46
24j.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TECNICAS NO USUALES EN ANILLOS DE DEDEKIND

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FELIX ZAMORA SANCHEZ

MEXICO, D. F. 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Técnicas No Usuales en Anillos de Dedekind

realizado por Félix Zamora Sánchez

con número de cuenta 8752777-7 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M.en C.	Carmen Gómez Laveaga
Propietario	Mat.	Luis Colavita Ferreyra
Propietario	Dr.	Rigoberto Vera Mendoza
Suplente	Dra.	Bertha Tomé Arreola
Suplente	Dr.	Juan Morales Rodríguez

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULT...

Agradecimientos

Quiero agradecer muy afectuosamente a las siguientes personas y decirles, "muchas gracias".

A mis padres por darme la vida, para poder ser, con su ayuda y con mucho sacrificio de parte de ellos un profesionista más en la familia.

A mis familiares que de alguna manera influyeron en mi vida para tratar de diseñarla , como la familia Sánchez Cruz en particular Ana Cruz.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias que me enseñaron algo de lo grandioso que es la Matemática.

Al Dr. Felipe Monroy que me mostro otro tipo de lenguaje de programación, LaTeX, en el que fue escrito esta tesis.

A mi asesora de tesis Mtra. Carmen Gómez Laveaga por su ayuda comprensión y paciencia para conmigo.

INTRODUCCION

Despúes de los resultados de Robinson en 1966 [10] la construcción de modelos no usuales de una teoría se ha usado con mucho éxito en ramas de la matemática como análisis y topología, y en general, en áreas donde se usan técnicas de " aproximación ".

Sin embargo , se han hecho pocos intentos de aplicar éstas técnicas , conocidas como " no usuales " , en álgebra . Uno de estos intentos fue realizado por el propio Robinson quien en 1966 publicó un trabajo sobre anillos de Dedekind y completaciones P-adicas.

Esta tesis está basada en este artículo y consiste en clarificar y presentar con un lenguaje más actual las completaciones P-adicas de un anillo de Dedekind , donde P es un ideal primo de D, usando técnicas no usuales.

El seminario de tesis consistió en :

1. Estudiar las técnicas no usuales, fundamentalmente estudiando los textos de Luxemburg [7] y Davis [2]. Un resúmen de lo desarrollado en este seminario lo presentamos en el capítulo II de esta tesis.

2. Estudiar una introducción a los anillos de Dedekind, propiedades y sus completaciones P-ádicas, desde el punto de vista usual el cual aparece en el capitulo I.

3. La lectura del artículo de Robinson "Non-standard theory of Dedekind Rings", cuyo desarrollo completo aparece en el capítulo III.

En la realización de está tesis usamos el siguiente material bibliografico:

Para la teoría básica, como Anillos, Ideales, Dominio Entero, etc., se usaron los textos de [3], [4] y [8].

Lo referente a Anillos Noetherianos, Ideales fraccionarios, y Anillos de Dedekind se obtuvo de [5], [6] y [9].

Para la teoría de Números P-ádicos y Valuación P-ádica usamos [1].

Indice de Contenido

Capítulo 1

TEORIA PREVIA

1.1 anillos

Definición 1.1.1 *Un anillo es un conjunto A junto con dos operaciones binarias denotadas con $+$ y $\cdot$ tales que si $a, b, c \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones.*

asociatividad aditiva. $(a+b)+c = a+(b+c)$

identidad aditiva. *Existe* $e \in A$ *tal que* $a+e = e+a = a$ *para toda* $a \in A$

inverso aditivo. *Para cada* $a \in A$ *existe* $y \in A$ *tal que* $a+y = y+a = e$

Conmutatividad aditiva. $a+b = b+a$

asociatividad multiplicativa. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

distributividad. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$; $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Un anillo que cumple con la condición de conmutatividad multiplicativa se le llama ANILLO CONMUTATIVO.

Un anillo A con identidad multiplicativa 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todas las $a \in A$ es un ANILLO CON UNIDAD.

A lo largo de este trabajo la palabra " anillo " significa anillo conmutativo con unidad.

Definición 1.1.2 *Un subconjunto no vacío I de un anillo A es un IDEAL de A si es un subgrupo aditivo y tal que para cada $x \in A$ y cada $y \in I$, $x \cdot y \in I$*

Definición 1.1.3 *Un anillo conmutativo con 1 se llama DOMINIO ENTERO si para cualesquiera $a, b \in A$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se tiene que $a \cdot b \neq 0$.*

Definición 1.1.4 *Un ideal I de A se llama de tipo finito si existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ tales que para cualquier $x \in I$, $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$, donde $x_1, \ldots, x_n \in A$. En este caso diremos que $a_1, \ldots, a_n$ generan a I y lo denotamos por $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$*

Definición 1.1.5 *Un anillo A es NOETHERIANO si toda sucesión creciente $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ de ideales de A se estaciona, es decir, a partir de cierta k , $I_k = I_{k+1} = \cdots$*

Ejemplos de anillos Noetherianos.

- $\mathbf{Z}$, $K[x]$
- Si A es Noetheriano , $A[x]$ es Noetheriano
- Si A es Noetheriano cualquier cociente es Noetheriano.

Teorema 1.1.1 *Sea A un un anillo. Son equivalentes las siguientes condiciones :*

i. *Todo ideal de A es de tipo finito*

ii. *A es Noetheriano*

iii. *Toda familia no vacía S de ideales de A tiene un elemento maximal (respecto a la inclusión)*

Demostración.
i) $\longrightarrow$ *ii)*
Sea $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ una sucesión creciente de ideales de A, y sea N la unión de todos los I_j, $(j = 1, 2, \ldots)$, N es un ideal de A y

por hipótesis es de tipo finito, asi que existen $x_1, \cdots, x_r \in N$ tales que $N = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$.

Como cada x_i pertenece a algún I_{ji}, entonces $x_1, \ldots, x_r \in I_k$ para alguna $k = 1, 2, \ldots$.Así que para cada $m \geq k$ tenemos

$$\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \subseteq I_m \subset N = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$$

Obtenemos entonces que $I_k = I_{k+1} = \cdots$

ii) $\longrightarrow$ *iii)*

Sea S una familia no vacía de ideales de A y supongamos que S no tiene un elemento maximal.

Sea $I_0 \in S$. Como I_0 no es maximal en S entonces $I_0 \subset I_1$ para algún $I_1 \in S$. Análogamente, I_1 no es maximal en S , así que existe $I_2 \in S$ tal que $I_1 \subset I_2$.

Procediendo inductivamente podemos encontrar una cadena infinita estrictamente creciente $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \cdots$ de ideales de S, contradiciendo la hipótesis (ii).

