4/
21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

MODELOS ACTUARIALES DE SUPERVIVENCIA: Caso Práctico para la Construcción de una Tabla de Rotación.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A N :
MARTHA EUGENIA CAMACHO MARTINEZ
VICTOR HUGO HERNANDEZ GONZALEZ
ASESOR: ACT. CARLOS AROCHA ROMERO

ACATLAN, EDO. DE MEXICO. 1997

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARÍA

C. MARTHA EUGENIA CAMACHO MARTÍNEZ
C. VÍCTOR HUGO HERNÁNDEZ GONZÁLEZ
Alumnos de la carrera de Actuaría
P r e s e n t e.

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha 23 de junio de 1994, me complace informarles que este Programa tuvo a bien aceptar el siguiente tema de Tesis conjunta: "MODELOS ACTUARIALES DE SUPERVIVENCIA: CASO PRÁCTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE ROTACIÓN", el cual desarrollará como sigue:

INTRODUCCIÓN
CAPÍTULO I. Modelos Actuariales de Supervivencia.
CAPÍTULO II. Estimación de un Modelo de Supervivencia a partir de datos completos e incompletos.
CAPÍTULO III. Metodología para la estimación del Modelo de Supervivencia Tabular.
CAPÍTULO IV. Aspecto Práctico para la construcción del Modelo Tabular de Rotación.
CAPÍTULO V. Graduación del Modelo Tabular de Rotación.
CONCLUSIONES

Asimismo fue designado como Asesor de Tesis el Act. Carlos Arocha Romero.

Ruego a ustedes tomar nota que en cumplimiento de lo especificado en la Ley de Profesiones, deberán presentar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito básico para sustentar el examen profesional, así como de la disposición de la Coordinación de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de los ejemplares de la Tesis el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior de la Tesis.

A T E N T A M E N T E
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Acatlán, Edo. de Méx., a 6 de junio de 1997.

E.N.E.P. ACATLAN

M. en C. María Soledad Villa Palato.
Jefe del Programa de Actuaría

JEFATURA DEL PROGRAMA DE ACTUARIA

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En la valuación actuarial de un plan de pensiones es necesario considerar un conjunto de supuestos que nos permitan prever la ocurrencia de eventos futuros de naturaleza incierta, que intervienen directamente en la estimación del costo de dicho plan. Ejemplos de estos eventos pueden ser el fallecimiento o la jubilación de un participante de un plan de pensiones.

Este conjunto de suposiciones que se consideran en la valuación del plan son llamadas hipótesis actuariales y se dividen en dos grandes grupos: bases económicas y bases biométricas.

Las bases económicas son aquellas que permiten determinar el desarrollo financiero del plan en función al medio económico en torno a la empresa. Algunos ejemplos de este tipo de hipótesis son la tasa de interés, la tasa de inflación, la tasa de incremento salarial y la tasa de impuestos.

Por otra parte, las bases biométricas, también llamadas bases demográficas, son aquellas que sirven para determinar la permanencia de un empleado en un status laboral. A su vez, estas bases biométricas se subdividen en varias fuerzas o causas de decremento por las cuales el empleado puede dejar de pertenecer al grupo para el cual se constituyó el plan de pensiones. Así, comúnmente se identifican como causas de decremento la mortalidad, la invalidez, la rotación (separación voluntaria o involuntaria de la empresa), y el retiro. Cabe mencionar que de estas causas de decremento, la fuerza de rotación es la más plausible dentro de la vida activa de los integrantes del plan, por lo que su impacto en el costo del plan de pensiones es mayor.

En el contexto de las hipótesis actuariales de un plan de pensiones, la base demográfica de rotación constituye la fuerza de decremento más significativa. Esto se debe a que, de los decrementos que se consideran en la valuación del plan, generalmente la rotación presenta probabilidades de decremento mayores en comparación con las asociadas a las hipótesis de mortalidad e invalidez, durante la vida activa de los individuos cubiertos por el plan.

Por la importancia que dicho decremento de rotación tiene en el contexto del costo del plan, cabría esperar un mayor interés por su estudio. Sin embargo, los trabajos que en México se han elaborado sobre pensiones generalmente contemplan temas tales como el diseño de un plan de pensiones, los métodos de financiamiento de estos planes y el análisis de sensibilidad de las hipótesis actuariales, entre otros; no obstante, difícilmente alguno de ellos se enfoca al estudio de la rotación *per se*.

Es por ello que en nuestro país, ante la carencia de tales estudios, en la mayoría de las valuaciones de estos planes se utilizan tablas cuya construcción se basa en la experiencia de los Estados Unidos de América, o bien modelos tabulares "ajustados", ya que al no haber tablas con experiencia mexicana para sectores específicos de la población se opta por ajustar las existentes.

Ante la situación descrita en el párrafo precedente, consideramos conveniente que las empresas que tienen un número de empleados tal que el sustento estadístico resulte factible, cuenten con un estudio que refleje su rotación a partir de experiencia propia, lo que permitirá, aunado a una adecuada selección de las demás variables que se involucran en la valuación, una determinación de pasivos y costos más próximos a la realidad.

Asimismo, la estimación de dichas probabilidades de rotación adquiere gran importancia si consideramos que el conjunto de las hipótesis actuariales es uno de los elementos que determina el nivel de aportaciones del plan y, entre más próximas a la realidad resulten ser aquellas hipótesis, dicho nivel de aportaciones tenderá a ser el óptimo.

Por todo lo expuesto, resulta interesante responder a la interrogante: ¿Cómo se puede reflejar adecuadamente, en una tabla, la rotación de los participantes de un plan de pensiones? La forma idónea de responderla, proposición básica de la presente tesis, es mediante la construcción de un modelo actuarial de supervivencia que estime las probabilidades de rotación para los integrantes de un plan de pensiones en particular. Así, este trabajo pretende ilustrar la metodología de estimación de un modelo tabular de rotación, a través del análisis estadístico del comportamiento de dicho fenómeno, en base a la experiencia real de una empresa que tiene establecido actualmente un plan de pensiones para sus empleados.

Asimismo, consideramos que la construcción de modelos de rotación debe ser parte integral de la formación profesional del actuario dedicado a la rama de pensiones, ya que una estimación adecuada de estos modelos aumentará el grado de veracidad de los resultados de la valuación actuarial de los planes de pensiones.

Estas son algunas consideraciones fundamentales que nos provocaron la inquietud por el tema, impulsándonos a abordar el problema respecto al cual se elabora la presente investigación.

Finalmente, es muy importante citar que el nombre de la empresa para la cual se estimó el modelo de rotación, el ramo de la industria al que pertenece, así como la información de personal que sirvió de base para la estimación del modelo no se revelará en este trabajo por cuestiones de confidencialidad.

CAPITULO I

MODELOS ACTUARIALES DE SUPERVIVENCIA

1.1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo, antes de estimar el modelo actuarial de supervivencia de rotación se estudiará de manera general la naturaleza de los modelos de supervivencia de un modo conceptual. Así, dado que un modelo de supervivencia es un tipo especial de distribución de probabilidad, se abordarán, entre otros tópicos, algunos conceptos probabilísticos. Finalmente, se citarán los diferentes tipos de diseños del estudio que se pueden llevar a cabo en la estimación de un modelo de supervivencia, enfatizando en aquél que se aplicará en este trabajo.

1.2 DEFINICIÓN DE MODELO DE SUPERVIVENCIA

"Un modelo de supervivencia es una distribución de probabilidad para una clase especial de variable aleatoria."[1] Algunos ejemplos de estas variables aleatorias especiales pueden ser: el momento en el que ocurre la muerte de un individuo con una cierta enfermedad, o bien, el tiempo que dura encendido un foco. En ambos casos, el interés se centra en estudiar el patrón o modelo de supervivencia de las unidades observadas, como una función del tiempo transcurrido a partir de un cierto evento inicial ocurrido en $t = 0$, es decir, interesa conocer la probabilidad de que la unidad de estudio continúe latente a cualquier tiempo futuro t. Esta probabilidad se denota por $S(t)$.

La variable aleatoria que da lugar a esta distribucion se denota por T, y se define como el tiempo en el que ocurre el fracaso de cada unidad de estudio que existia al tiempo $t = 0$, (en el contexto de los ejemplos iniciales, el fracaso lo

[1]Dick London, *Survival Models and Their Estimation*, 2da. ed., 1988, p. 3.

constituye la muerte de la persona enferma o el que se funda el foco). Así, suele llamarse a T *"variable aleatoria del tiempo de fracaso"*.

Una vez definida la variable aleatoria T se reconoce que es posible hablar de la supervivencia en términos de fracaso, esto es, que la probabilidad de que cada unidad de observación continúe con vida a un tiempo t es la misma que la probabilidad de que el fracaso ocurra después del tiempo t. Formalmente,

$$S(t) = \Pr(T > t) \tag{1.1}$$

Dada la naturaleza de la variable aleatoria T, resulta claro reconocer algunas de sus propiedades:

i) T no puede ser negativa, i.e., $T \geq 0$.

ii) $S(0) = 1$.

iii) $S(t)$ es una funcion no creciente, y se asumirá que **(1.2)**

iv) $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$

Hasta ahora se ha considerado al tiempo, transcurrido desde un evento inicial ocurrido en $t = 0$, como el único factor que determina la supervivencia de las unidades de estudio, (es por ello que se usa $S(t)$, pues la función sólo dependerá del tiempo); sin embargo, debe aclararse que dada la naturaleza del estudio pueden presentarse otros factores que afecten al patrón de supervivencia, por ejemplo en los casos en los que se trata de estudios de modelos de supervivencia para humanos, especialmente aquéllos que son de interés directo para los actuarios y que se denominan *Modelos Actuariales de Supervivencia*, frecuentemente se reconoce que la probabilidad de fracaso está relacionada con la edad, y tal fracaso puede ser entendido como la muerte, la rotación, la invalidez o el retiro, entre otros. Así pues, será la naturaleza del estudio la que determine la importancia de la edad cronológica comparada con la del tiempo transcurrido a partir del evento inicial.

Hasta aquí únicamente se ha hecho referencia al aspecto conceptual de la función $S(t)$ sin ser específicos en su forma. Dado que se ha referido a T como variable aleatoria univariada, podría esperarse que haya distribuciones específicas para dicha variable. En efecto, siempre que las probabilidades de supervivencia, $S(t)$, se dan por una función matemática de t, se dice que $S(t)$ se encuentra en su forma paramétrica. Se le da este nombre porque los valores de $S(t)$ dependen de uno o más parámetros, de la misma forma en que una distribución normal depende de sus parámetros μ y σ^2.

No obstante, tradicionalmente los modelos actuariales de supervivencia no se encuentran en su forma paramétrica, ya que resulta complejo representar adecuadamente la forma de la función de supervivencia sugerida por los datos empíricos, por medio de una distribución paramétrica. Por ello, aún cuando en ocasiones han sido utilizadas distribuciones como modelos paramétricos de supervivencia, la profesión actuarial ha preferido utilizar los modelos tabulares por ser más prácticos. Dichos modelos tabulares consisten en valores numéricos de la función de supervivencia para ciertos valores selectos de la edad -comúnmente los enteros- la cual se denota por x. Este modelo es entonces una tabla de números, de donde obtiene el nombre de tabular.

Así, por ejemplo, para cuantificar y registrar en un cuadro la fuerza de decremento de rotación, se utiliza un modelo tabular que genere y muestre las tasas de rotación de una población en particular en una tabla, cuyo objeto es el reflejar la tasa de rotación que se espera ocurra cada año a cada edad específica.

Sin embargo, si el modelo tabular presenta valores de $S(x)$ únicamente para $x = 0, 1, \ldots$ entonces dicho modelo no proporciona información para cualquier valor fraccional de x. En este caso, se dice que el modelo de supervivencia no se especifica en su totalidad, pero se puede cubrir dicha carencia al suponer, mediante una hipótesis adecuada, la forma de $S(x)$, (Función de Supervivencia que depende sólo de la edad), entre edades enteras adyacentes. Así, cuando tal hipótesis es superpuesta al modelo tabular, $S(x)$ estará definida para toda $x \geq 0$ y cualquier cálculo que pudiera realizarse a través de un modelo paramétrico podría también hacerse con el modelo tabular que incluye la hipótesis de distribución entre edades enteras adyacentes.[2]

1.2.1 EL MODELO SELECTO

Los modelos actuariales de supervivencia se usan principalmente en las operaciones relacionadas con seguros y esquemas de pensiones, y tal como se mencionó anteriormente dichos modelos suponen a la supervivencia como una función de la edad cronológica de estudio.

Pueden identificarse dos clases de modelos actuariales de supervivencia: 1) El modelo de supervivencia selecto y 2) El modelo de supervivencia agregado. El modelo selecto se caracteriza porque su funcion de supervivencia depende de más de una variable aleatoria; así, el modelo de supervivencia, $S(t)$, que originalmente estaba determinado sólo por el tiempo de fracaso, T, podría también estar influido por otra variable aleatoria X que generara una Función de Supervivencia Bivariada $S(t;x)$, donde t se llama variable aleatoria primaria y x se denomina variable aleatoria concomitante.[3]

En el caso particular de un modelo de supervivencia de rotación para los participantes de un plan de pensiones es posible reconocer diversos factores que influyen en la determinación de las tasas de rotacion de los empleados, sin embargo, cuando se trata de un caso selecto comunmente sólo se consideran dos de estos factores: 1) La edad del trabajador y 2) El tiempo de servicio o antigüedad del trabajador, donde generalmente la edad se maneja como variable primaria y la antigüedad como variable concomitante. La influencia de la variable aleatoria concomitante puede observarse más claramente si se considera, por ejemplo, que la probabilidad de que un empleado con 30 años de edad y 10 años de antigüedad permanezca en un determinado status laboral es mayor que la probabilidad correspondiente a un empleado con la misma edad pero con un solo año de antigüedad, es decir, $S(30;10) > S(30;1)$

[2] Para la forma de $S(x)$, entre edades enteras adyacentes, comunmente se usan tres hipotesis: lineal, exponencial e hiperbolica.

[3] En este caso solo se plantea la presencia de una variable aleatoria concomitante, sin embargo, dada la naturaleza del problema el estudio puede involucrar tantas variables concomitantes como sean necesarias.

Tal como se mencionó, además de la edad y la antigüedad del trabajador, hay otras variables que tienen influencia en el modelo de rotación: "...la rotación depende en menor medida de la edad y del sexo del empleado que de los años de servicio rendidos por este en la compañía, la rama de la industria y su localización, la situación económica, el desempleo y otros factores que no están directamente relacionados con el trabajador."[4]

Por lo anterior, se puede concluir que dado que las variables concomitantes afectan al modelo de supervivencia, es conveniente tomarlas en cuenta, ésto puede lograrse analíticamente por dos vías :

1) Al construir un modelo de supervivencia en forma paramétrica, que introduzca un modelo sencillo que represente adecuadamente la influencia de las variables concomitantes, o bien,

2) Construir un modelo de supervivencia en forma tabular, por medio de tablas separadas para diferentes valores de las variables concomitantes.

Cabe señalar, que este último método puede aplicarse provechosamente sólo cuando las variables concomitantes pueden definirse en términos de algunas categorías. Un ejemplo sería la construcción de un modelo tabular de rotación que considere a la edad como variable primaria y al sexo como variable concomitante, así dado que ésta última puede dividirse en dos categorías (femenino y masculino) es posible elaborar tablas separadas para hombres y mujeres, tal como ocurre en las tablas de mortalidad.

1.2.2 EL MODELO AGREGADO

Un modelo actuarial de supervivencia agregado se refiere al caso particular en que el evento inicial, (definido al tiempo $t = 0$), coincide con el nacimiento de cada individuo para el cual se estudian las probabilidades de supervivencia $S(t)$ (Función de Supervivencia del Modelo Agregado). En general, si se utiliza la

[4] K. Heubbek, *Turnover as an Actuarial Assumption on its own*, Transactions of the Society of Actuaries, II 1988, p.p 193

variable aleatoria X para edades alcanzadas[5] resulta claro que $x = 0$ cuando $t = 0$, pues ambas variables corren juntas, por lo que es indiferente cual de ellas se tome como variable primaria. En consecuencia, la función de supervivencia podría ser $S(x)$ o $S(t)$ indistintamente ya que ambas funciones en este tipo de modelo son idénticas, pero diferentes de $S(t;x)$. Al igual que con el modelo selecto, la función de supervivencia cumple con las siguientes propiedades:

$$\forall X \geq 0 \qquad S(0) = 1 \qquad y \qquad \lim_{x \to \infty} S(x) = 0 \tag{1.2a}$$

En resumen, siempre que la edad cronológica de las unidades para las cuales se estudian las probabilidades de supervivencia, no sea un factor que afecte la supervivencia suele usarse $S(t)$. Por el contrario, en el caso especial de un estudio de patrones de supervivencia de personas con edad x al tiempo $t = 0$, y donde la edad alcanzada se considera como un elemento que afecta la supervivencia se usaría $S(t;x)$.

Tal como se mencionó anteriormente, las variables aleatorias concomitantes proporcionan mayor información sobre el patrón de supervivencia estudiado, no obstante, por cuestiones prácticas, el modelo de rotación que se construirá en capítulos subsecuentes será un modelo tabular de supervivencia univariado, donde se considerará como variable aleatoria de interés a la edad, por lo que la Función de Supervivencia será $S(x)$.

Finalmente, es importante mencionar que, para los objetivos de este trabajo, de aquí en adelante el fracaso será entendido como la rotación, es decir, como el evento de la separación voluntaria o involuntaria del empleado del status laboral al que pertenece.

[5] Se entiende por edad alcanzada al número de años completos que ha vivido una persona, es decir, sin tomar en cuenta ningún tipo de fracción de año.

