phi}{2\hbar c} \ll 1$ de tal forma que

$$\sin^2 \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right) \approx \left(\frac{e\Phi}{2\hbar c} \right)^2$$

entonces la sección diferencial obtenida por Aharonov y Bohm es

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{AB} \approx \frac{e^2 \Phi^2}{8\pi c^2 \hbar^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

que tiene la misma forma de la ecuación (5.13).

Para obtener el límite clásico de la sección diferencial se hará tender \hbar a cero en la ecuación (5.12). Se sabe que en el caso clásico las partículas describen una trayectoria circular bien definida, pero como es fácil de verificar, la sección diferencial de la ecuación (5.12) diverge en el límite $\hbar \rightarrow 0$ con p , Φ y c^2 fijos.

Introduciendo la variable adimensional

$$x = 2 \frac{p}{\hbar} r_0 \sin \frac{\theta}{2} = r_0 \eta$$

(pues $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\eta}{2k}$), la sección diferencial de la ecuación (5.11) toma la forma

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{\pi f} \left(\frac{e\Phi}{2c} \right)^2 \frac{1}{r_0 p^2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} F(x)$$

en donde se ha definido a $F(x)$ como

$$F(x) = \frac{|J_1(x)|^2}{x}.$$

Para $x \rightarrow \infty$, es decir, para $h \rightarrow 0$ manteniendo e, r_0, p, θ, Φ fijos, el comportamiento asintótico de $J_1(x)$ es [7]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right); \quad x \gg \frac{3}{8}$$

con lo que para $x \rightarrow \infty$, $F(x)$ se comporta como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{2}{\pi x^2} \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

obteniendo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

Con esto se muestra que el límite clásico, haciendo $h \rightarrow 0$ con e, p, r_0, Φ, θ fijos, de la sección diferencial obtenida es idénticamente cero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\theta} \equiv 0$$

y no muestra ninguna singularidad en h como se obtiene en el caso de ángulos pequeños de dispersión [ecuación (5.12)] y de radios pequeños del solenoide [ecuación (5.13)].

En la obtención de la ecuación (5.11) no se supuso nada sobre la carga del electrón e ni sobre el flujo magnético Φ , es decir, ambos se consideraron como clásicos. En la siguiente sección se verá que cuantizando el flujo magnético la sección diferencial tampoco es singular en h .

Como la función de Bessel de orden uno (J_1) es una función que oscila entre -1 y 1 es fácil corroborar que la sección diferencial de la ecuación (5.11) para radios muy grandes del solenoide ($r_0 \rightarrow \infty$) es nula para $\theta \neq 0$ mientras que para $\theta = 0$ es diferente de cero y muy grande. Es decir, en el límite de radios grandes del solenoide, la sección diferencial obtenida se comporta como una delta de Dirac del ángulo de dispersión [$\delta(\theta)$], o de manera equivalente, como una delta de Dirac de la transferencia de momento [$\delta(q)$]. Con esto se recupera el cálculo presentado en el capítulo anterior, lo cual muestra, junto con la ecuación (5.12) que el cálculo que aquí se presenta es correcto en el sentido de que está bien calculado.

5.3 Unidades electromagnéticas

Durante el desarrollo de este trabajo se ha seguido la misma notación utilizada por Bjorken y Drell [3] en la que la carga del electrón e_{BD} se relaciona

con la del sistema gaussiano o cgs e_g como:

$$\frac{e_g^2 h D}{4\pi} = e_g'^2. \quad (5.14)$$

Así la constante de estructura fina α en las unidades utilizadas por Bjorken y Drell es

$$\alpha = \frac{e_g^2 h D}{4\pi h c} = \frac{e_g'^2}{h c} = \frac{1}{137}. \quad (5.15)$$

En el sistema gaussiano la fuerza de Lorentz es

$$\mathbf{F} = e_g \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

de tal forma que las unidades de campo eléctrico y magnético son las mismas. En este sistema las unidades de las cantidades electromagnéticas fundamentales son:

$$\begin{aligned} [e] &= \text{statcoulomb} \\ [D] &= [E] = \text{gauss}. \end{aligned}$$

En cgs el potencial eléctrico es $V = \frac{e_g}{r}$ y tiene unidades de statvolt, por lo tanto

$$1 \text{ statvolt} = 1 \text{ statcoulomb} \text{ cm}^{-1}.$$

La energía eléctrica es $U = e_g V$ y tiene unidades de erg, por lo que

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ statcoulomb} \text{ statvolt} = 1 \text{ statcoulomb}^2 \text{ cm}^{-1}. \quad (5.16)$$

Como en cgs el campo eléctrico está dado como $E = \frac{e_g}{r^2}$ y tiene unidades de gauss (según se observó utilizando la fuerza de Lorentz), entonces

$$1 \text{ gauss} = 1 \text{ statcoulomb} \text{ cm}^{-2}$$

con lo que en este sistema, las unidades de flujo magnético son las de carga eléctrica:

$$1 \text{ gauss} \text{ cm}^2 = 1 \text{ statcoulomb}. \quad (5.17)$$

Finalmente, utilizando la ecuación (5.16) se obtiene que las unidades de campo magnético en el sistema gaussiano son:

$$1 \text{ gauss} = (\text{erg} \text{ cm})^{1/2} \text{ cm}^{-2} = (\text{erg} \text{ cm}^{-3})^{1/2}. \quad (5.18)$$

5.4 Cuantización del flujo magnético

Se cuantizará el flujo magnético utilizando la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld² para órbitas circulares, la cual establece que:

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = nh \quad (5.19)$$

siendo n un número natural $n = 1, 2, 3, \dots$

En el sistema de unidades gaussiano la substitución mínima es

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e_g}{c} \mathbf{A}.$$

Substituyendo \mathbf{p} por $\frac{e_g}{c} \mathbf{A}$ en la ecuación (5.19):

$$\oint \frac{e_g}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = nh. \quad (5.20)$$

El flujo magnético es por definición:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

con lo que la ecuación (5.20) se reduce a

$$\frac{e_g}{c} \Phi = nh$$

obteniendo que el flujo magnético se cuantiza en la forma

$$\Phi = n \frac{hc}{e_g} \equiv n\Phi_0$$

siendo Φ_0 el flujo magnético elemental

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e_g} = \frac{e_g}{\alpha}.$$

Como $\alpha^{-1} = 137$ y $e_g = 4.8 \times 10^{-10}$ statcoulomb:

$$\Phi_0 = 41.318 \times 10^{-8} \text{ statcoulomb} = 41.318 \times 10^{-8} \text{ gauss cm}^2.$$

Así, en un flujo magnético de un Tesla por cm^2 se tendrán 2.42×10^{10} líneas de flujo elemental:

$$n = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{10^4}{41.318 \times 10^{-8}} = 2.42 \times 10^{10}.$$

²Otra forma de cuantizar el flujo de campo magnético es proponiendo a $\psi e^{i\alpha(\theta)}$ como solución de la ecuación de Schrödinger. Pedir invarianza de forma en la ecuación de Schrödinger al introducir el potencial del campo magnético fuera del solenoide en el acoplamiento mínimo y pedir que la función de onda sea univaluada, es decir $\psi(\theta = 0) = \psi(\theta = 2\pi)$ conduce a que el flujo de campo magnético se cuantiza en la forma $\Phi = n \frac{hc}{e_g}$.