Por lo tanto S debe tener un elemento maximal.

iii) $\longrightarrow$ *i)*

Sea I un ideal de A y consideremos

$S = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \mid n \in \mathbf{N}, a_i \in I, \ i = 1, \ldots, n\}$, S es una familia no vacía de ideales de A, asi que, por hipótesis , S tiene un maximal , y sea éste $M = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$.

Afirmamos que $M = I$, ya que en caso contrario existiría $b \in I$ tal que $b \notin M$, entonces tendríamos que $M = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle \subsetneq \langle a_1, \ldots, a_r, b \rangle$ con $\langle a_1, \ldots, a_r, b \rangle \in S$, y esto contradice el hecho de que M es maximal en S.

Concluímos entonces que $M = I = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$.

$\diamond$

Definición 1.1.6 *Un ideal P de A es PRIMO si $P \neq (1)$ y si $x \cdot y \in P$ entonces $x \in P$ o $y \in P$*

Definición 1.1.7 *Un ideal M de A es MAXIMAL si $M \neq (1)$ y no existe ningún ideal propio N de A tal que $M \subset N \subset (1)$*

Proposición 1.1.1 *Sea P un ideal del anillo A, entonces*

i. *A/P es un dominio entero si y sólo si P es primo.*

ii. *A/P es campo si y sólo si P es maximal*

Definición 1.1.8 *Sea A un dominio entero y K su campo de cocientes, al conjunto*

$$B = \{a \in K \mid \exists\, p(x) \in A[x],\ p(x)\ \textit{mónico},\ p(a) = 0\}$$

se le llama la CERRADURA ENTERA de A.

Definición 1.1.9 *Un dominio entero A se llama ENTERAMENTE CERRADO si su cerradura entera es el mismo A.*

Sean I, J ideales de un anillo A, definimos el producto $I \cdot J$ como sigue

$$I \cdot J = \{\ \Sigma_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I, \quad b_i \in J\ ,\ i = 1, \ldots, n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Proposición 1.1.2 *Si I y J son ideales de A entonces $I \cdot J$ es tambien un ideal de A.*

Proposición 1.1.3 *Si un ideal primo P de A contiene un producto $I_1 \cdot I_2 \cdots I_n$ de ideales de A entonces contiene a uno de ellos.*

Demostración.

Supongamos que $I_1 \cdots I_n \subseteq P$ pero que ningún I_i esta contenido en P.

Luego para cada i podemos elegir $a_i \in I_i$ de tal manera que $a_i \notin P$.

Por hipótesis tenemos que $I_1 \cdots I_n \subseteq P$ y como $a_1 \cdots a_n \in I_1 \cdots I_n$, tenemos que $a_1 \cdots a_n \in P$. Como P es primo entonces $a_i \in P$ para alguna $i = 1, \ldots, n$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto para alguna $j = 1, \ldots, n \qquad I_j \subset P$. ◇

Proposición 1.1.4 *En un anillo Noetheriano , todo ideal contiene un producto de ideales primos . En un dominio entero Noetheriano todo ideal no nulo contiene un producto de ideales primos no nulos .*

Demostración.

Demostremos la segunda afirmación. Sea A un dominio entero y sea Φ la familia de ideales no nulos de A que tienen la propiedad de no contener un producto de ideales primos no nulos y supongamos que Φ es no vacia.

Puesto que A es Noetheriano por el Teorema 1.1.1 , Φ contiene un elemento maximal $\mathcal{M}$, el ideal $\mathcal{M}$ no puede ser primo , ya que si lo fuera entonces $\mathcal{M}$ no pertenecería a Φ. Asi que existen $x, y \in A - \mathcal{M}$ tal que $x \cdot y \in \mathcal{M}$.

Consideremos los ideales $B_1 = \mathcal{M} + Ax$ y $B_2 = \mathcal{M} + Ay$ de A.

Como $\mathcal{M} \subsetneqq B_1$, y $\mathcal{M} \subsetneqq B_2$ entonces B_1 y B_2 no pertenecen a Φ ya que $\mathcal{M}$ es maximal en Φ.

De aquí $B_1 \supset P_1 \cdot P_2 \cdots P_r$ y $B_2 \supset Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_s$, donde $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots Q_s$ son ideales primos no nulos de A y por lo tanto $P_1 \cdots P_r \cdot Q_1 \cdots Q_s \subseteq B_1 \cdot B_2 \subseteq \mathcal{M}$, lo que contradice que $\mathcal{M}$ pertenece a Φ.

Concluimos entonces que Φ es el conjunto vacío

$\diamond$

Definición 1.1.10 *Sea A un dominio entero y K su campo de cocientes, F se llama ideal fraccionario de A si F es un A-submódulo de K y existe* $d \in A$, $d \neq 0$ *tal que* $F \subset d^{-1}A$

Definición 1.1.11 *Un conjunto S junto con una operación binaria $*$ se llama MONOIDE si $\forall a, b, c \in S$ se satisface*

Asociatividad. $(a * b) * c = a * (b * c)$

identidad. $\exists\, e \in S$ *tal que* $a * e = e * a = a$

Ademas si la operación binaria de S es conmutativa se dice que S es un MONOIDE CONMUTATIVO.

Los ideales fraccionarios no nulos de A forman un monoide conmutativo con la multiplicación cuyo elemento identidad es A.

1.2 Anillos de Dedekind

Definición 1.2.1 *Un anillo D se llama de DEDEKIND si es Noetheriano, enteramente cerrado y si todo ideal primo no nulo de D es maximal.*

Un ejemplo de anillo de Dedekind es el conjunto de los numeros enteros.

Proposición 1.2.1 *Sea D un anillo de Dedekind que no es campo. Todo ideal maximal (que en este caso coincide con un primo) de D es invertible en el monoide de los ideales fraccionarios de D.*

Demostración .
Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de D, tenemos que $\mathcal{M} \neq (0)$ ya que D no es un campo. Sea $\mathcal{M}' = \{x \in K \mid x\mathcal{M} \subseteq D\}$, donde K es el campo de cocientes de D.

Claramente $\mathcal{M}'$ es un D-submódulo de K y ademas $\mathcal{M}' \subseteq x^{-1}D$ para cualquier elemento x de $\mathcal{M}$, en efecto,
($y \in \mathcal{M}' \Rightarrow yx \in D \; \forall x \in \mathcal{M} \Rightarrow y \in x^{-1}D$). Por lo tanto $\mathcal{M}'$ es un ideal fraccionario de D.

