

003625

21.



Universidad Nacional Autónoma
de México

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**GRUPOS DE GIRO CON SIMETRIA SIMPLECTICA
EN LA DINAMICA DE SISTEMAS LINEALES
CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A

ERNESTO RIVERA ONTIVEROS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERMIN VINIEGRA HEBERLEIN

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**MI agradecimiento al Dr. Fermín Viniegra Heberlein por su
aportación y estímulo en la elaboración de este trabajo.**

**MI agradecimiento a la M. en C. Christine Allen Armijo
por sus valiosas sugerencias y comentarios.**

A la memoria de mi padre.

A la computadora digital y al motor de avance por pasos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN1
CAPÍTULO 1. CONCEPTOS GENERALES3
CAPÍTULO 2. SISTEMAS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD12
2.1 La Matriz de Transición	
Representaciones Isomórficas de los Números Complejos.12
El Oscilador Armónico Amortiguado.13
La Matriz de Transición en el Espacio Fase.14
2.2 Aplicaciones y Desarrollos en un Grado de Libertad21
Áreas y Longitudes de Arco.21
Números Pitagóricos.22
Síntesis de Fourier.23
El Teorema de Shannon.24
La Matriz de Transferencia.26
Transformación de Laplace.27
Raíces Múltiples28
CAPÍTULO 3. GENERALIZACIÓN A VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.29
3.1 Sistemas con Dos Grados de Libertad.29
Efectos de la Disipación.40
3.2 Sistemas con n Grados de Libertad.43
CAPÍTULO 4. EJEMPLOS EN SISTEMAS FÍSICOS REALES49
El Péndulo Doble.49
Sistema de Circuitos Acoplados.55
Controlador con 2 Grados de Libertad.61
CONCLUSIONES66
<i>Bibliografía</i>68

INTRODUCCIÓN

Física de Transiciones en Espacio Fase y su Aplicación a los Sistemas Lineales.

Mientras que la física hace uso profusamente de la continuidad, este punto de vista no es exactamente el mas natural para la computadora porque la computadora digital es una máquina de transiciones que se suceden con los cambios en los niveles de voltaje de una señal de reloj. En este trabajo se desarrolla un método para poner la solución de complicadas dinámicas en una manera especialmente natural para el cálculo por computadora.

El espacio fase tiene la interesante propiedad de convertir en geométricos algunos conceptos físicos. Por ejemplo, En el caso de los sistemas lineales conservativos, la hamiltoniana (que usualmente coincide con la energía) es una forma cuadrática cuyo valor no cambia con el tiempo. También las ecuaciones del movimiento toman un sentido geométrico porque la derivada de esta forma cuadrática (que es lineal) representa una transformación lineal. La idea fundamental de este trabajo es definir un grupo con la propiedad de dejar invariante la hamiltoniana (grupo ortogonal en el espacio fase) con la propiedad de que la transformación sea también canónica (grupo simpléctico). Esto resulta tener un significado físico trascendental y su estudio conduce a aplicaciones gráficas y de computación de una simplicidad impresionante.

El método también tiene algunas implicaciones filosóficas sobre la continuidad. El método de exponenciales complejas dependientes del tiempo requiere que el tiempo sea continuo mientras que el de la matriz de transición no requiere esta hipótesis.

Se compara el efecto de multiplicar un vector por un número complejo (cambiarlo en amplitud y fase) en dos dimensiones con el efecto de multiplicar un vector de varias dimensiones por una matriz de rotación (giro) y multiplicar por una transformación cuyo efecto es una contracción. Se define el giro simpléctico amortiguado como una generalización de los números complejos a n dimensiones.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS GENERALES

Este capítulo es un extracto de los capítulos 8 y 9 del libro *Mecánica Clásica* de H. Goldstein, segunda edición (referencia [1])

El capítulo 8 se llama "Ecuaciones de movimiento de Hamilton" y en la introducción habla de que nadie usa las ecuaciones en forma canónica para resolver problemas reales, porque se prefiere la formulación de Lagrange. Pero enfatiza la utilidad de la formulación canónica en la fundamentación de la Mecánica Estadística y Cuántica así como en la teoría de Hamilton-Jacobi.

En este trabajo se pretende mostrar que las ecuaciones canónicas son especialmente convenientes para la solución de problemas prácticos por medio del cálculo electrónico o numérico o para representar la cinemática de mecanismos actuados por motores de avance por pasos.

Transformaciones de Legendre y Ecuaciones de Movimiento de Hamilton.

En la formulación de Lagrange no relativista, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de movimiento de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \dots(1.1)$$

Como las ecuaciones son de segundo orden, el movimiento del sistema estará siempre determinado cuando se especifiquen $2n$ valores iniciales, p.ej., las n q_i y las n \dot{q}_i , en un instante particular t , o las n q_i en dos instantes t_1 y t_2 . El estado del sistema lo representamos por un punto en el *espacio de las configuraciones* de n

dimensiones cuyas coordenadas son las n coordenadas generalizadas q , y seguimos el movimiento del punto figurativo del sistema en el transcurso del tiempo cuando recorre su trayectoria en el espacio de las configuraciones. Físicamente, desde el punto de vista de Lagrange, un sistema con n grados de libertad independientes es un problema de n variables independientes $q, (t)$ y \dot{q} , solo es una abreviatura de la derivada de q , respecto al tiempo.

La formulación de Hamilton se basa en una visión fundamentalmente diferente. Queremos describir el movimiento mediante ecuaciones de movimiento de *primer orden*. Como el número de condiciones iniciales que determinan el movimiento ha de seguir siendo $2n$, deberá haber $2n$ ecuaciones independientes de primer orden expresadas en función de $2n$ variables independientes. Por tanto, las $2n$ ecuaciones del movimiento describen el comportamiento del punto figurativo del sistema en un *espacio físico* cuyas coordenadas son las $2n$ variables independientes. En una tal duplicación de nuestro sistema de cantidades independientes es natural tomarlas de manera que la mitad de ellas sean las n coordenadas generalizadas q . Según veremos la formulación resulta casi simétrica si tomamos para la otra mitad las *cantidades de movimiento conjugadas* o generalizadas p ,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{A}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \dots\dots(1.2)$$

Las cantidades (q, p) se denominan *variables canónicas*.

Sin embargo desde un punto de vista matemático, podemos pretender que se traten como variables distintas las q y las \dot{q} . En las ecuaciones de Lagrange (1.1), la derivada parcial de L respecto a q , significa una derivada calculada considerando constantes todas las demás q y todas las \dot{q} . Análogamente, en las derivadas parciales respecto a \dot{q} , se mantienen constantes todas las q . Tratada estrictamente como problema matemático, la transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton corresponde a cambiar las variables de nuestras funciones mecánicas de (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) , donde p está relacionada con q y \dot{q} mediante las ecuaciones (1.1) y (1.2). El método para conmutar las variables de esta

manera lo proporciona la *transformación de Legendre*, planeada precisamente para este tipo de cambio de variable.

Consideremos una función de sólo dos variables $f(x,y)$, con lo que la diferencial de f tendrá la forma

$$df = udx + vdy \quad \dots(1.3)$$

donde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad \dots(1.4)$$

Queremos ahora cambiar a la base de descripción de x,y a un nuevo conjunto distinto de variables u,v de manera que las cantidades diferenciales se expresen en función de las diferenciales du y dv . Sea g una función de u e y definida por la ecuación

$$g = f - ux. \quad \dots(1.5)$$

Entonces, la diferencial de g vendrá dada por

$$dg = df - udx - xdu$$

o según (1.3) ,

$$dg = vdy - xdu,$$

que tiene ahora exactamente la forma buscada. Las cantidades x y v son ahora funciones de u e y dadas por las relaciones

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \dots(1.6).$$

que son de hecho las inversas de las ecuaciones (1.4).

La transformación de Legendre así definida se utiliza frecuentemente en Termodinámica. Por ejemplo, la entalpia X es función de la entropía S y de la presión P con las propiedades

$$\frac{\partial X}{\partial S} = T, \frac{\partial X}{\partial P} = V,$$

con lo cual

$$dX = TdS + VdP,$$

donde T y V son la temperatura y el volumen, respectivamente. La entalpia es útil al considerar procesos isentrópicos e isobáricos, si bien a menudo hay que tratar procesos isotérmicos e isobáricos. En tal caso necesitamos una función termodinámica de T y P solamente. La transformación de Legendre demuestra que la función buscada puede definirse en la forma

$$G = X - TS$$

siendo

$$dG = -SdT + VdP, \quad \dots(1.7)$$

donde G es la conocida función de Gibbs, o energía libre cuyas propiedades vienen dadas correctamente por la ecuación (1.7).

La transformación de (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) sólo se diferencia del tipo considerado en las ecuaciones (1.3) a (1.5) en que hay que transformar más de una variable. En vez de la lagrangiana nos encontramos ante una función definida en analogía con la ecuación (1.5), salvo un signo menos:

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t) \quad \dots(1.8)$$

(donde se ha empleado el convenio de la suma). Aquí, H recibe el nombre de *hamiltoniana*. Considerada función de q , p y t solamente, la diferencial de H viene dada por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad \dots(1.9)$$

pero según la ecuación (1.8) podemos también escribir

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad \dots(1.10)$$

Los términos en que figura $d\dot{q}_i$, en la ecuación (1.10) se destruyen a consecuencia de la definición de cantidad de movimiento generalizada y de la ecuación de Lagrange se deduce que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i.$$

Por tanto la ecuación (1.10) se reduce a la forma sencilla

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \dots(1.11)$$

Comparando con la expresión (1.9) obtenemos el siguiente conjunto de $2n+1$ relaciones, en analogía con las ecuaciones de (1.6)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dots(1.12a)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dots(1.12b)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \dots(1.13)$$

Las ecuaciones (1.12ab) son llamadas ecuaciones canónicas de Hamilton; constituyen el sistema buscado de $2n$ ecuaciones de movimiento de primer orden que sustituyen a las ecuaciones de Lagrange.

La primera mitad de las ecuaciones de Hamilton da las \dot{q}_i , en función de las variables (q, p, t) . Por tanto constituyen la inversa de las ecuaciones constitutivas (1.2) que definen las cantidades de movimiento p_i en función de (q, \dot{q}, t) . Podemos, pues, decir que no proporcionan nueva información. Por lo que se refiere a resolver problemas mecánicos mediante las ecuaciones canónicas, el planteamiento es correcto. Pero dentro del marco hamiltoniano, donde $H(q, p, t)$ es una cierta función dada que no importa cómo se ha obtenido, las dos mitades del sistema de ecuaciones de Hamilton son igualmente independientes y significativas. La primera mitad dice cómo depende \dot{q} de q, p y t y la segunda dice lo mismo para \dot{p} .

Nominalmente, deberemos construir la hamiltoniana para cada problema a través de la formulación de Lagrange. El método formal requiere una larga secuencia de pasos:

1. Elegido un sistema de coordenadas generalizadas, q_i , se construye la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

2. Mediante las ecuaciones (1.2) se definen las cantidades de movimiento conjugadas en función de q_i , \dot{q}_i y t .

3. Se utiliza la ecuación (1.8) para formar la hamiltoniana.

4. Se invierten entonces las ecuaciones (1.2) para obtener las \dot{q}_i en función de (q, p, t) .

5. Se aplican los resultados del paso anterior para eliminar de H las \dot{q}_i de manera que quede expresada tan solo en función de (q, p, t) .

