6
21

004603.

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"



## " EL EFECTO DEL REASEGURO CON RESPECTO AL GRADO DE RIESGO EN UN PORTAFOLIO DE SEGUROS "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

DANIEL CASTRO CARRILLO

MEXICO, D. F. 1997

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENTMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA
PROGRAMA DE ACTUARIA

Sr. Daniel Castro Carrillo
Alumno de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e :

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 25 de marzo de 1996, me complace notificarle que esta Jefatura tuvo a bien asignarle el siguiente tema de tesis: **"EL EFECTO DEL REASEGURO CON RESPECTO AL GRADO DE RIESGO EN UN PORTAFOLIO DE SEGUROS"**, el cual se desarrollará de la siguiente manera:

I.- Reaseguro Proporcional
II.- Reaseguro por exceso de Pérdida
III.- Reaseguro para mas de dos Riesgos
IV.- Estrategias para el pago de Dividendos
Conclusiones
Bibliografía

Asimismo fue asignado como Asesor de Tesis el Act. Miguel Angel Macías Robles, profesor de esta Escuela.

Ruego a usted tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar examen profesional; así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la tesis el título del trabajo realizado.
Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la tesis.

E.N.E.P. ACATLAN

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL E[illegible]
Acatlán, Edo. de Méx., a [illegible] de 1997.

ACT. MARIA DEL CARMEN GONZALEZ VIDECARAN
JEFE DE LA DIVISION DE MATEMATICAS E INGENIERIA

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARIA

# AGRADECIMIENTOS

A DIOS
POR DARME LA OPORTUNIDAD DE LOGRAR MI TITULO.

A MIS PADRES
POR SER UN GRAN EJEMPLO PARA MI.

A MIS HERMANAS
POR QUE SIEMPRE ME HAN APOYADO EN TODOS LOS MOMENTOS DE MI VIDA.

A MI MAMA LUCHA
POR QUE SIEMPRE ESTA CONMIGO.

A LA FAMILIA BOTELLO DE LAS HERAS
POR QUE GRACIAS A USTEDES PUEDO VER MI SUEÑO REALIZADO.

A MIS TIS TIOS Y PRIMOS
POR SER UNA GRAN FAMILIA.

A LA FAMILIA FUENTES CASTRO
POR SU ENTUSIASTA APOYO.

AL ACT. MIGUEL ANGEL MACIAS
POR SU VALIOSA AYUDA PARA LA CULMINACION DE ESTA TESIS.

AL ING. JAIME NUÑEZ NASSAR
POR QUE MAESTROS CON SU CALIDAD Y ENTUSIASMO SON DIFICILES DE OLVIDAR.

AL ACT. IGNACIO CANO CERVANTES
POR SU VALIOSO TIEMPO, EN LA REVISION DE ESTE TRABAJO.

AL ACT. YOLANDA ZEPEDA ZEPEDA
POR SUS APORTACIONES AL CONTENIDO DE ESTE TRABAJO.

AL C. P. ERENDIRA FLORES
POR SUS IDEAS PARA EL MEJORAMIENTO EN LA PRESENTACION DE LA TESIS.

AL ACT. ARTURO ROLDAN CEBALLOS
POR SU AYUDA EN LA ELABORACION DE ESTA TESIS.

# INDICE

# Indice General

**Capitulo 4**

# INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad las personas tuvieron que idear un método para la prevención de perdidas a causa de siniestros naturales ó provocados por otras personas, por esta razón es que existe una institución jurídica, capaz de poner a las personas en cobertura, ante los riesgos que le amenazan cada día, con el mínimo sacrificio económico posible[(1)]. Así nace el seguro como una forma de indemnización ante alguna contingencia futura, fortuita e incierta.

La indemnización es el importe que esta contractualmente obligada a pagar la aseguradora en caso de producirse la eventualidad prevista en el contrato del seguro[(2)].

Por seguro se entenderá un contrato por el cual una persona, razón social ó bienes materiales queden protegidos ante la perdida de sus bienes ó de su persona o de algún bien de interés asegurable. Recordaremos que un seguro se basa en la distribución de riesgos entre el asegurado y el asegurador.

Riesgo es la probabilidad de que ocurra un suceso que ocasione perdidas a una persona física o moral, esto es, debido a dispersión de los resultados esperados que pueden ser adversos al suceso planeado[(3)].

Un interés asegurable es la razón que impulsa a algún individuo a adquirir protección sobre una persona ó bien material y existe cuando el asegurado desea cubrirse ante una desventaja economica, con la cual el asegurado adquiere un beneficio en caso de siniestro. El interes asegurable es esencial para contratos de seguros, para que la póliza pueda ser ejecutable, en consecuencia, es importante comprender en forma precisa que es lo que constituye el interés asegurable, en la cobertura de la póliza[(4)].

Cobertura se refiere a los riesgos y daños potenciales amparados por el contrato; suele ser de dos tipos: amplia (si se amparan varios riesgos) y limitada (uno ó dos riesgos incluidos)[(4)].

(1) Manual Del Curso Propedeutico Para Formacion De Intermediarios Provisionales De Seguros
Monterrey Aetna Agosto de 1996, Pag 8
(2) El Reaseguro De Los Ramos Generales
Compañía Suiza De Reaseguros, Segunda Edicion, 1996 pag 23
(3) Manual Del Curso Propedeutico Para Formacion De Intermediarios Provisionales De Seguros
Monterrey Aetna Agosto De 1996, Pag 12
(4) Introducción Al Seguro De Vida En Mexico
Act. Maria De La Paz Barroso Mejia 1991 Pag 1

El principio en el que se fundamenta el seguro es el de la distribución de riesgos, ya que la perdida de un solo individuo no podría soportar por si solo, puede ser soportada por un grupo de individuos, si el valor de tal pérdida se distribuye adecuadamente entre sus miembros atravéz de un acuerdo legal ante cierta institución aseguradora(4).

En ocasiones las reclamaciones por siniestralidad, hechas a la aseguradora por parte del asegurado tienen un costo muy alto, es por esto que las compañías aseguradoras tienen que respaldarse con otro tipo de compañías, que se encargan de apoyar a la aseguradora en la indemnización de los siniestros ocurridos durante la vigencia de la póliza; A este tipo de compañías se les conoce como reaseguradoras.

El reaseguro es el seguro del riesgo asumido por el asegurador durante la vigencia del contrato entre el asegurado y la compañía aseguradora(5)

El reaseguro es siempre un seguro de indemnización para lo cual la compañía reaseguradora establece su participación en la emisión de la póliza por medio de una confirmación de reaseguro enviada a la aseguradora, en donde se señala el porcentaje de participación de la reaseguradora; previo a este documento la aseguradora manda a la reaseguradora una oferta de participación, la cual contiene todas las condiciones para emitir las pólizas como por ejemplo, la suma asegurada, la prima, la participación del broker, la reserva, etc.

Existen varias razones por las cuales una persona desea asegurarse para quedar cubierto ante diferentes riesgos que puedan ocurrir, como por ejemplo el quedar amparado ante alguna contingencia, ó también la pérdida de un bien de interés asegurable, de esta forma la compañía aseguradora desea reasegurarse para evitar que existan algunas contingencias que puedan hacer a la compañía insolvente para pagar los siniestros de sus clientes.

En efecto, se asume que el asegurador desea reasegurar una parte de su portafolio transfiriendo algunos riesgos y reteniendo otros para reducir los mismos.

(4) Introduccion Al Seguro De Vida En Mexico
Act. Maria De La Paz Barroso Mejia 1991 Pag. 1
(5) El Reaseguro De Los Ramos Generales
Compañia Suiza De Reaseguros Segunda Edicion 1996 Pag. 24

Definimos la retención de riesgos como el monto que resulta de la decisión de no transferir a terceros el riesgo total ó parcial atravez de reaseguro, coaseguro, etc[6].

También se define la transferencia de riesgos como la parte del valor del riesgo que se transfiere.

Se conocen dos tipos principales de contrato de reaseguro con distintas características pero con el mismo objetivo; el tratar de tener participación sobre las pólizas emitidas por la compañía cedente, así como también mantener un apoyo económico para la misma aseguradora. Estos dos tipos de contratos se conocen como:

- Reaseguro facultativo.
- Reaseguro automático u obligatorio.

El reaseguro facultativo es el mas antiguo de los dos y tiene como característica particular que la compañía aseguradora se encarga de ofrecer el riesgo, dando toda la información necesaria para poder evaluar la calidad del mismo riesgo y así confirmar la participación por parte de la reaseguradora.

En determinado momento el mantener reaseguros facultativos pueden producir un gran gasto de administración, es por esta razon que conviene emplear en algunos casos el reaseguro obligatorio.

Por gasto de administración entenderemos todos los gastos que tienen como característica el sostenimiento de la actividades destinadas a mantener la dirección y administración de la empresa y que sólo de un modo indirecto están relacionados con la operación de vender[7].

(6) Seminario De Alto Nivel Incendio
Julio 1995, administracion De Riesgos
(7) Primer Curso De Contabilidad
Elias Lara Flores. Décima Edicion 1989, Pag.56

Es importante aclarar que en el reaseguro facultativo todos los cambios emitidos por la aseguradora con respecto a la póliza debe tener el visto bueno por parte de la reaseguradora, la cual recibe una oferta de participación enviada por la misma aseguradora, informando acerca de estos cambios; Si la reaseguradora esta de acuerdo con lo emitido en la oferta, entonces se emite una confirmación de reaseguro aceptando las condiciones emitidas por la aseguradora.

El reaseguro obligatorio es un convenio en el cual la reaseguradora esta obligada a aceptar una participación determinada del riesgo que la aseguradora cede hasta un limite de participación fijado previamente, esto es con el fin de agilizar tramites administrativos de clientes que llevan tiempo asegurándose con la misma compañía, pero el objetivo mas primordial es conseguir un volumen mas importante de negocios.

Los dos tipos de contrato de reaseguro se basan en el principio de buena fe.
Tanto el reaseguro facultativo como el reaseguro obligatorio cuentan con dos tipos de participaciones los cuales se conocen como:

- Reaseguro proporcional
- Reaseguro por exceso de perdida

El reaseguro proporcional tiene como objetivo la distribución de la responsabilidad de acuerdo a la cobertura de riesgo proporcionalmente basada en la suma asegurada. Esta distribución de riesgos se efectúa en base a un porcentaje de los mismos.

El reaseguro por exceso de perdida se basa en la distribución de los riesgos en base a la siniestralidad.

Existen varios sistemas particulares del reaseguro proporcional, entre los cuales se conocen los siguientes:

1. Cuota Parte
2. Excedente
3. Facultativo Obligatorio
4. Open Cover
5. Cobertura Semiautomática
6. Obligatorio Facultativo
7. Cuota Parte Combinada Con Excedente

Igualmente para el reaseguro por exceso de perdida se conocen los siguientes:

1. Cobertura Por Riesgo (WXL)
2. Cobertura Por Evento(XL Catastrófico)
3. Cobertura Por Exceso De Perdida Anual (Stop-Loss)
4. Cobertura En Segundo Riesgo

Es importante mencionar que la participación de la cedente y del reasegurador es calculada en base a la suma asegurada si se habla de reaseguro proporcional; pero si en cambio, la repartición del negocio se efectúa sobre la base del siniestro, tenemos un reaseguro no proporcional o en exceso de perdida.

Para el estudio del efecto del reaseguro con respecto al grado del riesgo en un portafolio de seguros anteriormente mencionado se analizara la participación de ambas compañías con respecto a las coberturas antes mencionadas en forma general, lo mas importante de las coberturas será la participación que retiene la aseguradora y la participación que cede a la reaseguradora.

A continuación se mencionaran los distintos contratos de reaseguro en forma general:

En el contrato de cuota parte, la cedente se compromete a retener y a ceder proporciones fijas de todos los negocios suscritos hasta determinado limite.

En el sistema de reaseguro en excedente, la compañía cede solamente los importes que ella no puede ó no quiere retener por cuenta propia.

Las coberturas facultativo-obligatoria son una particularidad del sistema de reaseguro por excedente y se distingue por el hecho de que la cedente no tiene obligación de ceder al contrato, sino que conserva la libertad de decidir que negocios y en que amplitud desea reasegurar. El reasegurador, en cambio, se obliga aceptar todas las cesiones, dentro de los limites fijados, por el numero de riesgos y por el importe máximo.

El open cover es una variante de la cobertura facultativo-obligatoria y como su nombre lo indica es una cobertura abierta, donde la cedente tiene la facultad de reasegurar, y el reasegurador tiene que aceptar todos los negocios aportados al contrato, hasta un importe determinado si el importe de cobertura es expresado en un numero de riesgos.

La cobertura semiautomática es un sistema en el cual la compañía ofrece todos los riesgos sobre una base facultativa, y mientras el reasegurador analiza los riesgos, la cobertura se coloca en un "contrato marco" para tener suficiente tiempo de determinar si el riesgo es asumible.

En la cobertura obligatoria-facultativa se maneja alreves de la cobertura facultativa-obligatoria, ya que aqui la aseguradora tiene la obligación de ceder los riesgos y la reaseguradora puede determinar si los acepta o no.

El sistema de cuota parte combinada con excedente se utilizara cuando una cuota-parte no puede aceptar sola la totalidad de la portafolio; entonces se puede optar por completarla con un excedente.