5.5 La sección diferencial en términos del flujo magnético elemental

Utilizando que $\alpha = \frac{e^2 \hbar p}{4\pi \hbar c}$ la ecuación (5.11) se puede reescribir como:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{f} \frac{\hbar^2}{c} \alpha \Phi^2 \frac{|J_1(2\frac{\hbar}{h} \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{2r_0^2 p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

y como $\Phi = n\Phi_0 = n2\pi \frac{e^2}{\alpha}$ con $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$:

$$\Phi^2 = n^2 (2\pi)^2 \frac{e^4}{\alpha^2} = n^2 (2\pi)^2 \frac{\hbar c}{\alpha}$$

obteniendo para la sección diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = n^2 \hbar^3 \frac{(2\pi)^2}{f} \frac{|J_1(2\frac{\hbar}{h} \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{2r_0^2 p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5.21)$$

la cual, aparte de ser independiente de la masa y de la carga de las partículas, es una sección diferencial de un fenómeno puramente cuántico, pero no singular en \hbar , a primer orden en teoría de perturbaciones, ya que el flujo magnético se encuentra cuantizado.

Para el límite de ángulos pequeños de dispersión, la sección diferencial en términos del flujo elemental es:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta \ll 1} = \frac{8\pi^2 n^2 \hbar}{f} \frac{1}{p \theta^2} \quad (5.22)$$

cuyo límite clásico, al hacer $\hbar \rightarrow 0$ con p, θ fijos es idénticamente cero, como se demostró al final de la sección 5.2

Utilizando la longitud de onda de de Broglie

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{p} = 2\pi \frac{\hbar}{p}$$

la sección diferencial para todo ángulo es:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{n^2 \lambda_B^3}{4\pi f r_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| J_1 \left(4\pi \frac{r_0}{\lambda_B} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right|^2 \quad (5.23)$$

que es independiente de la masa y la carga de las partículas y de \hbar . Esta última ecuación es tan sólo una forma de escribir la ecuación (5.21), pues en general, λ_B es considerada como una cantidad cuántica mientras que a p se le considera como una cantidad clásica.

Introduciendo la variable adimensional

$$x = \frac{\lambda_B}{r_0}$$

para medir el radio del solenoide en longitudes de onda de de Broglie de las partículas, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{n^2 r_0}{4\pi f x^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| J_1 \left(4\pi x \sin \frac{\theta}{2} \right) \right|^2.$$

5.6 Haz inicialmente polarizado

Ahora se considerará que el haz está inicialmente polarizado. Supóngase que la polarización del haz antes de interactuar con el campo magnético es $s_i = (s_{0i}, s_i)$ y que al interactuar con el campo magnético el haz cambiará su polarización a $s_f = (s_{0f}, s_f)$.

Como las condiciones $p_i s_i = p_f s_f = 0$ y $s_i^2 = s_f^2 = -1$ en particular se cumplen en el sistema de referencia en reposo, entonces se deben cumplir en cualquier otro sistema de referencia, ya que sp y s^2 son escalares de Lorentz. Con estas condiciones es posible encontrar s_i y s_f en términos de tan sólo dos variables, por ejemplo s_2 y s_3 para cada caso. Para tal fin se utilizará el mismo sistema de referencia elegido anteriormente, en donde

$$\begin{aligned} p_i &= (E, p, 0, 0) \\ p_f &= (E, p \cos \theta, p \sin \theta, 0). \end{aligned}$$

Además, supóngase que el cuadrivector s se puede escribir por coordenadas como $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$. De la condición $ps = 0$ se obtienen s_{0i} y s_{0f} :

$$\begin{aligned} s_{0i} &= \frac{p}{E} s_{1i} \\ s_{0f} &= \frac{p}{E} (s_{1f} \cos \theta + s_{2f} \sin \theta). \end{aligned}$$

De las condiciones $s^2 = -1$ es posible encontrar s_3 en términos de s_1 y s_2 :

$$s_{3i}^2 = 1 - s_{2i}^2 - \frac{m^2}{E^2} s_{1i}^2$$

$$s_{3f}^2 = \frac{1}{E} \left(E^2 - s_{1f}^2(p^2 \cos^2 \theta - E^2) + s_{2f}^2(p^2 \sin^2 \theta - E^2) + 2p^2 s_{1f} s_{2f} \sin \theta \cos \theta \right).$$

En términos de las coordenadas s_1, s_2, s_3 se obtiene para $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$:

$$4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = 8 \frac{p^4}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[m^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{1f} s_{1i} \cos \theta + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1i} s_{2f} \sin \theta - s_{1f} s_{2i} \sin \theta) + p^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1f} s_{2i} \sin \theta) \right]. \quad (5.24)$$

Substituyendo esto en la ecuación (5.6) se obtiene para la sección diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \left(\frac{e\Phi}{r_0} \right)^2 \frac{|J_1(2p \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{16\pi E^2 p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \times \\ &\times \left[m^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{1f} s_{1i} \cos \theta + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1i} s_{2f} \sin \theta - s_{1f} s_{2i} \sin \theta) + p^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1f} s_{2i} \sin \theta) \right] \end{aligned}$$

que en términos de \hbar y c toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \hbar \left(\frac{e\Phi}{r_0} \right)^2 \frac{|J_1(2\frac{p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{16\pi E^2 p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \times \\ &\times \left[m^2 c^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{1f} s_{1i} \cos \theta + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1i} s_{2f} \sin \theta - s_{1f} s_{2i} \sin \theta) + p^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1f} s_{2i} \sin \theta) \right]. \end{aligned}$$

Cuantizando el flujo magnético e introduciendo la longitud de onda de de Broglie:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{n^2 \lambda_B^3}{4r_0^2 (2\pi)^3 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| J_1 \left(4\pi \frac{r_0}{\lambda_B} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right|^2 \times \\ &\times \left[m^2 c^2 (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{1f} s_{1i} \cos \theta + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1i} s_{2f} \sin \theta - s_{1f} s_{2i} \sin \theta) + \frac{(2\pi)^2 \hbar^2}{\lambda_B^2} (1 + s_{3f} s_{3i} + s_{2f} s_{2i} \cos \theta + s_{1f} s_{2i} \sin \theta) \right]. \quad (5.25) \end{aligned}$$

En el caso particular en el que las polarizaciones inicial y final son paralelas al movimiento de las partículas:

$$s_i = \frac{E}{m} \left(\frac{p}{E}, 1, 0, 0 \right)$$

$$s_f = \frac{E}{m} \left(\frac{p}{E}, \cos \theta, \sin \theta, 0 \right)$$

$$4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = 16p^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

la sección diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{n^2 \lambda_B^3}{2r_0^2 (2\pi)^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| J_1 \left(4\pi \frac{r_0}{\lambda_B} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right|^2$$

que en el límite de ángulos pequeños de dispersión es:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta \ll 1} = \frac{16n^2 \lambda_B}{\pi \theta^2}.$$