Para un sistema de n grados de libertad, construyamos una matriz columna η con $2n$ elementos tales que

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+n} = p_i; \quad i \leq n. \quad \dots(1.14)$$

Análogamente, la matriz columna $\frac{\partial H}{\partial \eta}$ tiene los elementos

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \leq n. \quad \dots(1.15)$$

Por último sea J la matriz cuadrada $2n \times 2n$ compuestas por las matrices $n \times n$ de ceros y unidad según el esquema

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \quad \dots(1.16)$$

En donde 0 es la matriz $n \times n$ cuyos elementos son todos ceros y E es la matriz unidad

$n \times n$. Las ecuaciones de movimiento de Hamilton pueden entonces escribirse en forma compacta de la manera siguiente:

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad \dots(1.17)$$

A este método de presentación de las ecuaciones del movimiento canónicas el le da el nombre de ecuaciones de Hamilton en notación matricial o *simpléctica*.¹ En todo este trabajo se usa esta representación de las ecuaciones de movimiento. Para su uso posterior es conveniente señalar ciertas propiedades de J que son fácilmente comprobables. La matriz (no tiene ningún nombre aceptado universalmente) es una especie de versión $2n \times 2n$ del producto de i por la matriz de Pauli σ_2 (ver Goldstein op. cit. ec 4-74) y por tanto, su cuadrado será la matriz de $2n \times 2n$ unidad con signo contrario:

$$J^2 = -E \quad \dots(1.18)$$

Es también ortogonal:

$$\bar{J}J = E \quad \dots(1.19)$$

con lo cual

$$\bar{J} = -J = J^{-1} \quad \dots(1.20)$$

También es fácil demostrar que el determinante de J es 1:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & E \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} = 1$$

por lo tanto:

$$\det J = 1 \quad \dots(1.21)$$

Para investigar la condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica procedemos a partir de las ecuaciones (1.17) e introducimos una nueva variable ζ que es una matriz columna de $2n$ elementos y en el caso de transformaciones restringidas (independientes del tiempo). La transformación se puede escribir en la forma

$$\zeta = \zeta(\eta) \quad \dots(1.22)$$

derivando respecto al tiempo :

¹ El término *simpléctica* proviene del griego y significa <<entrelazada>>. Resulta particularmente apropiado para las ecuaciones de Hamilton en donde \dot{q} se aparea con una derivada respecto a p y análogamente, \dot{p} con una derivada respecto a q . H. Weyl introdujo este término en 1939 en su libro *The Classical Groups*.

$$\dot{\zeta}_j = \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_1} \dot{\eta}_1, \quad i, j = 1, \dots, 2n.$$

En notación matricial, esta derivada respecto al tiempo podrá escribirse

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta} \quad \text{.....(1.23)}$$

donde M es la matriz jacobiana de la transformación, cuyos elementos son los siguientes:

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \quad \text{.....(1.24)}$$

Utilizando las ecuaciones de movimiento para η , la ecuación (1.23) queda en la forma

$$\dot{\zeta} = MJ \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad \text{.....(1.25)}$$

Ahora bien, mediante la transformación inversa podemos considerar H como función de ζ y calcular la derivada respecto a η , en la forma

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i},$$

o, en notación matricial

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad \text{.....(1.26)}$$

La combinación de ecuaciones (1.25) y (1.26) lleva de las ecuaciones del movimiento para un sistema cualquiera de variables ζ que se transforman independientemente del tiempo, a partir del sistema canónico η :

$$\dot{\zeta} = MJ\tilde{M} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad \text{.....(1.27)}$$

Tenemos la ventaja de saber a partir del formalismo generador que el caso de una transformación canónica restringida, la hamiltoniana antigua expresada en función de las nuevas variables sirve de hamiltoniana nueva:

$$\dot{\zeta} = J \frac{\partial H}{\partial \zeta}.$$

La transformación de la ecuación (1.22) será, pues, canónica si M cumple la condición

$$MJ\tilde{M} = J \quad \dots\dots(1.28)$$

Que al ecuación (1.28) es también condición necesaria para una transformación canónica restringida se demuestra directamente con facilidad invirtiendo el orden de los pasos de la demostración.

En el caso de que M sea una matriz ortogonal (en particular un giro lo es)

$$M\tilde{M} = \tilde{M}M = E \quad \dots\dots(1.29)$$

Por lo que la condición simpléctica implica que M conmuta con J . Lo que se puede ver multiplicando la condición simpléctica por M por la derecha y usando la ecuación (1.29):

$$MJ = JM \quad \dots\dots(1.30)$$

En este capítulo se resumen los fundamentos teóricos para el resto del presente trabajo, un tratamiento mas detallado y con ejemplos se puede encontrar en el libro antes mencionado.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

2.1 La Matriz de Transición.

Representaciones Isomórficas de los Números Complejos

Este trabajo se basa en una generalización de el isomorfismo¹ que existe entre el plano complejo y el espacio vectorial de las matrices de 2×2 generadas por:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que cumplen $J^2 = -E$.

El espacio vectorial generado por las matrices de la forma : $aE + bJ$, es isomórfico con $a + ib$.

Ello se puede ver fácilmente usando la formula para sumar y multiplicar matrices:

$$(aE + bJ) + (cE + dJ) = (a + c)E + (b + d)J$$

$$(aE + bJ)(cE + dJ) = (ac - bd)E + (ad + bc)J.$$

Pero estas son las reglas para sumar y multiplicar los números complejos.

Vemos así que el espacio vectorial generado por las matrices E y J es isomórfico con el plano complejo, esto implica que para efectos de cálculo es equivalente operar con un número complejo o con una matriz en el espacio vectorial generado por las matrices E y J .

¹ Un isomorfismo entre dos dominios enteros D y D' es una correspondencia uno a uno $a \rightarrow a'$ de los elementos a de D con los elementos a' de D' , que satisface la condiciones:

$$(a+b)' = a' + b' \quad , \quad (ab)' = a' b'$$

para todos los elementos a y b .

En lo que resta de este trabajo usaremos letras mayúsculas para denotar matrices excepto cuando se especifique lo contrario.

El Oscilador Armónico:

Consideremos la ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$m\ddot{x} - c\dot{x} + kx = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

Definimos una variable p de tal forma que:

$$p = m\dot{x} .$$

Entonces la ecuación se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & cm^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} .$$

Se escoge este método por poner de manifiesto la relación entre resolver un sistema de ecuaciones diferenciales y la diagonalización de una matriz.

Se buscan soluciones de la forma: $\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{st}$, si sustituimos en el sistema de ecuaciones:

$$s \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -k & cm^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} .$$

Pero esta ecuación es la ecuación de valores propios para la diagonalización de la matriz del sistema.

De aquí se puede concluir que para que esta ecuación tenga soluciones en ξ el determinante del sistema debe ser cero:

$$\det \begin{pmatrix} -s & m^{-1} \\ -k & cm^{-1} - s \end{pmatrix} = 0$$

Esto es:

$$s^2 - scm^{-1} + km^{-1} = 0$$

cuyas raíces son:

$$s = c/2m \pm \sqrt{c^2/4m^2 - k/m}$$

se definen las siguientes constantes: la frecuencia angular natural del oscilador $\omega_n = \sqrt{k/m}$, el amortiguamiento crítico c_n ocurre cuando $c_n/2m = \sqrt{k/m}$ y el amortiguamiento normalizado se define como: $\gamma = c/c_n$, por lo tanto: $c/2m = \gamma\omega_n$.

Las raíces se pueden expresar entonces convenientemente como:

$$s_z = \gamma\omega_n \pm \sqrt{(\gamma^2 - 1)\omega_n^2}$$

Ahora se sustituyen estos valores de s en la ecuación de vectores propios, los cuales están determinados excepto por una constante de proporcionalidad, la escogemos de tal manera que $\xi_1 = 1$.

$$-s_z + m^{-1}\xi_z = 0$$

Entonces se puede ya escribir la solución del sistema como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ s, m \end{pmatrix} e^{s, t} + \begin{pmatrix} 1 \\ s, m \end{pmatrix} e^{s, t}$$

Aquí vemos que esta manera de resolver la ecuación (2.1) es equivalente a encontrar los vectores y valores propios de una matriz.

La Matriz de Transición en el espacio fase:

Usando el isomorfismo entre matrices y números complejos:

$$e^{s, t} = e^{(\sigma_r + i\omega_r)t} = e^{\sigma_r t} \{ \cos(\omega_r t) + i \operatorname{sen}(\omega_r t) \} = e^{\sigma_r t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_r t) & -\operatorname{sen}(\omega_r t) \\ \operatorname{sen}(\omega_r t) & \cos(\omega_r t) \end{pmatrix} \quad \dots(2.2)$$

En esta sección demostraremos que las funciones de la forma $e^{s t}$ forman un grupo² que es simplemente isomorfo con el de las matrices de números reales generadas por E y J .

² Un grupo abstracto G es un sistema de elementos que se pueden combinar mediante una operación binaria univaluada que es asociativa y relativa a la cual G contiene elementos que satisfacen la ley de identidad y con cada elemento hay otro (su inverso) que satisface la ley de inversión (reciprocidad).

Primero veremos que en efecto las exponenciales son un grupo; para ello notamos que con $s=0$ tenemos la función *identidad*; e^0 , cambiando s por $-s$ se obtiene la *inversa* que tiene la misma forma; e^{-s} y también este sistema de elementos esta cerrado bajo la operación asociativa de la multiplicación pues $e^m e^n = e^{(m+n)t} = e^{(n+m)t} = e^n e^m$. Esto muestra que se cumplen las condiciones que definen a un grupo abstracto.

También las matrices correspondientes (2.2) forman un grupo, ya que evaluando en $s=0$ la matriz se reduce a la matriz idéntica E que juega el papel de *identidad* y si hacemos el giro, representado por la matriz, en sentido contrario y cambiamos el signo de σ obtenemos la transformación *inversa* que también es de la misma forma (también es un giro por una exponencial). Por último es fácil ver que el sistema de elementos es cerrado bajo la multiplicación que es asociativa porque la multiplicación de matrices lo es. Esto implica que también es un grupo y hay un isomorfismo simple (ver por ej., [4] Cap. 3. sec. 2) entre esos dos grupos derivados del isomorfismo entre los complejos y el espacio vectorial de las matrices generadas por E y J .

Las siguientes relaciones expresan simbólicamente este isomorfismo:

$$e^{\sigma_1 t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & -\operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ \operatorname{sen}(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} e^{\sigma_2 t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) & -\operatorname{sen}(\omega_2 t) \\ \operatorname{sen}(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} =$$

$$e^{(\sigma_1 + \sigma_2)t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 + \omega_2)t & -\operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2)t \\ \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2)t & \cos(\omega_1 + \omega_2)t \end{pmatrix} \rightarrow e^{(\sigma_1 + \sigma_2)t} e^{(\sigma_2 + \omega_2)t} = e^{m_1} e^{m_2}$$

Todo esto puede parecer trivial en un sólo grado de libertad, pero adquiere un significado muy importante cuando se consideran varios grados como se verá en los siguientes capítulos.

Lo que esto significa es que estas matrices contienen la misma información que una exponencial compleja (es decir las representaciones son isomórficas con funciones exponenciales) y proporcionan una solución de las ecuaciones del movimiento igualmente

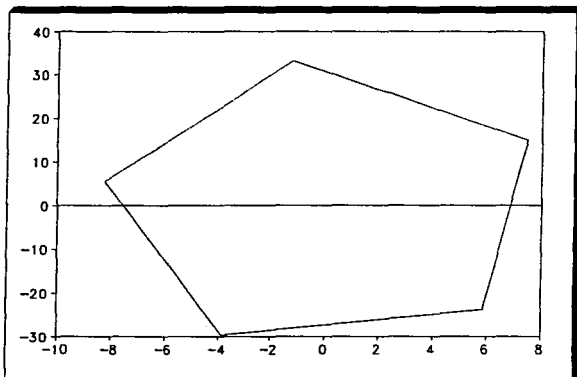
válida, simplemente es otra representación. Sin embargo el método para graficar y evaluar la solución se simplifica mucho cuando se usan estas matrices, porque si bien las funciones continuas del tiempo han sido muy importantes en las soluciones de ecuaciones diferenciales, el concepto de continuidad no existe para las computadoras digitales que trabajan con una señal de reloj que es lo análogo a la diferencia entre una rueda y un engrane y también tienen que trabajar con números racionales porque la computadora no puede representar un número irracional.

Prosiguiendo esta analogía, esta situación es como si viésemos el movimiento con una luz estroboscópica.