1.3 DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO FUTURO ESPERADO DE SUPERVIVENCIA

En la sección 1.2 se definió a T como la variable aleatoria del tiempo de fracaso y a $S(t)$ como una función de esta variable aleatoria (Función de Distribución de Supervivencia (FDS)), a continuación se hará referencia a algunos conceptos probabilísticos relacionados con la variable aleatoria T, tales como las funciones de distribución acumulativa y de densidad de probabilidades, los dos primeros momentos de la variable aleatoria y un tipo especial de función de densidad condicional.

1.3.1 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA Y DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES

Para la variable aleatoria que resulta de interés en este estudio, y con base en la Teoría de la Probabilidad, se denomina Función de Distribución Acumulativa (FDA) a la función $F(t)$ que proporciona la probabilidad de que la variable aleatoria T asuma valores menores o iguales que un cierto valor t, esto es, que el fracaso no ocurra despues del tiempo t. Formalmente,

$$F(t) = \Pr(T \le t) \tag{1.3}$$

Así, resulta claro que FDA es el complemento de la función de supervivencia

$$F(t) = 1 - \Pr(T > t) = 1 - S(t) \tag{1.4}$$

Algunas propiedades de FDA son

$$\begin{aligned} &i)\ T \ge 0 \\ &ii)\ F(0) = 0 \\ &iii)\ F(t) \text{ es una función monótona no decreciente} \\ &iv)\ \lim_{t \to \infty} F(t) = 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ahora bien, si T se define como una variable aleatoria continua, entonces la Función de Densidad de Probabilidades (FDP), $f(t)$, está dada por la derivada de $F(t)$, esto es,

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}[1 - S(t)] = \frac{-d}{dt}S(t) \qquad \forall T \geq 0 \tag{1.6}$$

Así mismo, para que $f(t)$ sea una FDP debe cumplirse que

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = 1 \qquad \text{y} \qquad f(t) \geq 0 \quad \forall T \geq 0 \tag{1.7}$$

La función de densidad de probabilidades, $f(t)$, describe el comportamiento de la variable aleatoria T, que está determinado por las probabilidades sobre la línea real t en donde se define la variable aleatoria T. Así, $f(t)$ es la densidad de fracaso al tiempo t que relaciona a un punto del tiempo, por lo que se considera una medida instantanea.

Además, $f(t)$ es una densidad no condicional de fracaso al tiempo t, ya que está determinada únicamente por la existencia de la unidad de estudio al tiempo $t = 0$.

Por otra parte, de la expresión (1.6) se desprenden las siguientes relaciones:

$$F(t) = \int_0^t f(y)dy \tag{1.8}$$

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(y)dy \tag{1.9}$$

Finalmente, de las expresiones anteriores se reconoce que $F(t)$ y $S(t)$ son probabilidades que relacionan intervalos de tiempo por lo que se consideran medidas de intervalo.

1.3.2 LA FUNCIÓN DE LA TASA DE RIESGO

A diferencia de $f(t)$ que es una función de densidad no condicional, pues sólo requiere la existencia de la unidad observada al tiempo $t = 0$, la tasa de riesgo a un tiempo t es la densidad condicional de fracaso al tiempo t. Dicha tasa se denota por $\lambda(t)$ y se dice que es condicional ya que supone la supervivencia de la unidad de estudio al tiempo t.

Además, dado que $\lambda(t)$ es vista como una función de t, frecuentemente se le llama Función de la Tasa de Riesgo (FTR), misma que ha sido identificada por C.W. Jordan como la fuerza de mortalidad.[6]

Ahora bien, si la densidad condicional de fracaso al tiempo t, dada la supervivencia al tiempo t, se multiplica por la probabilidad de obtener la condición, es decir, por la probabilidad de supervivencia al tiempo t, el resultado es la función de densidad no condicional de fracaso al tiempo t. Esto es,

$$\lambda(t) \times S(t) = f(t) \tag{1.10}$$

o bien,

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{1.11}$$

Por otra parte, sustituyendo (1.6) en la última expresión se tiene que,

$$\lambda(t) = \frac{\frac{-d}{dt}S(t)}{S(t)} = \frac{-d}{dt}\ln S(t) \tag{1.12}$$

ahora, para despejar $S(t)$ integramos (1.12) y resulta:

$$\int_0^t \lambda(y)dy = -\ln S(t) \tag{1.13}$$

[6] C. W. Jordan. *Life Contingencies*, 2da. ed., 1982, p. 13.

$$S(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(y)dy\} \tag{1.14}$$

La función de distribución de supervivencia puede expresarse también de la siguiente forma:

$$S(t) = \int_0^t f(y)dy = \int_0^t \lambda(y)\, S(y)\, dy \tag{1.15}$$

La diferencia entre las expresiones (1.14) y (1.15) es que en la primera la FDS se expresa en términos del tiempo de vida pasado, por el contrario, la expresión (1.15) representa a la función de supervivencia en términos del tiempo futuro de vida.

En el caso particular de un modelo actuarial de supervivencia que involucra como fracaso a la muerte, la tasa de riesgo normalmente se denomina fuerza de mortalidad y se denota por μ_x. Además, cuando se trata de un modelo selecto $S(t;x)$ la FTR se denota por $\mu_{[x]+t}$, y esta dada por

$$\mu_{[x]+t} = \frac{-\frac{d}{dt} S(t;x)}{S(t;x)} = \frac{-d}{dt} \ln S(t;x) \tag{1.16}$$

1.3.3 ESPERANZA Y VARIANZA DEL TIEMPO DE FRACASO

Anteriormente, se hizo referencia a la FDP y a la FDA, dos funciones de toda variable aleatoria, para la variable aleatoria del tiempo de fracaso (T). En seguida se describiran en forma general, los dos principales momentos de la variable aleatoria T.

El primer momento de la variable aleatoria del tiempo de fracaso definida en el intervalo $[0,\infty)$ está dado por:

$$E[T] = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt \tag{1.17}$$

Lo anterior resulta cierto si la integral existe, de lo contrario el primer momento es indefinido. Integrando por partes esta expresión, se obtiene la fórmula alternativa

$$E[T] = \int_0^{\infty} S(t)dt \tag{1.18}$$

la cual se utiliza frecuentemente para calcular el primer momento de la variable aleatoria T, pues en general se obtienen integrales inmediatas al integrar la función de supervivencia.

En el contexto actuarial, especificamente para la mortalidad, el primer momento de la variable aleatoria X se denota por $\mathring{e}_0$. Así,

$$\mathring{e}_0 = E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)dx \tag{1.19}$$

y se denomina esperanza completa de vida al nacimiento.

Así mismo, para el modelo selecto $S(t;x)$ el valor esperado de la variable aleatoria T, $E[T;x]$, proporciona el tiempo esperado de vida futura (o esperanza de vida), para una persona seleccionada a edad x, y se denota por $\mathring{e}_{[x]}$.

Por otra parte, el segundo momento de T esta dado por

$$E[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt \tag{1.20}$$

si esta integral existe, puede calcularse la varianza de T

$$Var(T) = E[T^2] - \{E[T]\}^2 \tag{1.21}$$

Así como en esta sección se han desarrollado fórmulas para algunas funciones de t, se pueden desarrollar expresiones especificas de $S(t)$, $F(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ y para los momentos de T si se cuenta con formas particulares de $f(t)$. Un ejemplo de estas formas específicas de la FDP es la Ley de Moivre (1724)[7] que fue la primera distribución de probabilidad continua que se sugirió como un modelo para la supervivencia de humanos, cuyo objetivo era simplificar los cálculos relacionados con las anualidades contingentes. A esta ley de mortalidad se le conoce como Distribución Uniforme Continua y es una distribución de dos parámetros, que son los límites del intervalo $[a,b]$ sobre los cuales se define la variable aleatoria, así la FDP se define como:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{para} \quad a \le t \le b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{1.22}$$

Para el caso especial de la variable aleatoria del tiempo de fracaso $a=0$ y b, suele denotarse por la letra griega ω, así que la distribución está definida por

$$f(t) = \frac{1}{\omega}, \qquad 0 \le t \le \omega \tag{1.23}$$

Entonces,

$$F(t) = \int_0^t f(y)dy = \frac{t}{\omega} \tag{1.24}$$

$$S(t) = 1 - F(t) = \int_t^w f(y)dy = \frac{\omega - t}{\omega} \tag{1.25}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1}{\omega - t} \tag{1.26}$$

$$E[T] = \int_0^w t \cdot f(t)dt = \frac{\omega}{2} \tag{1.27}$$

$$Var(T) = E[T^2] - \{E[T]\}^2 = \frac{\omega^2}{12} \tag{1.28}$$

[7] *Ibid.*, pp. 20-21.

1.4 DISEÑO DEL ESTUDIO

En el estudio de un modelo de supervivencia, la naturaleza del fenómeno observado determina la forma en que se obtendrán las observaciones muestrales, es decir, el diseño del estudio que se seguirá, que puede ser de 2 clases: transversal o longitudinal; también llamados estudios con datos incompletos o estudios con datos completos respectivamente.

Así por ejemplo, los estudios que resultan de particular interés para los actuarios tradicionalmente involucran diseños del estudio de tipo transversal, en los cuales las estimaciones del patrón de supervivencia se basan en la experiencia registrada de un grupo de estudio[8] previamente definido. Los fracasos de las unidades de estudio de dicho grupo se observan durante un intervalo de tiempo generalmente largo; sin embargo, puesto que no se realiza un seguimiento del grupo de estudio hasta que éste se extingue, el tamaño del mismo debe ser lo suficientemente grande para que el sustento estadístico sea factible.

En contraste a los estudios transversales de muestras grandes, los estudios de laboratorio presentan por lo regular un diseño del estudio de tipo longitudinal, donde se tiene un grupo de estudio pequeño, (comparado con el del estudio transversal), en un ambiente cerrado en el que es posible el control de las condiciones del estudio. En estos estudios el grupo se observa hasta que todas sus unidades han fracasado, por lo que resultan factibles sólo cuando el tiempo que transcurre hasta el fracaso es corto.[9]

Por lo anterior, resulta intuitivamente claro que para efectos del modelo de rotación que se construirá en este trabajo se seguirá un diseño del estudio de tipo transversal, ya que, dada la naturaleza del evento que representa la rotación de los empleados de una empresa, el grupo de estudio que se considerara es grande, no

---

[8] Se entiende por grupo de estudio al conjunto identificable de personas para las cuales se pretende estimar el modelo de supervivencia, por ejemplo, los niños entre cero y un año de edad en la Ciudad de México, o bien, los integrantes de un plan de pensiones.

[9] Sin embargo, este tipo de estudios pueden terminarse antes de que todas las unidades de estudio fallen, ya sea a una fecha determinada (estudio truncado) o bien, a un número determinado de fracasos (estudio censurado). Si el lector se interesa en profundizar en el estudio de estos casos puede referirse a Elant Johnson, R.C. et al. *Survival Models and Data Analysis*. Capítulo 6, New York, John Wiley and Sons, 1980.

cerrado, ni extinguible, y por esto último resulta necesario elegir un periodo de tiempo durante el cual se realicen las observaciones.

CAPITULO II

ESTIMACIÓN DE UN MODELO DE SUPERVIVENCIA A PARTIR DE DATOS COMPLETOS E INCOMPLETOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En la estimación de un modelo de supervivencia pueden identificarse dos tipos diferentes de diseño del estudio, diseño con datos completos y con datos incompletos. La elección de alguno de ellos durante el proceso de estimación del modelo depende, entre otras cosas, de la naturaleza del fenómeno estudiado, de las propias características de las unidades observadas y de las condiciones mismas del estudio. Así, dado que la estimación del modelo está directamente relacionada con el tipo de diseño del estudio utilizado, el análisis de ambos diseños se torna de suma importancia.

En particular, la estimación del modelo de rotación que resulta de interés en la presente tesis involucra un diseño del estudio con datos incompletos. Por esta razón, la mayor parte del material de este capítulo se enfoca al estudio de ese tipo de diseño, no obstante, en la siguiente sección se abordan, aunque de manera menos exhaustiva, algunos aspectos generales del diseño del estudio con datos completos.[1]

Resulta conveniente aclarar que en ocasiones los estudios con datos completos y con datos incompletos son llamados estudios con datos no truncados y truncados respectivamente, sin embargo para fines de este trabajo se hará referencia a ellos como estudios con datos completos y con datos incompletos, con el objeto de evitar una posible confusión en el momento de definir a los estudios con datos incompletos que pueden truncarse, los cuales se estudiarán posteriormente.

---

[1] Si el lector desea profundizar en el estudio de la estimación de los modelos de supervivencia a partir de datos completos, puede referirse a Elant Johnson, *op. cit.*

2.2 DISEÑO DEL ESTUDIO CON DATOS COMPLETOS

Los diseños del estudio con datos completos se encuentran por lo regular en trabajos de laboratorio, en los cuales las condiciones bajo las cuales se realiza el estudio pueden controlarse, tal como se mencionó en la sección 1.4. En este tipo de estudio las unidades iniciales del grupo, llamadas *cohorte* del grupo, se mantienen bajo observación a partir de un cierto evento inicial el cual puede ser una fecha calendario diferente para cada unidad de estudio, y se observan durante el tiempo futuro hasta que todas fallan. En otras palabras, la cohorte del grupo, que es un grupo cerrado, se estudia hasta que se extingue ya que a ninguna de sus unidades se le permite dejar el estudio sin haber fracasado. El tiempo exacto en que los fracasos de las unidades ocurren, es decir, el tiempo exacto de decremento[2], se registra y en función de la ocurrencia aleatoria de tales fracasos se construye la distribución empírica de supervivencia, que constituye un estimador de la función de supervivencia.

En el estudio con datos completos la variable aleatoria de interes es el tiempo de supervivencia t a partir del evento inicial, por ello la edad cronológica de cada unidad observada no se considera, y la función de supervivencia que se estima es $S(t)$. A continuación se muestra un ejemplo de la estimación de la función de supervivencia a partir de datos completos.

Supóngase que se observa una cohorte de n unidades de estudio cuyos fracasos ocurren a tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ respectivamente, (nótese que la observación de las unidades de estudio termina cuando todas las unidades han fracasado), y se desea estimar la distribución de supervivencia aplicable a dichas unidades. Una aproximación de la función de supervivencia puede ser la proporción observada de la supervivencia de las unidades a cada punto del tiempo t (Distribución Empírica de Supervivencia), es decir, la estimación de $S(t)$ estaría dada por el número de supervivientes a un punto específico del tiempo t entre el número total de unidades de la cohorte de estudio.

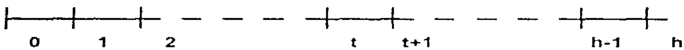
[2] En el contexto de la ciencia actuarial, el fracaso o terminación de un status dado es llamado decremento

$$S^*(t) = \frac{N_t}{n} \qquad (2.1)$$

donde N_t representa la variable aleatoria del número de supervivientes al tiempo t.

Adicionalmente, si se considera a las unidades que llegan con vida a un punto específico del tiempo t, uno de dos eventos ocurrirá en el tiempo futuro, la unidad continúa en el estudio o bien fracasa, por lo que N_t es una variable aleatoria binomial. En consecuencia, la proporción observada de supervivencia al tiempo t, dada por la expresión (2.1) es una proporción binomial de N_t.

Ahora bien, si la cohorte de estudio es "grande" podría resultar poco factible el procedimiento anterior, en vez de ello se puede utilizar una aproximación de agrupación de fracasos en el proceso de estimación de la función de supervivencia, iniciándose por dividir el tiempo continuo en un número indefinido de intervalos fijos de igual longitud[1], tal como se muestra en la siguiente figura



Dado que se trabaja con datos completos las n unidades de estudio se observan hasta que todas fracasan y cada uno de los n fracasos cae en uno de los h intervalos, donde h es suficientemente grande, de tal forma que la supervivencia al tiempo h es imposible.

Ahora bien, tal como se mencionó, una forma de estimar la función $S(t)$ es por medio de la proporción empírica de supervivencia observada al tiempo t dada por la expresión (2.1), por lo que es fácil comprobar que para la variable aleatoria del número de supervivientes al tiempo t, N_t, se cumple que $N_0 = n$ y $N_h = 0$. De igual forma que se ha definido esta variable aleatoria, es importante destacar que n_t representa su valor realizado en un estudio determinado.

[1] La notación y las fórmulas para los estimadores se simplifican con el uso de los intervalos de igual longitud

Por otra parte, una forma alternativa de estimar la función de supervivencia $S(t)$ es:

$$\hat{S}(t) = \hat{p}_0 \cdot \hat{p}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{p}_{t-1} \qquad (2.2)$$

donde $\hat{p}_i$ es la probabilidad de que una unidad latente al tiempo i sobreviva al tiempo $i+1$, con $0 \leq i \leq h-1$.

El valor numérico de $\hat{S}(t)$ será el mismo tanto si se utiliza la expresión (2.1), aproximación directa (no condicional), como si se emplea la fórmula (2.2) aproximación indirecta (condicional), la demostración de ésto se omite por desviarse de los objetivos de la presente tesis.

Finalmente, en estudios en los que no se restringe a un cohorte inicial o en los cuales se permite la terminación de observaciones antes de que todas las unidades fracasen, la aproximación de la función de supervivencia por medio de la expresión (2.1) no será posible. Estos casos son llamados de datos incompletos y serán objeto de estudio en las siguientes secciones de este capítulo.

2.3 DISEÑO DEL ESTUDIO CON DATOS INCOMPLETOS

Como ya se mencionó en la sección anterior, los estudios con datos completos son un caso especial de estudios que cumplen con ciertas propiedades, algunas de ellas son:

1. Todos los miembros del grupo de estudio están bajo observación al tiempo $t = 0$, aunque este tiempo puede ser para cada unidad de estudio una fecha calendario diferente.

2. Ninguno de los miembros del grupo salen de éste por cualquier otra causa diferente al evento sobre el cual se está interesado en estimar el patrón de supervivencia de dicho grupo.

3. El grupo se observa hasta que se extingue totalmente, es decir, hasta que todos los miembros dejan de pertenecer a él.

Estas propiedades de los estudios con datos completos hacen que sea difícil encontrar en la práctica estudios actuariales que presenten tales características, por lo que en forma alternativa para éstos suele aplicarse un diseño del estudio con datos incompletos.

