

00382-49-5



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA
INVARIANCIA DE NORMA A TEMPERATURA
FINITA

T E S I S

Que para obtener el grado Académico de
DOCTOR EN CIENCIAS
(FISICA)

p r e s e n t a

EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNANDEZ

Directores de Tesis: Dr. Juan Carlos D'Olivo Sáez
Dr. Manuel Torres Labansant

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

TITULO DE LA TESIS:"ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA INVARIANCIA DE NORMA A TEMPERATURA FINITA"**GRADO Y NOMBRE DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:**Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez yDr. Manuel Torres Labansat**INSTITUCION DE ADSCRIPCION DEL ASESOR O DIRECTOR DE TESIS:**Instituto de Ciencias Nucleares, UNAMInstituto de Física, UNAM (respectivamente)**RESUMEN DE LA TESIS:** (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina en 25 renglones a un espacio como máximo, sin salir del extensión de este cuadro.)

Basados en la formulación de integrales de trayectoria, estudiamos algunos aspectos relacionados con la simetría de norma en la electrodinámica cuántica a temperatura finita; en particular derivamos las identidades de Ward a temperatura finita. Analizamos la simetría de intercambio Z_2 entre los campos tipo-1 y tipo-2 y sus consecuencias en las funciones de Green. Asimismo derivamos las relaciones de dispersión en un plasma compuesto de electrones y fotones. Calculamos, además, las relaciones de dispersión para neutrinos que se propagan en un medio compuesto de electrones, protones, neutrones y neutrinos. Después de la introducción presentada en el capítulo 1, en el capítulo 2 estudiamos la formulación en integrales de trayectoria de la teoría de campos a temperatura finita. Demostramos que el formalismo de tiempo real conduce a que los grados de libertad en los campos se duplique; resultando campos de tipo-1 y tipo-2. En el capítulo 3 presentamos la simetría de intercambio Z_2 , deducimos las identidades de Ward para la electrodinámica cuántica a temperatura finita. En base a la simetría Z_2 y las identidades de Ward, demostramos que sólo una función de Green de 3-puntos de las ocho que se tienen inicialmente, es independiente. En el capítulo 4, presentamos cálculos a nivel de un rizo; derivamos las relaciones de dispersión para fotones y electrones en un plasma. En el capítulo 5, poniendo especial atención en la invariancia de norma, derivamos las relaciones a dispersión para neutrinos que se propagan en un medio compuesto de electrones, protones, neutrones y neutrinos.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA QUEDARA SUSPENDIDO EL TRAMITE DEL EXAMEN.

FECHA DE SOLICITUD 4 de Junio de 1997.
FIRMA DEL ALUMNO**Acompaño los siguientes documentos:**

- **Nombramiento del jurado del examen de grado**
- **Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del jurado.**
- **Copia de la última revisión de estudios**

**ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA
INVARIANCIA DE NORMA A TEMPERATURA FINITA**

por

EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ

Summary

Based on the path integral formulation, we study some aspects related with the gauge symmetry in quantum electrodynamics at finite temperature. In particular we derive the Ward identities at finite temperature. We analyze the Z_2 interchange symmetry between type-1 and type-2 fields and its consequences on the thermal Green functions. In addition we derive the dispersion relations for electrons and photons in a plasma. We also calculate the dispersion relations for a neutrino that propagates in a medium composed of electrons, protons, neutrons, and neutrinos.

After the introduction presented in chapter 1, in chapter 2 we study the path integral formulation of quantum field theory at finite temperature. We show that real-time formalism yields to the degrees of freedom in the fields are duplicated; given as a result type-1 and type-2 fields. In chapter 3 we present the Z_2 symmetry and deduce the Ward identities at finite temperature. From these results we show that from eight thermal Green functions existing initially, only one is independent. In chapter 4 we present calculations at the one loop level. We derive the dispersion relations of electrons and photons propagating in a plasma. In chapter 5 we pay special attention on the gauge invariance and derive the dispersion relations for a neutrino that propagates in a medium.

