00384

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

PROBLEMAS INVERSOS
Y EL PRINCIPIO DE
CAUSALIDAD EFICIENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

JOSE ROBERTO MERCADO ESCALANTE

Director de Tesis: **Dr. FERNANDO BRAMBILA PAZ**

1997

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

Abstract

We announce and develop the conjecture "Efficient Causal Principle".
As a consequence of this conjecture we arrive to the Saddle Point Theorem and to the Optimizer Theorem. We mention some applications.

Using the Principle we connect to the boundary conditions of an hyperbolic n-dimensional problem and we find the General Integral Equation of the hyperbolic inverse problems.

We also formulate a general theorem M-B # 2 that involve the 11 equivalent conditions of the Hann-Banach Theorem.

The Radon Transform is used to simplify the inverse problem of the n-dimensional wave propagator.

We also attack the electric inverse problem as elliptic inverse problems.

It is announced, at theorem M-B # 1, a solution to a parabolic inverse problem, the fractal characterization of the diffusion coefficient in a Fourier space.

Finally we attack the inverse problem for drift coefficient of an stochastic differential equation.

PROBLEMAS INVERSOS Y EL PRINCIPIO DE CAUSALIDAD EFICIENTE

J. Roberto Mercado E.
jrme@hp.fciencias.unam.mx
rmercado@tlaloc.imta.mx

Junio 1996 [1]

[1] Director de Tesis: **Dr. Fernando Brambila Paz.**

Contenido

PARTE I

RECONOCIMIENTOS

Mi ofrenda es para todas las mujeres que me han amado.

Mis agradecimientos por el apoyo recibido:

al **IMTA**- Coordinación de Tecnología de Riego y Drenaje Agrícola,

a la **BUAP**- Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,

a la **UNAM**- Facultad de Ciencias.

Mis agradecimientos por la orientación y ayuda al:

Dr. Fernando Brambila Paz,

Dr. Carlos Fuentes R.

M. C. Salvador Garcia Olivera.

Pero sobre todo mi gratitud tan monumental como los Andes para:

Gladys y Rosita.

PARTE II
TEMAS

1. INTRODUCCION

En este trabajo se presenta y enuncia el principio que denominamos *Principio de Causalidad Eficiente.* y su interrelación con los *Problemas Inversos*; así como las principales consecuencias que de ellos se derivan.

Dicho principio sintetiza la más amplia y variada experiencia en la producción de resultados esenciales para la descripción y análisis de los muy diversos fenómenos y leyes de la naturaleza; aspiramos a completar su enunciado para incluir resultados algebraicos y geométricos, además de los analíticos que aquí se muestran.

El trabajo con las propiedades de los conos en el Análisis Funcional y en especial con el lema de separación de Dubovitskii-Milyutin y la generalización del concepto de funcional de Lagrange, nos condujo a intuir y buscar la existencia de un principio causal general a partir del cual se pudieran obtener resultados torales para las leyes naturales. Si consideramos que ésta se concreta y realiza en el Teorema del Punto Silla de Hurwicz, inmediatamente se puede saltar al principio buscado y enunciarlo. [54], [39].

El nombre lo hemos tomado de Max Planck, quien consideraba que la "causa efficiens" opera desde situaciones presentes hacia las futuras y hace que éstas aparezcan determinadas por las primeras y la "causa finallis" la cual, por el contrario, hace que las últimas sean las premisas desde las cuales puede deducirse la posible evolución de los procesos que conducen a ellas. [87].

Siguiendo a Engl y en vista de que en la regularización de Tijonov se sustituye un operador no invertible por una familia de operadores invertibles y muy cercanos al original, lo que permite resolver un problema directo. De otra parte, con la discretización el operador original se reemplaza por una colección cercana y numerable de operadores, cuya inversión resuelve también un problema directo aproximado. Por tanto, se quiere establecer la relación entre la discretización y la regularización de Tijonov. [62], [27].

Para ello, se estudia en los espacios de energía, un operador autoadjunto y positivo, se define una forma bilineal y se obtiene la versión débil o variacional del operador. Luego se considera la proyección sobre los subespacios finito-dimensionales, se define una funcional de Lagrange y se demuestra que la solución del método del elemento finito es la mejor aproximación; finalmente, se demuestra que la regularización de Tijonov es una generalización del método del elemento finito en espacios de Hilbert.

Muchos problemas inversos pueden ser convertidos a un problema inverso para el propagador de ondas u operador de D'Alambert. Este se puede formular como una transformación del operador no perturbado a uno perturbado, la que hemos denominado Kirchhoff-Liouville, posteriormente se transforma este operador perturbado hasta convertirlo en un operador integral, del tipo perturbación compacta de la unidad, el cual puede invertirse y cuya solución nos produce lo que llamamos la *sombra*; finalmente, con el operador derivada sobre la sombra se halla la perturbación buscada. [53], [9], [8], [15], [18], [20], [29], [34], [64].

Pero debemos precisar que *es* con el principio de causalidad eficiente, que se sustentan las condiciones de frontera apropiadas para que el operador de D'Alambert perturbado devenga un operador integral, con lo que obtenemos lo que hemos llamado la *Ecuación Integral General.*

En forma más explícita, se muestra que el principio de causalidad eficiente, a través de la ecuación de continuidad, determina las condiciones de frontera del operador propagador de ondas, cuya solución nos conduce a la ecuación integral general de los problemas inversos. [58], [9], [37].

Se plantea un problema hiperbólico mixto para la amplitud de onda del campo u y el potencial q, luego se consideran los dos problemas de contorno de los campos característicos -que llamamos izquierdo y derecho- los cuales resultan linealmente independientes y con soporte en el cono no-causal; se expresa el campo u como combinación lineal de los campos característicos y se determinan sus coeficientes de las relaciones que se infieren a partir de las condiciones de contorno de los campos característicos y de su expansión como onda viajera y sombra. [58].

Nuevamente se usa esta expansión y se obtiene en el interior del cono no-causal la ecuación buscada, si se fijan formas particulares de las condiciones de contorno se halla la ecuación de Marchenko y luego, la de Gelfand-Levitan lineal, Krein y Gopinath-Sondhi.

En otros términos, el principio de causalidad eficiente determina el núcleo del operador integral, cuya inversión resuelve un problema directo y, con la acción de la derivada sobre esta solución, se resuelve el problema inverso.

Dentro de la corriente actual y mundial de vincular las matemáticas con problemas del sector productivo, en este trabajo se presenta un estudio explorador no destructivo de dispositivos eléctricos, tales como los transformadores, para establecer su estado de operación y en consecuencia decidir su permanencia o retiro del servicio.

Orientados por del principio de causalidad eficiente y con el uso de formas diferenciales, se define un programa variacional que conduce a establecer las conocidas leyes del campo electromagnético; luego, centrando el interés en la divergencia del campo del desplazamiento eléctrico, se formula el problema inverso recurriendo a las coordenadas cilíndricas y a las simetrías del fenómeno. [53], [1].

Posteriormente se usa la transformada de Laplace, su analiticidad y la expansión en serie para proponer una ecuación cuya solución permite determinar el coeficiente de la permitividad eléctrica a partir de un escenario de mediciones realizadas en el exterior de los dispositivos.

Se obtiene una expresión explícita para el coeficiente de interés con validez local. Pueden extenderse en forma inmediata los resultados a otras áreas importantes, como es el caso de los fenómenos magnéticos y difusivos.

En el vínculo citado se estudian también las propiedades del suelo cultivable en el contexto de los Problemas Inversos. Con este propósito se deducen las ecuaciones que gobiernan el avance del agua en un canal de riego en coordenadas intrínsecas, el fenómeno de la infiltración del agua en un medio poroso como el suelo, y se precisa la conexión entre el tirante en la superficie y la condición de contorno para la infiltración. [32], [57], [50].

Se estudia de manera particular el fenómeno de la absorción del agua, es decir cuando la infiltración ocurre en ausencia de gradientes gravitacionales, y se plantean tres tipos de problemas inversos: i) inyectivo, ii) cuasilineal-inyectivo, y iii) lineal.

El primero, así llamado porque se asume que la función humedad es inyectiva lo que permite definir una función inversa izquierda, se usa el teorema de la función inversa y la transformación de Boltzmann.

En el segundo caso se supone que el operador depende de la función humedad y por tanto resulta cuasilineal, ahora el coeficiente de difusividad compuesto con la humedad resulta en un nuevo coeficiente no lineal y dependiente del tiempo, se plantea el problema inverso, se hace una translación en la variable temporal, se aplica la transformada de Laplace y sus teoremas de convolución, transformación de la integral, derivada de la transformada y de corrimiento.Se obtiene una función analítica en el semiplano bordeado por su abscisa de convergencia, la cual puede expandirse en una serie de Taylor, ésta última a su vez puede invertirse.

Finalmente se establece la relación entre la difusividad y la función de los datos. [56].

El tercero lo llamamos lineal porque se asume que el coeficiente de transmisividad no depende de la variable a integrar y entonces el operador resulta lineal, se aplica la transformación de Kirchhoff para obtener una ecuación de difusión standard, también la transformación de Laplace y el desarrollo en serie de Taylor. [56], [73].

El resultado de los problemas lineal y cuasilineal es una ecuación integral de Fredholm de primera especie que tiene a la difusividad hidráulica como argumento, a la función de los datos como fuente o inhomogeneidad, y por su núcleo es una integral de Laplace; para invertir este operador se tienen por lo menos tres opciones: primera, la regularización de Tijonov (Ap. 1); segunda, la transformación de la integral de Laplace en una serie de Taylor seguida de su inversión; tercera, el método de Post y Widder, basado en la analiticidad que produce la transformada de Laplace, el teorema de la convergencia monótona y las sucesiones de Dirac.

Para el desarrollo de ésta última, se usa análisis no-standard para caracterizar la estructura y la derivada fractal, y se demuestra la naturaleza fractal del coeficiente de difusión, la resolución resulta determinada por los datos del problema inverso. [63], [65], [68].

Puesto que para ciertos casos de interés el problema resulta "mal planteado" (ill-posed), es conveniente introducir el proceso de regularización de Tijonov; a partir del principio de causalidad eficiente en su versión Khun-Tucker se encuentran la solución para datos perturbados y los operadores de Tijonov.

Para la primera opcion citada, con el cálculo operacional y los sistemas singulares para operadores compactos en espacios de Hilbert se obtiene una expansión para las soluciones perturbadas, la cual se aplica a la difusividad hidráulica.

Para hallar el segundo coeficiente del operador de Fokker-Planck, coeficiente de arrastre o convectivo, se plantea lo que hemos denominado *Problema Inverso Estocástico.* Partimos de la definición de los procesos de difusión, su ecuación diferencial, luego su operador asociado llamado el generador infinitesimal de la difusión y este concepto se extiende al de operador característico.

Dado el carácter covariante de las leyes de la naturaleza, se define el coeficiente de difusión como un campo tensorial dos veces contravariante y su expresión local; se define también el coeficiente convectivo como un campo vectorial una vez contravariante y su ley de transformación, luego se define el campo vectorial contravariante de la corriente de probabilidad, finalmente la forma covariante del generador infinitesimal del proceso de difusión resulta ser un operador divergencia covariante. En el caso unidimensional esto conduce a la posibilidad de considerar al coeficiente de difusión como una constante positiva.

Ahora se puede introducir un potencial que conduzca a la única extensión cerrada autoadjunta del operador Fokker-Planck, transformarlo en un operador de Schrödinger y formar una ecuación de Ricatti, cuya solución nos resuelve el problema inverso. [67], [72].

Para completar nuestra presentación en el Apéndice 1 se abunda en el tema de la regularización, se define el inverso generalizado de Moore-Penrose, se utilizan los Teoremas de Norma Mínima y de la Proyección de los espacios de Hilbert para establecer la unicidad de la solución de mejor aproximación que viene dada por el inverso generalizado para datos exactos, se establecen las cotas para la distancia entre las soluciones perturbadas y el inverso generalizado para concluir que el parámetro de regularización debe tender a cero más lentamente que el cuadrado del error en los datos. [27], [36], [81], [6], [35].

En el Apéndice 2, se revisan algunos aspectos del método de Scattering inverso en el dominio del tiempo. Se inicia considerando el método de propagación de singularidades, para obtener la ecuación de transporte y para su aplicación a la función de influencia causal, que produce su expansión en pulso viajero agudo concentrado más la sombra, y la expansión en serie de la propia sombra en términos de las distribuciones de Heaviside y sus sucesivas antiderivadas; ahora es posible de la ecuación de transporte obtener el potencial de la derivada de la sombra .

Posteriormente se define la función de Riemann, se obtiene su expansión como ondas viajeras más sombra y su caracterización como solución de un problema de contorno hiperbólico con condiciones de Cauchy, para finalmente representarla como un operador propagador de las condiciones iniciales en el espacio-tiempo.

A continuación se define la función de influencia no-causal a partir de su expansión como ondas viajeras más sombra, se obtienen las condiciones de contorno para la sombra y nuevamente se halla el potencial de la derivada de la sombra.

Ahora, propagando los datos iniciales, estudiamos la transformada Povzner-Levitan inversa que, como perturbación compacta de la identidad, convierte la condición inicial horizontal en la condición de frontera vertical, y puede usarse para hallar la ecuación Gelfand-Levitan no-lineal. Luego, convolucionando la función de influencia no-causal con la condición de frontera, se obtiene la transformada inversa también como perturbación compacta de la identidad.

Posteriormente se estudia el Teorema de Gelfand-Levitan, que permite obtener el potencial en un operador de Schrödinger, a partir de su función espectral. Finalmente, se esboza el recíproco de este importante teorema. [89], [4], [48].

En el Apéndice 3 se definen las soluciones y funciones Jost y se obtienen sus representaciones integrales, basados en su independencia lineal se forman las combinaciones lineales entre ellas y sus conjugadas complejas, dando lugar a la definición de los respectivos coeficientes de reflexión y transmisión, a través de los wronskianos de las soluciones Jost; de las cuales resultan las relaciones entre los coeficientes, que expresan ciertas propiedades físicas del sistema.

Usando las representaciones integrales de las funciones Jost es posible obtener las respectivas representaciones para los coeficientes, que nos permiten estudiar sus comportamientos asintóticos. Con estos coeficientes se conforma la matriz de scattering o dispersión.

Para potenciales integrables de orden de crecimiento cero, se extiende el coeficiente de transmisión analíticamente al semiplano superior perforado en el origen y se encuentra que tiene sus polos simples en el semieje imaginario positivo y en cantidad finita. Por las relaciones que se establecen entre sus coeficientes, la matriz de dispersión tiene sólo un coeficiente independiente y por las relaciones Kramers-Krönig, este coeficiente determina la matriz.

Como corolario se obtiene el Teorema de Levinson sobre el número de estados ligados. Para potenciales integrables de primer orden de crecimiento, se puede hallar la resolución de la identidad o la familia espectral de proyectores de su correspondiente operador de Schrödinger.

La condición necesaria y suficiente para que los valores propios sean integrales del movimiento es que el potencial evolucione en el tiempo como solución de la ecuación de Korteweg-de Vries, luego se puede estudiar la evolución de los datos de dispersión, definir la transformada espectral y el ciclo esencial del método del Scattering inverso para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales. [5], [40], [47], [34].

Según el Teorema de Paley-Wiener, las funciones cuadrado integrables a lo largo del eje real pueden representarse como transformadas de Fourier de cierta función cuadrado integrable en el semieje real; éste es el caso, para la diferencia entre las funciones Jost y la unidad, cuando los potenciales son de primer orden de crecimiento. El núcleo de esta representación integral se le llama Transformada Levin, y a una translación se le conoce como Transformada Levin de la solución Jost o la sombra.

De la ecuación diferencial que satisface la función Jost se establece la correspondiente ecuación diferencial para la sombra y la obtención del potencial a partir de la derivada de la sombra. Este proceso se puede generalizar refiriéndolo, no al potencial nulo del caso libre de dispersión, sino a algún potencial conocido y el resultado se conoce como Transformada Levin Generalizada.

La transformada Levin generalizada, la resolución de la identidad para operadores con potenciales de segundo orden de crecimiento, y la independencia lineal de las soluciones Jost, permiten obtener una ecuación integral que conduce a la ecuación de Marchenko. Por tanto, la transformada espectral determina el núcleo y fuente de la ecuación de Marchenko, y la solución de ésta determina el potencial buscado, éste es el ciclo esencial del método del Scattering inverso. [52], [10].

En el Apéndice 4 se considera el operador de Schrödinger en el semieje real positivo, partiendo el semieje en una colección de intervalos cerrados y resolviendo en ellos el problema de valores propios se halla la colección de las funciones propias y las constantes de normalización. Con estas constantes se define una colección de funciones de variación acotada y de acuerdo con el teorema de selección de Helly se extrae una subsucesión convergente a una función también de variación acotada.

De otra parte, con las funciones propias se define una transformada de Fourier generalizada para funciones de cuadrado integrable en cada intervalo cerrado, se obtiene la identidad de Parseval y el teorema de expansión o de inversión, éste permite definir la familia de proyectores, hallar la función espectral y la resolución de la identidad.

Se define el operador desplazamiento generalizado y se destaca su propiedad de simetría, que permite intercambiar las variables espaciales y temporales en el operador de Schrödinger, para obtener un operador propagador de ondas. Con la función de Riemann se halla la solución al problema de Goursat, de la cual se obtiene finalmente la transformada Povzner-Levitan, cuyo núcleo es la sombra no-causal.

Con la transformada Povzner-Levitan en el semieje, la resolución de la identidad y la descomposición de la función espectral, se halla la ecuación Gelfand-Levitan lineal, la ecuación diferencial para la sombra y su conocida relación con el potencial. Finalmente, para el problema inverso, se da la ecuación integral de Gelfand-Levitan y el operador de Schrödinger y se hallan el potencial en términos de la sombra y las condiciones de frontera. [24], [38], [42], [66].

Estimamos que nuestro aporte consiste:

En el capítulo 2:

1. Enunciar el Principio de Causalidad Eficiente,
2. Concebir la realización de este principio como Teorema del Punto Silla,
3. Delinear una demostración del teorema anterior,
4. Formular el Teorema M-B # 2[1], que de una manera nueva y global, renormaliza los once teoremas equivalentes al Teorema de Hahn-Banach, considerado ampliamente uno de los pilares del Análisis Funcional.
5. Formular una interpretación Lagrangiana al Teorema de Hahn-Banach,
6. Demostrar la relación entre la regularización de Tijonov y el Método del Elemento Finito de Galerkin.

[1] El nombre corresponde a las siglas de los autores: Mercado y Brambila.

En el capítulo 3:

1. Obtener la Ecuación Integral General basándonos en un problema hiperbólico general y en su descomposición a través de los campos característicos.
2. Dar sustento a las condiciones de frontera por medio de la Ecuación de Continuidad y de acuerdo con el Principio de Causalidad Eficiente.
3. Extender los resultados para incluir la ecuación de Krein y la de Gopinah-Sondhi.

En el capítulo 4:

1. Reducir el problema inverso para el propagador de ondas de dimensión n a unidimensional, al escoger un hiperplano apropiado para aplicar la transformada de Radon.
2. Concebir la solución del problema inverso como una transformación de operadores. En particular para el problema del propagador de ondas, resolverlo como la transformación de un operador no-perturbado en uno perturbado, para posteriormente hallar la perturbación la cual contiene el coeficiente que se busca.
3. Con la orientación del principio de causalidad eficiente definir una funcional lagrangiana en base a formas diferenciales para obtener las ecuaciones de Maxwell.
4. Plantear y resolver el problema inverso de tipo eléctrico.

En el capítulo 5:

1. La formulación del Teorema M-B #1
2. La solución del problema inverso cuasilineal para el coeficiente de difusión, como segundo coeficiente del operador de Fokker-Planck.
3. La caracterización fractal del coeficiente de difusión en el espacio de Fourier.
4. La formulación en coordenadas intrínsecas de los procesos de avance e infiltración en irrigación.
5. Obtener los operadores de regularización de Tijonov del principio de causalidad eficiente, a través de la definición de una funcional lagrangiana apropiada.

En el capítulo 6:

- Plantear y resolver el problema inverso para el coeficiente de arrastre de una ecuación diferencial estocástica. En el método se recurre al operador Fokker-Planck.

Los nexos entre los temas expuestos y las referencias seguidas son:

En el capítulo 1:

Dubovitskii A. Ja. and Milyutin A. A. [25], Girsanov I. V. [35], Holmes R. B. [39], Mercado E. J. R., Brambila P. F., Fuentes R. C. [54], [55], Newton R. G. [64], Yougrau W., Mandelstram S. [87], Mori, M. [62].

En el capítulo 2:

Brambila P. F. [7], Ghosh Roy D. N. [34], Habashy T. M. [37], .Chadan K., Sabatier P. C. [14], Bruckstein A. M., Levy B.C., Kailath [8], Mercado E. J. R. [58], Suzuki T. [78].

En el capítulo 3:

Torres del C. G. F. [82], Coen S. [18], Abraham. R. [1], Deans S. R. [21], Mercado E. J. R., Brambila P. F., Fuentes R. C. [53], Kobe D. [45], Rakesh [70], Sylvester J., Gunther U. [79], Wilcox C. H. [86].

En el capítulo 4:

Fuentes R. C. [32], Fujita H. [33], Jury W., Gardner W. R., Gardner W. H. [41], Mahmood y Yevjevich [50], Mercado E. J. R., Fuentes R. C, Brambila P. F. [56], [57], Romanov V. G. [73], Chorin A. J., Marsden J. E. [17], Paley R.E.A., Wiener N. [68], Notale L. [65].

En el capítulo 5:

Risken H. [72], Oksendal B. [67].

En el Apéndice 1:

Engl H. W. [27], Tijonov A. N. [81], Glasko V. B [36]. Banks H. T., Kunish K. [6].

En el Apéndice 2:

Zauderer E. [89], Burridge R. [9], Calogero F. Degasperis A. [10], Deift P., Trubowitz E. [22], Drazin P. G. [24], Ghosh Roy Dilip N. [34], Mercado E. J. R. [58], Santosa F., Schwetlick H. [75].

En el Apéndice 3:

Eckhaus W., van Harten A. [26], Ghosh Roy Dilip N. [34], Aktosun T. [4], Levinson N. [47], Paley R.E.A., Wiener N. [68], Marchenko V. A. [52], Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E. [66].

En el Apéndice 4:

Brambila P. F [7], Levitan B. M., Gasymov M. G. [48], Ghosh Roy Dilip N. [34], Aktosun T. [4], Symes W. [80].

2. CAPITULO 2

2.1 PRINCIPIO DE CAUSALIDAD EFICIENTE

El objetivo principal de este capítulo es enunciar *el Principio de Causalidad Eficiente* y obtener su realización como Teorema del Punto Silla. Posteriormente se ilustra su eficacia obteniendo la ecuación de continuidad, los resultados esenciales del Método del Elemento Finito de Galerkin y su relación con la regularización de Tijonov; todos ellos de especial importancia en muy diversas aplicaciones.

Para iniciar, se recuerda que en la mecánica [1] cuando se trata de fuerzas conservativas se define una funcional llamada Lagrangiano definida en el haz tangente TM de la variedad del espacio de configuración M, esta funcional combina en forma aditiva una funcional convexa llamada energía cinética T con una lineal denominada energía potencial V definida en la variedad M

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{L,T} & I\!R \\ \tau \downarrow & & \\ M & \xrightarrow{V} & I\!R \end{array}$$

donde τ es la proyección C^∞ del haz vectorial sobre su sección cero: la variedad M, en tanto que la funcional L se define por:

$$L = T - \tau^* V$$

se generaliza esta funcional a una que se define en el producto cartesiano de un conjunto convexo de un espacio vectorial, con el cono dual positivo de otro espacio vectorial topológico, la cual será llamada *funcional de Lagrange*. Con la orientación del principio de causalidad eficiente, se define un programa variacional apropiado y se llega a la existencia de un punto silla de la funcional de Lagrange [39].

En la sección 2 se enuncia el Teorema de Hahn-Banach de acuerdo a nuestra formulación lagrangiana [54]. Luego en la sección 3 se enuncia y demuestra el teorema del punto silla, tomando como hipótesis el teorema anterior [54].

En la sección 4 se demuestra la condición de Khun-Tucker para la existencia de extremo condicional [35]. Después se definen los espacios de energía, se obtiene la ecuación de continuidad o de conservación de la corriente de probabilidad, la cual es el contenido de la ecuación Fokker-Planck; a continuación se revisan ideas muy generales sobre el método del elemento finito y se lo relaciona con la regularización de Tijonov.

En la subsección (4.1.2) se aplicará este resultado para obtener la condición de extremo para una funcional integral de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de Maxwell, entre muchas otras posibilidades, dentro de las cuales se encuentran por supuesto, las ecuaciones de Lagrange de la Mecánica [54].

Finalmente es posible demostrar el teorema de Hahn-Banach a partir del teorema del Punto Silla, con lo que se puede obtener su mutua equivalencia [39].

En el presente capítulo estimamos que nuestro aporte consiste en:

1. Enunciar el Principio de Causalidad Eficiente,

2. Concebir la realización de este principio como Teorema del Punto Silla,
3. Delinear una demostración del teorema anterior,
4. Formular el Teorema M-B # 2 [1], que de una manera nueva y global, renormaliza los once teoremas equivalentes al Teorema de Hahn-Banach, considerado ampliamente uno de los pilares del Análisis Funcional.
5. Formular una interpretación Lagrangiana al Teorema de Hahn-Banach,
6. Demostrar la relación entre la regularización de Tijonov y el Método del Elemento Finito de Galerkin.

2.1.1 PRINCIPIO DE CAUSALIDAD EFICIENTE

Al observar que los más diversos e importantes fenómenos de la naturaleza se obtienen de alguna condición extremal, algunos de maximalidad, otros minimalidad o bien de estacionareidad, consideramos con criterio filosófico natural que puede formularse la siguiente conjetura:

> **Las leyes de la naturaleza devienen efecto de una causa que se realiza en forma eficiente.**
> **En consecuencia las podemos obtener, entre otras, como solución de un programa variacional definido por una funcional lagrangiana apropiada.**

Es de anotar que en este principio se incluyen los fenómenos no lineales a través de la aplicación Dirichlet-Neumann definida en la subsección (4.1.2) y la conocida caracterización de las funcionales convexas semicontinuas inferiormente como supremo de funcionales afines continuas [54].

Aplicaremos este principio para obtener el Teorema del Punto Silla a partir del Teorema de Hahn-Banach, el cual enunciamos como existencia de la extensión positiva de una funcional lagrangiana.

Análogamente, al definir funcionales lagrangianas apropiadas podemos obtener otros nueve teoremas importantes del Análisis Funcional que resultan equivalentes al Teorema de Hahn-Banach.

2.1.2 TEOREMA M-B # 2

La Funcional de Lagrange es un elaborado objeto matemático en la cual se consideran los siguientes elementos:

[1] El nombre corresponde a las siglas de sus autores: Mercado y Brambila.

A : un subconjunto convexo del espacio vectorial X,
Q^* : el dual del cono positivo del espacio vectorial topológico Y,
f : una funcional convexa definida en el subconjunto A,
S : una aplicación convexa con dominio en A y recorrido en Y,

y puede considerarse el caso en donde X sea un espacio vectorial topológico.
La Funcional de Lagrange L se define por:

$$\begin{array}{lcl} A \times Q^* \subset X \times Y^* & \xrightarrow{L} & \mathbb{R} \\ (a, \psi) & \longmapsto & L(a, \psi) = f(a) + \langle S(a), \psi \rangle \end{array}$$

Por su imagen geométrica decimos que una *dirección* esta dada por una funcional lineal, decimos que un sistema de desigualdades con solución es *maximal* cuando al agregarle otra desigualdad el sistema final resulta sin solución, y llamamos *positivos* a los números no-negativos.
Nuestra afirmación es la siguiente:

Bajo la condición de un sistema de desigualdades maximal, existe alguna dirección a lo largo de la cual la Funcional de Lagrange es positiva.

Visto en el marco de las propiedades de la Funcional de Lagrange, nuestro teorema renormaliza los siguientes once teoremas del Análisis Funcional [39], en donde pueden encontrarse diferentes condiciones que llamamos "apropiadas", en el sentido de que en ellos, se cumple la condición del sistema de desigualdades maximal.
Surge por tanto la pregunta ¿Se podrán especificar de otras formas diferentes las llamadas condiciones "apropiadas"?, de ser así ¿cúal sería otra forma?.
1. Si se cumplen las dos desigualdades siguientes:

$$^{\exists}a_0 \in A : -S(a_0) \in intQ$$

$$^{\forall}a \in A : -S(a) \in Q, \quad f(a) - f(p) \geq 0,$$

la última de las cuales equivale a decir que el punto $p \in A$ resuelve el programa convexo:

$$\min \{ f(a) : -S(a) \in Q \} = f(p).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la funcional y la aplicación convexa satisfacen:

$$f(p) = 0, \qquad S(p) = 0.$$

Entonces existe alguna funcional $\varphi \in Q^*$ tal que:

$$L(a, \varphi) \geq 0, \qquad ^{\forall}a \in A.$$

Este resultado se conoce como *Teorema del Punto Silla de Hurwicz*, porque el par (p, φ) puede hacerse un punto silla de la funcional de Lagrange.
2. Si se cumplen las dos desigualdades:

$$^{\exists}a_0 \in A : -S(a_0) \in intQ$$

y

$$^{\forall}a \in A : -S(a) \in Q, \quad f(a) \geq 0.$$

Entonces puede asegurarse la existencia de alguna funcional $\varphi \in Q^*$ tal que:

$$L(a,\varphi) \geq 0, \qquad \forall a \in A.$$

Esta conclusión se conoce como *Teorema de Farkas-Minkowski*, por un resultado clásico análogo en matrices.

3. Si se satisfacen las desigualdades

$$\exists a_0 \in A : \qquad -T(a) \in intQ$$

$$\nexists a_1 \in A : \quad (-T(a_1), -S(a_1)) \quad \in (intQ, intR),$$

en donde T es otra aplicación convexa con dominio en X y recorrido en Y, Z es otro espacio vectorial topológico con cono positivo R y S la aplicación convexa con dominio en X y recorrido en Z.

$$X_{,P} \xrightarrow{T} Y_{,Q} \qquad X_{,P} \xrightarrow{S} Z_{,R}$$

Entonces existen las funcionales y se satisface la condición de positividad de la funcional de Lagrange:

$$\begin{array}{lllll} \exists \psi \in Q^*, & \exists \varphi \in R^*, & \psi \neq 0, & & \\ L(a,\varphi,\psi) = & (\psi \circ T)(a) + & \langle S(a), \varphi \rangle & \geq 0 & \forall a \in A. \end{array}$$

Resultado conocido como *Teorema de Tuy.*

4. Si se cumple la condición débil

$$\exists (a_\alpha)_\alpha \subset A \quad : \quad -S(a_\alpha) \in intQ,$$

en donde $(a_\alpha)_\alpha$ es una red en el conjunto A, con conjunto dirigido D,entonces, existe alguna funcional φ a largo de la cual la funcional de Lagrange es positiva:

$$\exists \varphi \in Q^*, \quad L(a,\varphi) = \quad g(a) + \langle S(a), \varphi \rangle \quad \geq \quad 0 \qquad \forall a \in A,$$

en donde la funcional convexa es:

$$g(a) = \quad f(a) - \gamma, \qquad \exists \gamma : \quad -\infty < \gamma < v',$$

y v' es el valor débil que se define sobre las soluciones débiles S.D. por:

$$v' \quad = \quad \inf_{S.D.} \liminf_{\alpha \in D} f(a_\alpha)$$

mientras que el valor dual se define como:

$$v^* = \sup_{\psi \in Q^*} \inf_{a \in A} L(a, \psi).$$

Resultado conocido como *Teorema de Golštein*, porque de la positividad de la funcional de Lagrange se deduce que el valor débil v' no supera el valor dual. En tanto que la desigualdad opuesta se obtiene en forma directa.