2.3.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES

El actuario se encuentra en la práctica con muchos tipos de estimaciones que no presentan las propiedades de los datos completos, como en el seguro de vida o en los planes de pensiones. Por ejemplo, en el caso particular del seguro de vida se involucran grupos grandes de personas sanas, por lo que conservar abierto un estudio hasta que todas las personas hayan muerto no es posible; además, en este tipo de estudios no es común encontrar que las personas que integran el grupo de estudio sean observadas desde edad cero. De igual forma, en algunas situaciones los estudios actuariales pueden involucrar más de un evento aleatorio a los cuales los miembros del grupo de estudio son susceptibles, y donde la ocurrencia de tales eventos elimina a dichos miembros.

Las consideraciones precedentes, constituyen algunos elementos que permiten concluir que llevar a cabo un estudio con datos completos para la estimación de un modelo actuarial de supervivencia no resulta factible. El caso particular del modelo de rotación que se construirá en los capítulos siguientes no es la excepción, ya que por ejemplo los participantes de un plan de pensiones no sólo son susceptibles a la separación del status laboral al que pertenecen, sino que se encuentran expuestos a otros decrementos aleatorios (i.e. mortalidad e invalidez); además, no todos los miembros inician su observación en un mismo momento, pues durante el transcurso del tiempo ingresarán nuevos empleados al status laboral; finalmente, dicho grupo de estudio se considera inextinguible y sus miembros ingresan al grupo de empleados a edades mayores de cero.

Por todo lo anterior, la estimación del modelo de rotación involucrará un diseño del estudio con datos incompletos. En este tipo de estudio no se observan las unidades hasta que todas fracasan, sino que se elige un periodo de observación durante el cual los miembros del grupo se analizan. Así, al establecerse un periodo predeterminado de observación puede darse el caso de que existan unidades de estudio que aún continúen activas, (no han fracasado), a la fecha que se determinó como límite para finalizar el estudio, por consiguiente sus subsecuentes tiempos de fracaso no se conocerán y la función de supervivencia solamente se estimará a partir de los fracasos que hayan sido registrados durante dicho periodo.

Por otro lado, en los estudios con datos incompletos el término de la observación no necesariamente esta determinado por la fecha que fue señalada para finalizar el estudio, en realidad puede controlarse de diversas formas, sin embargo, los esquemas que comúnmente se llevan a la práctica son:[4]

1. La observación se finaliza en un punto del tiempo previamente determinado, por lo que los datos resultantes son llamados datos truncados.

2. La observación termina cuando un número predeterminado de fracasos ha ocurrido. En este caso los datos son llamados datos censurados.

Es importante reconocer que en el primer caso los numeros de muertes son las variables aleatorias, mientras que en el segundo esquema el tiempo de terminación del estudio es la variable aleatoria. Además, en ambos casos los tiempos individuales en que cada fracaso ocurre son variables aleatorias.

Por otra parte, en ocasiones se distingue entre la terminacion planeada o no planeada de la observación de un individuo. En la terminación planeada, el tiempo esperado de salida se conoce anticipadamente para cada individuo, sin embargo, si la observación no se continúa durante el periodo predeterminado, porque la persona sale del grupo y ya no participa en él, por razones diferentes a la terminación del estudio, se dice que la persona se "pierde" - su terminación no ha sido planeada -.

---

[4] Elandt Johnson, *op. cit.*, p. 150

Finalmente, debe citarse que para el modelo de rotación que se estimará se ha elegido utilizar un diseño del estudio con datos truncados, es decir, la estimación del modelo se llevará a cabo a partir de la experiencia de rotación del grupo de estudio que se obtenga durante un periodo de observación previamente determinado. Es importante hacer notar que se hará referencia a todos los decrementos aleatorios diferentes de la rotación como "salidas" del estudio. Así, la "salida" será un evento aleatorio en el mismo sentido que la rotación lo es, por lo que el modelo se desarrollará en un ambiente de doble decremento, ya que tanto la rotación como la salida serán causas por las cuales un individuo puede abandonar el grupo de estudio (o status laboral) al que pertenece.

2.3.2. DEFINICIÓN DE LAS EDADES DE INICIO Y TERMINO DE LA OBSERVACIÓN

En el caso particular de un estudio con datos truncados, al fijar una fecha en la cual terminará el periodo de observación, se establece también una edad máxima a la cual un miembro en particular del grupo de estudio cesará su observación. Así, se dice que cada miembro del grupo tiene una edad de terminación fija y además si permanece en el grupo a esa edad, el evento de "terminación" es un evento cierto de ocurrir.

En el modelo de rotación que se estimará en capítulos posteriores al *i-ésimo* miembro del grupo le corresponderá el par ordenado de edades (y_i, z_i), donde y_i representa la edad al inicio de la observación y z_i la edad fija al cerrar la observación, por lo que necesariamente $y_i < z_i$.

Ahora bien, si el fracaso o la salida de alguno de los miembros del grupo ocurre mientras éste se encuentra dentro del periodo de observación, esto es, antes de z_i, entonces se dice que la observación finaliza antes de la edad fija de terminación. Además, en ningún caso la observación podrá continuar más allá de la edad fija de terminación.

La información básica que se requerirá de cada miembro del grupo para poder obtener el par ordenado (y_i, z_i) será:

i) Fechas del periodo de observación
ii) Fecha de entrada al grupo bajo observación
iii) Fecha de nacimiento
iv) Fecha de rotación o salida, donde sea aplicable

2.3.3 INTERVALOS DE ESTIMACIÓN

Una vez introducidos los conceptos generales para la estimación de un modelo actuarial de supervivencia a partir de datos incompletos, tanto en la presente sección como en el capítulo posterior se sentarán las bases que conduzcan a estimar la función de supervivencia $S(x)$.

Dado que

$$S(x) = p_0 \cdot p_1 \cdot \ \dots \ \cdot p_{x-1} \tag{2.3}$$

entonces un estimador directo de $S(x)$ será

$$\hat{S}(x) = \hat{p}_0 \cdot \hat{p}_1 \cdot \ \dots \ \cdot \hat{p}_{x-1} \tag{2.4}$$

así, se buscará estimar primero p_x, para poder estimar $S(x)$. Aunque con frecuencia se encontrará más conveniente estimar q_x, en vez de p_x, de las observaciones obtenidas, la estimación de p_x se obtendrá como

$$\hat{p}_x = 1 - \hat{q}_x \tag{2.5}$$

Ahora bien, una vez elegido el periodo de observación éste puede dividirse en intervalos de edades enteras y si se conoce la contribución, si es que hay alguna, que cada miembro del grupo de estudio hace a cada intervalo $(x, x+1]$ entonces puede estimarse la probabilidad de que un individuo que se encuentra latente en el grupo bajo estudio a edad x fracase en el transcurso del siguiente año, q_x; es decir, a partir de la experiencia de supervivencia -permanencia en el grupo de estudio en el caso de rotación- que cada miembro del grupo aporta al intervalo de estimación $(x, x+1]$, se construye la probabilidad q_x.

Resulta conveniente aclarar que la notación del intervalo de estimación $(x, x+1]$ se usa para indicar que el fracaso a edad $x+1$ se asigna a este intervalo, mientras que los fracasos a edad x pertenecen al intervalo anterior $(x-1, x]$. Esta asignación es algo arbitraria, ya que la alternativa $[x, x+1)$ se utiliza con mayor frecuencia, pero se ha preferido utilizar $(x, x+1]$ debido a que la existencia en el grupo a edad x se asume en el concepto de q_x como "la probabilidad de fracasar dentro de un año para una persona que está en el grupo a edad x". Así, no es posible fracasar exactamente a edad x en este intervalo.

Para determinar la experiencia de supervivencia de cada uno de los miembros del grupo, se necesita observar cómo se relaciona el par ordenado (y_i, z_i), para la *i-ésima* persona, con el intervalo $(x, x+1]$:

1. Primero nótese que si $z_i \leq x$, entonces la *i-ésima* persona no contribuirá al intervalo $(x, x+1]$, ya que la persona abandonó el estudio sin que haya movimiento dentro del intervalo de estimación.

2. Si $y_i \geq x+1$, entonces la *i-ésima* persona nuevamente no hace ninguna contribución a $(x, x+1]$.

3. Si $y_i \leq x$ y $z_i \geq x+1$, entonces la i-ésima persona se registra para estar bajo observación en el intervalo entero $(x, x+1]$.

4. Finalmente, también es posible que $x < y_i < x+1$, o que $x < z_i < x+1$, o ambos.

Desatendiendo los casos donde $z_i \leq x$ o $y_i \geq x+1$, ya que no hay contribución alguna, se puede decir que la *i-ésima* persona entra al intervalo $(x, x+1]$ a edad $x+m_i$ y que su edad programada de término de la observación, independientemente de la causa, se da a edad $x+n_i$. Entonces, para el *i-ésimo* miembro del grupo se generará el nuevo par ordenado $(x+m_i, x+n_i)$, donde $x+m_i$ representa la edad de entrada registrada para la estimación en $(x, x+1]$ y $x+n_i$ la edad de abandono registrada en la estimación en el mismo intervalo.

Así, la experiencia de supervivencia que cada miembro del grupo aportará al intervalo de estimación $(x, x+1]$, se obtendrá de alguno de los siguientes cuatro casos:

1. Si $y_i \le x$, entonces la *i-ésima* persona entra a $(x, x+1]$ exactamente a edad x, así que $m_i = 0$.

2. Si $x < y_i < x+1$, entonces la entrada a $(x, x+1]$ es a edad $x+m_i$, con $0 < m_i < 1$.

3. Si $z_i \ge x+1$, entonces para la *i-ésima* persona se registra su abandono de $(x, x+1]$ exactamente a edad $x+1$, así que $n_i = 1$.

4. Si $x < z_i < x+1$, entonces el registro de abandono de $(x, x+1]$ es a edad $x+n_i$ con $o < n_i < 1$.

Nótese, sobre todo, que $0 \le m_i < 1$ y $0 < n_i \le 1$, esto es, m_i puede ser cero pero no uno, mientras que n_i puede ser uno pero no cero.

2.3.4 DECREMENTO ÚNICO Y DOBLE DECREMENTO

En la sección anterior se estableció que, en un estudio con datos truncados, la *i-ésima* persona ingresa al intervalo de estudio $(x, x+1]$ a edad $x+m_i$, con $0 \le m_i < 1$, y está programada para abandonar el intervalo a edad $x+n_i$, con $0 < n_i \le 1$.

Entonces, la probabilidad condicional de supervivencia a edad $x+n$, para una persona del grupo que se encuentra latente a edad $x+m$, es ${}_{n-m}p_{x+m}$; y la probabilidad condicional de fracaso de un individuo bajo observación en el intervalo $(x, x+1]$, dada la supervivencia a edad $x+m$, es[5]:

$$ {}_{n-m}q_{x+m} = 1 - {}_{n-m}p_{x+m} \tag{2.6}$$

Esta notación resulta adecuada si se trabaja en un ambiente de decremento único, es decir, aquel ambiente en el cual los miembros del grupo de estudio están sujetos a un sólo evento aleatorio; en otras palabras, la notación es adecuada si el estudio contempla exclusivamente una causa por la cual un individuo puede abandonar el grupo al que pertenece. No obstante, si el estudio involucra más de un evento aleatorio es necesario modificar la notación utilizada con el objeto de especificar la probabilidad correspondiente a cada causa por la cual los miembros del grupo pueden dejar de pertenecer a éste.

Así pues, si los miembros del grupo de un estudio en particular están sujetos a dos eventos aleatorios, se dice que el estudio se desarrolla en un ambiente de doble decremento,[6] y por lo tanto es necesario especificar el evento aleatorio para el cual ${}_tp_x$ representa la no ocurrencia de alguno de los dos eventos antes de edad $x+t$. Tal es el caso del presente trabajo, en el cual se consideran dos causas plausibles por las que un individuo puede abandonar su status laboral, i.e., la rotación y la salida respectivamente (Sección 2.3.1). Por tal motivo, se agregarán a la notación los símbolos (r) y (s) para especificar a que decremento, (rotación o salida), se hace referencia; por lo que la notación será ${}_tp_x^{\prime(r)}$ y ${}_tp_x^{\prime(s)}$, donde

${}_tp_x^{\prime(r)}$ denota la probabilidad de que los miembros del grupo no roten antes de edad $x+t$, en un modelo de decremento único que depende exclusivamente de la causa particular de dicho decremento; y

---

[5] Nótese que se ha omitido el subíndice t, y se omitirá de aquí en adelante, por resultar la notación más práctica al eliminarlo.

[6] Cuando existen más de dos eventos aleatorios a los que están sujetos los miembros del estudio se dice que se trabaja en un ambiente de decrementos múltiples.

${}_tp_x^{\prime(s)}$ denota la probabilidad de que los miembros del grupo no salgan antes de edad $x+t$, en un modelo de decremento único que depende exclusivamente de la salida. Debe recordarse que para efectos propios, la salida debe ser entendida como la muerte o la invalidez de los miembros del grupo; ya que son las dos únicas causas diferentes de la rotación, por las cuales un individuo deja de pertenecer a su status laboral.

Es importante hacer notar que cada una de estas probabilidades tiene su propio significado en su respectivo ambiente de decremento único, ya que ${}_tp_x^{\prime(r)}$ representa exactamente el mismo concepto que ${}_tp_x$, sólo que se agrega a la notación el símbolo (r) para indicar que se está tratando con más de un decremento. De igual forma ${}_tq_x^{\prime(r)}$ se usa para representar el mismo concepto que ${}_tq_x$, y suele llamársele *"probabilidad neta de decremento o tasa independiente de decremento"*[7].

Por otra parte, si tanto la rotación como la salida son eventos aleatorios, entonces también existe la probabilidad de que un individuo no rote ni tampoco salga del grupo de estudio antes de edad $x+t$, dado que a edad x se encuentra en el grupo de estudio; tal probabilidad se denota por ${}_tp_x^{(\tau)}$.

Además, si las probabilidades de rotación y de salida son *estocásticamente independientes*, entonces debe cumplirse

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{\prime(r)} \cdot {}_tp_x^{\prime(s)}. \tag{2.7}$$

Similar a lo que ocurre en la teoría de decremento único, para dos decrementos se cumple que

$$ {}_{n-m}q_{x+m}^{\prime(r)} = 1 - {}_{n-m}p_{x+m}^{\prime(r)} \tag{2.8}$$

$$ {}_{n-m}q_{x+m}^{\prime(s)} = 1 - {}_{n-m}p_{x+m}^{\prime(s)} \tag{2.9}$$

[7] Bowers, Newton L. et al, *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Itasca Illinois, 1a. edición 1986, p. 271.

Así también en la estimación se cumple la relación

$$ {}_{t-m}p_{x+m}^{(\tau)} = {}_{t-m}p_{x+m}^{\prime(r)} \cdot {}_{t-m}p_{x+m}^{\prime(s)} \tag{2.10} $$

Por otra parte, sean $q_x^{(r)}$ y $q_x^{(s)}$ las probabilidades de rotación y salida, respectivamente, antes de la edad $x+1$ para un miembro de edad x, en presencia de otros decrementos. Los valores de estas probabilidades para ambas causas (rotación y salida) dependen el uno del otro, por lo que se consideran probabilidades de decremento dependientes, pues ambas causas se combinan en un mismo ambiente de decremento. Es importante destacar que estas probabilidades difieren en concepto de $q_x^{\prime(r)}$ y $q_x^{\prime(s)}$.

La probabilidad de sobrevivir (permanecer en el grupo) de edad x a edad $x+1$ es

$$ p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(r)} - q_x^{(s)} \tag{2.11} $$

De forma general, ${}_{n-m}q_{x+m}^{(r)}$ y ${}_{n-m}q_{x+m}^{(s)}$ representan las probabilidades de rotación y salida, respectivamente, antes de edad $x+n$ para una persona que se encuentra en el grupo de estudio a edad $x+m$, en presencia del otro decremento. Así, se tiene

$$ {}_{n-m}p_{x+m}^{(\tau)} = 1 - {}_{n-m}q_{x+m}^{(\tau)} = 1 - {}_{n-m}q_{x+m}^{(r)} - {}_{n-m}q_{x+m}^{(s)}. \tag{2.12} $$

Hasta este momento se ha analizado la teoría básica de la estimación de q_x en un ambiente de decremento único y doble decremento, corresponde ahora el estudio de la metodología del modelo de supervivencia tabular de rotación.

CAPITULO III

METODOLOGÍA PARA LA ESTIMACIÓN DEL MODELO DE SUPERVIVENCIA TABULAR

3.1 INTRODUCCIÓN

En el contexto actuarial hay diversos métodos que suelen emplearse en la estimación de un modelo de supervivencia, tales como el Método de Momentos, el Método de Máxima Verosimilitud y el Método del Producto Límite. Sin embargo, cabe advertir que no es objeto de estudio del presente trabajo profundizar en el análisis de dichos métodos. En realidad, la mayor parte del material de este capítulo está enfocado al estudio de la metodología correspondiente a la estimación de un modelo de supervivencia en forma tabular a partir de datos incompletos, por medio del Método de Momentos, mismo que pretende ilustrarse.

No obstante, en la sección final de este capitulo se citarán algunas consideraciones referentes a la estimación de un modelo de supervivencia a través de los otros dos métodos mencionados.

3.2 ESTIMACIÓN DE UN MODELO DE SUPERVIVENCIA A TRAVÉS DEL MÉTODO DE MOMENTOS

La base que sustenta la estimación de un modelo de supervivencia a través del Método de Momentos, es el principio estadístico de que el número esperado de fracasos que se observan en un determinado grupo de estudio, en el intervalo $(x, x+1]$, debe ser igual al número real ocurrido de fracasos.