Probaremos que $\mathcal{M}'\mathcal{M} = D$. Por definición de $\mathcal{M}'$ tenemos que $\mathcal{M}'\mathcal{M} \subset D$. Además como $D \subseteq \mathcal{M}'$, (puesto que $D \cdot \mathcal{M} \subseteq D$), entonces $\mathcal{M} = D\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'\mathcal{M} \subseteq D$.

Así que, como $\mathcal{M}$ es maximal, tenemos que $\mathcal{M}'\mathcal{M} = D$, o $\mathcal{M}'\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Mostremos ahora que $\mathcal{M}'\mathcal{M} = \mathcal{M}$ es imposible.

Supongamos que $\mathcal{M}'\mathcal{M} = \mathcal{M}$, y sea $x \in \mathcal{M}'$, entonces $x\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, y así podemos probar fácilmente por inducción que $x^n\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, para todo número natural n.

Concluimos de lo anterior que $D[x]$ es un ideal fraccionario de D, donde cualquier elemento $d \neq 0$ de $\mathcal{M}$ es denominador común de todos los x^n.

Como D es Noetheriano , $D[x]$ es de tipo finito (ya que $D[x] \subseteq d^{-1}D$ y $d^{-1}D$ es un D-módulo isomorfo a D y por lo tanto Noetheriano), y asi x es entero sobre D. Pero como D es enteramente cerrado (D es de Dedekind) entonces $x \in D$.

Obtenemos entonces que $\mathcal{M}' = D$. Veamos ahora que esto último no puede suceder.

Sea $a \in \mathcal{M}, a \neq 0$. Por la proposición (1.1.4) el ideal Da de D generado por a contiene un producto $P_1 P_2 \cdots P_r$ de ideales primos no nulos de D.

Sea n el mínimo entero positivo tal que Da contiene el producto de n ideales primos no nulos de D, tenemos entonces $\mathcal{M} \supseteq Da \supseteq P_1 \cdots P_n$.

Como $\mathcal{M}$ es un ideal primo , entonces por la proposición 1.1.3 $\mathcal{M}$ contiene a alguno de los P_i, digamos P_1, pero como P_1 es primo no nulo, entonces P_1 es maximal así que $\mathcal{M} = P_1$.

Sea $\mathcal{B} = P_2 \cdots P_n$. Tenemos que $\mathcal{M}\mathcal{B} \subseteq Da \subseteq \mathcal{M}$ y por la minimalidad de n , $\mathcal{B} \not\subset Da$, por lo que existe $b \in \mathcal{B}$ tal que $b \notin Da$.

Como $\mathcal{M}b \subseteq \langle a \rangle$, entonces , $\mathcal{M}b\, a^{-1} \subseteq D$ y así $b\, a^{-1} \in \mathcal{M}'$.

Pero $b\, a^{-1} \notin D$ ya que si no, esto implicaría que $b \in Da$. Por lo tanto no puede ser que $\mathcal{M}' = D$.

Concluimos entonces que $\mathcal{M}'\mathcal{M} = D$.

◇

Teorema 1.2.1 *Sea D un anillo de Dedekind, IP el conjunto de todos los ideales primos no nulos de D entonces. Todo ideal fraccionario no nulo F de D se expresa, de manera única como*

$$F = \prod_{P \in IP} P^{\nu_P(F)}$$

donde $\nu_P(F) \in \mathbb{Z}$ y $\nu_P(F) = 0$ para casi toda $P \in IP$

Demostración.

Sea F un ideal fraccionario de D. Como existe $d \in D - (0)$ tal que $dF \subset D$, es decir, tal que dF es un ideal entero de D se tiene que $F = (dF) \cdot (Dd)^{-1}$, esto nos dice que es suficiente demostrar el teorema para un ideal entero de D

Consideremos la familia ψ de ideales de D diferentes de $\{0\}$ que no son productos de ideales primos de D y supongamos que ψ es no vacío . Entonces acepta un elemento maximal $\mathcal{M}$, ya que D es Noetheriano.

Como D es producto de la familia vacía de ideales primos, entonces $\mathcal{M} \neq D$.

Consideremos la familia de ideales de D que contienen a $\mathcal{M}$ y sea P un maximal en esta familia.

Sea P' el ideal fraccionario inverso de P y como $\mathcal{M} \subset P$ se deduce que $\mathcal{M}P' \subset PP' = D$ como $D \subset P'$ se tiene $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}P'$ e incluso $\mathcal{M}P' \neq \mathcal{M}$ ya que si $\mathcal{M}P' = \mathcal{M}$ se tendría que para cualquier $x \in P'$, $x\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, y así $x^n\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para toda n, y como hicimos en la demostración de la proposición 1.2.1, entonces x sería entero sobre D y así x pertenecería a D ya que D es enteramente cerrado y por lo tanto $P' = D$.

Pero esto último implicaría que $D = P\,P' = P$ lo cual es imposible.

Como $\mathcal{M}$ es maximal en ψ y $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}P' \subset D$, entonces $\mathcal{M}P'$ no pertenece a ψ, por lo tanto $\mathcal{M}P' = P_1 \cdots P_n$, donde cada P_i es un ideal primo de D , y multiplicando por P tendríamos que $\mathcal{M} = P \cdot P_1 \cdots P_n$ (recordemos que P es primo), lo que contradice el hecho de que $\mathcal{M} \in \psi$. Así, todo ideal entero de D es un producto de ideales primos de D

Ahora probemos la unicidad.

Supongamos que tenemos $\prod_{P \in IP} P^{\nu_P(P)} = \prod_{P \in IP} P^{\surd_P(P)}$, es decir, $\prod_{P \in IP} P^{\nu_P(P) - \surd_P(P)} = D$

Si los $\nu_P(P) - \surd_P(P) \neq 0$ se separan los exponentes negativos y positivos y obtenemos $P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r} = R_1^{\beta_1} \cdots R_t^{\beta_t}$, con $P_i, R_j \in IP$, $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$, y $P_i \neq R_j$ para toda $i = 1, \ldots, r$ y toda $j = 1, \ldots, t$.

P_1 contiene a $R_1^{\beta_1} \cdots R_t^{\beta_t}$ y por lo tanto P_1 contiene a alguno de los R_j, digamos R_1, así que $P_1 \supset R_1$, pero R_1 es maximal, asi que $P_1 = R_1$ lo que contradice el hecho de que $P_i \neq R_j$ para toda $i = 1, \ldots, r$ y para toda $j = 1, \ldots, t$.