Las coberturas por exceso de perdida, se caracterizan particularmente por lo siguiente:

La cobertura por riesgos (WXL) (working excess of loss):
Protege al asegurador contra siniestros que sobrepasen determinada parte del importe que decidió conservar por cuenta propia en un riesgo dado.

En la cobertura por evento (XL Catastrófico):
Se ofrece al asegurador una protección contra los cúmulos que resulten cuando numerosos siniestros son causados por el mismo evento (tempestad, terremoto, conflagración) en general, ampara la retención contra los riesgos catastróficos.

La cobertura por exceso de pérdida anual (stop-loss):
Tiene como finalidad proteger los resultados anuales de la compañía en un ramo contra una desviación negativa debido a una incidencia de siniestros crecida ya sea por el número o por la importancia.

La cobertura en segundo riesgo es una mezcla de reaseguro por riesgo y reaseguro por evento, solo se ocupa en "Autos y Responsabilidad civil" donde el siniestro puede afectar tanto a un solo riesgo, como a varios riesgos a la vez.

Durante todo el trabajo se hablará de la solvencia neta constante, la cual significara para nosotros la cantidad de solvencia que tiene la compañía aseguradora para afrontar futuras siniestralidades ocurridas durante un determinado tiempo.

Este trabajo será estructurado de la siguiente manera:

Todo lo referente al reaseguro proporcional, tanto la solvencia neta constante por parte de la aseguradora, como sus particularidades se analizarán, en el capitulo primero, mientras que lo mismo pero referente al reaseguro por exceso de perdida se analizará en el capitulo segundo.

Para este trabajo nuestro interés no esta dirigido a los diferentes tipos de contratos, sino que mas bien se enfocara a analizar de manera completa el papel que juega la reaseguradora con respecto al grado del riesgo en un portafolio de seguros, basándonos en los diferentes tipos de reaseguro, los cuales serán analizados en los dos primeros capitulos.

En el capitulo tercero analizaremos dos o mas riesgos a la vez basándonos en los métodos de participación de reaseguro.

Posteriormente en el capitulo cuatro se observarán algunas estrategias para el efectivo pago de dividendos y las ventajas de la aseguradora y la reaseguradora atravez de la maximización de la utilidad.

# OBJETIVO GENERAL

El objetivo general que pretende esta tesis es el analizar por medio de la solvencia neta constante el grado del riesgo en un portafolio de seguros; además contemplar la participación de la reaseguradora con respecto a cada riesgo contemplado en dicha portafolio.

Se analizará también la maximización de la utilidad esperada con respecto a la solvencia neta constante, además de algunas estrategias para el efectivo pago de dividendos.

# CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Asumiremos primeramente que se cuenta con una cartera de n-riesgos independientes entre si.

Cada riesgo puede estar derivado de una póliza simple o una póliza de grupo ó poliza colectiva.

El punto esencial es saber que el limite de reaseguro ya sea por exceso de pérdida o bien por reaseguro proporcional es el mismo para toda reclamación hecha para algún riesgo; aunque el limite de reaseguro puede variar de un riesgo a otro debido a que se trata de homogeneisar los riesgos lo mas posible.

Se supondrá que las reclamaciones hechas para cada riesgo se distribuirán como una poisson compuesta; también asumiremos que el numero de reclamaciones hechas para el i-esimo riesgo es un proceso de poisson con media $\rho_i$ reclamaciones cada año, y cada reclamación tiene una función de distribución acumulativa $F_i$.

El proceso de poisson es considerado porque se desea la probabilidad de $X$ cambios en un intervalo fijo de tiempo.

Cada reclamación será independiente del tiempo y de otras reclamaciones siempre y cuando esté dentro de la vigencia; también es independiente de la de otros siniestros.

Asumiremos que $F_i(0) = 0$ para cada i y solo se considerarán reclamaciones con montos positivos, esto quiere decir que cada riesgo adquirido no contiene reclamaciones acumuladas.

También diremos que P es la prima total pagada al asegurador, y que:

$$P > \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_0^{\infty} X \, dF_i(X)$$

Esta formula quiere decir que la prima total recopilada por la compañia aseguradora tiene que ser mayor al numero de reclamaciones esperadas por el monto de dichas reclamaciones.

Supóngase una reclamación simple con monto $X$ hecha para el i-esimo riesgo, si el asegurador ha decidido usar el método de exceso de perdida los limites de reaseguro serán especificados por $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$, entonces el asegurador pagará:

$$X \text{ si } X < M_i \qquad \text{ó} \qquad M_i \text{ si } X > M_i$$

Si el asegurador ha decidido usar el método de reaseguro proporcional, entonces el limite de reaseguro será especificado por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ por esto el asegurador pagara "$a_i X$" y el reasegurador pagara "$1- a_i X$".

La prima recopilada por el reasegurador con respecto al i-esimo riesgo será $P_i(\theta_i)$ donde $\theta_i$ es ya sea $M_i$ ó $a_i$ ó sea cualquier limite de reaseguro.

Denotaremos por $F_i(.,\theta_i)$ y $G_i(.,\theta_i)$ la función de distribución y la función generatriz de momentos respectivamente, del monto neto pagado por el asegurador, con respecto a una reclamación simple para el i-esimo riesgo, dando un limite de reaseguro $\theta_i$.

Por ejemplo diremos que si :

$$G_i(t, M_i) = \int_0^{\infty} e^{tX} dF_i(X) = \int_0^{M_i} e^{tX} dF_i(X) + \int_{M_i}^{\infty} e^{tX} dF_i(X)$$

Entonces

$$G_i(t, M_i) = \int_0^{M_i} e^{tX} dF_i(X) + e^{tMi(1-Fi(Mi))}$$

Lo importante del modelo ahora será n limites de reaseguro $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ donde como sabemos, puede representar $(M_1, M_2, \ldots M_n)$ ó $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, no se consideran combinaciones entre ambos riesgos.

La solvencia neta constante estará representada por una función del portafolio de seguros con respecto al grado del riesgo $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, ó sea:

$$R = R(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

y se define como el único valor positivo tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i + R\{P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_i)\} - \sum_{i=1}^{n} \rho_i G_i(R,\theta_i) = 0 \qquad \text{(a)}$$

Si existe ó cero en otro caso, tomando en cuenta las reclamaciones netas pagadas y las primas recibidas por el asegurador.

A la solvencia neta constante, también se le conoce como coeficiente de ajuste.

La condición necesaria y suficiente para la existencia de (a) será:

$$P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_i) > \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_0^{\infty} X \, dF_i(X,\theta_i) \qquad \text{(b)}$$

La prima neta total del asegurador deberá exceder a las reclamaciones netas totales esperadas.

La cantidad recopilada por la aseguradora deberá exceder al total de las reclamaciones esperadas, y como segunda condición la función generatriz de momentos $G_i(.,\theta_i)$ tenga un buen comportamiento, o sea que no tienda a infinito.

También diremos que si tomamos un conjunto de límites de reaseguro $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$, entonces diremos que la probabilidad de que el asegurador acumule remanente sobre esta cartera quedando por debajo de -U donde U nos representa el remanente mismo.

Por remanente entendemos; la cantidad de dinero obtenida por un fondo inicial mas las primas recibidas menos las reclamaciones pagadas.

Se supondra que las primas son recibidas continuamente todo el año y que las reclamaciones igualmente son pagadas en el transcurso del mismo.

Definiremos un nuevo concepto, la probabilidad de ruina como el punto donde el remanante es negativo y sea T el tiempo en el que ocurre la ruina, por lo tanto:

$$\psi(U) = Pr[T<\infty]$$

Que representa la probabilidad de ruina considerando un remanente U en un tiempo T.

El remanente esta acotado superiormente por $\exp\{-U.R(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\}$ para alguna $U > 0$, porque la probabilidad de ruina depende de que ocurra un remanente negativo.

Por lo tanto:

$\psi(U) > \exp\{-U.R(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\}$

La solvencia neta constante es una función creciente de la contribución neta del asegurado.

# CAPITULO 1

# REASEGURO PROPORCIONAL

En este capitulo, hablaremos del efecto del reaseguro con respecto al grado del riesgo analizado desde el punto de vista del reaseguro proporcional; Recordaremos que el reaseguro proporcional tiene como objetivo la repartición tanto de la suma asegurada como de la prima y los siniestros entre una compañía aseguradora y la compañía reaseguradora según un porcentaje uniforme convenido de antemano.

Nuestro objetivo en este capitulo es observar el comportamiento de la solvencia neta constante con respecto al limite de reaseguro convenido entre las dos compañias, puesto que debido a la siniestralidad que pueda ocurrir en un tiempo determinado, puede perjudicar seriamente a la compañía aseguradora.

Entenderemos por solvencia neta constante la cantidad de estabilidad que tiene la compañia aseguradora para afrontar futuras siniestralidades ocurridas durante un tiempo determinado; Para este efecto, recordaremos que contamos con un portafolio consistente en n riesgos independientes con una prima obtenida del asegurado que nos permitirá poder soportar la siniestralidad que podria llegar a ocurrir en dicho tiempo determinado y a su vez poder afrontar el pago de la indemnización de acuerdo a la participación de las dos compañias.

El análisis de la solvencia neta constante es de suma importancia ya que una variación alta en la contabilidad de la compañia debido a un siniestro podria causar la ruina de la compañia aseguradora, o por lo menos afectar grandemente la economia de la misma; Como ejemplo podemos mencionar la siniestralidad a causa de terremoto, huracán, maremoto o incluso hasta en algunas ocasiones, la siniestralidad por incendio, en un inmueble lujoso en el cual se ha invertido mucho dinero en su construcción y en su mantenimiento, podría ser suficiente para que la compañia aseguradora reporte perdidas importantes en su contabilidad.

La solvencia neta constante, la denotaremos por la literal R tal que $R=R(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_n)$ y será afin de cuentas nuestro punto mas importante por analizar, además esta función cumplirá con ciertas condiciones; la primera es que $R(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_n)$ es una función unimodal, la segunda condición es que debe de cumplir con la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i + R\{P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_i)\} - \sum_{i=1}^{n} \rho_i G_i(R,\theta_i) = 0 \qquad (1)$$

donde:

$\rho_i$: Es el promedio de las reclamaciones hechas durante un año.

R : Es la solvencia neta constante.

P : Es la prima total anual.

$P_i(\theta_i)$ : Es la prima obtenida por el reasegurador con respecto al i-esimo riesgo.

$G_i(R,\theta_i)$ : Es la función generatriz de momentos de un monto neto pagado por el asegurado.

$\theta_i$ : Es el limite de reaseguro.

Recordaremos que en la introducción de este trabajo se hablo de una condición necesaria y suficiente para el calculo de la prima total el cual será asumido como sigue:

$$P > \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_0^{\infty} X \, dF_i(X) \qquad (2)$$

Ahora bien la condición necesaria y suficiente para la existencia de (1) basándonos en la desigualdad anterior (2) nos da como resultado:

$$P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_i) > \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_0^{\infty} X \, dF_i(X,\theta_i) \qquad (3)$$

Es decir que el ingreso total neto de la compañia aseguradora, debe exceder la reclamación total neta esperada.

La segunda condición necesaria y suficiente para la existencia de (1) será que la función generatriz de momentos $G_i(\cdot,\theta_i)$ no debe tener un mal comportamiento, es decir que no debe tender a $+\infty$.

La desigualdad (2) es obvia ya que P es la prima total anual y debe ser siempre mas grande que la suma del valor promedio esperado de las reclamaciones hechas en un año, es decir que analizado desde el punto de vista de una compañía aseguradora la prima recolectada nos debe de alcanzar para poder pagar los siniestros reclamados en el año de cobertura; mientras que en la desigualdad (3) se observa la participación de la compañía reaseguradora como apoyo en la siniestralidad esperada, es por esta razón que a la prima total se le descuenta la suma de la participación de la reaseguradora para cada riesgo durante el año de cobertura; además esta nos tiene que alcanzar para poder pagar el valor esperado de siniestralidad durante el año considerando el limite de reaseguro.

Como sabemos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n)$ son los limites de reaseguro para cada riesgo, que para efectos de este trabajo y apoyado en la teoria de ruina, es un factor de seguridad $a_i$, donde $a_i$ es positivo, pues en caso contrario si $a_i<0$ ó $a_i \rightarrow 0$, entonces la probabilidad de ruina seria igual a 1, es decir se tendria la certeza de ruina.

Ahora bien considerando que la solvencia neta constante es una medida de riesgo para la cual si el limite de reaseguro es el conjunto $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n)$ entonces la probabilidad de que el reasegurador acumule remanente en este portafolio será siempre considerado como -U la cual esta acotada por $\exp\{-U \cdot R(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n)\}$ para toda $U>0$.

Una medida mas obvia del nivel del riesgo en un portafolio de seguros es la varianza de las reclamaciones anuales totales netas ya que este tipo de análisis llevaria consigo la variación con respecto al valor esperado de la reclamación, asi como la repercusión económica dentro de la compañía aseguradora.

La solvencia neta constante tiene dos ventajas importantes como medida de riesgo cuando se compara a la varianza; la primera es que generalmente se tomaran en cuenta mas momentos de la distribución de reclamaciones netas además de la media y la varianza, la segunda ventaja es que la solvencia neta constante no depende únicamente de la distribución de reclamaciones netas sino que también sobre la prima neta.