*A Salvador
y a la memoria de Herlinda ...
mis padres.*

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a mis maestros y amigos: doctores Manuel Torres y Juan Carlos D'Olivo por la excelente dirección de esta tesis. Asimismo agradezco a los doctores Gerardo Carmona, Martin Klein, Martí Ruiz-Altaba, David Vergara y Arnulfo Zepeda las sugerencias para mejorar la versión final de la tesis; especialmente al Dr. Ruiz-Altaba por la escrupulosa lectura de la versión preliminar.

Agradezco, también, al CONACYT y a la DGAPA-UNAM (a través de los proyectos de investigación No. IN100691 y No. IN100694) que me otorgaron una beca para la realización del presente trabajo en su fase inicial y final, respectivamente. Además, agradezco al CONACYT el apoyo económico, a través del proyecto CONACYT 3141P-E, para la impresión de la tesis.

Finalmente desco expresar mi agradecimiento al IFUNAM por permitirme utilizar la infraestructura con que cuenta.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	3
2	TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA	9
2.1	Funciones de Green Térmicas	9
2.1.1	Analicidad y condiciones de KMS	10
2.2	Integrales de trayectoria a temperatura finita	14
2.2.1	Funcional generatriz	14
2.2.2	Campo escalar real	16
2.2.3	Campo escalar complejo	20
2.2.4	Campo fermiónico	22
2.2.5	Recapitulación	23
2.3	Propagadores térmicos	24
2.4	Formalismo de tiempo real	28
2.4.1	Factorización de Z	28
2.4.2	Propagadores	32
2.4.3	Reglas de Feynman	33
3	SIMETRÍAS EN LA TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA	35
3.1	Propagador libre	36
3.1.1	Límite $T \rightarrow 0$	38
3.2	Propagador exacto	38
3.2.1	Campo escalar	38
3.2.2	Campo espinorial	41
3.3	Acción efectiva y ecuaciones de movimiento	42
3.3.1	Simetría de intercambio	42
3.3.2	Ecuaciones de movimiento	44
3.4	Electrodinámica	47

3.4.1	QED a temperatura finita	47
3.4.2	Simetría Z_2 en QED	51
3.4.3	Identidades de Ward	56
4	EL PLASMA RELATIVISTA. CÁLCULOS PERTURBATIVOS	63
4.1	Identidades de Ward. Demostración a un rizo	65
4.2	Demostración a dos rizos	68
4.3	Relaciones de dispersión del electrón	70
4.4	Relaciones de dispersión para el fotón	77
4.5	El vértice, estructura de Lorentz	80
4.6	Polo del vértice	84
5	RELACIONES DE DISPERSIÓN PARA UN NEUTRINO	87
5.1	Introducción	87
5.2	Parte real	88
5.2.1	Cálculo del Potencial Efectivo	93
5.3	Parte imaginaria	97
6	CONCLUSIONES	107
A	ESTADOS COHERENTES	111
A.1	Estados coherentes bosónicos	111
A.2	Estados coherentes fermiónicos	113
B	PROPAGADOR DEL FOTÓN	119
B.1	119

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Matsubara formuló en 1955 [1] la primera versión de la Teoría de Campos a Temperatura Finita (TCTF), versión conocida como Formalismo de Tiempo Imaginario (FTI) debido a que, en dicho formalismo, la temperatura se identifica con la variable temporal puramente imaginaria. En la TCTF se combinan técnicas de la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística para obtener cantidades físicas de sistemas de muchas partículas en equilibrio térmico.

El formalismo desarrollado por Matsubara involucra energías discretas imaginarias; una continuación analítica es necesaria para pasar del eje imaginario al eje real de las energías. Desde el punto de vista operacional, este procedimiento no es sencillo, sobre todo cuando se analizan funciones de Green de tres o más puntos. Una formulación alternativa que evita la continuación analítica es el Formalismo de Tiempo Real (FTR), en el cual las energías son directamente variables reales. Actualmente existen (al menos) tres enfoques [2] distintos del RFT: la formulación en integrales de trayectoria [3], la formulación de “Thermo Field Dynamics” [4, 5, 6] y el formalismo canónico [7]. Aunque con enfoques distintos, estas formulaciones son equivalentes. La característica fundamental de este formalismo es que involucra funciones de Green ordenadas y anti-ordenadas temporalmente. El número de campos se duplica con respecto al de temperatura cero y esto conduce a que los propagadores y las autoenergías adquieran una estructura matricial.