En el caso particular en el que las polarizaciones inicial y final son perpendiculares al movimiento de las partículas:

$$s_i = \left(0, 0, \sqrt{1 - s_{3i}^2}, s_{3i} \right)$$

$$s_f = \left(0, -\sin \theta \sqrt{1 - s_{3f}^2}, \cos \theta \sqrt{1 - s_{3f}^2}, s_{3f} \right)$$

$$4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = 8p^4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + s_{3f} s_{3i} + \sqrt{1 - s_{3i}^2} \sqrt{1 - s_{3f}^2} \right]$$

la sección diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{n^2 \lambda_B^3}{4r_0^2 (2\pi)^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| J_1 \left(4\pi \frac{r_0}{\lambda_B} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right|^2 \left[1 + s_{3f} s_{3i} + \sqrt{1 - s_{3i}^2} \sqrt{1 - s_{3f}^2} \right]$$

que en el límite de ángulos pequeños de dispersión es

$$\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta \ll 1} = \frac{8n^2 \lambda_B}{\pi \theta^2} \left[1 + s_{3f} s_{3i} + \sqrt{1 - s_{3i}^2} \sqrt{1 - s_{3f}^2} \right].$$

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se presentó un estudio cuántico relativista a primer orden en teoría de perturbaciones de la sección diferencial del proceso de dispersión de una partícula de Dirac (fermión relativista) por campos magnéticos externos.

Como primer acercamiento al problema se propuso un campo magnético uniforme en todo el espacio en la dirección del eje \hat{x}_3 cuyo potencial vectorial se eligió como:

$$\mathbf{A} = -x_2 B_0 \hat{x}_1. \quad (6.1)$$

Utilizando soluciones de partícula libre de la ecuación de Dirac, se obtuvo para la sección diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi (cmB_0)^2 \frac{\delta(q_1)\delta(q_2)}{p^3 \sin^2\theta} |\bar{u}_f \gamma^1 u_i|^2 \quad (6.2)$$

en donde se eligió que las partículas incidentes tuvieran su momento sobre el eje \hat{x}_1 .

Como se observa, esta sección diferencial es proporcional a una delta de Dirac de la transferencia de momento en el plano perpendicular al campo magnético, lo cual indica que, en esta aproximación, las partículas no cambian su momento al interactuar con el campo magnético. Este comportamiento puede deberse al mal uso de la teoría de perturbaciones, ya que se utilizaron estados asintóticos de partícula libre en un problema que involucra estados ligados desde un principio.

Para poder utilizar soluciones de partícula libre sin llegar a contradicciones aparentes en la solución del problema, se confinó al campo magnético en el espacio utilizando un solenoide en la dirección del eje \hat{x}_3 de radio r_0 y

con flujo magnético Φ constante, cuyo potencial vectorial es:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_i = \frac{\Phi}{2\pi r_0^2} (-x_2 \hat{x}_1 + x_1 \hat{x}_2) & \text{para } r < r_0 \\ \mathbf{A}_e = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (-x_2 \hat{x}_1 + x_1 \hat{x}_2) & \text{para } r > r_0 \end{cases} \quad (6.3)$$

En este caso, se obtuvo para la sección diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{(2em\Phi)^2 |J_1(qr_0)|^2}{2\pi r_0^2} \frac{1}{p_i q^6} |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2. \quad (6.4)$$

Considerando que el haz está inicialmente despolarizado, la sección diferencial toma la forma

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\hbar}{c^2} \left(\frac{e\Phi}{r_0} \right)^2 \frac{|J_1(2\frac{p}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} r_0)|^2}{8\pi p^3 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (6.5)$$

sin importar si se considera o no la polarización final, lo cual indica que la interacción con el campo magnético no polariza a las partículas.

Como se observa, la sección diferencial obtenida es simétrica respecto al ángulo de dispersión θ . Se podría esperar que este comportamiento fuera un reflejo del experimento de Stern-Gerlach. En ese experimento se someten átomos de plata provenientes de un horno a un campo magnético inhomogéneo. En un detector detrás del campo magnético, se observa que el haz inicial se divide en dos. Este efecto se explica con la existencia del momento magnético intrínseco o espín del electrón. El hecho de que el haz de plata se divida en dos haces al interactuar con el campo magnético implica que el electrón de valencia tiene dos posibles orientaciones del espín o polarizaciones.

En este trabajo se estudió, al orden más bajo en teoría de perturbaciones, la polarización de las partículas al ser dispersadas por un campo magnético solenoidal. Se encontró que si el haz está inicialmente despolarizado, al ser dispersado por el campo magnético, no se polariza, es decir, el estado final de las partículas es una mezcla de las dos posibles polarizaciones.

Por otro lado, en el caso cuántico no relativista, utilizando la aproximación de la iconal, Landau y Lifshitz [1] obtienen la sección diferencial para ángulos pequeños de dispersión:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \Big|_{\theta \ll 1} = \frac{e^2 \Phi^2}{2\pi \hbar c^2 p} \frac{1}{\theta^2}. \quad (6.6)$$

Esta coincide con el límite de ángulos pequeños de dispersión que se obtuvo para el caso relativista en este trabajo utilizando teoría de perturbaciones. Como se observa, mediante dos diferentes métodos se llegó al mismo resultado cuántico no relativista. Esto confirma que el cálculo cuántico relativista para todo ángulo de dispersión que se presentó en este trabajo está bien calculado.

La sección diferencial para ángulos pequeños de dispersión, en ambos casos (relativista y no relativista) se comporta como h^{-1} . Por lo que el tomar el límite clásico (haciendo tender h a cero) manteniendo tanto el flujo magnético Φ como la carga electrónica e constantes, produce una divergencia en la sección diferencial que es físicamente cuestionable, ya que el resultado clásico está ampliamente estudiado y resulta ser finito.

Se mostró que el límite clásico de la sección diferencial para todo ángulo de dispersión [ecuación (6.5)] haciendo $h \rightarrow 0$ con e, Φ, p, r_0, θ fijos, es nulo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\theta} \equiv 0.$$

Este límite también se obtiene en la sección diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2h}{p\pi \sin^2 \theta} \sin^2 \left(\frac{e\Phi}{2hc} \right)$$

obtenida por Landau y Lifshitz para todo ángulo de dispersión sin realizar ninguna otra aproximación (como la de suponer $\frac{e\Phi}{2hc} \ll 1$).

Analizando con cuidado la forma en la que se toma el límite clásico, se concluye que el tomar primero una aproximación de ángulos pequeños de dispersión y luego tomar el límite clásico haciendo $h \rightarrow 0$ manteniendo e, Φ, θ, p, r_0 fijos, es erróneo, pues como se mostró en este trabajo, lleva a grandes contradicciones.