Supondremos que $X$ se distribuye como una función de densidad exponencial por ser esta una función lineal sencilla, pero podemos utilizar cualquier otra función de densidad de probabilidad. Ahora introduciéndonos mas en lo que es el reaseguro proporcional haremos las siguientes consideraciones con el objeto de ampliar mas acerca de $P, F_i, G_i$ :

a) $P_i(Ai) = \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[Ai(1-ai)X]} dF_i(X) - 1 \} / A_i \qquad A_i > 0$

b) $\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$

donde:

$a_i$ : Es el limite de reaseguro proporcional para el riesgo i.
$X$ : Es el monto de la reclamación.
$A_i$ : Es un parámetro de la distribución exponencial para el calculo del limite de reaseguro

Analizando la condición (a), nos indica que la prima obtenida por el reasegurador con respecto al i-esimo riesgo bajo el limite de reaseguro proporcional es igual al promedio de las reclamaciones hechas durante el año calculado bajo el principio de la distribución exponencial con parámetro $A_i$.

Ahora bien si la variable aleatoria $X$ que mide el monto del limite de reaseguro para la compañía reaseguradora es expresado por $(1 - a_i)X$, donde $X$ es el monto de la siniestralidad reclamada y $(1 - a_i)$ es la participación de la reaseguradora y además sabemos que la función generatriz de momentos es expresada como:

$$G(X,t) = \int_0^{\infty} e^{tX} f(X) dX \qquad (4)$$

Entonces si:

$X = (1 - A_i)X \qquad t = A_i \qquad f(X) = f_i(X)$

**Donde $A_i$ es el parámetro de la distribución exponencial, tenemos:**

$$G_i(A_i,(1-a_i)X) = \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} f_i(X)\,dX \qquad (5)$$

**Además si:**

$$f_i(X) = dF_i(X)$$

**Entonces la expresión quedara como:**

$$G_i(A_i,(1-a_i)X) = \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) \qquad (6)$$

**Usando esta ecuación con respecto al principio exponencial, asumimos que la prima de reaseguro será calculada por:**

$$P_i(a_i) = p_i\{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) - 1 \} / A_i$$

$$\text{para todo } A_i > 0 \qquad i \in 1,2,\ldots,n$$

Ahora si analizamos la restricción (b) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$$

Esto quiere decir que la prima que obtiene el reasegurador, con respecto a todos los riesgos aceptados pertenecientes al portafolio de la compañía de seguros al inicio de la vigencia debe ser mayor a la prima total de los riesgos aceptados por la misma en la retención, esto es porque la prima total disminuye al ceder una parte de la prima al reasegurador, para poder tener solvencia por parte de la reaseguradora en el caso de que los n riesgos se conviertan en n siniestros y ser un apoyo económico real a la compañía aseguradora.

Debemos considerar que tanto la prima P obtenida por la compañía aseguradora con respecto a los riesgos asumidos, así como $P_i(0)$ que representa la prima cedida a por la compañía reaseguradora con respecto al i-esimo riesgo son capitalizados al principio de la vigencia.

Bajo el supuesto de que $A_i$ es el parámetro de la distribución exponencial entonces será interpretado como el tiempo de espera entre la contratación de la cobertura y la ocurrencia del siniestro, esto es porque la distribución exponencial toma como base los tiempos de espera. Además si $\hat{a}_i$ es el máximo porcentaje de limite de reaseguro que una compañia puede aceptar, entonces si decimos que $R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$ es la función que me permite manejar la solvencia neta constante bajo el conjunto de porcentajes máximos aceptados como limites de reaseguro.

Consideramos que $(1 - \hat{a}_i) / \hat{a}_i$ es la probabilidad de obtener el limite máximo de reaseguro entonces:

$$R(a_i) = A_i (1 - \hat{a}_i) / \hat{a}_i \qquad (7)$$

Si consideramos que contamos con varios riesgos, cada uno con su limite máximo de reaseguro y además como R es una función unimodal entonces:

$$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) = A_1 (1 - \hat{a}_1) / \hat{a}_1 = A_2 (1 - \hat{a}_2) / \hat{a}_2 = \cdots = A_n (1 - \hat{a}_n) / \hat{a}_n$$

Tal que si $\hat{a}_i$ es el porcentaje del limite máximo de reaseguro, entonces:

$$0 \leq \hat{a}_i \leq 1 \quad \text{para toda} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Ahora bien si $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \neq (\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$ puesto que como lo mencionamos anteriormente $\hat{a}_i$ es el porcentaje del limite máximo de reaseguro que una compañia aseguradora puede aceptar, entonces tenemos que:

$$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) > R(a_1,a_2,\ldots,a_n) \qquad (8)$$

Como ultima condición hemos considerado que R es una función unimodal de $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ puesto que estamos manejando solo una variable aleatoria $X$ que nos representa el monto de la reclamación en caso de siniestro y que está ligada totalmente con respecto a la solvencia neta constante R tanto para el asegurador y el reasegurador.

Sea W la cantidad inicial que posee el asegurador por concepto de los riesgos asegurables y $B(.,M_1,M_2,\ldots,M_n)$ la funcion de distribucion de reclamaciones anuales totales del asegurador.

Trataremos de definir que el limite de reaseguro máximo para un reaseguro proporcional es $\hat{a}_i = A_i / A_i+R$, la prueba es esencialmente simple, primero sustituimos en la ecuación ( 1 ) a $P_i(a_i)$ de la siguiente forma:

$$// P_i(a_i) = \rho_i\{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) - 1 \}/A_i // \qquad \text{para toda } A_i > 0$$

Además si $X \sim Exp(R,A_i)$ entonces

$G_i(R,A_i) = [A_i/A_i-R]$

Entonces sustituyendo en ( 1 )

$$X = (W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-\hat{a}_i)X]} dF_i(X) - 1 \}/A_i)$$

Por lo tanto si utilizamos la función de utilidad exponencial

$U(X) = [1 - e\{-R.X\}] / R$

Luego

$$U(X) = [ 1-e\{-R.(W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-\hat{a}_i)X]} dF_i(X) - 1/A_i \}]$$

$$E(a_1,a_2,..,a_n) = \int_0^{\infty} R^{-1}[1-e\{-R.(W+P-\sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-\hat{a}_i)X]} dF_i(X) - 1/A_i \}] d(B,a_1,a_2,..,a_n)$$

$\partial E(a_1.a_2,...a_n)/\partial \hat{a}_i = (\hat{a}_i R + \hat{a}_i A_i) / A_i = (\hat{a}_i(R+A_i))/A_i$

$\therefore \hat{a}_i = A_i / (R+A_i)$

Ahora tendremos tres complicaciones: la primera, será demostrar que $R(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ es una función suficientemente suave, esto es porque suavizando una curva logramos un menor error, para esto se requiere de una aplicación del teorema de la funcion implicita.

Será aplicado a una curva como sigue: Sea $C$ la curva descrita por la transformación $X$ de [a,b] una curva lisa de $R^n$; es decir supongamos que $X'$es continua y distinta de cero sobre [a,b]. Sea f una función de $R^n$ en $R^n$ que es continua en un conjunto abierto que contiene a $C$, a esta función la llamaremos función suficientemente suave.

Recordaremos que la integral de línea de f a lo largo de la curva lisa $C$ descrita por el mapeo $X$ de [a,b] se denota por $\int_C f\,dx$ y se define por:

$$\int_C f\,dX = \int_a^b f\,(X(t))X'(t)dt \qquad (9)$$

Consideraremos que f será para efectos de este trabajo la solvencia neta constante $R(a_1,a_2,\ldots,a_n) = R$ y además que su recorrido es una curva suave, porque no presenta picos, esto es obvio porque estamos manejando una función unimodal.

Por lo tanto si consideramos que R es una función con n variables entonces podemos considerar el teorema de la función implícita como:

$R(a_i) = R(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, entonces si tenemos que $f = R(A_i)$ y a su vez

$R(a_1,a_2,\ldots,a_n) = A_1(1-a_1)/a_1 + A_2(1-a_2)/a_2 + \ldots + A_n(1-a_n)/a_n$

Por esta razón podemos expresar

$R(a_1,a_2,\ldots,a_n) = R(a_i)$

Por lo tanto si

$R(a_i) = A_i(1-a_i)/a_i$

y asi logramos probar que sea cual sea el limite de reaseguro, este pertenece a una función suave. Lo cual tiene como objetivo, el buen manejo de la función, ya que se minimiza el error que se pudiera tener al realizar el análisis de la solvencia neta constante.

Supongamos que $C$ está descrita por la transformación de $R(a_i)$ en $[a,b]$ y sea $C1$ y $C2$ curvas descritas por la transformación $R(a_i)$ de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, donde $c \in (a,b)$. Entonces:

$$\int_C f(R(a_i))da_i = \int_a^b f(R(a_i))R'(a_i)da_i$$

Con lo anterior queremos especificar que si c es un punto extremo cualquiera en $C$ tal que cumpla con las condiciones establecidas anteriormente, entonces la función será una curva continua sin picos por el hecho de ser diferenciable en cada punto del intervalo $[a,b]$ y a su vez será una función suave, por lo tanto si:

$$\int_C f(R(a_i))da_i = \int_a^b f(R(a_i))R'(a_i)da_i$$

$$= \int_a^c f(R(a_i))R'(a_i)da_i + \int_c^b f(R(a_i))R'(a_i)da_i$$

$$= \int_a^c f(R(a_i))da_i + \int_c^b f(R(a_i))da_i$$

$$= \int_C f(R(a_i))da_i$$

Entonces $R(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ es una función suave.

Podriamos decir que $\int_C f(R(a_i))da_i = \sum \int_{C_i} f(R(a_i))da_i$

Ahora demostraremos que el conjunto de puntos $(\hat{a}1,\hat{a}2,\ldots,\hat{a}n)$ es el único conjunto que cumple con la propiedad siguiente:

$$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) = A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 = A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 = \cdots = A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n$$

Supongamos que existe otro conjunto de puntos $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ de limites de reaseguro los cuales no todos estos limites son máximos, donde:

$$R(a_1', a_2', \ldots, a_n') = A_1(1-a_1')/a_1' + A_2(1-a_2')/a_2' + \ldots + A_n(1-a_n')/a_n'$$

Es muy posible que para cada $a_i'$ se este desperdiciando capacidad de retención por parte de la compañia aseguradora; así:

$$A_1(1-a_1')/a_1' \leq A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1, \ldots\ldots, A_n(1-a_n')/a_n' \leq A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n \qquad (10)$$

Entonces

$$A_1(1-a_1')/a_1' + A_2(1-a_2')/a_2' + \ldots\ldots + A_n(1-a_n')/a_n'$$

$$\leq A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 + A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 + \ldots\ldots + A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n \qquad (11)$$

para toda $A_i \in [0,1]$

A su vez

$$A_1(1-a_1')/a_1' \neq A_2(1-a_2')/a_2' \neq \ldots \neq A_n(1-a_n')/a_n' \leq A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 = A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 = \cdots = A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n$$

y así demostraremos que el conjunto de limites de reaseguro máximo $R(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$ es el único que cumple con la propiedad

$$R(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n) = A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 = A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 = \cdots = A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n$$

Retomando (10) y (11) por ultimo se demuestra que el conjunto de limites de reaseguro máximo para la función R es el máximo global: Esto es porque si :

$$A_1(1-a_1')/a_1' \leq A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 \ldots\ldots A_n(1-a_n')/a_n' \leq A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n$$

y además

$$A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 = A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 = \cdots = A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n = R(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$$

y a su vez

$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) = A_i(1-\hat{a}_i)/\hat{a}_i$

Por lo tanto es el limite de reaseguro máximo global de la función R,

Debemos recordar que el limite de reaseguro para el i-esimo riesgo a sido calculado usando el principio exponencial con parámetro $A_i$.

## Resultado 1:

Por lo tanto haciendo las siguientes suposiciones:

a) $P_i(a_i) = p_i\{\int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) - 1\}/A_i \qquad A_i > 0$

b) $\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$

Podemos concluir que:

i) Hay un único conjunto de puntos $(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$ tal que

$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) = A_1(1-\hat{a}_1)/\hat{a}_1 = A_2(1-\hat{a}_2)/\hat{a}_2 = \cdots = A_n(1-\hat{a}_n)/\hat{a}_n$

siempre que $0 \leq \hat{a}_i \leq 1$ para $i = 1,2,\ldots,n$

ii) Para un conjunto de puntos

$(a_1,a_2,\ldots,a_n) \neq (\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$

tenemos:

$R(a_1,a_2,\ldots,a_n) < R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$

iii) R es una funcion unimodal de $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

La principal esencia de los resultados es que sirve para concluir para que el asegurador pueda basándose en los resultados anteriores maximizar la retención y esta a su vez esta no perjudique la contabilidad de la compañia, además se asume que la solvencia neta constante es una función unimodal de un limite de reaseguro proporcional. En particular si la prima de reaseguro es calculada de acuerdo al principio exponencial el valor máximo de la solvencia neta constante puede ser fácilmente encontrado.