Por lo tanto $\nu_P(P) = \surd_P(P)$ para cada $P \in IP$ $\diamond$

Recordemos que en los números enteros, los ideales primos de $\mathbb{Z}$ son los $p\mathbb{Z}$ donde p es un primo , asi que cada ideal $a\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ se descompone como producto de primos: $a\mathbb{Z} = (p_1\mathbb{Z})^{\alpha_1} \cdots (p_r\mathbb{Z})^{\alpha_r}$ donde $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$

Sea D un anillo de Dedekind y $a \in D$ con $a \neq 0$ y consideremos el ideal $\langle a \rangle$ de D generado por a.

Entonces por el Teorema 1.2.1 $\langle a \rangle = \prod_{P \in IP} P^{\nu_P(a)}$ donde, $\nu_P(a) = \nu_P(\langle a \rangle)$

Así que para cada $a \in D, a \neq 0$ y para cada ideal primo P de D , queda determinado de manera única un entero , a saber $\nu_P(a)$, por lo que tenemos una función $\nu_P : D - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, para cada ideal primo P de D.

Teorema 1.2.2 *La función $\nu_P : D - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tiene las siguientes propiedades*

i. $\nu_P(a) \geq 0$ *para todo* $a \in D - \{0\}$

ii. $\nu_P(a \cdot b) = \nu_P(a) + \nu_P(b)$

iii. $\forall a \in D - \{0\} \quad \nu_P(a) = n$ *si y solo si* $a \in P^n - P^{n+1}$

Demostración.

i. En la demostración del Teorema 1.2.1 probamos que cada ideal distinto de $\{0\}$ de D es producto de ideales primos , así que $\nu_P(a) \geq 0$.

ii. Como $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle ab \rangle$ es claro que $\nu_P(a \cdot b) = \nu_P(a) + \nu_P(b)$.

iii. Si $\langle a \rangle = P^n \cdot P_1^{\nu_{P_1}(a)} \cdots P_r^{\nu_{P_r}(a)}$ donde $P_i \neq P_j \neq P \ \forall i, j$ entonces por la unicidad de la descomposición $\langle a \rangle \notin P^{n+1}$, así que $\langle a \rangle \in P^n - P^{n+1}$.

$\diamond$

1.3 Enteros P-ádicos

Sea D un anillo de Dedekind , y P un ideal primo no nulo de D.

A partir de D y para cada ideal primo P se construye un anillo , el anillo de los enteros P-ádicos.

Esto es como sigue:

Definición 1.3.1 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de D, $\{a_n\}$ se llama de Cauchy respecto a P si dado $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r - a_s \in P^n$ si $r, s \geq k$*

Definición 1.3.2 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de D y $a \in D$, $\{a_n\}$ converge a a (respecto a P) si dado $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r - a \in P^n$ si $r \geq k$.*

En caso de que $a = 0$, la sucesión $\{a_n\}$ se llama **sucesión nula**.

Teorema 1.3.1 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente entonces es una sucesión de Cauchy.*

Demostración .

Sea $\{a_n\}$ una sucesión que converge a a y sea $n \in \mathbf{N}$, entonces existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $(a_r - a) \in P^n$ si $r \geq k$.

Sean $r, s \geq k$, tenemos entonces $a_r - a_s = a_r - a + a - a_s = (a_r - a) - (a_s - a)$, y como $(a_r - a)$, y $(a_s - a)$ pertenecen a P^n, entonces $(a_r - a_s) \in P^n$ y por lo tanto $\{a_n\}$ es de Cauchy.

◇

Sean

$$\begin{aligned} B_P &= \{sucesiones \quad de \quad Cauchy \quad respecto \quad a \quad P\}, y \\ J_P &= \{sucesiones \quad nulas \quad respecto \quad a \quad P\} \end{aligned}$$

Definimos en B_P una suma y un producto como sigue. Dadas dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \in B_P$,
$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ y $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$

Teorema 1.3.2 *Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy respecto a P entonces $\{a_n + b_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$ son sucesiones de Cauchy respecto a P*

Demostración.

Dado $n \in \mathbf{N}$ existe $k_1 \in \mathbf{N}$ tal que $a_r - a_s \in P^n$ si $r, s \geq k_1$ y existe $k_2 \in \mathbf{N}$ tal que $b_r - b_s \in P^n$ si $r, s \geq k_2$

Si $k = \max\{k_1, k_2\}$ y $r, s \geq k$, entonces
$(a_r + b_r) - (a_s + b_s) = (a_r - a_s) + (b_r - b_s) \in P^n$, y asi $\{a_n + b_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Para el producto mostraremos que $a_r \cdot b_r - a_s \cdot b_s \in P^n$, si $r, s \geq k$,
$a_r \cdot b_r - a_s \cdot b_s = a_r \cdot b_r - a_r \cdot b_s + a_r \cdot b_s - a_s \cdot b_s = a_r \cdot (b_r - b_s) + (a_r - a_s) \cdot b_s \in P^n$. Ya que como P^n es un ideal, tenemos que $a_r \cdot (b_r - b_s) \in P^n$ y $(a_r - a_s) \cdot b_s \in P^n$.

Por lo tanto $a_r \cdot b_r - a_s \cdot b_s \in P^n$ y el producto es también una sucesión de Cauchy. ◇

Teorema 1.3.3 $(B_P, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con* 1 *y* J_P *es un ideal de* B_P

Demostración.

Es fácil demostrar que B_P es anillo , donde $\{0\}, \{1\}$, las sucesiones constantes igual a cero e igual a uno respectivamente (y que claramente son de Cauchy) son el neutro aditivo y multiplicativo respectivamente.

$J_P \subseteq B_P$ ya que cada sucesión convergente es de Cauchy , nuevamente es fácil mostrar que J_P es un subgrupo de B_P.

Ahora, sean $\{a_n\} \in B_P$ y $\{b_n\} \in J_P$. Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_r \in P^n$ si $r \geq k$, y como P^n es un ideal de D entonces $a_r b_r \in P^n$, si $r \geq k$.

Por lo tanto $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\} \in J_P$ y de aquí, J_P es un ideal de B_P $\diamond$

Definición 1.3.3 *El anillo cociente* B_P/J_P *se llama el anillo de los enteros* P*-adicos.*

Capítulo 2

PRESENTACION DEL MODELO NO-USUAL

En el seminario de tesis estudiamos la construcción del modelo no-usual. Como el objetivo de este trabajo es usar las técnicas no-usuales para obtener ciertos resultados en Anillos de Dedekind, no es nuestra intención presentar con todo detalle esta construcción del modelo no-usual.

Sin embargo haremos un resumen de los conceptos y resultados importantes sin incluir demostraciones. Para mayor detalle ver [2], [7], bibliografía que fue usada en el seminario.