El hecho de cuantizar el flujo magnético en un cálculo perturbativo de primer orden, da como resultado una sección diferencial que se comporta básicamente como h^3 , obteniendo que el límite clásico, al hacer $h \rightarrow 0$ con p, r_0, Φ, θ fijos, es nulo. Este límite clásico también se obtiene en la sección diferencial obtenida por Landau y Lifshitz, ya que si $\Phi = n \frac{hc}{e}$, entonces

$$\sin \left(\frac{e\Phi}{2hc} \right) = \sin(n\pi) \equiv 0.$$

Así, en este trabajo se muestra qué tan importante es distinguir entre cantidades físicas que son clásicas de las que son puramente cuánticas en el tratamiento de problemas en la Mecánica Cuántica.

Por otra parte, el tratar problemas en Mecánica Cuántica que involucran estados ligados por medio de estados asintóticos de onda plana puede llevar a contradicciones físicas de gran importancia.

En este trabajo se mostró un ejemplo de ello al tratar la dispersión de partículas por un campo magnético uniforme en todo el espacio. El problema se resolvió utilizando soluciones de partícula libre aún cuando se sabía que era un problema de estados ligados. Tales estados ligados reciben el nombre de órbitas de Landau ya que fueron estudiadas por el mismo autor. Confinar el campo magnético en el espacio por medio de un solenoide fue la forma en la que en este trabajo se resolvió el problema arriba mencionado.

Un área de la Física en la que los estados ligados juegan un papel muy importante es la Cromodinámica Cuántica (QCD), ya que los mesones y bariones son un estado ligado de 2 y 3 quarks confinados en una región del espacio. Así, una de las conclusiones de este trabajo es que se debe ser muy cuidadoso en el tratamiento de problemas que involucran estados ligados.

Apéndice A

Método WKB

El método de aproximación WKB da una solución de la ecuación de Schrödinger en términos de una serie de potencias de \hbar .

Si $\psi(\mathbf{x})$ es solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

el método WKB simplemente propone a $\psi(\mathbf{x})$ como

$$\psi(\mathbf{x}) = Ae^{i\frac{W(\mathbf{x})}{\hbar}}. \quad (\text{A.2})$$

Substituyendo esta particular elección de ψ en la ecuación (A.1), se encuentra que $W(\mathbf{x})$ satisface la ecuación diferencial:

$$\partial_t W + \frac{1}{2m}(\nabla W)^2 + V - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 W = 0. \quad (\text{A.3})$$

Suponiendo que ψ es una solución estacionaria $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, W se puede expresar como $W(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) - Et$ con $S(\mathbf{x})$ dada por la siguiente ecuación:

$$\varphi(\mathbf{x}) = Ae^{i\frac{S(\mathbf{x})}{\hbar}}. \quad (\text{A.4})$$

Substituyendo la nueva forma de $W(\mathbf{x})$ en la ecuación diferencial (A.3) se obtiene la ecuación diferencial que satisface $S(\mathbf{x})$:

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 - (E - V) - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S = 0. \quad (\text{A.5})$$

Expandiendo a S en serie de potencias de \hbar :

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \dots \quad (\text{A.6})$$

se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales para los dos primeros coeficientes de la serie:

$$\begin{aligned} -S_0'^2 + 2m(E - V) &= 0 \\ iS_0'' - 2S_0'S_1' &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$S_0(\mathbf{x}) = \pm \hbar \int k(\mathbf{x}') dx' \quad (\text{A.7})$$

$$S_1(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \ln k(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

en donde $k(\mathbf{x}) = \hbar^{-1} \sqrt{2m[E - V(\mathbf{x})]}$.

La validez del método WKB impone que S sea una serie decreciente, de tal forma que $\left| \frac{\hbar S_1}{S_0} \right| < 1$ o de manera equivalente:

$$\left| \frac{\hbar S_1'}{S_0'} \right| = \left| \frac{k'}{2k^2} \right| = \left| \frac{\nabla k}{k^2} \right| \ll 1. \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, si se conoce de manera exacta a $k(\mathbf{x})$ y se cumple la condición determinada por la ecuación (A.9), será posible dar una solución aproximada a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo dada por las ecuaciones (A.4), (A.6), (A.7) y (A.8).

Apéndice B

Aproximación de la Iconal

Este método utiliza el método de aproximación WKB expuesto en el apéndice anterior. La aproximación de la Iconal supone que el término constante S_0 del desarrollo en serie de potencias de \hbar que se utiliza en el método WKB [ecuación (A.6)] es el término dominante. También supone que el problema involucra altas energías, es decir, $V(\mathbf{x}) \ll E_n$ en todo punto \mathbf{x} .

Substituyendo la serie (A.6) para S por sólo el término independiente de \hbar , S_0 , en la ecuación (A.4) se obtiene, para la función de onda estacionaria:

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i \frac{S_0(\mathbf{x})}{\hbar}} \quad (\text{B.1})$$

en donde S_0 , según la ecuación (A.5), satisface la ecuación diferencial

$$(\nabla S_0)^2 = 2m [E_n - V(\mathbf{x})] = \hbar^2 k_n^2(\mathbf{x}).$$

Una solución aproximada a esta ecuación diferencial, si se deprecian los términos de orden $m \frac{V^2}{E_n}$ y se hace coincidir al eje x_3 con k_n , es :

$$S_0(\mathbf{x}) = \hbar k_n x_3 - \frac{1}{v_n} \int_{x_{03}}^{x_3} V(x_1, x_2, x'_3) dx'_3$$

con $v_n = \frac{\hbar k_n}{m}$. Esto en la ecuación (B.1) da como resultado para $\psi_n(\mathbf{x})$:

$$\psi_n(\mathbf{x}) = \exp \left[i k_n x_3 - \frac{i}{\hbar v_n} \int_{x_{03}}^{x_3} V(x_1, x_2, x'_3) dx'_3 \right]. \quad (\text{B.2})$$

Substituyendo la ecuación (B.2) en la ecuación para la amplitud de dispersión $f(\theta)$ (ver sección 1.3) que esta dada como

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar} \int e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x$$

se obtiene:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi} \int V(\mathbf{x}) \exp \left[i\mathbf{q}\mathbf{x} - \frac{i}{\hbar v_n} \int_{-\infty}^{x_3} V(x_1, x_2, x_3') dx_3' \right] d^3x$$

en donde se ha impuesto el valor de x_{03} en $-\infty$ para que la ecuación (B.2) sea una función de onda que se desplace hacia afuera del centro dispersor V .

Para ángulos de dispersión θ pequeños con respecto a $(k_n a)^{-1/2}$ con a el alcance del potencial V , el producto $q\mathbf{x} = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3$ se puede aproximar como $q\mathbf{x} = q_1x_1 + q_2x_2$, de tal forma que la amplitud de dispersión, integrando en dx_3 , queda como:

$$f(\theta) = \frac{-ik_n}{2\pi} \int e^{-i(q_1x_1 + q_2x_2)} [F(x_3 = \infty) - F(x_3 = -\infty)] dx_1 dx_2 \quad (\text{B.3})$$

en donde la función $F(x_3)$ se ha definido como

$$F(x_3) = \exp \frac{i}{\hbar v_n} \int_{-\infty}^{x_3} V(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

Haciendo la transformación correcta, la amplitud de dispersión en coordenadas cilíndricas es:

$$f(\theta) = -i\sqrt{\frac{k_n}{2\pi}} \int e^{-iq_1x_1} [F(x_3 = \infty) - F(x_3 = -\infty)] dx_1. \quad (\text{B.4})$$

Si $\psi(\mathbf{x})$ es solución exacta de la ecuación de Schrödinger en un problema de dispersión y se hace la elección

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} F(\mathbf{x}) \quad (\text{B.5})$$

es fácil demostrar que esta función $F(\mathbf{x})$ es exactamente la función $F(\mathbf{x})$ que aparece en la expresión de la amplitud de dispersión [ecuación (B.3)].