5. Sin pérdida de generalidad se asume que:

$$\begin{array}{ll} \exists a_0 \in A : & -S(a_0) = a_0 = 0 \qquad \in \quad cor_Y A \\ & Y = spanA = affA \end{array}$$

como f es convexa, también lo es como función del parámetro escalar s en $f(sx)$. Además es continuamente diferenciable respecto del mismo parámetro, lo cual equivale a que su derivada es monocreciente, y es acotada inferiormente. Por lo tanto, puede concluirse que existe alguna funcional φ llamada *subdiferencial*, tal que:

$$\begin{array}{lcll} {}^{\exists}\varphi \in Y^{*} & : & L(a,\varphi) \geq 0, & {}^{\forall}a \in A, \\ L(a,\varphi) & = & g(a) + \langle S(a), \varphi \rangle & \\ g(a) & = & f(a) - f(0). & \end{array}$$

Éste es el *Teorema de la Subdiferencial*, después de una extensión lineal de φ a todo el espacio X.

6. Se asume, sin pérdida de generalidad, que:

$$\begin{array}{rll} {}^{\exists}a_0 \in A: & -S(a_0) = a_0 = 0 & \in \quad cor_Y A \\ & Y = spanA = affA & \end{array}$$

ahora la funcional convexa es la funcional de Minkowski asociada al conjunto A, y se define por:

$$f(x) = f_A(x) = \inf_{x \in tA} \{t > 0\},$$

la cual satisface

$$\begin{array}{ll} 0 \leq f(x) < \infty, & {}^{\forall}x \in X, \\ 0 < f(a) < \infty, & {}^{\forall}a \in corA, \end{array}$$

entonces si:

$$x_1 \notin cor_Y A, \qquad x_1 \in Y,$$

puede concluirse que

$$\begin{array}{lcll} {}^{\exists}\varphi \in Y^{*} & : & L(a,\varphi) > 0, & {}^{\forall}a \in cor_Y A \\ L(a,\varphi) & = & g(a) + \langle T(a), \varphi \rangle, & \\ g(a) & = & f(a) - f(x_1) & \\ T(a) & = & S(a) - S(x_1). & \end{array}$$

A φ se le conoce como funcional soporte y al resultado como *Teorema del Soporte*. El caso cuando $x_1 \notin Y$ es también válido y más o menos inmediato.

7. Si se asume sin pérdida de generalidad que

$$0 \in corA \qquad 0 \notin B$$

en donde A y B son conjuntos convexos que cumplen

$$corA \cap B = \emptyset,$$

y se toma como funcional la de Minkowski asociada al conjunto A,

$$f_A(x) = \inf_{x \in tA} \{t > 0\},$$

y como espacio Y al mismo X, entonces se concluye que

$${}^{\exists}\varphi \in X^{*} \quad : \quad L(x,\varphi) \geq 0, \qquad {}^{\forall}x \in X.$$

A la funcional φ se le llama funcional separante y al resultado *Teorema de Separación*.

8. Suponemos que se cumple la condición

$$K \cap K_1 = \emptyset,$$

en donde K es un cono convexo abierto con vértice en 0 y K_1 un cono convexo con vértice también en 0.

Sin pérdida de generalidad puede asumirse que

$$0 \in cor K = K$$

y se toma $A = X = Y$, la funcional de Minkowski asociada al cono K, y la aplicación convexa del cambio de signo $S(x) = -x$.

Entonces, se concluye la existencia de alguna funcional φ, a lo largo de la cual la funcional de Lagrange es positiva:

$$\exists\varphi \in K^* \quad : \quad L(k, \varphi) \geq 0, \qquad \forall k \in K.$$

Resultado conocido como *Teorema de Dubovitskii-Milyutin.*

9. Se asume que

$$\begin{aligned} &cor P \neq \emptyset \\ &P \subsetneq X, \end{aligned}$$

en donde P es el cono positivo del espacio X .

Sin pérdida de generalidad puede asumirse que

$$0 \in cor P,$$

se toma como funcional la de Minkowski asociada al cono K , y $A = X = Y$.

Entonces existe alguna funcional φ, a lo largo de la cual la funcional de Lagrange es positiva:

$$\exists\varphi \in P^* \quad : \quad L(x, \varphi) \geq 0, \qquad \forall x \in X.$$

Resultado conocido como *Teorema de Existencia de Funcionales Positivas.*

10. Supongamos que

$$\varphi_1|_{P \cap M} \geq 0,$$

en donde P es el cono positivo del espacio X, M un subespacio de X que intercepta al $cor P$, φ_1 una funcional lineal en M, que es positiva en P. Se define el subespacio $Y = A$, la funcional convexa f con dominio en Y y la aplicación convexa S por

$$\begin{aligned} Y &= span\{P, M\} \\ f(y) &= \inf_{m \geq y : m \in M} \varphi_1(m) \\ S(y) &= -y, \end{aligned}$$

entonces se concluye la existencia de una extensión positiva φ de φ_1 tal que:

$$L(y, \varphi) \geq 0 \qquad \forall y \in Y.$$

Resultado conocido como *Teorema de Krein-Rutman*, después de la extensión lineal de φ al espacio X.

11. Suponemos que se cumple la condición:

$$L_1(m, \varphi_1) \geq 0, \qquad \forall m \in M \qquad \exists\varphi_1 \in M^*$$

en donde M es un subespacio vectorial del espacio X, φ_1 una funcional lineal en M, f la funcional convexa definida en $A = X$, $S(x) = -x$ es la aplicación convexa y L_1 se define por:

$$\begin{aligned} L_1 : M \times M^* &\longrightarrow I\!R \\ L_1(m, \varphi_1) &= f(m) + \langle S(m), \varphi_1 \rangle \end{aligned}$$

entonces existe una extensión positiva

$$\begin{array}{lll} L : X \times X^{*} & \longrightarrow & I\!R \\ L(x, \varphi) & \geq 0 & \\ L(x, \varphi)|_{M \times \{\varphi_1\}} & = L_1 & \forall x \in X \quad \exists \varphi \in X^{*}. \end{array}$$

Resultado conocido como *Teorema de Hahn-Banach.*

No presentaremos aquí demostraciones detalladas de esta secuencia de teoremas, solamente delinearemos una demostración que cierra esta secuencia. Porque estamos interesados en poner en primer plano el Teorema del Punto Silla, en vista de la orientación que le daremos hacia las aplicaciones.

2.1.3 TEOREMA DEL PUNTO SILLA DE HURWICZ

Se enuncia y demuestra el teorema del punto silla en el cual se conjugan una condición de maximalidad de las funcionales lineales, con la de minimalidad en los puntos de un convexo; este resultado es especialmente importante porque puede orientarse en forma directa a las aplicaciones, donde se revela el carácter esencial del principio de causalidad eficiente.

Se denotará por Q el cono positivo de un espacio vectorial topológico Y, por Q^{*} el cono dual positivo y por R el cono positivo de los reales $I\!R$.

Sea X un espacio lineal, A un subconjunto convexo y Y un espacio lineal topológico preordenado con cono positivo Q. Sea el par variacional (A, f) con función objetivo convexa:

$$f : A \longrightarrow I\!R,$$

la aplicación convexa:

$$S : A \longrightarrow Y$$

y el programa:

$$\min\{f(a) : S(a) \leq 0\}.$$

Si p es solución del programa y en el sistema $S(a) < 0, a \in A$ existe algún $a_1 \in A : -S(a_1) \in intQ$:

entonces existe $(p, \varphi) \in A \times Q^{*}$, punto silla de la funcional de Lagrange:

$$L : A \times Q^{*} \longrightarrow I\!R$$
$$L(a, \varphi) = f(a) + \langle S(a), \varphi \rangle,$$

en el sentido:

$$L(p, \psi) \leq L(p, \varphi) \leq L(a, \varphi), \quad \forall (a, \psi) \in A \times Q^{*}.$$

Recíprocamente, si Y es localmente convexo, Q es cerrado en Y, y para algún $p \in A$, existe $\varphi \in Q^{*}$ tal que (p, φ) es punto silla de la funcional lagrangiana L, entonces,

p es solución del programa convexo $\min\{f(a) : S(a) \leq 0\}$.

Se demuestra que la condición del punto silla es necesaria:
Si p es solución del programa entonces:

$$f(p) \leq f(a), \quad \forall a : S(a) \leq 0,$$

como $-S(a_1) \in intQ$, y existe $r_1 \in intR$ se define el subespacio generado por esta pareja de elementos en $Y \times \mathbb{R}$:

$$N = Span\{(-S(a_1), r_1)\}$$
$$F_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F_1(y, r) = F_1(\alpha(-S(a_1), r_1)) = \alpha,$$

evaluando la funcional F_1 en $(-S(a_1), r_1)$ se halla que $F_1 \neq 0$, ya que:

$$F_1((-S(a_1), r_1)) = 1$$

y además que es una funcional positiva en $Q \times R$: $F_1 \in (Q \times R)^* \cap N^*$.

Se define el subespacio de $Y \times \mathbb{R}$ generado por el cono positivo $Q \times R$ y el subespacio N, pero en tanto que el cono $Q \times R$ tiene interior no vacío, éste genera todo el espacio lineal $Y \times \mathbb{R}$, luego:

$$Y \times \mathbb{R} = Span\{Q \times R, N\},$$

se define ahora en $Y \times \mathbb{R}$ una funcional convexa, a partir de la funcional lineal F_1:

$$G(z) = \inf_{z \leq y \in N} F_1(y),$$

como $F_1 \in (Q \times R)^* \cap N^*$ ésta resulta monótona y entonces la funcional lineal esta mayorada por la funcional convexa en el subespacio N:

$$F_1(z) \leq \inf_{z \leq y \in N} F_1(y) = G(z)|_{z \in N},$$
$$F_1 \leq G|_N,$$

se aplica el teorema de Hahn-Banach y se obtiene F una extensión de F_1 desde el subespacio N al espacio $Y \times \mathbb{R}$, manteniéndose la mayoración por G

$$F : Y \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F|_N = F_1$$
$$F \leq G.$$

Pero además la funcional F resulta positiva en el cono $Q \times R$, porque si $(y, r) \in Q \times R$, como $(-S(a_1), r_1) \in int(Q \times R) = cor(Q \times R)$ entonces $\frac{1}{n}(-S(a_1), r_1) \in cor(Q \times R)$, $\forall n \geq 1$, luego si $(y, r) \neq \frac{1}{n}(-S(a_1), r_1)$, existe algún número positivo δ que depende de (y, r), de tal manera que desplazándose un pequeño trayecto alrededor de $(-S(a_1), r_1)$ se mantiene dentro del conjunto convexo $Q \times R$:

$$\frac{1}{n}(-S(a_1), r_1) + \lambda\delta(y, r) \in Q \times R, \quad \forall \lambda \in (-1, 1),$$

ahora dado $\delta > 0$ cualquiera que sea un entero positivo que lo supere - $n > \delta$ - puede escribirse:

$$\frac{(-S(a_1), r_1)}{n} + \lambda\delta(y, r) \in Q \times R, \quad \forall \lambda \in (-1, 1),$$

al fijar $\lambda = \frac{1}{2}$, aplicar la funcional $F|_N = F_1 \in (Q \times R)^*$:

$$\frac{\delta}{2} F(-(y, r)) \leq G(-(y, r)) \leq \frac{F_1(-S(a_1), r_1)}{n}, \quad \exists \delta > 0, \forall n \geq 1,$$

y tomar el límite cuando n tiende a infinito, se encuentra:

$$F \in (Q \times R)^{*},$$

finalmente se tiene que:

$$F \in (Q \times R)^{*} \cap Y^{*}$$
$$F|_{N} = F_1.$$

En el espacio producto $Y \times I\!R$ con cono positivo $Q \times R$ las funcionales se describen por la suma de funcionales laterales $\psi \in Q^{*}$ y $\gamma \in R^{*}$ con $\gamma \geq 0$:

$$F(y,r) = F(y,0) + F(0,r) = \psi(y) + \gamma(r) = \psi(y) + \gamma r,$$

dado que existe algún punto $(-S(a_1), r_1) \in int(Q \times R)$, existe entonces una vecindad de este punto dentro del cono $Q \times R$. Considérese el conjunto convexo, con $g(a) = f(a) - f(p)$:

$$B = \{(y,r) : \exists a \in A : (y - S(a), r - g(a)) \in Q \times R\},$$

este conjunto tiene interior no vacío porque $(0,0) \not\in intB$, y como $(0,0) \in \bar{Q} \times \bar{R}$ entonces existe una red $\left(\frac{y}{n}, \frac{r}{n}\right) \in Q \times R$ que converge a $(0,0)$, luego:

$$\forall (a \in A, n \geq 1) : \left(\left(\frac{y}{n} + S(a)\right) - S(a), \left(\frac{r}{n} + g(a)\right) - g(a)\right) \in Q \times R,$$

entonces se halla que:

$$\forall (a \in A, n \geq 1) : \left(\frac{y}{n} + S(a), \frac{r}{n} + g(a)\right) \in B,$$

luego al evaluar con la funcional F:

$$\forall (a \in A, n \geq 1) : F\left(\frac{y}{n} + S(a), \frac{r}{n} + g(a)\right) \geq 0$$
$$\varphi_1\left(\frac{y}{n} + S(a)\right) + \gamma\left(\frac{r}{n} + g(a)\right) \geq 0,$$

tomar el límite con n:

$$\forall a \in A : \varphi_1(S(a)) + \gamma g(a) \geq 0,$$

dividir por $\gamma > 0$, denotar $\varphi = \frac{1}{\gamma}\varphi_1$ y usar la notación simétrica se encuentra:

$$\forall a \in A : \langle S(a), \varphi \rangle + f(a) - f(p) \geq 0,$$

y dado que $-S(p) \in Q$, finalmente se tiene que:

$$\exists \varphi \in Q^{*} : \quad f(p) + \langle S(p), \varphi \rangle \leq f(p) \leq f(a) + \langle S(a), \varphi \rangle, \quad \forall a \in A;$$

además:

$$\forall \psi \in Q^{*} : \quad f(p) + \langle S(p), \psi \rangle \leq f(p),$$

entonces:

$$\sup_{\psi \in Q^{*}} L(p, \psi) \leq f(p),$$

o bien:

$$\sup_{\psi \in Q^{*}} \langle S(p), \psi \rangle \leq 0;$$

y dado que la funcional cero esta en el cono dual Q^{*}, este supremo se alcanza en ella, y se obtiene:

$$\exists \varphi \in Q^{*} : \quad \langle S(p), \psi \rangle \leq \langle S(p), \varphi \rangle, \quad \forall \psi \in Q^{*},$$

En conclusión se ha logrado el resultado: (p, φ) es un punto silla para la función de Lagrange L, es decir:

$$\exists\,(p, \varphi) \in A \times Q^{*} : \quad L\,(p, \psi) \leq L\,(p, \varphi) \leq L\,(a, \varphi)\,, \quad \forall\,(a, \psi) \in A \times Q^{*}.$$

En base a la diferenciabilidad de las funcionales y a las características de las funcionales en espacios de Hilbert, puede especializarse la condición del punto silla para una funcional soporte de cierto convexo, como lo muestra el siguiente teorema optimizador, el cual desempeña un papel muy importante en muchas de nuestras aplicaciones.

2.1.4 TEOREMA OPTIMIZADOR

Sea ahora X un espacio de Banach, f una funcional convexa diferenciable:

$$f : X \longrightarrow I\!R,$$

S_i una colección de funcionales también diferenciables:

$$S_i : X \longrightarrow I\!R,$$

A_i el conjunto de los argumentos que producen imágenes que no superan el cero bajo S_i, con $i \in \{1, k\}$, A_j los conjuntos de anulación de las funcionales S_j, con $j \in \{k+1, n\}$, S la aplicación convexa definida en la intersección de todos los conjuntos A_i a través de las funcionales S_i y con imágenes en el espacio $I\!R^n$:

$$\begin{gathered} A_i = \{a \in X : S_i(a) \leq 0\} \quad i \in \{1, k\} \\ A_j = \{a \in X : S_j(a) = 0\} \quad j \in \{k+1, n\} \\ S : A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow I\!R^n \\ S\,(a) = (S_i)\,(a) = (S_i\,(a))_i\,. \end{gathered}$$

Sea además el programa variacional:

$$\min\,\{f\,(a) : a \in A,\; S\,(a) \leq 0\}\,,$$

si se asume que el interior de A es no vacío: $intA \neq \emptyset$, y se denota por Q^{*} el cono dual positivo de $I\!R^n$, entonces resulta que:

$$p \in A \text{ es un minimizador} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in I\!R^n \cap Q^{*} \;:\; \lambda|_{I\!R^n} \perp S(p)$$

y que $df_p + \lambda dS_p$ es una funcional soporte para el conjunto A en el punto p:

$$(df_p + \lambda dS_p)\,(p) \leq (df_p + \lambda dS_p)\,(a)\,, \quad \forall a \in A.$$

Si además A es un cono simétrico:

$$df_p(a) + \lambda dS_p(a) = 0, \qquad \forall a \in A. \tag{2.1}$$

De acuerdo con el Teorema del punto silla, se sabe que $p \in A$ es un minimizador, si y sólo si, existe algún $(p, \varphi) \in A \times Q^{*}$ que es punto silla de la funcional de Lagrange:

$$L : A \times Q^{*} \longrightarrow I\!R, \quad L(a, \psi) = f(a) + \langle S(a), \psi \rangle,$$

lo cual significa que se cumple la desigualdad:

$$L(p,\psi) \leq L(p,\varphi) \leq L(a,\varphi), \quad \forall(a,\psi) \in A \times Q^* \ ;$$

como las funcionales $\varphi, \psi \in Q^*$ siendo $Q \subset I\!R^n$, existen $\lambda, y \in Q$ que las definen:

$$\varphi(\cdot) = \langle \cdot, \lambda \rangle$$

$$\psi(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle,$$

así que la función de Lagrange queda:

$$L(a,\psi) = L(a,y) = f(a) + \langle S(a), y \rangle = f(a) + y \cdot S(a)$$

y la condición de punto silla es:- $\forall(a,y) \in A \times Q$ -

$$f(p) + y \cdot S(p) \leq f(p) + \lambda S(p) \leq f(a) + \lambda \cdot S(a),$$

como $p \in A$ y $\lambda \in Q$, entonces $\lambda \cdot S(p) \leq 0$, pero además:

$$f(p) + y \cdot S(p) \leq f(p) + \lambda \cdot S(p), \quad \forall(a,y) \in A \times Q$$

$$\frac{y}{n} \cdot S(p) \leq \lambda \cdot S(p), \quad \forall n \geq 1, \exists y \in Q$$

$$\lambda \cdot S(p) = 0,$$

luego la condición de punto silla se reduce a:

$$f(p) + y \cdot S(p) \leq f(p) \leq f(a) + \lambda \cdot S(a), \quad \forall(a,y) \in A \times Q.$$

Ahora bien, ya que existe $\tilde{a} \in intA$, sea $\varepsilon \in (0,1)$, entonces existe U una vecindad de 0 tal que $\tilde{a} + U \subset A$, luego para todo $a \in \tilde{a} + U$, por la convexidad de A, se obtiene que $a - p$ es una dirección factible para A en el punto p:

$$(1-\varepsilon)p + \varepsilon a = p + \varepsilon(a-p) \in A,$$

de la condición de punto silla:

$$\begin{gathered} f(p) \leq f(p + \varepsilon(a-p)) + \lambda \cdot S(p + \varepsilon(a-p)) \\ \leq f(p) + \lambda \cdot S(p) + df_p(\varepsilon(a-p)) + \lambda \cdot dS_p(\varepsilon(a-p)) + r_p(\varepsilon(a-p)), \end{gathered}$$

luego:

$$0 \leq df_p(a-p) + \lambda \cdot dS_p(a-p) + \frac{r_p(\varepsilon(a-p))}{\varepsilon}$$

$$df_p(p) + \lambda \cdot dS_p(p) \leq df_p(a) + \lambda \cdot dS_p(a),$$

de donde $df_p + \lambda \cdot dS_p$ es una funcional soporte para A en p. Para el caso del cono simétrico, o cuando se suprime la restricción de pertenencia a un conjunto A_0, se obtiene finalmente la condición de Khun-Tucker:

$$df_p + \lambda \cdot dS_p = 0.$$

Se ha obtenido a partir del principio de causalidad eficiente un instrumento supremamente útil en las aplicaciones: La condición de extremo condicional de Khun-Tucker.

2.1.5 LOS ESPACIOS DE ENERGIA

Se definen los espacios de energía a través de una forma bilineal coercitiva. Se define luego una funcional Lagrangiana y en base al principio de causalidad eficiente se obtiene la ecuación de continuidad. En particular se enuncia la ecuación de Fokker-Planck.

De otro lado, en términos de operadores se bosqueja el Método del Elemento Finito de Galerkin y con la orientación del principio de causalidad eficiente se define una funcional lagrangiana para demostrar que la solución de este método puede encontrarse de la regularización de Tijonov.

Sea el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $X = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considérese el problema hiperbólico de Cauchy dado por el propagador de ondas o D'Alambertiano, con datos iniciales en el espacio X:

$$\begin{array}{ll} \square_q^2 u = \left(\partial_t^2 - (\Delta + q)\right) u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = u_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) & t \in \mathbb{R} \\ \dot{u}(x,0) = u_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), & \end{array}$$

donde el potencial q se toma, de acuerdo con $[3, Aceff]$, de la forma:

$$\begin{array}{ll} q(x) = \frac{\varphi(x)}{\|x\|^\beta} & \varphi \in L^s(\mathbb{R}^n) \\ \beta = 2 - \frac{n}{s} & s > n > 2. \end{array}$$

En el espacio producto $X \times X$ se define la forma bilineal

$$\begin{aligned} a(v,w) &= \langle (v_0, v_1), (w_0, w_1) \rangle_a \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left((v_1, w_1) + (\nabla v_0, \nabla w_0) + q(v_0, w_0) \right) dx. \end{aligned}$$

Puede demostrarse la conservación de la energía en el sentido:

$$E_q(t) = E_q(0) \tag{2.2}$$

y definirse la norma energía:

$$E_q(t)(v) = \|v\|_a^2 = a(v,v).$$

Se completa el espacio producto con respecto a la norma energía y se obtiene el espacio de energía H_a. Este es un espacio de Hilbert y la forma bilineal a resulta coercitiva en el sentido de:

$$\begin{array}{ll} \langle u,v \rangle_a = a(u,v), & \|u\|_a = \sqrt{a(u,u)}, \\ a(v,v) \geq \gamma \|v\|_a^2, & \exists \gamma > 0, \forall v \in H_a. \end{array}$$

Además es posible demostrar la equivalencia de los espacios de energía perturbado -($q \neq 0$)-, y no perturbado -($q = 0$)-[3].

ECUACION DE CONTINUIDAD

Sea un campo vectorial diferenciable $X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ en el espacio X, y $L_{\mathbf{X}}$ la derivada de Lie con respecto a dicho campo. Con base en la forma bilineal a se define la funcional lagrangiana L:

$$\begin{aligned} L(u) &= a\left((I - L_{\mathbf{X}}) u, u\right) \\ &= a\left(u - X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u, u\right) \\ &= \langle u,u \rangle_a - \left\langle X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u, u \right\rangle_a, \end{aligned}$$

derivando se tiene:

$$\begin{aligned} dL &= \langle du, u\rangle_a + \langle u, du\rangle_a - \left\langle X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} du, u\right\rangle_a - \left\langle X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k}, du\right\rangle_a \\ &= -\tfrac{\partial}{\partial x^k} \left\langle X^k du, u\right\rangle_a + \left\langle du, u + X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u\right\rangle_a + \left\langle u - X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u, du\right\rangle_a , \end{aligned}$$

el principio de causalidad eficiente, en su forma de condición de extremo incondicional produce:

$$\left\langle du, X^{k*} \frac{\partial}{\partial x^k} u - u \right\rangle_a + \left\langle X^k \frac{\partial}{\partial x^k} u + u, du \right\rangle_a = 0,$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u + u &= 0 \\ X^{k*} &= -X^k, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

combinando estos resultados se halla:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x^k} \left\langle X^k u, u\right\rangle &= \left\langle X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u, u\right\rangle + \left\langle X^k u, \tfrac{\partial}{\partial x^k} u\right\rangle \\ &= \left\langle X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u + u, u - X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} u\right\rangle , \end{aligned}$$

finalmente se obtiene la divergencia nula:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left\langle X^k u, u\right\rangle = 0;$$

si se numera con el índice k desde 0 hasta $n-1$, para relacionar la primera coordenada con el tiempo y el resto con las coordenadas espaciales, y se definen las magnitudes:

$$\begin{aligned} \rho &= \tfrac{1}{c} \left\langle X^0 u, u\right\rangle \\ J^k &= \left\langle X^k u, u\right\rangle , \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

se observa que la divergencia nula es la ecuación de continuidad:

$$div\mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \rho.$$

Análogamente, si T es cualquier operador del grupo que deje invariante las relaciones (2.3) , se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} Tu + Tu &= 0 \\ \tfrac{\partial}{\partial x^k} \left\langle X^k Tu, u\right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

y si T_s es el generador infinitesimal de este operador respecto de algún parámetro, la divergencia nula se traduce en la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left\langle X^k T_s u, u\right\rangle = 0,$$

ahora redefiniendo las magnitudes:

$$\begin{aligned} \rho &= \tfrac{1}{c} \left\langle X^0 T_s u, u\right\rangle \\ J^k &= \left\langle X^k T_s u, u\right\rangle , \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

se obtiene nuevamente la ecuación de continuidad.

En particular, cuando ρ sea la densidad de probabilidad de una variable aleatoria y J la corriente de probabilidad de la misma variable:

$$J(x,t) = \left(b(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} D(x,t) \right) \rho(x,t),$$

la ecuación de continuidad produce la ecuación Fokker-Planck:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho &= -\frac{\partial}{\partial x}J \\ &= L_{FP}\ \rho, \end{aligned}$$

donde el operador Fokker-Planck queda definido por:

$$L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x}b + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D.$$

Este operador juega un papel primordial en todos los procesos de la naturaleza que combinan los procesos difusivos con los convectivos y será retomado en el capítulo (6) para estudiar algunas de sus propiedades.

METODO DEL ELEMENTO FINITO DE GALERKIN

Con el método del elemento finito de Galerkin se resuelve, entre otros, el siguiente problema directo:

Sea Ω una abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, cuya frontera $\partial\Omega$ es una variedad $(n-1)$ −dimensional de clase C^r, $r \geq 1$, (luego en particular en cada punto de la frontera admite, en alguna vecindad, una representación como hipersuperficie de Lipschitz). Sea T un operador autoadjunto positivo, definido en el subespacio X_0 de las condiciones de frontera homogéneas de un espacio de Hilbert X, sea B un operador afín definido en X_0 y ψ una fuente en el dual X_0^*:

$$\begin{aligned} Tu &= \psi \quad \text{en } \Omega, \\ Bu &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Se obtiene la versión débil haciendo el producto interno con cualquier función en el subespacio de las condiciones de frontera X_0:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle \psi, v\rangle,$$

como el operador T es positivo, tiene su raíz cuadrada autoadjunta $\sqrt{T}$ luego:

$$\left\langle \sqrt{T}u, \sqrt{T}v\right\rangle = \langle \psi, v\rangle,$$

entonces se define la forma bilineal:

$$a(u, v) = \left\langle \sqrt{T}u, \sqrt{T}v\right\rangle,$$

para que la versión débil quede:

$$a(u, v) = \langle \psi, v\rangle$$

y obtener su versión proyectada en el subespacio finito-dimensional de las condiciones de frontera:

$$a(u_n, \bar{v}) = \langle \psi, \bar{v}\rangle;$$

se desarrolla u_n con coeficientes a_j y $\bar{v}$ con coeficientes b_k, en términos de las funciones base ϕ_j :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum a_j\phi_j \\ \bar{v} &= \sum b_j\phi_j \end{aligned}$$

se obtiene con $\bar{v} = \phi_j$ de acuerdo al método de Galerkin, el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución determina el vector $\mathbf{a}$ y por tanto la solución aproximada u_n:

$$K\mathbf{a} = \mathbf{\Psi}$$
$$K = \left(\sqrt{T}\phi_i, \sqrt{T}\phi_j\right).$$

En X como espacio de energía H_a se considera la gama de sus subespacios finito-dimensionales, a los cuales, en tanto que subespacios cerrados de un espacio de Hilbert, se les puede aplicar el Teorema de la Proyección para descomponer el espacio total en el subespacio finito-dimensional y su complemento ortogonal; sea K_n el subespacio generado por las ϕ_i de dimensión $n-1$ y P_n la correspondiente proyección sobre él, luego:

$$H_a = K_n \oplus K_n^{\perp}$$
$$P_n : H_a \longrightarrow K_n$$
$$K_n = span\left(\phi_i\right),$$

si u es la solución exacta del problema considerado y u_n la solución aproximada hallada por el método del elemento finito se puede demostrar que el error $u - u_n$ es ortogonal a v, $\forall v \in K_n$:

$$u - P_n\left(u\right) \perp v \in K_n$$
$$P_n\left(u\right) = u_n$$

y por tanto que la solución del método del elemento finito es la mejor aproximación, en el sentido de ser la solución de mínimos cuadrados de norma mínima.

De otra parte, se puede definir la funcional de Lagrange siguiente:

$$L = \left\|P_n\left(v\right)\right\|_a^2 + \lambda\left\|TP_n\left(v\right) - \psi\right\|_a^2$$

derivando se tiene:

$$\begin{aligned} dL_u\left(h\right) &= 2\left\langle P_n u, h\right\rangle + 2\lambda\left\langle TP_n u - \psi, Th\right\rangle \\ &= 2\left\langle u_n, h\right\rangle + 2\lambda\left\langle T^*\left(Tu_n - \psi\right), h\right\rangle \\ &= 2\lambda\left\langle\left(T^*T + \alpha I\right)u_n - T^*\psi, h\right\rangle, \quad \alpha = \lambda^{-1}, \end{aligned}$$

por tanto la solución u_n que se halla por el método del elemento finito, se obtiene como la regularización de Tijonov del operador T :

$$u_n = \left(T^*T + \alpha I\right)^{-1} T^*\psi$$

concluimos que la regularización de Tijonov engloba al método del elemento finito y éste a su vez engloba el de diferencias finitas; con lo que llegamos a una generalización natural de la idea de Kepler de sistemas regulares que están contenidos a su vez en sistemas cada vez más regulares.

3. CAPITULO 3

3.1 ECUACION INTEGRAL GENERAL

El objetivo del capítulo es mostrar que el principio de causalidad eficiente, a través de la ecuación de continuidad, determina las condiciones de frontera del operador propagador de ondas, cuya solución nos conduce a la ecuación integral general de los problemas inversos.

Siguiendo a [7, Brambila], se toma el camino que a continuación se traza. Se plantea un problema hiperbólico mixto para la amplitud de onda del campo u y el potencial q, luego se consideran los dos problemas de contorno de los campos característicos, los cuales resultan linealmente independientes y con soporte en el cono no-causal; se expresa el campo u como combinación lineal de los campos característicos y se determinan sus coeficientes de las relaciones que se infieren a partir de las condiciones de contorno de los campos característicos y de su expansión como ondas viajeras; nuevamente se usa ésta expansión y se obtiene en el interior del cono no-causal la ecuación buscada, si se imponen formas particulares a las condiciones de contorno se halla la ecuación de Marchenko y luego con otras condiciones, la ecuación de Gelfand-Levitan lineal. [58], [37], [34].

Estimamos que en este capítulo nuestro aporte es el siguiente:

1. Obtener la Ecuación Integral General basándonos en un problema hiperbólico general y en su descomposición a través de los campos característicos.

2. Dar sustento a las condiciones de frontera por medio de la Ecuación de Continuidad y de acuerdo con el Principio de Causalidad Eficiente.

3. Extender los resultados para incluir la ecuación de Krein y la de Gopinah-Sondhi.

3.1.1 ECUACION INTEGRAL GENERAL

Considérese la ecuación de onda:

$$\begin{array}{c} \Box_q^2 u\,(x,t,\theta) = \ddot{u} - \Delta u + qu = 0 \\ t \in I\!R, \quad x \in I\!R^n, \quad \theta \in S^{n-1} \end{array} \tag{3.1}$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{array}{l} u\,(0,t,\theta) = \delta\,(t) + R(t) \\ u'(0,t,\theta) = -\dot{\delta}(t) + \dot{r}(t) \\ R, r \in C_0^\infty, \end{array} \tag{3.2}$$

q dado por [3, Aceff] y la condición de quietud para $t < 0$, que expresa el principio de causalidad en el sentido de que la perturbación no puede adelantar al frente de onda:

$$u(x,t,\theta) = 0, \qquad x \cdot \theta > t, \tag{3.3}$$

además $R(t)$ representa el campo reflejado y su gradiente en la interfase, de acuerdo a la *ecuación de continuidad*, es la derivada respecto del tiempo de cierto campo $r(t)$.