La idea del rompimiento espontáneo de la simetría (SBS) debida a Nambu [8] y Goldstone [9] y su generalización a campos de norma debida a Higgs [10] y a Kibble [11], fue de gran trascendencia para el establecimiento del modelo estandar de las partículas elementales. Es un hecho conocido que cuando

un pedazo de hierro es enfriado, puede desarrollar espontáneamente un momento magnético que apunta en una cierta dirección. Con ello se pierde la simetría rotacional que inicialmente tenían los momentos dipolares de los átomos constituyentes del metal. Si la temperatura del material se eleva por encima de la temperatura crítica, el metal se desmagnetiza y se recupera la simetría rotacional. En base a estas ideas, Kirzhnitz y Linde [12] sugirieron en 1972 que una simetría global espontáneamente rota de una teoría de campos, se podría restablecer elevando suficientemente la temperatura. Dos años después, Weinberg [13], Dolan y Jackiw [14] generalizaron las ideas de Kirzhnitz y Linde para simetrías locales. Actualmente la idea de la restauración de la simetría en teorías de norma ha recobrado interés, principalmente en el caso de la teoría electrodébil donde la transición de fase es crucial para la bariogénesis [15]. Por otro lado, es conocido que, en las teorías de norma en $2+1$ dimensiones, el término de Chern-Simons rompe la simetría de paridad. En un trabajo reciente, Klein y Torres [16] demostraron que, en el caso de la electrodinámica cuántica en $2+1$ dimensiones, la simetría de paridad se restablece a altas temperaturas y densidades. El análisis en estos trabajos se basa principalmente en la teoría de campos a temperatura finita.

Otro escenario en el cual la TCTF es de posible relevancia, es en los experimentos de colisión de iones pesados. La idea principal de estos experimentos consiste en la búsqueda del estado de plasma de quarks y gluones, en el cual los quarks y gluones pueden moverse "libremente" (desconfinados). Cálculos en la red indican que la transición de fase de materia nuclear ordinaria al plasma de quarks y gluones ocurre a temperaturas del orden de 200 MeV .¹ Se tiene la esperanza de que tales temperaturas se puedan alcanzar en las colisiones de iones pesados con los aceleradores existentes y los proyectados para el futuro.

Dentro del marco de la astrofísica, los núcleos de estrellas de neutrones, supernovas, gigantes rojas y enanas blancas, están compuestos de plasmas muy densos con densidades del orden de $10^6 - 10^{15} \text{ gr/cm}^3$. Particularmente, en las estrellas de neutrones se estima [17] que las densidades son del orden de 10^{15} gr/cm^3 . Por otro lado, un neutrón, cuyo radio es aproximadamente 1 fm tiene una densidad del mismo orden. Es de esperar, por lo tanto, que los neutrones en el núcleo de una estrella de neutrones se traslapen y con ello que formen un plasma de quarks y gluones [18]. Por otro lado,

¹El sistema de unidades que utilizaremos en lo subsecuente (a menos que se indique lo contrario) es aquel en el que $\hbar = c = k_B = 1$, donde k_B es la constante de Boltzman. En estas unidades, $1 \text{ eV} = 1.6021 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1.1605 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$.

el conocimiento del índice de refracción de los neutrinos que se propagan en materia, es un requisito esencial para el estudio del mecanismo MSW, formulado por Mikheyev y Smirnov [19] y Wolfenstein [20], de oscilaciones de neutrinos en un medio. El cual es la explicación más natural para el enigma de los neutrinos solares [21]. Otra vez, la herramienta idónea para estudiar estos sistemas físicos es la TCTF.