Se partirá de la ecuación de Schrödinger

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = \frac{2mV}{\hbar^2}\psi \quad (\text{B.6})$$

cuya solución a distancias grandes R_0 del origen, en términos de una función de onda que avanza hacia el frente en la dirección \mathbf{k}' , es

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int \frac{2mV}{\hbar^2} \psi(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} d^3x'.$$

Substituyendo la ecuación anterior en la ecuación (B.5) se obtiene para la función F :

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int \frac{2mV}{\hbar^2} F(\mathbf{x}') e^{-ik'\cdot\mathbf{x}} d^3x'. \quad (\text{B.7})$$

Substituyendo la ecuación (B.5) en la ecuación de Schrödinger (B.6) resulta que F , despreciando el término en F'' , satisface la ecuación diferencial

$$ik \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{m}{\hbar} V F.$$

Substituyendo esto último en la ecuación (B.7):

$$F(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{-ik_n}{2\pi} \int e^{-i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} [F(x_3 = \infty) - F(x_3 = -\infty)] dx_1 dx_2$$

Comparando esto con la forma asintótica de ψ que generalmente se busca en problemas de dispersión [ver ecuación (1.23)]

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{f(\theta)}{R_0} e^{ikR_0}$$

resulta que la amplitud de dispersión $f(\theta)$ está dada como:

$$f(\theta) = \frac{-ik_n}{2\pi} \int e^{-i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} [F(x_3 = \infty) - F(x_3 = -\infty)] dx_1 dx_2$$

que es exactamente la ecuación (B.3), con lo que se ha demostrado que la función $F(\mathbf{x})$ que aparece en la ecuación (B.5) es precisamente la función $F(\mathbf{x})$ que aparece en la ecuación (B.3).

Apéndice C

Cálculo de algunas integrales

C.1 $\int x e^{-iqx} dx$

$$\begin{aligned}\int x e^{-iqx} dx &= i \frac{\partial}{\partial q} \int e^{-iqx} dx \\ &= 2\pi i \frac{\partial}{\partial q} \delta(q).\end{aligned}$$

Utilizando que la delta de Dirac es proporcional a su derivada:

$$\frac{\partial}{\partial q} \delta(q) = \frac{\delta(q)}{q}$$

finalmente se obtiene

$$\int x e^{-iqx} dx = 2\pi i \frac{\delta(q)}{q}. \quad (\text{C.1})$$

C.2 $\int_{r < r_0} e^{-iq \cdot x} d^2x$

Siendo \mathbf{q} y \mathbf{x} vectores de dos dimensiones, θ el ángulo entre estos y $q = |\mathbf{q}|$, $r = |\mathbf{x}|$:

$$\int_{r < r_0} e^{-iq \cdot x} d^2x = i \frac{\partial}{\partial q_i} \int e^{-iq \cdot x} d^2x$$

$$\begin{aligned}
 &= i \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^2x \\
 &= i \frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos\theta} r dr d\theta \\
 &= i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{r_0} 2\pi J_0(qr) r dr
 \end{aligned}$$

ya que la función de Bessel de orden cero es

$$J_0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iy \cos\theta} d\theta$$

y

$$\frac{\partial q}{\partial q_i} = \frac{q_i}{q}.$$

Con esto:

$$\begin{aligned}
 \int_{r < r_0} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} x_i d^2x &= 2\pi i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{q r_0} \frac{J_0(qr)(qr) d(qr)}{q^2} \\
 &= 2\pi i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{q^2} \int_0^{q r_0} J_0(u) u du.
 \end{aligned}$$

Utilizando la relación entre las funciones de Bessel de orden 0 y 1

$$u J_0(u) = \frac{d[u J_1(u)]}{du}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{r < r_0} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} x_i d^2x &= 2\pi i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{q^2} \int_0^{q r_0} \frac{u J_1(u)}{du} du \\
 &= 2\pi i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{q^2} q r_0 J_1(q r_0) \right] \\
 &= 2\pi i \frac{q_i}{q} r_0^3 \frac{\partial}{\partial(q r_0)} \left[\frac{J_1(q r_0)}{q r_0} \right] \\
 &= 2\pi i \frac{q_i}{q} r_0^3 \left[\frac{J_1'(q r_0)}{q r_0} - \frac{J_1(q r_0)}{(q r_0)^2} \right]
 \end{aligned}$$

pero

$$J_1'(u) = J_0(u) - \frac{J_1(u)}{u}$$

por lo que

$$\int_{r < r_0} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} x_i d^2x = 2\pi i \frac{q_i}{q} r_0^3 \left[\frac{J_0(q r_0)}{q r_0} - 2 \frac{J_1(q r_0)}{(q r_0)^2} \right]. \quad (\text{C.2})$$

$$C.3 \quad \int_{r>r_0} e^{-iqx} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^2x$$

$$\begin{aligned} \int_{r>r_0} e^{-iqx} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^2x &= i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q} \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-iqr \cos \theta}}{r^2} r dr d\theta \\ &= i \frac{q_i}{q} \frac{\partial}{\partial q} 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_0(qr)}{r} dr \\ &= 2\pi i \frac{q_i}{q} r_0 \frac{\partial}{\partial (qr_0)} \int_{qr_0}^{\infty} \frac{J_0(qr)}{qr} d(qr) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{\infty} \frac{J_0(u)}{u} du &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{J_0(u)}{u} du - \int_x^{\infty} \frac{J_0(u)}{u} du \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[- \int_{\infty}^{x+\epsilon} \frac{J_0(u)}{u} du - \int_x^{\infty} \frac{J_0(u)}{u} du \right] \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} \frac{J_0(u)}{u} du \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{J_0(x + \epsilon/2)}{x + \epsilon/2} \epsilon \\ &= - \frac{J_0(x)}{x} \end{aligned}$$

Poniendo $x = qr_0$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_{r>r_0} e^{-iqx} \frac{x_i}{x_i^2 + x_j^2} d^2x = -2\pi i \frac{q_i}{q} \frac{J_0(qr_0)}{q} \quad (C.3)$$