Se considera ahora los *campos característicos* en los problemas hiperbólicos de contorno de tipo mixto:

1. el campo derecho:

$$\begin{gathered} \Box_q^2 u_1 = 0 \\ u_1\,(0,t,\theta) = \delta\,(t) \\ u_1'\,(0,t,\theta) = -\dot{\delta}\,(t) \end{gathered} \tag{3.4}$$

2. el campo izquierdo:

$$\begin{gathered} \Box_q^2 u_2 = 0 \\ u_2\,(0,t,\theta) = \delta\,(t) \\ u_2'\,(0,t,\theta) = \dot{\delta}\,(t)\,, \end{gathered} \tag{3.5}$$

los cuales pueden interpretarse como un par de pulsos agudos concentrados uno viajando hacia la derecha y el otro hacia la izquierda.

Se puede mostrar pasando con la transformada de Fourier del dominio del tiempo a su variable conjugada - la frecuencia ω -, que los campos característicos $(u_i)_i$, $i \in \overline{1,2}$ son linealmente independientes cuando el número de onda no es nulo - $k = \frac{\omega}{c} \neq 0$ - y estos campos tienen soporte en el cono no causal - $\{|t| \leq x \cdot \theta\}$-.

En base a la independencia lineal, el campo u puede representarse como superposición lineal de los campos característicos - $(u_i)_i$, $i \in \overline{1,2}$ -, con A y S como los coeficientes de la combinación lineal:

$$u\,(x,t,\theta) = (A * u_1 + S * u_2)\,(x,t,\theta)\,, \tag{3.6}$$

$$u\,(x,t,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' A\,(t-t')\,u_1\,(x,t',\theta) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' S\,(t-t')\,u_2\,(x,t',\theta)\,. \tag{3.7}$$

Al usar las condiciones de contorno para u y la expansión de los campos característicos en pulso concentrado y sombra :(8.27)

$$\begin{gathered} u_1\,(x,t,\theta) = \delta\,(x\cdot\theta - t) + K_1\,(x,t,\theta) \\ u_2\,(x,t,\theta) = \delta\,(x\cdot\theta + t) + K_2\,(x,t,\theta)\,, \end{gathered} \tag{3.8}$$

emplear el soporte de las sombras K_i en el cono no causal y la simetría (8.28):

$$K_1\,(x,t,\theta) = K_2\,(x,-t,\theta) \tag{3.9}$$

y luego evaluar en el origen el campo u en (3.7) se halla:

$$\begin{aligned} u\,(0,t,\theta) \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' A\,(t-t')\,(\delta\,(t') + K_1\,(0,t',\theta)) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' S\,(t-t')\,(\delta\,(t') + K_2\,(0,t',\theta)) \\ &= A(t) + S\,(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,(A\,(t-t') + S\,(t+t'))\,K_1\,(0,t',\theta)\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

entonces se consigue la primera ecuación entre los coeficientes de la combinación lineal:

$$(A+S)(t)=(\delta+R)(t)\,. \tag{3.11}$$

De otra parte, si se deriva el campo u en (3.7) :

$$u'(x,t,\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'A(t-t')\,u_1'(x,t',\theta)+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'S(t-t')\,u_2'(x,t',\theta) \tag{3.12}$$

y luego se evalúa en el origen se tiene:

$$u'(0,t,\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'A(t-t')\left(-\dot{\delta}(t')\right)+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'S(t-t')\,\dot{\delta}(t') \tag{3.13}$$

$$u'(0,t,\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'(-A(t-t')+S(t-t'))\dot{\delta}(t')\,, \tag{3.14}$$

a continuación se evalúa con cualquier función de prueba y se hace uso de la integración por partes para obtener la otra ecuación entre los coeficientes de la combinación lineal:

$$(A-S)(t)=(\delta-r)(t) \tag{3.15}$$

finalmente, combinando (3.11) y (3.15) como ecuaciones simultáneas se halla:

$$\begin{array}{l} A(t)=\left(\delta+\frac{1}{2}(R-r)\right)(t)=(\delta+D)(t) \\ S(t)=\frac{1}{2}(R+r)(t) \end{array} \tag{3.16}$$

entonces el campo u se expresa:

$$\begin{aligned} u(x,t,\theta) \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,(\delta(t-t')+D(t-t'))\,u_1(x,t',\theta)+ \\ &\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'S(t-t')\,u_2(x,t',\theta) \end{aligned}$$

se emplea la propiedad de evaluación de la delta de Dirac:

$$\begin{aligned} u(x,t,\theta) \;&=\; u_1(x,t,\theta)+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'D(t-t')\,u_1(x,t',\theta)+ \\ &\quad+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'S(t-t')\,u_2(x,t',\theta)\,, \end{aligned}$$

se sustituyen las expansiones de los campos característicos:

$$\begin{aligned} &u(x,t,\theta)=\delta(x\cdot\theta-t)+K_1(x,t,\theta)+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'D(t-t')\cdot \\ &(\delta(x\cdot\theta-t')+K_1(x,t',\theta))+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'S(t-t')\,(\delta(x\cdot\theta+t')+K_2(x,t',\theta)), \end{aligned}$$

nuevamente se usan las propiedades del delta de Dirac:

$$\begin{aligned} u(x,t,\theta)&=\delta(x\cdot\theta-t)+K_1(x,t,\theta)+D(t-x\cdot\theta)+S(t+x\cdot\theta)+ \\ &+\int_{-\infty}^{+\infty}dt'(D(t-t')+S(t+t'))K_1(x,t',\theta)\,,\quad |t|<x\cdot\theta. \end{aligned} \tag{3.17}$$

y finalmente se obtiene la **Ecuación Integral General,** en el interior del cono no causal - $\{|t| < x \cdot \theta\}$ -:

$$0 = K_1(x,t) + D(t - x\cdot\theta) + S(t + x\cdot\theta) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left(D(t-t') + S(t+t')\right) K_1(x,t',\theta), \quad |t| < x\cdot\theta, \tag{3.18}$$

a la cual se le puede dar la forma funcional de operadores:

$$(I+N)K_1 = -K_1, \quad |t| < x\cdot\theta \\ N = D + S$$

la solución de esta ecuación integral general resulta particularmente útil para establecer el vínculo entre el potencial buscado y la sombra, en los diferentes problemas que pueden ser transformados en problemas inversos del operador de Schrödinger.

ECUACION DE MARCHENKO

Como condiciones de contorno (3.2) se escogen los dos campos iguales:

$$r(t) = R(t),$$

luego de las ecuaciones (3.16) resulta que, su diferencia D y su suma S son:

$$D = 0 \\ S = R,$$

por tanto se obtiene la ecuación integral:

$$(I+R)K_1 = K_1,$$

o bien en notación explícita en el cono no causal y escogiendo la dirección $\theta = (1,0,\ldots,0)$ con $x = x_1$:

$$K_1(x,t) + R(x,t) + \int_{-x}^{+x} dt' R(t+t') K_1(x,t') = 0, \quad |t| < x,$$

esta es la conocida *ecuación de Marchenko*, donde el núcleo se determina por el campo reflejado y cuya solución es la sombra en el cono no causal.

ECUACION GELFAND-LEVITAN

Las condiciones de contorno (3.2) se fijan escogiendo nulo el campo r:

$$r = 0,$$

luego la diferencia y suma serán la mitad del campo reflejado:

$$D = \tfrac{1}{2}R = S, \quad 0 \le t < x,$$

entonces se encuentra la ecuación integral:

$$\begin{aligned}&K_1(x,t)+\tfrac{1}{2}R(t-x)+\tfrac{1}{2}R(t+x)\\&+\int_{-x}^{+x}dt'\left(\tfrac{1}{2}R(t-t')+\tfrac{1}{2}R(t+t')\right)K_1(x,t') \quad =0,\end{aligned}$$

y al descomponer la integral para ubicarla en el semieje positivo, se hallan las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}&K_1(x,\pm t)+\tfrac{1}{2}R(\pm t+x)\\&+\int_{0}^{+x}dt'\left(\tfrac{1}{2}R(\pm t-t')+\tfrac{1}{2}R(\pm t+t')\right)\left(K_1(x,t')+K_1(x,-t')\right) \quad =0,\end{aligned}$$

si se denota la sombra por:

$$K(x,t)=K_1(x,t)+K_1(x,-t)$$

y se suman las dos ecuaciones integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}&K(x,t)+\tfrac{1}{2}R(x-t)+\tfrac{1}{2}R(x+t)\\&+\int_{0}^{+x}dt'\left(\tfrac{1}{2}R(|t-t'|)+\tfrac{1}{2}R(t+t')\right)K(x,t') \quad =0,\end{aligned}$$

la cual es la ecuación integral de Gelfand-Levitan lineal.

ECUACION DE KREIN

Se fijan las condiciones de contorno escogiendo en (3.2):

$$r(t)=-R(t),$$

entonces las funciones diferencia y suma quedan:

$$\begin{aligned}D(t)&=\tfrac{1}{2}(R-r)(t)=R(t)\\S(t)&=\tfrac{1}{2}(R+r)(t)=0.\end{aligned}$$

Se halla la ecuación integral:

$$K_1(x,t)+R(t-x)+\int_{-x}^{+x}dt'R(t-t')K_1(x,t')=0, \quad |t|<x,$$

y por la condición de quietud o principio de causalidad:

$$K_1(x,t)+R(t-x)+\int_{-x}^{+x}dt'R(|t-t'|)K_1(x,t')=0, \quad |t|<x,$$

y se ha obtenido la ecuación integral de Krein.

ECUACION DE GOPINATH-SONDHI

Finalmente se fijan las condiciones de frontera de la forma siguiente:

$$R(t) = sgn(t) + \tfrac{1}{4}H(t)$$
$$r(t) = -R(t),$$

donde H es una función conocida y sgn es la función signo. Luego las funciones suma y diferencia ahora resultan:

$$D(t) = sgn(t) + \tfrac{1}{2}H(t)$$
$$S(t) = 0.$$

La ecuación integral general produce entonces:

$$K_1(x,t) + sgn(t-x) + \tfrac{1}{2}H(t-x) +$$
$$+ \int_{-x}^{+x} dt' \left(sgn(t-t') + \tfrac{1}{2}H(t-t')\right) K_1(x,t') = 0, \quad |t| < x$$

y por el principio de causalidad:

$$K_1(x,t) + \tfrac{1}{2}\int_{-x}^{+x} dt' h(|t-t'|)\, K_1(x,t') = 1, \quad |t| < x,$$

donde la función h se obtiene de H. Esta es la ecuación integral de Gopinath-Sondhi.

4. CAPITULO 4

4.1 EL PROPAGADOR DE ONDAS

El presente capítulo tiene como objetivo aplicar el principio de causalidad eficiente definiendo una funcional lagrangiana apropiada para las ecuaciones de Maxwell y posteriormente, resolver el problema inverso de tipo eléctrico.

Este problema surge de la necesidad de un estudio explorador no destructivo de dispositivos eléctricos, como es el caso de los transformadores, para establecer su estado de operación y en consecuencia contar con elementos para decidir su permanencia o retiro del servicio. [53].

En la sección 1 se inicia con el planteamiento del problema inverso n-dimensional para el propagador de ondas y su posterior reducción a una colección unidimensional a través de la transformada de Radon. [7], [21].

En la sección 2 con el uso de formas diferenciales se define un programa variacional que conduce a establecer las conocidas leyes del campo electromagnético y se destaca la divergencia del campo del desplazamiento eléctrico. Porque esta característica es suficientemente representativa de muchos fenómenos de la naturaleza que se presentan como flujos a través de superficies de campos vectoriales que se derivan de algún potencial, en otras palabras: flujos con potencial. [1], [45], [86], [82], [79].

En la sección 3 se formula el problema inverso eléctrico con el uso de las coordenadas cilíndricas y de las simetrías del fenómeno.

En la sección 4 se aplica la transformada de Laplace, su analiticidad y la expansión en serie para proponer una ecuación cuya solución permite determinar el coeficiente de la permitividad eléctrica a partir de un escenario de mediciones realizadas en el exterior de los dispositivos. Se obtiene una expresión explícita para el coeficiente de interés con validez local.

Estos resultados pueden extenderse con relativa facilidad a otras áreas importantes como es el caso de los fenómenos magnéticos y difusivos.

En la última subsección, se considera el problema inverso del perfil del índice de refracción para un medio material heterogéneo en donde sus características eléctricas y magnéticas varían en el espacio. Se aplica la transformada de Radon y la transformación Kirchhoff-Liouville. [58], [18].

En este capítulo consideramos que nuestro aporte es:

1. Reducir el problema inverso para el propagador de ondas de dimensión n a unidimensional, al escoger un hiperplano apropiado para aplicar la transformada de Radon.

2. Concebir la solución del problema inverso como una transformación de operadores. En particular para el problema del propagador de ondas, resolverlo como la transformación de un operador no-perturbado en uno perturbado, para posteriormente hallar la perturbación la cual contiene el coeficiente que se busca.

3. Con la orientación del principio de causalidad eficiente definir una funcional lagrangiana en base a formas diferenciales para obtener las ecuaciones de Maxwell.

4. Plantear y resolver el problema inverso de tipo eléctrico.

4.1.1 EL PROPAGADOR DE ONDAS

Se desea hallar la velocidad de propagación de las ondas en un medio material heterogéneo, con frontera en forma de semiespacio en el espacio de dimensión n.

Se considera el operador n-dimensional de la propagación de las ondas sin perturbación y con función fuente f:

$$\begin{aligned} \Box^2 u = \quad & \left(\Delta - \tfrac{1}{a^2}\partial_t^2\right) u = f \\ & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se toma en cuenta el hiperplano que pasa por el origen, tiene vector normal e_p y forma un ángulo θ con el eje t del tiempo; en tanto que el semi-espacio tiene la dirección del eje x_1 como vector normal interior. Ahora se recurre a la transformada de Radon:

$$\mathcal{R}f\left(p, e_p\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x\right) \delta\left(p - x \cdot e_p\right) dx, \tag{4.2}$$

se denota el campo transformado por v, la función fuente transformada por $\tilde{f}$, la coordenada $x_1 = x$ y se obtiene una colección de las versiones unidimensionales del problema, parametrizadas por el ángulo θ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \left(\frac{\sin^2\theta}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\partial_t^2 v = \tilde{f}. \tag{4.3}$$

Este resultado se aplicará al problema inverso del perfil del índice de refracción al final del capítulo.

4.1.2 ECUACIONES DE MAXWELL

Para plantear el problema en un contexto suficientemente amplio se obtienen las leyes generales que rigen los fenómenos electromagnéticos. Con ése fin se formula el siguiente programa variacional:

Sea $A = (A_i)_i$ el covector potencial del campo electromagnético $F = (F_{ik})_{ik}$ de tal manera que:

$$F = dA \tag{4.4}$$

con J se denota el covector de fuentes y se define la funcional:

$$L\left(F, A\right) = \langle F, G\rangle + 4\pi\left\langle A, J\right\rangle \tag{4.5}$$

$$L = \int_\Omega F \wedge^* G + 4\pi \int_\Omega A \wedge^* J,$$

esta funcional en coordenadas adopta la forma:

$$L = \int_\Omega \left(F^{ik} G_{ik} + 4\pi A_i J^i\right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4.6}$$

Luego, la condición de Khun-Tucker para extremo incondicional produce:

$$\int_\Omega ddA \wedge^* G + F \wedge d^* G + 4\pi dA \wedge^* J = \int_\Omega F \wedge (d^* G + 4\pi^* J) = 0,$$

por lo tanto se halla la relación:

$$d^* G = -4\pi^* J, \tag{4.7}$$

posteriomente con las expresiones del campo electromagnético:

$$\begin{gathered} F = d(\phi, A) = dt \wedge \mathbf{E} - \mathbf{B} \\ G = dt \wedge \mathbf{D} - \mathbf{H} \\ J = \rho dt - J_i dx^i, \end{gathered} \tag{4.8}$$

se obtiene el par de ecuaciones:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{gathered} \tag{4.9}$$

en tanto que de la ecuación (4.4) resulta las otras dos ecuaciones:

$$\begin{gathered} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{gathered} \tag{4.10}$$

donde las constitutivas son:

$$\begin{gathered} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

A continuación la ecuación de Laplace-Poisson en ausencia de cargas libres se convierte en:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{4.12}$$

si además el fenómeno para el campo $\mathbf{B}$ es estacionario, de (4.10) se infiere que el campo $\mathbf{E}$ es irrotacional y por tanto puede derivarse de un potencial escalar V:

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \tag{4.13}$$

finalmente la ecuación de Laplace-Poisson queda:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0. \tag{4.14}$$

Esta ecuación tiene la forma explícita de flujo de un campo proporcional a un gradiente y da lugar a la generalización conocida como aplicación Dirichlet-Neumann, que aplica una función fuente definida en una frontera en una funcional definida en la misma frontera. Sea V_i, $i \in [1, 2]$ soluciones de los problemas de Dirichlet no homogéneos en una región acotada y regular n-dimensional Ω:

$$\begin{gathered} div(\epsilon \nabla V_i) = 0 \\ V_i|_{\partial\Omega} = f_i, \end{gathered}$$

se define la forma bilineal:

$$a\left(f_1, f_2\right) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla V_1 \cdot \nabla V_2 = \int_{\partial\Omega} \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{n}} V_2,$$

esta aplica la función fuente del problema de Dirichlet f_1 en la funcional lineal definida por la integral:

$$a\left(\cdot, f_2\right) = \int_{\partial\Omega} \Lambda_\epsilon\left(\cdot\right) V_2$$

$$\Lambda_\epsilon\left(f_1\right) = \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{n}},$$

donde Λ_ϵ es la aplicación Dirichlet-Neumann.

4.1.3 PROBLEMA ELECTRICO

Se quiere proponer un sistema de medición lo suficientemente realista que conduzca a encontrar el coeficiente ϵ .

Como lo requiere las aplicaciones se asume como información apriori la simetría local respecto de un eje, sea éste el eje z. En coordenadas cilíndricas el gradiente es :

$$\nabla = \left(h_i \frac{\partial}{\partial q_i}\right)_i = \left(1\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, 1\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

se conforma la ecuación (4.14):

$$\left(1\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, 1\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\epsilon \left(1\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, 1\frac{\partial}{\partial z}\right) V\right) = 0,$$

la cual queda:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\epsilon \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\epsilon \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} V\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon \frac{\partial}{\partial z} V\right) = 0.$$

Por la simetría respecto del ángulo azimutal φ se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\epsilon \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon \frac{\partial}{\partial z} V\right) = 0,$$

de manera más explícita:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = -\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

donde se observa otra simetría - la de intercambiar r por z -. Considérese entonces que el coeficiente depende sólo de r, y sea $\beta = -\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial r}$, luego el problema inverso resulta de tipo elíptico y se plantea de la forma siguiente: hallar el coeficiente β en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = \beta \frac{\partial V}{\partial r}. \qquad (4.15)$$

4.1.4 SOLUCION DEL PROBLEMA ELECTRICO

Se calcula la transformada de Laplace de la ecuación (4.15) con respecto a la variable z, con variable conjugada s, luego esta ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{V} + s^2\,\tilde{V}'' = \beta\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r}. \tag{4.16}$$

Por ser $\tilde{V}$ una transformada de Laplace es analítica con respecto a s y admite, una expansión en serie de potencias de s:

$$\tilde{V} = \sum_{0}^{\infty} s^n v_n\left(r\right), \tag{4.17}$$

se sustituye en la ecuación diferencial (4.16) y se representa por acentos de puntos las derivadas con respecto a r:

$$\sum_{0}^{\infty} s^n\left(\ddot{v}_n + n\left(n-1\right)v_n - \beta\dot{v}_n\right) = 0,$$

se analizan los coeficientes de las respectivas potencias de s:

$$\begin{aligned}
&n = 0, \quad \ddot{v}_0 - \beta\dot{v}_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \int e^{\beta} d\bar{r},\\
&n = 1, \quad \ddot{v}_1 - \beta\dot{v}_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \int e^{\beta} d\bar{r},\\
&n \geq 2, \quad \ddot{v}_n - \beta\dot{v}_n + n\left(n-1\right)v_n = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Para determinar una estrategia de datos se expande $\tilde{V}$ respecto de la variable s :

$$\tilde{V} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n v_n = v_0 + s v_1 + s^2 v_2 + \cdots,$$

luego se evalúa en cero y sólo permanece el término v_0:

$$\tilde{V}\Big|_{s=0} = v_0, \tag{4.19}$$

Ahora se relacionan las ecuaciones (4.19) y (4.18) para obtener:

$$\mathcal{L}\left(V\right)|_{s=0} = v_0 = \int e^{\beta} d\bar{r}, \tag{4.20}$$

esta ecuación en principio permite encontrar el coeficiente β, para ello se realizan las operaciones convenientes y se obtiene el resultado principal:

$$\epsilon\left(r\right) = e^{-\int \ln \frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{L}[V]|_{s=0}\right)}. \tag{4.21}$$

que da el coeficiente de permitividad eléctrica en función de los datos y es válido en una vecindad Ω.

PERFIL DEL INDICE DE REFRACCION

Se plantea y resuelve el problema inverso unidimensional de la determinación del perfil del índice de refracción en un medio material heterogéneo en forma de semi-espacio. Se supone que la permeabilidad y la permitividad varían espacialmente con la profundidad. Se usa la transformada de Radon y se sigue a [18, Coen].

Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes son:

$$\begin{array}{ll} divD = 0 & divB = 0 \\ rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} & rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \end{array} \tag{4.22}$$

y combinadas con las ecuaciones constitutivas quedan:

$$\begin{array}{ll} div\epsilon E = 0 & div\mu H = 0 \\ rotH = \frac{1}{c}\frac{\partial \epsilon E}{\partial t} & rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mu H}{\partial t}, \end{array} \tag{4.23}$$

luego:

$$\begin{array}{l} rotrotE = \frac{1}{\mu}\nabla\mu \times rotE - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E \\ rotrotE = \nabla(\nabla\cdot E) - \Delta E \end{array} \tag{4.24}$$

así que para el campo eléctrico se halla:

$$-\Delta E + \nabla(\nabla\cdot E) + \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = \frac{1}{\mu}\nabla\mu \times rotE. \tag{4.25}$$

Se escoge una determinada polarización con el campo mágnetico en el plano de propagación (x, y) y el campo eléctrico perpendicular a él, entonces sólo E_z es diferente de cero:

$$\Delta_{x,y}E_z - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\frac{\partial}{\partial x}E_z, \tag{4.26}$$

se calcula la transformada de Radon del campo E_z, en el plano $(t, y/c)$ a lo largo de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al vector unitario $(\cos\theta, \sin\theta)$, y se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{E}_z + \left(\frac{\sin^2\theta}{c^2} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{E}_z = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{E}_z, \tag{4.27}$$

con la transformación de Kirchhoff se define la profundidad aparente s por:

$$s(x) = \int \mu(\bar{x})\, d\bar{x}, \tag{4.28}$$

luego:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{E}_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{E}_z - \mu^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\tilde{E}_z, \tag{4.29}$$

por tanto se halla la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\tilde{E}_z - \frac{1}{c^2\mu^2}\left(\mu\epsilon - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{E}_z = 0, \tag{4.30}$$

donde la velocidad de fase se escribe:

$$v = \frac{c\mu}{\sqrt{\mu\epsilon - \sin^2\theta}}, \tag{4.31}$$

y el índice de refracción aparente resulta:

$$\eta(s, \theta) = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon - \sin^2\theta}}{\mu}. \tag{4.32}$$

Se realiza la transformación de Kirchhoff-Liouville, definiendo la nueva profundidad aparente ξ:

$$\xi(s,\theta) = \int \eta(\bar{s},\theta)\, d\bar{s} \tag{4.33}$$

y el nuevo campo E:

$$E(\xi, k\sin\theta, t) = \sqrt{\eta(s,\theta)}\, E_z(s, k\sin\theta, t), \tag{4.34}$$

ahora se encuentra la ecuación de onda:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}E - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}E = q(\xi,\theta)\, E \\ q(\xi,\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{\eta}}\tfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\eta}. \end{gathered} \tag{4.35}$$

Se especifican las condiciones de contorno partiendo del caso libre de dispersión:

$$q(\xi,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \text{cte} = 1, \tag{4.36}$$

en la interfase $\xi = 0 = s$ se tiene el caso de la onda plana para $\tilde{E}_z$:

$$\begin{gathered} \tilde{E}_z(s, k\sin\theta, t)\Big|_{s=0} = e^{ik\eta s}\big|_{s=0} = 1 \\ E(\xi, k\sin\theta, t)\big|_{\xi=0} = \sqrt{\eta(s,\theta)}\,\tilde{E}_z(s, k\sin\theta, t)\Big|_{s=0} = 1. \end{gathered} \tag{4.37}$$

Para el gradiente del campo se halla:

$$\tilde{E}'_z(\xi, k\sin\theta, t)\Big|_{s=0} = ik\eta e^{ik\eta s}\big|_{s=0} = ik, \tag{4.38}$$

luego:

$$E(0, k\sin\theta, t) = 1. \tag{4.39}$$

La relación del potencial con la sombra produce:

$$q(\xi,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\eta} = 2K(\xi,\xi)', \tag{4.40}$$

con el cambio de variable:

$$\frac{d\xi}{d\xi'} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}, \tag{4.41}$$

se consigue:

$$\frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\sqrt{\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\sqrt{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi'}\sqrt{\eta}\right), \tag{4.42}$$

luego:

$$\begin{gathered} \sqrt{\eta}\tfrac{\partial}{\partial\xi'}\sqrt{\eta} = 2K(\xi',\xi') \\ K(\xi',0) = 0, \end{gathered} \tag{4.43}$$

se regresa a la variable ξ:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\eta} = 2K(\xi,\xi), \tag{4.44}$$

entonces el índice de refracción aparente se representa por:

$$\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta_0}} = 1 + \int_{-\xi}^{\xi} K(\xi,\xi'')\, d\xi'', \tag{4.45}$$

y volviendo a la variable x:

$$x = \int_0^s \frac{ds'}{\mu(s')}, \tag{4.46}$$

se obtiene el índice de refracción $\eta(x)$ en función de la profundidad x.

En principio se ha obtenido el perfil del índice de refracción. Aunque de otra parte, debe recordarse que el análisis anterior es válido hasta tanto no se presente el fenómeno de reflexión total.

5. CAPITULO 5

5.1 PROBLEMA INVERSO EN IRRIGACION

El objetivo principal del presente capítulo es el estudio de las propiedades del suelo cultivable en el contexto matemático de los Problemas Inversos. Este trabajo se sitúa dentro de la corriente actual y mundial de vincular las matemáticas con problemas del sector productivo, como en el caso que nos ocupa lo es el riego en la agricultura.

Con este propósito se deducen las ecuaciones que gobiernan el avance del agua en un canal de riego en coordenadas intrínsecas, el fenómeno de la infiltración del agua en un medio poroso como el suelo, precisando la conexión entre el tirante en la superficie y la condición de contorno para la infiltración. [1], [50], [32], [41].

Se estudia de manera particular el fenómeno de la absorción del agua, es decir cuando la infiltración ocurre en ausencia de gradientes gravitacionales, y se plantean tres tipos de problemas inversos: i) inyectivo, ii) cuasilineal-inyectivo, y iii) lineal. Las soluciones a estos problemas se describen en la sección (5.1.6). Se obtiene la difusividad hidráulica como argumento en una ecuación integral de primera especie y a la función de los datos como imagen. Para invertir este operador se recurre a la regularización de Tijonov del capítulo (7) y al operador de Post y Widder. [32], [73], [57], [33].

Se analiza la solución que se obtiene del problema inverso del coeficiente de difusión por el método de Post y Widder. Se usa análisis no-standard y geometría fractal para concluir en la naturaleza fractal del coeficiente de difusión. Donde los datos del problema inverso determinan la resolución. [63], [65], [68], [85].

Con el cálculo operacional y los sistemas singulares para operadores compactos en espacios de Hilbert se obtiene una expansión para las soluciones perturbadas, la cual se aplica a la difusividad hidráulica. [27].

Estimamos que nuestro aporte en este capítulo es el siguiente:

1. La formulación del Teorema M-B #1
2. La caracterización fractal del coeficiente de difusión en el espacio de Fourier.
3. La solución del problema inverso cuasilineal-inyectivo para el coeficiente de difusión, como segundo coeficiente del operador de Fokker-Planck.
4. La formulación en coordenadas intrínsecas de los procesos de avance e infiltración en irrigación.
5. Obtener los operadores de regularización de Tijonov del principio de causalidad eficiente, a través de la definición de una funcional lagrangiana apropiada.

5.1.1 PROCESO DE AVANCE

CINEMATICA

Cuando el agua invade una región compacta Ω, la cinemática de una partícula que en el instante $t = 0$ ocupa la posición $x \in \Omega$, se describe por la trayectoria :

$$\varphi_t(x) = \varphi(x,t), \qquad \varphi_0(x) = x$$

y por la velocidad como generador infinitesimal del flujo uniparamétrico φ_t:

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \mathbf{v}(\varphi_t(x), t).$$

CONTINUIDAD

La masa se describe por la densidad $\rho_t(x) = \rho(x,t)$, de tal manera que en cada subregión Ω_1 se tiene:

$$\bar{d}m(\Omega_1, t) = \rho_t dV,$$

donde V es la forma volumen. Después de un intervalo de tiempo t la región presenta la forma $\varphi_t(\Omega_1)$, y la masa:

$$\int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho_t dV = \int_{\Omega_1} \rho_0 dV - \int_0^t \int_{\varphi_t(\Omega_1)} q dV dt,$$

donde q es el flujo de infiltración:

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho_t dV = \int_{\varphi_t(\Omega_1)} -q dV, \tag{5.1}$$

con el cambio de variable se tiene:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\rho_t dV) = \varphi_t^*(-q dV).$$

Por la incompresibilidad del agua, para el caso de una melga o canal rectangular de ancho b y altura de agua h se halla:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\rho_t dV) = \frac{d}{dt}\varphi_t^*(\rho_0 bhdl).$$

La derivada de Lie con respecto a la velocidad $L_{\mathbf{v}}$, permite escribir el cambio de masa por unidad de densidad y unidad de ancho como:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(hdl) = \varphi_t^*(L_{\mathbf{v}}(hdl) + \frac{\partial h}{\partial t}dl) = \varphi_t^*((L_{\mathbf{v}}h)dl + hL_{\mathbf{v}}dl + \frac{\partial h}{\partial t}dl)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(hdl) = \varphi_t^*((\mathbf{v}[h] + h\ div\mathbf{v} + \frac{\partial h}{\partial t})dl),$$

finalmente se encuentra:

$$div(h\mathbf{v}) + \frac{\partial h}{\partial t} = -q. \tag{5.2}$$

Para un canal de forma no rectangular, la altura debe sustituirse por el área de la sección transversal A:

$$div(A\mathbf{v}) + \frac{\partial A}{\partial t} = -q,$$

mientras en el caso general se obtiene:

$$div(\rho_t \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = -q,$$

o alternativamente:

$$\rho \ div\mathbf{v} + \frac{D\rho}{Dt} = -q,$$

debe observarse que la densidad ρ está reemplazada por el tirante o altura h, o bien por el área A.