Así pues, para estimar un modelo de supervivencia tabular a través del este método, es necesario encontrar una expresión que represente el número esperado de fracasos en el intervalo $(x, x+1]$, igualarla con el número real de fracasos y, finalmente, resolver dicha ecuación para la estimación deseada. En el caso particular de este trabajo, se desea estimar la probabilidad de que un individuo que pertenece a un status laboral se separe (voluntaria o involuntariamente) de dicho status, esto es, que "rote".

3.2.1 ESTIMACIÓN EN UN AMBIENTE DE DECREMENTO ÚNICO

Una vez obtenida la información necesaria para cada individuo, (sección 2.3.2), durante el periodo de observación: fecha de nacimiento, fecha en que inició su observación y fecha de rotación o salida, se procederá a analizar los datos para producir el par ordenado $(x+m_i, x+n_i)$ para la *i-ésima* persona que contribuye con su experiencia de supervivencia al intervalo $(x, x+1]$. Así, a partir de dicho par ordenado podrá estimarse la probabilidad condicional de rotación para la *i-ésima* persona, mientras ésta se encuentra bajo observación en un ambiente de decremento único, antes de edad $x+n_i$, dada la supervivencia a edad $x+m_i$. Esta probabilidad condicional se denota por ${}_{n-m}q_{x+m}$ y es igual al número esperado de individuos que rotan, en el caso de que el grupo bajo observación sea de tamaño uno; pues la persona puede rotar en el intervalo $(x, x+1]$ con probabilidad ${}_{n-m}q_{x+m}$, o bien, permanecer en el grupo con probabilidad ${}_{n-m}p_{x+m}$.

Formalmente, por la definición de esperanza matemática de una variable aleatoria se tiene que el número esperado de individuos que rotan para un grupo de estudio de tamaño uno es,

$$\begin{aligned} E(R_x) &= \sum_{R_x=0}^{1} R_x \cdot P(R_x) = 0 \cdot P(R_x=0) + 1 \cdot P(R_x=1) \\ &= 0 \cdot {}_{n-m}p_{x+m} + 1 \cdot {}_{n-m}q_{x+m} = {}_{n-m}q_{x+m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde R_x es la variable aleatoria del número de personas que rotan en $(x, x+1]$ y $P(R_x)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria tome los valores de cero o uno.

Por otra parte, si se considera que el número total de personas que contribuyen con su experiencia de supervivencia al intervalo $(x, x+1]$ es n_x y que los fracasos (rotación) de los individuos son estocásticamente independientes, entonces el número esperado de individuos que rotan estará dado por la suma de las probabilidades de cada individuo que pertenece al grupo, esto es,

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{n_i - m_i}q_{x+m_i} \qquad (3.2)$$

Así, si igualamos la expresión (3.2) con el número real observado de rotaciones, r_x, se tiene la ecuación básica de momentos en un ambiente de decremento único,

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{n_i - m_i}q_{x+m_i} = r_x \qquad (3.3)$$

Finalmente, para estimar q_x se resuelve la ecuación (3.3), para lo cual podría utilizarse una hipótesis de Distribución Uniforme de Fracasos o bien, la hipótesis de Balducci para edades fraccionadas[1]; no obstante, por conveniencia algebraica se empleará la aproximación que utiliza *Dick London* en su obra *Modelos de Supervivencia*[2], para encontrar la expresión general del estimador de momentos, esto es, a través de la aproximación

$${}_{n_i - m_i}q_{x+m_i} \cong (n_i - m_i) \cdot q_x \qquad (3.4)$$

se tiene que,

$$E(R_x) = q_x \sum_{i=1}^{n_x} (n_i - m_i) = r_x \qquad (3.5)$$

y resolviendo la ecuación para la estimación deseada se obtiene,

---

[1] Jordan, W., op. cit. pp. 19-20.
[2] *op. cit.*, p. 108.

$$\hat{q}_x = \frac{r_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(n_i - m_i)} \tag{3.6}$$

que representa la forma general del estimador de momentos en un ambiente de decremento único.

3.2.1.1 CASOS ESPECIALES

Algunos casos especiales que se desprenden de la ecuación básica de momentos son:

1. Si $m_i = 0$ y $n_i = 1$ para todas las n_x personas que contribuyen al intervalo $(x, x+1]$, entonces se tiene que ${}_{n_i - m_i}q_{x+m_i} = q_x$, y la expresión (3.3) se convierte en

$$E[R_x] = q_x \cdot n_x = r_x \tag{3.7}$$

por lo tanto,

$$\hat{q}_x = \frac{r_x}{n_x}. \tag{3.8}$$

Esta expresión es un estimador de proporción binomial, dado que la variable aleatoria R_x es binomial, por lo que el número de personas en el grupo de estudio, n_x , puede estimarse como un número de ensayos bernoulli, donde cada ensayo se considera independiente, y la probabilidad de rotación sobre un solo ensayo (q_x) se asume igual para todos los ensayos.

2. Si $n_i = 1$ para todas las personas que contribuyen a $(x, x+1]$, pero $m_i > 0$ para algunas de las n_x personas, entonces se tiene que ${}_{n_i - m_i}q_{x+m_i} = {}_{1-m_i}q_{x+m_i}$ y (3.3) se convierte en

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{1-m_i}q_{x+m_i} = r_x \tag{3.9}$$

De manera análoga, la expresión (3.4) puede expresarse como[3]

$${}_{1-m_i}q_{x+m_i} \cong (1-m_i)\cdot q_x \tag{3.10}$$

Finalmente, sustituyendo (3.10) en (3.9) se obtiene

$$\hat{q}_x = \frac{r_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(1-m_i)} \tag{3.11}$$

3. Si $m_i = 0$ para todas las personas que contribuyen a $(x, x+1]$, pero $n_i < 1$ para algunas de las n_x personas , entonces se tiene que ${}_{n_i-m_i}q_{x+m_i} = {}_{n_i}q_x$ y (3.3) se convierte en

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n_x} {}_{n_i}q_x = r_x \tag{3.12}$$

En forma similar la expresión (3.4) se transforma en[4]

$${}_{n_i}q_x \cong n_i \cdot q_x \tag{3.13}$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (3.13) en (3.12) se obtiene el estimador de momentos

$$\hat{q}_x = \frac{r_x}{\sum_{i=1}^{n_x} n_i} \tag{3.14}$$

[3] Nótese que en este caso particular, la aproximación propuesta por Dick London equivale a la hipótesis de Balducci para edades fraccionadas

[4] Nótese que, al igual que en el caso particular 2, la aproximación (3.13) se convierte en la hipótesis de distribución uniforme de fracasos.

3.2.1.2 TIEMPO DE EXPOSICIÓN AL RIESGO

Se denomina tiempo exacto de exposición al riesgo al periodo de tiempo (en años), dentro del intervalo $(x, x+1]$, sobre el cual el *i-ésimo* miembro del grupo de estudio está potencialmente bajo observación; en otras palabras, se dice que la *i-ésima* persona está expuesta a fracasar (rotar) de la edad $x + m_i$ a la edad $x + n_i$. Numéricamente, $n_i - m_i$ representa el monto de exposición programada, medido en unidades años, contribuido por la *i-ésima* persona. Así, el tiempo total de exposición de los miembros del grupo es

$$\sum_{i=1}^{n_x} (n_i - m_i), \tag{3.15}$$

es decir, el denominador del estimador de momentos (expresión 3.6) representa el tiempo programado de exposición total del grupo.

Ahora bien, si un miembro del grupo de estudio rota mientras se encuentra bajo observación, la exposición programada no se realiza en su totalidad; por lo que al tiempo que transcurre desde el inicio de la observación hasta que el fracaso ocurre se le denomina **tiempo exacto de exposición**.

3.2.2 ESTIMACIÓN EN UN AMBIENTE DE DOBLE DECREMENTO

Al igual que en la sección anterior, en donde se trataba el caso de la estimación en un ambiente de decremento único, se asumirá que la información que proporciona el *i-ésimo* individuo del grupo de estudio que contribuye a $(x, x+1]$ se ha analizado para producir el par ordenado $(x + m_i, x + n_i)$.

La probabilidad de rotación para la *i-ésima* persona, en un ambiente de doble decremento es

$$_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(r)} \tag{3.16}$$

y representa también el número esperado de personas que rotan en un grupo de estudio de tamaño uno, análogo a lo que se analizó en el caso de un ambiente de decremento único.

3.2.2.1 RELACIONES ENTRE LOS MOMENTOS BÁSICOS

Tal como se comentó en la sección 2.3.4, se considerarán dos eventos aleatorios como las causas de decremento a las que estará expuesto cada miembro del grupo de estudio, a saber: la rotación y la salida. Así, análogo a la ecuación de momentos (3.3) en el caso de decremento único, ahora se tendrá el par de ecuaciones de momentos

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n} {}_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(r)} = r_x \tag{3.17}$$

y

$$E[S_x] = \sum_{i=1}^{n} {}_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(s)} = s_x \tag{3.18}$$

donde S_x[5] es la variable aleatoria del número de salidas en $(x, x+1]$ por cualquier causa diferente de la rotación, y s_x denota el número real observado de salidas que sufrió el grupo de estudio en tal intervalo.

Una forma sencilla de resolver (3.17) y (3.18) para la estimación de las probabilidades dependientes de decremento $q_x^{(r)}$ y $q_x^{(s)}$ sería usar aproximaciones análogas a (3.4), a saber

$${}_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(r)} \cong (n_i - m_i) \cdot q_x^{(r)} \tag{3.19}$$

$${}_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(s)} \cong (n_i - m_i) \cdot q_x^{(s)} \tag{3.20}$$

[5] No confundir esta variable aleatoria con la función de supervivencia S(x).

lo que produce

$$\hat{q}_x^{(r)} = \frac{r_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(n_i - m_i)} \tag{3.21}$$

$$\hat{q}_x^{(s)} = \frac{s_x}{\sum_{i=1}^{n_x}(n_i - m_i)} \tag{3.22}$$

Sin embargo, el objetivo es estimar las probabilidades independientes de decremento $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$, en este caso, de los datos que se obtuvieron en un ambiente de doble decremento. Para llevar a cabo esto, podrían calcularse las estimaciones de $q_x^{(r)}$ y $q_x^{(s)}$ producidas por (3.21) y (3.22) y a partir de éstas, estimar $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$ usando una de las aproximaciones que, a partir de las relaciones entre las probabilidades dependientes e independientes, se presentan en el capítulo 14 del libro de Jordan *"Life Contingencies"* o en el capítulo 9 del libro de Bowers *"Actuarial Mathematics"*. Este proceso se ilustran en la sección 4.4.2.

Alternativamente, podrían calcularse las estimaciones de $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$ directamente de los datos muestrales, expresando directamente

$$_{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(r)} \qquad \text{y} \qquad _{n_i - m_i}q_{x+m_i}^{(s)} \tag{3.23}$$

en términos de aquéllas, bajo una hipótesis elegida que vendría a sustituir las aproximaciones preliminares (3.19) y (3.20). Estas aproximaciones normalmente resultan en ecuaciones que deben resolverse numéricamente para $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$ tal como se desarrollará en la siguiente sección.

3.2.2.2 HIPÓTESIS DE DISTRIBUCIÓN

A continuación se citarán dos hipótesis que pueden utilizarse para obtener la estimación de las probabilidades independientes de decremento ($q_x^{(r)}$ y $q_x^{(s)}$) a partir de las probabilidades dependientes de decremento (${}_{n_i-m_i}q_{x+m_i}^{(r)}$ y ${}_{n_i-m_i}q_{x+m_i}^{(s)}$) en un ambiente de doble decremento. Cabe mencionar que el desarrollo matemático que conduce a la obtención de las ecuaciones de momentos se omite por desviarse de los objetivos de la presente tesis.

a) Distribución Uniforme

Si para cada uno de los eventos aleatorios, rotación y salida, se asume que tienen una distribución uniforme[6] sobre $(x, x+1]$ en su propio ambiente de decremento único; puede demostrarse que

$$ {}_{u-m}q_{x+m}^{\prime(r)} = \frac{(u-m)\cdot q_x^{\prime(r)}}{1-m\cdot q_x^{\prime(r)}} \quad , \qquad 0 \le m < u \le 1 \tag{3.24} $$

y también que

$$ \mu_{x+u}^{(r)} = \frac{q_x^{\prime(r)}}{1-u\cdot q_x^{\prime(r)}} \tag{3.25} $$

Entonces, a partir de estas dos relaciones, pueden obtenerse matemáticamente el par de ecuaciones básicas de momentos

$$ E[R_x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_x^{\prime(r)}\left[(n_i-m_i)-(1/2)(n_i^2-m_i^2)\cdot q_x^{\prime(s)}\right]}{\left[1-m_i\cdot q_x^{\prime(r)}\right]\left[1-m_i\cdot q_x^{\prime(s)}\right]} = r_x \tag{3.26} $$

y

$$ E[S_x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_x^{\prime(s)}\left[(n_i-m_i)-(1/2)(n_i^2-m_i^2)\cdot q_x^{\prime(r)}\right]}{\left[1-m_i\cdot q_x^{\prime(r)}\right]\left[1-m_i\cdot q_x^{\prime(s)}\right]} = s_x \tag{3.27} $$

---

[6] El asumir como hipótesis la distribución uniforme de fracasos, es asumir que

$$ l_{x+t} = (1-t)\cdot l_x + t\cdot l_{x+1} \ , \qquad 0 \le t \le 1 $$

cuya complejidad exige su solución numérica para estimar las probabilidades independientes de decremento $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$.

b) Distribución Exponencial

Al igual que en el caso anterior, si asumimos que los dos eventos aleatorios a los que están expuestos todos los miembros del grupo de estudio (la rotación y la salida), tienen una distribución exponencial, i.e. fuerzas constantes, sobre $(x, x+1]$; entonces, puede demostrarse que

$$\mu_{x+u}^{(r)} = \mu^{(r)} \tag{3.28}$$

$$1 - {}_{u-m}q_{x+m}'^{(r)} = \exp\{-(u-m)\mu^{(r)}\} \tag{3.29}$$

y

$$1 - {}_{u-m}q_{x+m}'^{(s)} = \exp\{-(u-m)\mu^{(s)}\} \tag{3.30}$$

lo que conduciría a las ecuaciones de momentos

$$E[R_x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^{(r)}}{\mu^{(r)} + \mu^{(s)}}\left[1 - \exp\{-(n_i - m_i)(\mu^{(r)} + \mu^{(s)})\}\right] = r_x \tag{3.31}$$

$$E[S_x] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^{(s)}}{\mu^{(s)} + \mu^{(r)}}\left[1 - \exp\{-(n_i - m_i)(\mu^{(s)} + \mu^{(r)})\}\right] = s_x \tag{3.32}$$

Nuevamente es necesario resolver numéricamente estas ecuaciones para $\mu^{(r)}$ y $\mu^{(s)}$, en terminos de las cuales podrán finalmente estimarse $q_x'^{(r)}$ y $q_x'^{(s)}$.

3.2.2.3 APROXIMACIONES AL ESTIMADOR DE MOMENTOS

En ocasiones ante la dificultad matemática propia de las ecuaciones (3.26 y 3.27) o (3.31 y 3.32) se pueden utilizar aproximaciones específicas para el estimador de momentos; algunas de éstas son la aproximación de Hoem y la aproximación Actuarial.

Estas aproximaciones se estudian a continuación asumiendo un ambiente de doble decremento, ya que el análisis que resulta si se trabaja en un ambiente de decremento único puede desarrollarse con facilidad en forma análoga a la teoría expuesta para doble decremento.

a) Aproximación de Hoem

Esta aproximación contempla una edad teórica programada de salida, (decremento en adición al fracaso), $x + w_i$ en $(x, x+1]$ para la *i-ésima* persona del grupo de estudio que entró a tal intervalo a edad $x + m_i$; similar a suponer una edad programada del término de la observación, a saber $z_i = x + n_i$.

No obstante, la edad teórica $x + w_i$ no se conoce sino hasta el momento en que la salida se realiza (se observa), contrario al conocimiento *a priori* de $x + n_i$ en la estimación por el método de momentos. En otras palabras, para aquellas personas para las cuales $w_i < n_i$ siempre que w_i este definida, los valores de w_i se conocen *a posteriori*.

En virtud de lo anterior es fácil reconocer dos distintos tiempos de exposición:

$(n_i - m_i)$	si el *i-ésimo* miembro del grupo sobrevive a la edad programada de terminación (permanece sin rotar y sin salir)
$(w_i - m_i)$	si el *i-ésimo* miembro del grupo sale del estudio a edad $x + w_i < x + n_i$

Dado que la edad $x + w_i$ sólo se conocerá si la persona i sale, entonces si i rota antes de la edad teórica $x + w_i$, ésta no se conocerá nunca. Por ello, la aproximación de Hoem asume que para aquellos miembros que roten en $(x, x+1]$ no se define el valor de w_i. En otras palabras, todos las rotaciones contribuyen con exposición $n_i - m_i$, por lo que la estimación de $q_x^{(r)}$ corresponde a la proporción del número de rotaciones con respecto a la exposición total del grupo

$$q_x^{(r)} = \frac{r_x}{\sum_{rotan} (n_i - m_i) + \sum_{salen} (w_i - m_i) + \sum_{enders} (n_i - m_i)} \qquad (3.33)$$

En resumen, todos los miembros del grupo de estudio tienen una edad programada de terminación $x + n_i$ al entrar al intervalo $(x, x+1]$ independientemente de que la persona sobreviva, rote o salga. Por el contrario, la edad $x + w_i$ sólo se conocerá si se llega a realizar su salida del grupo de estudio, por lo que su contribución a la exposición será $w_i - m_i$. Entonces, para todos los que roten o permanezcan en el grupo hasta el término de las observaciones se usan los valores de n_i, esto es, quien rote o sea un *ender*[7] contribuye con exposición $n_i - m_i$.

b) Aproximación Actuarial

De las distintas aproximaciones para estimar q_x sobre $(x, x+1]$, la aproximación actuarial fue la primera en ser desarrollada, a mediados del siglo XIX. Inicialmente el método se planteó de una manera intuitiva, en ausencia tanto del desarrollo científico de la teoría de la estimación estadística como de cualquier tipo de equipo de cálculo mecánico o electrónico, con el único interés de recabar los datos y calcular la estimación deseada.