## CONCLUSIONES:

Con los anteriores desarrollos podemos concluir que la solvencia neta constante, la cual representa el coeficiente de ajuste para el limite de reaseguro proporcional

$$R(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n) = A_1\,(1-\hat{a}_1)\,/\,\hat{a}_1 = A_2\,(1-\hat{a}_2)\,/\,\hat{a}_2 = \cdots\cdots = A_n\,(1-\hat{a}_n)\,/\,\hat{a}_n$$

Para un conjunto de riesgos $(\hat{a}_1,\hat{a}_2,\ldots,\hat{a}_n)$.

Entonces la solvencia neta constante maximizara la retención de la aseguradora maximizando la utilidad.

## EJEMPLOS:

**Considerando el caso de que n=1 sobre tres diferentes suposiciones.**

**En cada caso la distribución de reclamaciones serán:**

a) La distribución exponencial
b) La distribución pareto truncada
c) La prima total del asegurador

**a) La distribución exponencial**

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 \exp\{-0.2(x-5)\} & \text{para } x \geq 5 \\ 0 & \text{para } x < 5 \end{cases}$$

Esta distribución tiene como media 10 y varianza 25.

Asumiremos que la prima de reaseguro es calculada usando el **principio del** valor esperado con un 30% retenido por la aseguradora.

Si $P_i(a_i) = p_i\{\int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) - 1\}/A_i$ Entonces

$P(a = 0) = \rho(1.3)*10$

De igual forma supondremos que $A_i = 0.0383$.

El valor máximo $R(a) = 0.0480$ lo cual ocurre cuando

$\hat{a} = [A_i/A_i+R] = 0.0383/(0.0383+0.0480)$

El valor de $R(a=1) = 0.0213$

**b)La distribución pareto truncada**

Asumiremos que la prima de reaseguro es calculada usando el **principio** exponencial con parámetro 0.0360.

**La función de densidad de probabilidad es:**

$$f(x) = 3x^{-4}/6.7^{-3} - 93.3^{-3} \qquad \text{para } 6.7x \leq 93.3$$
$$0 \qquad \text{para } x < 6.7 \text{ y } x > 93.3$$

De igual forma asumiremos que la prima de reaseguro es calculada bajo el principio de valor esperado con un 30% cargada a la aseguradora.

Esta distribución tiene como media 10 y varianza 25.

Entonces $P(a = 0) = (1.3)*10*p$.

El valor máximo de R(a) es 0.0487 el cual ocurre cuando

$\hat{a} = A/(A\text{-}R) = 0.0360/(0.0360+0.0487) = 0.425$

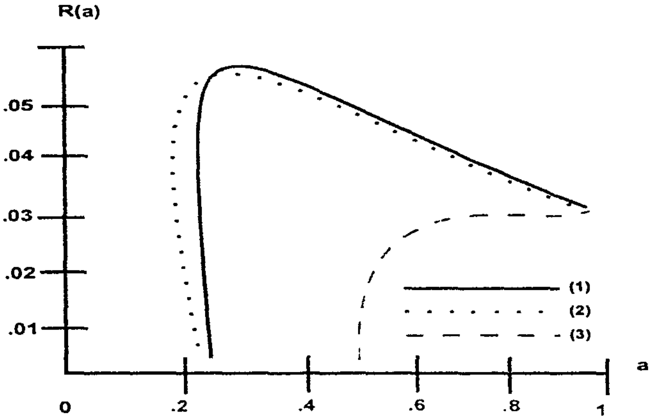
**c) La prima total del asegurador:**

Usamos la distribución exponencial de reclamaciones pero asumimos que la prima de reaseguro es calculada bajo el principio del valor esperado con 30% retenido por el asegurador.

El valor máximo de R(a) = 0.0214 el cual ocurre cuando

$\hat{a} = A/(A+R) = 0.947$

# REASEGURO PROPORCIONAL




1) DISTRIBUCION EXPONENCIAL

2) DISTRIBUCION PARETO TRUNCADA

3) PRIMA TOTAL DEL ASEGURADOR

# CAPITULO 2

# REASEGURO POR EXCESO DE PERDIDA

En este capitulo hablaremos de la solvencia neta constante con respecto al reaseguro por exceso de perdida. Recordaremos que por reaseguro por exceso de pérdida entenderemos la repartición de las responsabilidades entre la compañía aseguradora y la compañía reaseguradora en base al siniestro y no a la suma asegurada, como ocurre con el reaseguro proporcional

En compensación de la cobertura otorgada, el reasegurador recibe un porcentaje de la prima o de las primas originales y la no proporción correspondiente a la suma asegurada como en el reaseguro proporcional.

Existen varios tipos de coberturas no proporcionales, los cuales no analizaremos en este trabajo pero mencionaremos las caractericas de los contratos por exceso de pérdida:

- El monto de las cesiones no se determina caso por caso, de modo que la cedente no tiene que enviar planillas de cesion ni llevar registro de reaseguro, sino que se limitará al envio de borderaux de siniestros.
- Las operaciones contables quedan reducidas a un minimo.
- Se consigue una disminución de los gastos de administración.
- La prima de reaseguro ya no se calcula sobre cada cesión, sino sobre el conjunto de la cartera de la cedente dentro de un ramo.
- El costo de reaseguro (la prima) es un factor determinado de antemano, lo que permite a la cedente establecer un presupuesto de gastos.
- El costo de reaseguro puede variar considerablemente de un ejercicio a otro, según la evolución de la siniestralidad y también del mercado de reaseguro.
- Normalmente no existe participación en las utilidades que recompense a la cedente por la buena marcha de los negocios.
- El reasegurador no deposita reserva para riesgos en curso, por lo que la cedente deberá ella sola asegurar el financiamiento de los negocios.

Ahora bien en esta sección restringiremos nuestra atención al reaseguro por exceso de perdida para nuestro portafolio de seguros.

Estamos interesados en la conducta de $R(M_1,M_2,\ldots\ldots,M_n)$ la cual representa la solvencia neta constante para el reaseguro por exceso de perdida, como una función de $(M_1,M_2,\ldots\ldots,M_n)$ y la teoria básica a ser utilizada será:

a) $dF_i/dx$ existe y es continua siempre.

b) $P_i(M_i) = (1+\alpha_i)\int_{M_i}^{\infty} (X-M_i)dF_i(X)$ para toda $\alpha_i > 0$

c) $\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$

Basándonos en las tres suposiciones anteriores analizaremos la solvencia neta constante.

Tomaremos primeramente la suposición (b) y si asumimos que $x \sim \exp((1+\alpha_i),M_i)$ entonces podemos encontrar el valor de $M_i$.

Apartir de la ecuacion de la prima anual de la compañia reaseguradora para el i-esimo riesgo aplicando la ecuacion de Lundberg tendremos:

$$(1+\alpha_i)\left(\int_0^{\infty} X dF_i(X) - M_i(1-F_i(M_i))\right)$$

donde $\alpha_i$ es una constante positiva.

Si denotamos a W como la cantidad inicial que posee un asegurador por los riesgos asegurables y sea $B(.,M_1,M_2,\ldots,M_n)$ la funcion de distribucion de las reclamaciones anuales totales del asegurador para los limites de reaseguro $(M_1,M_2,\ldots,M_n)$.

Ademas tomamos en cuenta la fucion de utilidad exponencial porque es una funcion lineal que sirve para hacer optimo un limite de reaseguro debido a maximizara la utilidad esperada.

Sea $X$ la variable aleatoria de las reclamaciones anuales, ademas sea W la cantidad inicial con que cuenta la compañia aseguradora, es decir como un fondo inicial.

Entonces bajo los anteriores conceptos, como la cantidad inicial mas la prima total anual del asegurador con respecto a los riesgos adquiridos, menos la prima anual cedida a la reaseguradora, con respecto a cada riesgo por la suma de las reclamaciones hechas durante el año, de esta forma obtendremos:

$$X = W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \left( \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X) - M'_i(1-F_i(M'_i)) - Y \right)$$

Donde Y es una variable aleatoria que denota el monto para el i-esimo riesgo.

Si esta funcion la adaptamos a la funcion de utilidad exponencial, la cual quedara representada como:

$$U(X) = [1-e\{-R.W+P-\sum_{i=1}^{n} \rho_i \left( \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X) - M'_i(1-F_i(M'_i)) - Y \right)\}] / R$$

Entonces podemos obtener el valor esperado para que la funcion de utilidad anterior sea la esperada por la compañia aseguradora.

$$E(M_1,M_2,\ldots,M_n)=\int_0^{\infty} R^{-1}[1-e\{-R.W+P-\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X)\}]$$
$$+\{\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i M'_i(1-F_i(M'_i))-Y\} \, dB(Y,M_1,M_2,\ldots,M_n)$$

Por lo tanto

$$E(M_1,M_2,\ldots,M_n)=R^{-1}-R^{-1}e\{-R[W+P-\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i \int_{M_i}^{\infty} (X-M'_i)dF_i(X)\}]*$$
$$e\{\sum_{i=1}^{n}[\rho_i \int_{M_i}^{\infty} e\{R.Y\}dF_i(X)+P_i e\{R.M'_i\}]\}*$$
$$(1-F_i(M'_i))-\sum_{i=1}^{n} \rho_i$$

Diferenciando esta ecuacion con respecto a $M_i$.

$$\partial E(M_1,M_2,\ldots,M_n)/\partial M'_i = e\{R.M'_i\} - \alpha_i - 1$$

Despejamos $M'_i$ tenemos:

$$e\{R.M'_i\} = 1+\alpha_i$$

$$\mathrm{Log}(e\{R.M'_i\}) = \mathrm{Log}\,(1+\alpha_i)$$

$$\therefore\ M'_i = R^{-1}\,\mathrm{Log}\,(1+\alpha_i)$$

Ahora demostraremos que existe un único conjunto de puntos $(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n)$ tal que

$$R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n) = M'^{-1}_1\log(1+\alpha_1)=M'^{-1}_2\log(1+\alpha_2)=\ldots=M'^{-1}_n\log(1+\alpha_n)$$

Por lo tanto supongamos que existe otro conjunto de puntos $(M''_1,M''_2,\ldots,M''_n)$.

Recordaremos que cada $M_i$ representa el limite de reaseguro por exceso de perdida en una cartera de seguros.

$$R(M''_1,M''_2,\ldots,M''_n) = M''^{-1}_1\log(1+\alpha_1)=M''^{-1}_2\log(1+\alpha_2)=\ldots$$
$$\ldots =M''^{-1}_n\log(1+\alpha_n)$$

Como cada limite de reaseguro puede ser diferente y esto afecta obviamente al valor de la solvencia neta constante de cada seguro, entonces:

$$R(M''_1,M''_2,\ldots,M''_n) = M''^{-1}_1\log(1+\alpha_1)\neq M''^{-1}_2\log(1+\alpha_2)\neq\ldots$$
$$\ldots \neq M''^{-1}_n\log(1+\alpha_n)$$

Consideraremos estrictamente que si todas las $M_i$ no representan cada una el máximo limite de reaseguro dentro de la función $R(M_1,M_2,\ldots,M_n)$ entonces queda demostrado que se estara desperdiciando capacidad de solvencia por parte de la compañia aseguradora.

Este efecto se da cuando:

$$R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n) = M'^{-1}_1\log(1+\alpha_1)=M'^{-1}_2\log(1+\alpha_2)=\ldots=M'^{-1}_n\log(1+\alpha_n)$$

Porque cada limite de reaseguro es máximo total de la función $R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n)$.

Ahora para el conjunto de puntos $(M_1,M_2,\ldots,M_n)$ tenemos que:

$$R(M_1,M_2,\ldots,M_n) \leq R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n). \tag{13}$$

Porque recordaremos que cada limite de reaseguro $M'_i$ es máximo total para la solvencia neta constante; además de ser iguales entre si; solo se podría cumplir la igualdad si cada limite de reaseguro $M_i$ es máximo total para la función $R(M_1,M_2,\ldots,M_n)$.

Si imponemos una condición extra de que para cada $i=1,2,3,\ldots,n$ tenemos que $F_i(X) < 1$ para alguna $x < \infty$ entonces (13) puede ser expresada como:

$$R(M_1,M_2,\ldots,M_n) < R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n). \tag{14}$$

Para algún conjunto de puntos $(M_1,M_2,\ldots,M_n)\neq(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n)$. y $R(M_1,M_2,\ldots,M_n)$ es una función unimodal porque solo tiene un punto máximo en toda la función de solvencia neta constante, además de ser una función continua.

Otra forma de demostrar lo anterior será la siguiente:

Hay un único conjunto de puntos $M'$ tal que

$$R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n)= M'^{-1}_1\log(1+\alpha_1)=M'^{-1}_2\log(1+\alpha_2)=\ldots=M'^{-1}_n\log(1+\alpha_n).$$

Demostración:

Primero definiremos una región $\Delta$ como sigue:

$$\Delta = \{ M = (M_1,M_2,\ldots,M_n) \in (0,\infty)^n / C(m) - \mu(m) > 0 \}$$

Donde

$$C(m)= P-\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i\left(\int_{Mu}^{\infty} Xf_i\, dX - M_i(1-F_i(M_i))\right)$$

La cual representa la prima neta anual del asegurador dando el limite de reaseguro por exceso de perdida definido por el vector M y

$$\mu(M) = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\left(\int_{Mu}^{\infty} Xf_i(X)dX - M_i(1-F_i(M_i))\right)$$

Por lo tanto, este representa el monto esperado anual de las reclamaciones pagadas por el asegurador en esos limites de reaseguro.