Para ilustrar esta situación considérese la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \frac{b}{a} \sin(2\pi/n) \\ -\frac{a}{b} \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.3)$$

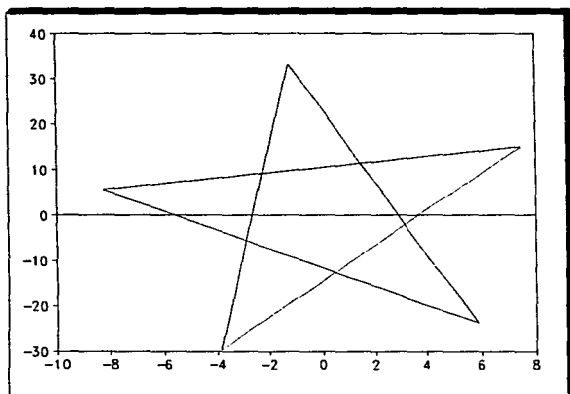
Es importante subrayar que todas las figuras de este capítulo se obtiene con la repetición de la matriz (2.3) sobre las condiciones iniciales unas cuantas veces.



Gráfica 1.

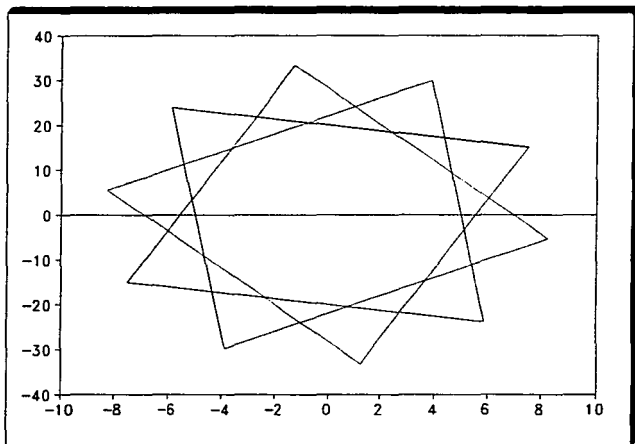
Con $n=5$ y $a/b=1/4$ se obtiene un pentágono.

La reiteración de la matriz (2.3) sobre las condiciones iniciales ocasiona que el punto inicial gire al rededor del perímetro de una elipse con relación entre ejes a/b con precisión variable. Por ejemplo si, n es un número entero se obtiene un polígono de n lados, pero si n es semientero, la elipse se recorre dos veces antes de caer en el mismo punto de partida al que llega en $2n$ repeticiones. En las gráficas se puede apreciar el efecto estroboscópico que consiste en una poligonación más o menos burda de una elipse, tomando una frecuencia estroboscópica adecuada podemos hacer que la órbita se recorra dos veces antes de completar un ciclo como en el pentagrama de la figura 2. En el caso de la estrella de diez puntas el periodo es múltiplo impropio de un tercio etc..



Gráfica 2.

El pentagrama se obtiene con $n=2.5$ y $b/a=4$.



Gráfica 3.

Esta figura se obtiene con $n=2.33333$ $b/a=4$.

Otra consecuencia de estos hechos es que cualquier potencia de una de estas matrices también es muy fácil de calcular de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \cos(\omega) & \text{sen}(\omega) \\ -\text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{array} \right\}^n = e^{i n \omega} \left\{ \begin{array}{cc} \cos(n\omega) & \text{sen}(n\omega) \\ -\text{sen}(n\omega) & \cos(n\omega) \end{array} \right\}$$

Si en lugar de x pensamos en el tiempo $t=NT$ donde T es un periodo suficientemente pequeño, obtenemos una solución que cada vez se aproxima mas a la función continua a la que es isomórfica.

Como esta relación es válida para toda x se puede formar cualquier potencia o raíz de una matriz de este tipo, de una manera muy sencilla, pero en particular se puede suponer que x es el tiempo y entonces llegamos al concepto de un giro amortiguado (cuando σ es menor que cero) -ver gráfica 5. Esto tiene los siguientes desarrollos y aplicaciones:

2.2 Aplicaciones y Desarrollos en un Grado de Libertad

En este capítulo se explican brevemente algunas posibles aplicaciones y líneas de investigación susceptibles de análisis mediante el grupo de transformaciones estudiadas en el presente trabajo.

Áreas y longitudes de arco.

Como una primera aplicación podemos usar esta transformación para calcular las longitudes de arco y las áreas de polígonos regulares. Las fórmulas para calcular las longitudes de arco y áreas corresponden a una suma de longitudes de pequeños segmentos rectilíneos, en el caso de la longitud de arco dados por $\sum \sqrt{(q_i - q_{i-1})^2 + (p_i - p_{i-1})^2}$ y

$1/2 \sum \begin{vmatrix} q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_i & p_i \end{vmatrix}$ respectivamente, la suma de las longitudes de pequeños vectores y la suma de semiareas de pequeños paralelogramos. Cuando $q=x$ y $p=m\dot{x}$

$$1/2 \begin{vmatrix} q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_i & p_i \end{vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} x_{i-1} & p_{i-1} \\ x_i & p_i \end{vmatrix} = 1/2 \begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i \\ p_{i-1} & p_i \end{vmatrix} = 1/2 (x_{j-1}, x_j, 0) \times (p_{j-1}, p_j, 0)$$

Esto tiene dimensiones de momento angular $r \times p$ y también se puede escribir como:

$$1/2 (x_{j-1}, p_{j-1}, 0) \times (x_j, p_j, 0).$$

Aplicación de los Números Pitagóricos a los Grupos de Giro:

Las matrices en el campo de los racionales pueden ser aún mas prácticas para el cálculo por computadora dado que no hay que calcular senos y cosenos.

Para este objetivo los números pitagóricos adquieren un significado muy especial:

Considérense tres números enteros que satisfagan $a^2 + b^2 = c^2$, una solución muy conocida de este problema es: $a, b = 3, 4$ y $c=5$.

Entonces podemos sustituir en la matriz (2.3) el $\cos(x)$ por a/c y el $\sin(x)$ por b/c que son números racionales, lo cual simplifica el calculo y proyecta el grupo de giro sobre las matrices en el campo de los racionales.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ representa un giro pero solamente se usan números enteros no es necesario hablar de π ni de senos y cosenos.

Como es bien sabido las reglas para construir los números pitagóricos se expresan como $a = mn, b = \frac{m^2 - n^2}{2}, c = \frac{m^2 + n^2}{2}$ donde $(m, n) = 1$, es decir son primos entre si e impares.

por ej. con: $m=1, n=3, a=3, b=4$ y $c=5$

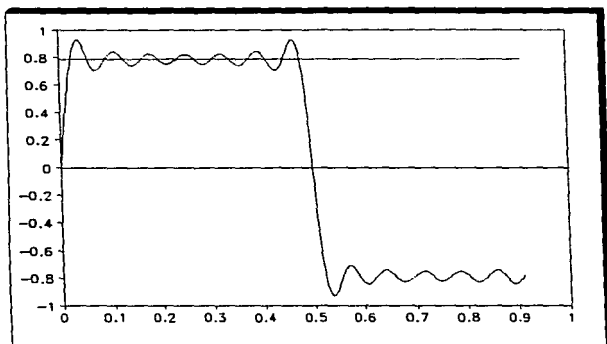
$m=1, n=5, a=5, b=12$ y $c=13$

etc.

Síntesis de Fourier.

Consideremos en este breve apartado la siguiente superposición de transformaciones del tipo estudiado en este capítulo:

$$A + A^3 / 3 + A^5 / 5 + A^7 / 7 + A^9 / 9 + A^{11} / 11 + A^{13} / 13 \quad \dots(S.1)$$



Gráfica 4.

Aquí se gráfica el resultado de iterar la superposición (S.1) unas 300 veces (A es un giro de un grado).

Esta gráfica muestra la convergencia en media hacia el valor $\pi / 4 = 0.785398$. También se puede apreciar el efecto Gibbs. Por lo tanto, estas transformaciones también pueden usarse para estudiar cuestiones de convergencia, pero ese no es el objetivo de el presente trabajo.

El Teorema de Shannon

En este apartado veremos como se puede aplicar la matriz de transición para dar una interpretación muy sencilla e intuitiva para el teorema de Shannon que puede ser muy difícil de entender en términos de otros conceptos.

Primero es necesario hacer notar que dado cualquier giro que se pueda representar en una computadora, si es repetido suficientes veces tendrá que llegar algún día a pasar por las condiciones iniciales y entonces toda la dinámica se vuelve a repetir ejecutando un movimiento periódico (probablemente con un periodo bastante largo).

Ejemplos de esto son la matrices que generan al pentágono y al pentagrama. Estas matrices pasan por las condiciones iniciales después de 5 repeticiones. esto es: satisfacen la ecuación: $A^5 = E$. En general para cualquier giro $A^N = E$ para cierta N . Entre todas las figuras que se obtienen con el giro buscamos siempre una forma canónica que es la figura más sencilla que sigue conservando las propiedades de un giro. La forma más sencilla es aquella para la cual $A^2 = E$. Esto es como dar solo el diámetro de la órbita (pero esto es toda la información necesaria para trazar un círculo o figura), que es obviamente la forma más sencilla de la órbita y, en este caso, la matriz A es un giro de 180 grados.

Nótese que cualquier giro se puede obtener de un giro de 180 grados elevándolo a una potencia adecuada:

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & \text{sen}(\pi) \\ -\text{sen}(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}^{2/n} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \text{sen}(2\pi/n) \\ -\text{sen}(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

Considérese ahora una señal analógica que se quiere modular en PCM (codificar digitalmente); como en el teorema de Shannon, supongamos que ésta se puede desarrollar en serie de Fourier como una superposición de oscilaciones de frecuencias que son múltiplos de una frecuencia fundamental:

$$\sum_k a_k A^k \quad \dots(T1)$$

donde a_i , son los coeficientes de Fourier de la señal.

Por ejemplo en el apartado anterior tenemos una gráfica hecha con 300 iteraciones porque A es un giro de 1 grado pero si se toma un giro de dos grados se obtiene la misma gráfica pero recorrida más rápido, es decir, sólo se tiene que iterar la superposición (S1) solo 150 veces para obtener casi exactamente la misma información. Entonces nos podemos preguntar que tan grande puede ser el giro A de (S1) sin perder la información de la señal.

La respuesta es aquel giro para el cual la máxima frecuencia es un giro de 180 grados. O sea, en el caso de (S1) $(A^{12})^2 = A^{24} = E$ esto se puede interpretar geoméricamente como el ángulo que subtende un polígono de 26 lados. En otras palabras se necesita muestrear un mínimo de 26 puntos en cada periodo para poder reconstruir la señal hasta la frecuencia máxima. Estos resultados se representan en la gráfica 4B. Todo esto coincide correctamente con la teoría de Shannon (hay que muestrear al doble de la máxima frecuencia).

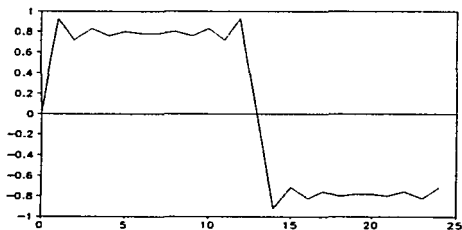


figura 4b.

Forma canónica de la señal de la figura 4

Aquí se reitera (S1) con A igual a un giro de $360/26$ grados 24 veces.

Esto muestra que para obtener la gráfica se puede ahorrar el 90% del tiempo de cálculo si se usa el teorema de Shannon para codificar la información análoga en un mínimo de datos digitales.

La Matriz de Transferencia

Si calculamos la transformada de Laplace de la matriz de transición de un sistema lineal se obtiene la matriz de transferencia:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} & \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} & \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \end{pmatrix} \dots (U1)$$

En esta matriz se encuentra la información sobre la respuesta de un sistema lineal amortiguado a una oscilación forzada de cualquier frecuencia y/o amortiguamiento (aquí σ y ω son los parámetros del oscilador y $s = \sigma' + i\omega'$ representa los de la oscilación forzada).

Por ejemplo, en el caso de una oscilación forzada de la misma frecuencia que la frecuencia natural del sistema y amortiguamiento cero tanto en el oscilador como en la vibración forzada se tiene físicamente una resonancia, pero en la siguiente ecuación tenemos que esto equivale matemáticamente a la función delta de Dirac.