DINAMICA

La dinámica viene dada por la Segunda Ley de Newton. El momentum de la subregión $\varphi_t(\Omega_1)$ es:

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho \ \mathbf{v} \ dV.$$

Se agrupan las interacciones sobre la subregión $\varphi_t(\Omega_1)$ en fuerzas de cuerpo y esfuerzos. Si $\mathbf{f}$ representa la densidad de las primeras, las fuerzas de cuerpo se obtienen como:

$$\int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho \ \mathbf{f} \ dV.$$

La introducción del tensor de Cauchy σ permite obtener los esfuerzos como:

$$\int_{\partial\varphi_t(\Omega_1)} \boldsymbol{\sigma}\cdot \hat{\mathbf{n}} \ dA.$$

De donde se deduce el balance de momentum siguiente:

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho \ \mathbf{v} \ dV = \int_{\varphi_t(\Omega_1)} \rho \ \mathbf{f} \ dV + \int_{\partial\varphi_t(\Omega_1)} \boldsymbol{\sigma}\cdot \hat{\mathbf{n}} \ dA. \tag{5.3}$$

El cambio de momentum por unidad de densidad y por unidad de ancho, para el caso de la melga es:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(h \ \mathbf{v} \ dl) = \varphi_t^*(L_{\mathbf{v}}(h\mathbf{v}dl) + \frac{\partial(h\mathbf{v})}{\partial t}dl)$$

$$= \varphi_t^*(\{L_{\mathbf{v}}(h)\mathbf{v}dl + hL_{\mathbf{v}}dl + (\frac{\partial h}{\partial t})\mathbf{v}dl\} + hL_{\mathbf{v}}\mathbf{v}dl + h\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}dl), \tag{5.4}$$

se sustituye la ecuación de continuidad (5.2) en el primer corchete:

$$= \varphi_t^*(-q\mathbf{v}dl + h\{L_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\}dl)$$

$$= \varphi_t^*(\{-q\mathbf{v} + h\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\}dl); \tag{5.5}$$

Como cambio de momentum este resultado se mantiene incluso si hay intercambio de partículas con velocidad inicial nula. La velocidad relativa de tales partículas es $\mathbf{u} = \mathbf{0} - \mathbf{v}$, y el resultado anterior se escribe:

$$\varphi_t^*(\{-q\,(-\mathbf{u}) + h\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\}dl); \tag{5.6}$$

cuando éste no es el caso, la velocidad relativa se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}_q - \mathbf{v}$, y queda incluida en el balance de momentum, la cantidad de momentun que ha intercambiado el sistema

$$\varphi_t^*(\{-q\,(-\mathbf{u}) + h\tfrac{D\mathbf{v}}{Dt}\}dl),$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_q - \mathbf{v}.$$

Las fuerzas de esfuerzos se transforman con el Teorema de Stoke (Gauss) y el cambio de variable:

$$\int_{\partial\varphi_t(\Omega_1)} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{\Omega_1} \varphi_t^*(div\boldsymbol{\sigma}\; dV).$$

Cuando los gradientes de deformación son nulos, la ley de deformación se reduce a la condición de presión hidrostática:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p(\delta_{ij}) \qquad div\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p, \tag{5.7}$$

para el caso del canal rectangular, la presión con la altura se describe por:

$$p(h) = \rho g(h - z), \qquad 0 < z < h, \tag{5.8}$$

$$\nabla p = \rho g \nabla h,$$

y para toda la sección:

$$\nabla p = gh\nabla h. \tag{5.9}$$

En cuanto a las fuerzas de cuerpo, se considera la inclinación del canal de pendiente S_x y la fuerza de fricción de las paredes expresada como una pendiente de fricción S_f :

$$\rho f = ghS_x - ghS_f = gh(S_x - S_f).$$

Al regresar a la ecuación de movimiento (5.3):

$$\int_{\Omega_1} \varphi_t^*((-q\,(-\mathbf{u}) + h\frac{D\mathbf{v}}{Dt})dl) = \int_{\Omega_1} \varphi_t^*(-gh\nabla h dl) + \int_{\Omega_1} \varphi_t^*(gh(\mathbf{S}_x - \mathbf{S}_f)dl),$$

y suprimir el cambio de variable y la integral:

$$-q\,(-u) + h\frac{Dv}{Dt} = -gh\nabla_x h + gh(S_x - S_f),$$

finalmente resulta que el movimiento del agua en el canal se rige por la ecuación propuesta por Barré de Saint-Venant (1890):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}v + g\frac{\partial h}{\partial x} = g(S_x - S_f) + \frac{q}{h}\,(-u)\,, \tag{5.10}$$

en tanto que para el canal no rectangular debe reemplazarse el tirante h por la sección transversal A.

5.1.2 PROCESO DE INFILTRACION

El movimiento del agua en el suelo se modela por la Ley de Darcy que se enuncia de la forma siguiente: el volumen de agua $\mathbf{q}$ que fluye por unidad de tiempo y por unidad de área transversal es proporcional al antigradiente de la suma del potencial de presión $\psi(\theta)$ y del potencial gravitacional, siendo éste último proporcional a la coordenada espacial z orientada positivamente hacia abajo:

$$\mathbf{q} = K(\theta)(-\nabla H), \qquad H = \psi(\theta) - z \tag{5.11}$$

donde θ es la humedad igual al volumen de agua por unidad de volumen de suelo y $K(\theta)$ es la conductividad hidráulica.

Si una subregión elemental de la subregión Ω en el instante $t = 0$ tiene la cantidad de agua $\theta_0 dV$, y en el instante t una subregión elemental de la subregión $\varphi_t(\Omega)$ tiene la cantidad $\theta_t dV$. La conservación de la masa permite escribir:

$$\int_{\varphi_t(\Omega)} \theta_t \, dV = \int_\Omega \theta_0 \, dV$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\theta_t \, dV) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\theta_t \, dV) = \varphi_t^*(L_\mathbf{v}(\theta_t \, dV) + \frac{\partial \theta_t}{\partial t} dV) = \varphi_t^*((L_\mathbf{v}\theta_t)dV + \theta_t L_\mathbf{v} dV + \frac{\partial \theta_t}{\partial t} dV)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\theta_t \, dV) = \varphi_t^*((\mathbf{v}[\theta_t] + \theta_t \; div\mathbf{v} + \frac{\partial \theta_t}{\partial t})dV)$$

$$div(\theta_t \mathbf{v}) + \frac{\partial \theta_t}{\partial t} = 0,$$

finalmente:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{5.12}$$

Se define la capacidad específica (Richards, 1931) como la derivada de la humedad con respecto a la presión del agua:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi},$$

y la difusividad hidráulica (Childs, y Collis-George, 1950):

$$D(\theta) = K(\theta)\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{K(\theta)}{C(\theta)}.$$

Al combinar la ley de Darcy y la conservación de la masa se obtiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\theta)\nabla\theta) - \frac{dK}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z},$$

y para el caso unidimensional vertical resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \frac{dK}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}. \tag{5.13}$$

En el caso unidimensional horizontal no hay contribución del potencial gravitacional y por tanto no hay componente convectiva y el fenómeno se conoce como *absorción* :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right). \tag{5.14}$$

Alternativamente la ecuación de Richards puede formularse en términos de la presión del agua ψ:

$$C(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] - \frac{dK}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

de tal manera que al ser evaluada en la superficie del suelo - $z = 0$ -, la presión del agua es igual a la altura o tirante h proporcionado por la ecuación de Barré de Saint-Venant:

$$\psi(0,t) = h.$$

5.1.3 INVERSION

El objetivo de la inversión es estudiar los coeficientes de la ecuación diferencial. En el presente sección se aborda el coeficiente de difusividad. Se consideran tres casos a los que les denominamos: *inyectivo*, *cuasilineal-inyectivo* y *lineal*.

5.1.4 INYECTIVO

Se asume la inyectividad de $\theta(x,t)$ como función de x, se denota la inversa por la izquierda como $x(\theta,t)$, se hace separación de variables y se obtiene a x en función de la variable de $\phi(\theta)$:

$$x(\theta,t) = \phi(\theta)\sqrt{t} \quad : \quad \phi(\theta_s) = 0 \quad y \quad \phi(\theta_o) \to \infty,$$

sujeta a las condiciones:

inicial: $\theta(x,0) = \theta_o = \text{cte.}$
de frontera: $\theta(0,t) = \theta_s = \text{cte.}$ y $\theta(\infty,t) = \theta_o = \text{cte.}$

Se considera a la función humedad θ definida implícitamente a través de la función $x(\theta,t)$, y con el teorema de la función implícita se halla la relación:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_x = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\theta}{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_t},$$

luego la ecuación de continuidad se transforma en la ecuación de la absorción:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{D(\theta)}{\partial x/\partial \theta}\right) = 0 \\ \frac{\phi}{2\sqrt{t}} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{D(\theta)}{\phi'(\theta)\sqrt{t}}\right) = 0,\end{gathered} \tag{5.15}$$

de donde puede obtenerse el coeficiente de difusividad [69]:

$$D(\theta) = -\frac{1}{2}\phi'(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \phi \, d\bar{\theta}. \tag{5.16}$$

Se observa que al aparecer la derivada de los datos - $\phi'(\theta)$ -, $D(\theta)$ no depende continuamente de los datos y el problema inverso resulta "mal planteado" en el sentido de Hadamard, puesto que no se satisface la tercera de las tres condiciones siguientes: 1) existencia de la solución, 2) unicidad de ésta y 3) dependencia continua de los datos.

5.1.5 CUASILINEAL-INYECTIVO

Ahora la ecuación de continuidad se transforma en :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\partial\theta}{\partial t}\right)_x &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\tfrac{\partial\theta}{\partial x}\right) \\ \left(\tfrac{\partial x}{\partial t}\right)_\theta &= -\left(\tfrac{\partial x}{\partial \theta}\right)_t \tfrac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\tfrac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_t}\right) \\ \left(\tfrac{\partial x}{\partial t}\right)_\theta &= -\tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(D(\theta)\tfrac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_t}\right). \end{aligned} \tag{5.17}$$

La transformación de Kirchhoff:

$$\mu(\theta) = \int_{\theta_o}^{\theta} D(\bar{\theta})\, d\bar{\theta}, \tag{5.18}$$

permite escribir la ecuación de la manera siguiente:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\theta = -D(\theta)\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_t}\right),$$

se denota $\bar{D}(\mu(\theta)) = D(\theta(x,y,t))$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\bar{D}(\mu)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right),$$

y además se denota

$$B(\mu) = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2}{\bar{D}(\mu)}.$$

Se plantea el problema inverso siguiente: determinar el coeficiente de difusión:

$$\begin{aligned} &B(\mu)\tfrac{\partial x}{\partial t} = \Delta x + \delta(\mu - \mu^0, y, t) \qquad \mu, \mu^0 \in \mathbb{R}^n \quad y \geq 0 \\ &x(\mu, y, t < 0, \mu^0) = 0 \qquad (x' + hx)(\mu, 0, t, \mu^0) = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Sea $\bar{x} = v$ la transformada de Laplace de x con respecto a t, con variable conjugada s, definida por:

$$v(\mu, y, s, \mu^0) = \bar{x}(\mu, y, t, \mu^0) = \int_0^\infty x(\mu, y, t, \mu^0)\exp(-st)dt,$$

con sus teoremas: de convolución

$$\tau_b f(t) = f(t-b)$$
$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t})\,d\bar{t}$$
$$\mathcal{L}\left(\left(f*g\right)(t)\right)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s),$$

la transformada de la integral:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\bar{t})d\bar{t}\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(t),$$

y la derivada de la transformada

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}f(t) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right), \quad n \geq 1,$$

la ecuación de difusión (5.14) se convierte en:

$$\tau_{\bar{t}}\left(B(\mu,t)\right)\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta x + \delta(\mu-\mu^0,y,t-\bar{t})$$

$$\int_0^t \tau_{\bar{t}}\left(B(\mu,t)\right)\frac{\partial x}{\partial t}d\bar{t} = \int_0^t \Delta x d\bar{t} + \int_0^t \delta(\mu-\mu^0,y,t-\bar{t})d\bar{t}$$

$$B(\mu,t)*\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta\int_0^t x d\bar{t} + \delta(\mu-\mu^0,y,t)$$

se aplica la transformada de Laplace [73]:

$$B^{\bar{}}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{t}}\right)^{\bar{}} = \Delta\left(\int_0^t x d\bar{t}\right)^{\bar{}} + \left(\delta(\mu-\mu^0,y,t)\right)^{\bar{}}$$

$$B^{\bar{}}\left(s\,\tilde{x}(\mu,y,s,\mu^0) - x(\mu,y,0,\mu^0)\right) = \frac{1}{s}\Delta\tilde{x} + \delta(\mu-\mu^0,y)$$

y se obtiene la ecuación elíptica:

$$(B)^{\bar{}}\,s^2\,v = \Delta\,v + s\,\delta(\mu-\mu^0,y),$$

puesto que v es analítica, en el semiespacio bordeado por la abscisa de convergencia, puede expresarse como una serie de potencias de s:

$$v(\mu,y,s,\mu^0) = \sum_0^\infty s^n\,v_n(\mu,y,\mu^0)$$

después se agrupan las sucesivas potencias de s, para la potencia cero la solución es identícamente cero:

$$\Delta\,v_0 = 0 \qquad (v_0' + hv_0)|_{y=0} = 0,$$

para la potencia 1 de s:

$$\Delta\,v_1 - \delta(\mu-\mu^0,y) = 0 \qquad (v_1' + hv_1)|_{y=0} = 0,$$

se asumen las condiciones para la existencia de la transformada de Fourier y ésta se calcula con variable $l = \mu - \mu^0$ y conjugada k:

$$w_1(k,y) = \int_{\mathbb{R}^n} v_1(l,y)\exp(ik\cdot l)dl,$$

para obtener:

$$w_1'' - |k|^2 w_1 = \delta(y) \qquad (w_1' + hw_1)|_{y=0} = 0$$

y por el método de la función de Green se establece la solución:

$$w_1(k,y) = -\frac{1}{h-|k|}\exp(-|k|\ y), \qquad y \geq 0.$$

Para la potencia 2 de s:

$$\Delta v_2 - \tilde{B}\, v_1 = 0, \qquad (v_2' + hv_2)|_{y=0} = 0,$$

se aplica la transformada de Fourier con :

$$\hat{B}\,(\alpha,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{B}(l+\mu^0,y,\mu^0)\exp(i\,\alpha\cdot(l+\mu^0))d\mu^0 \tag{5.20}$$

$$w_2(\alpha,y,k) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} v_2(l+\mu^0,y,\mu^0)\exp(ik\cdot l + i\alpha\cdot\mu^0)dld\mu^0$$

$$w_2'' - |k|^2 w_2 = \hat{B}(\alpha,y)w_1(k-\alpha,y) \qquad (w_2' + hw_2)|_{y=0} = 0$$

y nuevamente con la función de Green se establece la solución para $0 \leq y' \leq y$:

$$\begin{aligned} &w_2(\alpha,y,k)(h-|k|)(h-|k-\alpha|) = \\ &= \int_0^\infty (\cos\ hy - \tfrac{h}{|k|}\sin\ hy)\exp(-(|k-\alpha|+|k|)y')\hat{B}(\alpha,y')dy' \end{aligned}$$

en la serie se observa:

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|_{y=0,s=0} = 2v_2(x,0,x^0) = 2f(x,x^0),$$

y en donde se define la función de los datos $f(x,x^0)$. Pero además para la derivada de la transformada se tiene

$$\mathcal{L}[(-t)^2\,x]\Big|_{y=0,s=0} = \left.\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|_{y=0,s=0}$$

por tanto la ecuación de los datos se formula como:

$$\mathcal{L}[t^2x]|_{y=0,s=0} = 2f(x,x^0), \tag{5.21}$$

al evaluar en $y = 0$:

$$\begin{aligned} w_2(\alpha,0,k) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} v_2(l+\mu^0,0,\mu^0)\exp(ik\cdot l + i\alpha\cdot\mu^0)dld\mu^0 \\ &= \int_0^\infty f(l+\mu^0,\mu^0)\exp(ik\cdot l + i\alpha\cdot\mu^0)dld\mu^0 = \hat{f}(\alpha,k) \end{aligned}$$

$$w_2(\alpha,0,k) = \frac{1}{(h-|k|)(h-|k-\alpha|)} \int_0^\infty \exp(-(|k-\alpha|+|k|)y')\hat{B}(\alpha,y')dy'.$$

Por lo tanto la transformada de Fourier de los datos resulta ser una integral de Laplace de la transformada de Fourier de la difusión:

$$\begin{aligned} g(\alpha,r) &= \hat{f}(\alpha,k)(h-|k|)(h-|k-\alpha|) \\ &= \int_0^\infty \exp(-ry')\hat{B}(\alpha,y')dy', \qquad r = |k-\alpha|+|k|. \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.1.6 SOLUCION

Para una solución se considera la ecuación integral de Fredhlom de primera especie, con núcleo $\exp(-r\bar{y})$ y fuente $g(\alpha,r)$:

$$g(\alpha,r) = \int_0^\infty \exp(-r\bar{y})\hat{B}(\alpha,\bar{y})d\bar{y}, \quad r = |k-\alpha|+|k|,$$

con base en la analiticidad se deriva sucesivamente:

$$(-1)^n g^{(n)}\left(\alpha,\frac{n}{y'}\right) = \int_0^\infty \bar{y}^n \exp\left(-\frac{n}{y'}\bar{y}\right)\hat{B}(\alpha,\bar{y})d\bar{y} \tag{5.23}$$

se observa que la sucesión de Dirac $\delta_n(\bar{y})$-(5.24)-, converge al delta de Dirac $\delta(\bar{y}-y')$ [68]:

$$\delta_n(\bar{y}) = \frac{\bar{y}^n \exp\left(-\frac{n}{y'}\bar{y}\right)}{\int_0^\infty \bar{y}^n \exp\left(-\frac{n}{y'}\bar{y}\right)d\bar{y}} \xrightarrow[n]{} \delta(\bar{y}-y'), \tag{5.24}$$

en tanto que la integral toma el valor:

$$\int_0^\infty \bar{y}^n \exp\left(-\frac{n}{y'}\bar{y}\right)d\bar{y} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{y'}\right)^{n+1}}$$

y de acuerdo con el teorema de la convergencia monótona, se obtiene la solución de Post y Widder [85]:

$$\hat{B}(\alpha,y') = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} g^{(n)}\left(\alpha,\frac{n}{y'}\right)\left(\frac{n}{y'}\right)^{n+1}. \tag{5.25}$$

5.1.7 FRACTALES

Para definir un proceso de fractalización puede tomarse como paradigma el conjunto de Cantor o la curva von Koch. Se inicia con un elemento de medida V_0 como estado cero. Se sigue con p elementos de medida $\frac{V_0}{q}$ como estado uno. Se escala el estado anterior y se obtiene p^2 elementos de medida $\frac{V_0}{q^2}$ como estado 2, y así sucesivamente. En tanto que, en el caso de dimensión topológica arbitraria, el proceso de escalamiento se hace con q^{D_T} y resulta [65], [63]:

$$\begin{array}{cccc}
\text{Estado} & \text{No. de elementos} & \text{Medida} & \text{Medida total} \\
F_0 & 1 & V_0 & 1V_0 \\
F_1 & p & \frac{V_0}{q^{D_T}} & p\frac{V_0}{q^{D_T}} \\
F_2 & p^2 & \frac{V_0}{(q^{D_T})^2} & p^2\frac{V_0}{(q^{D_T})^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
F_n & p^n & \frac{V_0}{(q^{D_T})^n} & p^n\frac{V_0}{(q^{D_T})^n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{5.26}$$

se enfatiza que al estado n-ésimo le corresponde la medida:

$$V_n = p^n \frac{V_0}{(q^{D_T})^n},$$

si se escribe p de la forma:

$$p = q^{D_f}, \quad D_f = \frac{\ln p}{\ln q}, \tag{5.27}$$

la medida del n-ésimo estado puede representarse por:

$$V_n = V_0 \left(q^n\right)^{D_f} \left(q^{-n}\right)^{D_T} \tag{5.28}$$

y a D_f se le llama *dimensión fractal*, a D_T *dimensión topológica* y a q^{-n} la *resolución*.

La relación 5.27 puede verse como p elementos de medida $\frac{1}{q}$, o bien como p contracciones, todas con factores de contracción iguales a $\frac{1}{q}$ [30]

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{q}\right)^{D_f} = 1$$

por tanto, esta relación se generaliza a p contracciones con factores de contracción $c_i \in (0,1)$

$$\sum_{i=1}^{p} (c_i)^{D_f} = 1$$

conocida como relación de Moran [60].

De acuerdo a los conceptos del análisis no-standard, un *fractal* se define como la parte standard del conjunto no- standard, obtenido durante la etapa ω-ésima del proceso de fractalización en donde el infinitésimo $(q^{-\omega})^{D_T}$ se ha reiterado la infinidad de veces $(q^{\omega})^{D_f}$:

$$\begin{array}{l} F = st\,(F_\omega) \\ F_\omega = F_0\,(q^{-\omega})^{D_T - D_f}\,. \end{array} \tag{5.29}$$

De otra parte, por semejanza con la derivada de una potencia, la derivada fractal se define por el proceso en donde el infinitésimo $(q^{-\omega})^{D_T-1}$ se repite el número de veces $(q^{\omega})^{D_f-1}$, luego:

$$F'_{\omega} = F^{(1)}\left(q^{-\omega}\right)^{D_T-1}\left(q^{\omega}\right)^{D_f-1} = F^{(1)}\left(q^{-\omega}\right)^{D_T-D_f}, \tag{5.30}$$

siendo:

$$F_0 = F^0 = \int F^{(1)},$$

al reiterar este proceso se obtiene:

$$\begin{array}{l} F_{\omega}^{(m)} = F^{(m)}\left(q^{-\omega}\right)^{D_T-D_f} \\ F^{(m-1)} = \int F^{(m)}, \quad m \geq 1. \end{array} \tag{5.31}$$

Un fractal autosimilar puede construirse según el esquema [59]

$$(-1)^n (n+1)\, \partial_q^{(n)}\left(\frac{1}{q}\right) \cdot \int^{(n)} p dp,$$

el cual en forma más explicita se da por

$$\begin{array}{ccccccc} p & \xrightarrow{\int} & \frac{p^2}{2!} & \xrightarrow{\int} & \frac{p^3}{3!} & \cdots & \frac{p^{n+1}}{(n+1)!} \\ \frac{1}{q} & \xrightarrow{\partial} & \frac{2!}{q^2} & \xrightarrow{\partial} & \frac{3!}{q^3} & \cdots & \frac{(n+1)!}{q^{n+1}} \\ p \cdot \frac{1}{q} & \longrightarrow & \frac{p^2}{1} \cdot \frac{1}{q^2} & \longrightarrow & \frac{p^3}{1} \cdot \frac{1}{q^3} & \cdots & \frac{p^{n+1}}{1} \cdot \frac{1}{q^{n+1}}. \end{array}$$

Se obtiene un desarrollo ulterior permitiendo que en cada etapa del proceso de fractalización la resolución vaya cambiando según el esquema:

$$(-1)^n (n+1)\, \partial_{q_n}^{(n)}\left(\frac{1}{q_n}\right) \cdot \int^{(n)} p_n dp_n.$$

En la solución de Post y Widder se denota $p_n = \frac{n}{y}$. De acuerdo con la definición de límite, para cual
quier $\epsilon > 0$, existe algún N entero, tal que para cualquier n entero suficientemente grande -($n \geq N$)-puede escribirse:

$$\begin{array}{rl} \hat{B}(\alpha, y') \simeq & \frac{(-1)^n}{n!} g^{(n)}(\alpha, p_n)(p_n)^{n+1} \\ & (-1)^n (n+1)\, g^{(n)}(\alpha, p_n) \frac{1}{(n+1)!}(p_n)^{n+1} \\ & (-1)^n (n+1)\, g^{(n)}(\alpha, p_n) \int^{(n)} p_n dp_n, \end{array}$$

donde el símbolo $\simeq$ significa que los dos términos difieren en algún infinitésimo.

En conclusión, de acuerdo con el análisis no-standard, la solución de Post y Widder permite afirmar la naturaleza fractal del coeficiente de difusión, en su versión transformada de Fourier.

Además, los datos del problema inverso determinan la resolución en el proceso de fractalización.

TEOREMA M-B # 1[1]

1. La transformada de Fourier del coeficiente de difusión se representa por un proceso de percolación de Cantor generalizado:

$$\hat{D} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n (n+1)\, \partial^{(n)}\left(\frac{1}{q_n}\right) \int^{(n)} p_n dp_n$$

[1] Corresponde a las siglas de los autores Mercado y Brambila.

en donde $\partial^{(n)}$ es la enésima derivación sucesiva, $\int^{(n)}$ la enésima integración sucesiva, $\frac{1}{q_n}$ es la probabilidad de paso del proceso de percolación, q_n se asocia al hipervolumen en el proceso de Cantor y viene determinada por la función de los datos en el problema inverso. Finalmente, p_n es el número de elementos $\frac{1}{q_n}$ en el proceso de fractalización de Cantor y se le asocia a la masa. (Aquí D tiene unidades físicas de seg/mt^2).

Este enunciado tiene validez universal, en el sentido de que el coeficiente de difusión es un tensor métrico dos veces contravariante y determina un tensor de curvatura de Riemann.

2. Lo mismo puede decirse para el coeficiente $\sigma\mu$ del producto de la conductividad eléctrica y la permeabilidad magnética, en la propagación de ondas electromagnéticas en un medio plano conductor. Por lo tanto, la percolación en un cuadrado puede modelarse por redes eléctricas.

3. Algo análogo puede enunciarse para el coeficiente $\frac{1}{\nu}$, el inverso de la viscosidad cinemática, para las ecuaciones de Navier-Stokes cuando el gradiente de presión es pequeño comparado con la fricción interna, como es el caso del movimiento de un fluido viscoso entre dos planos paralelos, uno de ellos fijo y el otro móvil.

4. Puede hacerse un enunciado semejante para el inverso del coeficiente de difusión térmica.

5. Resultado semejante puede formularse para el coeficiente consolidación de los suelos.

6. La densidad de una distribución de probabilidad absolutamente continua, de una variable aleatoria no-negativa, se representa por un proceso similar en donde q_n viene determinada por la transformada de Laplace de la distribución.

7. Dentro de la teoría del grupo de renormalización, las dos dimensiones anómalas se determinan por:

$$\frac{dF_n}{d\ln\left(\frac{F_0}{s^n}\right)} = -\delta_s F_n, \quad \delta_s = \begin{cases} D_H - D_T & \text{si} \quad s = q \\ 1 - \frac{D_T}{D_H} & \text{si} \quad s = p \end{cases}$$

en donde F_n es el enésimo estado de fractalización, D_H, D_T y δ_s son las dimensiones de Hausdorff, topológicas y anómala respectivamente.

El análisis fractal anterior permite descomponer la dependencia del coeficiente $\hat{B}(\alpha, y)$ y representarlo por una potencia en y, que debe reflejar los datos y por tanto la dimensión fractal

$$\hat{B}(\alpha, y) = B(\alpha, s)\, y^{-m},$$

se aplica la transformada inversa de Fourier para despejar B (5.20)

$$\hat{B}(\alpha, y) = \int_{R^n} \tilde{B}(l + \mu^0, y, \mu^0) \exp(i\,\alpha \cdot (l + \mu^0)) d\mu^0$$

$$\tilde{B}(l + \mu^0, y, \mu^0) = \frac{y^{-m}}{(2\pi)^n} \int_{R^n} B(\alpha, s) \exp(-i\,\alpha \cdot (l + \mu^0)) d\alpha,$$

ahora se aplica la transformada de Laplace inversa, con $\mu = l + \mu^0$:

$$B(\mu, y, \mu^0, t) = \frac{y^{-m}}{(2\pi)^{n+1} i} \int_{Re\,s - i\infty}^{Re\,s + i\infty} \int_{R^n} B(\alpha, s) \exp(-i\,\alpha \cdot \mu) d\alpha \exp(st)\, ds \qquad (5.32)$$

$$B\left(\mu\right)=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^{2}}{\bar{D}\left(\mu\right)}$$

$$\bar{D}\left(\mu\right)=\frac{y^{m}\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^{2}}{\frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{Re\, s-i\infty}^{Re\, s+i\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} B\left(\alpha,s\right)\exp(-i\,\alpha\cdot\mu)d\alpha\exp\left(st\right)ds},$$

se regresa a la variable original θ (5.18)

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \mu}D\left(\theta\right)$$

$$D\left(\theta\right)=\bar{D}\left(\mu\right),$$

se obtiene que D debe satisfacer la relación

$$D\left(\theta\right)=\frac{y^{\frac{m}{3}}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{Re\, s-i\infty}^{Re\, s+i\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} B\left(\alpha,s\right)\exp(-i\,\alpha\cdot\mu\left(\theta\right))d\alpha\exp\left(st\right)ds\right)^{\frac{1}{3}}},$$

al denotar por h el inverso del denominador

$$\begin{aligned} h^{-3}\left(\theta,t\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{Re\, s-i\infty}^{Re\, s+i\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} B\left(\alpha,s\right)\exp(-i\,\alpha\cdot\mu\left(\theta\right))d\alpha\,\cdot \\ &\quad\cdot\exp\left(st\right)ds \end{aligned}$$

la cual puede modificarse al denotar $s=is'$, $s'=s'_1+is'_2$, $B\left(\alpha,is'\right)=C\left(\alpha,s'\right)$, y $\check{C}$ la transformada inversa de Fourier en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} h^{-3}\left(\theta,t\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{is'_2-\infty}^{is'_2+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} B\left(\alpha,is'\right)\exp(-i\,\alpha\cdot\mu\left(\theta\right))d\alpha\,\cdot \\ &\quad\cdot\exp\left(is'_1t-s'_2t\right)ds' \\ &= \exp\left(-s'_2t\right)\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} C\left(\alpha,s'\right)\cdot \\ &\quad\cdot\exp(-i\ (\alpha\cdot\mu\left(\theta\right)-s'_1t))d\alpha ds'_1 \\ h\left(\theta,t\right) &= \exp\left(\tfrac{1}{3}s'_2t\right)\check{C}\left(\theta,t\right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

la relación finalmente para el coeficiente de difusión será:

$$D\left(\theta\right)=h\left(\theta,t\right)y^{\frac{m}{3}}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En el fenómeno de la consolidación de los suelos, la razón del volumen de vacíos al volumen total de sólidos más vacíos, se conoce como porosidad y se denotará por ϕ. Con a_v se representa el coeficiente de compresibilidad que se define por

$$a_v=\frac{1}{(1-\phi)^2}\frac{d\phi}{d\psi}=\frac{de}{d\psi}$$
$$e=\frac{\phi}{1-\phi},$$

sea γ_w el peso específico del agua, K_s la conductividad hidráulica saturada y C_v el coeficiente de consolidación. La ecuación que rige el fenómeno de la consolidación de los suelos se representa por [61]

$$C_v = \frac{K_s}{(1-\sigma)a_y\gamma_w}$$
$$\frac{1}{C_v}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi.$$

Tanto para el fenómeno de la consolidación, como para el de la infiltración se plantea el problema inverso cuasilineal-inyectivo.

5.1.8 LINEAL

Para un acuífero sea ψ la presión o carga hidráulica, T el coeficiente de transmisividad, μ el coeficiente de almacenamiento y q la función fuente o recarga. La ecuación que rige el flujo no-estacionario en un acuífero confinado, heterogéneo e isotrópico es [77]

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla.\,(T\nabla\psi) + q.$$

Se plantea ahora la determinación de la transmisividad con un medio heterogéneo en donde ésta dependa sólo de las coordenadas espaciales. Con una transformación de Kirchhoff

$$\bar{x} = \int_0^x \frac{dx'}{T},$$

la ecuación de los acuíferos puede dársele la forma:

$$\mu T\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla^2\psi = \Delta\psi.$$

Se plantea el problema inverso siguiente: Determinar el coeficiente E :

$$E\,(x)\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + \delta(x - x^0, y, t) \qquad x, x^0 \in I\!R^n \quad y \geq 0$$

$$\psi(x, y, t < 0, x^0) = 0 \qquad (\psi' + h\psi)(x, 0, t, x^0) = 0.$$

Por un método análogo al anterior se encuentra que la transformada de Fourier de los datos es una integral de Laplace de la transformada de Fourier de la transmisividad [73]:

$$\begin{aligned} g\,(\alpha, r) &= \hat{f}(\alpha, k)(h - |k|)(h - |k - \alpha|) \\ &= \int_0^\infty \exp(-ry')\hat{E}(\alpha, y')dy', \qquad r = |k - \alpha| + |k|. \end{aligned} \tag{5.33}$$

con la solución

$$\begin{aligned} E\,(x, y, x^0, t) &= y^{-m}h\,(x, t) \\ h\,(x, t) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int_{Re\,s-i\infty}^{Re\,s+i\infty}\int_{I\!R^n} E\,(\alpha, s)\exp(-i\,\alpha\cdot x)d\alpha\exp\,(st)\,ds \\ &= \tfrac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int_{is_2'-\infty}^{is_2'+\infty}\int_{I\!R^n} E\,(\alpha, is')\exp(-i\,\alpha\cdot x)d\alpha\cdot \\ &\cdot\exp\,(is_1't - s_2't)\,ds_1' \\ &= e^{-s_2't}\,\bar{E}\,(x, t)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente buscado debe satisfacer la relación

$$E\,(x, y, x^0, t) = y^{-m}e^{-s_2't}\,\bar{E}\,(x, t)\,.$$

5.1.9 LA REGULARIZACION DE TIJONOV

De acuerdo al principio de causalidad eficiente se busca definir una funcional lagrangiana apropiada cuyo programa variacional conduzca a los operadores de Tijonov.