Ahora definiremos una nueva región como sigue:

$$\Delta' = \{ M = (M_1, M_2, \ldots, M_n) \in [0,\infty]^n / C(M) - \mu(M) > 0 \}$$

ahora para $\lambda > 0$ definimos la función

$$H(\lambda)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\rho_i + P\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i\left[\int_{\lambda Log(1+\alpha_i)}^{\infty} Xf_i(X)dX - \lambda Log(1+\alpha_i)(1-F_i(\lambda Log(1+\alpha_i)))\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{0}^{\lambda Log(1+\alpha_i)} \lambda e^{(X/\lambda)} f_i(X)dX - \lambda(1+\alpha_i)(1-F_i(\lambda Log(1+\alpha_i)))\right]$$

Entonces esto puede ser demostrado de la siguiente manera:

$$\lim_{\lambda\to 0+} H(\lambda) = P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\rho_i M_i < 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} H(\lambda) = P - \sum_{i=1}^{n}\rho_i M_i > 0$$

y $d^2H/d\lambda^2 \leq 0$ para toda $\lambda > 0$

Así hay un único punto $\lambda'$ tal que

$0 < \lambda' < \infty$ y $H(\lambda') = 0$

Es claro que para la definición de $H(\lambda')$ es $G(M', 1/\lambda') = 0$

Donde $M' = \lambda\log(1+\alpha_1), \ldots\ldots\ldots, \lambda\log(1+\alpha_n)$ desde $\lambda' \neq \infty$

Por lo tanto esta claro que $M'$ esta en $\Delta$

Es usado por el reasegurador para calcular las primas bajo el principio del valor esperado con la posibilidad de un factor retenido para cada riesgo.

Entenderemos por principio de valor esperado el método para el calculo de primas, tomando como resultado la prima neta a pagar por reasegurar un riesgo; el valor esperado de este mas un recargo por gastos, impuestos, desviaciones y ganancias.
El criterio que utiliza el principio de valor esperado consiste en definir mediante una variable aleatoria, el valor económico de un proyecto de realización incierta y utilizar el valor esperado de esta como regla de decisión entre las distintas alternativas, resultando mejor aquella que tenga un valor esperado mayor.

Para fines de este trabajo diremos que:

$$M_i' = \log(1+\alpha_i) \qquad (15)$$

Es el máximo valor esperado del riesgo para el calculo de primas basado en la solvencia neta constante.

Lo anterior lo afirmamos basándonos en que $dF_i/dx$ existe y es continua siempre que $R(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ sea una función unimodal.

La suposición crucial es:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$$

La cual requiere que si el asegurador toma el conjunto de primas de cada riesgo, esto es la prima total del reasegurador que excederá a la prima total original retenida por el asegurador. Esta no parece ser una suposición restrictiva pero es claramente necesaria cuando podemos tener $R(0,0,0,\ldots,0) = +\infty$ tal que para reasegurar todo el portafolio el asegurador podria tener cero probabilidad de ruina.

Este resultado es obvio como consideración general.

El valor máximo de la solvencia neta constante del asegurador, y el valor de $M_i$' para i = 1,2,3,....,n puede ser fácilmente encontrado.

Por ultimo bajo las siguientes suposiciones llegamos al siguiente resultado:

## Resultado 2:

Entonces haciendo las siguientes suposiciones:

a) Para cada i i = 1,2,3,....,n asumimos que existe una sucesión de la función de densidad de probabilidad continua cuyo punto de convergencia es $dF_i/dx$.

b) $P_i(M_i) = (1+\alpha_i)\int_{M_i}^{\infty} (X-M_i)dF_i(X)$ para toda $\alpha_i > 0$

c) $\sum_{i=1}^{n} P_i(0) > P$

Entonces se sigue cumpliendo que:

i) Existe un único conjunto de puntos $(M_1', M_2', \ldots, M_n')$ tal que $R(M_1', M_2', \ldots, M_n') = M_1'^{-1}\log(1+\alpha_1) = M_2'^{-1}\log(1+\alpha_2) = \ldots = M_n'^{-1}\log(1+\alpha_n)$

ii) Para algún conjunto de puntos $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ tenemos que $R(M_1, M_2, \ldots, M_n) \leq R(M'_1, M'_2, \ldots, M'_n)$.

De acuerdo a la suposición (a) diremos que sea $X_n$ una sucesión de variables aleatorias que convergen en distribución, a la variable aleatoria X de manera que para cada numero real X, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(X) = F_X(X)$.

Será cumplido si:

$$\lim_{n\to\infty} \underset{-\infty < X < \infty}{Supremo} \left| F_{X_n}(X) - F_X(X) \right|$$

Con lo anterior queremos señalar que la sucesión de variables aleatorias X que representa el monto a pagar por cada siniestro bajo la distribución exponencial converge a $dF_i/dx$ si:

$$\underset{-\infty < X < \infty}{Supremo} \left| F_{X_n}(X) - F_X(X) \right| \leq \underset{j=0,1,\ldots,m}{Max} \left| F_{X_n}(X_j) - F_X(X_j) \right| + \varepsilon$$

Por lo tanto mediante la sucesión convergente y a las restricciones (b) y (c) se sigue cumpliendo que:

$$M_i' = \log(1+\alpha_i).$$

Con esto llegamos a

## Resultado 3:

Con las suposiciones del resultado 2 excepto que se reemplazara (a) por otra nueva suposición (a´) tal que:

(a´) Para cada i, i=1,2,.....,n asumimos que existe una sucesión de funciones de densidad de probabilidad con convergencia en el punto $dF_i/dx$.

# CONCLUSIONES:

De acuerdo a lo desarrollado en el capitulo y en semejanza con el capitulo anterior, podemos decir que la solvencia neta constante representa de igual forma el coeficiente de ajuste para obtener el máximo limite de retención que una compañia de seguros puede aceptar para no tener perdidas significativas, que sirvan para amenazar la economía de la compañía.

La solvencia máxima constante antes mencionada estará representada por:

$$M_i^* = \log(1+\alpha_i).$$

Ejemplos:

Considerando el caso de que n=1 sobre tres diferentes suposiciones.

También consideraremos un portafolio consistente en n riesgos simples y calcularemos R(M) de M bajo las tres suposiciones siguientes.

En cada caso la distribución de reclamaciones serán:

a) La distribución exponencial
b) La distribución pareto truncada
c) La prima total del asegurador

**a) La distribución exponencial**

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 \exp\{-0.2(x-5)\} & \text{para } x \geq 5 \\ 0 & \text{para } x < 5 \end{cases}$$

Esta distribución tiene como media 10 y varianza 25.

Asumiremos que la prima de reaseguro es calculada usando el principio el principio del valor esperado con un 30% retenido por parte de la aseguradora.

$$\text{Si } P(M) = (1.3)^*\rho^* \int_{M_i}^{\infty} (X-M_i)dF_i$$

El valor máximo de R(M) es 0.0252 y esto ocurre cuando M'=10.41 que se obtiene cuando M'*R(M')= Log(1.3) si este no es reasegurable.

**b)La distribución pareto truncada**

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}/6.7^{-3} - 93.3^{-3} & \text{para } 6.7x \leq 93.3 \\ 0 & \text{para } x < 6.7 \text{ y } x > 93.3 \end{cases}$$

Bajo la distribución pareto truncada R(M) toma su valor máximo 0.0264 en el punto M' =9.95.

Lo anterior se obtuvo de $0.0264^{-1} * \log(1.3) = 0.0264$

De igual forma es interesante notar que cuando el valor de $R(M=\infty) = 0.0207$

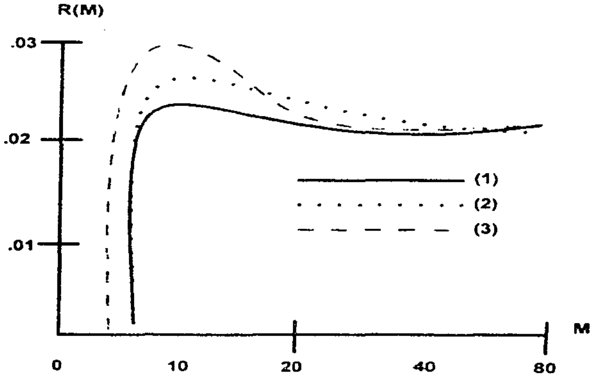
**c) La prima total del asegurador**

En este caso no asumiremos el principio del valor esperado para el calculo de la prima de reaseguro, mas bien usaremos la distribución exponencial con dos parámetros y asumimos que la prima de reaseguro es calculada bajo el principio exponencial con parámetro 0.0383.

$$P(M) = P / A\left[\int_{M}^{\infty} e^{(A(X-M))} dF(X) + F(M) - 1\right] \qquad \text{donde } A = 0.0383$$

El parámetro A será cambiado a $P(M=0) = (1.3)*10*\rho$ y el valor máximo de $R(M)=0.0296$ cuando $M=7.17$

# REASEGURO POR EXCESO DE PERDIDA




1) DISTRIBUCION EXPONENCIAL

2) DISTRIBUCION PARETO TRUNCADA

3) PRIMA TOTAL DEL ASEGURADOR

# CAPITULO 3

# REASEGURO PARA MAS DE DOS RIESGOS

En los capítulos anteriores se discutió la solvencia neta constante con respecto a un solo riesgo; Ahora en este capitulo se analizarán los resultados obtenidos anteriormente pero para un numero finito de riesgos.

Recordaremos que en el capitulo anterior se asumió que para cada i, i=1,2,.....,n, diremos que existe una sucesión de funciones de densidad de probabilidad continua cuyo punto de convergencia es $dF_i/dx$. Además consideraremos el reaseguro por exceso de pérdida y asumiremos que la prima de reaseguro es calculada usando el principio del valor esperado.

Para efectos de claridad usaremos n = 2 riesgos, pero la siguiente aplicación se puede utilizar para n > 1.

Sea $\pi_1$ y $\pi_2$ las primas totales anuales del asegurador para dos riesgos, entonces $P = \pi_1 + \pi_2$. Empezaremos por calcular cada riesgo separadamente.

Para el i-esimo riesgo, la solvencia neta constante del asegurador $R(M_i)$ es el único valor positivo tal que:

$$H_i(R) = \rho_i + R[\pi_i - P_i(M_i)] - \rho_i G_i(R, M_i) = 0$$

Para hacer esta deducción nos basamos en:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i + R\{P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\theta_i)\} - \sum_{i=1}^{n} \rho_i G_i(R, \theta_i) = 0$$

analizado en el capitulo uno. Además sabemos que por el resultado 3, $R(M_i)$ tiende un valor máximo en el punto $M'_i$ donde.

$$M'_i = R(M'_i)^{-1} \mathrm{Log}(1+\alpha_i)$$

Ahora consideraremos dos riesgos a la vez. Entonces la solvencia neta constante del asegurador estará representada por $R(M_1, M_2)$ que es ahora el único punto positivo tal que:

$$H_1(R) + H_2(R) = 0$$

Si este existe y cero en otro caso; pero si usamos lo anteriormente, definido en el capitulo 3, entonces podemos decir que $R(M_1,M_2)$ adquiere su valor máximo en el punto donde:

$$M''_i = R(M''_i)^{-1}\mathrm{Log}(1+\alpha_i) \qquad \text{para } i = 1,2$$

El problema ahora es que $R(M''_1,M''_2)$ puede no ser igual a $R(M''_1)$ esto es debido a que $R(M''_1)$ puede depender del valor de $\pi_2$, mientras que el valor de $R(M''_2)$ no depende del valor de $\pi_2$.

Así es posible que $M'_1 \neq M''_1$ y/o $M'_2 \neq M''_2$ esto puede ser visto por el resultado 2 del capitulo 2, el cual dice en la sección (ii) que para un conjunto de puntos $(M_1,M_2,...,M_n) \neq (M'_1,M'_2,...,M'_n)$ tenemos que:

$$R(M_1,M_2,\ldots,M_n) < R(M'_1,M'_2,\ldots,M'_n)$$

Lo cual es un problema similar para el reaseguro proporcional. En otras palabras si tenemos mas de un riesgo, y si consideramos como óptimo un conjunto de límites de retención que maximiza la solvencia neta constante del asegurador, entonces es óptimo cuando cada riesgo es considerado individualmente, pero puede no serlo si consideramos todos los riesgos a la vez, debido a que puede que algún riesgo no sea máximo.

El resto de este capitulo estará dedicado a proveer algunos resultados remarcados anteriormente. Para efectos de este capitulo, consideraremos 2 riesgos, y los siguientes resultados son generalizados para $n > 1$. No especificamos el tipo de reaseguro a ser considerado y no hacemos suposiciones acerca del camino para calcular la prima de reaseguro.