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\frac{\sigma}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}}{\frac{(\omega' - \omega)}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2}} \frac{(\omega - \omega')}{\sigma^2 + (\omega - \omega')^2} \right)$$

Aquí vemos que la interpretación física de la matriz conduce a resultados matemáticos correctos.

En esta matriz se encuentra la información necesaria para construir la solución del problema de la ecuación diferencial lineal inhomogénea usando el principio de superposición con el módulo y fase obtenidos correctamente con la matriz de transferencia (U1).

Transformación de Laplace.

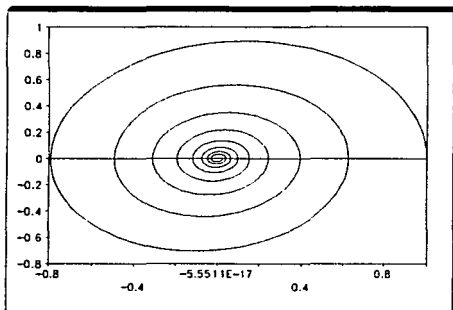
En esta sección no pretendo dar un algoritmo para calcular transformadas que sea más eficiente o más rápido que los ya existentes, sino solo esbozar la posibilidad de lograrlo con este método.

En esta sección tratamos los aspectos conceptuales de la transformada de Laplace y su relación con el método de el presente trabajo.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{nN} \left\{ e^{-s} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) \\ \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \right\}^{1/N} f\left(\frac{t}{N}\right)$$

Esto quiere decir que para cada s debemos efectuar un recorrido multiplicando cada valor de f por un número complejo que le cambia de amplitud y fase que es $\exp(-st)$ o una matriz isomorfa aplicada $t=i/N$ veces.

Aquí se pone de manifiesto la facilidad con que una computadora digital puede desarrollar la expresión de la derecha, en contraste con la de la izquierda.



Gráfica 5.
Espiral logarítmica, (Giro Amortiguado).

Raíces Múltiples

Para estudiar el problema de los transitorios con la teoría en cuestión consideremos la matriz

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1(2n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(2n)1}(t) & & A_{(2n)(2n)}(t) \end{pmatrix}$$

en donde cada elemento de la matriz es un polinomio en t .

Desarrollando en serie de Taylor:

$$A(t) = A(0) + tA'(0) + \frac{1}{2!}t^2A''(0) + \cdots$$

Como ya hemos visto la matriz A representa exponenciales complejas. Como sabemos cuando se resuelven las ecuaciones lineales y se encuentra una ecuación secular con raíces múltiples, Por ejemplo, cuando la multiplicidad es dos, se tienen dos soluciones linealmente independientes como $\exp(-st)$ y $t \exp(-st)$. cuando la multiplicidad es tres a veces es necesario considerar la solución $t^2 \exp(-st)$ todas estas funciones aparecen poniendo una matriz de polinomios de grado uno, dos etc. Vemos así que las matrices con polinomios de primer grado generan todas las soluciones con multiplicidad dos, los de segundo grado generan las soluciones con multiplicidad tres etc.

CAPÍTULO 3

GENERALIZACIÓN A VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

3.1 SISTEMAS CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

En este capítulo veremos como se generaliza lo dicho en el capítulo anterior para el caso de dos grados de libertad, se introducen los conceptos de lagrangiana, hamiltoniana, transformación de Legendre ecuaciones de movimiento en forma simpléctica, condición simpléctica etc., que se usarán libremente en lo que resta de este trabajo.

Si H no depende de t .

Las ecuaciones del movimiento en forma simpléctica son:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \partial H / \partial q \\ \partial H / \partial p \end{pmatrix}$$

donde: $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ y E es la matriz idéntica.

Esta matriz J juega el papel de el número $i = \sqrt{-1}$ en los números complejos que en el capítulo anterior vimos que se puede representar también como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En el caso general de que la hamiltoniana sea una forma cuadrática de las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados, las ecuaciones del movimiento se convierten simplemente en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales cuya solución se obtiene diagonalizando una matriz de coeficientes constantes.

Para ver la simetría que induce la condición simpléctica sobre una matriz de matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ se estudian las condiciones para que ésta conmute con J (cf. ec. (1.30)):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde A, B, C y D son matrices de $n \times n$,

Esta ecuación se puede escribir como un sistema de ecuaciones:

$$-B = C, A = D$$

y se puede verificar directamente que $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ es una matriz de matrices que tiene simetría simpléctica.

(La condición simpléctica se puede comprobar cuando la matriz conmuta con J ver la ecuación (1.30)). Es muy sencillo demostrar que los giros simplécticos forman un grupo:

1. La matriz *identidad* esta contenida en los giros, ésta es un giro alrededor de cualquier eje con ángulo cero y también está contenida en las matrices simplécticas, pues con $A=E$ y $B=0$ vemos que también satisface la condición simpléctica.
2. El producto de dos matrices con simetría simpléctica también tiene simetría simpléctica y el producto de dos giros es también un giro. Por tanto el producto de dos giros simplécticos también es un giro y también es simpléctico.

En este caso se puede ver de manera directa que el producto de dos transformaciones simplécticas también lo es:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC - BD & -AD - BC \\ AD + BC & AC - BD \end{pmatrix}$$

Esto se puede demostrar en general para transformaciones canónicas (ver por ejemplo Goldstein[1] op. cit. sec. 9.3 "Método simpléctico para transformaciones canónicas"). Pero aquí es suficiente esta demostración que es mas sencilla y directa. También se desprende de este razonamiento la asociatividad del producto.

3. La transformación *inversa* de cualquier giro es un giro en sentido inverso y de la misma magnitud. Las matrices con simetría simpléctica no singulares también forman un grupo abstracto.

Si consideramos matrices ortogonales con simetría simpléctica (es decir la intersección del grupo ortogonal con el grupo simpléctico), la transformación inversa es simplemente la matriz transpuesta que también es un ortogonal y cumple la condición simpléctica:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Nótese en este momento que en un solo grado de libertad, todos los giros son simplécticos.

Las siguientes matrices cumplen la condición de ser giros con simetría simpléctica:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & 0 & \sin \epsilon \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta & 0 \\ 0 & -\sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & 0 & \sin \epsilon \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta & 0 \\ 0 & -\sin \epsilon & 0 & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i(\theta+\delta)} + e^{i(\theta-\delta)} & 0 & -i(e^{i(\theta+\delta)} - e^{i(\theta-\delta)}) & 0 \\ 0 & e^{i(\theta+\epsilon)} + e^{i(\theta-\epsilon)} & 0 & -i(e^{i(\theta+\epsilon)} - e^{i(\theta-\epsilon)}) \\ i(e^{i(\theta+\delta)} - e^{i(\theta-\delta)}) & 0 & e^{i(\theta+\delta)} + e^{i(\theta-\delta)} & 0 \\ 0 & i(e^{i(\theta+\epsilon)} - e^{i(\theta-\epsilon)}) & 0 & e^{i(\theta+\epsilon)} + e^{i(\theta-\epsilon)} \end{pmatrix} \dots\dots(3.1)$$

Esto muestra que el producto también es un giro es simpléctico, pero también lo es:

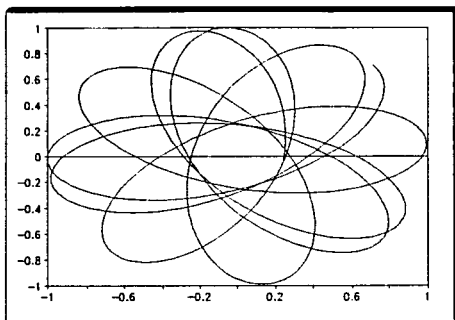
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta & 0 \\ 0 & \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta & 0 \\ 0 & -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
 e^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \cos \alpha & -\sin \varepsilon \sin \alpha & -\sin \varepsilon \cos \alpha & -\cos \varepsilon \sin \alpha \\ -\sin \varepsilon \sin \alpha & \cos \varepsilon \cos \alpha & -\cos \varepsilon \sin \alpha & -\sin \varepsilon \cos \alpha \\ \sin \varepsilon \cos \alpha & \cos \varepsilon \sin \alpha & \cos \varepsilon \cos \alpha & -\sin \varepsilon \sin \alpha \\ \cos \varepsilon \sin \alpha & \sin \varepsilon \cos \alpha & -\sin \varepsilon \sin \alpha & \cos \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \dots\dots(3.2)$$

Se puede verificar inmediatamente que estas tres matrices conmutan. En el siguiente capítulo veremos bajo qué condiciones conmutan los giros simplécticos en general.

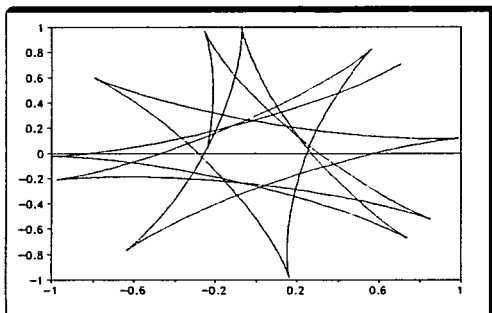
Como en el capítulo anterior podemos representar estos giros como exponenciales complejas. Al identificar estos ángulos con dos frecuencias angulares en la primera y tercera fila tenemos un giro para la coordenada l y el momento conjugado, lo cual corresponde a un giro el plano q_1, p_1 por un ángulo delta por $\exp(i\theta)$;

$$\begin{aligned} q_1(t) &= e^{i\theta t} (\cos \delta \, tq_1(0) + \sin \delta \, tp_1(0)) \\ q_2(t) &= e^{i\theta t} (\cos \varepsilon \, tq_2(0) + \sin \varepsilon \, tp_2(0)) \end{aligned} \quad \dots\dots(3.3)$$

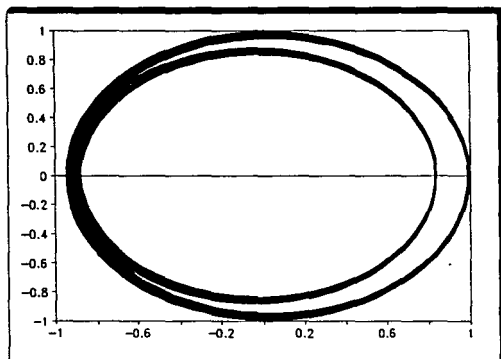
En las siguientes gráficas (6, 7 y 8) se muestran algunas posibles órbitas generadas por esta transformación. Estas gráficas se obtienen iterando la matriz unas 1000 veces.



Gráfica 6.



Gráfica 7.



Gráfica 8.

Estas gráficas nos dan alguna información cualitativa sobre los vectores propios del sistema (para un sistema conservativo la parte real de los valores propios son todas cero las partes imaginarias son ángulos de giro) . El significado de la parte real de los valores propios no se puede entender hasta discutir la disipación que es el objeto de la próxima sección; sin embargo, la parte imaginaria de los valores propios si corresponde con estas frecuencias en la representación en términos de la variable compleja $s = \sigma + i\omega$.

De aquí podemos también deducir una condición necesaria y suficiente para que la órbita sea cerrada.

Ello ocurre si existe t diferente de cero, tal que $q_1(t) = q_1(0)$ y $q_2(t) = q_2(0)$. Esta condición se puede expresar cómo

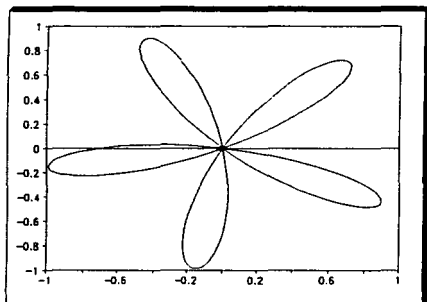
$$e^{i(\varepsilon-\delta)t} - e^{-i(\varepsilon-\delta)t} = e^{i(\varepsilon-\theta)t} - e^{-i(\varepsilon-\theta)t} - e^{i(\delta-\theta)t} + e^{-i(\delta-\theta)t} \quad \dots(3.4)$$

Una condición suficiente para que esta igualdad se cumpla es

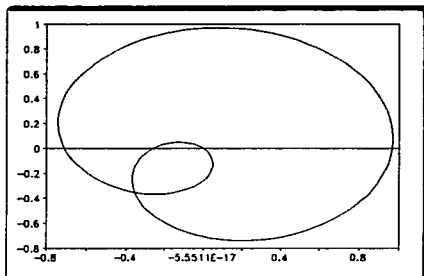
$$\varepsilon = \delta \quad \text{o} \quad \varepsilon = -\delta. \quad \dots(3.6)$$

También es necesario, por supuesto, que $p_1(t) = p_1(0)$ y $p_2(t) = p_2(0)$ pero es fácil comprobar que estas condiciones llevan a la misma ecuación.