Se consideran los espacios de Hilbert X y Y, el operador compacto K definido entre ellos, se designa con y_δ la colección de datos obtenidos por medición, se define por F las diferencias de sus distancias cuadráticas hasta las imágenes por K con el error cuadrático en los datos:

$$F(a) = ||Ka - y_\delta||^2 - \delta^2$$

y por f las normas cuadráticas de los argumentos:

$$f(a) = ||a||^2,$$

como estas funcionales son convexas y diferenciables la condición Khun-Tucker produce:

$$df_p(a) + \lambda dF_p(a) = 2\langle p, a\rangle + 2\lambda\langle Kp - y_\delta, Ka\rangle = 0$$
$$\langle(\lambda K^*K + I)p - \lambda K^* y_\delta, a\rangle = 0,$$

por lo tanto con $\lambda^{-1} = \alpha$, llamado en este contexto parámetro de regularización, se obtiene la solución p de $F(p) = 0$, conocida como principio de discrepancia de Morozov y la colección de operadores de regularización de Tijonov:

$$(\alpha I + K^*K)^{-1}K^* y_\delta = p = x_\alpha^\delta.$$

5.1.10 SOLUCION REGULARIZADA

La segunda solución se obtiene con base en la regularización de Tijonov.

Sea $(\sigma_n; u_n, v_n)$ un sistema singular del operador compacto K y G una función continua. Con fundamento en el cálculo operacional se tiene:

$$G(K^*K)(\cdot) = \sum_1^\infty G(\sigma_n^2)\langle\cdot, u_n\rangle u_n,$$

luego para la función $G(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ se halla:

$$(\alpha I + K^*K)^{-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{\alpha + \sigma_n^2}\langle\cdot, u_n\rangle u_n,$$

entonces la expansión para la difusividad será:

$$\hat{D}_\alpha^\delta = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*\hat{f}_\delta = \sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{\alpha + \sigma_n^2}\langle\hat{f}_\delta, v_n\rangle u_n. \qquad (5.34)$$

6. CAPITULO 6

6.1 PROBLEMA INVERSO ESTOCASTICO

Como problema inverso se plantea determinar el coeficiente de arrastre de una ecuación diferencial estocástica.

Para ello se define un proceso de difusión, su generador infinitesimal y el operador característico.

En concordancia con el principio de relatividad, se define el coeficiente de difusión en forma tensorial y se halla su expresión local. Se encuentra también la ley de transformación del determinante de la matriz del coeficiente de difusión, con lo cual es posible definir el escalar adecuado.

Se introduce tensorialmente el coeficiente de arrastre y el modificado.

Posteriormente, se considera la densidad o corriente de probabilidad y entonces es posible definir la divergencia covariante apropiada. Al final se consigue la forma covariante del operador de Fokker-Planck.

Los conceptos desarrollados se aplican al caso unidimensional. Se define una transformación de coordenadas y se halla la forma particular de la ley de transformación para el coeficiente de arrastre, lo mismo que para las funciones y el operador de Fokker-Planck. Se generaliza a los rayos en el caso multidimensional.

Siguiendo a [72], cuando se considera la solución estacionaria puede introducirse un potencial y hallar su efecto sobre la representación de la corriente de probabilidad. Finalmente se logra una representación del operador de Fokker-Planck del cual es posible inferir un operador autoadjunto.

En este capítulo estimamos que nuestro aporte es:

- Plantear y resolver el problema inverso para el coeficiente de arrastre de una ecuación diferencial estocástica. En el método se recurre al operador Fokker-Planck.

6.1.1 PROCESO DE DIFUSION

Un proceso de difusión es un proceso estocástico:

$$\begin{array}{ccc} [0,\infty)\times\Omega & \xrightarrow{X} & I\!R^n \\ (s,\omega) & \longmapsto & X(s,\omega)=X_s(\omega), \end{array}$$

que satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$\begin{array}{rcl} dX_s & = & b(X_s)\,ds+\sigma(X_s)\,dB_s; \qquad s\geq t \\ X_t & = & x, \end{array}$$

donde B_s es un movimiento Browniano m-dimensional y los coeficientes:

$$\begin{array}{cccc} b: & I\!R^n & \longrightarrow & I\!R^n \\ \sigma: & I\!R^n & \longrightarrow & I\!R^{n\times m}, \end{array}$$

satisfacen las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} |b(x)|+|\sigma(x)| & \leq & C_1(1+|x|); \quad |\sigma|^2=\Sigma|\sigma_{ij}|^2 \\ |b(x)-b(y)|+|\sigma(x)-\sigma(y)| & \leq & C_2|x-y|; \qquad x,y\in I\!R^n. \end{array}$$

A una difusión X_t se le asocia un operador diferencial parcial de segundo orden L, llamado *el generador infinitesimal de la difusión* X_t y es definido por:

$$\begin{array}{l} (Lf)(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{E^X[f(X_t)]-f(x)}{t}; \quad x\in I\!R^n \\ f: I\!R^n \longrightarrow I\!R, \end{array}$$

se denota su dominio por $\mathcal{D}_L(x)$ y en el caso de que exista el límite para todo x, por $\mathcal{D}_L$. Se sabe que cuando f es dos veces continuamente diferenciable en $I\!R^n$, acotada, con primera y segunda derivada acotada: entonces f esta en el dominio $\mathcal{D}_L$ y se representa por:

$$Lf(x)=\sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\sigma\sigma^T\right)_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f; \quad f\in C_0^2(I\!R^n).$$

El concepto de generador se puede generalizar al de *Operador Característico*; cuando se considera la colección de abiertos U que decrecen al punto x y se define el Primer Tiempo de Salida de U para el proceso X_t como:

$$\tau_U=\inf\{t>0: X_t\notin U\},$$

se denota el dominio por $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ y éste es igual al conjunto de funciones para las cuales el siguiente límite existe para toda x:

$$\mathcal{A}f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{U\downarrow x}\frac{E^X[f(X_{\tau_U})]-f(x)}{E^X[\tau_U]} & \\ 0 & si \quad E^X[\tau_U]=\infty, \forall U\ni x. \end{cases}$$

Se sabe que las funciones dos veces continuamente diferenciables están incluidas en el dominio de definición del operador característico y que en este dominio coincide con el operador característico L:

$$\begin{array}{c} C^2\subset\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A}f=Lf. \end{array}$$

Entonces se tiene definido lo que es un proceso de difusión y su operador generador infinitesimal, que nos conducirá al operador de Fokker-Planck.

6.1.2 COVARIANZA

La representación del operador L no es covariante como se requiere en las aplicaciones a fenómenos físicos, por tanto es necesario determinar su forma covariante. Se formulan de forma tensorial los distintos elementos que conforman el operador de Fokker-Planck, con el objetivo de hacerlo invariante por transformaciones de coordenadas.

Se define *el coeficiente de difusión* como un tensor dos veces contravariante en un punto $p \in U$, luego es una aplicación bilineal:

$$D : T_p^* (U) \times T_p^* (U) \longrightarrow I\!R,$$

si $\varphi_1, \varphi_2 \in T^* (U)$ son dos covectores se evalúa el tensor D :

$$\begin{aligned} D_p (\varphi_1, \varphi_2) &= D_p \left(\left(\varphi_i \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \right)_p dx_p^j \right)_i \right) \\ &= \varphi_1 \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \varphi_2 \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \right)_p D_p \left(dx_p^i, dx_p^j \right), \end{aligned}$$

al identificar el dual de $T^* (U)$ con $T (U)$ se tiene:

$$\varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (\varphi_j) ;$$

luego:

$$D_p (\varphi_1, \varphi_2) = D_p \left(dx_p^i, dx_p^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p (\varphi_1, \varphi_2),$$

y la expresión local del campo tensorial dos veces contravariante sobre U resulta:

$$D_p = D_p^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p .$$

Se asume que la matriz de difusión D^{ij} es definida positiva y se obtiene su determinante:

$$\det = \det \left(D^{ij} \right),$$

se halla su ley de transformación bajo cambios de coordenadas, a partir de la transformación de la matriz de difusión:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{kr} &= \left(D^{ij} \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \left(d\tilde{x}^k, d\tilde{x}^r \right) \\ &= D^{ij} \tfrac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \tfrac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

en consecuencia, la ley de transformación del determinante sera:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{\det} \right) = \quad & \det \left(D^{ij} \tfrac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \tfrac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \right) \\ & \det \left(\tfrac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \right)^2 \det D^{ij} \\ & \tfrac{\det}{J_a^2}; \quad J_a = \det \left(\tfrac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \right), \end{aligned}$$

entonces puede definirse el escalar $\sqrt{\det} f$, el cual debe ser invariante bajo cambios de coordenadas, como lo requiere el concepto de escalar:

$$\sqrt{\left(\widetilde{\det}\right)}\,\bar{f} = \sqrt{\left(\widetilde{\det}\right)}\,J_a f = \sqrt{\frac{\det}{J_a^2}}\,J_a f = \sqrt{\det} f.$$

Se halla también un coeficiente de deriva o arrastre contravariante:

$$a = a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

que se transforma como:

$$\bar{a}^k = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \bar{x}^k;$$

se define el *coeficiente de arrastre modificado*:

$$a^i = b^i - \sqrt{\det}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{D^{ij}}{\sqrt{\det}},$$

debido a los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \bar{a}^k = \;& a^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} \bar{x}^k \\ & b^i \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} - \sqrt{\det} \tfrac{\partial}{\partial x^j} \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\det}} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \\ & b^i \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} - \sqrt{\det} \tfrac{1}{J_a} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \tfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} J_a \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\det}} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \\ & b^i \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} - \sqrt{\widetilde{\det}} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \tfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} + \sqrt{\widetilde{\det}} \left(\tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \right) \tfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} \\ & b^i \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} - \sqrt{\widetilde{\det}} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \tfrac{\bar{D}^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} + \sqrt{\widetilde{\det}} \left(\tfrac{\partial}{\partial x^j} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \right) \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} \\ & \left(b^i \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \sqrt{\widetilde{\det}} \left(\tfrac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \right) \tfrac{D^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} \right) - \sqrt{\widetilde{\det}} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^r} \tfrac{\bar{D}^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}}, \end{aligned}$$

se concluye que el coeficiente a es contravariante si y solo si:

$$b^i \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \sqrt{\widetilde{\det}} \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{D^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} = \bar{b}^i.$$

Se define el vector contravariante (densidad de) corriente de probabilidad, a partir del coeficiente a y la contracción del de difusión con vectores básicos contravariantes:

$$J = a - D\urcorner \frac{\partial}{\partial x^j}$$

y la divergencia resulta:

$$div = \sqrt{\det}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{(\cdot)}{\sqrt{\det}},$$

porque al aplicarla sobre la corriente de probabilidad, se obtiene un escalar:

$$\begin{aligned} divJ \quad =\; & \sqrt{\det} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \tfrac{J^i}{\sqrt{\det}} \\ & \tfrac{\sqrt{\widetilde{\det}}}{J_a} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \tfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \tfrac{J_a}{\sqrt{\widetilde{\det}}} J^i \\ & \sqrt{\widetilde{\det}} \tfrac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \tfrac{\bar{J}^i}{\sqrt{\widetilde{\det}}}, \end{aligned}$$

finalmente, la forma covariante del operador de Fokker-Planck será:

$$\begin{gathered} L = divJ \\ = \sqrt{\det} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \tfrac{1}{\sqrt{\det}} \left(a^i (\cdot) - D^{ij} \tfrac{\partial}{\partial x^j} (\cdot) \right). \end{gathered}$$

Por tanto puede usarse en formulaciones intrínsecas y adaptarlo a cualquier sistema de coordenadas.

CASO UNIDIMENSIONAL

El caso unidimensional es particularmente importante por la utilidad y versatilidad de los resultados.

Se realiza un cambio de coordenadas que transforma al coeficiente de difusión en una constante:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{C}{\sigma}} d\bar{x}, \tag{6.1}$$

por la condición contravariante del coeficiente de arrastre, se encuentra su ley de transformación:

$$\begin{gathered} b^i \frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{\widetilde{\det}} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{\widetilde{\det}}} = \tilde{b}^i \\ b^i \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sigma = \tilde{b}^i \\ \tilde{b}^i = \sqrt{\frac{C}{\sigma}} b^i - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{\sigma}} \frac{d\sigma}{dx}, \end{gathered}$$

en tanto la función (densidad de probabilidad) f se transforma como:

$$\tilde{\rho} = \rho J_a = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \rho = \sqrt{\frac{\sigma}{C}} \rho$$

y el operador adopta la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \widetilde{div} \tilde{J} \\ &= \sqrt{\widetilde{\det}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\det}}} \left(\tilde{a}^i (\cdot) - \tilde{D}^{ij} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} (\cdot) \right) \\ &= \sqrt{C} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{C}} \left(\tilde{b}^i - \sqrt{\widetilde{\det}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\tilde{D}^{ij}}{\sqrt{\widetilde{\det}}} - C \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{b}^i - \sqrt{C} \frac{\partial}{\partial y} \frac{C}{\sqrt{C}} - C \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{b}^i}{\partial y} - C \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Por tanto sin pérdida de generalidad puede considerarse el coeficiente de difusión constante en el caso unidimensional, y a lo largo de rayos en el caso multidimensional.

6.1.3 EL OPERADOR AUTOADJUNTO ASOCIADO

Para la solución del problema inverso es importante transformar el operador Fokker-Planck. Se quiere obtener un operador de Schrödinger, con el fin de aplicar los resultados de la subsección (4.1.1).

Se introduce el potencial Φ, como resultado de considerar la solución estacionaria de la ecuación Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} J = -\left(\frac{\partial}{\partial x} b^1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma(x) \right) \rho(x,t) = 0,$$

cuya solución es:

$$\rho = \text{cte} \, \frac{1}{\sigma} e^{\int \frac{b^1}{\sigma} d\bar{x}} = \text{cte} \, e^{-\Phi}.$$

En consecuencia, se define el potencial por:

$$\Phi(x) = \ln \sigma(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{b^1(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} d\bar{x}, \tag{6.2}$$

la corriente de probabilidad ahora puede representarse por:

$$\begin{aligned} J(x,t) &= -\sigma e^{-\Phi} \tfrac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} \rho \\ &= -\sigma \left(\tfrac{\partial \Phi}{\partial x} \rho + \tfrac{\partial}{\partial x} \rho \right) \\ &= \left(b^1 - \sigma \tfrac{\partial}{\partial x} \right) \rho; \end{aligned}$$

por tanto el operador Fokker-Planck resulta:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \sigma e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi},$$

del cual se logra el operador autoadjunto:

$$L_2 = e^{\Phi} L_1;$$

en efecto:

$$\begin{aligned} \langle \rho, L_2 g \rangle &= \int_{x_1}^{x_2} \rho e^{\Phi} L_1 g dx \\ &= \int \rho e^{\Phi} \tfrac{\partial}{\partial x} \left(\sigma e^{-\Phi} \tfrac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} g \right) dx \\ &= - \int \left(\tfrac{\partial}{\partial x} \rho e^{\Phi} \right) \left(\sigma e^{-\Phi} \tfrac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} g \right) dx - \rho e^{\Phi} \left. J_2 \right|_{x_1}^{x_2} \\ &= + \int \tfrac{\partial}{\partial x} \left(\sigma e^{-\Phi} \left(\tfrac{\partial}{\partial x} \rho e^{\Phi} \right) \right) e^{\Phi} g dx + g e^{\Phi} \left. J_1 \right|_{x_1}^{x_2} - \rho e^{\Phi} \left. J_2 \right|_{x_1}^{x_2} \\ &= \langle L_2 \rho, g \rangle + g e^{\Phi} \left. J_1 \right|_{x_1}^{x_2} - \rho e^{\Phi} \left. J_2 \right|_{x_1}^{x_2}, \end{aligned}$$

las condiciones de frontera se escogen sobre la base de: i) la reflexión total, se presenta por ejemplo cuando el potencial crece al infinito y entonces la corriente de probabilidad se anula. ii) la absorbencia total, se observa entre otros cuando el potencial decrece a menos infinito y entonces $e^{\Phi}\rho$ se anula.
Cuando se fijan las condiciones de frontera apropiadas el operador L_2 resulta simétrico y entonces tiene una única extensión cerrada autoadjunta, que se continuará denotando por L_2; también será autoadjunto el operador L_3 definido por:

$$L_3 = e^{\frac{\Phi}{2}} L_1 e^{-\frac{\Phi}{2}}.$$

Se factoriza el operador L_3 en un producto de dos operadores mutuamente adjuntos:

$$L_3 = e^{\frac{\Phi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \sigma e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi} e^{-\frac{\Phi}{2}}$$

$$= e^{\frac{\Phi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\sigma} e^{-\frac{\Phi}{2}} \cdot \sqrt{\sigma} e^{-\frac{\Phi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{\Phi}{2}} = L_4 L_5,$$

donde se definen los nuevos operadores:

$$L_4 = -e^{\frac{\Phi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\sigma} e^{-\frac{\Phi}{2}},$$

$$L_5 = \sqrt{\sigma} e^{-\frac{\Phi}{2}} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{\Phi}{2}}.$$

Con el potencial Φ -(6.2)- se le da a los operadores L_4 y L_5 otra forma explícita:

$$L_5 \rho = \sqrt{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \ln \sigma + \frac{1}{2} \int \frac{b^1}{\sigma} dx} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{1}{2} \ln \sigma - \frac{1}{2} \int \frac{b^1}{\sigma} dx} \rho$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{2}\frac{b^1}{\sqrt{\sigma}} + \sqrt{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho,$$

por tanto:

$$L_5 = \sqrt{\sigma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right),$$

análogamente:

$$L_4 = -\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right).$$

Entonces el operador L_3 asume la forma:

$$L_3 = -L_4L_5 = -\left(-\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right)\right)\left(\sqrt{\sigma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right)\right)$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x}\sigma\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{db^1}{dx} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right)^2,$$

donde se observa en el primer término la característica general de muchos fenómenos naturales: ser la divergencia de un campo proporcional a un gradiente. Después se conjunta los últimos tres sumandos en el término genérico de un potencial q :

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x}\sigma\frac{\partial}{\partial x} - q$$

y el potencial queda definido por:

$$q = -\frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{db^1}{dx} + \frac{1}{4\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dx} - b^1\right)^2.$$

De acuerdo con la transformación de coordenadas que permite obtener el coeficiente de difusión constante -(6.1)- se obtiene:

$$L_3 = \sigma\frac{d^2}{dx^2} - q,$$

donde el potencial ahora es:

$$q = \frac{1}{2}\frac{db^1}{dx} + \frac{1}{4\sigma}\left(b^1\right)^2. \tag{6.3}$$

Al usar la transformación:

$$\phi = -\int^{x} b^1 d\bar{x}$$

y el potencial Φ -(6.2) -:

$$\Phi = \ln\sigma - \int^{x}\frac{b^1}{\sigma}d\bar{x} = \frac{\phi}{\sigma} + \text{cte},$$

la ecuación para el potencial q -(6.3)- queda:

$$q = \frac{1}{4\sigma}\left(\phi'\right)^2 - \frac{1}{2}\phi'', \tag{6.4}$$

en conclusión, si a través del problema inverso se halla el potencial q, se puede entonces determinar el potencial ϕ resolviendo la ecuación de Ricatti (6.4) .

A manera de conclusión se observa que de una parte, después de la formulación de la relatividad de Einstein, es reconocida la necesidad de enunciar las leyes físicas en forma covariante, para garantizar su validez en cualquier sistema inercial de referencia. El coeficiente de difusión también se ha caracterizado en este capítulo como un tensor dos veces contravariante y en tal caso su matriz define una métrica del espacio-tiempo, en tanto que su matriz inversa determina el tensor métrico covariante.

Como se sabe si el tensor de curvatura se anula, el espacio es euclidiano en cuanto a su métrica. En forma global, éste es el caso en una dimensión, en tanto que en dimensiones superiores solamente se logra este resultado en forma local. Por tanto, a lo largo de cada rayo con una transformación apropiada en el espacio de configuración, el coeficiente de difusión puede siempre ser convertido en una constante positiva.

De otra parte en la subsección (5.1.7) demostramos la naturaleza fractal del coeficiente de difusión. Finalmente, combinando esas afirmaciones, destacamos la naturaleza dual - fractal y covariante- del coeficiente de difusión, el primero en el espacio de Fourier, el segundo en el espacio de configuración.

PARTE III

APENDICES

7. APENDICE 1

7.1 REGULARIZACION

En este apéndice siguiendo a Engls se revisan los conceptos de inverso generalizado de Moore-Penrose, se demuestra que para datos exactos este inverso generalizado es la mejor aproximación y también es único.

En el capítulo (5) se aplicó el principio de causalidad eficiente para hallar la colección de operadores de Tijonov y se obtuvo:

$$x_\alpha^\delta = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* y_\delta = U(\alpha, T) K^* y_\delta.$$

Esta colección depende de dos objetos que se denominan: el parámetro de regularización - α -, y el operador el cual en este contexto se denotará por T.

Esta colección tiene tres propiedades básicas que se estudian en la sección dos. La primera, los operadores de Tijonov aproximan al inverso del operador T, cuando el parámetro de regularización es pequeño. La segunda, en la norma los operadores de Tijonov no superan al inverso del operador T, en alguna vecindad del primer valor propio de T. La tercera, la colección es continua con respecto al parámetro α.

Posteriormente se demuestra que la solución de Tijonov es muy cercana al inverso generalizado si se asumen datos exactos. Pero aún , para datos perturbados esta solución puede considerarse un estimador del inverso generalizado.

Finalmente se estudia la convergencia relativa entre el error en los datos y el parámetro de regularización para concluir que la convergencia del error debe dominar la del parámetro, o de forma específica: el cuadrado del error debe tender a cero más rápido que el parámetro. [27], [81], [36], [6].

7.1.1 INVERSO GENERALIZADO

Sea X es un espacio de Hilbert y K un operador compacto definido en él.

Como todo operador compacto es continuo, y estos últimos tienen su núcleo cerrado, se aplica el Teorema de la Proyección para obtener la descomposición:

$$X = N(K) \oplus N(K)^\perp,$$

sea la restricción de K al complemento ortogonal de su núcleo $N(K)$:

$$\tilde{K} = K|_{N(K)^\perp} : N(K)^\perp \longrightarrow R(K),$$

esta restricción $\tilde{K}$ resulta inyectiva lo que permite definir su inverso izquierdo: $\tilde{K}^{-1}$ en el dominio $R(K)$ y extenderlo linealmente hasta su complemento ortogonal

$R(K)^{\perp}$ y será denotado K^{+}:

$$K^{+}: D(K^{+}) = R(K) \oplus R(K)^{\perp} \longrightarrow N(K)^{\perp}, \qquad K^{+} = ext\tilde{K}^{-1}. \tag{7.1}$$

K^{+} resulta bien definido, su núcleo es el complemento ortogonal del rango de K, y su rango es el complemento ortogonal del núcleo de K:

$$N(K^{+}) = R(K)^{\perp}, \qquad R(K^{+}) = N(K)^{\perp}.$$

Si P es el proyector sobre el núcleo de K y Q sobre la cerradura del rango de K, pueden establecerse las siguientes correlaciones con el operador K:

- 1. $KK^{+} = Q|_{D(K^{+})}$.
- 2. $K^{+}K = I - P$.
- 3. $KK^{+}K = K$.
- 4. $gr\tilde{K}^{-1} = \{(Kx, x) : x \in X\} \cap Y \times N(K)^{\perp}$.

Por la propiedad 4. el grafo de K^{+} es cerrado en $Y \times X$, y de acuerdo con el teorema del Grafo Cerrado:

$$K^{+} \text{ es acotado} \Leftrightarrow R(K) \text{ es cerrado;}$$

pero en el caso de K compacto :

$$R(K) \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \text{la dimensión del rango de } K \text{ es finita,}$$

es decir, cuando K es compacto y la dimensión de su rango es infinita, K^{+} resulta no acotado, densamente definido y con grafo cerrado.

A continuación se prueba que $K^{+}y$ es la única solución de mínimos cuadrados de norma mínima de $Kx = y$, también conocida como mejor aproximación.

Para cada dato exacto $y \in D(K^{+})$ se tiene que las soluciones de mínimos cuadrados son las preimagenes de K de las proyecciones verticales Q sobre el rango de K:

$$K^{-1}(Qy) = \{x \in X \ : \ x = \min\{\|Kz - y\|, \ z \in X\}, \tag{7.2}$$

como Q es un proyector ortogonal también es proyector métrico. Sea $u \in K^{-1}(Qy)$ entonces:

$$\|Ku - y\| = \|Qy - y\| \leq \|Kx - y\|,$$

y u es mínimo cuadrado.

Por el contrario, si x es un mínimo cuadrado:

$$\|Qy - y\| \leq \|Kx - y\| = \inf\{\|u - y\| \ : \ u \in R(K)\} = \|Qy - y\|,$$

y x es una preimagen por K de la imagen de y por Q - $x \in K^{-1}(Qy)$ -.

De otra parte, $K^{-1}(Qy)$ por ser un subespacio lineal cerrado, contiene un elemento de norma mínima sea éste: $\bar{x}$, luego $\bar{x} \in N(K)^{\perp}$ y

$$\bar{x} = (I - P)\bar{x} = K^{+}K\bar{x} = K^{+}Qy = K^{+}KK^{+}y = K^{+}y. \tag{7.3}$$

En resumen, el inverso generalizado de Moore-Penrose - $K^{+}y$ - coincide con la mejor aproximación, cuando se asume que los datos son exactos.

El resultado anterior se reformula diciendo que $Kx - y$ esta en el núcleo de K^{*} el dual del operador K:

$$\{x \in X \ : \ x = \min\{\|Kz - y\|, \ z \in X\} \Leftrightarrow K^{*}Kx = K^{*}y,$$

porque: $x = \min\{\|Kz - y\|, \ z \in X\}$ si y sólo si, Kx es el elemento más cercano a y en $R(K)$, lo cual tiene las siguientes equivalencias :

$$\Leftrightarrow Kx - y \in R(K)^{\perp} = N(K^{*}) \Leftrightarrow K^{*}(Kx - y) = 0 \Leftrightarrow K^{*}Kx = K^{*}y,$$

y se tiene el resultado propuesto.

7.1.2 OPERADORES DE TIJONOV

De la regularización de Tijonov:

$$(\alpha I + K^*K)^{-1}K^*y_\delta = x_\alpha^\delta, \tag{7.4}$$

se denota :

$$U(\alpha, K^*K)K^*y_\delta = x_\alpha^\delta \tag{7.5}$$

y la colección de operadores de regularización satisfacen:

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0} U(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.
2. $|\lambda U(\alpha,\lambda)| \leq 1, \quad \forall(\alpha,\lambda) \in ((0,+\infty) \times [-\epsilon, \sigma_1^2 + \epsilon]$.
3. $U(\alpha,\cdot)$ es continua (a trozos), para cada α .

A partir de estas tres hipótesis, obtenemos los siguientes resultados:

1.-Con datos exactos, el límite de las soluciones es el inverso generalizado de Moore-Penrose:

$$\lim_{\alpha\to 0} x_\alpha = K^+y, \qquad \forall y \in D(K^+).$$

2.-La diferencia entre las soluciones para datos exactos y datos perturbados se acota por el supremo de los operadores de Tijonov:

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 \leq \delta^2 C \sup_{\lambda\in[0,\sigma_1^2]} |U(\alpha,\lambda)|.$$

3.-Si se asume información a priori en el sentido de que el inverso generalizado debe estar en la imagen reiterada :

$$K^+y \in R((K^*K)^\nu), \quad \exists\nu > 0,$$

la distancia entre la solución para datos exactos y el inverso generalizado es del orden de la cota $w(\alpha,\nu)$:

$$||x_\alpha - K^+y|| = O(w(\alpha,\nu)),$$

la cual debe satisfacer la condición:

$$\lambda^\nu|1 - \lambda U(\alpha,\lambda)| \leq w(\alpha,\nu), \qquad \forall\lambda \in [0,\sigma_1^2].$$

4.-La distancia entre las soluciones para datos perturbados y el inverso generalizado se acota por la función w y el supremo de los operadores de Tijonov:

$$||K^+y - x_\alpha^\delta|| \leq w(\alpha,\nu) + \delta(C \sup_\lambda |U(\alpha,\lambda)|)^{\frac{1}{2}}.$$

5.-El parámetro de regularización α debe tender a cero de tal manera que el inverso del supremo del operador de Tijonov permita la convergencia a cero del error δ en los datos :

$$\delta^2 \sup_\lambda |U(\alpha,\lambda)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

En la afirmación 1. se necesita hallar la distancia entre la solución para datos exactos y el inverso generalizado. De la solución (7.4) :

$$\lim_{\alpha\to 0} ||x_\alpha - K^+y||^2 = \lim_{\alpha\to 0} ||U(\alpha, K^*K)K^*y - K^+y||^2,$$

como K^+y es la solución de $K^*Kx = K^*y$ de norma mínima :

$$\lim_{\alpha\to 0} ||U(\alpha, K^*K)K^*y - K^+y||^2 = \lim_{\alpha\to 0} ||U(\alpha, K^*K)K^*Kx - x||^2,$$

de acuerdo al cálculo operacional:

$$\lim_{\alpha\to 0} ||U(\alpha, K^*K)K^*Kx - x||^2 = \lim_{\alpha\to 0} || \int_{-\epsilon}^{\sigma_1^2+\epsilon} (U(\alpha,\lambda)\lambda - 1)dE_\lambda x||^2$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\epsilon}^{\sigma_1^2+\epsilon} (U(\alpha,\lambda)\lambda - 1)^2 ||dE_\lambda x||^2,$$

por el Teorema de la Convergencia Acotada:

$$= \int_{-\epsilon}^{\sigma_1^2+\epsilon} \lim_{\alpha\to 0} (U(\alpha,\lambda)\lambda - 1)^2 d||E_\lambda x||^2$$

$$= \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \\ \int d\,||E_\lambda x||^2 & \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ ||P(x)||^2 \end{cases} = 0,$$

porque si :

$$x = K^+y \Rightarrow x \in N(K)^\perp = R(K^+) \Rightarrow P(x) = 0,$$

y se tiene el resultado esperado :

$$\lim_{\alpha\to 0} ||x_\alpha - K^+y||^2 = 0.$$

2. Se busca la distancia entre las soluciones para datos exactos y para los perturbados:

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 = \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, x_\alpha - x_\alpha^\delta\rangle,$$

de acuerdo con la solución (7.4) :

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 = \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, U(\alpha, K^*K)K^*y - U\,(\alpha, K^*K)\; K^*y_\delta\rangle$$

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 = \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, U(\alpha, K^*K)K^*(y - y_\delta)\rangle.$$

Se puede formular un cálculo operacional análogo para el operador autoadjunto KK^* , con proyectores F_ν , proyección Q, y con la propiedad de intercambio :

$$U(\alpha, K^*K)K^* = K^*U(\alpha, KK^*),$$

luego al aplicar esta propiedad de intercambio :

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 = \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, K^*U(\alpha, KK^*)(y - y_\delta)\rangle,$$

de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de operador adjunto:

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 \leq ||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||.||U(\alpha, KK^*)||.||y - y_\delta||.$$

De otra parte:

$$||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||^2 = \langle K(x_\alpha - x_\alpha^\delta), K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)\rangle,$$

al sustituir las soluciones :

$$||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||^2 = \langle KU(\alpha, K^*K)K^*(y - y_\delta), K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)\rangle,$$

por la propiedad de intercambio:

$$||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||^2 = \langle KK^*U(\alpha, KK^*)(y - y_\delta), K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)\rangle,$$

y la desigualdad de Cauchy:

$$||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||^2 \leq ||KK^*U(\alpha, KK^*)||.||(y - y_\delta)||.||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)||,$$

por tanto al simplificar:

$$||K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)|| \leq ||KK^*U(\alpha, KK^*)||.||(y - y_\delta)||.$$

Además, del cálculo operacional y dado que Q proyecta sobre $N(K^*) = R(K)^\perp$ y $\overline{R(K)} = Span\{v_i\}$:

$$||KK^*U(\alpha, KK^*)x||^2 = \int (\nu U(\alpha, \nu))^2 d||F_\nu x||^2,$$

$$||KK^*U(\alpha, KK^*)x||^2 \leq \int C^2 d||F_\nu x||^2 = C^2(||Qx||^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, v_i\rangle|^2),$$

$$||KK^*U(\alpha, KK^*)x||^2 = C^2(||Qx||^2 + ||(I - Q)x||^2) = C^2,$$

entonces finalmente :

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta||^2 \leq C\delta \sup_{\lambda \in [0, \sigma_1^2]} |U(\alpha, \lambda)|\delta$$

$$||x_\alpha - x_\alpha^\delta|| \leq \delta(C \sup_{\lambda \in [0, \sigma_1^2]} |U(\alpha, \lambda)|)^{\frac{1}{2}},$$

y se consigue una estimación para la distancia entre las soluciones.