Entonces para hacer una generalización de los tipos de reaseguro, decimos que para $i = 1,2$ es la solvencia neta constante del asegurador cuando el i-ésimo riesgo es considerado a ser el único valor positivo tal que:

$$K_i(R) = \rho_i + R[\pi_i - P_i(\theta_i)] - \rho_i G_i(R,\theta_i) = 0$$

Si existe o cero en otro caso. $R(\theta_1,\theta_2)$ es la solvencia neta constante del asegurador, cuando ambos riesgos son considerados a la vez. Entonces proponemos los siguientes resultados:

## RESULTADO 4:

Para $\theta_1$ y $\theta_2$ fijos, tenemos

$$\mathrm{Min}\{R(\theta_1),R(\theta_2)\} \leq R(\theta_1,\theta_2) \leq \mathrm{Max}\{R(\theta_1),R(\theta_2)\} \qquad (17)$$

DEMOSTRACIÓN:

Asumiremos que $0 < R(\theta_1) \leq R(\theta_2)$ para considerar $K_i(0), K_i'(0), K_i''(R)$, $\lim_{R\to\infty} K_i(R)$ entonces podemos ver que:

$$K_i(R) > 0 \text{ si } 0 < R < R(\theta_i)$$

$$K_i(R) < 0 \text{ si } R > R(\theta_i) \qquad \text{para } i=1,2 \qquad (18)$$

$R(\theta_1,\theta_2)$ es el único valor positivo, tal que $K_1(R) + K_2(R) = 0$

Para $K_i(R)$ de (18) tenemos que

$$K_1(R(\theta_1)) + K_2(R(\theta_1)) = K_2(R(\theta_1)) \geq 0 \qquad (19)$$

Si asumimos que $R(\theta_2) \geq R(\theta_1)$ similarmente tenemos que

$$K_1(R(\theta_2)) + K_2(R(\theta_2)) = K_1(R(\theta_2)) \leq 0 \qquad (20)$$

entonces para cada $\theta_1$ y $\theta_2$ tenemos que

$$\mathrm{Min}\{R(\theta_1),R(\theta_2)\} \leq R(\theta_1,\theta_2) \leq \mathrm{Max}\{R(\theta_1),R(\theta_2)\} \quad \text{Q.E.D.}$$

Para completar el resultado anterior, y al mismo tiempo generalizar el valor del limite de reaseguro, entonces tenemos el siguiente corolario:

## RESULTADO 5:

**Si $R(\theta_i)$, el valor máximo a $\theta_i = \theta'_i$ para i=1,2 y si $R(\theta_1,\theta_2)$ es el valor máximo de $(\theta_1,\theta_2) = (\theta''_1,\theta''_2)$ entonces:**

$$\mathrm{Min}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\} \leq R(\theta''_1,\theta''_2) \leq \mathrm{Max}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\} \qquad (22)$$

## DEMOSTRACIÓN:

Por el resultado 4 y la definición de $(\theta''_1,\theta''_2)$ tenemos que:

$$\mathrm{Min}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\} \leq R(\theta'_1,\theta'_2) \leq \{R(\theta''_1),R(\theta''_2)\}$$

se completa la primera parte de la demostración, entonces similarmente

$$\{R(\theta''_1),R(\theta''_2)\} \leq \mathrm{Max}\{R(\theta''_1,\theta''_2)\} \leq \mathrm{Max}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\}$$

por lo tanto tenemos que:

$$\mathrm{Min}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\} \leq R(\theta'_1,\theta'_2) \leq \{R(\theta''_1),R(\theta''_2)\} \leq \mathrm{Max}\{R(\theta''_1,\theta''_2)\} \leq \mathrm{Max}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\}$$

Entonces

$$\mathrm{Min}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\} \leq \{R(\theta''_1),R(\theta''_2)\} \leq \mathrm{Max}\{R(\theta'_1),R(\theta'_2)\}$$ Q.E.D.

**EJEMPLO:**

Para este ejemplo usaremos el reaseguro cuota-parte.

Nuestro ejemplo tiene las siguientes especificaciones:

a) consideraremos un riesgo simple.

b) Las reclamaciones totales anuales para este riesgo tienen una distribución poisson compuesta con 100 reclamaciones esperadas cada año y cada reclamación tiene una distribución gamma.
$dF/dX = X^{4*5} \exp\{-X*5*10^{4}\} / [\Gamma(5*5)(2*10^{3})^{5*5}]$ para $X \geq 0$
la cual tiene una media de 11,000 y una desviación estándar de 4,690.

c) La prima bruta anual total del asegurador es $P = 2*10^{6}$ de la cual, una proporción $e = 0.35$ es requerida a cubrir el costo del arreglo de reaseguro o el limite de retención de reaseguro.

d)El arreglo de reaseguro por cuota parte para este riesgo, en el cual se retiene una proporción de cada reclamación y el reasegurador paga una porción (1-a).

e) La prima de reaseguro es $P(1-a) = 2*10^{6}(1-a)$ el cual es una proporción $c = 0.33$ es un respaldo al asegurador como un pago por comisión.

Entonces el impuesto neto del asegurador, después de pagar el costo y la prima de reaseguro es $P[c-e+(1-c)]$ Queremos investigar el efecto sobre el nivel del riesgo de un portafolio de seguros para la cual la variación de la proporción retenida "a" y hacemos esto como método para calcular la solvencia neta constante del asegurador como una función de la cual es el único valor positivo $R = R(a)$ de

$$\rho + R*P[c - e + a(1 - c)] - \rho \int_{\infty}^{\infty} e\{R*a*X\} dF(X) = 0 \qquad (23)$$

Se ve que para tomar c < e prevenimos que para poder asegurar totalmente el riesgo. Esto es análogo a las suposiciones (c) y ( b) en los resultados 2 y 1 respectivamente. El primer punto a analizar para el estudio de R(a) como una función de "a" es que para a $\leq$ 0.1666 el impuesto neto del asegurador es menor que las reclamaciones netas constantes y R(a) = 0.

Ahora diremos que para 0.1666$\leq$ a$\leq$ 1; R(a) es completamente proporcional al pico de una curva unimodal.

El punto numérico de interés es que el valor máximo de R(a) el cual es $4.66*10^{-5}$ esto ocurre cuando a = 0.32 si esto no es reasegurado, la solvencia neta constante R(a = 1) es igual a $2.46*10^{-5}$.

Una conclusión que podría ser dibujada para el ejemplo es que el reaseguro que valga la pena para el asegurador para el cual la reserva inicial U, es acotado superiormente para la probabilidad de salida, esta reserva puede ser reducida para $\exp(-2*46*10^{-5}*U)$ bajo $\exp(-2*46*10^{-5}*U)$ entonces es interesante hacer la pregunta ¿Dado p, P, e y F para que valores del rango de c es el reaseguro que vale la pena para el reasegurador?, en otras palabras ¿que tan alto deberá ser la tasa de la comisión para hacer que el reaseguro valga la pena?. Entonces nos enfocaremos a darle una solución a la pregunta anteriormente formulada.

Nuestro modelo es un bosquejo, y los símbolos P,c,e,F y a tienen el mismo manejo en todo el ejemplo (aunque no necesariamente los mismos valores numéricos).

Hacemos dos suposiciones básicas:

1.- La primera es que c < e

2.- La segunda es que $P(1-e) > \rho \int_0^\infty X \, dF(X) = 0$ (24)

la cual corresponde a la suposición

$$P > \sum_{i=1}^{n} \rho_i \int_0^{\infty} X \, dF(X)$$

anteriormente analizado.

La solvencia neta constante del asegurador está definida como el único valor positivo tal que

$$\rho + R^*P[c - e + a(1- c)] - \rho \int_0^{\infty} e^{\{R^*a^*X\}} dF(X) = 0$$

si esta existe o cero en otro caso.

Existe algún $L \in (0,1)$ tal que R(a) es cero si y solo si $a \in [0,L]$ ( L es el valor de "a" para el cual la prima neta del asegurador equivale a sus reclamaciones esperadas netas) la cual es 0.1666 (para efectos de este ejemplo). Ahora podemos dar el siguiente resultado.

## RESULTADO 6:

Una condición necesaria y suficiente para que un punto $a \leq [0,1]$ tal que $R(a) > R(a=1)$ es que

$$c > 1 - \rho \left[ \int_0^{\infty} X e^{\{R(a=1)X\}} dF(X) \right] / P \qquad (25)$$

y esta condición tiene a R(a) la cual es una función unimodal con un único valor máximo $\hat{a} \in (L,1)$. Si esta condición no se cumple, entonces R(a) es una función monótona no decreciente, sobre [L,1].

<u>Demostración:</u>

Primero demostraremos que R(a) es una función continua de $a \in [L,1]$ y diferenciable sobre el (L,1) en un numero suficiente de puntos. Esta es una aplicación estándar del teorema de la función implícita, pero los detalles son omitidos, pero si diferenciamos

$$\rho + R^*P[c - e + a(1-c)] - \rho \int_{-\infty}^{\infty} e\{R^*a^*X\}dF(X) = 0$$

con respecto a "a" entonces se puede ver que $\partial R/\partial a = 0$ si y solo si R=0, el cual no es de mucho interés para nosotros, solo

$$c = 1 - \rho\ [\int_0^{\infty} X\, e\{R(a=1)X\}dF(X)] / P$$

Esta es una ecuación implícita para "a" y no es todavía muy claro saber cuantas raíces tiene el intervalo [L,1]. Si diferenciamos dos veces

$$\rho + R^*P[c - e + a(1-c)] - \rho \int_{-\infty}^{\infty} e\{R^*a^*X\}dF(X) = 0$$

con respecto a "a" entonces asumimos que $\partial R/\partial a=0$ y usamos

$$c = 1 - \rho\ [\int_0^{\infty} X\, e\{R(a=1)X\}dF(X)] / P$$

Podemos demostrar que $\partial R/\partial a = 0$ lo que implica $\partial^2 R/\partial a^2$. Entonces algún punto critico de R(a) para $a \in [L,1]$ debe ser máximo. Sabemos que R(a) > 0 para $a \in [L,1]$ esto demuestra que R(a) es también una función monótona no decreciente en [L,1] o es unimodal con un único valor máximo en (L,1). Para ver de que forma se va a comportar R(a), se analizara el signo que tome el limite cuando "a" tiende a 0 ó 1 de $\partial R/\partial a$ este será positivo o cero para el primero y negativo para el segundo.

Usando:

$$\rho + R^*P[c - e + a(1 - c)] - \rho \int_{-\infty}^{\infty} e\{R^*a^*X\} dF(X) = 0$$

estamos probando que este limite es:

$$R^2\left[\rho \int_0^{\infty} X \exp\{R(a=1)X\} dF(X) - P(1-c)\right] / \left[\rho \int_0^{\infty} X \exp\{R(a=1)X\} - X^* R(a=1) \exp\{R(a=1)^* X\} dF(X)\right]$$

y como el denominador es siempre negativo tenemos:

$$c = 1 - \rho \left[\int X\, e\{R(a=1)X\} dF(X)\right] / P$$

Si regresamos al ejemplo numérico y tomamos el lado derecho de la desigualdad este se encontrará en 0.235. La conclusión del resultado 6 es que el reaseguro de este riesgo bajo los términos asumidos para que valga la pena para el asegurador el cual puede ser usado para reducir el nivel de riesgo, si la tasa de comisión es mejor que el 23.5% para nuestro ejemplo.

# CONCLUSIONES:

Al igual que en el capitulo anterior diremos que es importante hacer una generalización de los riesgos asumidos por la compañía aseguradora tomados conjuntamente pero analizados por separado para poder en determinado momento conjuntar varios tipos de reaseguro en una portafolio de seguros.

Esto beneficiara principalmente a la compañía aseguradora, al homogeneizar su cartera y así poder tener mayor control de sus riesgos.

También diremos como ya sabemos que el conocimiento de solvencia neta constante dentro del reaseguro de un cierto riesgo traerá consigo la ventaja de no tener perdidas que dañen la economía de ambas compañías y que se pueda solventar en caso de siniestro.

El contemplar varios riesgos a la vez puede traer como ventaja el poder contar una prima total anual mas grande para poder tener una reserva que pueda solventar en determinado momento un siniestro fuerte; Además de que se puede maximizar la solvencia neta constante por medio de un conjunto de limites de retención por parte de la compañía aseguradora.

# CAPITULO 4

# ESTRATEGIAS PARA EL PAGO DE DIVIDENDOS

Antes de hablar de las estrategias para el pago de dividendos nos enfocaremos al análisis de la maximizacion de la utilidad esperada para poder sacarle provecho a todas las ganancias que ambas compañias tendran en un año.

## Maximizacion de la utilidad esperada.

Durante los capitulos anteriores nos hemos dedicado a estudiar el efecto sobre la variación de los niveles del asegurador con respecto al reaseguro aceptado sobre el portafolio y tenemos medido este efecto por medio de su solvencia neta constante.

Ahora bien tenemos que demostrar que sobre ciertas circunstancias la solvencia neta constante es una función unimodal con un único valor máximo y podemos observar algún conjunto de límites de reaseguro, los cuales maximizan esta función como óptima.

La solvencia constante ésta ligada con la teoria de utilidad con respecto a una función de utilidad exponencial. En esta sección queremos considerar brevemente una relación, si existe, entre un conjunto de limites de reaseguro los cuales maxizan la utilidad esperada como óptima.

Queremos ahora considerar que conexión existe entre un conjunto de limites de reaseguro con las bases discutidas anteriormente y un conjunto de limites de reaseguro que es optimo ya que maximiza la utilidad esperada del asegurador.

Supondremos un limite de reaseguro por exceso de perdida y haremos la siguiente suposición.

Entenderemos por función de utilidad una aproximación que explique porque se toma la decisión de pagar mas que el valor esperado,esto es porque la funcion de utilidad me maximiza la utilidad esperada logrando mejores ganancias; simplemente asumiremos que el valor ó utilidad esperada de una decisión particularmente hecha para un monto W medido en pesos puede ser especificado en la forma de una función U(W).