Algunas de estas órbitas cerradas se muestran a continuación:

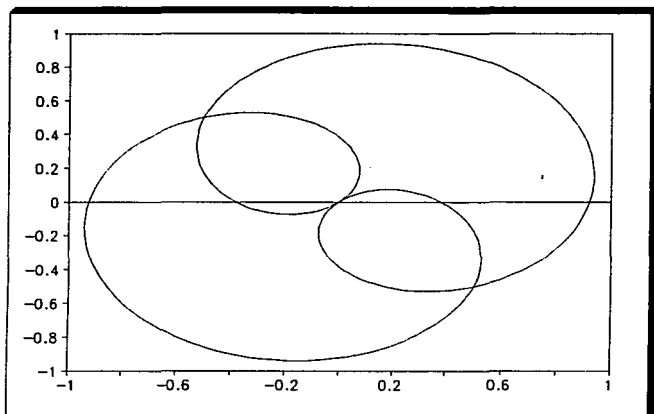


Gráfica 9. (reiteración de un giro simpléctico con: $\theta = 1, \delta = 5, \varepsilon = 5$)

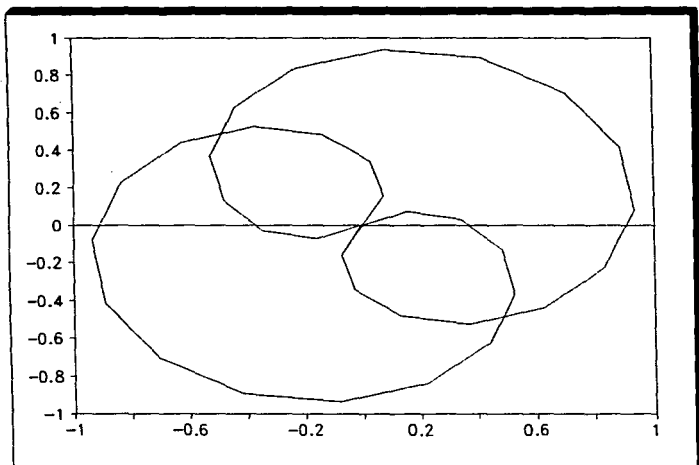


Gráfica 10. (reiteración de un giro simpléctico con: $\theta = 3, \delta = 1, \epsilon = 1$)

Usando los resultados del capítulo anterior, es evidente que se puede recorrer una órbita con diferente nivel de detalle; esto es, en el similitud de la luz estroboscópica del capítulo anterior, podemos recorrer una órbita bajando la frecuencia de esa luz estroboscópica y obtener una especie de poligonación de la órbita como se muestra en las figuras 11 y 12. Allí el efecto estroboscópico se manifiesta en la aproximación poligonal obtenida con una matriz que es la décima potencia de la original.

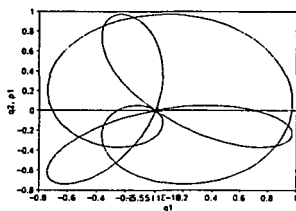


Gráfica 11. Órbita de A' (A es un giro simpléctico con: $\theta = 3, \delta = 2, \varepsilon = 2$)



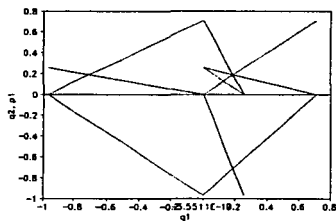
Gráfica 12. Órbita de A^{10r} (reiteración de un giro simpléctico con: $\theta = 30, \delta = 20, \varepsilon = 20$)

Otra propiedad de estas figuras es que los bucles y las rosas son conjugados en el sentido de que se pueden generar con la misma matriz graficando una órbita (proyección del recorrido en el espacio fase sobre el plano (q_1, q_2)) o una curva de Lissajous (proyección del recorrido sobre el plano (q_1, p_1)).



Gráfica 13.

Esta figura muestra una órbita y su curva de Lissajous conjugada.



Gráfica 14.

Forma canónica de la rosa de tres hojas y su conjugada. (forma canónica de el caracol de Pascal.)

La figura (12) hace pensar en la siguiente pregunta: ¿cual es el ángulo de giro más grande con que se puede recorrer la órbita sin perder completamente la forma de la órbita? con ello llegamos a una forma canónica para las órbitas; en el caso de las rosas de n hojas esta forma canónica es un haz de segmentos como se muestra en la figura (14). Esto evidentemente es el caso del teorema de Shannon puesto en el lenguaje de los grupos de giro simplécticos.

Estas gráficas sirven para mostrar que el método también se puede usar para el estudio de curvas planas, que no se tratarán más en el presente trabajo por salirse de los objetivos.

¹ ver [2] capitulo XIX "Geometrical Interpretation of Algebraic Forms."

Efectos de la Disipación:

Si multiplicamos la matriz del giro simpléctico por una constante menor que uno, se obtiene una transformación que ya no conserva el valor de la hamiltoniana y el resultado de múltiples aplicaciones tiene el efecto de disminuir este valor exponencialmente como en el capítulo anterior. Pero se puede asociar una disipación independiente a cada grado de libertad como cuando se operan dos osciladores en medios de diferente viscosidad.

La matriz que satisface estas condiciones es:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 e^{i\theta} & & & \\ & \lambda_2 e^{i\theta} & & \\ & & \lambda_1 e^{i\theta} & \\ & & & \lambda_2 e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & & \text{sen } \delta & \\ & \cos \varepsilon & & \text{sen } \varepsilon \\ -\text{sen } \delta & & \cos \delta & \\ & -\text{sen } \varepsilon & & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

Si ponemos $\lambda_1 = e^{-\sigma_1}$, $\lambda_2 = e^{-\sigma_2}$ y $\delta = \omega_1$, $\varepsilon = \omega_2$ esta matriz adquiere una forma muy sencilla y sugestiva, sustituimos también, $s_1 = \sigma_1 + i\omega_1$ y $s_2 = \sigma_2 + i\omega_2$

$$\frac{1}{2} e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{\sigma_1 + i\omega_1} + e^{\sigma_1 - i\omega_1} & & i(e^{\sigma_1 - i\omega_1} - e^{\sigma_1 + i\omega_1}) & \\ & e^{\sigma_2 + i\omega_2} + e^{\sigma_2 - i\omega_2} & & i(e^{\sigma_2 - i\omega_2} - e^{\sigma_2 + i\omega_2}) \\ i(e^{\sigma_1 + i\omega_1} - e^{\sigma_1 - i\omega_1}) & & e^{\sigma_1 + \omega_1} + e^{\sigma_1 - i\omega_1} & \\ & i(e^{\sigma_2 + i\omega_2} - e^{\sigma_2 - i\omega_2}) & & e^{\sigma_2 + \omega_2} + e^{\sigma_2 - i\omega_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{s_1} + e^{s_1^*} & & i(e^{s_1} - e^{s_1^*}) & \\ & e^{s_2} + e^{s_2^*} & & i(e^{s_2} - e^{s_2^*}) \\ i(e^{s_1} - e^{s_1^*}) & & e^{s_1} + e^{s_1^*} & \\ & i(e^{s_2} - e^{s_2^*}) & & e^{s_2} + e^{s_2^*} \end{pmatrix}$$

Adoptando el punto de vista activo tenemos en el tiempo t .

$$\frac{1}{2} e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{s_1} + e^{s_1^*} & & i(e^{s_1} - e^{s_1^*}) & \\ & e^{s_2} + e^{s_2^*} & & i(e^{s_2} - e^{s_2^*}) \\ i(e^{s_1} - e^{s_1^*}) & & e^{s_1} + e^{s_1^*} & \\ & i(e^{s_2} - e^{s_2^*}) & & e^{s_2} + e^{s_2^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

Esto expresa la repetición de la transformación l veces. Aquí podemos introducir la siguiente reflexión que en parte motivó este trabajo; Si introducimos una unidad de tiempo suficientemente pequeña, podemos obtener la solución con tanto detalle como se desee, necesite o pueda.

Esta matriz es la generalización de un giro que contiene una contracción, o sea, que es un giro amortiguado.

Es como la generalización del seno y el coseno con ángulos complejos, por lo que podemos escribir, simbólicamente:

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos(s_1) & \cos(s_2) & \operatorname{sen}(s_1) & \operatorname{sen}(s_2) \\ -\operatorname{sen}(s_1) & -\operatorname{sen}(s_2) & \cos(s_1) & \cos(s_2) \end{pmatrix} =$$

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1) & \cos(\omega_2) & \operatorname{sen}(\omega_1) & \operatorname{sen}(\omega_2) \\ -\operatorname{sen}(\omega_1) & -\operatorname{sen}(\omega_2) & \cos(\omega_1) & \cos(\omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sigma_1} & & & \\ & e^{-\sigma_2} & & \\ & & e^{-\sigma_1} & \\ & & & e^{-\sigma_2} \end{pmatrix}$$

Puesta en esta forma son ya obvias todas sus propiedades.

Estas matrices constituyen lo que sería análogo al módulo de un número complejo multiplicado por la exponencial de $i = \sqrt{-1}$ veces la fase, sólo que aquí tenemos dos fases y dos módulos, y tienen la propiedad de que el producto de dos tales transformaciones tiene el efecto de una transformación de la misma forma con una disipación igual al producto de las disipaciones y un giro simpléctico con parámetros iguales a la suma de los ángulos. En el siguiente capítulo vamos a generalizar estos resultados a n dimensiones.

Por último, usando la transformación con parámetros θ, δ, α sólo se puede introducir una disipación ($\sigma_1 = \sigma_2$) para ambos grados de libertad si queremos conservar la propiedad conmutativa entre la disipación y el giro.

$$\begin{pmatrix} \lambda e^{i\theta} & & & \\ & \lambda e^{i\theta} & & \\ & & \lambda e^{i\theta} & \\ & & & \lambda e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \cos\alpha & -\sin\delta \sin\alpha & -\sin\delta \cos\alpha & -\cos\delta \sin\alpha \\ -\sin\delta \sin\alpha & \cos\delta \cos\alpha & -\cos\delta \sin\alpha & -\sin\delta \cos\alpha \\ \sin\delta \cos\alpha & \cos\delta \sin\alpha & \cos\delta \cos\alpha & -\sin\delta \sin\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha & \sin\delta \cos\alpha & -\sin\delta \sin\alpha & \cos\delta \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Podemos dar una interpretación a este otro giro simpléctico amortiguado como originado por una degeneración que ocurre cuando tanto las frecuencias como las amortiguamientos son iguales para ambos grados de libertad, porque entonces las coordenadas generalizadas con subíndices uno y dos se vuelven indistinguibles. En este caso una permutación de ambos deja todo invariante excepto que ahora es lo mismo tomar el giro con cualquiera de los dos momentos conjugados. En el caso de una degeneración tenemos que ambos momentos se pueden tomar como el momento conjugado de la primera o segunda coordenada generalizada. En el siguiente capítulo veremos exactamente lo que pasa con esta degeneración en general.

3. 2 SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD

En este capítulo veremos como se puede generalizar todo lo expuesto hasta aquí para un número arbitrario de grados de libertad.