La aproximación actuarial no utiliza el concepto de exposición programada (Sección 3.2.1.2), en vez de ello involucra un tipo de exposición observada llamada exposición actuarial, para distinguirla de la exposición programada y de la exposición exacta.

[7] Se emplea este anglicismo por pragmatismo

Bajo el supuesto de que la *i-ésima* persona entra a $(x, x+1]$ a edad $x + m_i$, $0 \leq m_i < 1$, el método actuarial establece que si para la persona i "se observa" una edad $x + n_i$ de terminación, entonces aquélla contribuye con exposición $n_i - m_i$. En otro caso, si la persona es una salida observada a edad $x + w_i$, donde necesariamente $w_i < n_i$, contribuye con exposición $w_i - m_i$.

Por otra parte, en este método la contribución de exposición de un miembro que rota se asume como $n_i = 1$ para todas las rotaciones. Este supuesto se contempló dado que identificar la edad programada de terminación para una persona que rota antes de alcanzarla, requería de un análisis más extensivo de los datos.

El punto importante es que la aproximación actuarial tradicional para manejar los datos no identifica $x + n_i$ *a priori*, por el contrario $x + n_i$ sólo se conoce si la *i-ésima* persona es un *ender*. Tal como la edad programada de salida $x + w_i$ se conoce *a posteriori*, sólo si la persona i es una salida observada. En el caso de que i rote $x + n_i$ no llega a ser conocida, por lo que se asume que la exposición se da hasta edad $x + 1$. Análogo a la aproximación de Hoem, en la cual si la *i-ésima* persona rota antes de la edad programada de salida $x + w_i$, esta edad no se conoce y por lo tanto se asume que la exposicion se da hasta edad $x + n_i$.

En efecto, si $n_i = 1$ para el *i-ésimo* miembro del grupo entonces considerar su exposición al fracaso hasta edad $x + 1$ es correcto; sin embargo, si la rotación ocurre antes de edad $x + 1$, dicha consideración implica una "sobre-estimación" de la exposición a edad $x + 1$, en vez de únicamente a edad $x + n_i$. No obstante, tal supuesto fue admitido por conveniencia práctica al procesar los datos muestrales.

Sin embargo, esta aproximación ha sido criticada por varios autores, siendo la principal objeción el que si $z_i = x + n_i$ es la edad que la persona i alcanza cuando el periodo de observacion se cierra, entonces el acreditar la exposición hasta edad $x + 1$, cuando $n_i < 1$, significa que la *i-ésima* persona es vista como si contribuyera a la exposicion aún cuando el periodo de observación ha cerrado. En la actualidad "*con estudios a gran escala totalmente computarizados, el* *argumento para esta arcaica práctica pierde cualquier mérito que alguna vez llegó a tener*"[8].

3.3 MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA LA ESTIMACIÓN

Tal como se mencionó en la sección inicial de este capítulo, existen diferentes métodos que podrían aplicarse a la estimación de las probabilidades de rotación, alternativos al método de momentos.

La elección de cualquiera de ellos, dependerá en gran medida de la disposición de la información requerida para llevar a cabo la estimación. Así por ejemplo, el método de Máxima Verosimilitud tiene la "ventaja" de que el proceso de estimación puede llevarse a cabo incorporando o no las edades exactas de ocurrencia de los decrementos. Cuando éstas no se incorporan al estudio se dice que se trabaja con *datos parciales*; por el contrario, si estas edades se consideran, entonces la estimación se realiza con *datos no parciales*.

Aunque al contemplar en el estudio datos no parciales se pueden determinar mejores estimaciones que las que se obtengan por momentos, es importante discernir entre esta mejor estimación y la inconveniencia práctica asociada a un procedimiento más complejo y en muchas ocasiones poco factible de llevarse a cabo ante la deficiencia de la información.

Análogamente, el método del Producto Límite no necesita asumir ningún tipo de distribución para edades fraccionadas, tal como la distribución uniforme o la exponencial; pero sí requiere conocer el orden en el que ocurren las entradas, salidas y rotaciones dentro de un mismo intervalo $(x, x+1]$, por lo que aplicar este método en un estudio con muestras grandes implica el conocer la edad exacta de ocurrencia de cada uno de estos eventos para así determinar el orden en que éstos ocurrieron. Nuevamente la disposición de la información marcará la factibilidad de este procedimiento.

---

[8] Dick London, *op. cit.*, p. 127.

Finalmente es conveniente señalar que, no obstante que los principios estadísticos en los que se fundamenta cada uno de los métodos son distintos, en algunos casos particulares suelen arrojar los mismos estimadores; por ejemplo, la estimación de q_x tanto por el método de momentos como por el de máxima verosimilitud deriva en la misma ecuación siempre y cuando se trabaje en un ambiente de decremento único y se considere que todos los miembros del grupo entran al intervalo $(x, x+1]$ exactamente a edad x y su edad programada de terminación de la observación es $x+1$.

CAPITULO IV

ASPECTO PRACTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO TABULAR DE ROTACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

En capítulos anteriores se explicó la forma de obtener el par ordenado (y_i, z_i) a partir de los datos básicos descritos en la sección 2.3.2 y cómo esta información es necesaria para evaluar los estimadores deseados. Con base en ésto, el presente capítulo estará enfocado a la aplicación del método de momentos para la determinación de las probabilidades de decremento de rotación, es decir para la evaluación de los estimadores de momentos, a partir de la construcción de vectores relacionados con dicha información.

Para llevar a cabo la estimación, primero se enunciarán distintas alternativas para el uso de las edades (y_i, z_i), así como para las edades de ocurrencia de los eventos aleatorios involucrados en el estudio, las cuales serán identificadas posteriormente como θ_i y ϕ_i, y podrán ser calculadas siempre que se conozcan las fechas en las que ocurrieron dichos eventos.

Finalmente, una vez evaluados los estimadores será necesario convertir las probabilidades dependientes de decremento a tasas independientes, esto es, se obtendrán las tasas para un ambiente de decremento único, para la rotación y salida en forma individual.

4.2 ALTERNATIVAS PARA LA DETERMINACIÓN DE y_i, z_i, θ_i y ϕ_i

Las opciones para determinar las edades y_i, z_i, θ_i y ϕ_i, se explicarán en las siguientes subsecciones:

1. Edades de Aseguramiento
2. Edades Fiscales
3. Edades Reales

La elección de alguna de estas alternativas depende en gran medida del tipo de estudio que se realice, así como de la naturaleza de los datos muestrales. Su uso representará además un efecto directo en el volumen de los cálculos en el proceso de estimación de las probabilidades de decremento.

En la evaluacion de los estimadores del modelo tabular de rotación (sección 4.4) serán empleadas las edades reales de nacimiento, de ingreso al periodo de observación, así como las edades reales relacionadas con los decrementos aleatorios involucrados en el estudio, a saber, la rotación de un integrante de su status laboral y la salida de un individuo por una causa distinta a aquel evento.

Se ha preferido el uso de edades reales en el desarrollo del modelo de rotación, dado que se cuenta con la información necesaria para construir el vector de edades y_i, z_i, θ_i y ϕ_i para cada uno de los individuos en el grupo bajo observacion, a traves de las fechas exactas de nacimiento y abandono del grupo por alguno de los decrementos en estudio.

El uso de estas edades exactas permitirá conocer con certeza el intervalo de edad $(x, x+1]$ al cuál contribuye el *i-ésimo* individuo del grupo dada su rotación o salida sobre el mismo. Ademas, se llevarán a cabo programas de cómputo que harán factible el manejo del volumen de información que se generara a partir del uso de estas edades.

No obstante, se ha considerado importante describir brevemente las opciones de edades de aseguramiento y edades fiscales con el objeto de ilustrar que existen formas alternativas para el manejo de las edades involucradas en la estimación del modelo de supervivencia, y que la elección de alguna de ellas, tal como se mencionó, dependerá de la naturaleza del estudio, así como de la disponibilidad y manejo de la información requerida para la evaluación de los estimadores actuariales.

4.2.1 EDADES DE ASEGURAMIENTO

Esta alternativa de asignación de edades se usa comúnmente en las compañías aseguradoras, ya que utiliza edades enteras en vez de las edades reales a la ocurrencia del evento en estudio.

El empleo de edades de aseguramiento resulta conveniente para las aseguradoras en el cálculo de las primas de aquellos individuos que no adquieren sus pólizas a edades enteras, esto es, en una fecha distinta al día de su cumpleaños.

La institución de seguros evita el cálculo de las primas a edades fraccionadas al utilizar la edad entera hipotética a la fecha de emisión de la póliza, la cual puede estar dada de acuerdo al último cumpleaños o bien por la edad del cumpleaños más cercano. Sin embargo, en ambos casos la edad de aseguramiento implica una fecha de nacimiento hipotetica que sustituye a la real y se calcula de acuerdo a la edad hipotética de aseguramiento.

Si aunado a lo anterior se elige un periodo de observación que transcurra de aniversario a aniversario de las pólizas, el proceso de estimación de las probabilidades de decremento se simplifica considerablemente, dado que se considera una edad entera x al inicio de la observación y una edad entera $x+1$, un año más tarde, al cerrar el periodo de observación.

4.2.2 EDADES FISCALES

La mayor aplicación de las edades fiscales se encuentra en estudios que involucran a los integrantes de un seguro de grupo, o de un plan de pensiones, siempre que se involucra una fecha de aniversario.

En efecto, en el caso particular de un grupo de individuos que se encuentra cubierto por un plan de pensiones, existe una fecha de aniversario del plan que puede ser llamada fecha de *valuación* del plan de pensiones. Esta puede definirse como la *fecha fiscal* (fecha T) en la que resulta necesario calcular, entre otros valores financieros, el valor presente de los beneficios acumulados y el costo normal del plan bajo algún método de financiamiento determinado[1]; el término ha sido adoptado para indicar que la fecha T es la fecha terminal del año fiscal de la empresa que establece el esquema de pensiones.

Así, una vez introducido el concepto de fecha fiscal -fecha T- puede enunciarse que tradicionalmente suelen denominarse como edades fiscales a aquellas *edades enteras* de los miembros del grupo en dicha fecha fiscal, las cuales pueden determinarse como la edad del último cumpleaños o bien la del cumpleaños más próximo.

Una vez obtenidas las edades fiscales para el grupo de estudio, con base en la fecha T puede calcularse una fecha hipotética de nacimiento para cada persona en el plan a traves de la diferencia entre el año calendario de la fecha fiscal y la edad fiscal entera.

Bajo la condición de que el aniversario del plan es la misma fecha para todas las personas (e.g. 1o. de enero de cada año fiscal), el uso de edades fiscales presenta ventajas sobre el uso de las edades exactas en todas aquellas personas del grupo de estudio que alcanzan edades enteras a una misma fecha (aspecto práctico del uso de edades enteras). Esto, aunado a la elección natural de un periodo de observación que transcurra desde la fecha T en un cierto año a la fecha T un año después, resulta muy conveniente ya que todos los miembros del plan entran a una edad entera cuando el periodo de observación abre y, similarmente, tendrán también una edad entera programada de terminacion un año más tarde

[1] Se denomina Método de Financiamiento al sistema ordenado de asignación de costos a cada unidad de tiempo

4.2.3 EDADES REALES

En este tercer caso las fechas reales de nacimiento, de ingreso al grupo, de salida y de rotación se utilizan en el cálculo de los estimadores de las probabilidades de decremento para cada uno de los individuos involucrados.

En función a estas fechas, así como a las relativas al inicio y término del periodo de observación, se determinan las edades exactas asociadas a sus eventos, cuya aproximación puede calcularse en forma sencilla como años decimales a través del uso de una tabla de días del año. (Ver sección 4.4.1).

En función a las edades decimales se asigna un vector v_i a cada uno de los individuos bajo estudio, que se define como:

$$v_i = \left[y_i, z_i, \theta_i, \phi_i \right] \tag{4.1}$$

donde

- y_i representa la edad del individuo al inicio de la observación
- z_i es la edad programada al cerrar la observación
- θ_i es la edad a la que el empleado abandona el grupo por rotación
- ϕ_i es la edad a la que el empleado abandona el grupo por salida

De lo anterior resulta claro que si $\theta_i = 0$ entonces el individuo no rotó, y en forma análoga si $\phi_i = 0$ entonces tampoco salió por causa distinta a la rotación durante el periodo de tiempo que el grupo se encontró bajo observación.

Posteriormente, en función al vector v_i se calculan los vectores de duración, los cuales se definirán de aquí en adelante como $u_{i,x}$ y evaluarán la contribución de la *i-ésima* persona al intervalo $(x, x+1]$. En otras palabras, el vector $u_{i,x}$ contiene los valores que relacionan las edades del vector v_i con el intervalo $(x, x+1]$ de acuerdo a la duración fraccional con respecto al mismo. Este vector se define como:

$$u_{i,x} = \left[m_i, n_i, \gamma_i, \kappa_i \right] \tag{4.2}$$

donde

m_i	es la fracción del intervalo en la que el *i-ésimo* individuo entra al grupo
n_i	es la fracción a la que terminaría su observación dado que finaliza el periodo de observación
γ_i	es la fracción en la que el individuo rota
κ_i	es la fracción en la que el individuo sale

No obstante, cabe citar que a pesar de que un miembro del grupo puede estar programado para contribuir a un intervalo, bien puede no hacerlo al no rotar ni salir en ese intervalo.

Por otra parte, es importante notar que el número observado de individuos que rotan en $(x, x+1]$, estará dado por el número de vectores para los cuales $\gamma_i \neq 0$.

Una vez obtenidos los vectores v_i y $u_{i,x}$ puede procederse a evaluar los estimadores buscados.

4.2.4 TÉCNICA DE AGRUPACIONES

En ocasiones, con el objeto de simplificar el proceso de estimación de las probabilidades de decremento, puede aplicarse alguna técnica de agrupación de edades.

Esta técnica podría consistir en sustituir, para los individuos bajo estudio, sus edades exactas de ocurrencia de un evento de interés, por una misma edad promedio, lo cual facilita el uso de una edad distinta para cada uno de los individuos. En otras palabras, podría remplazarse el conjunto de edades de ingreso al periodo de observación $(x, x+1]$, y_i's, por $y_i = x + 1/2$, lo cual representa agrupar las edades de entrada al estudio por una edad no entera asociada al último cumpleaños.

Otro ejemplo de agrupaciones sería sustituir la edad real de ocurrencia del evento por la edad entèra que alcanzaría el individuo en el año calendario en el cual el evento ocurre. Esta edad es llamada edad calendario, y puede sustituir varias edades fraccionadas, por lo que se asume que los eventos ocurren en los límites de los intervalos[2] sobre los que se realizan las estimaciones, lo cual constituye una alternativa de cálculo para los vectores v_i y $u_{i,x}$ que reduce significativamente el trabajo de estimación.

4.3 EVALUACIÓN DEL MODELO DE ROTACIÓN

4.3.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ACTUARIAL DE SUPERVIVENCIA DE ROTACIÓN

De acuerdo a los elementos de la teoría de los modelos actuariales de supervivencia que han sido descritos en los capitulos anteriores, las características del modelo de rotación, objeto de estudio del presente proyecto, pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Es un modelo actuarial de supervivencia univariado, cuya variable aleatoria de interés es la edad de los individuos observados

2. El modelo constituye un esquema de tipo tabular, esto es, no definido a partir de una función parametrica relacionada con la variable aleatoria en estudio (la edad), sino definido a partir de una tabla de probabilidades puntuales de decremento de rotación asociadas en forma univoca a cada una de las edades enteras entre 15 y 60 años. Dónde, 15 es la edad mínima con que un individuo puede unirse al status laboral y 60 representa la edad máxima a la cual el empleado puede contribuir al modelo con su experiencia de rotacion, salida o permanencia en el grupo. Despues de esta edad se considera que el miembro se jubila o retira por edad avanzada, por lo que bajo esta hipótesis a edades mayores de 60 años el individuo no forma parte del status laboral activo.

[2] Notese que bajo estas condiciones el estimador de momentos se reduce a su ecuación basica, caso especial A descrito en la seccion 3.2.1.1

3. El modelo presenta un diseño del estudio de tipo transversal, dado que las unidades bajo observación serán estudiadas solamente durante un periodo de tiempo determinado, aún cuando el grupo no se haya extinguido en su totalidad, (estudio con datos incompletos).

4. El modelo contempla un grupo no cerrado, pues la existencia de nuevos entrantes al estudio durante el periodo de observación será permitida y estudiada.

4.3.2 DEFINICIÓN DEL INICIO Y TÉRMINO DEL PERIODO DE OBSERVACIÓN

Ahora bien, es necesario definir las fechas de inicio y término del periodo de observación de las unidades en estudio, estas fechas transcurren para el modelo de rotación del 1o. de enero de 1990 al 31 de diciembre de 1994.

Por lo anterior, durante dicho periodo se realizará un análisis del comportamiento de la poblacion de empleados que se encuentra en un status laboral al 1o. de enero de 1990, así como de aquellos individuos que se unieron al grupo durante el transcurso del periodo de observación.

La edad en que el *i-ésimo* individuo inicia su observación, y_i, se calculará con base en la fecha real de nacimiento, la fecha de inicio del periodo de observación y la fecha de ingreso al grupo bajo observación.

4.3.3 DETERMINACIÓN DE LOS VECTORES v_i Y $u_{i,x}$

Se cuenta con una base de datos de empleados para cada uno de los cinco años considerados dentro del periodo de observación, lo que genera un total de 243,035 observaciones. Es decir, en promedio se estudiaron 48,607 individuos durante el transcurso de cada año.

La base de datos cuenta con la información básica de cada trabajador para el cálculo del vector de edades $v_i = [x_i \ z_i, \theta_i \ \phi_i]$, en función del cual pueden construirse los vectores $u_{i,x} = [m_i, n_i, \gamma_i, \kappa_i]$ siempre que la contribución del *i-ésimo* individuo al intervalo de estimación esté definida.