2.1 UNIVERSO USUAL

Consideremos un conjunto S cuyos elementos llamaremos individuos y a los elementos de S no los trabajaremos como conjuntos , es decir, $\emptyset \notin S$ y expresiones como $a \in x$, con $x \in S$ no son permitidas.

Construiremos una estructura a partir de S en las que aparecen los conjuntos que se necesitan en las construcciones de la matemática usual (incluyendo relaciones y funciones).

Construimos los conjuntos $S_0, S_1, S_2, \ldots$ de la siguiente manera, donde $P(A)$ denota al conjunto de partes de A.

$S_0 = S, \quad S_i = S_{i-1} \cup P(S_{i-1}), \quad$ para $i = 1, 2, \ldots$.

Definimos $\hat{S} = \cup_{i=0}^{\infty} S_i$

Cada elemento de S se llamará un individuo de $\hat{S}$ y cada elemento de $\hat{S} - S$ se llamará un conjunto de $\hat{S}$.

2.1.1 Propiedades de $\hat{S}$

Proposición 2.1.1 *El conjunto $\hat{S}$ tiene las siguientes propiedades.*

1. *Para toda $x \in \hat{S}$ se tiene $x \in S$, o bien $x \subseteq \hat{S}$.*
2. *Si $x \in \hat{S} - S$, entonces $P(x) \in \hat{S}$.*
3. *Si $x \in \hat{S} - S$, y $y \subseteq x$ entonces $y \in \hat{S}$.*
4. *Sea $x \in \hat{S} - S$, y $x \cap S = \emptyset$. Si $y = \bigcup_{z \in x} z$, entonces $y \in \hat{S}$.*
5. *Si $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \hat{S}$, entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \hat{S}$.*
6. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \hat{S} - S$, entonces $x_1 \cup x_2 \cup, \ldots \cup x_k \in \hat{S}$.*
7. *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \hat{S}$, y además $n \geq 2$, entonces $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \hat{S}$.*

Teorema 2.1.1 *Si $X, Y \in \hat{S} - S$ entonces $X \times Y \in \hat{S}$*

Teorema 2.1.2 *Si $X, Y \in \hat{S} - S$, y $f : X \longrightarrow Y$ es una función, entonces*

1. *$f \in \hat{S}$.*
2. *Si $a \in X$, entonces $f(a) \in \hat{S}$.*
3. *Si $A \subseteq X$,entonces $f(A) \in \hat{S}$.*

Teorema 2.1.3 *Sean $J, V \in \hat{S} - S$, y para cada $j \in J$ sea $X_j \in V - S$, entonces*

$$i) \quad \bigcup_{j \in J} X_j \in \hat{S}, \qquad ii) \quad \prod_{j \in J} X_j \in \hat{S}$$

2.1.2 Lenguaje

Introduciremos ahora el lenguaje formal L, los símbolos atómicos del lenguaje L son:

Los conectivos. Los símbolos para los conectivos son $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ y $\neg$, que respectivamente corresponden a (y , o ,implica, si y sólo si y no).

Las variables. Las variables son una sucesión numerable que usualmente son denotadas por $x, y, \ldots$, con o sin índices.

Los cuantificadores. Se tienen dos cuantificadores, el existencial $\exists$, y el universal $\forall$.

Paréntesis. Son símbolos auxiliares que se usan para agrupar fórmulas como es usual en matemáticas.

Los predicados básicos. Los predicados básicos se construyen con los símbolos $\in$ (pertenece a) y con $=$ (igual a), con un lugar abierto a la izquierda y derecha de ellos.

Constantes extralógicas. Es un conjunto de símbolos de los cuales hay suficientes para ser puestos en correspondencia biunívoca con las entidades de alguna superestructura que nos interese.

En nuestro caso el conjunto de constantes estarán en correspondencia biunívoca con todas las entidades de $\hat{S}$, asi que podemos considerar a $\hat{S}$ el conjunto de constantes de L, y en este caso nos referiremos a $\hat{S}$ como la $L - estructura$.

La interpretación del predicado básico $\in$ de L en $\hat{S}$ será la relación de pertenencia de la teoría axiomática de conjuntos, es decir, $a \in b$ si "a es un elemento de b".

2.1.3 Fórmulas atómicas

$a \in b$, $a = b$, donde los símbolos a y b denotan constantes o variables, las fórmulas bien formadas (f.b.f)se obtienen de las fórmulas atómicas al aplicar sucesivamente los conectivos y cuantificadores.

Los paréntesis se usan para evitar ambigüedades en la formación de las fórmulas.

Así pues, si V y W son f.b.f, entonces $[V]$, $[V \wedge W]$, $[V \vee W]$, $[\neg V]$, $[V \Longrightarrow W]$, $[V \Longleftrightarrow W]$, $[(\forall x)V]$, $[(\exists x)V]$, donde x denota una variable arbitraria y x no aparece en V bajo el signo de un cuantificador, son f.b.f.

En $[(\forall x)V]$ y $[(\exists x)V]$, V se llama el alcance del cuantificador en todas las f.b.f. las cuales pueden ser obtenidas de éstas por aplicaciones repetidas de conectivos y cuantificadores.

En nuestro estudio consideraremos solo aquellas f.b.f. que tienen la propiedad de que todos los cuantificadores son de la forma $(\forall x)[(x \in A)\ldots]$ y $(\exists x)[(x \in A)\ldots]$ donde A es una entidad de $\hat{S}$ y llamamos a éstas f.b.f. admisibles.

2.2 UNIVERSO NO-USUAL

Un modelo no-usual de orden superior de $\hat{S}$ es una $^*L - estructura\ ^*(\hat{S})$ en la cual la $L - estructura\ \hat{S}$ es una inmersión propia, y para la cual todas las proposiciones admisibles de $\hat{S}$ que son verdaderas en $\hat{S}$ son verdaderas tambien en $^*(\hat{S})$ con una interpretación adecuada de los simbolos en $^*(\hat{S})$.

Construiremos ahora un modelo no usual de $\hat{S}$

Sea I un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro $\delta - incompleto$ sobre I y sea

$$\hat{S}^I = \{a : I \longrightarrow \hat{S} \mid a \quad \text{es función}\}$$

Existe una inmersión natural $a \longrightarrow {}^*a$ de $\hat{S}$ en $\hat{S}^I$ dada por $^*a(i) = a$ para toda $i \in I$.