3. Se quiere estimar la distancia entre la solución para datos exactos y el inverso generalizado cuando se cuenta con información apriori :

$$||x_\alpha - K^+y||^2 = ||U(\alpha, K^*K)K^*y - K^+y||^2,$$

con el uso de la información apriori - $K^+y \in R((K^*K)^\nu)$, $\exists \nu > 0$-:

$$||x_\alpha - K^+y||^2 = ||U(\alpha, K^*K)K^*K(K^*K)^\nu z - (K^*K)^\nu z||^2,$$

por el cálculo operacional :

$$||x_\alpha - K^+y||^2 = ||\int (U(\alpha, \lambda)\lambda(\lambda)^\nu z - (\lambda)^\nu) dE_\lambda z||^2,$$

$$||x_\alpha - K^+y||^2 = \int \lambda^{2\nu}|1 - \lambda U(\alpha, \lambda)|^2 d||E_\lambda z||^2,$$

por la condición para la cota w :

$$||x_\alpha - K^+y||^2 \leq \int w^2(\alpha,\nu)d||E_\lambda z||^2$$

por tanto la función w acota el estimado:

$$||x_\alpha^\delta - K^+y|| \leq w(\alpha,\nu).$$

4. Ahora se puede calcular el error total para el estimador x_α^δ del inverso generalizado -K^+y-:

$$||K^+y - x_\alpha^\delta|| \leq ||x_\alpha - K^+y|| + \delta(C \sup_\lambda |U(\alpha,\lambda)|)^{\frac{1}{2}},$$

$$||K^+y - x_\alpha^\delta|| \leq w(\alpha,\nu) + \delta(C \sup_\lambda |U(\alpha,\lambda)|)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Por tanto el parámetro de regularización debe escogerse de tal forma que:

$$\delta^2 \sup_{\lambda\in[0,\sigma_1^2]} |U(\alpha,\lambda)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\ .$$

Para la regularización de Tijonov se tiene que su norma es:

$$|U(\alpha,\lambda)| = |\frac{1}{\alpha+\lambda}|,$$

entonces el supremo es:

$$\sup_{\lambda\in[0,\sigma_1^2]} |U(\alpha,\lambda)| = \frac{1}{\alpha},$$

luego la estimación asume la forma:

$$||x_\alpha^\delta - K^+y|| \leq w(\alpha,\nu) + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}; \tag{7.6}$$

pero además la condición para la función w es:

$$\lambda^\nu(1-\lambda U(\alpha,\lambda)) = \lambda^\nu\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} = w(\alpha,\lambda),$$

y finalmente se acota de la forma siguiente, dependiendo del parámetro ν :

$$\sup w(\alpha,\nu) = \begin{cases} o(\alpha^\nu) & 0<\nu<1 \\ O(\alpha) & \nu\geq 1. \end{cases}$$

8. APENDICE 2

8.1 SCATTERING INVERSO EN EL TIEMPO

Se resalta la eficiencia del método de Scattering inverso cuando éste se plantea en el dominio del tiempo y se usa en conjunción con el método de propagación de singularidades. Para ello se estudia:

1. La función de Riemann que con sustento causal permite describir la solución del problema hiperbólico (8.1), como propagación de los datos iniciales en el espacio-tiempo.
2. La función de influencia no-causal con que se obtiene la solución del problema hiperbólico (8.1) convolucionando los datos de frontera.
3. La transformada Povzner-Levitan que permite pasar de los datos de frontera a los datos iniciales y recíprocamente con la inversa.

8.1.1 LA FUNCION DE RIEMANN

Sea el problema de contorno hiperbólico:

$$\begin{array}{rlll} \Box_q^2 u = & \ddot{u} - u'' + qu & = 0 & x \in I\!R^+, \quad t \in I\!R \\ & (-u' + hu)(0,t) & = 0 & h \in I\!R \\ & u(x,0) & = u_0(x) & \\ & \dot{u}(x,0) & = \tilde{v}_0(x), & \end{array} \tag{8.1}$$

donde se indica con las primas la derivada con respecto a la $1^{\underline{a}}$ variable y con los puntos la derivada con respecto a la segunda.

Los frentes de onda en óptica geométrica son las curvas de nivel $S(x,t)$ =cte de las soluciones $S(x,t)$ de la ecuación eiconal $(\nabla S)^2 = \eta^2$. Considérese la sucesión de distribuciones $(P_j)_j$ con argumentos en los frentes de onda y sujeta a las relaciones de recurrencia:

$$P_j' = P_{j-1}, \quad j \geq 1, \tag{8.2}$$

la solución del problema (8.1) se representa por la serie formal:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} v_j P_j(S), \tag{8.3}$$

que al sustituir en la ecuación diferencial (8.1), produce las relaciones entre las sucesiones de los coeficientes del desarrollo $(v_j)_j$ y las de las distribuciones $(P_j)_j$:

$$\begin{array}{rl} 0 = & \left(-2v_j'S' + 2\dot{v}_j\dot{S} + \left(\ddot{S} - S''\right)v_j\right)P_{j-1} + \\ & + \left(-v_{j-1}'' + \ddot{v}_{j-1} + qv_{j-1}\right)P_{j-1} + v_j\left(\dot{S}^2 - S'^2\right)P_j'', \end{array} \tag{8.4}$$

por tanto se halla la ecuación característica:

$$\dot{S}^2 - S'^2 = 0, \tag{8.5}$$

y la de transporte, donde se asume que $v_{-1} = 0$:

$$2\dot{v}_j\dot{S} - 2v_j'S' + \left(\ddot{S} - S''\right)v_j = v_{j-1}'' - \ddot{v}_{j-1} - qv_{j-1}, \quad j \geq 0. \tag{8.6}$$

En el caso unidimensional el frente de onda tiene la forma:

$$S(x,t) = t - f(x) = \text{cte}, \tag{8.7}$$

luego la de la ecuación característica será:

$$\dot{S}^2 - S'^2 = 1 - (-f')^2 = 0, \tag{8.8}$$

resultando la eiconal con $\eta = 1$:

$$(f')^2 = 1, \tag{8.9}$$

para $x \geq 0$, se asume que $f' = +1$ y en consecuencia:

$$f(x) = x + \text{cte}, \tag{8.10}$$

si se absorbe la constante en el origen del tiempo, el frente de onda queda:

$$S(x,t) = t - x, \tag{8.11}$$

y al final la ecuación de transporte resulta:

$$2v_j' = v_0'' - qv_0 = -q, \tag{8.12}$$

8.1.2 FUNCION DE INFLUENCIA CAUSAL

Se denotará por $G(x,t)$ la solución del problema de contorno hiperbólico:

$$\begin{array}{ll} \ddot{G} - G'' + qG & = 0 \\ (-G' + hG)(0,t) & = \delta'(t) \\ G(x,0^-) & = 0, \end{array} \tag{8.13}$$

donde $\delta'(t)$ es la carga impulsiva en $x = 0$. Se expresa la solución por la serie formal:

$$G(x,t) = \sum_0^\infty v_j P_j(S) = v_0 P_0 + \sum_1^\infty v_j P_j(S), \tag{8.14}$$

y con $S = t - x$, de la condición de contorno resulta:

$$\begin{aligned} G'(x,t) &= P_0' + \sum_1^\infty v_j' P_j(S) + \sum_1^\infty v_j P_j'(S) \\ &= P_0' + \sum_1^\infty v_j' P_j(S) - v_j P_{j-1}(S), \end{aligned} \tag{8.15}$$

por tanto debe escogerse:

$$P_0'(S)|_{x=0} = -\delta'(t), \tag{8.16}$$

entonces la función de influencia causal finalmente quedará:

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \delta(t-x) + \sum_1^{\infty} v_j P_j(S) \\ &= \delta(t-x) - K(x,t), \end{aligned} \tag{8.17}$$

donde:

$$\begin{aligned} -K(x,t) &= \sum_1^{\infty} v_j P_j(t-x) \\ &= v_1 H(t-x) + \sum_2^{\infty} v_j \tfrac{(t-x)^j}{j!} H(t-x) \end{aligned} \tag{8.18}$$

y se ha logrado expandir a G como onda progresiva concentrada más la sombra $K(x,t)$.

Para la sombra cerca de la característica $t=x$ y por arriba $t \to x^+$, se obtiene:

$$\begin{aligned} K(x,x^+) &= -v_1(x) H(t-x) - \sum_2^{\infty} v_j \tfrac{(t-x)^j}{j!} H(t-x) \Big|_{t=x^+} \\ &= -v_1(x) \end{aligned} \tag{8.19}$$

y de la ecuación de transporte para $j=1$:

$$2v_1' = -q(x), \tag{8.20}$$

resulta la relación entre la sombra causal y el potencial:

$$K(x,x^+) = \frac{1}{2}\int_0^x q(x')\,dx' + \text{cte.} \tag{8.21}$$

Se calcula la constante de la condición de contorno para $j=1$:

$$-v_0'(0) + v_1(0) + hv_0(0) = 0 \Leftrightarrow h = -v_1(0), \tag{8.22}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} K(x,x^+) &= \tfrac{1}{2}\int_0^x q(x')\,dx' + h, \\ K(0,0^+) &= h, \end{aligned} \tag{8.23}$$

de la condición de quietud- $G(x,t<0)=0$-, se obtiene:

$$\delta(t-x) - K(x,t<0) = 0, \quad x \geq 0, t < 0, \tag{8.24}$$

que es la correspondiente condición de quietud para la sombra:

$$K(x,t<0) = 0.$$

Se tiene definida la función de influencia causal en el cono: $\{x \geq 0, t \geq x\}$, ahora se simetriza definiendo la función de Riemann en los dos conos:

$$\{x \geq 0, t \geq x\}, \{x \geq 0, t \leq -x\},$$

como:

$$R(x,t) = G(x,t) + G(x,-t),$$

luego su expansión como onda viajera será:

$$R(x,t) = \delta(x-t) + \delta(x+t) - K(x,|t|), \tag{8.25}$$

donde se observa que R es simétrica en el tiempo:

$$R(x,t) = R(x,-t),$$

además como la función de influencia causal G satisface la ecuación hiperbólica:

$$\Box_q^2 G = 0,$$

la cual es invariante por inversión del tiempo, entonces R también la satisface:

$$\Box_q^2 R = 0,$$

en cuanto a la condición de contorno, por ser independiente del tiempo es invariante por inversión del tiempo, luego R también comparte esta invarianza:

$$(-R' + hR)(0,t) = 0,$$

así mismo, para la condición inicial de la velocidad:

$$\dot{R}(x,t) = \delta'(t-x) + \delta'(t+x) - \dot{K}(x,|t|),$$

en $t = 0$ se logra:

$$\dot{R}(x,0) = -\delta'(x) + \delta'(+x) - \dot{K}(x,0) = 0,$$

en tanto para la condición inicial de la posición se llega a:

$$R(x,0) = \delta(-x) + \delta(+x) - K(x,0) = 2\delta(x),$$

y para origenes del espacio y del tiempo arbitrarios:

$$\begin{aligned} \dot{R}(x,t_0) &= 0, \\ R(x,t_0) &= 2\delta(x-x_0), \end{aligned}$$

por tanto en forma equivalente podemos definir la función de Riemann como la solución del problema de contorno hiperbólico con condiciones de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \Box_q^2 R = 0, & x \in I\!R^+, t \in I\!R \\ (-R' + hR)(0,t) = 0, & h \in I\!R \\ R(x,t_0;x_0,t_0) = 2\delta(x-x_0) & \\ \dot{R}(x,t_0;x_0,t_0) = 0, & \end{array}$$

luego, en tanto función de x es una aplicación de orden C^m a valor distribución con soporte compacto del tipo:

$$\begin{array}{ccc} I\!R \times I\!R^+ \times I\!R & \xrightarrow{R} & \mathcal{E}'(I\!R^+) \\ (t,x_0,t_0) & \longmapsto & R(\cdot,t;x_0,t_0), \end{array}$$

como función de t también es de orden C^m y a valor distribución del tipo:

$$\begin{array}{ccc} I\!R \times I\!R^+ \times I\!R & \xrightarrow{R} & \mathcal{D}'(I\!R^+) \\ (x,x_0,t_0) & \longmapsto & R(x,\cdot;x_0,t_0). \end{array}$$

En general para el problema de contorno hiperbólico con condiciones iniciales:

$$\begin{array}{rlll} \Box_q^2 u = & \ddot{u} - u'' + qu & = 0 & x \in I\!R^+, \quad t \in I\!R \\ & (-u' + hu)(0,t) & = 0 & h \in I\!R \\ & u(x,0) & = u_0(x) & \\ & \dot{u}(x,0) & = v_0(x), & \end{array}$$

se concibe a la función de Riemann como un semigrupo propagador de las condiciones iniciales en el espacio-tiempo:

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ \dot{u}(x,t) \end{pmatrix} = \left\langle \mathcal{R}(x,t;x_0,t_0), \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ v_0(x_0) \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^\infty dx_0 \mathcal{R}(x,t;x_0,t_0) \cdot \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ v_0(x_0) \end{pmatrix},$$

por tanto la solución se expresa por:

$$u(x,t) = \int_0^\infty dx_0 \left(R(x,t;x_0,t_0), \int_{t_0}^{t} R(x,t;x_0,t')\,dt' \right) \begin{pmatrix} u_0(x_0) \\ v_0(x_0) \end{pmatrix}. \qquad (8.26)$$

8.1.3 LA FUNCION NO-CAUSAL

Se define la función de influencia no-causal G_1, con soporte en el cono entre las dos características, a través de su expansión como onda viajera:

$$G_1(x,t) = \delta(x-t) + \delta(x+t) + K_1(x,t), \quad |t| \leq x \in I\!R^+, \qquad (8.27)$$

con condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} &(-G_1' + hG_1)(0,t) = 0 \\ &G_1(0,t) = 2\delta(t), \end{aligned}$$

para que G_1 satisfaga la ecuación hiperbólica se requiere:

$$\Box_q^2 K_1(x,t) = -q(\delta(x-t) + \delta(x+t)),$$

la condición de frontera de tipo Dirichlet no homogénea de G_1 se convierte -para la sombra- en:

$$\begin{aligned} G_1(0,t) &= 2\delta(t) \\ &= \delta(-t) + \delta(+t) + K_1(0,t), \end{aligned}$$

la cual es la condición Dirichlet homogénea:

$$K_1(0,t) = 0,$$

de la condición de frontera de tipo Robin para G_1:

$$\begin{aligned} 0 &= (-G_1' + hG_1)(0,t) \\ &= -\delta'(-t) - \delta'(t) - K_1'(0,t) + hK_1(0,t) + 2h\delta(t), \end{aligned}$$

resulta la condición de frontera Neumann no-homogénea:

$$K_1'(0,t) \quad = 2h\delta(t).$$

La sombra tiene discontinuidades sobre las características $t = \pm x$, en tanto que en el interior del cono no-causal: $\{|t| \leq x\}$, satisface la ecuación homogénea:

$$\Box_q^2 K_1(x,t) = 0, \quad |t| < x,$$

sobre la característica $x = +t$, puede representarse la sombra de la forma:

$$K_1(x,t) = H(x-t)\,K_0(x,t),$$

entonces:

$$\begin{aligned} \Box_q^2 K_1(x,t) &= -q(\delta(x-t) + \delta(x+t)) \\ &= -2\delta\left(\dot{K}_0 + K_0'\right) + H\left(\Box_q^2 K_0\right), \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} &\Box_q^2 K_0 = 0, \\ &2\left(\dot{K}_0 + K_0'\right) = q, \end{aligned}$$

en el límite por la izquierda $x \to t^-$ de la característica $x = +t$, se tiene:

$$\dot{K}_0 + K_0'\Big|_{x=t^-} = \frac{dK_0\,(x, x^-)}{dx} = \tfrac{1}{2} q\,(x)\,,$$

lográndose la ralación entre la sombra no-causal y el potencial:

$$K_1\,(x, x^-) = \tfrac{1}{2} \int_0^x q\,(x')\,dx' + \mathrm{cte},$$

la constante se puede determinar de la condición de frontera Neumann de la sombra:

$$\begin{array}{lll} K_1' & = (HK_0)' & = \delta\,(x-t)\,K_0 + H\,(x-t)\,K_0' \\ K_1'\,(0,t) & = \delta\,(t)\,K_0\,(0,t) & = 2h\delta\,(t)\,, \end{array}$$

luego en el sentido de distribuciones:

$$K_0\,(0,0) = 2h = K_1\,(0,0) = \mathrm{cte};$$

en la característica inferior se obtienen resultados similares que conducen a la simetría en t, tanto de la sombra como de la función de influencia no-causal:

$$\begin{array}{l} K_1\,(x,t) = K_1\,(x,-t)\,, \\ G_1\,(x,t) = G_1\,(x,-t)\,. \end{array} \tag{8.28}$$

8.1.4 TRANSFORMADA POVZNER-LEVITAN

Se aplican las funciones de influencia para establecer las transformadas Povzner-Levitan directa e inversa que convierten la condición de frontera definida en el eje vertical, en la condición inicial definida en el eje horizontal y lo recíproco para la inversa.

TRANSFORMADA INVERSA

Considérese el problema de contorno hiperbólico con datos de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \Box_q^2 u = 0 & x \in I\!R^+, t \in I\!R, \\ (-u' + hu)\,(0,t) = 0 & h \in I\!R, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x,\lambda) & \lambda \in I\!R, \\ \dot{u}\,(x,0) = 0, & \end{array} \tag{8.29}$$

se separan las variables:

$$u\,(x,t) = u_0\,(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t, \quad u_0 \in C^{m+1}\,(I\!R^+)\,, \tag{8.30}$$

donde u_0 es la función propia del problema de contorno:

$$\begin{array}{l} u_0'' - qu_0 = -\lambda u_0, \quad x \in I\!R^+, \lambda \in I\!R \\ u_0\,(0,\lambda) = 1, \\ u_0'\,(0,\lambda) = h. \end{array} \tag{8.31}$$

y el coseno, la función propia del problema auxiliar "libre" de dispersión:

$$\begin{aligned} y'' &= -\lambda y, \\ y(0,\lambda) &= 1, \\ y'(0,\lambda) &= 0; \end{aligned} \tag{8.32}$$

así que:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x,\lambda) \\ u(0,t) &= \cos\sqrt{\lambda}t, \end{aligned} \tag{8.33}$$

al propagar los datos iniciales se obtiene:

$$u(x,t) = \int_0^\infty dx_0 R(x,t;x_0,0)\, u(x_0,0)\,,$$

entonces para la condición de contorno queda:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_0^\infty dx_0 R(0,t;x_0,0)\, u(x_0,0) \\ &= \int_0^\infty dx_0 \left(\delta(t-x_0) + \delta(t+x_0) - K(x_0,t)\right) u(x_0,0) \\ &= u(t,0) - \int_0^\infty dx_0 K(x_0,t)\, u(x_0,0) \end{aligned}$$

y en notación de operadores:

$$u(0,t) = (I+K)\, u(t,0)\,. \tag{8.34}$$

Se aplica al problema (8.33) :

$$\begin{aligned} \cos\sqrt{\lambda}t &= (I+K)\, u_0(t,\lambda) \\ &= u_0(t,\lambda) - \int_0^\infty dx_0 K(x_0,t)\, u_0(x_0,\lambda)\,. \end{aligned}$$

TRANSFORMADA DIRECTA

Al considerar ahora la función de influencia no-causal $G_1(x,t)$ convolucionada con la condición de frontera, se logra:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2} G_1(x,t) * u(0,t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_{+t} \frac{G_1(x,t)}{2} u(0,t')\, dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_1(x,t-t')}{2} u(0,t')\, dt', \end{aligned}$$

se evalua en el origen del tiempo:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_1(x,-t')}{2} u(0,t')\, dt' \\ &= \int_{-x}^{+x} \frac{G_1(x,t')}{2} u(0,t')\, dt' \\ &= \int_{-x}^{+x} G_1(x,t)\, u(0,t')\, dt' \end{aligned}$$

y se usa la expansión en onda viajera y sombra (8.27) :

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \int_0^{+x} \left(\delta(x-t') + \delta(x+t') + K_1(x,t')\right) u(0,t')\,dt' \\
&= u(0,x) + \int_0^{+x} K_1(x,t')\, u(0,t')\,dt',
\end{aligned}
$$

se aplica al problema de contorno dado en (8.33):

$$
u_0(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^{+x} K_1(x,t')\cos\sqrt{\lambda}t'dt'
$$

y en símbolo de operadores:

$$
u_0(x,\lambda) = (I + K_1)\cos\sqrt{\lambda}x.
$$

8.1.5 ECUACION GELFAND-LEVITAN NO-LINEAL

Se usa la transformada Povzner-Levitan inversa aplicada a la función de Riemann desplazada, para obtener la ecuación Gelfand-Levitan no-lineal.

En $x = 0$, se realiza el translado de la función de Riemann en un intervalo determinado $\pm T$ y se define:

$$
\begin{aligned}
R(x_0,t) &= R(0,t;x_0,0) \\
R(x_0,t;T) &= \tfrac{1}{2}R(x_0,t-T) + \tfrac{1}{2}R(x_0,t+T) \\
R(0,t;T) &= \tfrac{1}{2}R(0,t-T) + \tfrac{1}{2}R(0,t+T) \\
&= \delta(t-T) + \delta(t+T) + F(t,T),
\end{aligned}
$$

donde:

$$
F(t,T) = -\tfrac{1}{2}K(0,|t-T|) - \tfrac{1}{2}K(0,|t+T|)
$$

y se observa la simetría de F con respecto a los argumentos (t,T).

Si se denota por:

$$
f(t) = -K(0,|t|), \tag{8.35}
$$

entonces:

$$
F(t,T) = \tfrac{1}{2}f(t-T) + \tfrac{1}{2}f(t+T).
$$

En el intervalo- $0 < t < T$-, la transformada (8.34) produce:

$$
\begin{aligned}
R(0,t;T) &= (I+K)\,R(t,0;T) \\
&= R(t,0;T) - \int_0^{t} K(x',t)\,R(x',0;T)\,dx',
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
R(t,0;T) &= \tfrac{1}{2}R(t,-T) + \tfrac{1}{2}R(t,+T) \\
&= \tfrac{1}{2}\delta(t-T) + \tfrac{1}{2}\delta(t+T) - \tfrac{1}{2}K(t,|-T|) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\delta(t-T) + \tfrac{1}{2}\delta(t+T) - \tfrac{1}{2}K(t,|T|) \\
&= \delta(t-T) + \delta(t+T) - K(t,T) \\
&= -K(t,T).
\end{aligned}
$$

De otra parte en la integral se tiene: $0 < x \leq t < T$

$$-\int_0^t K(x',t)\,R(x',0;T)\,dx' = \int_0^t K(x',t)\,K(x',T)\,dx',$$

y según la definición en $0 < t < T$:

$$\begin{aligned} R(0,t;T) &= \delta(t-T) + \delta(t+T) + F(t,T) \\ &= F(t,T), \end{aligned}$$

por tanto la transformada Povzner-Levitan inversa produce la ecuación Gelfand-Levitan no-lineal:

$$F(t,T) = -K(t,T) + \int_0^t K(x',t)\,K(x',T)\,dx', \tag{8.36}$$

ésta puede simetrizarse teniendo en cuenta que $F(t,T)$ es simétrica en sus argumentos y que el soporte de la sombra $K(x,t)$ está en el cono causal superior, o sea que:

$$K(x,t) \equiv 0, \quad si \;\; 0 \leq t \leq x,$$

su forma simétrica es:

$$F(t,T) = -K(t,T) - K(T,t) + \int_0^{t\wedge T} K(x',t)\,K(x',T)\,dx'.$$

8.1.6 TEOREMA DE GELFAND-LEVITAN

Se estudia la determinación de un operador de Sturm-Liouville a partir de su función espectral.

Considérese la función:

$$\sigma : I\!R \longrightarrow I\!R,$$

que satisface las tres condiciones siguientes:

a) la función es monocreciente,

b) se cumple la relación de Parseval, en el sentido de: si g es cuadrado integrable en el semieje, con soporte compacto y con transformada de Fourier coseno $\hat{g}^c$ talque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}^c|^2\, d\sigma(\lambda) = 0 \Leftrightarrow g(t) = 0, \; c.d..$$

c) Se descompone σ en la forma:

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda); & \lambda < 0 \\ \rho(\lambda) + \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}; & \lambda \geq 0 \end{cases} \tag{8.37}$$

y se define la función:

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\,d\rho(\lambda) \in H_{Loc}^{m+1,1}(I\!R^+) \\ F(0,0) &= -h, \end{aligned}$$

con existencia acotada en cada intervalo acotado y con $m+1$ derivadas localmente integrables en el semieje.

Resulta que las tres condiciones a), b) y c), son necesarias y suficientes para que σ sea la función espectral del problema de contorno en el semieje:

$$\begin{array}{ll} -\psi'' + q(x)\psi = -\lambda\psi; & 0 \le x < \infty \\ (\psi' + h\psi)(0,\lambda) = 0 & h \in I\!R \\ & q \in H_{Loc}^{m,1}(I\!R^+). \end{array}$$

DEMOSTRACION

Dado que la suficiencia de la condición resuelve el problema inverso, ésta se expone exhaustivamente.

Sea σ la función que satisface las tres condiciones a), b), y c). Para iniciar se forma el núcleo:

$$F(t,T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}T\,d\rho(\lambda), \qquad (8.38)$$

se analiza la ecuación Gelfand-Levitan lineal :

$$(I+F)K_s = -F, \quad 0 \le T < t, \qquad (8.39)$$

para ello se considera la ecuación integral homogénea asociada:

$$(I+F)K_s = 0, \quad 0 \le T < t,$$

y se supone que existe alguna solución de ella distinta de la trivial:

$$\exists g \neq 0, / \quad (I+F)g = 0, \quad 0 \le T < t,$$

se forma el producto:

$$\langle g, (I+F)g\rangle$$

y se sustituye la ecuación Gelfand-Levitan no-lineal (8.36):

$$\begin{aligned} \langle g,(I+F)g\rangle = {} & \int_0^x g^2(T)\,dT + \int_0^x dt\int_0^x dTg(t)\,g(T)\,F(t,T) \\ = \int_0^x g^2(T)\,dT & + \int_0^x dt\int_0^x dTg(t)\,g(T)\cdot \\ & \cdot\left(-K(t,T) - K(T,t) + \int_0^{t\wedge T} K(x',t)\,K(x',T)\,dx'\right) \\ = \int_0^x g^2(T)\,dT & - \int_0^x dt\int_0^x dTg(t)\,g(T)\,K + \int_0^x dt\int_0^x dTg(t)\,g(T)\,K + \\ & + \int_0^x dt\int_0^x dTg(t)\,g(T)\int_0^{t\wedge T} K(x',t)\,K(x',T)\,dx'. \end{aligned}$$

Pero de otro lado:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \left(g(x') - \int_{x'}^x K(x',t)\,g(t)\,dt\right)^2 dx' = \\
&\int_0^x dx' g^2 - \int_0^x dx' 2g \int_{x'}^x dt K(x',t)\,g(t) + \\
&+ \int_0^x dx' \int_0^x dt K(x',t)\,g(t) \int_{x'}^x dt' K(x',t')\,g(t') \\
&= \int_0^x dx' g^2 + \int_0^x dt \int_0^x dT g(t)\,g(T)\,(-K(t,T)) \\
&+ \int_0^x dT \int_0^x dt g(T)\,g(t)\,(-K(T,t)) \\
&+ \int_0^x dt \int_0^x dt' \int_0^{t\wedge t'} K(x',t)\,K(x',t')\,dx',
\end{aligned}
$$

por tanto:

$$
\int_0^x \left(g(x') - \int_{x'}^x K(x',t)\,g(t)\,dt\right)^2 dx' = \langle g, (I+F)\,g\rangle\,,
$$

así que:

$$
\langle g, (I+F)\,g\rangle = 0 \Leftrightarrow g(x') - \int_{x'}^x K(x',t)\,g(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow g = 0,
$$

en donde se ha usado la causalidad, en el sentido de que la sombra K sea nula en el cono no-causal $\{|t| < x\}$:

$$
K(x,t) = 0, \quad 0 \leq x' \leq t \leq x.
$$

Otra forma es:

$$
\begin{aligned}
& 0 &&= (I+F)\,g \\
\Rightarrow\; & 0 &&= g(T)^2 + g(T)\int_0^t ds F(s,T)\,g(s) \\
& &&= \int_0^t dT g(T)^2 + \int_0^t dT g(T) \int_0^t ds F(s,T)\,g(s)\,,
\end{aligned}
$$

que al sustitur el núcleo $F(t,T)$ dado en la ecuación (8.38) :

$$
0 = \int_0^t dT g(T)^2 + \int_0^t dT g(T) \int_0^t ds g(s) \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}s \cos\sqrt{\lambda}T
$$

y al emplear la descomposición dada en la condición b):

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^t dT g(T)^2 + \\
&+ \int_0^t dT g(T) \int_0^t ds g(s) \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda)\,\cdot \\
&\cdot \left(\cos\sqrt{\lambda}s \cos\sqrt{\lambda}T - \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\tfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}\right) \cos\sqrt{\lambda}s \cos\sqrt{\lambda}T\right) \\
&= \int_0^t dT g(T)^2 + \int_0^t dT g(T) \int_0^t ds g(s)\,\delta(s-T) + \\
&+ \int_0^t dT g(T) \int_0^t ds g(s) \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \cos\sqrt{\lambda}s \cos\sqrt{\lambda}T,
\end{aligned}
$$

se logra el resultado -de acuerdo con la misma condición b)-:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \left(\tilde{g}^c(\lambda)\right)^2 \Rightarrow g(t) = 0, \quad c.d.$$

luego la ecuación Gelfand-Levitan lineal (8.39) tiene solución única K_s para cada t fijo. Así mismo, dado que en las ecuaciones integrales de Volterra la solución tiene el mismo orden de diferenciabilidad que el núcleo y la inhomogeneidad, los cuales en el caso presente poseen derivadas continuas hasta del orden $m+1$; se concluye que K_s posee también orden de diferenciabilidad $m+1$.