Apéndice D

Cálculo de $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$

Primero se verá que la cantidad $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$ se puede expresar en términos de la traza de los operadores de proyección de energía y espín. Definase por ahora $\Gamma = \not{A}$, entonces

$$\begin{aligned} |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 &= [\bar{u}_f \Gamma u_i][\bar{u}_f \Gamma u_i]^\dagger \\ &= \bar{u}_f \Gamma u_i u_i^\dagger \Gamma^\dagger \bar{u}_f^\dagger \\ &= \bar{u}_f \Gamma u_i u_i^\dagger \Gamma^\dagger \gamma^0 u_f \\ &= \bar{u}_f \Gamma u_i u_i^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u_f \\ &= \bar{u}_f \Gamma u_i \bar{u}_i \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u_f \\ &= \bar{u}_f \Gamma u_i \bar{u}_i \bar{\Gamma} u_f \\ &= \bar{u}_{f\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} u_{i\beta} \bar{u}_{i\delta} \bar{\Gamma}_{\delta\epsilon} u_{f\epsilon} \\ &= u_{f\epsilon} \bar{u}_{f\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} u_{i\beta} \bar{u}_{i\delta} \bar{\Gamma}_{\delta\epsilon} \\ &= Tr[u_f \bar{u}_f \Gamma u_i \bar{u}_i \bar{\Gamma}] \\ &= Tr[P_f \Gamma P_i \bar{\Gamma}] \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado que

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0 \\ (\gamma^0)^2 &= 1 \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \\ \bar{\Gamma} &= \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \end{aligned}$$

y en donde P_j, P_i son los proyectores de energía y espín definidos por

$$P = u\bar{u} = \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \not{p}}{2}.$$

Como $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$ entonces $\bar{\Gamma} = \not{p}^*$ en donde el símbolo * significa tomar el conjugado complejo.

D.1 Algebra de Dirac y teoremas de trazas

El anticonmutador entre las matrices γ de Dirac es:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

en donde $g^{\mu\nu}$ son los elementos de la matriz dioagonal g de 4×4 :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se define γ^5 como

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

que anticonmuta con cualquier matriz de Dirac, es decir

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Algunos teoremas de trazas que serán útiles más adelante se enuncian a continuación:

$$\begin{aligned} Tr 1 &= 4 \\ Tr \gamma^5 &= 0 \\ Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n+1}] &= 0 \\ Tr[\not{a}\not{b}] &= 4ab \\ Tr[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)] \\ Tr[\gamma^5 \not{a}] &= 0 \\ Tr[\gamma^5 \not{a}\not{b}] &= 0 \\ Tr[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}] &= 0 \\ Tr[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= 4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta. \end{aligned}$$

D.2 Primer método para calcular $|\bar{u}_f \not{A} u_i|^2$

En esta sección se calcula la traza $\text{Tr}[P_f \not{A} P_i \not{A}^*]$ con el método tradicional, como lo hacen Bjorken y Drell [3]. En muchos de los pasos que a continuación se presentan se utilizaron los teoremas de trazas enunciados en la sección anterior y el hecho de que $p_i s_i = p_f s_f = 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[P_f \Gamma P_i \bar{\Gamma}] &= \text{Tr} \left[\frac{m + \not{p}_f}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \not{k}_f}{2} \not{A} \frac{m + \not{p}_i}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \not{k}_i}{2} \not{A}^* \right] \\
 &= \frac{1}{16m^2} \text{Tr}[(m + \not{p}_f)(1 + \gamma^5 \not{k}_f) \not{A} (m + \not{p}_i)(1 + \gamma^5 \not{k}_i) \not{A}^*] \\
 &= \frac{1}{16m^2} \text{Tr}[m^2 \not{A} \not{A}^* + m \not{A} \not{p}_i \gamma^5 \not{k}_i \not{A}^* + m \not{p}_f \not{A} \gamma^5 \not{k}_i \not{A}^* \\
 &\quad + \not{p}_f \not{A} \not{p}_i \not{A}^* + m^2 \gamma^5 \not{k}_f \not{A} \gamma^5 \not{k}_i \not{A}^* \\
 &\quad + m \gamma^5 \not{k}_f \not{A} \not{p}_i \not{A}^* + m \not{p}_f \gamma^5 \not{k}_i \not{A} \not{A}^* \\
 &\quad + m \not{p}_f \gamma^5 \not{k}_i \not{A} \not{p}_i \gamma^5 \not{k}_i \not{A}^*] \\
 &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr}\{m^2 q_a + m i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} q^\alpha p_i^\beta s_i^\gamma q^\delta + m i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_f^\alpha q^\beta s_f^\gamma q^\delta \\
 &\quad + (p_f q)(p_i q^*) - (p_f p_i)(q q^*) + (p_f q^*)(p_i q) \\
 &\quad + m^2 [(s_f q)(s_i q^*) - (s_f s_i)(q q^*) + (s_f q^*)(s_i q)] \\
 &\quad + m i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} s_f^\alpha q^\beta p_i^\gamma q^\delta - m i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_f^\alpha s_f^\beta q^\gamma q^\delta \\
 &\quad - (p_f q^*)[(s_f p_i)(q s_i) + (s_f s_i)(q p_i)] \\
 &\quad + (p_f s_i)[(s_f q)(p_i q^*) - (s_f p_i)(q q^*) + (s_f q^*)(p_i q)] \\
 &\quad - (p_f p_i)[(s_f q)(s_i q^*) - (s_f s_i)(q q^*) + (s_f q^*)(s_i q)] \\
 &\quad + (p_f q)[(s_f p_i)(s_i q^*) + (s_f s_i)(p_i q^*)]\}.
 \end{aligned}$$

Reacomodando términos finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
 4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 &= (1 - s_f s_i)[q^* q(m^2 - p_f p_i) + (p_i q^*)(p_f q) + (p_f q^*)(p_i q)] \\
 &\quad + (p_i s_f)[(p_f q)(s_i q^*) + (p_f q^*)(s_i q) - (q^* q)(p_f s_i)] \\
 &\quad + (p_f s_i)[(p_i q^* s_f q) + (p_i q)(s_f q^*)] \\
 &\quad + (m^2 - p_f p_i)[(s_i q^*)(s_f q) + (s_f q^*)(s_i q)] \\
 &\quad + i m \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (p_i - p_f)^\alpha (s_i + s_f)^\beta q^\gamma q^\delta. \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

Si en particular $q = q^*$, es decir q es real, la ecuación anterior se reduce

$$4m^2 |\bar{u}_f \not{A} u_i|^2 = (1 - s_f s_i)[q^2(m^2 - p_f p_i) + 2(p_i q)(p_f q)]$$

$$+2(p_i s_j)(p_j q)(s_i q) + 2(p_j s_i)(p_i q)(s_j q) - q^2(p_i s_j)(p_j s_i) + 2(m^2 - p_j p_i)(s_i q)(s_j q). \quad (\text{D.2})$$

D.3 Segundo método para calcular $|\bar{u}_f \not{q} u_i|^2$

En esta sección se presenta el cálculo de $\text{Tr}[P_f \Gamma P_i \bar{\Gamma}]$ utilizando el método de multiplicación de n matrices γ de Dirac propuesto por M. Moreno [4] en el que utiliza una expresión general para cualquier elemento del álgebra de Dirac en términos de una base covariante.

Defínase

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

con $[A, B] = AB - BA$ el conmutador entre A y B .