Los predicados básicos " $=$ " y " $\in$ " de $\hat{S}$ serán extendidos a $\hat{S}^I$ de la siguiente manera :

Definición 2.2.1 *Sean* $a, b \in S^I$

1. $a =_{\mathcal{F}} b$ *si* $\{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F}$

2. $a \in_{\mathcal{F}} b$ *si* $\{i \in I \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathcal{F}$

Con esta definición es claro que para cualesquiera $a, b \in \hat{S}$

1. $a = b$ en $\hat{S}$ si y solo si $^*a = {}^*b$ en $\hat{S}^I$.

2. $a \in b$ en $\hat{S}$ si y solo si $^*a \in {}^*b$ en $\hat{S}^I$

Proposición 2.2.1 *Para cualesquiera $a, b \in \hat{S}^I$, tenemos que*

1. $a =_{\mathcal{F}} b$ *o* $a \neq_{\mathcal{F}} b$ *pero no ambas*
2. $a \in_{\mathcal{F}} b$ *o* $a \notin_{\mathcal{F}} b$ *pero no ambas*

Teorema 2.2.1 *(LOS) Sea V una f.b.f admisible , entonces V es verdadera si y solo si $\{i \in I \mid V(i) \text{ es verdadera } \} \in \mathcal{F}$*

El siguiente teorema es importante ya que nos permite comprobar que la pertenencia en $\hat{S}^I$ se traduce en hacer verdadera la proposición que define la función:

Teorema 2.2.2 *Sea V una f.b.f. admisible y $b \in \hat{S}^I$, entonces $a \in_{\mathcal{F}} \{x \in b \mid V(x)\}$, si y solo si $a \in_{\mathcal{F}} b$, y $V(a)$ es verdadera.*

La igualdad de conjuntos en $\hat{S}^I$ se puede dar en términos de la pertenencia de la siguiente manera

Proposición 2.2.2 *Sean $a, b \in \hat{S}^I$. $a =_{\mathcal{F}} b$ si y solo si para cualquier $c \in \hat{S}^I$, $a \in_{\mathcal{F}} c \Longleftrightarrow b \in_{\mathcal{F}} c$*

Por similitud denotamos ${}^*\emptyset = \emptyset$. Recordemos ademas que ${}^*\emptyset(i) = \emptyset$ para toda $i \in I$, así pues se cumple que ${}^*\emptyset \subseteq a$ para cualquiera $a \in \hat{S}^I - S$.

De ahi que la inmersión de $\hat{S}$ en $\hat{S}^I$, tiene las siguientes propiedades.

1. Si $a, b \in \hat{S}$ y $a \subseteq b$ entonces ${}^*a \subseteq {}^*b$
2. Si $a, b \in \hat{S}$ y $a \in b$ entonces ${}^*a \in {}^*b$
3. Para toda $a \in \hat{S}$, ${}^*\{a\} = \{{}^*a\}$
4. Si $a_1, \ldots, a_n \in \hat{S} - S$ entonces

$$ {}^*(\bigcup_{i=1}^{n} a_i) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i, \quad {}^*(\bigcap_{i=1}^{n} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i $$

5. ${}^*\{a_1, \ldots, a_n\} = \{{}^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}$
6. ${}^*(a_1, \ldots, a_n) = ({}^*a_1, \ldots, {}^*a_n)$

7. ${}^*(a_1 \times \ldots \times a_n) = ({}^*a_1 \times \ldots \times {}^*a_n)$

8. Si $a, b \in \hat{S}$ entonces ${}^*(a - b) = {}^*a - {}^*b$

9. Si $b \in \hat{S}$ es una relación binaria, entonces

$$ {}^*(dom\, b) = (dom\, {}^*b) \quad {}^*(rang\, b) = (rang\, {}^*b) $$

y para toda $a \in \hat{S}$ se tiene ${}^*(b(a)) = {}^*b({}^*a)$

Teorema 2.2.3 *Sea $V(x)$ una f.b.f admisible en $\hat{S}$ con variable libre x y sea $A = \{x \in a \,|\, V(x)\}$ donde a es una entidad arbitraria de $\hat{S}$. Entonces ${}^*A = \{x \in {}^*a \,|\, {}^*V(x)\}$*

Teorema 2.2.4 *PRINCIPIO DE TRANSFERENCIA. Una proposición admisible V en $\hat{S}$ es verdadera si y solo si ${}^*V$ es verdadera en $\hat{S}^I$.*

Ejemplos.

1. Si $S = (R, +, \cdot)$ es un anillo entonces $({}^*R, {}^*+, {}^*\cdot)$ es un anillo donde ${}^*+|_R = +$ y ${}^*\cdot|_R = \cdot$

   Veamos una de las propiedades del anillo R y como se traduce a ${}^*R$, por ejemplo la existencia del neutro

   Sabemos que $\exists\, x \in R \quad \forall\, y \in R \qquad x + y = y$

   Asi que por el Principio de Transferencia tenemos que.

$$ \exists x \in {}^*R \quad \forall y \in {}^*R \quad x \,{}^*\!+ y = y $$

   De esta manera se pueden verificar las demás propiedades

2. Si I es un ideal de R entonces ${}^*I$ es un ideal de ${}^*R$.

3. Si P es un ideal primo de R entonces ${}^*P$ es un ideal primo de ${}^*R$.

   Demostración.

   Si P es un ideal primo de R entonces tenemos

$$\forall a, \forall b \quad a \in R \quad b \in R \quad a \cdot b \in P \Longrightarrow a \in P, \quad o \quad b \in P$$

y por el Principio de Transferencia

$$\forall a, \forall b \quad a \in {}^*R \quad b \in {}^*R \quad a \cdot b \in {}^*P \Longrightarrow a \in {}^*P, \quad o \quad b \in {}^*P$$

Por lo tanto ${}^*P$ es un ideal primo de ${}^*R$

4. Si I es un ideal finitamente generado de R entonces ${}^*I$ es un ideal finitamente generado de ${}^*R$.

   Demostración.

   Supongamos que $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, es el ideal generado por $a_1, \ldots, a_n$ entonces

   $$I = \{x \in R \mid \exists r_1 \in R, \ldots, \exists r_n \in R \quad x = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n\}$$

   y por el Teorema 2.2.3 tenemos

   $${}^*I = \{x \in {}^*R \mid \exists r_1 \in {}^*R, \ldots, \exists r_n \in {}^*R \quad x = r_1 a_1 \,{}^*\!+ \cdots {}^*\!+ r_n a_n\}$$

   por lo tanto ${}^*I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ en ${}^*R$.