Como sabemos, una función de utilidad exponencial esta expresada por:

$$U(W) = [\ 1 - \exp(-\theta . W)\ ] / \theta \qquad \theta > 0$$

Consideraremos limites de reaseguro óptimos ya que estos maximizan la utilidad esperada por el asegurador, ahora bien supongamos una función de utilidad exponencial y empezaremos por hacer una generalización en el caso de limite de reaseguro por exceso de perdida y con esto llegamos al siguiente resultado:

## RESULTADO 7:

La suposición y notación son como fueron analizadas en el resultado 2 y para evitar complicaciones no necesarias. Asumimos $F_i(X) < 1$ para $x < \infty$, $i = 1,2,\ldots,n$ entonces la utilidad esperada del asegurador al final del año es maximizado con respecto a la función de utilidad exponencial

$$U(X) = [\ 1 - \exp\{-\theta . X\}\ ] / \theta$$

Si el limite de reaseguro por exceso de perdida esta dado por

$$M_i = \theta^{-1} \operatorname{Log}(1 + \alpha_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

## DEMOSTRACIÓN:

Para un limite de reaseguro por exceso de perdida y para el i - esimo riesgo $M_i$ (La cual podria ser $+\infty$ ) y como sabemos, cuando ocurre un siniestro y la reclamacion es hecha, entonces la compañia aseguradora pagara un máximo de $M_i$ de este riesgo y la compañia reaseguradora pagara el exceso.

Entonces la prima anual cargada por la compañia reaseguradora con respecto al i-esimo riesgo es:

$$(1+\alpha_i)\left( \int_0^{\infty} X dF_i(X) - M_i(1-F_i(M_i))\right)$$

donde $\alpha_i$ es una constante positiva

Además si denotamos por W a la cantidad inicial que posee el asegurador por concepto de los riesgos asegurables y $B(.,M_1,M_2,\ldots,M_n)$ es la función de distribución de las reclamaciones anuales totales del asegurador para los limites de reaseguro $(M_1,M_2,\ldots,M_n)$.

Si tomamos en cuenta la función de utilidad exponencial y decimos que el parámetro $X$ estará representado por la cantidad inicial W con que cuenta la compañía aseguradora mas la prima total anual cargada al asegurador con respecto a los riesgos adquiridos menos la prima anual cargada por el reasegurador con respecto a cada riesgo por la suma de las reclamaciones hechas durante el año; de esta forma la expresión nos quedara de la siguiente forma:

$$X = W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \left( \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X) - M_i(1 - F_i(M_i)) - Y \right)$$

donde Y es una variable aleatoria que representa el monto para el i - esimo riesgo.

Por lo tanto la función de densidad exponencial quedara representada por

$$U(X) = [1 - e^{\{-\theta . W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i ( \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X) - M_i(1 - F_i(M_i)) - Y)\}}] / \theta$$

Entonces podemos obtener el valor esperado expresado como:

$$E(M_1, M_2, \ldots, M_n) = \int_0^{\infty} \theta^{-1} [1 - e^{\{-\theta . W + P - \sum_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) \rho_i \int_{M_i}^{\infty} X dF_i(X)\}}]$$
$$+ \{ \sum_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) \rho_i M_i(1 - F_i(M_i)) - Y \} \, dB(Y, M_1, M_2, \ldots, M_n)$$

Usando propiedades elementales de la distribución poisson compuesta tales como:

$$E(S) = E[\sum_{i=1}^{n} X_i N_i]$$

$$Var(S) = Var[\sum_{i=1}^{n} X_i N_i]$$

Podemos expresar el valor esperado como:

$$E(M_1,M_2,\ldots,M_n)=\theta^{-1}-\theta^{-1}e\{-\theta[W+P-\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\,\rho_i \int_{Mi}^{\infty} (X-M_i)dFi(X)\}]^*$$
$$e\{\sum_{i=1}^{n}[\rho_i \int_{Mi}^{\infty} e\{\theta.Y\}dF_i(X)+P_i\, e\{\theta.M_i\}]\}^*$$
$$(1-F_i(M_i))-\sum_{i=1}^{n}\rho_i$$

Ahora bien diferenciando la ecuación anterior con respecto a $M_i$ obtenemos:

$\partial E(M_1,M_2,\ldots,M_n)/\partial M_i = \exp\{\theta.M_i\} - \alpha_i - 1$

Despejando a $M_i$ tenemos

$$\exp\{\theta.M_i\} = 1+\alpha_i$$

$$\log(\exp\{\theta.M_i\}) = \mathrm{Log}\,(1+\alpha_i)$$

$$\therefore\ M_i = \theta^{-1}\,\mathrm{Log}\,(1+\alpha_i)$$

En forma similar podemos obtener este resultado para reaseguro proporcional.

## RESULTADO 8:

Con las suposiciones y notaciones del capitulo uno, podemos decir que la utilidad esperada por el asegurador al final del año, es maximizada con respecto a una función de utilidad exponencial y los limites de reaseguro están dados por:

$$a_i = A_i / (\theta + A_i)$$

## DEMOSTRACIÓN:

La demostración es similar al resultado 7

suponemos una función de utilidad exponencial

$$U(X) = [\ 1 - \exp\{-\theta.X\}] / \theta$$

$$\text{Si } X = (W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]}\, dF_i(X) - 1 \}/A_i)$$

Entonces

$$U(X) = [\ 1 - e\{-\theta.(W + P - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]}\, dF_i(X) - 1/A_i \}]$$

$$E(a_1,a_2,..,a_n) = \int_0^{\infty} R^{-1}[1 - e\{-\theta.(W+P-\sum_{i=1}^{n} \rho_i \{ \int_0^{\infty} e^{[A_i(1-a_i)X]} dF_i(X) - 1/A_i \}]d(B,a_1,a_2,..,a_n)$$

$$\partial E(a_1,a_2,..,a_n)/\partial a_i = (a_i R + a_i A_i) / A_i = (a_i(R+A_i))/A_i$$

$$\therefore\ a_i = A_i / (R+A_i)$$

Lo más importante de los resultados anteriores es la similitud con los limites de reaseguro tanto proporcional como por exceso de pérdida.

En cada caso tenemos que dado un parámetro $\theta$ el cual reemplaza el límite máximo de reaseguro podemos tener utilidades maximas para la compañia.

## ESTRATEGIAS PARA EL PAGO DE DIVIDENDOS

El objetivo de la compañia aseguradora es maximizar la utilidad esperada para el pago de los dividendos a los asegurados tenedores de póliza.

Entenderemos por dividendos, las utilidades que surgen por reducción en la siniestralidad, por intereses que exceden lo previsto, por recargos más elevados que los gastos y contingencias y por ganancias en las transacciones de inversión de los fondos de la compañia.

El nivel de reserva inicial se asume conocido. Las primas que son coleccionadas en cada periodo por pólizas vendidas, son conocidas al principio del periodo; las pérdidas por concepto de reclamaciones de los poseedores de pólizas, son variables aleatorias independientes, periodo a periodo.

El objetivo de la compañia aseguradora será que asumiendo la maximizacion de la utilidad esperada se apoye por medio de dividendos pagados a los poseedores de pólizas.

En cada periodo la compañia aseguradora debe decidir sobre la porción de las reservas a ser pagadas como dividendos y sobre la forma y el nivel de reaseguro decidiendo, el precio de cuota para algún contrato.

Para tener esta estrategia óptima se debe tomar una adecuada función de utilidad, la cual debe ser una función lineal.

Seguiremos suponiendo el uso de la función de utilidad exponencial

$$u(x) = -e^{-\gamma x} \qquad \gamma > 0 \qquad (2)$$

También se podrán suponer otras clases de funciones de tolerancia como por ejemplo:

$$u(x) = (ax+b)^{c+1}/a(c+1) \qquad \text{donde } ax+b > 0 \text{ y } ac < 0 \quad (1a)$$

$$u(x) = \log(ax+b) \qquad \text{donde } ax+b > 0 \qquad (1b)$$

Recordemos que para elegir una función de utilidad la condición más importante será que esta función sea lineal, por ser está una función simple.

El pago de dividendos óptimo es preferentemente lineal en el nivel de reservas, mientras tanto, el reaseguro óptimo tratado, transforma el nivel de reservas (como una función de pérdidas) el cual es independiente al prereaseguro total de la compañía de seguros. Esto únicamente depende de la función de utilidad que la compañía aseguradora utilice para marcar el precio de cuota del reasegurador y la función de densidad de probabilidad de la pérdida del prereaseguro.

## Formulación del modelo.

La compañía aseguradora afronta un problema por N periodos. Los periodos son numerados hacia atrás, tal que el intervalo (t,t-1) es el t-esimo periodo para la cual se utilizará la siguiente notación:

$\rho_t$: Primas coleccionadas por pólizas vendidas durante el periodo t. Se asumen coleccionadas al final del periodo para simplificarlas y conocer su avance.

$\xi_t$: Reclamaciones pagadas a los asegurados durante el periodo t. Una variable aleatoria la cual toma valores sobre el interior de $X_t$ y para la cual el valor será denotado por $x_t$. Para simplificar esto asumiremos que las reclamaciones son pagadas al final del año del periodo y son independientes de un periodo a otro.

$C_t$: Dividendos pagados a los asegurados al principio del periodo t (decisión variable).

$R_t$: Nivel de reservas al principio del periodo t antes de que los dividendos sean pagados.

$\varphi_t(x)$: Función de densidad de probabilidad del volumen de reservas de $\xi_t$.

Función de utilidad de la compañía aseguradora:

Asumiremos que la función de utilidad de la compañía aseguradora sobre posibles apoyos de dividendos $C = C_N, \ldots, C_1, C_0$ esta dado por una de las tres formas siguientes:

(S) Suma discontinua:

$$U(C) = \sum_{k=0}^{N} \alpha^k U(C_N - k); \qquad 0 < \alpha < 1$$

(MP) Multiplicación positiva:

$$U(C) = \prod_{k=0}^{N} U(C_N - k); \qquad U(.) < 0$$

(MN) Multiplicación negativa:

$$U(C) = -\prod_{k=0}^{N} \left[ -U(C_N - k) \right]; \qquad U(.) < 0$$

En cada caso el objetivo de la compañía aseguradora es maximizar el valor esperado de U(C).

Ahora nos concentraremos en la forma (S) puesto que las formas (MP) y (MN) se manejan de la misma forma.

REASEGURO:

Asumimos que en cada periodo t hay un reasegurador, quien acepta algún riesgo por la prima apropiada. Para el calculo de las cuotas referentes a las primas, haremos lo siguiente.

Para una variable aleatoria de reclamación $\xi_t$ (el valor denotado por $x_t \in X_t$) para la cual la función de probabilidad es conocida, el reasegurador asigna una función precio $P\xi_t(x_t) > 0$ tal que la prima para asumir un contrato estará dada por $Z_t(\xi_t)$, la cual promete pagar a la compañía cedente $\$Z_t(x_t)$ al final del periodo t dependiendo del resultado de $x_t$ de la variable aleatoria $\xi_t$ esta dada por:

$$P_t[Z_t(\xi_t)] = \int_{Xt} Z_t(x)P\xi_t(x)dx \qquad (26)$$

Como un caso marginal considerar el contrato $Z_t(x) = 1 \ \forall x \in X_t$ el cual paga \$1 a la cedente al final del periodo t sobre algún evento.

La prima o valor presente de \$1 dada por el reasegurador es:

$$P_t(1) = \int_{Xt} P\xi_t(x)dx = \Pi_t < 1 \qquad (27)$$

En otras palabras, $(1 - \Pi_t) / \Pi_t$ es la tasa de interés para el periodo t.

La descripción del proceso de reaseguro, implica que:

1. No hay costos de transacción en reaseguro.
2. Dar y prestar tasas son lo mismo.

El contrato de reaseguro tiene un margen de un periodo. Que es al final de cada periodo cuando el riesgo se realiza (el valor de $\xi$ es observado) los contratos son terminados.

Enseguida denotaremos a $P_t(x)$ la función precio de las reclamaciones y a $\xi$ del periodo t para hacer la siguiente notación $P\xi_t(x_t)$.

## FORMULACION DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA:

Como sabemos al principio de cada periodo t los niveles de reserva de la compañía aseguradora son $R_t$, por lo que se debe pagar a los poseedores de pólizas, los dividendos pertinentes $C_t$, quedándonos como remanente $R_t$-$C_t$ el cual para el final del siguiente periodo será $(R_t-C_t)/\pi_t$ donde:

$$\pi = \int_{Xt} Pt(x)dx \qquad (28)$$

Al final de cada periodo la compañia reaseguradora recolectara las primas $\rho_t$ por parte de la compañia aseguradora, además de que esta ultima deberá pagar las reclamaciones x las cuales representan el valor de $\xi_t$ y entonces la compañia no reasegura el nivel de reservas para el siguiente periodo (t-1) el cual podria ser:

$$R^{o}_{t-1}(x) = (R_t - C_t)/\pi_t + \rho_t - x \qquad (29)$$

Con reaseguro la compañia aseguradora vendera al reasegurador $R^{o}_{t-1}(x)$ y comprara $R_{t-1}(x)$ el cual estará construido como:

$$\int_{xt} R_{t-1}(x)P_t(x) = \int_{xt} [R_t - C_t/\pi_t + \rho_t - x] \qquad (30)$$

es satisfecha.