En términos de las matrices $1, \gamma^\mu, \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}$ cualquier elemento Γ del álgebra de Dirac estará dado por:

$$\Gamma = S + iP\gamma^5 + V_\mu\gamma^\mu + iA_\mu\gamma^5\gamma^\mu - \frac{i}{2}T_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (\text{D.3})$$

en donde los coeficientes de expansión son en general complejos y se transforman como un escalar S , un pseudoescalar P , un vector V_μ , un vector-axial A_μ y un tensor antisimétrico de orden dos $T_{\mu\nu}$.

Definiendo el dual de segundo orden como

$$\bar{D}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}D^{\alpha\beta}$$

el producto entre dos elementos del álgebra de Dirac es:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \Gamma_2 &= \left(S_1 + iP_1\gamma^5 + V_{1\alpha}\gamma^\alpha + iA_{1\alpha}\gamma^5\gamma^\alpha - \frac{i}{2}T_{1\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \right) \times \\ &\quad \times \left(S_2 + iP_2\gamma^5 + V_{2\mu}\gamma^\mu + iA_{2\mu}\gamma^5\gamma^\mu - \frac{i}{2}T_{2\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \\ &= \left(S_1 S_2 - P_1 P_2 + V_1 \cdot V_2 + A_1 \cdot A_2 - \frac{1}{2}T_{1\alpha\beta}T_2^{\alpha\beta} \right) \\ &\quad + i \left(S_1 P_2 + P_1 S_2 + A_1 \cdot V_2 - V_1 \cdot A_2 + \frac{1}{2}\bar{T}_{1\alpha\beta}T_2^{\alpha\beta} \right) \gamma^5 \\ &\quad + (S_1 V_{2\alpha} + V_{1\alpha} S_2 + A_{1\alpha} P_2 - P_1 A_{2\alpha} + T_{1\alpha\mu} V_2^\mu + \\ &\quad \quad + V_1^\mu \bar{T}_{1\alpha\mu} A_2^\alpha - A_1^\mu \bar{T}_{2\mu\alpha}) \gamma^\alpha \\ &\quad + i \left(P_1 V_{2\alpha} - V_{1\alpha} P_2 + S_1 A_{2\alpha} + A_{1\alpha} S_2 - \bar{T}_{1\alpha\mu} V_2^\mu + V_1^\mu \bar{T}_{2\mu\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + T_{1\alpha\mu}A_2^\mu + A_1^\mu T_{2\mu\alpha} \gamma^5 \gamma^\alpha \\
 & - \frac{i}{2} \left(2V_{1\alpha}V_{2\beta} - 2V_{1\alpha}\tilde{A}_{2\beta} + 2A_{1\alpha}\tilde{V}_{2\beta} + 2A_{1\alpha}A_{2\beta} \right. \\
 & \quad \left. + T_{1\alpha\beta}S_2 + S_1T_{2\alpha\beta} + \tilde{T}_{1\alpha\beta}P_2 + P_1\tilde{T}_{2\alpha\beta} + 2T_{1\alpha\mu}T_{2\beta}^\mu \right) \sigma^{\alpha\beta}.
 \end{aligned}
 \tag{D.4}$$

Como se observó al principio de este apéndice:

$$|\bar{u}_f \Gamma u_i|^2 = \text{Tr}[\mathbf{P}_f \Gamma \mathbf{P}_i \bar{\Gamma}] \tag{D.5}$$

con $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ y $\mathbf{P}_f, \mathbf{P}_i$ los proyectores de energía y espín definidos por

$$\mathbf{P} = u\bar{u} = \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma^5 \not{f}}{2}.$$

$\bar{\Gamma}$ también se puede escribir en la base covariante como

$$\bar{\Gamma} = \bar{S} + i\bar{P}\gamma^5 + \bar{V}_\mu\gamma^\mu + i\bar{A}_\mu\gamma^5\gamma^\mu - \frac{i}{2}\bar{T}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \tag{D.6}$$

en donde

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= S^* \\
 \bar{P} &= P^* \\
 \bar{V}_\mu &= V^*{}_\mu \\
 \bar{A}_\mu &= -A^*{}_\mu \\
 \bar{T}_{\mu\nu} &= -T^*{}_{\mu\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{D.7}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
 \Gamma_i &\equiv \mathbf{P}_i \bar{\Gamma} \\
 \Gamma_f &\equiv \mathbf{P}_f \Gamma
 \end{aligned}$$

y utilizando la forma general para el producto entre dos elementos del álgebra de Dirac en términos de la base covariante [ecuación (D.4)] y el hecho de que el único elemento de la base con traza no nula es la matriz identidad 1, la ecuación (D.5) se reduce a:

$$|\bar{u}_f \Gamma u_i|^2 = 4 \left(S_f S_i - P_f P_i + V_f \cdot V_i + A_f \cdot A_i - \frac{1}{2} T_{f\alpha\beta} T_i^{\alpha\beta} \right). \tag{D.8}$$

Primero se calcularán los coeficientes del proyectador \mathbf{P} en la base covariante. Obsérvese que el proyectador \mathbf{P} es un producto del proyectador de energía Λ con el proyectador de polarización o espín Σ :

$$\mathbf{P} = \Lambda \Sigma$$

en donde

$$\Lambda = \frac{\not{p} + m}{2m} = S_{\Lambda} + V_{\Lambda\mu} \gamma^{\mu}$$

$$\Sigma = \frac{1 + \gamma^5 \not{s}}{2} = S_{\Sigma} + A_{\Sigma\mu} s^{\mu}$$

con

$$S_{\Lambda} = \frac{1}{2} ; \quad V_{\Lambda\mu} = \frac{p_{\mu}}{2m}$$

$$S_{\Sigma} = \frac{1}{2} ; \quad A_{\Sigma\mu} = \frac{s_{\mu}}{2i}$$

Utilizando la ecuación (D.4), el proyectador \mathbf{P} se puede reescribir como:

$$\mathbf{P} = \Lambda \Sigma = \frac{1}{4} + \frac{p_{\mu}}{4m} \gamma^{\mu} + i \frac{s_{\mu}}{4i} \gamma^5 \gamma^{\mu} - \frac{i}{2} \frac{1}{4mi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\alpha} s^{\beta} \sigma^{\mu\nu}$$

con lo que

$$S_{\Lambda\Sigma} = \frac{1}{4}$$

$$V_{\Lambda\Sigma\mu} = \frac{p_{\mu}}{4m}$$

$$A_{\Lambda\Sigma\mu} = \frac{s_{\mu}}{4i}$$

$$T_{\Lambda\Sigma\mu\nu} = \frac{1}{4mi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\alpha} s^{\beta}$$

A continuación se encontrará $\mathbf{P}\Gamma$ utilizando de nuevo la ecuación (D.4) y tomando en cuenta que en este trabajo interesa tomar $\Gamma = \not{q} = q_{\mu} \gamma^{\mu}$:

$$\mathbf{P}\not{q} = \frac{q \cdot p}{4m} + i \frac{q \cdot s}{4i} \gamma^5 + \left(\frac{q_{\mu}}{4} + \frac{1}{4mi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^{\alpha} s^{\beta} q^{\nu} \right) \gamma^{\mu}$$

$$+ i \left(-\frac{1}{8mi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\rho\delta} p_{\rho} s_{\delta} q^{\nu} \right) \gamma^5 \gamma^{\mu}$$

$$- \frac{i}{2} \left(\frac{p_{\mu} q_{\nu}}{4m} - \frac{p_{\nu} q_{\mu}}{4m} + \frac{1}{4i} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s^{\alpha} q^{\beta} \right) \sigma^{\mu\nu}$$

$$= S + iP\gamma^5 + V_{\mu} \gamma^{\mu} + iA_{\mu} \gamma^5 \gamma^{\mu} - \frac{i}{2} T_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$$