Cabe hacer notar que un individuo del grupo puede contribuir a más de un intervalo de edades $(x, x+1]$, dependiendo tanto de la edad a la que inicie su observación como del número de años que comprenda el periodo de observación.

Por ejemplo, supóngase que se realiza un estudio cuyo periodo de observación corresponde del 1o. de enero de 1991 al 31 de diciembre de 1993, y se tiene que el *i-ésimo* miembro del grupo tiene al inicio de la observación edad $y_i = 35.5$ años. Esto representa que el individuo está programado para contribuir a los intervalos de edades (35,36], (36,37] y (37,38].

Posteriormente, con base en la información obtenida de los vectores v_i y $u_{i,x}$ para cada edad x de la tabla de rotación se calcula de manera independiente el número de vectores para los cuales $\gamma_i \neq 0$ y $\kappa_i \neq 0$. Obteniéndose así, el número real observado tanto de individuos que rotan en el intervalo $(x, x+1]$ como de individuos que salen en el mismo.

Finalmente, tal como se explica en la siguiente sección se cuantifica el tiempo programado de exposición para cada intervalo de edad $(x, x+1]$, en términos de la exposición que cada individuo experimentó durante el mismo.

4.3.4 CALCULO DEL TIEMPO DE EXPOSICIÓN PROGRAMADA

Tal como se estableció en el capítulo tres (sección 3.2.1.2), las fórmulas del estimador de momentos involucran el tiempo de exposición programada al riesgo.

Así, en términos de los valores de los vectores $n_{i,x}$ es fácil calcular dicho tiempo de exposición para cada una de las edades definidas en el modelo tabular.

La suma de la exposición programada para cada uno de los individuos que contribuyen al intervalo $(x, x+1]$ será la exposición total asociada a dicho intervalo, esto es, de acuerdo a la fórmula (3.15)

$$T.E.P. = \sum_{i=1}^{n_x} (n_i - m_i) \qquad (4.3)$$

dónde n_x constituye el número de individuos que contribuyen al intervalo $(x, x+1]$.

A partir de este punto, y con base en los elementos técnicos proporcionados puede procederse a evaluar los estimadores de rotación.

4.4 CASO PRACTICO

4.4.1 PROBABILIDADES DEPENDIENTES DE DECREMENTO

Para llevar a cabo la estimación de las probabilidades de rotación se realizaron programas de cómputo que se muestran al final de este estudio, a través de los cuales se evaluaron los estimadores de momentos.

No obstante, para efectos de ejemplificar de manera sencilla el conjunto de pasos a seguir en la aplicación del método de momentos, para la obtención del modelo tabular de rotación, a continuación se ilustra dicho proceso considerando la información de seis de los empleados de la base original de datos.

Supóngase que se tienen los siguientes datos para seis individuos que pertenecen a un status laboral determinado, y que el periodo de observación transcurre del 1o. de enero de 1991 al 1o. de enero de 1994

Individuo	Fecha de Nacimiento	Fecha de Ingreso	Fecha de Rotación	Fecha de Salida
1	1/05/55	1/01/87	1/10/92	-
2	3/08/55	1/01/90	-	15/09/91
3	24/12/55	1/01/89	-	-
4	30/11/55	1/01/91	16/03/93	-
5	22/06/56	1/01/91	-	14/11/90
6	17/02/56	1/01/91	25/01/92	-

En función a la siguiente tabla de días del año.

Tabla de Días del Año para Convertir a Fechas Decimales

Día	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

pueden convertirse las fechas en años decimales, por ejemplo para determinar la fecha de nacimiento decimal del individuo número uno, se tomaría que el día 1o. de mayo corresponde al día número 121 del año para un año no bisiesto como 1955, por lo que la fecha de nacimiento sería.

$$\text{Fecha Decimal de Nacimiento} = 1955 + (121/365) = 1955.3315$$

en forma análoga la fecha de rotación estaría dada por

$$\text{Fecha Decimal de Rotación} = 1992 + (274/366) = 1992.7486$$

Dado que, al iniciar el periodo de observación el individuo 1 ya pertenece al grupo de observación, estará programado que permanezca en él hasta que el periodo cierre, así una vez calculados las siguientes fechas

$$\text{Fecha Decimal de Inicio del P.O.} = 1991 + (1/365) = 1991.0027$$

$$\text{Fecha Decimal de Término del P.O.} = 1994 + (1/365) = 1994.0027$$

los valores del vector de edades $v_1 = \left[y_1, z_1, \theta_1, \phi_1\right]$ pueden determinarse.

$$\begin{aligned} y_1 &= 1991.0027 - 1955.3315 = 35.6712 \\ z_1 &= 1994.0027 - 1955.3315 = 38.6712 \\ \theta_1 &= 1992.7486 - 1955.3315 = 37.4171 \\ \phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que,

$$v_1 = [\ 35.67,\ 38.67,\ 37.41,\ 0\ ]$$

y puede deducirse que el individuo 1 estará programado para contribuir a los intervalos de edades (35,36], (36,37], (37,38] y (38,39].

La contribución al intervalo (35,36] ,en términos del vector de duración estaria definida por

m_i = 35.67 - 35 = 0.67, fracción del año en que entra al intervalo
n_i = 1 dado que está programado ha permanecer en el grupo hasta edad 38.67, se contempla que permanezca durante todo el intervalo (35,36]
γ_i = 0 pues no rota en el intervalo (35,36]
κ_i = 0 pues no sale en el intervalo (35,36]

por lo que,

$$u_{1,35} = [\ 0.67\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$$

siguiendo el mismo procedimiento pueden obtenerse

$$u_{1,36} = [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$$

$$u_{1,37} = [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0.41\ ,\ 0\ ]$$

Puesto que el individuo rota en el intervalo (37,38], ya no es necesario calcular el vector (38,39] pues no se encuentra expuesto al riesgo en tal intervalo.

De la misma manera puede calcularse la información para los demás individuos, la cual sería para los vectores $u_{i,35}$

Individuo	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	m_i	n_i	γ_i	κ_i
1	35.67	37.12	37.42	0.00	0.67	1.00	0.00	0.00
2	35.41	38.41	0.00	36.12	0.41	1.00	0.00	0.00
3	35.02	38.02	0.00	0.00	0.02	1.00	0.00	0.00
4	35.09	38.09	37.29	0.00	0.09	1.00	0.00	0.00
5	34.96	37.96	0.00	35.82	0.00	1.00	0.00	0.82
6	34.87	37.87	35.94	0.00	0.00	1.00	0.94	0.00

para los vectores $u_{i,36}$

Individuo	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	m_i	n_i	γ_i	κ_i
1	35.67	37.12	37.42	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
2	35.41	38.41	0.00	36.12	0.00	1.00	0.00	0.12
3	35.02	38.02	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
4	35.09	38.09	37.29	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
5	34.96	37.96	0.00	35.82	0.00	1.00	0.00	0.82
6	34.87	37.87	35.94	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00

para los vectores $u_{i,37}$

Individuo	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	m_i	n_i	γ_i	κ_i
1	35.67	37.12	37.42	0.00	0.00	1.00	0.42	0.00
2	35.41	38.41	0.00	36.12	0.00	1.00	0.00	0.00
3	35.02	38.02	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
4	35.09	38.09	37.29	0.00	0.00	1.00	0.29	0.00
5	34.96	37.96	0.00	35.82	0.00	0.96	0.00	0.00
6	34.87	37.87	35.94	0.00	0.00	0.87	0.00	0.00

para los vectores $u_{i,38}$

Individuo	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	m_i	n_i	γ_i	κ_i
1	35.67	37.12	37.42	0.00	0.00	0.67	0.00	0.00
2	35.41	38.41	0.00	36.12	0.00	0.41	0.00	0.00
3	35.02	38.02	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
4	35.09	38.09	37.29	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00
5	34.96	37.96	0.00	35.82	0.00	0.96	0.00	0.00
6	34.87	37.87	35.94	0.00	0.00	0.87	0.00	0.00

De los vectores anteriores pueden calcularse las tasas de decremento tanto para el evento de rotación como del de salida, así

x	r_x	s_x	T.P.E.	$q_x^{(r)}$	$q_x^{(s)}$
35	1	1	4.81	0.21	0.21
36	0	1	6.00	0.00	0.17
37	2	0	5.83	0.34	0.00
38	0	0	1.19	0.00	0.00

4.4.2 TASAS INDEPENDIENTES DE DECREMENTO

Una vez obtenidas las probabilidades dependientes de decremento para cada edad bajo estudio, se procede a convertirlas a tasas independientes de decremento, también llamadas *tasas absolutas o probabilidades netas de decremento*.

Este procedimiento usualmente se lleva a cabo a traves de métodos de aproximación a partir de la información revelada en la tabla de decrementos múltiples, es decir, aquélla que muestra las probabilidades dependientes.

Las fórmulas tradicionales pueden obtenerse a partir del siguiente argumento. En una tabla de decremento único el número de individuos que alcanzan una cierta edad x, multiplicado por la tasa de decremento a dicha edad, proporciona el número de miembros que fracasan a edad x, e g., $q_x \cdot l_x = d_x$

Por otro lado, en una tabla de decrementos múltiples si la probabilidad de decremento $q_x^{(k)}$ se multiplica por $l_x^{(\tau)}$, el resultado que se obtiene para $d_x^{(k)}$ es mayor al número de individuos que fracasan dado que algunos de los $l_x^{(\tau)}$, no se encuentran expuestos a la causa de decremento (k) durante todo el año debido a que fracasaron por alguna de las otras causas involucradas en el estudio.

Así, el número de individuos que dejan el grupo durante el año por otras causas esta dado por $d_x^{(T)} - d_x^{(k)}$, y puede denotarse por $d_x^{(-k)}$. Si se asume que estos individuos están expuestos a la causa (k) en promedio la mitad de un año antes de fracasar, la disminución en el número de individuos expuestos puede expresarse como $(1/2) \cdot d_x^{(-k)}$.

Bajo este supuesto la tasa $q_x^{\prime(k)}$, multiplicada por el promedio de expuestos a edad x, $l_x^{(T)} - (1/2) \cdot d_x^{(-k)}$, arrojaría al valor de $d_x^{(k)}$, es decir,

$$q_x^{\prime(k)} \cdot [\, l_x^{(T)} - (1/2) \cdot d_x^{(-k)}] \cong d_x^{(k)} \tag{4.4}$$

$$q_x^{\prime(k)} \cong \frac{d_x^{(k)}}{l_x^{(T)} - (1/2) \cdot d_x^{(-k)}} \tag{4.5}$$

$$q_x^{\prime(k)} = \frac{q_x^{(k)}}{1 - (1/2) \cdot q_x^{(-k)}} \tag{4.6}$$

dónde $q_x^{(-k)} = q_x^{(T)} - q_x^{(k)}$

En el caso particular del modelo que se pretende estimar en este trabajo bajo un ambiente de doble decremento, las fórmulas resultantes para las tasas absolutas de rotación y salida serian, respectivamente

$$q_x^{\prime(r)} = \frac{q_x^{(r)}}{1 - (1/2) \cdot q_x^{(s)}} \tag{4.6}$$

$$q_x^{\prime(s)} = \frac{q_x^{(s)}}{1 - (1/2) \cdot q_x^{(r)}} \tag{4.7}$$

Si se aplican estas expresiones a las probabilidades de decremento de rotación ilustradas en el caso práctico de la sección anterior, podría obtenerse por ejemplo que la tasa absoluta de rotación para edad 35 estaría dada por

$$q'^{(r)}_{35} = \frac{q^{(r)}_{35}}{1 - (1/2)\cdot q^{(s)}_{35}}$$

$$q'^{(r)}_{35} = \frac{0.21}{1 - (1/2)\cdot 0.21} = 0.23$$

En forma alternativa pueden emplearse otras fórmulas construidas a partir de hipótesis matemáticas más formales, por ejemplo, puede suponerse que el número de fracasos asociados a cada decremento se distribuye uniformemente sobre el intervalo de edad en estudio[5].

4.4.3 TASAS Y PROBABILIDADES DE DECREMENTO DEL MODELO TABULAR DE ROTACIÓN

Los resultados obtenidos en el proceso de estimación del modelo tabular de rotación a través de la metodología descrita hasta este momento y obtenidos a partir de los programas de cómputo desarrollados para lograr las estimaciones deseadas son los siguientes:

[5] Si el lector se interesa en el estudio de esta alternativa puede dirigirse a Jordan, *op. cit.* Capítulo 14.

	Probabilidades Dependientes		Tasas Independientes		
Edad	Rotación	Salida	Rotación	Salida	Edad
15	00.000	00 000	00.000	00.000	15
16	303 338	16 852	305.916	19.865	16
17	234 764	26 085	237.867	29.554	17
18	248.547	77.069	258.509	88.006	18
19	264.397	64.509	273.210	74.336	19
20	261 900	69 592	271.341	80.078	20
21	243 015	67.233	251.469	76.532	21
22	230.577	72 691	239 273	82.164	22
23	176 185	57.495	181.400	63 049	23
24	142 315	48.294	145.836	51.993	24
25	150.988	45 043	154.467	48.721	25
26	163 571	52 576	167.987	57 260	26
27	180.276	65.342	186.365	71.815	27
28	187 028	61.055	192.917	67 353	28
29	162.841	56 159	167 546	61 137	29
30	118.765	42.087	121 318	44 744	30
31	125 050	43 690	127.843	46 604	31
32	114.590	48.731	117.452	51.693	32
33	94 273	40 025	96.198	42 005	33
34	99.899	39 919	101 934	42 018	34
35	95.668	37.271	97.485	39 143	35
36	108 269	36.561	110 285	38 653	36
37	99.400	37 250	101 286	39 198	37
38	93 143	35 890	94 845	37 643	38
39	82.485	34.916	83 951	36 418	39
40	85.350	32 037	86 739	33.466	40
41	80.535	38 350	82 109	39 959	41
42	53.361	39 090	54 425	40.162	42
43	59 247	39.384	60 437	40 586	43
44	65 633	48.843	67 276	50 501	44
45	54 922	48 585	56 290	49 957	45
46	61 308	53 764	63 002	55 464	46
47	56 552	55 386	58 162	56 997	47
48	41 339	79 248	43 045	80 920	48
49	71 044	69.430	73.599	71 987	49
50	64 607	76 113	67 163	78.654	50
51	62 402	80 727	65 026	83 327	51
52	58.210	59 989	60 010	61.788	52
53	52.554	82 980	54 829	85 219	53
54	48 390	70 444	50 156	72 190	54
55	57 126	87 474	59 739	90.046	55
56	40.693	87.031	42 545	88 838	56
57	24.578	69 440	25 462	70 304	57
58	37 052	89 528	38 788	91 218	58
59	11 894	96.973	12 500	97.553	59
60	00 000	00 000	00 000	00.000	60

Nota: Todas las cifras se encuentran expresadas en miles

CAPITULO V

GRADUACIÓN DEL MODELO TABULAR DE ROTACIÓN

5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se desarrolló el caso práctico para la construcción del modelo tabular de rotación, obteniéndose así una tasa de rotación (tasa independiente) para cada una de las edades entre 15 y 60 años. Sin embargo, aún cuando el proceso de estimación del modelo no ha sido concluido, pueden puntualizarse dos observaciones en relación al modelo hasta aquí desarrollado.

1. La tabla de rotación se construyó a partir de un conjunto de observaciones del fenómeno original que se pretende estimar, por lo que sólo proporciona alguna información preliminar sobre el modelo.

2. Esta estimación inicial forma una secuencia irregular de valores o estimaciones iniciales.

Por lo que es necesario revisar o ajustar estas estimaciones iniciales con el objeto de mejorar el modelo y lograr una mejor representación del fenómeno bajo estudio.

Este proceso de revisión y ajuste se conoce como graduación, y será ejemplificado en este capítulo cómo aplicar dicha tecnica a nuestra estimación inicial. Resulta conveniente aclarar que no se tiene por objeto hacer un análisis profundo y detallado de las técnicas de graduación, por lo que simplemente se expondrán de forma general algunos conceptos básicos antes de la aplicación del método de Whittaker - Henderson[1].

---

[1] Si el lector está interesado en profundizar en el conocimiento del proceso de graduación, puede consultar la obra de Dick London *Graduation. The revision of estimates*. ACTEX Publications, 1985.

5.2 DEFINICIÓN DE GRADUACIÓN

Uno de los temas más importantes de la ciencia actuarial es la construcción de modelos de supervivencia (tablas de mortalidad, invalidez, rotación, etc.) a partir de los cuales el actuario puede realizar cálculos de primas de seguros, reservas, anualidades, fondos de pensiones, etc.

El primer paso para la construcción de este modelo fue completado en los cuatro capítulos anteriores de este trabajo. Es decir, se llevó a cabo un estudio basado en la experiencia de un grupo bajo observación, que produjo una tabla de tasas de rotación para un conjunto de edades específicas.

Estos datos observados constituyen una representación inicial de una ley o patrón de rotación, a partir de los cuales puede iniciarse la segunda fase para la construcción del modelo, llamada graduación. Por lo que se emprenderá una revisión sistemática de los datos iniciales con la intención de mejorar el modelo como una representación del patrón desconocido de rotación, con respecto a aquél dado por los datos iniciales por sí mismos.

El proceso de graduación ha sido definido por muchos autores. Miller describe graduación como

> *"el proceso de obtener, a partir de una serie irregular de valores observados de una variable continua, una serie regular y suave de valores que sean consistentes con la serie de valores observados en una forma general"*[2]

Según lo establece London[3],

> *"esta definición de Miller, define al proceso de graduación más allá de la simple instrucción de "revisar los datos iniciales" en dos puntos importantes.*

---

[2] Miller, M. D. *Elements of Graduation*. New York: Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, 1946. Página 2

[3] London, *op. cit.*, p. 1.

Primero, Miller sugiere que los valores revisados no deben desviarse demasiado de los valores observados originales. Esta consideración, referida como ajuste, es una característica deseable en el proceso de graduación.