No obstante la gran aplicabilidad que tiene la TCTF en diferentes contextos físicos, la única evidencia experimental (indirecta) es el decaimiento del plasmón en pares de neutrino y antineutrino [22], el cual es el mecanismo dominante en el enfriamiento de las estrellas gigantes rojas y enanas blancas. Esperamos que, en el futuro, las predicciones de la teoría puedan ser puestas a prueba en los experimentos de colisión de iones pesados. Una dificultad importante que presenta la TCTF está asociada con la invariancia de norma. Diferentes cálculos a nivel de un rizo [23, 24, 25] muestran que la razón de decaimiento de las oscilaciones del plasma de quarks y gluones cambia en magnitud y signo, según la norma que se utilice para los cálculos, esto implica que esos cálculos son erróneos. Ha habido avances parciales en la resolución de este problema. En particular, el método de “resumación de rizos duros” (hard thermal loops resummation) de Braaten y Pisarski [26] ha resuelto la controversia con el decaimiento de las oscilaciones del plasma de quarks y gluones, en el caso de muy altas temperaturas comparadas con otros parámetros de la teoría, tales como la masa de las partículas y las energías características de éstas. Aún queda la duda de que para temperaturas menores, este procedimiento pueda ser de utilidad para extraer predicciones invariantes de norma.

Motivados por la situación descrita, en esta tesis estudiaremos algunos aspectos relacionados con la simetría de norma en la electrodinámica cuántica (QED) a temperatura finita, basándonos principalmente en la formulación de integrales de trayectoria. En particular, derivaremos las identidades de Ward a temperatura finita y analizaremos las consecuencias que dichas identidades tienen sobre las funciones de Green térmicas de dos y tres puntos. Asimismo, derivaremos las relaciones de dispersión para electrones y fotones que se propagan en un plasma de QED, en ciertos límites. Además, examinaremos la posible dependencia en el parámetro de norma en las relaciones de dispersión para neutrinos que se propagan en un medio compuesto de electrones, nucleones y neutrinos.

La organización de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2 estudiaremos en detalle la formulación en integrales de trayectoria de la TCTF. Analizaremos las funciones de Green térmicas y las condiciones de analiticidad que

deben satisfacer. Basados en los estados coherentes, deduciremos la expresión para la funcional generatriz Z de las funciones de Green térmicas para distintos campos. Demostraremos que el formalismo de tiempo real lleva a una duplicación en los campos (tipo-1 y tipo-2); como consecuencia, los propagadores libres adquieren una estructura matricial de 2×2 .

En el tercer capítulo demostraremos que los propagadores completos, o sea, los que incluyen correcciones radiativas, también adquieren una estructura matricial y, como consecuencia, las autoenergías. De igual forma, veremos que las componentes, tanto de los propagadores como de las autoenergías, están relacionadas entre sí; sólo una componente es independiente. Posteriormente, presentaremos la simetría de intercambio \mathcal{Z}_2 entre los campos 1 y 2, para el caso del campo escalar y sus consecuencias, tanto en la funcional generatriz de las funciones de Green térmicas, como en la acción funcional. En base a estos resultados, derivaremos una ecuación de movimiento efectiva, la cual da cuenta de los modos de propagación de las partículas en el medio. Después, estudiaremos la QED a temperatura finita haciendo énfasis en la generalización de la simetría \mathcal{Z}_2 a esta teoría. En particular, pondremos atención en las funciones de Green de dos y tres puntos. Finalmente, en base a la simetría de norma, deduciremos las identidades de Ward. Demostraremos que estas identidades reducen el número de vértices independientes a tres, de ocho que se tienen en principio. Además, veremos que las identidades de Ward predicen que cuatro de los ocho vértices tienen una singularidad cuando el momento asociado con la línea fotónica externa tiende a cero.

En el cuarto capítulo presentaremos en forma detallada cálculos a un rizo de la autoenergía y del vértice en un plasma relativista de QED. En primer lugar, demostraremos que las identidades de Ward deducidas previamente se satisfacen hasta el orden de dos rizos. En segundo lugar, derivaremos las relaciones de dispersión para los fermiones y fotones que se propagan en el plasma a temperatura muy alta. Para finalizar el capítulo, estudiaremos en forma general la estructura de Lorentz de la parte real del vértice. Como veremos, dicha estructura es muy complicada pero se puede simplificar de forma considerable, gracias a las identidades de Ward y a la ecuación de movimiento en el medio. Verificaremos que la componente Λ_{121}^{μ} del vértice tiene un polo, tal y como las identidades de Ward lo predicen.