La matriz de transición de un giro simpléctico amortiguado en n grados de libertad se puede representar convenientemente como:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \\ & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{COS} & \text{SEN} \\ -\text{SEN} & \text{COS} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(3.2.1)$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{i\theta} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{COS} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \cos \omega_n \end{pmatrix},$$

$$\text{SEN} = \begin{pmatrix} \text{sen } \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \text{sen } \omega_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_i = e^{-\sigma_i}.$$

Estas matrices de matrices son completamente análogas a la matriz estudiada en el capítulo 2 que se identifica con el módulo de un número complejo multiplicado por una matriz de cambio de fase. Aquí vemos que todo lo dicho en el capítulo 2 es muy fácil de generalizar a n grados de libertad.

Esto es el producto de dos matrices simplécticas (Giros simplécticos amortiguados) y por lo tanto también es simpléctica y es muy fácil verificar que conmutan.

Otra representación del giro simpléctico amortiguado en n grados de libertad es:

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos(s_1) & & & \text{sen}(s_1) & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \cos(s_n) & & & \text{sen}(s_n) \\ -\text{sen}(s_1) & & & \cos(s_1) & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & -\text{sen}(s_n) & & & \cos(s_n) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{i_1} + e^{i_2} & & & e^{i_1} - e^{i_2} & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ e^{i_1} - e^{i_2} & & e^{i_3} + e^{i_4} & & & & e^{i_3} - e^{i_4} \\ & & & \ddots & & & \\ & & e^{i_1} - e^{i_2} & & e^{i_3} + e^{i_4} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{i_5} + e^{i_6} \end{pmatrix}$$

donde $s_k = \sigma_k + i\omega_k$

En este capítulo estudiaremos el efecto de la degeneración. (en este caso los argumentos de las funciones trigonométricas son iguales y por ello escribiremos sólo *sen* y *cos* sin argumento).

Para ello consideramos el caso de 3 grados de libertad. En este caso, además de la matriz principal hay otras tres que también son giros simplécticos :

$$\begin{pmatrix} \cos & & & 0 & 0 & \text{sen} \\ & \cos & & 0 & \text{sen} & 0 \\ & & \cos & \text{sen} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen} & \cos & & \\ 0 & -\text{sen} & 0 & & \cos & \\ -\text{sen} & 0 & 0 & & & \cos \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos & & & 0 & \text{sen} & 0 \\ & \cos & & \text{sen} & 0 & 0 \\ & & \cos & 0 & 0 & \text{sen} \\ 0 & -\text{sen} & 0 & \cos & & \\ -\text{sen} & 0 & 0 & & \cos & \\ 0 & 0 & -\text{sen} & & & \cos \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos & & & \text{sen} & 0 & 0 \\ & \cos & & 0 & 0 & \text{sen} \\ & & \cos & 0 & \text{sen} & 0 \\ -\text{sen} & 0 & & 0 & \cos & \\ 0 & 0 & -\text{sen} & & & \cos \\ 0 & -\text{sen} & 0 & & & \cos \end{pmatrix}$$

Todas estas matrices tienen en realidad la misma información y surgen porque los momentos conjugados son indistinguibles; las permutaciones que conservan la condición simpléctica conmutan con la matriz principal:

$$\begin{pmatrix} \cos & & & \text{sen} & 0 & 0 \\ & \cos & & 0 & \text{sen} & 0 \\ & & \cos & 0 & 0 & \text{sen} \\ -\text{sen} & 0 & 0 & \cos & & \\ 0 & -\text{sen} & 0 & & \cos & \\ 0 & 0 & -\text{sen} & & & \cos \end{pmatrix}$$

Cualquiera de las matrices anteriores es solo una degeneración de la matriz principal

¿Que pasa cuando las frecuencias son iguales?

Por una parte los grados de libertad se hacen indistinguibles y esto ocasiona que cualquiera de los momentos conjugados pueda ser el conjugado de una de las coordenadas generalizadas; por ejemplo, en la primera matriz se abren dos filas y dos columnas en la matriz del capítulo anterior y se forma un giro sobre esas dos columnas y filas: las únicas posibilidades sin afectar la condición simpléctica son:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \Lambda & & \\ & & & & \Lambda & \\ & & & & & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{COS} \\ \cos & \text{sen} \\ -\text{sen} & \cos \\ -S \\ \text{COS} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \Lambda & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos & & \text{sen} \\ & \text{COS} & S \\ -\text{sen} & -S & \text{COS} \\ & & & \cos \end{pmatrix}$$

$$y \quad \begin{pmatrix} \Lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{COS} & & S \\ & \cos & \text{sen} \\ -S & -\text{sen} & \text{COS} \\ & & & \cos \end{pmatrix}$$

$$\text{donde} \quad S = \begin{pmatrix} & & \text{sen} \\ & \dots & \\ \text{sen} & & \end{pmatrix} = \text{SEN} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

Aunque el método gráfico ya no es tan útil como en dos y tres dimensiones debido a que no se puede graficar una trayectoria de varias dimensiones si se pueden graficar sus proyecciones como en la geometría descriptiva, por ejemplo, en tres grados de libertad se puede graficar la proyección de la trayectoria en tres dimensiones sobre los planos xy y xz , por ejemplo.

En general cualquier permutación simétrica en n grados de libertad origina una transformación de esta forma.

Pero el número de matrices que cumplen la condición simpléctica crece rápidamente porque el número de permutaciones simétricas es el número de elementos en el conjunto de matrices que satisfacen la ec. $P^2 = E$. Estas permutaciones son las que se pueden expresar en ciclos de un máximo de dos.

Por ejemplo en el caso $n=3$, $(1)(2)(3), (1)(23), (2)(13), (3)(12)$

Estos son en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Estas tres últimas matrices pertenecen a la misma clase de matrices que se pueden dividir en un ciclo de un símbolo y un ciclo de dos símbolos, o sea: $(1)(23)$, $(1,2)(3)$ y $(13)(2)$.

Para cuatro grados de libertad se tienen tres clases de permutaciones: $(1)(2)(3)(4)$, $(1)(2)(34)$ y $(12)(34)$

puesto en forma de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Desde este punto de vista analizamos el caso general.

El número de permutaciones de estas características en una misma clase¹ se puede encontrar con la siguiente fórmula: si se divide la permutación en k ciclos de 1 símbolo y l ciclos de 2 símbolos; $k + 2l = n$.

¹ Ver por ejemplo [4] capítulo 5 "The Symmetric Permutation Group and the Algebra of Symmetric Transformations".

$$n(\text{Clase}) = n(\kappa) = \frac{n!}{k! 2^{k-1} l!}$$

Esto muestra que el número de matrices en la degeneración crece bastante rápido.

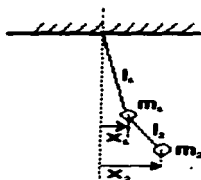
CAPÍTULO 4

EJEMPLOS Y APLICACIONES EN SISTEMAS FÍSICOS REALES

El Péndulo Doble.

La energía cinética de el péndulo doble de la figura, se puede escribir en términos de los desplazamientos para pequeñas amplitudes (en la región de las pequeñas vibraciones) como:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$



mientras la energía potencial es:

$$U = -\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{g}{l_1} x_1^2 - \frac{1}{2} m_2 \frac{g}{l_2} (x_2 - x_1)^2$$

De aquí formamos la lagrangiana $L = T - U$ y se toma la transformación de Legendre para encontrar la hamiltoniana :

$$H = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 - L :$$

donde:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

por lo tanto (al sustituir \dot{x}_i por p_i):

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{g}{l_1} x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{g}{l_2} (x_2 - x_1)^2$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones del movimiento en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2^{-1} \\ -\frac{g(l_1(m_1 + m_2) + m_2 l_1)}{l_1 l_2} & \frac{gm_2}{l_2} & 0 & 0 \\ \frac{m_2 g}{l_2} & -\frac{m_2 g}{l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

El problema se reduce ahora a diagonalizar esta matriz.

Antes de continuar daremos valores numéricos a los datos del problema para simplificar las operaciones.

Supongamos que en el sistema MKS $g=10$ y $m_1 = 5, m_2 = 2, l_1 = 7, l_2 = 4$.

En este caso, la ecuación característica es:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1/2 \\ -15 & 5 & \lambda & 0 \\ 5 & -5 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

o sea:

$$\lambda^4 + \frac{11}{2} \lambda^2 + 5 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{-11 \pm \sqrt{41}}}{2} = \pm i \begin{pmatrix} 2.0859 \\ 1.0720 \end{pmatrix}$$

Estas raíces son puramente imaginarias como era de esperarse. Las raíces están distribuidas simétricamente respecto a cero, por lo que $\theta = 0$.

(La condición que debe satisfacer la ecuación característica es que las partes imaginarias de las raíces deben ser simétricas respecto a una frecuencia. Esto es el polinomio característico debe ser una ecuación en ω^2 con una posible traslación del origen a θ . Si la ecuación característica se puede resolver para ω^2 , $\theta = 0$ y con cada raíz, también)

Sustituyendo en la ecuación de vectores propios:

$$\begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = i(\pm 1.0720) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = i(\pm 2.0859) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = i5(\pm 1.0720), \xi_4 = i2(\pm 1.0720)\xi_2$$

$$-15 + 5\xi_2 = i(\pm 1.0720)\xi_3 = -5(1.0720)^2$$

$$\xi_2 = -(1.0720)^2 + 3$$

y

$$\xi_3 = i5(\pm 2.0859), \xi_4 = i2(\pm 2.0859)\xi_2$$

$$-15 + 5\xi_2 = i(\pm 2.0859)\xi_3 = -5(2.0859)^2$$

$$\xi_2 = -(2.0859)^2 + 3$$

Por lo tanto la solución completa es:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9487 \\ i(5.36) \\ \sqrt{(1.9818)} \end{pmatrix} e^{i(1.0720)y} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9487 \\ -i(5.36) \\ -\sqrt{(1.9818)} \end{pmatrix} e^{-i(1.0720)y} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1.3510 \\ i(10.4259) \\ -\sqrt{(5.6361)} \end{pmatrix} e^{i(2.0859)y} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1.3510 \\ -i(10.4259) \\ \sqrt{(5.6361)} \end{pmatrix} e^{-i(2.0859)y}$$

donde $c_1 = a_1 + ib_1$ y $c_2 = a_2 + ib_2$ con a_1, b_1, a_2, b_2 ; cuatro constantes reales que dependen de las condiciones iniciales.

Esta expresión se puede representar en una gran variedad de formas:

$$c_1 \begin{pmatrix} \cos(1.07)y \\ 1.85 \cos(1.07)y \\ (5.36) \sin(1.07)y \\ (1.98) \sin(1.07)y \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(2.09)y \\ -1.35 \cos(2.09)y \\ 10.43 \sin(2.09)y \\ -5.64 \sin(2.09)y \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \begin{pmatrix} \cos(1.07)y \\ -1.35 \cos(2.09)y \\ (5.36) \sin(1.07)y \\ -5.64 \sin(2.09)y \end{pmatrix} + (c_1, c_2, c_3, c_4) \begin{pmatrix} \cos(2.09)y \\ 1.85 \cos(1.07)y \\ 10.43 \sin(2.09)y \\ (1.98) \sin(1.07)y \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} \cos(1.07)y \\ (5.36) \sin(1.07)y \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1.35 \cos(2.086)y \\ -5.64 \sin(2.086)y \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(2.086)y \\ 10.43 \sin(2.086)y \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1.85 \cos(1.07)y \\ (1.98) \sin(1.07)y \end{pmatrix} =$$

$$(1+i(5.36))c_1 \begin{pmatrix} \cos(1.07)y & \sin(1.07)y \\ 0 & \cos(1.07)y \\ -\sin(1.07)y & 0 \end{pmatrix} + (-1.35-i(5.64))c_2 \begin{pmatrix} 0 & \cos(2.09)y & \sin(2.09)y \\ \cos(2.09)y & 0 & \cos(2.09)y \\ -\sin(2.09)y & \cos(2.09)y & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(1+i(10.43))c_3 \begin{pmatrix} \cos(2.09)y & \sin(2.09)y \\ 0 & \cos(2.09)y \\ -\sin(1.07)y & 0 \end{pmatrix} + (-1.85-i(1.98))c_4 \begin{pmatrix} 0 & \cos(1.07)y & \sin(1.07)y \\ \cos(1.07)y & 0 & \cos(1.07)y \\ -\sin(1.07)y & \cos(1.07)y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i(5.36))c_1 \\ (-1.351-i(5.64))c_2 \\ (1+i(5.36))c_3 \\ (-1.351-i(5.64))c_4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos(1.07)t \\ -\sin(1.07)t \\ \cos(2.09)t \\ -\sin(2.09)t \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin(1.07)t \\ \cos(1.07)t \\ \sin(2.09)t \\ \cos(2.09)t \end{array} \right. +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i(10.43))c_1 \\ (-1.85-i(1.98))c_2 \\ (1+i(10.43))c_3 \\ (-1.85-i(1.98))c_4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos(2.09)t \\ -\sin(2.09)t \\ \cos(1.07)t \\ -\sin(1.07)t \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin(2.09)t \\ \cos(2.09)t \\ \sin(1.07)t \\ \cos(1.07)t \end{array} \right. +$$