Más significativo es que la descripción de Miller asume claramente que la ley o patrón bajo estudio es suave, regular y continua. Y ya que el objetivo general en el proceso de graduación es el revisar los valores observados para producir una "mejor" representación de la ley o patrón bajo estudio, la hipótesis de Miller acerca de la naturaleza de tal ley da un sentido de dirección más definido en el proceso de revisión."

La implicación de la definicion de Miller, es que la graduación consiste en suavizar los datos observados (estimaciones iniciales) manteniendo cierto grado de ajuste a ellos; siendo ésto técnicamente correcto, pero no suficiente.

El objetivo real de la graduación es el obtener el más probable comportamiento del fenomeno bajo estudio que prevalece en la población. Es decir, hasta este punto únicamente se tiene una serie de tasas iniciales que se obtuvieron a partir de un conjunto limitado de observaciones, con las cuales se deben estimar las tasas reales de rotación desconocidas. Entonces, con el proceso de graduacion se busca estimar, u obtener una representación de la serie de tasas reales de rotación, que se asume dieron origen a la serie irregular de tasas observadas.

Es importante reconocer que cada valor (tasa) observado es realmente una estimación del valor (tasa) real desconocido prevaleciente en la población. La estimación se obtuvo aplicando el proceso estadístico de estimación conocido con el nombre de "Metodo de Momentos", a los datos de una muestra obtenida de la población bajo estudio. Y por medio de la graduación, se revisará esta estimación inicial para producir una estimación *revisada* (aunque aún una estimación) de los valores que se interesa conocer.

5.2.1 LA NATURALEZA ESPECIAL DE LA GRADUACIÓN

En este momento podrían surgir un par de preguntas: Si la secuencia de estimaciones iniciales se obtuvo a través de un proceso estadístico de estimación: ¿Por qué se quiere realizar una revisión de ellas? ¿Por qué no se consideran estas estimaciones iniciales como la "mejor" estimación de los valores desconocidos que se desean estimar?

La respuesta radica en la naturaleza de los datos por si mismos,

> *"Cada estimación inicial es un elemento de una clase particular de secuencia en la cual se sospecha existe una fuerte relación entre los elementos de la secuencia. En vista de esto, no todas las secuencias de números son candidatas para graduarse. Sólo ciertos tipos de datos son compatibles para graduarse, a saber aquellas series para las cuales se cree que existen "relaciones entre los elementos de la secuencia".*[4]

Otro autor que ha escrito sobre graduación, Elphinstone, al tratar especificamente con tasas de mortalidad, tambien justificó la graduación con la hipótesis de que existen relaciones entre tasas colindantes, y que si no se pretende reflejar tales relaciones, entonces es incorrecto aplicar cualquier proceso de graduación; e incluso Elphinstone llegó a establecer que la teoria de la graduación era la teoria de las relaciones entre tasas adyacentes.[5]

Esta es la razon por la que es necesario revisar la secuencia obtenida de estimaciones iniciales. En muchos casos cada elemento en la secuencia se obtuvo independientemente de cada uno de los otros elementos, es decir, sin el reconocimiento de la "relación entre tasas colindantes". Y solamente al graduar estas estimaciones iniciales, se reconocen y reflejan dichas relaciones en las estimaciones revisadas.

Es necesario reflexionar que se está tratando con el conocimiento (o quizá simplemente con la creencia) que se tiene sobre la naturaleza de la secuencia en

---

[4] *Ibid.*, p.4

[5] Elphinstone, M.D.W. *Summation and Some Other Methods of Graduation. The Foundations of Theory*, TFA, 1951, p. 18

consideración, ya que tal conocimiento es independiente de la información contenida en las estimaciones iniciales. En otras palabras, se está hablando sobre el conocimiento que se tiene *antes de* que se obtengan las estimaciones iniciales. Tal conocimiento o creencia es lo que se conoce en la teoría de graduación como *opinión* o *juicio a priori*.

Esta *opinión a priori* es lo que separa a la graduación de otras formas de estimación estadística. En muchos casos, la estimación estadística se basa exclusivamente en los datos observados por sí mismos; y por lo tanto, las estimaciones iniciales permanecen como las finales.

Pero en la graduación, las estimaciones finales se basan tanto en las estimaciones iniciales (datos observados) como en la *opinión a priori* que se tiene de la sucesión en consideración.

5.2.2 LA SUAVIDAD

La creencia de que las tasas de decremento forman una serie suave (regular), es sin lugar a dudas el elemento más importante de *juicio a priori* que más frecuentemente han utilizado los actuarios al graduar estas tasas. Además de esta creencia intuitiva, existe una obvia justificación práctica que apoya el objetivo de suavizar las tasas de decremento. Tal como Miller lo establece,

> *"El actuario espera usar sus tablas de mortalidad para el cálculo de primas, factores de reservas, anualidades, y demás. No se gana nada al asumir que la mortalidad varía de otra forma que regular y continuamente. Irregularidades caprichosas en las tablas de edad a edad interrumpen la progresión ordenada de primas, etc., lo cual sería inconsistente con el sentido común ya que tales cifras deberían ser razonablemente regulares, y tenderían a despertar un escepticismo completamente justificable."*[6]

[6] Miller, *op. cit.*, p. 6

Esta petición de utilizar algún criterio de suavización se convirtió históricamente en el elemento dominante de *opinión a priori* (y algunas veces en el único) que se utilizó en la graduación. De hecho, se hacía tanto hincapié en ésto que muchas veces se pensaba que "graduar" y "suavizar" eran sinónimos.

Finalmente esa justificación práctica, hace altamente deseable la inclusión de algún criterio de suavización (ya sea teórico o práctico) en el proceso de graduación; además de que constituye el elemento de *juicio a priori* más obvio, justificable y fácil de introducir en dicho proceso.

5.3 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE GRADUACIÓN

Los métodos de graduación pueden agruparse en dos grandes grupos:

1. Métodos de graduación que tratan con estimaciones iniciales en forma tabular.

2. Métodos de graduación para estimaciones iniciales obtenidas a través de una función, es decir, en forma paramétrica.

Dentro del primer grupo pueden mencionarse algunos métodos en particular; como el método de *Promedios Móviles Ponderados*, el cual fue uno de los primeros en desarrollarse. Su principal ventaja es que constituye un método de fácil uso (conveniencia aritmética) lo cuál le valió mucha popularidad en los años antes de la llegada de las computadoras, sin embargo, actualmente su uso ha disminuido.

Otro método de graduación utilizado en estimaciones iniciales en forma tabular es el método de *Whittaker - Henderson*, el cual fue desarrollado por E. T. Whittaker en 1923 y más tarde Henderson (1924 y 1925) contribuyó a la teoría de este metodo, e hizo una contribucion significativa al mostrar cómo la teoría podía ser puesta en práctica.

Este método se encuentra vigente en la actualidad y es muy utilizado por los actuarios para la graduación de tablas de supervivencia (vida, invalidez, rotación, etc.).

Finalmente puede citarse un método de reciente desarrollo, pero que tiene un futuro muy promisorio: la *Graduación Bayesiana*. Esta técnica, que se asegura será la que reemplace en popularidad a la de Whittaker - Henderson, permite incluir experiencia previa al reflejar la interrelación entre tasas colindantes.

Resulta muy conveniente aclarar que ningún método puede verse como "mejor" o "correcto" en un sentido universal. Sin embargo, en ciertas situaciones un método en particular puede ser preferido sobre otro. Tal elección puede estar guiada, por ejemplo, por el propósito intencional del modelo. En particular, si la característica de suavidad es muy importante para el modelo, entonces no son recomendables ni el método de Promedios Móviles Ponderados ni la graduación Bayesiana.

Otro factor de influencia importante en la elección del método es la forma y extensión de las estimaciones (datos) iniciales. Un ejemplo puede encontrarse en muchos estudios actuariales de mortalidad donde los datos básicos han sido reportados en grupos de edad, y para lo cual se ha utilizado con mucha frecuencia un aproximación a través de interpolación

También es importante el rango de los datos. Si se tiene una secuencia corta de términos, el uso de algunos métodos, como el de Promedios Móviles Ponderados, puede presentar algunos inconvenientes.

Aunque algunos métodos requieren una cantidad mayor de cálculos numéricos, lo que en alguna época representó un factor decisivo en la selección del método, en la actualidad, con lo avanzado de las computadoras, esta consideración no resulta relevante.

5.4 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE WHITTAKER-HENDERSON

La fórmula básica de graduación del método de Whittaker - Henderson combina linealmente la suavidad y el ajuste de la siguiente manera:

$$M = A + hS \tag{5.1}$$

Donde:

$$A = Ajuste = \sum_{x=1}^{n} w_x (v_x - u_x)^2 \tag{5.2}$$

y

$$S = Suavidad = \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2 \tag{5.3}$$

con lo que se obtiene

$$M = A + hS = \sum_{x=1}^{n} w_x (v_x - u_x)^2 + h \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2 \tag{5.4}$$

donde:

x	El índice que define la secuencia, en este caso la edad.
n	El último índice de la secuencia.
u_x	Las estimaciones iniciales o valores observados.
v_x	Las estimaciones revisadas o valores graduados.
w_x	La secuencia de ponderaciones usada en la graduación.
h	Constante de suavidad.
Δ^z	La *z-ésima* diferencia progresiva.[7]

[7] La diferencia progresiva sobre el intervalo h, (no confundir con la constante de suavidad), se denota por Δ_h, se define como: $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$

En particular, si $h = 1$, se tendrá: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Nótese que cuando $h = 1$, se utiliza solamente Δ en vez Δ_h. Por simplicidad, en el resto de esta nota se asumirá que $h = 1$.

Entonces, la segunda diferencia, Δ^2 se define como:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+1) - f(x)] = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) \\ &= [f(x+2) - f(x+1)] - [f(x+1) - f(x)] \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto la *k-ésima* diferencia es

$$\Delta^k f(x) = f(x+k) - \binom{k}{1} f(x+k-1) + \binom{k}{2} f(x+k-2) + \dots + (-1)^k f(x)$$

Así, el objetivo radica radica en encontrar aquellos valores graduados v_x, para $x = 1, 2, ..., n$, para los cuales se minimiza el valor de M.

De la ecuación (5.4) pueden desprenderse algunas observaciones:

1. Aunque x representa la edad, de tal forma que el rango de edades irá desde 15 hasta 60 años, por simplicidad es preferible hacer referencia a la secuencia de valores desde 1 hasta n.

2. El parámetro z, que establece el grado del polinomio usado como estándar de suavidad, generalmente es 2, 3, o 4

3. La secuencia de ponderaciones w_x son números reales positivos.

4. El parámetro h, un número real positivo, controla el énfasis relativo que se le da a A y S en la minimización de M.

Por otra parte, es posible demostrar que si se asume que U_x, que representa las variables aleatorias con las que se pretende estimar los valores reales (i.e., u_x son las realizaciones particulares de U_x), es una proporción binomial insesgada entonces,

$$Var(U_x) = \frac{t_x(1 - t_x)}{n_x} \tag{5.5}$$

donde:

t_x La secuencia de valores reales que serán estimados.

n_x El tamaño de la muestra de edad x.

Así, se acostumbra utilizar el recíproco de $Var(U_x)$, aproximándola al usar v_x en vez de t_x, como la secuencia de ponderaciones w_x, para calcular la medida de ajuste *después* de que se ha llevado a cabo el proceso de graduación. Se enfatiza la palabra *después*, ya que el utilizar este peso en (5.4) antes de determinar v_x complicaría demasiado el proceso de minimización de M.

Por lo que para hacer w_x independiente de v_x podrían utilizarse las estimaciones iniciales u_x en vez de v_x, es decir

$$w_x = \frac{n_x}{u_x(1-u_x)}. \tag{5.6}$$

Finalmente, antes de analizar el proceso de minimización de M, se analizarán algunas características generales del parámetro h:

1. Claramente cuando $h=0$, $hS=0$, para cualquier valor de S. Entonces, ya que A no puede ser menor que cero, M es minimizado cuando $A=0$, lo cual implica que $v_x = u_x$ para toda x, este sería el caso de no-graduación. Así, en general, cuanto h se aproxime a 0, v_x se aproximará a u_x, y por lo tanto el ajuste se enfatiza sobre la suavidad.

2. Por el contrario, cuando se establece una h muy grande, inherentemente el proceso de minimización enfatiza la suavidad de los datos graduados, por lo que se restringe v_x hacia el polinomio de grado $z-1$.

Una vez analizado cada componente de la fórmula básica de graduación de Whittaker - Henderson, se desarrollará el proceso de minimización de M.

Claramente M es una función de los n valores desconocidos v_x. Entonces las v_x que minimizan M es la solución de las n ecuaciones que resultan al igualar a cero las derivadas parciales de M con respecto a cada v_x. Esto es

$$\frac{\partial M}{\partial v_r} = 0, \text{ para } r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{5.7}$$

Para la solución de (5.7) se replanteará M en función de vectores y matrices, por lo que se denotarán en negritas a esos elementos.

Sean

- **u** el vector de las estimaciones iniciales, y
- **v** el vector de las estimaciones revisadas (valores graduados).

Usando $\mathbf{y}'$ para denotar la transpuesta de $\mathbf{y}$, se tiene

$$\mathbf{u}' = [u_1, \ldots, u_n] \quad \text{y} \quad \mathbf{v}' = [v_1, \ldots, v_n]$$

Sea

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & & & O \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ O & & & w_n \end{bmatrix}$$

una matriz diagonal de $n \times n$ que contiene la secuencia de ponderaciones. Sea $\mathbf{k}_z$ una matriz especial que contiene los coeficientes binomiales de orden z, que considera el cambio de signo, tal que el producto $\mathbf{k}_z\mathbf{v}$ es el vector que contiene los valores de $\Delta^z v_x$. Así, si existen n valores de v_x, tal que $\mathbf{v}$ es un vector de $n \times 1$, entonces $\mathbf{k}_z$ tendrá una dimensión de $(n - z) \times n$, y $\mathbf{k}_z\mathbf{v}$ será un vector de $(n - z) \times 1$. Para comprender claramente lo anterior, se realizará un ejemplo numérico:

Si $z = 2$ y $n = 6$, entonces

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para un valor impar de z, por ejemplo $z = 3$ y $n = 7$, entonces

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resulta evidente que los productos $\mathbf{k}_2\mathbf{v}$ y $\mathbf{k}_3\mathbf{v}$ producen los valores deseados de $\Delta^2 v_x$ y $\Delta^3 v_x$, respectivamente.

Una vez definidos los elementos $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, y $\mathbf{k}_z$, de la función M, establecida en (5.4), puede ser escrita como

$$M = (\mathbf{v}-\mathbf{u})'\mathbf{w}(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + h(\mathbf{k}_z\mathbf{v})'\mathbf{k}_z\mathbf{v} \tag{5.8}$$

$$= (\mathbf{v}-\mathbf{u})'\mathbf{w}(\mathbf{v}-\mathbf{u}) + h\mathbf{v}'(\mathbf{k}'_z\mathbf{k}_z)\mathbf{v} \tag{5.9}$$

ya que el producto $\mathbf{y}'\mathbf{y}$ produce la suma de los cuadrados de los elementos de un vector columna $\mathbf{y}$.

Entonces, el conjunto de ecuaciones establecido en (5.7) puede producirse y representarse a través de una ecuación con vectores y matrices, es decir,

$$(\mathbf{w} + h\mathbf{k}'_z\mathbf{k}_z)\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{u} \tag{5.10}$$

Si se define una nueva matriz $\mathbf{c}$, tal que

$$\mathbf{c} = \mathbf{w} + h\mathbf{k}'_z\mathbf{k}_z \tag{5.11}$$

entonces, (5.10) puede escribirse como

$$\mathbf{c}\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{u}\,. \tag{5.12}$$

La ecuación (5.12) representa un sistema de ecuaciones de matrices que es posible resolver mediante cualquier método numérico.[8]

Es posible demostrar que la matriz $\mathbf{c}$ es una matriz no-singular, por lo que la matriz inversa de $\mathbf{c}$, ($\mathbf{c}^{-1}$), existe y es única. Así, multiplicando ambos términos de la ecuación (5.12) por la matriz $\mathbf{c}^{-1}$, se tiene

---

[8] Se da por entendido que el lector se encuentra familiarizado con la utilización de métodos numéricos para la solución de este tipo de ecuaciones

$$\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{c}\mathbf{v}) = \mathbf{c}^{-1}(\mathbf{w}\mathbf{u}) \tag{5.13}$$

$$(\mathbf{c}^{-1}\mathbf{c})\mathbf{v} = \mathbf{c}^{-1}(\mathbf{w}\mathbf{u}) \tag{5.14}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}^{-1}(\mathbf{w}\mathbf{u})^{9} \tag{5.15}$$

lo que significa que se habrá encontrado la solución para el sistema de ecuaciones representadas por (5.7), y por lo tanto, los valores graduados v_x que se pretenden estimar.

Finalmente, cabe hacer mención que la solución de (5.15) puede ser encontrada fácilmente con las herramientas computacionales de hoy en día, a través de algún lenguaje computacional como el APL[10], o con la ayuda de cualquier *software* que maneje matrices como EXCEL.

5.5 APLICACIÓN PRACTICA DEL MÉTODO DE GRADUACIÓN

Una vez analizados los conceptos básicos de la graduación, así como el desarrollo matemático del método de Whittaker - Henderson, se procedió a aplicar dicho método a la tabla de rotación que se estimó en el capítulo anterior.

El proceso de graduación se desarrolló bajo los siguientes supuestos:

1. El valor de z utilizado fue tres. Es decir, el polinomio con el que se están suavizando los datos es de segundo grado.

2. Los pesos o ponderaciones w_x se obtuvieron a través de (5.6).

[9] Recuérdese que el producto de una matriz por su inversa, si es que esta existe, da como resultado la matriz identidad.