La ecuación anterior define los coeficientes del desarrollo en la base covariante para cada término $\mathbf{P}_f \mathbf{f}$ y $\mathbf{P}_i \mathbf{f}^*$ como:

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{q \cdot p_f}{4m} & S_i &= \frac{q^* \cdot p_i}{4m} \\ P_f &= \frac{q^* \cdot s_f}{4i} & P_i &= \frac{q^* \cdot s_i}{4i} \\ V_{f\mu} &= \frac{q_\mu}{4} + \frac{1}{4mi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_f^\alpha s_f^\beta q^\nu & V_{i\mu} &= \frac{q_\mu^*}{4} + \frac{1}{4mi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_i^\alpha s_i^\beta q^{*\nu} \\ A_{f\mu} &= -\frac{1}{4m} \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} p_f^\rho s_f^\sigma q^\nu & A_{i\mu} &= -\frac{1}{4m} \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} p_i^\rho s_i^\sigma q^{*\nu} \\ T_{f\mu\nu} &= \frac{p_{f\mu} q_\nu}{4m} - \frac{p_{f\nu} q_\mu}{4m} + \frac{1}{4i} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s_f^\alpha q^\beta & T_{i\mu\nu} &= \frac{p_{i\mu} q_\nu^*}{4m} - \frac{p_{i\nu} q_\mu^*}{4m} + \frac{1}{4i} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} s_i^\alpha q^{*\beta} \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = -\delta_{\nu'\alpha'\beta'}^{\mu'\alpha'\beta'} = \delta_{\nu'}^{\mu'} \delta_{\alpha'\beta'}^{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha'}^{\mu'} \delta_{\nu'\beta'}^{\alpha'\beta'} - \delta_{\beta'}^{\mu'} \delta_{\nu'\alpha'}^{\alpha'\beta'}$$

con

$$\delta_{\alpha'\beta'}^{\alpha'\beta'} = \delta_{\alpha'}^{\alpha'} \delta_{\beta'}^{\beta'} - \delta_{\beta'}^{\alpha'} \delta_{\alpha'}^{\beta'}$$

y que $p_i s_i = p_f s_f = 0$.

Calcular $\text{Tr}[P_f \mathbf{f} P_i \mathbf{f}^*]$ se reduce a substituir los coeficientes para $\mathbf{P}_f \mathbf{f}$ y $\mathbf{P}_i \mathbf{f}^*$ en la ecuación (D.8). Después de un poco de álgebra se encuentra que cada término es:

$$\begin{aligned} S_f S_i &= \frac{1}{16m^2} (q^* \cdot p_i) (q \cdot p_f) \\ -P_f P_i &= \frac{1}{16} (q^* \cdot s_i) (q \cdot s_f) \\ 16V_f \cdot V_i &= q^* \cdot q - \frac{1}{m^2} [(p_f p_i) (s_f s_i) (q^* \cdot q) \\ &\quad - (p_f s_i) (s_f p_i) (q^* \cdot q) - (p_f q^*) (s_f s_i) (p_i \cdot q) + (p_f q^*) (s_f p_i) (s_i \cdot q) \\ &\quad - (p_f p_i) (s_f q^*) (s_i \cdot q) + (p_f s_i) (s_f q^*) (p_i \cdot q)] \\ &\quad - \frac{i}{m} (p_f^\sigma s_f^\beta - p_i^\alpha s_i^\beta) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{*\nu} q^\mu \\ A_f \cdot A_i &= -\frac{1}{16m^2} [(p_f p_i) (s_f q) (s_i \cdot q^*) - (p_f s_i) (s_f q) (p_i \cdot q^*) \\ &\quad - (p_f q) (s_f p_i) (s_i \cdot q^*) + (p_f q) (s_f s_i) (p_i \cdot q^*)] \\ -\frac{1}{2} T_{f\alpha\beta} T_i^{\alpha\beta} &= \frac{1}{16m^2} [(p_f q^*) (p_i \cdot q) - (p_f p_i) (q^* \cdot q)] \\ &\quad + \frac{1}{16} [(s_f q^*) (s_i \cdot q) - (s_f s_i) (q^* \cdot q)] \\ &\quad + \frac{i}{16m} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q^{*\nu} q^\mu (p_i^\sigma s_f^\beta - p_f^\sigma s_i^\beta). \end{aligned}$$

Substituyendo en la ecuación (D.8) finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
 4m^2 \text{Tr}[P_f \not{P}_i P_i \not{P}_f^*] &= 4 \left(S_f S_i - P_f P_i + V_f \cdot V_i + A_f \cdot A_i - \frac{1}{2} T_{f\alpha\beta} T_i^{\alpha\beta} \right) \\
 &= (1 - s_f s_i) [q^* q (m^2 - p_f p_i) + (p_i q^*) (p_f q) + (p_f q^*) (p_i q)] \\
 &\quad + (p_i s_f) [(p_f q) (s_i q^*) + (p_f q^*) (s_i q) - (q^* q) (p_f s_i)] \\
 &\quad + (p_f s_i) [(p_i q^*) (s_f q) + (p_i q) (s_f q^*)] \\
 &\quad + (m^2 - p_f p_i) [(s_i q^*) (s_f q) + (s_f q^*) (s_i q)] \\
 &\quad + i m \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (p_i - p_f)^\alpha (s_i + s_f)^\beta q^{*\nu} q^\mu
 \end{aligned}
 \tag{D.9}$$

que es precisamente la ecuación (D.1) que se obtuvo en la sección anterior utilizando el método tradicional.

Como se pudo apreciar, este segundo método para calcular $|\bar{u}_f \not{P}_i u_i|^2$ resultó un poco menos enredado que el primero, pues mientras que en el primer método hay que calcular todas las trazas que aparecen en el cálculo, en este segundo método todo se reduce a identificar los coeficientes de la expansión en la base covariante ($S, P, V_\mu, A_\mu, T_{\mu\nu}$) y calcular una suma de tan sólo cinco productos de la forma

$$S_f S_i - P_f P_i + V_f \cdot V_i + A_f \cdot A_i - \frac{1}{2} T_{f\alpha\beta} T_i^{\alpha\beta}.$$

Bibliografía

- [1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non relativistic theory)* (Pergamon Press, Oxford, 1977)
- [2] Aharonov y Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959)
- [3] J. D. Bjorken y S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [4] Matías Moreno, J. Math. Phys. **26**, 576 (1985)
- [5] L.L. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw Hill, USA, 1968)
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics (Vol. 1)* (Wiley-Interscience, Paris, 1977)
- [7] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, Oxford, 1970)