Todo esto parece casi trivial pero, como veremos en la siguiente ecuación; la dependencia del tiempo se puede absorber en la concepción activa de la transformación canónica y queda sólo una matriz de constantes, que, aplicada repetidas veces a las condiciones iniciales, genera la solución del problema físico y es una representación completamente equivalente a la solución dada en términos de exponenciales complejas del tiempo.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(1+i(5.36)) \\ c_1(-1.351-i(5.64)) \\ c_1(1+i(5.36)) \\ c_1(-1.351-i(5.64)) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos(1.07/100) \\ -\sin(1.07/100) \\ \cos(2.09/100) \\ -\sin(2.09/100) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin(1.07/100) \\ \cos(1.07/100) \\ \sin(2.09/100) \\ \cos(2.09/100) \end{array} \right. +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2(1+i(10.43)) \\ c_2(-1.85-i(1.98)) \\ c_2(1+i(10.43)) \\ c_2(-1.85-i(1.98)) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos(2.09/100) \\ -\sin(2.09/100) \\ \cos(1.07/100) \\ -\sin(1.07/100) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin(2.09/100) \\ \cos(2.09/100) \\ \sin(1.07/100) \\ \cos(1.07/100) \end{array} \right. +$$

Aquí se muestra la utilidad y simpleza de este método en su expresión explícita. El papel que juega el número 100 es proporcional al grado de precisión en la graficación), Por ejemplo, aquí estamos graficando un giro de 1.072 centésimos de radian y otro de 2.089 centésimas de radian (los giros en radianes son demasiado violentos). Esto es como variar la frecuencia de un estroboscopio que nos permite ver la órbita sólo periódicamente en un instante durante un periodo inversamente proporcional a la frecuencia del estrobo. (mientras la frecuencia no sea menor que el doble de la máxima frecuencia del problema como en el

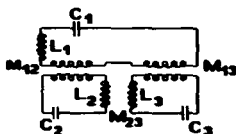
teorema de Shannon del capítulo 2). Esto nos permite establecer un compromiso entre la velocidad de cálculo y los detalles de la solución según sea necesario.

Esta última ecuación tiene ya la forma que nos es familiar, pero nótese que la matriz de coeficientes no es afectada por el tiempo, solo lo es el giro.

Entonces la solución se puede expresar como una superposición de las matrices estudiadas en este trabajo con unos coeficientes de superposición en general complejos que involucran una amplitud y una fase.

Sistema de Circuitos Acoplados

Consideremos el circuito de la figura, se usan las cargas en los capacitores como coordenadas generalizadas y las corrientes en cada bucle como velocidades generalizadas. Posteriormente, se considera una función de disipación tipo Raleigh para analizar el efecto de la resistencia.



En esta sección no se considera el efecto de la resistencia, es el caso de sistemas *conservativos*.

La lagrangiana de los circuitos acoplados de la figura es:

$$L = \frac{1}{2} (q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \begin{pmatrix} -1/C_1 & & & & & \\ & -1/C_2 & & & & \\ & & -1/C_3 & & & \\ & & & L_1 & M_{12} & M_{13} \\ & & & M_{12} & L_2 & M_{23} \\ & & & M_{13} & M_{23} & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = L_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 M_{jk} \dot{q}_k$$

$$p_1 = L_1 \dot{q}_1 + M_{12} \dot{q}_2 + M_{13} \dot{q}_3$$

$$p_2 = M_{12} \dot{q}_1 + L_2 \dot{q}_2 + M_{23} \dot{q}_3$$

$$p_3 = M_{13} \dot{q}_1 + M_{23} \dot{q}_2 + L_3 \dot{q}_3$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

De aquí se puede obtener la matriz inversa, que satisface:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

la hamiltoniana se puede obtener como:

$$H = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} - L = (p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - L$$

$$H = \frac{1}{2} (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \begin{pmatrix} 1/C_1 & & & & & \\ & 1/C_2 & & & & \\ & & 1/C_3 & & & \\ & & & (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{13} \\ & & & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{23} \\ & & & (M^{-1})_{13} & (M^{-1})_{23} & (M^{-1})_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{13} \\ & & & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{23} \\ & & & (M^{-1})_{13} & (M^{-1})_{23} & (M^{-1})_{33} \\ -1/C_1 & & & & & \\ & -1/C_2 & & & & \\ & & -1/C_3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \dots\dots(C1)$$

Solución de las ecuaciones del movimiento:

En una primera aproximación se encuentran las soluciones estacionarias para sistemas conservativos; es decir se desprecia el efecto disipativo de la resistencia.

Se resuelve primero la ecuación secular de la matriz del sistema para encontrar las frecuencias naturales:

$$\det \begin{pmatrix} -\omega & & (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{13} \\ & -\omega & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{23} \\ & & -\omega & (M^{-1})_{13} & (M^{-1})_{23} & (M^{-1})_{33} \\ -C_1^{-1} & & & & & \\ & -C_2^{-1} & & & & \\ & & -C_3^{-1} & & & \\ & & & -\omega & & \\ & & & & -\omega & \\ & & & & & -\omega \end{pmatrix} = 0$$

Usando las operaciones elementales de los determinantes para reducir a cero la parte de las primeras tres columnas y últimas tres filas se simplifica el desarrollo del determinante:

$$\omega^3 \det \begin{pmatrix} -\omega^{-1}C_1^{-1}(M^{-1})_{11} - \omega & -\omega^{-1}C_1^{-1}(M^{-1})_{12} & -\omega^{-1}C_1^{-1}(M^{-1})_{13} \\ -\omega^{-1}C_2^{-1}(M^{-1})_{12} & -\omega^{-1}C_2^{-1}(M^{-1})_{22} - \omega & -\omega^{-1}C_2^{-1}(M^{-1})_{23} \\ -\omega^{-1}C_3^{-1}(M^{-1})_{13} & -\omega^{-1}C_3^{-1}(M^{-1})_{23} & -\omega^{-1}C_3^{-1}(M^{-1})_{33} - \omega \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -C_1^{-1}(M^{-1})_{11} - \omega^2 & -C_1^{-1}(M^{-1})_{12} & -C_1^{-1}(M^{-1})_{13} \\ -C_2^{-1}(M^{-1})_{12} & -C_2^{-1}(M^{-1})_{22} - \omega^2 & -C_2^{-1}(M^{-1})_{23} \\ -C_3^{-1}(M^{-1})_{13} & -C_3^{-1}(M^{-1})_{23} & -C_3^{-1}(M^{-1})_{33} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Es conveniente en este momento introducir las constantes: $\omega_{jk} = \sqrt{C_j^{-1}(M^{-1})_{jk}}$ que son análogas a la raíz de la rigidez del resorte entre la masa en el oscilador armónico del capítulo 1.

Esta ecuación se puede escribir como:

$$\det \begin{pmatrix} -\omega_{11}^2 - \omega^2 & -\omega_{12}^2 & -\omega_{13}^2 \\ -\omega_{21}^2 & -\omega_{22}^2 - \omega^2 & -\omega_{23}^2 \\ -\omega_{31}^2 & -\omega_{32}^2 & -\omega_{33}^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(C2)$$

Todo esto es inmediatamente aplicable al caso de n grados de libertad. Y los resultados se pueden resumir en el siguiente enunciado:

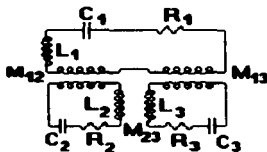
La ecuación secular del sistema (C1) es equivalente a la ecuación característica de la diagonalización de la matriz de las frecuencias naturales por $i = \sqrt{-1}$ al cuadrado (C2).

Es evidente que esta ecuación es una ecuación de tercer grado en ω^2 . Esto implica que las soluciones se distribuyen simétricamente alrededor del origen.

Podríamos llamar a las raíces de (C2): $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}$ y proceder a escribir la solución tradicional y de allí pasar a su forma de combinaciones lineales de giros simplécticos, pero este es un caso particular de (C3), por lo cual nos esperearemos hasta entonces para dar la solución.

Efectos de la Disipación:

Después se analiza el efecto de la resistencia eléctrica en los circuitos acoplados:



Para considerar los efectos de la resistencia eléctrica las ecuaciones del movimiento se deben modificar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -1/C_1 & & & & & \\ & -1/C_2 & & & & \\ & & -1/C_3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{13} \\ (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{23} \\ (M^{-1})_{13} & (M^{-1})_{23} & (M^{-1})_{33} \\ -R_1(M^{-1})_{11} & -R_1(M^{-1})_{12} & -R_1(M^{-1})_{13} \\ -R_2(M^{-1})_{12} & -R_2(M^{-1})_{22} & -R_2(M^{-1})_{23} \\ -R_3(M^{-1})_{13} & -R_3(M^{-1})_{23} & -R_3(M^{-1})_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

cuya ecuación secular es:

$$\det \begin{pmatrix} -s & & & & & \\ & -s & & & & \\ & & -s & & & \\ -C_1^{-1} & & & & & \\ & -C_2^{-1} & & & & \\ & & -C_3^{-1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{13} \\ (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{23} \\ (M^{-1})_{13} & (M^{-1})_{23} & (M^{-1})_{33} \\ -R_1(M^{-1})_{11} - s & -R_1(M^{-1})_{12} & -R_1(M^{-1})_{13} \\ -R_2(M^{-1})_{12} & -R_2(M^{-1})_{22} - s & -R_2(M^{-1})_{23} \\ -R_3(M^{-1})_{13} & -R_3(M^{-1})_{23} & -R_3(M^{-1})_{33} - s \end{pmatrix} = 0$$

determinante: mediante operaciones elementales sobre el

$$s^3 C_1 C_2 C_3 \det \begin{pmatrix} -C_1^{-1} & & & & & \\ & -C_2^{-1} & & & & \\ & & -C_3^{-1} & & & \\ -C_1^{-1} & & & & & \\ & -C_2^{-1} & & & & \\ & & -C_3^{-1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} C_1^{-1} (M^{-1})_{11} & s^{-1} C_1^{-1} (M^{-1})_{12} & s^{-1} C_1^{-1} (M^{-1})_{13} \\ s^{-1} C_2^{-1} (M^{-1})_{12} & s^{-1} C_2^{-1} (M^{-1})_{22} & s^{-1} C_2^{-1} (M^{-1})_{23} \\ s^{-1} C_3^{-1} (M^{-1})_{13} & s^{-1} C_3^{-1} (M^{-1})_{23} & s^{-1} C_3^{-1} (M^{-1})_{33} \\ -R_1(M^{-1})_{11} - s & -R_1(M^{-1})_{12} & -R_1(M^{-1})_{13} \\ -R_2(M^{-1})_{12} & -R_2(M^{-1})_{22} - s & -R_2(M^{-1})_{23} \\ -R_3(M^{-1})_{13} & -R_3(M^{-1})_{23} & -R_3(M^{-1})_{33} - s \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -(C_1^{-1} + sR_1)(M^{-1})_{11} - s^2 & -(C_1^{-1} + sR_1)(M^{-1})_{12} & -(C_1^{-1} + sR_1)(M^{-1})_{13} \\ -(C_2^{-1} + sR_2)(M^{-1})_{12} & -(C_2^{-1} + sR_2)(M^{-1})_{22} - s^2 & -(C_2^{-1} + sR_2)(M^{-1})_{23} \\ -(C_3^{-1} + sR_3)(M^{-1})_{13} & -(C_3^{-1} + sR_3)(M^{-1})_{23} & -(C_3^{-1} + sR_3)(M^{-1})_{33} - s^2 \end{pmatrix} = 0 \dots \dots (C3)$$

Ahora tendremos seis raíces en general complejas, pero como los coeficientes de esta ec. de sexto grado son reales, se tiene que las raíces están aparejadas en complejos conjugados. La parte real (negativa cuando las resistencias son mayores que cero) de estas raíces será una contracción en el espacio fase que implica una pérdida de energía.