En el capítulo 5 estudiaremos las relaciones de dispersión para un neutrino que se propaga en un plasma. Veremos que la parte real de la relación de dispersión se puede obtener por dos métodos distintos; con resultados coincidentes. Uno de ellos está relacionado directamente con la TCTF y se

basa en el cálculo de las relaciones de dispersión de los neutrinos. El otro método es más intuitivo, consiste en promediar térmicamente la amplitud de dispersión hacia adelante de los neutrinos, por las partículas presentes en el medio. La parte imaginaria de la relación de dispersión la obtendremos de cálculos a nivel de dos rizados (a nivel de un rizo no existe contribución).

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

2.1 Funciones de Green Térmicas

La teoría de campos a temperatura finita es la combinación de dos teorías: la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística. La primera describe el comportamiento de las partículas elementales. Esta teoría se utiliza para describir la dinámica de las partículas, en procesos de colisión, los cuales pueden ser observados en los aceleradores. Un aspecto fundamental de esta teoría, es la idea de las fluctuaciones cuánticas debidas a las relaciones de incertidumbre de Heisenberg en los procesos físicos, los cuales son representados perturbativamente por diagramas de Feynman. La otra teoría es la mecánica estadística, que se usa cuando se quiere estudiar problemas de muchas partículas y cuya idea principal es la siguiente [27]:

a) Si un sistema en equilibrio termodinámico puede estar en uno de muchos estados, por ejemplo, con energías discretas y sin degeneración, entonces la probabilidad de que el sistema tenga energía E_n es

$$P(E_n) = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_n e^{-E_n/kT}}, \quad (2.1.1)$$

donde el denominador es la llamada función de partición Z y la suma se realiza sobre todos los posibles estados del sistema.

b) Si al estado $|E_n\rangle$ le corresponde la energía E_n y A es un operador asociado a una observable física, entonces el valor esperado de la observable

10 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

es

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | A | n \rangle e^{-E_n/kT}. \quad (2.1.2)$$

Podemos expresar la última igualdad en términos del operador de densidad $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ para el ensemble canónico, con $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$. Para el gran canónico tendremos que usar $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H-\mu N)}$, donde la función de partición es $Z = \text{Tr}\{e^{-\beta(H-\mu N)}\}$ para este ensemble. En ambos casos, el valor esperado de la observable física se puede escribir como

$$\langle A \rangle = \text{Tr}\{\rho A\}, \quad (2.1.3)$$

en donde la traza se toma sobre un conjunto completo de estados.

Las cantidades relevantes en una teoría cuántica de campos son las funciones de Green. Estas funciones son valores esperados de productos de campos ordenados temporalmente. Así, en el caso del vacío, la función de Green de n puntos para un campo Φ se representa como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n) | 0 \rangle, \quad (2.1.4)$$

donde T es el operador de ordenamiento cronológico. Si ahora tenemos que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, las funciones de Green térmicas G_β se obtienen de los valores esperados de los productos ordenados temporalmente. Sin embargo, ahora los valores esperados no lo son con respecto al vacío sino que son promedios estadísticos, los cuales se obtienen de promediar el producto de los campos ordenados temporalmente con el ensemble de Gibbs, esto es

$$G_\beta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \text{Tr}\{\rho T \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}. \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Analiticidad y condiciones de KMS

Por simplicidad consideraremos un campo escalar real (sin carga) Φ , cuya dinámica es gobernada por el operador hamiltoniano H . Además, describiremos a los campos en el esquema de Heisenberg, a menos que se indique lo contrario.

Como veremos, el operador $e^{-\beta H}$ en la Ec. (2.1.5) puede ser identificado como un operador de evolución en tiempo imaginario. Esta identificación es de gran utilidad, ya que permite formular la teoría de una manera análoga a la teoría de campos en el vacío, dando lugar a un desarrollo perturbativo bien definido. Para que $e^{-\beta H}$ pueda ser considerado un operador de evolución en

tiempo imaginario, se requiere generalizar los argumentos temporales de los campos al plano complejo. Adicionalmente, es necesario definir un contorno C en dicho plano; la elección del contorno C no es arbitraria. El tiempo τ_i en cual comienza el contorno es arbitrario; sin embargo, el tiempo final queda determinado por $\tau_i - i\beta$. Para poner en forma clara este punto, consideremos un conjunto completo de estados al tiempo τ_i , $|\phi; \tau_i\rangle$. Al extender el soporte de los campos al espacio temporal complejo, tenemos una generalización del operador de traslación temporal:

$$e^{-\beta H} |\phi; \tau_i\rangle = |\phi; \tau_i + i\beta\rangle. \quad (2.1.6)$$