5. Como concecuencia de este último resultado tenemos que si I y J son ideales finitamente generados entonces ${}^*(I \cdot J) = {}^*I \cdot {}^*J$ y por lo tanto ${}^*(I^n) = ({}^*I)^n$

Capítulo 3

ENTEROS P-ADICOS EN ANILLOS DE DEDEKIND

Sea D un anillo de Dedekind el cual no es un campo y sea P un ideal primo de D distinto de O y de D. Entonces ${}^*D$ es un anillo y ${}^*P$ es un ideal primo de ${}^*D$

La valuación $\nu_P : D - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por $\nu_P(a) = n$, si $a \in P^n - P^{n+1}$, induce la función ${}^*(\nu_P) : {}^*D - \{0\} \to {}^*\mathbb{N}$, definida como ${}^*(\nu_P)(\alpha) = n$ si $\alpha \in {}^*P^n - {}^*P^{n+1}$, donde $n \in {}^*\mathbb{N}$.

Recordemos que, por el principio de transferencia, ${}^*\nu_P$ satisface las siguientes propiedades.

i. ${}^*\nu_P(a) \geq 0$ para toda $a \in {}^*D - \{0\}$

ii. ${}^*\nu_P(a \cdot b) = {}^*\nu_P(a) + {}^*\nu_P(b)$

iii. $\forall a \in {}^*D - \{0\} \quad {}^*\nu_P(a) = n$ si y solo si $a \in {}^*P^n -{}^* P^{n+1}$

3.1 Resultados Finales

Sean

$$\mu_P = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*P^n \quad y \quad \lambda_P = \bigcup_{n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}} {}^*P^n$$

Proposición 3.1.1 *$\alpha \in \mu_P$ si y solo si ${}^*\nu_P(\alpha) = H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$*

Demostración.

Sea $\alpha \in \mu_P$. No puede ser que ${}^*\nu_P(\alpha) \in \mathbb{N}$, ya que si ${}^*\nu_P(\alpha) = k \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha \in {}^*P^k - {}^*P^{k+1}$. Y esto nos diría que $\alpha \notin {}^*P^{k+1}$, por lo tanto $\alpha \notin \mu_P$.

Por otro lado si $\nu_P(\alpha) = H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, entonces $\alpha \in {}^*P^H$, y como ${}^*P^H \subset {}^*P^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*P^n = \mu_P$.

$\diamond$

Corolario 3.1.1 $\mu_P = \lambda_P$

Demostración .

Probamos primero que $\lambda_P \subset \mu_P$. Sabemos que
${}^*D \supset {}^*P^1 \supset \cdots {}^*P^n \supset \cdots \supset {}^*P^H \supset {}^*P^{H+1} \supset \cdots$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, y así para cada $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ ${}^*P^H \subset {}^*P^n$, por lo que ${}^*P^H \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*P^n$, y de aquí $\bigcup_{H\in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}} {}^*P^H \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*P^n$.

Probamos ahora que $\mu_P \subset \lambda_P$. Por la Proposición 3.1.1, si $\alpha \in \mu_P$, entonces $\nu_P(\alpha) = H \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, y así $\alpha \in {}^*P^H - {}^*P^{H+1} \subset \bigcup_{H\in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}} {}^*P^H = \lambda_P$.

$\diamond$

Proposición 3.1.2 *μ_P es un ideal primo de ${}^*D$*

Demostración.

Supongamos que $\alpha \cdot \beta \in \mu_P$. Por la proposición 3.1.1, tenemos que ${}^*\nu_P(\alpha\cdot\beta) \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Pero sabemos que ${}^*\nu_P(\alpha\cdot\beta) = {}^*\nu_P(\alpha) + {}^*\nu_P(\beta)$.

Concluimos entonces que ${}^*\nu_P(\alpha) \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ o ${}^*\nu_P(\beta) \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, y así $\alpha \in \mu_P$ o $\beta \in \mu_P$

$\diamond$

De la proposición 3.1.2 concluimos que $\Delta_P = {}^*D/\mu_P$ es un dominio entero, donde además $D \cap \mu_P = \emptyset$, y por lo tanto tenemos que la restricción a D del morfismo canónico ${}^*D \longrightarrow {}^*D/\mu_P = \Delta_P$ es monomorfismo. Así que Δ_P se puede ver como una extensión de D.

Veremos ahora que Δ_P contiene una copia de los enteros P-ádicos. Más concretamente si $D_P = B_P/J_P$ es el anillo de los enteros P-ádicos, construiremos un monomorfismo $D_P \longrightarrow \Delta_P$.

Si $\{d_n\}$ es una sucesión usual en ${}^*J_P$ tenemos que si $H \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ entonces $d_H \in {}^*P^n$, para alguna $n \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, y por lo tanto $d_H \in \mu_P$.

Ahora, si $\{d_n\}$ es una sucesión usual en ${}^*B_P$, como $\{d_n\}$ es de Cauchy entonces, $d_m - d_n \in \mu_P$ para cualesquiera $m, n \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$. Asi que si $d_n \in \mu_P$ para alguna $n \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, entonces $d_m \in \mu_P \quad \forall m \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$.

Sean $\chi : B_P \longrightarrow B_P/J_P = D_P$ y $\psi : {}^*D \longrightarrow \Delta_P = {}^*D/\mu_P$ los morfismos canónicos. Y sea $w \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, definimos $\varphi : B_P \longrightarrow {}^*D$ por $\varphi(\{d_n\}) = d_w$.
Definimos ademas $\pi : D_P \longrightarrow \Delta_P$ de la siguiente manera:
Sea $c \in D_P$, entonces $\pi(c) = \psi(d_w)$ donde $c = \chi(d_n)$.

La interrelación de las varias funciones está expresada por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B_P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi"'] & {}^*D \arrow[d, "\psi"] \\
D_P \arrow[r, "\pi"] & \Delta_P
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\{d_n\} & \longrightarrow & \varphi(\{d_n\}) = d_w \\
\downarrow & & \downarrow \\
\chi(\{d_n\}) & \longrightarrow & \psi(d_w)
\end{array}$$

Veremos que π está bien definida y que es un monomorfismo.

1. π está bien definida
   Sean $\{d_n\}$ y $\{d'_n\}$ en B_P tal que $\chi(\{d_n\}) = \chi(\{d'_n\})$. Entonces $\{d_n\} - \{d'_n\} = \{d_n - d'_n\} \in J_P$ por lo tanto $d_w - d'_w \in \mu_P$ y de aquí $\psi(d_w - d'_w) = 0$, es decir, $\psi(d_w) = \psi(d'_w)$ concluimos entonces que $\pi(\chi(\{d_n\})) = \pi(\chi(\{d'_n\}))$.