Si llamamos $s_1, s_1^*, s_2, s_2^*, s_3, s_3^*$ a las raíces de la ecuación (C3):

La solución tradicional se escribe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix}_{s_1} e^{s_1 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2^* \\ \xi_3^* \\ \xi_4^* \\ \xi_5^* \\ \xi_6^* \end{pmatrix}_{s_1} e^{s_1^* t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix}_{s_2} e^{s_2 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2^* \\ \xi_3^* \\ \xi_4^* \\ \xi_5^* \\ \xi_6^* \end{pmatrix}_{s_2} e^{s_2^* t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix}_{s_3} e^{s_3 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_2^* \\ \xi_3^* \\ \xi_4^* \\ \xi_5^* \\ \xi_6^* \end{pmatrix}_{s_3} e^{s_3^* t}$$

También es importante notar que fácil es generalizar estas fórmulas a n circuitos acoplados.

La solución de este problema se puede obtener ya sea: como sumas y diferencias de exponenciales complejas en s y s^* por vectores propios o con matrices isomórficas con estas exponenciales complejas, que son las matrices del grupo de giro simpléctico amortiguado como en el ejemplo anterior.

Controlador con 2 Grados de Libertad.

Otra importante aplicación de este sencillo método se presenta inmediatamente en el estudio de los mecanismos animados con motores de avance por pasos, porque la cinemática de estos motores se describe muy adecuadamente con las transformaciones estudiadas en este trabajo. Eso implica que un robot se puede estudiar cinemáticamente con un sistema de coordenadas generalizadas en donde cada coordenada representa la posición de cada motor por pasos. Para aclarar estas ideas consideremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que se quiere controlar dos motores por pasos en un arreglo pantográfico como el que se muestra en la figura A1 para graficar un punto en la posición (x,y) .



para llegar a (x,y) :

El motor 1 está fijo en el origen

y debe moverse un ángulo $-\theta_1$

El motor 2 se debe mover un

ángulo de $\theta_1 + \theta_2$

Las líneas gruesas son los brazos
del pantógrafo.

Figura A1

En lugar de este ejemplo se puede elegir un arreglo azimut y elevación para apuntar un telescopio o antena parabólica, pero se escoge este ejemplo porque ilustra todas las posibilidades y para mostrar un arreglo con cierta similitud con un brazo de robot.

De la figura A1, tenemos

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 \\
 y &= -a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2
 \end{aligned}$$

Con este arreglo podemos alcanzar cualquier punto x, y distante del origen menos que $2a$.

En otras palabras podemos graficar con el pantógrafo de brazos a y a cualquier punto dentro del círculo de radio $2a$, como se puede demostrar con la siguiente construcción geométrica:

Con un compás de radio a trazar desde (x, y) un arco y otro con el mismo radio desde el origen. Estos se deben cortar porque la distancia entre el origen y el punto es menor que $2a$. De hecho hay dos puntos simétricos respecto a la línea que une el origen con (x, y) que es la posición que debe adoptar el segundo motor del pantógrafo; los radios correspondientes quedan en la dirección de los brazos del pantógrafo.

Este problema es equivalente al de trazar un triángulo isósceles de lados a con base $(0, 0) - (x, y)$. Hay dos triángulos simétricos a cada lado de la base.

Sean θ_1 y $\theta_1 + \theta_2$ (posiciones de los motores por pasos) las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 .

$$\begin{aligned}
 x/a &= \cos q_1 + \cos(q_2 - q_1) \\
 y/a &= -\sin q_1 + \sin(q_2 - q_1)
 \end{aligned} \quad \dots (R1)$$

De aquí resulta evidente que para cambiar la escala basta reducir o aumentar proporcionalmente al cambio deseado la longitud de los brazos del pantógrafo.

También se puede normalizar el problema y sin perder generalidad poner $a=1$.

La transformación (R1) es simplemente la superposición de dos giros con ángulos $-q_1$ y $q_2 - q_1$:

$$\begin{pmatrix} x/a \\ y/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{m_1} & -\sin \frac{1}{m_1} \\ \sin \frac{1}{m_1} & \cos \frac{1}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{m_2} & \sin \frac{1}{m_2} \\ -\sin \frac{1}{m_2} & \cos \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o bien, en el caso normalizado:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{m_1} & \sin \frac{1}{m_1} \\ -\sin \frac{1}{m_1} & \cos \frac{1}{m_1} \end{pmatrix}^{-q_1 m_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{m_2} & \sin \frac{1}{m_2} \\ -\sin \frac{1}{m_2} & \cos \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}^{(q_2 - q_1) m_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando estas fórmulas el brazo siempre puede convertir su posición a coordenadas cartesianas con sólo contar el número de pasos que ha dado.

Comparando su posición instantánea un autómata puede aproximarse por ensayo y error hasta el lugar que más se aproxime a una (x,y) dada dentro de la resolución del motor por pasos y dentro del círculo de radio 2.

Tal procedimiento podría ser el que sigue:

Primero notamos que para una posición fija del motor 2, el motor 1 hace girar al pantógrafo completo describiendo un círculo de radio constante. Esto implica que para llegar a cualquier punto se puede ajustar el motor 2 para obtener un punto con la misma separación desde el origen y después ajustar el motor 1 para fijar la fase. Eso se puede lograr ejecutando los siguientes pasos:

1. Determinar la posición presente con la matriz de transición y calcular la distancia al origen.
2. Comparar esa distancia con la distancia al origen del punto deseado.
3. Ajustar el motor 2 aumentando q_2 si el punto está más cerca del origen que el pantógrafo o disminuyendo en caso contrario.
4. Comparar las distancias después de cada iteración hasta que la desigualdad se invierta.

(aquí queda el motor 2 en su posición definitiva.)

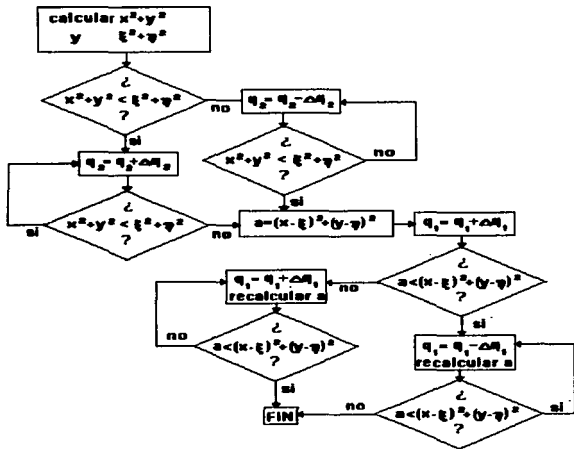
5. Ajustar el motor 1 con un giro positivo y comparar con la distancia inicial al punto deseado.
6. Si la comparación es menor seguir aumentando q_1 hasta que la desigualdad se invierta.

7. En caso contrario aplicar giros negativos (disminuyendo q_1) hasta que la desigualdad se invierta.

(aquí quedan los dos motores en su posición definitiva)

fin.

Este procedimiento se puede representar con el siguiente diagrama de flujo:



Este ejemplo ilustra la aplicación del grupo de giros simplécticos a la automatización en un caso sencillo con dos grados de libertad. La enorme simplicidad con que se resuelve el problema del pantógrafo, resulta realmente impactante.

En la implementación real de este dispositivo es necesario poner un detector de posición en la posición $(2,0)$ para calibrar la posición que después de un número bastante considerable de iteraciones, es necesario corregirla para neutralizar los errores de cálculo que se van acumulando.

Por último cabe mencionar que una plumilla se puede adaptar en la punta del pantógrafo con un resorte para subirla y un relevador para bajarla. Repitiendo la operación repetidas veces para diferentes puntos (x,y) se puede realizar cualquier gráfica con este dispositivo.

CONCLUSIONES

Se cubrieron los siguientes **OBJETIVOS**:

- Definir el concepto de Matriz de Transición en el Espacio Fase.
- Investigar las propiedades físicas de estas matrices y su aplicación al cómputo de sistemas lineales.
- Mostrar que la Matriz de Transición contiene la misma información que la solución tradicional en forma de exponenciales complejas (demostrar que la exponencial compleja dependiente explícitamente del tiempo es isomórfica con la matriz de un giro amortiguado independiente del tiempo).
- Resolver algunos problemas reales

En el espacio fase las matrices de $2n \times 2n$ adquieren un significado físico muy interesante porque la energía de un sistema es una forma cuadrática de las coordenadas generalizadas y sus correspondientes momentos conjugados. y por tanto una matriz unitaria tiene el efecto de una transformación de coordenadas que no altera el valor de la energía; correspondientemente, el determinante adquiere el significado físico de una disipación de energía. La idea de asociar a las matrices un significado físico resulta especialmente fructífera para entender sistemas dinámicos lineales cuya energía es una forma cuadrática en el espacio fase. Vimos que la solución de cualquier sistema lineal corresponde a la diagonalización de una matriz. y sus valores y vectores propios formaran precisamente las disipaciones y oscilaciones que se representan en el dominio continuo como exponenciales complejas, es decir vibraciones amortiguadas.

También es necesario mencionar explícitamente que este método puede reducir los engorrosos cálculos trigonométricos en términos de senos y cosenos a sumas y multiplicaciones sobre números racionales que son los únicos que existen para la computadora. En el controlador de dos grados de libertad del capítulo 4 como vimos, el movimiento del pantógrafo se puede describir cinemáticamente con una matriz que representa la transformación de un sistema cuando un motor de avance por pasos avanza un paso.

Esta matriz (los elementos de esta matriz) se puede establecer de antemano usando por ejemplo números pitagóricos y entonces el cálculo de la posición en el pantógrafo se reduce a la suma y multiplicación de números racionales fijos. Esto reduce considerablemente la programación de un autómata con estas características.

Otro beneficio derivado de este análisis de los sistemas lineales se encuentra en proporcionar al investigador una plataforma alternativa para estudiar los mismos problemas que se resuelven tradicionalmente con el método de la transformación de Laplace, en el capítulo 2 vimos la gran utilidad de este método para obtener una intuición geométrica del teorema de Shannon que usualmente se formula en términos muy abstractos. El acostumbrarse a pensar en términos de transformaciones puede aclarar algunos tópicos que son difíciles de entender con la transformación de Laplace y los otros métodos.

En la concepción pitagórica del universo, todo está hecho de números y el hecho de poner las soluciones de problemas físicos en términos de arreglos numéricos y dar a estos arreglos una interpretación física es algo que indudablemente nos acerca a este ideal.

Bibliografía

- [1] H. GOLDSTEIN. *Mecánica Clásica*, Segunda Edición, Reverté 1988.
- [2] H.W. TURNBULL *The Theory of Determinants, Matrices and Invariants*. 5th edition, Dover 1965.
- [3] W.T. THOMSON *Mechanical Vibrations*, Second Edition , Prentice Hall 1953.
- [4] H. WEYL *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover 1950.
- [5] R. BELLMAN & R. KALABA *Dynamic Programming and Modern Control Theory* Academic Press 1965.
- [6] A. SOMMERFELD *Lectures in Theoretical Physics* Vol. VI., Academic Press
- [7] G. BIRKHOFF & S. MACLANE *A Survey of Modern Algebra*, Editorial Macmillan, 1944.
- [8] R. COURANT & D. HILBERT *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, 1956.
- [9] J.L. COOLIDGE *A History of Geometrical Methods*, Oxford 1940

NOTAS

**ESTA TESIS NO PUEDE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

NOTAS

NOTAS