Si se toma la transformada de Fourier del problema:

$$\begin{array}{ll} -\psi'' + q(x)\psi = -\lambda\psi; & 0 \leq x < \infty \\ (\psi' + h\psi)(0,\lambda) = 0 & h \in I\!R \\ & q \in H^{m,1}_{Loc}(I\!R^+), \end{array}$$

se obtiene el problema de contorno hiperbólico con datos iniciales:

$$\begin{array}{ll} \Box^2_q u = 0 & x \in I\!R^+, t \in I\!R, \\ (-u' + hu)(0,t) = 0 & h \in I\!R, \\ u(x,0) = u_0(x,\lambda) & \lambda \in I\!R, \\ \dot{u}(x,0) = 0, & \end{array}$$

entonces resulta el problema hiperbólico:

$$\begin{array}{ll} \Box^2_q u = \ddot{u} - u'' + qu = 0 & x \in I\!R^+, \quad t \in I\!R \\ (-u' + hu)(0,t) = 0 & h \in I\!R, \end{array}$$

se usa el método de propagación de singularidades para obtener:

$$\begin{array}{l} K(x,x^+) = \frac{1}{2}\int_0^x q(x')\,dx' + h, \\ K(0,0^+) = h, \end{array}$$

según lo cual el potencial se determina por la derivada de la sombra:

$$q(x) = 2\frac{dK(x,x^+)}{dx}$$

y el potencial posee orden de diferenciabilidad m, así que:

$$q(x) \in H^{m,1}_{Loc}(I\!R^+),$$

mientras que el núcleo y la sombra en el origen resultan el uno el opuesto del otro:

$$F(0,0) = -K(0,0) = -h,$$

luego en conclusión, se ha determinado el operador de Schrödinger en el problema:

$$\begin{array}{ll} -\psi'' + q(x)\psi = -\lambda\psi; & 0 \leq x < \infty \\ (\psi' + h\psi)(0,\lambda) = 0 & h \in I\!R \\ & q \in H^{m,1}_{Loc}(I\!R^+). \end{array}$$

NECESIDAD DE LAS TRES CONDICIONES

Con el propósito de completar la demostración del Teorema de Gelfand-Levitan, se esboza la necesidad de las tres condiciones a), b) y c).

Sea el problema de contorno del operador de Schrödinger:

$$\begin{array}{ll} -\psi'' + q(x)\,\psi = -\lambda\psi; & 0 \le x < \infty \\ (\psi' + h\psi)(0,\lambda) = 0 & h \in I\!R \\ & q \in H^{m,1}_{Loc}(I\!R^{+}), \end{array}$$

se plantea el mismo problema para cada intervalo finito, complementado con la condición de contorno en cada extremo:

$$(-\psi' + h_b\psi)(b,\lambda) = 0 \quad h_b \in I\!R, x \in [0,b];$$

la solución del cual determina la sucesión de valores propios $(\lambda_{nb})_n$, la de las funciones propias $(\psi_{nb})_n = (\psi(x,\lambda_{nb}))_n$ y las constantes de normalización:

$$D_{nb} = \frac{1}{\|\psi_{nb}\|^2},$$

se define la función monocreciente:

$$\sigma_b(\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{\lambda<\lambda_{nb}\le 0} D_{nb} & ;\lambda < 0 \\ 0 & ;\lambda = 0 \\ \sum\limits_{0<\lambda_{nb}\le\lambda} D_{nb} & ;\lambda > 0 \end{cases}$$

y se obtiene una familia $(\sigma_b)_b$ de funciones de variación acotada, uniformemente acotadas; y de acuerdo con el Teorema de selección de Helly, se extrae la subsucesión $(\sigma_{bk_i})_i$ convergente, cuyo límite también es una función de variación acotada:

$$\sigma(\lambda) = \lim_{i\to\infty} \sigma_{bk_i}(\lambda).$$

Para cada función de cuadrado integrable en $[0,b]$ se define la transformada de Fourier generalizada:

$$\hat{f}(\lambda) = \langle f(x), \psi(x,\lambda)\rangle_{dx} = \int_0^{\infty} f(x)\,\psi(x,\lambda)\,dx, \quad f \in L^2[0,b],$$

puede demostrarse la igualdad de Parseval:

$$\|f(x)\|^2_{dx} = \left\|\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{\sigma},$$

establecer el Teorema de Expansión -con convergencia absoluta y uniforme en cada intervalo finito de x-:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\,\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

se define entonces la familia espectral de proyectores:

$$E(\lambda)f(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \hat{f}(\lambda)\,\psi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

luego se sustituye la transformada de Fourier:

$$E(\lambda)f(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\sigma(\lambda)\left(\int_0^{\infty} f(x')\,\psi(x',\lambda)\,dx'\right)\psi(x,\lambda)$$

y dado que el proyector en ∞ es la identidad:

$$E(\infty) f(x) = I f(x) = f(x)$$

se obtiene la resolución de la identidad para el operador de Schrödinger considerado:

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, \lambda) \psi(x', \lambda) d\sigma(\lambda).$$

Si se aplica la transformada de Fourier al problema:

$$\begin{array}{ll} -\psi'' + q(x)\psi = -\lambda\psi; & 0 \leq x < \infty \\ (\psi' + h\psi)(0, \lambda) = 0 & h \in \mathbb{R} \\ & q \in H^{m,1}_{Loc}(\mathbb{R}^+), \end{array}$$

resulta el problema de contorno:

$$\begin{array}{ll} \Box_q^2 u = 0 & x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}, \\ (-u' + hu)(0, t) = 0 & h \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \psi(x_0, \lambda) & \lambda \in \mathbb{R}, \\ \dot{u}(x, 0) = 0, & \end{array}$$

cuya solución en términos del propagador de Riemann es -de acuerdo con - (8.26) -:

$$u(x, t) = \int_0^\infty dx_0 R(x, t; x_0, 0) \psi(x_0, \lambda),$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty dx_0 R(x, t; x_0, 0) \psi(x_0, \lambda) \\ &= \int_0^\infty dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) \cdot \\ &\cdot \psi(x_0, \lambda) R(x, t; x_0, 0) \end{aligned}$$

y al usar la resolución de la identidad:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) u(x, t) &= \int_0^\infty dx_0 \delta(x_0 - y) R(x, t; x_0, 0) \\ &= R(x, t; y, 0) \end{aligned}$$

y con la separación de variables:

$$\begin{array}{l} u(x, t) = \psi(x, \lambda) \cos\sqrt{\lambda} t, \quad \psi \in C^{m+1}(\mathbb{R}^+), \\ \psi'' - q\psi = -\lambda\psi, \quad x \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R} \\ \psi(0, \lambda) = 1, \\ \psi'(0, \lambda) = h. \\ \qquad y'' = -\lambda y, \\ \qquad y(0, \lambda) = 1, \\ \qquad y'(0, \lambda) = 0; \end{array}$$

se logra la siguiente representación de la función de Riemann:

$$\begin{aligned} R(x, t; y, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) \psi(x, \lambda) \cos\sqrt{\lambda} t \\ R(x, t; y, t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) \psi(y, \lambda) \psi(x, \lambda) \cos\sqrt{\lambda}(t - t_0), \end{aligned}$$

luego, se evalua en el origen:

$$R(0,t;0,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t.$$

Posteriormente, de la notación para el opuesto de la sombra en el origen (8.35)
:

$$f(t) = -K(0,|t|),$$

de la expansión de la función de Riemann como onda viajera y sombra (8.25):

$$R(x,t) = \delta(x-t) + \delta(x+t) - K(x,|t|)$$

y de la conocida propiedad de la delta de Dirac, para la resolución de la identidad del operador libre de dispersión:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t,$$

se tiene:

$$f(t) = R(0,t;0,0) - 2\delta(t);$$

y al apelar a la descomposición de la función espectral dada en (8.37) :

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \rho(\lambda); & \lambda < 0 \\ \rho(\lambda) + \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}; & \lambda \geq 0 \end{cases},$$

se logra la relación:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t, \end{aligned}$$

luego esta relación para el núcleo se convierte en:

$$\begin{aligned} F(t,T) &= \tfrac{1}{2}f(t-T) + \tfrac{1}{2}f(t+T) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(\lambda)\left(\cos\sqrt{\lambda}(t-T) + \cos\sqrt{\lambda}(t+T)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}T. \end{aligned}$$

entonces, finalmente resulta la representación buscada para el núcleo evaluado en el origen:

$$F(t,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}t.$$

9. APENDICE 3

9.1 METODO DE MARCHENKO

Se considera un problema de valores propios para el operador de Schrödinger en el eje real con condiciones asintóticas, se definen las soluciones y funciones Jost. A partir del Wronskiano de estas soluciones Jost, se introducen los coeficientes de transmisión y de reflexión.

Se encuentran relaciones entre ellos y se deducen algunas de sus propiedades analíticas. Se define la matriz de dispersión y se demuestra que uno solo de los coeficientes puede determinarla.

A través de la función de Green se halla la resolución espectral del operador de Schrödinger. Se define la transformada espectral y se resalta la relación entre la evolución del potencial y la ecuación de Korteweg-de Vries.

Con fundamento en el teorema de Paley-Wiener se introduce la transformada Levin, que luego de una translación se convierte en la sombra. Y con un par de potenciales se generaliza.

En este contexto se tiene la posibilidad de deducir la ecuación de Marchenko, que desempeña un papel esencial en el método de Scattering inverso. Al estructurar la resolución de la identidad, la independencia lineal de las soluciones Jost y la transformada Levin generalizada, se infiere la ecuación de Marchenko.

9.1.1 SOLUCIONES JOST

Se estudia la ecuación de Schrödinger:

$$Lu = \left(D^2 - q\right) u = -\lambda u, \qquad x \in I\!R, \lambda = k^2 \in \mathbb{C} \ ,$$

se establecen condiciones asintóticas, en lugar de condiciones en el origen:

$$u \longrightarrow e^{\pm ikx} \text{ si } x \longrightarrow \pm\infty,$$

se usa el método de variación de parámetros para obtener *la solución Jost* ψ:

$$\psi(x,k) = e^{+ikx} + \int_x^\infty \frac{senk\left(x'-x\right)}{k} q\left(x'\right)\psi dx',$$

la cual se propaga como onda plana hacia la derecha en la región asintótica donde $x \longrightarrow +\infty$. De ella se obtiene *la función Jost:*

$$\ell\left(x,k\right) = \psi\left(x,k\right) e^{-ikx},$$

luego, la función Jost se representa por:

$$\ell = 1 + \int_x^\infty \frac{senk\left(x'-x\right)}{k} q\ell dx'$$

y se comprueba que satisface la ecuación diferencial:

$$\ell'' + 2ik\ell' - q\ell = 0,$$

con las condiciones asintóticas:

$$\begin{array}{lcl} \ell(x,k) & \longrightarrow & 1 \\ \ell'(x,k) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{si } x \longrightarrow +\infty.$$

Si se trata a $q\ell$ como fuente en la ecuación diferencial, puede obtenerse la representación:

$$\begin{aligned} \ell(x,k) &= 1 + (F_+ * \ell)(x) \\ &= 1 + \int_x^\infty q(x')\,\ell \tfrac{e^{-2ik(x-x')}-1}{2ik} dx' \\ &= 1 + \int_x^\infty q(x')\,\ell e^{-ik(x-x')} \tfrac{\operatorname{sen} k(x-x')}{k} dx'. \end{aligned}$$

Resultados análogos se consiguen para una onda plana hacia la izquierda en la región asintótica $x \longrightarrow -\infty$, que dan lugar a *la solución Jost* ϕ *y la función Jost* r:

$$r(x,k) = \phi(x,k)\, e^{+ikx}.$$

9.1.2 COEFICIENTES DE S

Resulta que cuando $k \in I\!R \setminus \{0\}$, las soluciones Jost ϕ y ψ son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio de soluciones del problema de Schrödinger.

Entonces puede escribirse el complejo conjugado de cada una de ellas como combinación lineal de las soluciones Jost:

$$\psi = t_-\overline{\phi} + r_-\phi \qquad \text{o bien} \qquad T\psi = \overline{\phi} + R_-\phi$$

$$\phi = t_+\overline{\psi} + r_+\psi \qquad \text{o bien} \qquad T\phi = \overline{\psi} + R_+\psi,$$

donde los coeficientes se definen a partir del Wronskiano de las soluciones Jost:

$$t_+(k) = \frac{W(\phi,\psi)}{2ik}.$$

Posteriormente se deducen algunas relaciones entre los coeficientes:

$$t_+ = t_- = t,$$

y del Wronskiano para la solución Jost izquierda y su conjugada compleja:

$$W(\phi,\overline{\phi}) = 2ik.$$

se halla otra relación entre coeficientes, dada por:

$$1 = |t|^2 - |r_+|^2,$$

luego se encuentra también que:

$$1 = |t|^2 - |r_-|^2,$$

$$\bar{t}(k) = t(-k),$$

$$\overline{r_\pm}(k) = r_\pm(-k).$$

Análogamente, redefiniendo los coeficientes como coeficientes de transmisión T y de reflexión R:

$$T = \frac{1}{t}$$
$$R_\pm = \frac{r_\pm}{t},$$

pueden reescribirse las relaciones entre coeficientes como:

$$\begin{array}{ll} |T|^2 + |R_\pm|^2 & = 1 \\ R_-\overline{T} + \overline{R}_+ T & = 0 \\ \overline{T}(k) & = T(-k) \\ \bar{R}_\pm(k) & = R_\pm(-k). \end{array}$$

Si se hace uso de las representaciones integrales para las funciones Jost:

$$\ell = 1 + F_+ * \ell$$

pueden hallarse las representaciones correspondientes para el coeficiente de transmisión:

$$t = \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} q(x')\,\ell_\pm(x',k)\,dx'$$

y el de reflexión:

$$\frac{R_\pm}{T} = \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} q(x')\,\ell_\mp(x',k)\,e^{\mp 2ikx'}dx',$$

estas resultan indispensables para estudiar los comportamientos asintóti cos de los coeficientes.

Estos coeficientes, a su vez constituyen las entradas de la llamada *Matriz de Dispersión,* siempre que el potencial sea de primer orden de crecimiento - $q \in L_1^1(\mathbb{R}), k \in \mathbb{R} - \{0\}$ -en el sentido de:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^m)\,|q|\,dx < \infty, \text{ con } m \geq 0.$$

o bien de segundo orden de crecimiento -$q \in L_2^1(\mathbb{R})$ -, donde se requiere la continuidad en $k = 0$-.
Esta matriz se define por:

$$S(k) = \begin{pmatrix} T & R_- \\ R_+ & T \end{pmatrix},$$

se sabe además que cuando el potencial es de orden de crecimiento nulo -$q \in L_0^1(\mathbb{R})$ - es posible entonces, extender la función coeficiente $t_+(k)$ al semiplano superior complejo con la exclusión del origen: $\mathbb{C}_+ - \{0\}$.

Porque la función coeficiente $t(k)$ es analítica en el semiplano superior perforado en el origen: $\mathbb{C}_+ - \{0\}$, sus ceros son aislados y no pueden estar ubicados en el eje real, con la única posible excepción del origen $k = 0$. Por tanto sus ceros están en el semiplano superior $Imk > 0$ y además, es posible establecer que el coeficiente $t(k)$ tiene como máximo un número finito de ceros y que están acotados superior e inferiormente. En consecuencia se tiene que:

$$\dot{t}\,(ikj) = -\frac{\|\psi_j\|^2}{ir_-\,(ik_j)} = -\frac{D_{+j}^{-1}}{iC_{+j}} \neq 0.$$

En resumen, el coeficiente $t(k)$ tiene en los puntos ik_j, sobre el semieje imaginario positivo, sus ceros simples. Entonces el coeficiente de transmisión T también tiene allí sus polos simples y en número finito.

9.1.3 LA MATRIZ DE DISPERSION S

Puede probarse que la matriz de dispersión tiene solo un coeficiente independiente y que el conocimiento de uno de los coeficientes determina toda la matriz.

Supóngase que se conoce el coeficiente de reflexión R_+, luego de la relación:

$$|T|^2 + |R_+|^2 = 1$$

se halla el módulo del coeficiente de transmisión $|T|$. Posteriormente al hacer uso de las relaciones Kramer-Krönig o relaciones de dispersión, es posible encontrar el argumento del coeficiente de transmisión - $arg\ T$ -, a través de la fórmula:

$$\arg T(k) = 2\sum_{1}^{N} \arctan\frac{k_j}{k} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|T(x)|}{k'-k}dk',$$

a continuación de la relación:

$$R_-\overline{T} + \overline{R}_+T = 0,$$

puede encontrarse el coeficiente de reflexión izquierdo:

$$R_- = -\frac{\overline{R}_+T}{\overline{T}}$$

y con ello se habrá determinado toda la matriz S.

Un corolario que se obtiene de inmediato es el conocido Teorema de Levinson, acerca del número de los estados ligados o número de valores propios N:

$$\arg T(0^+) - \arg T(0^-) = 2N\pi.$$

9.1.4 LA RESOLUCION DE LA IDENTIDAD

Si el potencial q es de primer orden de crecimiento- $L_1^1(\mathbb{R})$ - y L es un operador lineal, simétrico, definido en un subespacio denso en un espacio de Hilbert, el operador tiene entonces una única clausura y ésta no varia su operador adjunto:

$$\begin{array}{ccc} D_L & \xrightarrow{L} & Y \\ < Lu, v > & = & < u, Lv > \\ (\bar{L})^* & = & L^*. \end{array}$$

Si $G(x, x'; \lambda)$ denota la función de Green para el operador:

$$(-L)_\lambda G = (L + \lambda I) G = \delta(x - x'),$$

ésta resulta ser:

$$G(x, x'; k) = \begin{cases} i\dfrac{\psi(x,k)\,\phi(t',k)}{2kt(k)} & x' \leq x \\[2ex] i\dfrac{\phi(x,k)\,\psi(x',k)}{2kt(k)} & x' \geq x, \end{cases}$$

con $k \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ y $t(k) \neq 0$.

Entonces puede inferirse la resolución de la identidad para el operador L :

$$\delta(x - x') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^T \tilde{\xi} dk + \sum_{j=1}^{N} D_{+j} \psi_j(x) \psi_j(x'),$$

con la notación:

$$\xi^T = (\phi/t, \psi/t).$$

9.1.5 EL PROBLEMA ISOESPECTRAL

Si el potencial q en la ecuación de Schrödinger evoluciona de acuerdo con algún parámetro como el tiempo t. ?'Bajo qué condiciones los valores propios permanecen invariantes o integrales del movimiento?.

Resulta que la condición suficiente y necesaria para que los valores propios sean invariantes es que el potencial evolucione como solución de la ecuación de Korteweg-de Vries:

$$\dot{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} - Gqq' + q''' = 0.$$

Se estudia a continuación la evolución de los datos de dispersión y se halla que:

$$t = t(k, 0) = cte \text{ o bien } T(k) = T(k, 0) = cte,$$

el coeficiente de transmisión permanece constante, en tanto que el de reflexión izquierda decae exponencialmente:

$$r_- = r_-(k,0)e^{-8ik^3\tau} \text{ o bien } R_-(k,\tau) = R_-(k,0)e^{-8ik^3\tau},$$

así mismo las constantes de normalización decaen en forma exponential:

$$D_{+j}(\tau) = D_{+j}(0)\, e^{-8ik^3\tau},$$

mientras que el de reflexión derecha crece exponencialmente:

$$R_+(k,\tau) = R_+(k,0)\, e^{+8ik^3\tau}.$$

9.1.6 LA TRANSFORMADA ESPECTRAL

Cuando se conoce el potencial q puede resolverse el problema de valores propios del operador de Schrödinger:

$$Lu = \left(D^2 - q\left(x,t\right)\right)u = -\lambda u,$$

que consiste en hallar los valores propios $k = ik_j,\ k_j > 0,\ j \in \overline{1,N}$, las constantes de normalización $D_{+j} = \left\|\psi_j\right\|^{-2}$ y el coeficiente de reflexión $R_+(k)$. El conjunto de ellos se llaman *datos espectrales* y constituyen la imagen de la transformada espectral:

$$S_\pm\left[q\left(x,t\right)\right] = \left\{R_\pm\left(k\right), k \in \mathbb{R}; D_{\pm j}, k = ik_j, k_j > 0, j \in 1,N\right\}.$$

Se dice entonces resuelto el problema directo.

Por el contrario, en el problema inverso se parte de los datos de dispersión y se halla el potencial $q(x,t)$:

$$q(x,t) \longleftarrow S\left[q\left(x,t\right)\right].$$

El resultado es el esquema:

	$q(x,0)$	Prob. Directo	Transf. espectral en $t=0$ $S\left[q\left(x,0\right)\right]$
Evolución temporal en el espacio x	$\downarrow$		$\downarrow$ Evolución temporal de los datos de dispersión en el espacio k
	$q(x,t)$	Prob. Espect. Inv. Ecuación de Marchenko	Transf. espectral en $t>0$ $S\left[q(x,t)\right]$.

9.1.7 LA TRANSFORMADA LEVIN

Cuando el potencial q es de primer orden de crecimiento- $q \in L_1^1\left(\mathbb{R}\right)$-, para la función Jost ℓ, puede establecerse la analiticidad de $\ell - 1$ en el semiplano superior $k \in \mathbb{C}^+$ y su integrabilidad cuadrática a lo largo del eje real:

$$\sup_{k_2>0} \int_{\mathbb{R}} \left|\left(\ell - 1\right)\left(x,k\right)\right| dk_1 < \infty.$$

Por tanto $\ell - 1$ es una función de Hardy de orden 2 y del Teorema de Paley-Wiener, este tipo de funciones tienen su representación como transformadas de Fourier de alguna función de cuadrado integrable, es decir:

$$H^{2\pm} = \left(L_2\left(\mathbb{R}^\pm\right)\right)^\wedge,$$

luego existirá $B_+(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^+)$ tal que:

$$\ell - 1 = \left(B_+\right)^\wedge = \int_0^\infty B_+\left(x,y\right)e^{iky}dy$$

y a $B_+(x,y)$ se le llama *transformada Levin* de la función Jost $\ell(x,k)$.
Algunas de sus propiedades son:

- La continuidad en $x \in I\!R$, en $y \in I\!R^+$, y su anulamiento en $y \to \infty$.
- $\ell(x,k)$ es una distribución temperada como función de x; en consecuencia así son su derivada ℓ' y su transformada de Fourier $\ell'^{\wedge}$. Entonces se logra la relación:
$$\hat{\ell}'(x,y) = \frac{\hat{B}'}{\sqrt{2\pi}}(x,y).$$
- La función $\left(B' - 2\,\dot{B}\right)(x,y)$ es absolutamente continua en x y y. Por lo que la ecuación diferencial para la transformada Levin será: $\left(2B' - 2\,\dot{B}\right)' = q(x)\,B(x,y)\,, y \in I\!R^+$.
- Al definir $K(x,y) = B(x, y-x)$ se encuentra la transformada de Levin para la solución Jost ψ y su ecuación diferencial:
$$K'' - \ddot{K} - qK = 0, \quad y > x,$$

relacionada con el potencial a través de:

$$q = -2K(x,x)' = -2(K'(x,x) + \dot{K}(x,x))$$

y sujeta a la condición asintótica:

$$\left.\begin{aligned} K(x,y) &\to 0 \\ \dot{K}(x,y) &\to 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{si} \quad y \to +\infty$$

9.1.8 TRANSFORMADA LEVIN "GENERALIZADA"

Sean ahora dos potenciales: $q^j(x)$; $j \in \overline{1,2}$. Considérese ψ^j como las soluciones Jost de los problemas de Schrödinger:

$$\psi^{j''} + \left(k^2 - q^j(x)\right)\psi^j(x,k) = 0, \qquad j \in \overline{1,2},$$

con las condiciones asintóticas:

$$e^{-ikx}\psi^j(x,k) \to 1 \quad \text{si } x \to \infty.$$

Sea $K(x,x')$ solución de la ecuación diferencial:

$$K'' - \ddot{K} - \left(q^1(x) - q^2(x)\right)K(x,x') = 0; \qquad x \le x',$$

bajo las condiciones:

$$\begin{array}{llll} K(x,x^+) & = K(x,x) & = \frac{1}{2}\int_x^\infty (q^1 - q^2)(y)\,dy & \\ K(x,\pm\infty) & = \dot{K}(x,\pm\infty) & = 0 & \\ K(x,x') & = 0 \quad \text{y} & \int_x^\infty K(x,x')\,e^{ikx'}dx' = 0; & x_\infty < x \le x', \end{array}$$
K real.

Resulta entonces que K es la solución única del problema hiperbólico de Goursat en el semiplano $x' > x$. También es el kernel de la representación de una de las soluciones Jost en términos de la otra:

$$\psi^1 = \psi^2 + \int_x^{\infty} K(x, x')\, \psi^2(x', k)\, dx'$$

y a este núcleo se le denomina *Transformada Levin Generalizada.*

9.1.9 ECUACION INTEGRAL DE MARCHENKO

De la resolución de la identidad:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^T \overline{\xi} dk + \sum_j D_{+j} \psi_j(x)\, \psi_j(x'),\ \xi^T = \left(\frac{\phi}{t}, \frac{\psi}{t}\right)$$

y de la independencia lineal de las soluciones Jost:

$$\phi = t\overline{\psi} + r_+ \psi \text{ ó } T\phi = \overline{\psi} + R_+ \psi,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') = \quad & \tfrac{1}{4\pi} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{\psi}(x, k) + R_+(k)\, \psi(x, k)\right) \psi(x', k)\, dk + \\ & + \textstyle\sum_j^N D_{+j} \psi_j(x)\, \psi_j(x'), \end{aligned}$$

se escribe primero para $j = 2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\overline{\psi}^2(x, k) + R_+ \psi^2(x, k)\right) \psi^2(x, k),$$

luego para $j = 1$ y se restan estas expresiones para llegar a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \psi^2(x, k)\, (R_+^2(k) - R_+^1) \psi^1(x, k)$$

$$= \sum_{j=1}^{N^1} D_{+j}^2 \psi_j^2(x')\, \psi_j^2(x) - \sum_{j=1}^{N^2} D_{+j}^2 \psi_j^2(x)\, \psi_j^1(x') - K^2(x, x');\ x < x',$$

con la transformada Levin se sustituye ψ^2 en términos de ψ^1 y se logra:

$$\begin{aligned} & K^2(x, x') + \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \psi^1(x, k)\, \psi^1(x', k)\, (R_+^2 - R_+^1) + \\ & + \textstyle\sum_{j=1}^{N^2} D_{+j}^2 \psi_j^1(x)\, \psi_j^1(x') - \sum_{j=1}^{N^1} D_{+j}^1 \psi_j^1(x)\, \psi_j^1(x') + \\ & + \textstyle\int_x^{\infty} dx'' K^2(x, x'')\, \Omega(x', x'') \qquad = 0, \end{aligned}$$

ahora se denota:

$$\begin{aligned} \Omega(x, x') \quad = \quad & \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \psi^1(x, k)\, \psi^1(x', k)\, (R_+^2 - R_+^1) + \\ + \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{N^2} D_{+j}^2 \psi_j^1(x)\, \psi_j^1(x') - \sum_{j=1}^{N^1} D_{+j}^1 \psi_j^1(x)\, \psi_j^1(x'), \end{aligned}$$

luego:

$$K^2(x, x') + \Omega(x, x') + \int_x^{\infty} dx'' K^2(x, x'')\, \Omega(x', x'') = 0.$$

Si se hace $q^1 = 0$ y $q^2 = q$ se consigue:

$$\Omega(x,x') = \Omega(x+x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x+x')} R_+(k) + \sum_{j=1}^{N} D_{+j} e^{-k_j(x+x')}$$

y finalmente se deduce:

$$K(x,x') + \Omega(x+x') + \int_x^{\infty} dx'' K(x,x'')\,\Omega(x+x'') = 0,\ x < x',$$

que es la ecuación integral de Marchenko para potenciales de segundo orden de crecimiento - $q \in L_2^1(I\!R)$ -.

En síntesis cuando se conoce la transformada espectral $S[q(x,t)]$ para algún t, se determina $\Omega(x+x')$ como núcleo y término fuente de la ecuación integral. La solución $K(x,x')$ de esta ecuación integral es la sombra o transformada Levin de la solución Jost $\psi(x,k)$. El potencial q, finalmente, se recupera de la expresión:

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} q(y)\,dy$$

$$q(x) = -2K(x,x)'.$$

10. APENDICE 4

10.1 EL METODO GELFAND-LEVITAN

Considérese la ecuación de Schrödinger en $\mathbb{R}^+$:

$$Lu = (D^2 - q)\, u(x, \lambda) = -\lambda u(x, \lambda), \quad x \geq 0,$$

con una condición de contorno regular en el origen:

$$R_\alpha(0)\, u = u(0, \lambda) \cos\alpha + u'(0, \lambda) \sin\alpha = 0.$$

Para cada $b \in \mathbb{R}^+$, con $x \in [0, b]$ y la condición $R_\beta(b) = 0$ se resuelve el problema de valores propios, donde se determina la colección numerable de ellos- $(\lambda_{nb})_n$. Se define entonces la función:

$$\sigma_b(\lambda) = \begin{cases} -\sum_{\lambda<\lambda_{nb}\leq 0} \|u(x, \lambda_{nb})\|^{-2} = -\sum D_{nb}; & \lambda < 0 \\ 0 & \lambda = 0 \\ +\sum_{0<\lambda_{nb}\leq\lambda} D_{nb} \quad ; & \lambda > 0 \end{cases}$$

y se obtiene una familia $(\sigma_b)_b$ de funciones de variación acotada, uniformemente acotadas. De acuerdo con el Teorema de selección de Helly, puede extraerse una subsucesión convergente cuyo límite también es de variación acotada:

$$\sigma(\lambda) = \lim_{i\to\infty} \sigma_{bki}.$$

A cada función $f \in L_2[0, b]$ se le hace corresponder *"La Transformada de Fourier Generalizada"*, definida por:

$$\hat{f}(\lambda) = < f(x), u(x, \lambda) >_x = \int_0^\infty f(x)\, u(x, \lambda)\, dx, \tag{10.1}$$

a continuación se deduce *la igualdad de Parseval*:

$$\|f(x)\|^2 = \left\|\hat{f}(\lambda)\right\|_\sigma^2,$$

y para cada $f \in L_2[0, \infty]$, se puede establecer el *Teorema de Expansión*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, u(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

donde la convergencia es absoluta y uniforme en x en cada intervalo finito.