2. π es un morfismo

Sean c y c' , $c = \chi(\{d_n\})$, $\quad c' = \chi(\{d'_n\})$

$\pi(c + c') = \pi(\chi(\{d_n + d'_n\})) = \psi(d_w + d'_w) = \psi(d_w) + \psi(d'_w) =$
$\pi(\chi(\{d_n\})) + \pi(\chi(\{d'_n\}))$

3. π es inyectiva

Supongamos que $\pi(\chi(\{d_n\})) = 0$. Entonces $\psi(d_w) = 0$, por lo que $d_w \in \mu_P$ y entonces $d_n \in \mu_P \quad \forall n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ por lo tanto
$\{d_n\} \in J_P$ y de aqui $\chi(\{d_n\}) = 0$

π, en general, no es suprayectiva. Más adelante daremos un ejemplo de un anillo para él cual $\pi(D_P)$ es un subconjunto propio de Δ_P.

Sin embargo, hay casos en que π es suprayectiva como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3 *Sean D un anillo de Dedekind que no es un campo y P un ideal primo de D distinto de* 0 *y D. Si D/P es finito entonces π es suprayectiva.*

Demostración.

Sea $b \in {}^*D$. Se cumple uno de los siguientes casos.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $d_n \in D$ tal que $b \equiv d_n \quad ({}^*P^n)$ ó
2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \equiv d \quad ({}^*P^n)$ para alguna $d \in D$ y
   $b \not\equiv d \quad ({}^*P^{n+1})$ para toda $d \in D$

Caso (1)

Consideremos la sucesión $\{d_n\}$ tal que $b \equiv d_n \quad ({}^*P^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\{d_n\}$ es de Cauchy ya que $d_m - d_n \in P^n$ para cada $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ y así $\{d_n\} \in B_P$, y por lo tanto $d_m - d_w \in \mu_P$ para toda $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Por otro lado $b - d_n \in {}^*P^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y esto implica entonces que $b - d_m \in {}^*P^m$, para algún $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ y asi $b - d_m \in \mu_P$. Por lo tanto

$$b - d_w = (b - d_m) + (d_m - d_w) \in \mu_P$$

Concluimos entonces que $\pi(\chi(\{d_n\})) = \psi(b)$.

Caso (2)

Este caso no puede darse por lo siguiente. Como D es de Dedekind y P es un ideal primo de D entonces P es maximal y por lo tanto D/P es un campo.

Por hipótesis,D/P es finito, afirmamos entonces que P/P^{n+1} también es finito para cualquier n:

Sea $n = 1$, P/P^2 es un D/P espacio vectorial ya que $P \cdot P/P^2 = 0$. Como P es finitamente generado entonces $\dim_{D/P} P/P^2$ es finita, y de aqui P/P^2 es suma directa finita de D/P y como este último es finito entonces P/P^2 es finito.

Aplicando inducción sobre n obtenemos el resultado.

Supongamos cierto para n, es decir , P/P^n es finito.

Veremos, ahora, que P/P^{n+1} es finito, P^n/P^{n+1} es un D/P espacio vectorial y como en el caso $n = 1$, entonces P^n/P^{n+1} es finito. Tenemos entonces

$$0 \longrightarrow P^n/P^{n+1} \longrightarrow P/P^{n+1} \longrightarrow P/P^n \longrightarrow 0$$

donde los extremos son finitos.

Concluimos entonces que P/P^{n+1} es finito. Pero tenemos que $(D/P^{n+1})/(P/P^{n+1}) \cong D/P$.

Concluimos entonces que D/P^{n+1} es finito ya que $D/P y P/P^{n+1}$ lo son.

Ahora, si $b \equiv d \quad ({}^*P^n)$ y $b \not\equiv c \quad ({}^*P^{n+1})$ para cada $c \in D$, entonces $b - d \in {}^*P^n$ y $b - d \notin {}^*P^{n+1}$, y como D/P^{n+1} es finito entonces existen $a_1, \ldots, a_k \in D$ tal que para cada $x \in D, a_i - x \in P^{n+1}$ para alguna $i = 1, \ldots, k$

Así que es verdadera la siguiente afirmación

$$\forall x \in D \, \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \; a_i - x \in P^{n+1}$$

y usando el Principio de Transferencía tenemos

$$\forall x \in {}^*D \, \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \; a_i - x \in {}^*P^{n+1}$$

Por lo tanto para $x = b - d$ obtenemos $a_i - (b - d) \in {}^*P^{n+1}$ para alguna $i = 1, \ldots, k$ y de aquí tendríamos entonces que

$$b \equiv a_i + d\,({}^*P^{n+1})$$

lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto este caso no puede darse. $\diamond$

Hemos visto que si D/P es finito entonces π es sobre , sin embargo en general esto no es cierto , como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Sea $D = \mathbb{C}[x]$ el anillo de polinomios en x con coeficientes en el campo de los números complejos, D es un anillo de Dedekind. Sea $P = \langle x \rangle$ el ideal primo de D generado por x. Se tiene que $D/P \cong \mathbb{C}$, y por lo tanto D/P es infinito.

Como ${}^*D = \{\Sigma_{i \leq H} a_i x^i \mid H \in {}^*\mathbb{N}\,,\, a_i \in {}^*\mathbb{C}\}$, entonces ${}^*D/\mu_P$ es isomorfo al anillo de series de potencias en el sentido usual: $\Sigma_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ donde $a_i \in {}^*D$. Por otro lado $\pi(D_P)$ contiene únicamente series de potencias con coeficientes en D , asi que cualquier serie que tenga por lo menos un coeficiente en ${}^*D - D$ no pertenece a $\pi(D_P)$ y asi π no es sobre.

Bibliografía

[1] BACHMAN GEORGE,*Introduction to p-adic Numbers and Valuation Theory* , Academic Press , (1964).

[2] DAVIS MARTIN,*Applied Non - Standard Analysis* , aWiley & Sons , (1977).

[3] FRALEIGH JOHN B,*Algebra Abstracta* , Addison - Wesley Iberoamericana , (1988).

[4] HERSTEIN I. N.*Algebra Moderna* , ed Trillas , (1988).

[5] LANG SERGE,*Algebra* , Addison - Wesley , (1984).

[6] LANG SERGE*Algebraic Numbers* , Addison - Wesley , (1964).

[7] LUXEMBURG W. A. J.,*What is nonstandard analysis ?*, Papers in the foundation of Mathematics , Amer. Math. Monthly (1978) , pag. 38 - 67

[8] NORTHCOTT D. G.,*Ideal Theory* , Cambridge University press, (1953).

[9] PIERRE SAMUEL,*Teória Algebraica de números* , Ediciones Omega , (1972).

[10] ROBINSON A.,*Non - Standard Analysis* , Studies in Logic and the Foundations of Mathematics , Amsterdam , (1966).