[10] Si el lector se encuentra interesado en aplicar este lenguaje a algún proceso de graduación, puede consultar la tesis *Comparación entre las Técnicas de Graduación de Whittaker-Henderson y la Graduación Bayesiana, con Ejemplificaciones* del Act. Gabriela Limbarri Vázquez, ENEP Acatlán 1995, anexo IV.

3. La constante de suavización se designó como $h = 243{,}035$ (la suma de todas las n_x).

4. Las estimaciones iniciales u_x se tomaron a partir de la Tabla de tasas independientes de rotación que se muestra en la sección 4.4.3, y para evitar la división entre cero al calcular el peso w_{15}, la estimación inicial $u_{15} = 0$ se remplazó arbitrariamente por $u_{15} = u_{16} = 0.305916$.

Los resultados se presentan en la siguiente tabla, además se graficaron las estimaciones iniciales u_x y las estimaciones revisadas v_x para poder hacer una comparación gráfica entre ellas.

También es necesario puntualizar que todo el proceso de graduación se llevó a cabo mediante el uso de una hoja de calculo en EXCEL, por así resultar práctico.

Tasas Independientes de Rotación

Edad	Tasas Iniciales	Tasas Graduadas	Edad
15	0.000	257.482	15
16	305.916	275.068	16
17	237.867	284.450	17
18	258.509	285.602	18
19	273.210	278.369	19
20	271.341	262.723	20
21	251.469	239.632	21
22	239.273	212.183	22
23	181.400	186.031	23
24	145.836	168.487	24
25	154.467	163.526	25
26	167.987	167.802	26
27	186.365	173.091	27
28	192.917	171.336	28
29	167.546	159.649	29
30	121.318	141.927	30
31	127.843	124.833	31
32	117.452	111.438	32
33	96.198	103.110	33
34	101.934	100.274	34
35	97.485	100.872	35
36	110.285	101.952	36
37	101.286	100.535	37
38	94.845	96.063	38
39	83.951	89.424	39
40	86.739	81.651	40
41	82.109	73.169	41
42	54.425	65.536	42
43	60.437	61.118	43
44	67.276	59.264	44
45	56.290	58.235	45
46	63.002	57.425	46
47	58.162	56.879	47
48	43.045	57.524	48
49	73.599	59.800	49
50	67.163	61.963	50
51	65.026	62.665	51
52	60.010	61.461	52
53	54.829	58.570	53
54	50.156	54.331	54
55	59.739	48.840	55
56	42.545	42.016	56
57	25.462	34.113	57
58	38.788	25.326	58
59	12.500	15.364	59
60	0.000	0.000	60

Graduación de la Tabla de Rotación

CONCLUSIONES

A lo largo del desarrollo del modelo tabular que se construyó en la presente investigación, puede concluirse que la estimación de un modelo actuarial de supervivencia a partir de la experiencia observada de algún decremento de interés para una población, resulta factible siempre que se cuente tanto con información que haya sido recopilada confiablemente como con una muestra de estudio tal que el análisis estadístico sea posible de realizar.

Lo anterior se refiere a que, es necesario que exista un sustento estadístico que permita asumir el mismo patrón de comportamiento del fenómeno en estudio que presenta la muestra para la población en general de la empresa. Tal sustento puede obtenerse a través de dos vías, eligiendo un periodo de observación amplio (10 años o más) y/o seleccionando una muestra de estudio suficientemente grande, de tal forma que se evite la carencia de información para alguna(s) edad(es) dentro del rango en estudio.

El actuario debe considerar estos requisitos como elementos de juicio *a priori*, siempre que desee emprender la estimación del patrón de comportamiento de un fenómeno aleatorio como lo es la rotación.

Desfortunadamente, la realidad en nuestro país es que difícilmente en la práctica se cumplen dichos requisitos. La mayor parte de las empresas no llevan registro de la información requerida para dicho análisis, y aquéllas que han iniciado este proceso de recopilación no cuentan aún con registros computarizados, lo que dificulta considerablemente el proceso de estimación.

Sin embargo, en aquellos casos en los que se cuente con estadísticas confiables puede afirmarse que el uso de un modelo tabular de rotación estimado a partir de la experiencia propia de la empresa, representa la mejor opción en cuanto a las hipótesis actuariales, que se asumen en la valuación actuarial de los pasivos contingentes de un plan de pensiones.

Con el objeto de no introducir subjetividad al modelo de rotación, (pérdida de precisión matemática en la valuación actuarial del plan), si no se cuenta con información suficiente que justifique el proceso de estimación, podrá entonces aceptarse que se ajuste algún modelo tabular de rotación existente. Esto puede lograrse mediante el conocimiento previo de algunos elementos relacionados con el comportamiento del fenómeno, los cuales pueden ser proporcionados por personal de la empresa para la cual se realiza la valuación, antes de la selección de esta hipótesis.

Por otra parte, en relación a los resultados numéricos obtenidos a través de la metodología descrita en este trabajo puede afirmarse lo siguiente:

El tamaño de la muestra poblacional durante el periodo de observación seleccionado permitió la realización del análisis estadístico.

La estimación inicial de estas tasas presentó en algunos casos un comportamiento inconsistente con respecto a aquél que dicho fenómeno presenta en la realidad. Por lo que, se consideró necesario realizar la revisión y ajuste de las mismas a través de la técnica de graduación de Whittaker-Henderson.

Este procedimiento resultó en la obtencion de tasas decrecientes de rotación que reflejan de mejor forma la relación de las mismas entre edades adyacentes para la mayor parte de las edades bajo estudio.

De acuerdo al patrón de rotación estimado, si el promedio de edad de la población oscilara entre los 25 y 34 años (población joven), se obtendría un porcentaje de rotación alrededor del 14% para un año dado, el cual puede considerarse como una rotación media o media alta; ahora bien, si el promedio de edad oscilara entre los 35 y 50 años (población madura), se obtendría una rotación promedio alrededor del 8%, lo que representa una rotación baja o media.

Finalmente, consideramos que los temas tratados en la presente tesis deben ser familiares al actuario, no obstante en el campo profesional nos encontramos que pocos de ellos los dominan. Por lo que creemos que la introducción de materias que se relacionen con estos tópicos resulta necesaria en el proceso de formación académica de los estudiantes de actuaría.

ANEXOS

```
*****************CONSTRUCCION DEL MODELO TABULAR DE ROTACION


&&&&&&&&&&&&&LOS PROCEDIMIENTOS A LOS CUALES SE HACE REFERENCIA EN ESTE
&&&&&&&&&&&&&PROGRAMA, ACM0000, CORRESPONDEN AL PROGRAMA AUXILIAR DE LIBRERIAS
&&&&&&&&&&&&&QUE SE ANEXA.


set procedure to acm0000
do g_setup
do prtitemp with "ACM000","TITULO 1","TITULO 2"
store ctod("  /  /  ") to f_corte,f_inic,f_fin

xescape = 12
xfuga = " ( readkey() = xescape .or. readkey() = xescape+256 ) "
store .F. to w_esc


&&&&&&&&&&SELECCION DE PARAMETROS

do while .not. w_esc
  @ 5,5 say "FECHA DE CORTE PARA EDADES:        " get f_corte
  @ 7,5 say "FECHA INICIAL DEL PERIODO DE OBSERVACION:" get f_inic
  @ 9,5 say "FECHA FINAL DEL PERIODO DE OBSERVACION:  " get f_fin
  read
  if &xfuga
    close data
    return
  endif

  do g_okay with "Es correcto ?",w_esc
enddo

do g_info with "Seleccionando datos, espere por favor"

sele 1
use BASEEMP alias emp              &&&&&&BASE DE EMPLEADOS


&&&&&&&SELECCION DE PARTICIPANTES

set filter to (f_corte-f_naci)/365 >= 15 and;
   (f_corte-f_naci)/365 <= 60

sele 2
use vectuix
zap
sele 1

do g_info with "Calculando vectores v Y u"
go top
store 1 to n
do while .not. eof()
  @ 21,5 say "PARTICIPANTES PROCESADOS: "+str(n,8)
  n=n+1


  &&&&GENERACION DEL VECTOR V
  repl v with FECDECI(F_INIC)-FECDECI(F_NACI)
```

```
repla VZ with FECDECI(F_FIN)-FECDECI(F_NACI)
do case
  case causasal = " "
    repla VT with 0
    repla VP with 0
  case causasal = "R"
    repla VT with FECDECI(F_SAL)-FECDECI(F_NACI)
    repla VP with 0
  case causasal = "O"
    repla VP with fecdeci(F_SAL)-FECDECI(F_NACI)
    repla VT with 0
endcase

&&&&&DETERMINACION DEL NUMERO DE VECTORES A CONTRIBUIR

do case
  &&&&SI EL PARTICIPANTE ROTA
  case VP <> 0
    do case
      case int(VY) <> VY and  int(VP) <> VP
        NVAC=int(VP)-int(VY)+1
      case int(VY) <> VY and int(VP) = VP
          NVAC=int(VP)-int(VY)
      case int(VY) = VY and  int(VP) <> VP
          NVAC=int(VP)-int(VY)+1
      case int(VY) = VY and int(VP) = VP
          NVAC=int(VP)-int(VY)
    endcase
  &&&&&SI EL PARTICIPANTE SALE POR OTRA CAUSA
  case VT <> 0
    do case
      case int(VY) <> VY and  int(VT) <> VT
        NVAC=int(VT)-int(VY)+1
      case int(VY) <> VY and int(VT) = VT
          NVAC=int(VT)-int(VY)
      case int(VY) = VY and  int(VT) <> VT
          NVAC=int(VT)-int(VY)+1
      case int(VY) = VY and int(VT) = VT
          NVAC=int(VT)-int(VY)
    endcase
  &&&&&SI EL PARTICIPANTE PERMANECE
  case VT = 0 and VP = 0
    do case
      case int(VY) <> VY and  int(VZ) <> VZ
        NVAC=int(VZ)-int(VY)+1
      case int(VY) <> VY and int(VZ) = VZ
          NVAC=int(VZ)-int(VY)
      case int(VY) = VY and  int(VZ) <> VZ
          NVAC=int(VZ)-int(VY)+1
      case int(VY) = VY and int(VZ) = VZ
          NVAC=int(VZ)-int(VY)
    endcase
endcase

&&&&&GENERACION DE LOS VECTORES UIX

wwn = 1
WX=int(VY)
do while wwn <= NVAC
  store recno() to reg_no
```

```
if VY<=WX
  WR=0
else
  WR=VY-WX
endif
if WX<VZ AND VZ<WX+1
  WS=VZ-WX
else
  WS=1
endif
do case
   case VT=0
     WJ=0
   case WX<VT and VT<=WX+1
     WJ=VT-WX
   case VT>WX+1
     WJ=0
 endcase
 do case
   case VP=0
     WK=0
   case WX<VP and VP<=WX+1
     WK=VP-WX
   case VP>WX+1
     WK=0
 endcase
 sele 2
 appe blank
 repla recno with rec_no
 repla UIXX with WX
 repla UIXR with WR
 repla UIXS with WS
 repla UIXJ with WJ
 repla UIXK with WK
 sele 1
 WX=WX+1
 wwn=wwn+1
enddo
skip
enddo

do G_INFO with "Ordenando vectores Uix por edad, espere"
sele 2
index on UIXX to vectuix
sele 3
use estimado
zap
sele 2
do G_INFO with "Calculando estimadores, espere por favor"
go top
do while .not. eof()
  store UIXX to WEDAD
  store 0 to WRX,EEXJ,WSX,EEXK,WLX
  @ 19,10 say "PROCESANDO EDAD: "+str(WEDAD,2,0)
  do while UIXX=WEDAD
    WLX = WLX+1
    if UIXJ <> 0
      WRX=WRX+1
      EEXJ=EEXJ+(UIXS-UIXR)
    else
```

```
      EEXJ=EEXJ+(UIXS-UIXR)
     endif
     if UIXK <> 0
       WSX=WSX+1
       EEXK=EEXK+(UIXS-UIXR)
     else
       EEXK=EEXK+(UIXS-UIXR)
     endif
     skip
   enddo
   sele 3
   appe blank
   repla EDAD WITH WEDAD
   repla RX with WRX
   repla EEXJ with m->EEXJ
   repla QXR with RX/EEXJ
   repla SX with WSX
   repla EEXK with m->EEXK
   repla QXS with SX/EEXK
   repla LX with WLX
   sele 2
enddo


FUNCTION FECDECI

&&&&&&CONVIERTE UNA FECHA A FECHA DECIMAL

PARA WFECHA
RETURN year(WFECHA)+(WFECHA-ctod("01/01/"+substr(dtoc(WFECHA),7,2)))/365
```

```
***Programa auxiliar de librerÅas

procedure g_setup
  set date french
  set alternate off
  set bell off
  set carry off
  set century off
  set console on
  set deleted on
  set deci to 10
  set delimiters off
  set device to screen
  set echo off
  set escape off
  set exact off
  set fields on
  set heading off
  set intensity on
  set print off
  set print to
  set safety off
  set scoreboard off
  set status off
  set talk off
  set unique off
  set exclusive on

* CLOSE FILES
  close databases

* INKEY() VARIABLES
  public K_Ctrl_Brk, K_Ctrl_Hom, K_down, K_End, K_Enter, K_Esc, K_F1, K_F3
  public K_F4, K_F5, K_Home, K_left, K_PgDn, K_PgUp, K_right, K_space, K_up
  K_Ctrl_Brk =  3
  K_Ctrl_Hom = 29
  K_down     = 24
  K_End      = iif(version() = "dBASE IV",  2, 6)
  K_Enter    = 13
  K_Esc      = 27
  K_F1       = 28
  K_F3       = -2
  K_F4       = -3
  K_F5       = -4
  K_Home     = iif(version() = "dBASE IV", 26, 1)
  K_left     = 19
  K_PgUp     = 18
  K_PgDn     =  3
  K_right    =  4
  K_space    = 32
  K_up       =  5

* CURSOR CONTROL
  public set_cursor
  set_cursor = (version() = 'dBASE IV' .or. version() = 'FoxPro' .or. version() = "Arago")

* HELP
  public edit_help
  edit_help = .T.     && change edit_help to .F. to "lock" the help screens
```

```
* ERROR TRAPPING
*     on error do ERR with error(),message()

return

procedure g_info

parameters mess_text

  @ 0,0 clear to 0,79
  @ 0,0 say mess_text + "..."

return

procedure g_alert

parameters mess_text

  if set_cursor
*   set cursor off
  endif
  ?? chr(7)                         && beep the speaker
  @ 0,0 clear to 0,79
  @ 0,0 say mess_text + "..."
  set console off
  wait ''
  set console on
  if set_cursor
*   set cursor on
  endif
  @ 0,0 clear to 0,79
return

procedure g_okay

parameters question, answer

  private is_yes, done
  @ 23,0 clear to 23,79
  is_yes = answer

  * loop around until they choose an option
  done = .F.
  do while .T.
    @ 23,0 say question + "  Si   No"
    if is_yes
      @ 23,len(question) + 2 say "Si"
    else
      @ 23,len(question) + 7 say "No"
    endif

    if done
      exit
    endif
    lastkey = 0
    do while lastkey = 0
      lastkey = inkey()
    enddo
    do case
```

```
        case lastkey = K_Enter
          exit
        case lastkey = K_Esc
          * use the default choice
          is_yes = answer
          exit
        case lastkey = K_left .or. lastkey = K_right  .or. lastkey = K_up .or. lastkey = K_down
          * left, right, up, or down arrow
          is_yes = .not. is_yes
        case upper(chr(lastkey)) $ 'SN'
          is_yes = (upper(chr(lastkey)) = 'S')
          done = .T.
        otherwise
          * not a valid key; so loop around again until they get it right
      endcase
    enddo
    answer = is_yes
    @ 23,0 clear to 23,79
return

procedure prtitemp

PARAMETER XPROG,XTIT1,XTIT2
CLEAR
@ 1,0 TO 22,79 DOUBLE
@ 2,03 SAY XPROG
XLONGTIT=LEN(TRIM(XTIT1))
@ 2,(80-(XLONGTIT))/2 SAY XTIT1
XLONGTIT=LEN(TRIM(XTIT2))
@ 03,(80-(XLONGTIT))/2 SAY XTIT2
@ 4,1 TO 4,78 DOUBLE
DO PRFECHA
RETURN XTIT1

procedure prfecha

@ 2,67 SAY TIME()
@ 3,67 SAY DATE()
RETURN
```

BIBLIOGRAFIA

1. Bowers, N.R., et al., *Actuarial Mathematics*. Itasca: Society of Actuaries, 1984.

2. Drolette, M.E., *The Effect of Incomplete Follow-up, Biometrics*, 1975.

3. Elandt-Johnson, R.C., and N.L. Johnson, *Survival Models and Data Analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1980.

4. Elphistone, M. D. W., *Sumation and Some Other Methods of Graduation: The Fundations of Theory*. T.F.A., 1951.

5. Jordan, C.W., *Life Contingencies*. Chicago: Society of Actuaries, 1967.

6. Heubbek, K., *"Turnover as an Actuarial Asumption on its own"*. Transactions of the Society of Actuaries, II, 1988.

7. Kolman, B., *Elementary Linear Algebra*. New York, 1977.

8. Lámbarri, V.G. *Comparación entre las Técnicas de Graduación de Whittaker-Henderson y la Graduación Bayesiana, con Ejemplificaciones*. Tesis, Enep-Acatlán, 1995.

9. Lee, E.T., *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Belmont: Lifetime Learning Publications, 1980.

10. London, D., *Graduation: The Revision of Estimates*. Winsted: ACTEX Publications, Inc., 1985.

11. London, D., *Survival Models and Their Estimation*. Winsted: ACTEX Publications, Inc., 1988.

12. McGill, D.M., *Fundamentals of Private Pensions*. Homewood, ill: Published for the Pension Research Council Wharton School, University of Pennsylvania.

13. Miller, M.D., *Elements of Graduation*. New York: Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries, 1946.

14. Miller, R.G., *Survival Analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1981.

15. Seal, H.L., *The Estimation of Mortality and Other Decremental Probabilities*" Skand. Aktuar., 1954.