Se define entonces la familia espectral de proyectores:

$$E(\lambda) f(x) \doteq \int_{-\infty}^{\lambda} \hat{f}(\lambda)\, u(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

y se encuentra la función espectral:

$$d\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{d\lambda}{\pi\lambda^{1/2}U^2} & 0 < \lambda < \infty \\ \sum_j D_j \delta(\lambda - \lambda_j)\, d\lambda & -\infty < \lambda < 0, \end{cases}$$

con:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= U_1(\lambda)^2 + U_2(\lambda)^2 \\ U_1(\lambda) &= \sin\ \alpha - \tfrac{1}{k}\int_0^\infty \sin\ kx'q(x')\,u(x',\lambda)\,dx' \\ U_2(\lambda) &= -\tfrac{\cos\alpha}{k} + \tfrac{1}{k}\int_0^\infty \cos kx'q(x')\,u(x',\lambda)\,dx' \end{aligned}$$

y del Teorema de Expansión, se logra la resolución de la identidad:

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \textstyle\sum_j \frac{u_j(x)u_j(x')}{\|\mu_j\|^2} + \int_0^\infty u(x,\lambda)\,u(x',\lambda)\,\frac{d\lambda}{\pi\lambda^{1/2}U^2} \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^\infty u(x,\lambda)\,u(x',\lambda)\,d\sigma(\lambda). \end{aligned}$$

10.1.1 OPERADOR DESPLAZAMIENTO

Considérese la sucesión de funciones:

$$Z_n(t) = \frac{t^n}{n!}\ ; \qquad Z_0(0) = 1 \text{ y } Z_n(0) = 0,\ n \geq 1,$$

y sea el operador lineal $D = \frac{d}{dx}$, luego la serie:

$$\sum_0^\infty Z_n(t)D^{(n)}(x)f(x) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}f^{(n)}(x) = f(x+t) = \tau_{-t}f(x),$$

define un operador *desplazamiento generalizado*, que en este caso se reduce a la translación por t; sin embargo, en el caso general convierte una función $f(x)$, en otra de dos variables $u(x,t)$.

$$u(x,t) = T(x,t)f(x).$$

Entre otras, este operador tiene las propiedades de: linealidad, asociatividad, commutatividad, continuidad, acotamiento, simetría, etc.; ahora es importante en particular la simetría:

$$T(x,t)f(x) = T(t,x)f(x).$$

El operador transpuesto se define por:

$$T^*(x,t) = \sum_0^\infty Z_n(x)D^{(n)}(t).$$

Se tiene entonces la autoadjuntividad y:

$$D(t)T(x,t) = D(x)T^*(x,t),$$

luego:

$$D(x)T(x,t)f(x) = D(t)T(x,t)f(x).$$

Usando como operador lineal $D(x)$, el operador $L(x) = D^2 - q(x)$ se halla:

$$L(x)T(x,t)f(x) = L(t)T(x,t)f(x).$$

Considérese la solución Riemann del problema de Cauchy:

$$u''(x,t) - q_1(x)u(x,t) = \ddot{u}(x,t) - q_2(x)u(x,t),$$

bajo las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x) \text{ y } \dot{u}\,(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^{+},$$

con q^i continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$. La función de Riemann $R(x,t;x',t')$ es dos veces continuamente diferenciable y satisface el problema de Goursat:

$$R'' - q_1(x)R = \ddot{R} - q_2(x)R,$$

bajo las condiciones en las características:

$$R(x,t;x',t')\Big|_{\substack{x+t=x'+t' \\ x-t=x'-t'}} = 1;$$

dicha solución se escribe:

$$\begin{aligned} u\,(x,t) = & \ \tfrac{f(x'+t')+f(x'-t')}{2} + \\ & + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_{x'-t'}^{x'+t'} dx \left(g(x)R(x,0;x',t') - f(x)\ \dot{R}\,(x,0;x',t')\right), \end{aligned}$$

de la cual, se destacan dos casos especiales importantes:

$$\begin{array}{rcl} h=0; \quad u(x,0) & = & f(x) \\ u'(x,0) & = & 0 \end{array} \quad \text{y } W_0 = 0R - f(x'')\ \dot{R}\,(x'',0,x,t)$$

$$\begin{array}{rcl} h=\infty \quad u(x,0) & = & 0 \\ u'(x,0) & = & f(x), \end{array} \quad \text{y } W_\infty(x,t,x'') = f(x'')R(x'',0;x,t) - 0\dot{R}$$

siendo el caso general:

$$u(x,t)|_{t=0} = T(x,t)f(x)|_{t=0} = f(x)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}T\,(\alpha,t)\,f\,(x) - hT\,(x,t)\,f\,(x)\Big|_{t=0} = 0,$$

para la cual, la solución del problema de Cauchy resulta ser:

$$T\,(x,t)\,f\,(x) = \frac{f\,(x+t) - f\,(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} f\,(x'')\,W_h\,(x,t,x'')\,dx''.$$

donde:

$$W_h = W_0 + hW_\infty.$$

Considérese el problema de Cauchy con datos en su forma general:

$$u\,(0,k;h) = 1 \text{ y } u'\,(0,k;h) = h,$$

con la solución de Riemann se halla:

$$\begin{aligned} u\,(x,k;h) & = (I + K_h)\cos kx \\ & = \cos kx + \textstyle\int_0^x K_h\,(x,x')\cos kx'dx', \end{aligned}$$

donde el núcleo de la integral es:

$$K_h = h + K(x,x') + K\,(x,-x') + h\int_{t''}^{x} K\,(x,t'') - K\,(x,-t'')\,dt'',$$

en tanto:

$$K(x,x') = -\frac{1}{2}\left(R'(x',0;0,x) + \dot{R}(x',0;0,x)\right),$$

y en el caso $h=0$, se obtiene la trasformada Povzner-Levitan en el semieje:

$$\begin{aligned} u(x,k;0) &= \cos kx + \textstyle\int_0^x K_0(x,x')\cos kx'dx' \\ &= (I+K_0)\cos kx. \end{aligned}$$

10.1.2 ECUACION GELFAND-LEVITAN

Sea $u(x,k)$ la solución del problema de Schrödinger en $\mathbb{R}^+$, bajo las condiciones $h=0$. Su expresión como transformada Povzner-Levitan es:

$$u(x,k) = (I+K)\cos kx.$$

De la resolución de la identidad:

$$\delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,k)\,u(x',k)\,d\sigma(k),$$

para $x' < x$ se tiene:

$$\delta(x-x') = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,k)\,u(x',k)\,d\sigma(k),$$

que expresa la ortogonalidad de $u(x,k)$ y $u(x',k)$ y de la relación:

$$u(x',k) = (I+K)\cos kx',$$

se concluye también la ortogonalidad de $\cos kx'$ y $u(x,k)$ con peso $\sigma(k)$ para $x' < x$, lo que se escribe como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,k)\cos kx'd\sigma(k) = 0, \quad x' < x,$$

luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((I+K)\cos kx)\cos kx'd\sigma(k) = 0.$$

Para el caso libre de dispersión ($q=0$) se tiene:

$$d\sigma_0(\lambda) = \frac{d\lambda}{\pi\lambda^{1/2}\left(\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\lambda}\right)} = \frac{d\lambda}{\pi\lambda^{1/2}} = \frac{2}{\pi}d\left(\lambda^{1/2}\right),$$

o sea que:

$$d\sigma_0(k) = \frac{2}{\pi}dk,$$

al separar la función espectral en:

$$d\sigma(\lambda) = \begin{cases} d\sigma_0(k) + d\rho(\lambda) & ; \quad \lambda > 0 \\ \rho_j(\lambda) & ; \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

se consigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((I+K)\cos kx)\cos kx'\,(d\sigma_0(k)+d\rho(\lambda))=0;$$

en consecuencia:

$$\underbrace{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} I\cos kx\cos kx' d\sigma_0(k)}_{=\,0}+\underbrace{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} I\cos kx\cos kx' d\rho(\lambda)}_{=\,F(x,x')}$$

$$+\underbrace{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} K\cos kx\cos kx' d\sigma_0(k)}_{=\,K(x,x')}+\underbrace{\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} K\cos kx\cos kx' d\rho(\lambda)}_{=\,\int_0^x K(x,x'')F(x',x'')dx''}=0$$

finalmente se encuentra que:

$$F(x,x')+K(x,x')+\int_0^x K(x,x'')F(x',x'')dx''=0, \qquad x'<x,$$

o bien en notación de operadores:

$$(I+F)K=-F. \tag{10.2}$$

Esta es *la ecuación de Gelfand-Levitan*, donde K es la incógnita de la ecuación integral en tanto que se conoce F, el término fuente y kernel de la ecuación.

De acuerdo con el Teorema Alternativa de Fredholm, la condición suficiente y necesaria para que la ecuación integral (10.2) tenga solución única es que la correspondiente homogénea posea como solución única la solución trivial:

$$(I+F)K=0 \Longleftrightarrow K\equiv 0.$$

Sea el problema de contorno:

$$\begin{array}{rcl} u''(x,k)+k^2u(x,k) & = & q(x)u \\ u(0,k) & = & 1 \\ u'(0,k) & = & 0 \\ h=0, & & \alpha=\frac{\pi}{2}, \end{array}$$

cuya solución es:

$$u(x,k)=(I+K)\cos kx,\ x'\leq x;$$

en consecuencia, al sustituir en la ecuación diferencial y usar integración por partes se deduce la ecuación diferencial para el núcleo de la transformada Povzner-Levitan:

$$K''-\ddot{K}=qK,$$

donde:

$$q(x)=2\tfrac{d}{dx}K(x,x), \quad \text{y} \quad \tfrac{\partial K}{\partial x'}(x,0)=0$$

y se recupera el potencial $q(x)$ como la derivada de la transformada Povzner-Levitan en el semieje.

De otra parte, el problema de Gelfand-Levitan inverso es:

$$\begin{array}{c} z''-q_0(x)z=-\lambda z; \\ z'(0)-h_0z(0)=0, \end{array}$$

entonces de la ecuación $(I+F)K=-F$ se halla:

$$K''-\ddot{K}+(q_0(x')-q_0(x))K(x,x')=\left(2\frac{d}{dx}K(x,x)\right)K(x,x')$$

y con:

$$u(x,t) = (I+K)z(x,k),$$

se encuentra:

$$u'' - qu = -\lambda u,$$

donde

$$q(x) = q_0(x) + 2K(x,x)',$$

y debe satisfacerse la condición de frontera Robin:

$$u'(0,k) - hu(0,k) = 0, \quad y \quad h = K(0,0) + h_0.$$

10.1.3 GENERALIZACIONES

1. Se pueden estudiar en forma similar, otra ecuaciones como las del tipo de Sturm-Liouville:

$$(au')' + h^2 hu = Qu,$$

con las condiciones asintóticas:

$$\begin{array}{lcl} a(x) & \longrightarrow & 1 \\ h(x) & \longrightarrow & 1 \quad \text{si} \quad x \longrightarrow \pm\infty \\ Q(x) & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

donde a, h, Q son funciones reales.

Con el cambio de variables

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{h}{a}} \qquad y \qquad v = \sqrt{ah}u = \frac{u}{\omega},$$

se transforma en:

$$\frac{d^2 v}{dy} + k^2 v = q(y)v,$$

donde el potencial es:

$$q(y) = \frac{Q}{h} - \frac{1}{hw}\frac{d}{dy}\left(a\frac{d}{dy}w\right)$$

y puede asumirse que $1 - a \in L^1$, a',Q, $h - a \in L_1^1$ y a y h son acotadas positivas (Aktosun, 1993).

2. Es posible también abordar ecuaciones del tipo

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + k^2\gamma u = \epsilon(x)u, \; x \in \mathbb{R},$$

porque con el factor integrante:

$$\frac{1}{\beta}e^{\int_0^x \frac{\beta}{\alpha}},$$

se transforman en una de tipo Sturm-Liouville, con las correspondencias:

$$\begin{array}{lcl} a & = & e^{\int_0^x \frac{\beta}{\alpha}} \\ h & = & \gamma\frac{a}{\beta} \\ Q & = & \epsilon\frac{a}{\beta}. \end{array}$$

3. Un caso particularmente interesante lo constituye el problema espectral inverso para una ecuación diferencial de 2do. orden en su forma de impedancia:

$$(au')' + k^2 au = 0,$$

que se obtiene del caso 1. con las correspondencias: $Q = 0$ y $h = a$, luego:

$$w = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

y el potencial se escribe:

$$q\,(y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d^2}{dy^2} \sqrt{a},$$

por tanto, se encuentra la ecuación:

$$v'' + k^2 v = qv.$$

Sujeto a condiciones de frontera del tipo Dirichlet $v(0) = v(1) = 0$ o del tipo Neumann $v(0) = 0$ $v'(1) = 0$.

Este problema fue estudiado entre otros por:

- Rundell y Sacks en 1992.
- Coleman y McLanghlin en el 93, cuando la impedancia tiene derivada integrable.
- Chen - Rokhlin en el 92, en la forma del problema espectral inverso de la ecuación de Helmholtz en una dimensión.

4. En el 91 Habashy estudia las ecuaciones Gelfand-Levitan y la ecuación Marchenko de una forma generalizada, pasando el problema al dominio del tiempo.

5. En el 92, Grebert del I.I.M.A.S. estudia el problema resuelto en 1972 por Frolov, acerca de la transformada espectral inversa para el operador de Dirac.

$$H = B\frac{d}{dx} + mL + q(x),\ x \in I\!R$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & -p_1 \end{pmatrix},\ p_i \in L_1^1\,(I\!R)\,,$$

por el método de la Fórmula de Trazos de Deift-Trubowitz (1987).

6. El problema espectral inverso puede estudiarse desde el punto de vista del problema de Riemann-Hilbert, donde se dan las condiciones para factorizar una función matricial en $\lambda \in I\!R.$, de forma tal que, un factor se continua analíticamente al semiespacio superior- $\mathbb{C}^+$ -, y el otro lo hace al inferior - $\mathbb{C}^-$ -.

Se basa en observar que las soluciones Jost pueden conjuntarse para representarlas en forma de matriz:

$$(\phi, \overline{\phi}) = (\overline{\psi}, \psi) \begin{pmatrix} t & \overline{r}_+ \\ r_+ & \overline{t} \end{pmatrix},$$

ésta puede transformarse en una factorización: $G = G_+ G_-$; y luego puede obtenerse el potencial.

10.1.4 COTAS Y ASINTOTICAS

Se quiere determinar las cotas para l, $l-1$, l', para luego inferir la existencia de la derivada respecto de la segunda variable de la función Jost - $\dot{l}$ -, y finalmente poder concluir que la función de Jost menos la unidad -$l-1$- es una función de Hardy de orden dos.

Se considera un potencial q de primer orden de crecimiento -$q \in L_1^1(\mathbb{R})$- y se denota:

$$\beta(x) = \int_x^\infty |q(x')|\, dx'.$$

Se parte de la representacion integral de la función Jost:

$$l = 1 + F_+ * ql$$

y se usan las series de Neumann para las aproximaciones sucesivas, con el objeto de determinar la cota:

$$|l| \leq e^{\frac{\beta(x)}{k}}, \quad k \in \mathbb{C}_+ - \{0\}.$$

De otra parte cuando se comienza desde:

$$\begin{array}{l} l^0 = F_+ * q1 \\ F_+ = \frac{e^{2ikx}-1}{2ik}, \end{array}$$

se obtiene:

$$|l-1| \leq \frac{\beta(x)}{|k|} e^{\frac{\beta(x)}{k}}, \quad k \in \mathbb{C}_+ - \{0\}.$$

Cuando se quiere incluir el cero del plano k y su vecindad, puede usarse el proceso de iteración y la estimación: $|F_+| \leq |x'-x|$, para encontrar:

$$\begin{array}{l} |l| \leq e^{\gamma(x)} \\ \gamma(x) = \int_x^\infty (x'-x)\, |q(x')|\, dx' \end{array}$$

y al iniciar con : $l^0 = F_+ * q1$, se llega al estimado:

$$|l-1| \leq \gamma(x)\, e^{\gamma(x)},$$

después se redefine l de tal manera que:

$$h_l = \frac{l}{K(1+0 \vee (-x))}$$

y luego de un proceso de iteración se logra:

$$\begin{array}{ll} |l| \leq & K_2(1+0 \vee (-x)) \\ & K_2(1+|x|). \end{array}$$

Con estos resultados se estima $l-1$:

$$|l-1| \leq K_3(1+0 \vee (-x)) \int_x^\infty (1+|x'|)\, |q(x')|\, dx', \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

para concluir en:

$$|l-1| \leq \begin{cases} \text{cte}\frac{1+0\vee(-x)}{1+|k|}, & |k| \longrightarrow 0 \\ \text{cte}\frac{1}{1+|k|}, & |k| \not\longrightarrow 0, \end{cases}$$

en tanto que en la vecindad de $k=0$ para l' se produce:

$$|l'| \leq K \int_x^\infty (1+|x'|)\,|q(x')|\,dx' \leq \text{cte} < \infty.$$

Al estudiar la analiticidad de la función l, se asume que q es de crecimiento de orden dos: -$q \in L_2^1(\mathbb{R})$-, y se hallan las cotas:

$$\left|\dot{l}\right| \leq \text{cte}\,(1 - x\,(0 \vee (-x)))\, e^{\gamma(x)}.$$

Posteriormente se logra:

$$\left|\dot{l}\right| \leq \text{cte}\left(1+|x|^2\right), \quad \forall x.$$

Debido a que estas cotas son uniformes en k, los iterados de $\dot{l}$ convergen uniformemente en k , por tanto existe $\dot{l}$, y en consecuencia l es analítica en $\mathbb{C}_+$ y continua hasta $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Finalmente, $l-1$ también es analítica en $\mathbb{C}_+$, continua hasta $\overline{\mathbb{C}}_+$ y por tanto es una función de Hardy de orden dos -$l-1 \in H^{2+}$-.

ASINTOTICAS

En el límite de las ondas cortas -$|k| \longrightarrow \infty$-, puede usarse la representación de la función Jost:

$$l = 1 + F_+ * ql$$

y la iteración:

$$l = 1 + F_+ * q\,(1 + F_+ * ql)$$

para obtenerse:

$$l = 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^\infty q(x')\,dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

De la representación integral del coeficiente de transmisión :

$$t = \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty} qldx',$$

se halla el comportamiento asintótico:

$$t = \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{2ik}Q(-\infty) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}_+.$$

En tanto que para el coeficiente de reflexión se encuentra :

$$R_+(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \longrightarrow \infty,\ \mathbb{C}_+,\ q \in L_1^1$$

y además:

$$T(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

lo que se interpreta como el fenómeno de la transmisión total en el límite de las ondas cortas.

En cambio, si se lleva la iteración hasta segundo orden en $1/k$, de :

$$l = 1 + F_{+} * q\,(1 + F_{+} * ql)\,,$$

se encuentra:

$$l = 1 + \int_{x}^{\infty} q\,(x')\,F_{+}dx' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Q\,(x)}{2ik}\right)^{2} + o\left(\frac{1}{k^{2}}\right)$$

$$T = 1 + \frac{1}{2ik}Q\,(-\infty) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Q\,(-\infty)}{2ik}\right)^{2} + o\left(\frac{1}{k^{2}}\right)$$

en particular estos estimados se requieren para deducir la fórmula de trazas.

De la representación integral para $l - 1$ como transformada de Fourier de la transformada Levin:

$$l = 1 + \int_{0}^{\infty} B(x,y)e^{iky}dy,$$

con la doble iteración y la transformada inversa de Fourier se obtiene la representación integral de B :

$$B\,(x,y) = \tfrac{1}{2}Q\left(x + \frac{y}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{y} dy' \int_{x+\frac{y-y'}{2}}^{\infty} dx'q\,(x')\,B(x',y').$$

Luego iniciando el proceso de iteración desde:

$$B^{0}\,(x,y) = \tfrac{1}{2}Q\left(x + \frac{y}{2}\right),$$

se obtiene la cota para la transformada Levin:

$$|B| \leq \tfrac{1}{2}\beta\left(x + \frac{y}{2}\right)e^{\gamma(x)}$$

y también para sus normas:

$$\|B\,(x,\cdot)\|_{\infty} \leq \beta\,(x)\,e^{\gamma(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\|B\,(x,\cdot)\|_{1} \leq \gamma\,(x)\,e^{\gamma(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De otro lado para las derivadas se encuentra:

$$|B'\,(x,y)| \leq \tfrac{1}{2}\left|q\left(x + \frac{y}{2}\right)\right| + \beta\left(x + \frac{y}{2}\right)\beta\,(x)\,e^{\gamma(x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{+}$$

y para la derivada respecto de la segunda variable se tiene:

$$\left|\dot{B}\,(x,y)\right| \leq \tfrac{1}{4}\left|q\left(x + \frac{y}{2}\right)\right| + \tfrac{3}{8}\beta\left(x + \frac{y}{2}\right)\beta\,(x)\,e^{\gamma(x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{+}.$$

se concluye que para cada y las funciones $B\,(x,y)$ y $2\dot{B}\,(x,y) - B'\,(x,y)$ son absolutamente continuas en x y en cada semi-línea a lo largo x son absolutamente continuas en la variable y.

11. REFERENCIAS

Referencias

[1] Abraham. R. Manifolds, *Tensor Analysis and Applications*, Addison-Wesley, (1983).

[2] Abramov D. I., *Quantum Mechanical Inverse Problem on a Finite Interval as an Inicial-value Problem*, Inverse Problems 7, 493–497, (1991).

[3] Aceff S. F. M., *Teoría de Dispersión para la Ecuación de Onda con Perturbaciones de Rango Corto*, (Tesis) UNAM, FC., (1995).

[4] Aktosun T., *Scattering and Inverse Scattering for a Second-order, Differential Equation*, J. Math. Phys. 34 (5), May (1993). *Nonuniqueness in Inverse Acoustic Scattering on the Line*, J. Math. Phys. 35 (2), Feb (1994).

[5] Aktosun T., Vander Mee C., *Non uniqueness in 1-D Inverse Acoustic Scattering*, Math. Phys. Vol 35 ,n 2, 693-709, (1994).

[6] Banks H. T., Kunish K., *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*, Birkhäuser, (1989).

[7] Brambila P. F., *The Scattering Amplitude for Large Frequencies*, Massachusetts Inst. of Tech. (Thesis), June (1982).

[8] Bruckstein A. M., Levy B.C., Kailath T., Differential Methods in Inverse Scattering, J. Appl. Math. 45, 2, 312-335, (1985).

[9] Burridge R., *The Gelfand-Levitan, The Marchenko, and the Gopinath-Sondhi Integral Equations of Inverse Scattering Theory, Regarded in the Context of Inverse Impulsive-Response Problems*, Wave Motion, 2, 305-323, (1980).

[10] Calogero F. Degasperis A., *Spectral Transform and Solitons*, Vol. North-Holland Publ. Co. (1982).

[11] Cannon J. R., *Determination of an Unknown Coefficient in a Parabolic Differentiál Equation*, Mar, (1962).

[12] Case K. M., Kac M., *A Discrete Version of the Inverse Scattering Problem*. Journal Math. Phys., vol 14, 5, May (1973).

[13] Case K. M., *The Discrete Inverse Scattering Problem in one Dimension*, Journal Math. Phys., vol 15, 2, Feb. (1974).

[14] Chadan K., Sabatier P. C., *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, Springer-Verlag, (1977).

[15] Chamberland M., Gladwell G. M. L., *On Transforming three-dimensional Inverse Scattering Problems to one Dimension*, Inverse Problems 9, 241-249. (1993).

[16] Cheney M., Rose J. H., DeFacio B., *Three Dimensional Inverse Scattering*, International Series of Numerical Math., vol 77, (1986).

[17] Chorin A. J., Marsden J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springler-Verlag, (1990).

[18] Coen S., *Inverse Scattering of the Permittivity and Permeability Profiles of a Plane Stratified Medium*, J. Math. Phys. 22,(5), (1981). *The Inverse Problem of the Shear Modulus and Density Profiles of a Layered Earth-Torsional Vibration Data*, J. Math. Phys. 22,(10), (1981).

[19] Coleman C. F., McLaughlin J. R., *Solution of the Inverse Spectral Problem for an Impedance with Integrable Derivative, Part I.* Comm. Pure Appl. Math., vol. XLVI, 145-184, (1993).

[20] Colton D., Ewing R., Rundell W., (Editors), *Inverse Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, (1990).

[21] Deans S. R., *The Radon Transform and some of its Applications*, Jhon Wiley & Sons, Inc. (1983).

[22] Deift P., Trubowitz E., *Inverse Scattering on the Line*, Comm. Pure and Appl. Math,. Vol. 32, 121-251, (1979).

[23] Dirksen C. *Detemination of Soil Water Diffusivity by Sorptivity Measurements*, Soil Sci. Soc. Amer. Proc. Vol 39, (1975).

[24] Drazin P. G., Johnson. R.S., *Solitons: an Introdution*, Cambridge University Press, (1989).

[25] Dubovitskii A. Ja. and Milyutin A. A., *Extremals Problems with Constraints*, Soviet Math. Dokl. 4, 452, (1963).

[26] Eckhaus W., van Harten A., *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons*, North-Holland Publ. Co. (1981).

[27] Engl H. W. *Inverse Problems*, Aportaciones Matemáticas, S. M. M., Oxaca, (1995).

[28] Eskin G., Ralston J., *Inverse Backscattering*, Journal DAnalyse Math., vol 58, (1992).

[29] Faddeyev L. D.,*The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering*, Jour. of Math. Phys., vol 4(1), Jan. (1961). *Properties of the S-Matrix of the One-dimensional Schrondinger Equation* , Amer. Math. Soc. Transl., series 2, 65, 139-166, (1955).

[30] Falcon M. L. E., *Tomografía Fractal*, (Tesis) UNAM, F. C., (1996).

[31] Fuentes R. C., Zataraín M. F., Mercado E. J. R., Brambila P. F., *Un Modelo para el Estudio del Transporte de los Contaminantes en el Suelo*, XXVI Congreso Nal. de la Ciencia del Suelo, Nov. (1995).

[32] Fuentes R. C., *Teoría de la Infiltración Unidimensional*, Agrociencia. N 73, (1989).

[33] Fujita H., *The Exact Pattern of a Concentration-Dependent Diffusion in a Semi-infinite Medium, Part II* Department of Fisheries, Faculty of Agriculture, Kyoto University, Maizuru, Japan. (1952).

[34] Ghosh Roy D. N., *Methods of Inverse Problems in Physics*, C.R.C. Press. (1991).

[35] Girsanov I. V., *Theory of Extremum Problems*, Springer- Verlag, (1972).

[36] Glasko V. B., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, American Institute of Phys., (1984).

[37] Habashy T. M., *A Generalized Gelfand-Levitan-Marchenko Integral Equation*, Inverse Problems 7,703-711, (1991).

[38] Herman G. T., Tuy H. K., Langenberg K. J., Sabatier P. C., *Basic Methods of Tomography and Inverse Problems*, Adam Hilger IOP Publ. Lim., (1987).

[39] Holmes R. B., *Geometric Funtional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, (1975).

[40] Jost R. Khon W., Constrution of a Potencial from a Phase Shift, Phys. Rev. vol 87, 6, Sept. (1952).

[41] Jury W., Gardner W. R., Gardner W: H. *Soil Physics*, Jhon Wiley y Sons. Inc. (1991).

[42] Kay I., *The Inverse Scattering Problem when the Reflection Coefficient is a Rational Funtion*, Comm. Pure and Appl. Math. vol XIII, 371-393, (1960).

[43] Keller J. B., *Inverse Problems*, Am. Math. Montly 83, 107-118, (1976).

[44] Klaus M., *Low-energy Behaviour of the Scattering Matrix for the Schrödinger Equation on the Line*, Inverse Problems 4, 505-512, (1988).

[45] Kobe D., *Derivation of Maxwells Equation from the Gauge Invariance of Classical Mechanics*, Am. Jour. Phys. 48(5), May (1980).

[46] Kolyano Yu. M., Ivanik E. G., Blavatskii A. Z., *The Inverse Coefficient Problem for Unions of Homogeneous Bodies*, Translated from Mate. Met. I Fiziko-Mekh. Polya, Issue 36, 63-66, Dec. (1990).

[47] Levinson N., *Certain Explicit Relationships between Phase Shift and Scattering Potencial*, Phys. Rev. vol 89, 4, Feb. (1953).

[48] Levitan B. M., Gasymov M. G., *Determination of a Differential Equation by Two of its Spectra*, Russian Math. Surveys, vol 19, 2,1-63, Mar- Apr. (1964).

[49] Lowe B.D., Rundell W., *An Inverse Problem for a Sturm-Liouville Operator*, Journal of Math. Analysis and Applications 181, 188-199, (1994).

[50] Mahmood y Yevjevich. *Unsteady Flow in Open Channels*, Water Resources Publications, (Vol I), (1975).

[51] Majda A., *High Frecuency Asymtotics for the Scattering Matrix and the Inverse Problem of Acoustical Scattering*, Comm. Pure and Appl. Math. vol XXIX, 261-291, (1976).

[52] Marchenko V. A., *Sturm-Liouville Operators and Applications*, Birkhäuser Verlag, (1986).

[53] Mercado E. J. R., Brambila P. F., Fuentes R. C., *Acerca de un Problema Inverso de Tipo Eléctrico*, XXVIII Congreso Nal. de la Soc. Mat. Mex. Oct (1995).

[54] Mercado E. J. R., Brambila P. F., *Los Conos y sus Aplicaciones*, (en preparación).

[55] Mercado E. J. R., Brambila P. F., Fuentes R. C., *Sobre una Interpretación Mécanica al Teorema de Hahn-Banach*, XXVIII Congreso Nal. de la Soc. Mat. Mex. Oct (1995).

[56] Mercado E. J. R., Fuentes R. C, Brambila P. F., *Sobre un Problema Inverso en el Riego*, XXVIII Congreso Nal. de la Soc. Mat. Mex. Oct (1995).

[57] Mercado E. J. R., Fuentes R. C., Brambila P. F., *An Inverse Problem Applied to Irrigation*, II Joint Meeting Amer. Math. Soc.-Soc. Mat. Mex. Nov. (1995).

[58] Mercado E. J. R., *Scattering Inverso: Perfil del Indice de Refracción*, XXVII Congreso Nal. de la Soc. Mat. Mex. Oct (1994).

[59] Mercado E. J. R., Namuche R., Fuentes R. C., Brambila P. F., *Naturaleza Fractal de la Difusividad Hidráulica,* XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, Oct., (1996).

[60] Moran P. A. P., *Additive Functions of Intervals and Hausdorff Measure*, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 42, 15-23, (1946).

[61] Moreno P. G., *Refoundation Research of Mexico's National Palace,* (Preprint)

[62] Mori, M., *The Finite Element Method and its Applications*, Macmillan Publ. Co., (1983).

[63] Nelson E., *Internal Set Theory, A New Approach to Nonstandard Analysis*, Bull. Am. Math. Soc. 83, 1165-1198, (1977).

[64] Newton R. G., *Inverse Scattering. I. One dimension*, J. Math. Phys 21(3) March (1980). *Inverse Scattering II. Three Dimensions*, J. Math. Phys 21(7) July (1980). *Variational Principles for Inverse Scattering*, Inverse Problems 1, 371-380, (1985).

[65] Notale L., *Fractal Space-time and Microphysics*, World Scientific Co., (1993).

[66] Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L. P., Zakharov V., E., *Theory of Solitons, The Inverse Scattering Method*, Consultants Bureau, (1984).

[67] Oksendal B., *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, (1989).

[68] Paley R.E.A., Wiener N., *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American Math. Soc., (1934).

[69] Philip J. R., *General Method of Exact Solution of the Concentration-Dependent Diffusion Equation*, (1959).

[70] Rakesh, *An Inverse Problem for the Wave Equation in the Half Plane*, Inverse Problems 9, 433-441, (1993).

[71] Rakesh, Symes W. W., *Uniqueness for an Inverse Problem for the Wave Equation*, Commun. in Partial Diff. Equat. 13(1), 87-96, (1988).

[72] Risken H., *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, (1989).

[73] Romanov V. G., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU. Science Press. Utrecht. The Netherlands. (1986).

[74] Rundell W., Sacks P. E., *The Reconstruction of Sturm-Liouville Operators*, Inverse Problems 8, 457-482, (1992).

[75] Santosa F., Schwetlick H., *The Inversion of Acoustical Impedance Profile by Methods of Characteristics*, Wave Motion 4, 99-110, (1982).

[76] Schelkunoff S.A., *Remarks Concerning Wave Propagation in Stratified Media*, Comm. Pure Appl. Math. 4, 117-128, (1951).

[77] Sun N. Z., Yeh W. W. G., *Identification of Parameter Structure in Groundwater Inverse Problem*, Water Res. Research, vol 21, 6, 869-883, (1983).

[78] Suzuki T., *Gelfand-Levitan's Theory and Related Inverse Problems*, International Series of Numerical Math., vol 77, (1986).

[79] Sylvester J., Gunther U., *A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem*, Annals of Math. 125, 153-169, (1987).

[80] Symes W., *Inverse Boundary Value Problems and a Theorem of Gelfand and Levitan*, Journal of Math. Analysis and Applications 71,379-402, (1979).

[81] Tijonov A. N., *Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method*, Apr. (1963).

[82] Torres del C. G. F., *Notas sobre Variedades Diferenciales*, CINVESTAV.

[83] Weston V. H., *On Inverse Scattering*, Journal Math. Phys., vol 15, 2, Feb (1974). *On the Inverse Problem for a Hyperbolic Dispersive Partial Differential Equation*, Journal Math. Phys., vol 13, 12, Dec (1972).

[84] White F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill. (1991).

[85] Widder D. V., *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, (1941).

[86] Wilcox C. H., *An Expansion Theorem for Electromagnetic Fields*, Comm. Pure and Appl. Math. vol IX, 115-134, (1956).

[87] Yougrau W., Mandelstram S., *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Dover Publ. Inc., (1968).

[88] Zataráin M. F., Fuentes R. C., Mercado E. J. R., Brambila P. F., *Simulación Numérica del Transporte de Solutos en el Suelo*, VI Congreso Nal. de Irrigación, Sept. (1995).

[89] Zauderer E., Partial Diff. Equat. of Appl. Math., Inter N. Y., (1983).