Denotaremos a la prima demandada por el reasegurador asumiendo el riesgo de $\xi_t$ por

$$\rho_t = \int_{xt} xP_t(x)dx \qquad (31)$$

Sea:

$f_t(R_t)$ : La utilidad máxima esperada para el t-esimo periodo con nivel de reserva inicial $R_t$.

Si la compañia de seguros tiene una función de utilidad de la forma (S) podemos escribir esta como un problema de programación lineal de la siguiente manera:

$$f_t(R_t) = \mathrm{Max}_{C_t, R_{t-1}}\{U(C_t) + \alpha E[f_{t-1}(R_{t-1}(\xi))]\} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad (32)$$

sujeto a la condición de que:

$$f_o(R_o) = U(R_o) \qquad (33)$$

# SOLUCIONES EN FORMA CERRADA:

El problema de programación lineal formulado por (30) (32) y (33) puede no ser generalmente resuelto analiticamente. Es por esta razón que necesitamos encontrar una forma para la solución de estos problemas.

Se asumirá adicionalmente que la función de utilidad para un periodo de la compañía aseguradora es una clase de tolerancia de un riesgo lineal /LRT).

Se supondrá que la cantidad $-U''(x)/U'(x)$ es conocida como un índice de riesgo absoluto adverso y que la inversa $-U'(x)/U''(x)$ es conocida como el índice de riesgo tolerante.

La clase (LRT) esta definida como la solución a la ecuación

$$U'(x)/U''(x) = (ax+b)/g \qquad (34)$$

donde g,a,b son números reales y $U''(x) < 0$ y $U'(x) > 0$

Podemos observar de igual forma que para las funciones de utilidad establecidas anteriormente tenemos:

$$U(x) = (ax+b)^{c+1}/a(c+1); \qquad c \neq -1,\ ax+b > 0,\ ac < 0 \qquad (1a)$$

$$U(x) = 1/a\ \mathrm{Log}(ax+b); \qquad ax+b > 0,\ a > 0 \qquad (1b)$$

$$U(x) = 1/\gamma(1-e^{-\gamma x}) \qquad -\infty < x < \infty,\ \gamma > 0 \qquad (2)$$

Esto será usado para explicar la clase Ia como:

$$a > o,\ c < -I \quad \rightarrow u(.) < 0 \qquad (Ia1)$$
$$a > 0,\ -I < C < 0 \rightarrow u(.) > 0 \qquad (Ia2)$$
$$a < 0,\ \ c > 0 \quad \rightarrow u(.) < 0 \qquad (Ia3)$$

# INTERPRETACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS OPTIMAS

## a) Los dividendos estratégicos:

Por lo regular en todo modelo de estrategias de dividendos en los niveles de reserva al principio del periodo son lineales.

Se puede encontrar dividendos negativos que significarán que los tenedores de pólizas agregen un incremento en las reservas en este momento para tener un mejor resultado para el futuro, pero claramente se insistirá que los dividendos deberian ser no negativos para que fácilmente puedan acatar las restricciones de los modelos ($1a_1$) ($Ia_2$) y (Ib) con $-b/a > 0$.

En el caso del modelo (2) representa una condición suficiente para garantizar la no negatividad de los dividendos para el n-esimo periodo es $A_N R_N + B_N \geq 0$ donde A y B son numeros reales y $\alpha \geq P_t(x)/\varphi_t(x)$ $x \in X_t$, $t = N, \ldots, 1$.

Una condición necesaria es que $\alpha \geq \pi_t$ para todo t.

## b) El reaseguro estratégico

Podemos interpretar la siguiente formula $(P_t(\phi_t)/\varphi_t(\xi_t))^{1/c}$ como una unidad riesgo post-reaseguro para el modelo (1a) que es únicamente una cantidad, la cual es una función de la variable aleatoria ($\xi_t$) y de esta forma es independiente del monto de la compañia aseguradora.

El simbolo mt puede representar el costo de una unidad de post-reaseguro riesgosa. Similarmente en el modelo (1b) la unidad de post-reaseguro riesgosa es $\varphi_t(\xi_t)/P_t(\xi_t)$ y el costo es 1.

En el modelo (2) la unidad de riesgo es Log $P_t(\xi)/\varphi_t(\xi_t)$ y el costo es $w_t$.

En el modelo (1a) y (1b) el monto del riesgo se incrementa linealmente con el nivel de reserva inicial, el cual en el modelo (2) el monto del riesgo es fijado independientemente del nivel de reservas.

Si en $P_t(x)/\varphi_t(x)$ no hay decremento en x entonces el peso del post-reaseguro de la compañia aseguradora no se incrementa en x en todos los modelos.

Esto significa que la compañía aseguradora participa positivamente en el riesgo. Es el tamaño de la reclamación x pagada por el poseedor de la póliza menos la participación de la compañía de seguros después del reaseguro.

Podemos pensar que $P_t(x)/\varphi_t(x)$ es el factor de pérdida.

Un incremento del factor de pérdida significa que el reasegurador ante ciertas pérdidas certifica que garantiza la reserva final de $1 a la cedente cuando las reclamaciones x pagadas por el dueño de la póliza son más constantes que cuando éstas son pequeñas, ésto es porque la participación normal de la aseguradora crece paulatinamente.

En los modelos (1a) y (1b) el peso del post-reaseguro $R_{t-1}(\xi_t)$ de la compañía de seguros, satisface la condición:

$$a(A_{t-1}R_{t-1}(\xi t) + B_{t-1}) + b > 0$$

Esta condición a sido acotada sobre $R_{t-1}(\xi_t)$ dependiendo sobre el signo de "a" el cual es negativo para el modelo Ia3, positivo para los modelos $Ia_1$,$Ia_2$ e Ib.

La negatividad de "a" hecho para el modelo $Ia_3$ incluye un incremento en el índice del riesgo de aberración, (en las clases $Ia_1$, $Ia_2$ Ib decrece este índice) mientras que en el modelo $Ia_2$ el índice permanece constante. Entonces la clase $Ia_3$ se da en funciones de utilidad cuadráticas.

## GENERALIZACIONES:

a) Todos los modelos pueden ser fácilmente extendidos a infinito siempre y cuando el numero de periodos N tienda a infinito. La estrategia óptima remarca cualitativamente el mismo.

b) Todos los modelos pueden ser generalizados para incluir una decisión sobre las ventas si, se asume que el volumen de ventas es una función cóncava de dinero. El dividendo óptimo y la estrategia de reaseguro remarcan esencialmente lo mismo. Esto es obvio ya que la cantidad $\rho_t$ (primas recolectadas por el dueño de la póliza o sea la aseguradora) aparece únicamente en la constante $B_t$ y no en $A_t$.

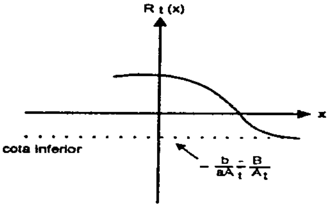
c) Las utilidades multiplicativas. Si se elige la forma (S) asumiremos que la utilidad de la compañia de seguros sobre el apoyo de dividendos esta dado por (MN) ó (MP) podemos encontrar formas de solución, pero únicamente cuando (MN) esta acompañada de la clase (1a) ó (MP) con clase (1a). Los resultados son similares. Después la estrategia de dividendos optima es lineal en las reservas, las cuales tienen que ver con la forma del post-reaseguro de la compañia aseguradora, que es independiente al peso inicial. Esto únicamente depende de la función precio, la función de densidad de las reclamaciones, el periodo primero de la función de utilidad de la compañia de seguros y del numero de periodos marcados.

## CONCLUSIONES:

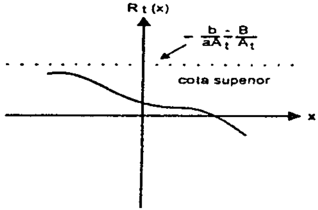
Con este capitulo empezamos primeramente con la maximizacion de la utilidad esperada en base a la solvencia neta constante y a una función de utilidad lineal exponencial y se dio solución para los dos tipos de limites de reaseguro, dando funciones para la maximizacion de los mismos.

Después se habló de los pagos de dividendos, los cuales representan apoyos para la compañía aseguradora; Se hóblo también de distintas funciones de utilidad y las ventajas que estas representan.

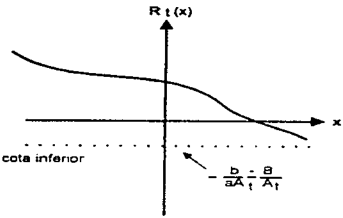
Por último se habló de las ventajas para ambas compañías así como sus caracteristicas principales.



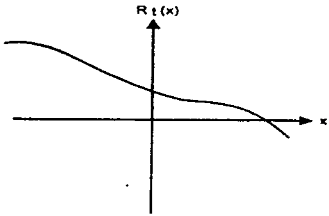

Modelos $Ia_1$, $Ia_2$




Modelo $Ia_3$




Modelos Ib




Modelo II

# CONCLUSIONES GENERALES

Con la terminación de este trabajo de tesis podemos concluir que la solvencia neta constante juega un papel muy importante en una portafolio de seguros, esto es debido a que representa la capacidad que tiene una compañía aseguradora para poder solventar un riesgo futuro, fortuito e incierto.

Se ha observado el comportamiento de la solvencia neta constante con respecto a un limite de reaseguro, el cual puede ser indistintamente un reaseguro proporcional ó bien un reaseguro por exceso de pérdida convenido de antemano entre la compañía aseguradora, la cual cede el riesgo y lo compañía reaseguradora, la cual representa el soporte económico en el negocio.

Se analizó a la solvencia neta constante, como la cantidad de solvencia que tiene la compañía cedente para afrontar futuras siniestralidades ocurridas durante un tiempo determinado.

También se analizó el compromiso de ambas compañías atravez de la siniestralidad, basándonos en los diferentes tipos de limites de reaseguro y del porcentaje de participación.

Por lo tanto se cumplió con en análisis del grado del riesgo basándonos en la solvencia neta constante de acuerdo a la participación de ambas compañías en dicho negocio.

Después se logró analizar riesgos conjuntos, siempre y cuando sean del mismo tipo de contrato de reaseguro.

Luego cuando terminaba un periodo de cobertura se logro la maximización de la utilidad esperada, en base a la solvencia neta constante y una función de utilidad exponencial lineal, analizando los dos límites de contrato de reaseguro dando funciones de maximización para los mismos.

Por último se analizó los pagos de dividendos a los asegurados, se vio la participación de ambas compañías y la solución para estrategias óptimas para el efectivo pago de las mismas.

Con esto se concluye que el conocer la solvencia neta constante para un riesgo es de suma importancia, debido a que se puede prevenir la quiebra de la compañía aseguradora.

Además se concluye que si se tiene un límite de reaseguro por alguno de los diferentes tipos de contratos que existen, estos se pueden optimizar para obtener el equilibrio deseado entre ambas compañías.

Por último diremos que la maximización de la utilidad esperada traerá ganancias a la compañía aseguradora, y que si se optimiza el pago de dividendos estas ganancias también serán recibidas por el asegurado.

# BIBLIOGRAFIA

- Introduccion Al Seguro De Vida En Mexico
  Act. Maria De La Paz Barroso Mejia
  1990.

- Introduccion Al Seguro De Daños en Mexico
  Act. Maria De La Paz Barroso Mejia
  1990.

- "El Efecto Del Reaseguro Con Respecto Al Grado Del Riesgo En Una Cartera De Seguros".
  Astin Bulletin 11 (1980) paginas 119-135
  M. Andreadakis y H.r. Waters

- "Excess Of Loss Reinsurance Limits"
  (H.R. Waters), Heriot-Watt University
  Scandinavian actuarial journal (1979).

- El Reaseguro De Los Ramos Generales
  Servicio De Colaboracion Tecnica De La Compañia Suiza De Reaseguro.

- Bühlmann H. (1970)
  Mathematical Metods In Risk Theory
  Springer New York.

- "Optimal reinsurance and divident paymant strategies"
  Pantelis M. Pechlivanies
  Astin Bulletin 8 (1974) pag. 34-46

- "Managing the insolvency risk of insurance company"
  J. David Cummins, Richard A. Derrid
  Kluwer Academic Publishers
  Boston / Dordrecht / London 1991.

- Reinsurance
  Life Health and Annuity
  John E. Tiller Jr.& Denise Fagerberg
  Actex Publication Inc.

- Actuarial Mathematics
  1986 N.L. Bowers Jr.

- Teoria Moderna De Probabilidades y Sus Aplicaciones
  Emanuel Parzen
  Septima Edicion 1992
  Editorial Limusa

- Probabilidad y Estadistica
  George C. Canavos
  Editorial McGraw Hill.

- Teoria Del Riesgo
  Apuntes Privados

- Appleton's New Cuyas Dictionary
  Volumenes 1,2
  Editorial Grolier.

- Manual Del Curso Propedeutico Para La Formacion De Intermediarios
  Provisionales De Seguros
  Seguros Monterrey Aetna, 1997

- An Introduction To Mathematical Risk Theory
  Gerber H. U.
  S.S. Huebner Foundation, Philadelphia