Consideremos ahora, por ejemplo, que la función de partición Z es evaluada usando un conjunto completo de estados $|\phi; \tau_i\rangle$, con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} Z &= \int D\phi \langle \phi; \tau_i | e^{-\beta H} | \phi; \tau_i \rangle \\ &= \int D\phi \langle \phi; \tau_i - i\beta | \phi; \tau_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

La última expresión es reminiscente de la amplitud de transición:

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle.$$

que puede ser representada de acuerdo al formalismo de integrales de trayectoria de Feynman, tomando en cuenta todas las trayectorias que van de (q', t') a (q'', t'') . De manera similar, esperamos que la función de partición (así como cualquier función de Green) pueda ser representada por una integral funcional en la cual el tiempo empieza en τ_i y termina en $\tau_i - i\beta$. La construcción explícita de la integral funcional para la funcional generatriz $Z[J]$ de las funciones de Green térmicas será el principal objetivo de este capítulo. Adicionalmente, es necesario generalizar el operador de ordenamiento a un operador T_c : dicho operador ordena los campos a lo largo de C . En particular, la definición (2.1.5) puede extenderse a

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z} \text{Tr}\{e^{-\beta H} T_c \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}. \quad (2.1.8)$$

Antes de continuar con la discusión, vamos a generalizar algunos conceptos que nos serán útiles más adelante. Consideremos un contorno C en el plano complejo temporal que va de un punto inicial τ_i a otro punto final τ_f (Fig. 2.1) con $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, puntos que están sobre C . a) En este contorno podemos definir un orden. Para ello, consideremos los puntos sobre

12 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

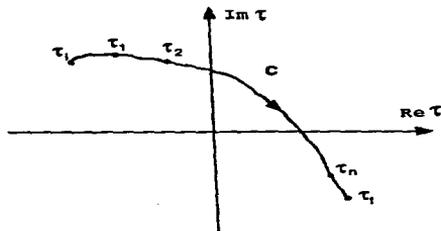


Figura 2.1: Contorno C en el plano complejo. A lo largo de C , $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ están ordenados.

el contorno como se indica en la Fig. 2.1. Si τ_m antecede a τ_{m+1} (es decir, τ_m se encuentra más cerca a τ_i que τ_{m+1}) para $m = 1, 2, \dots, n$ a lo largo de C , entonces decimos que los puntos están ordenados a lo largo del contorno C y esto lo denotaremos por $\tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_1$. b). Con el orden definido, podemos extender la definición de operador de ordenamiento temporal para operadores con argumento temporal complejo. Si $A(\tau)$ y $B(\tau')$ son dos operadores con argumentos definidos en C , entonces

$$T_C A(\tau) B(\tau') = \begin{cases} A(\tau) B(\tau'), & \tau > \tau' \\ B(\tau') A(\tau), & \tau' > \tau \end{cases} \quad (2.1.9)$$

c) De igual manera, podemos generalizar tanto la delta de Dirac como la función escalón en el contorno C . La función delta con soporte en el contorno C se define como

$$\int_C d\tau \delta_c(\tau - \tau') f(\tau) = f(\tau'), \quad (2.1.10)$$

mientras que la función escalón es

$$\theta_c(\tau - \tau') = \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau'' \delta_c(\tau'' - \tau'), \quad (2.1.11)$$

donde la integral se realiza a lo largo del contorno.

Adicionalmente, condiciones de analiticidad en las funciones de Green imponen restricciones en C . Para establecer las condiciones que debe satisfacer

el contorno para que las funciones de Green sean analíticas, consideremos la función de Green térmica de dos puntos

$$G_c(x_1, x_2) = \theta_c(\tau_1 - \tau_2)G_>(x_1, x_2) + \theta_c(\tau_2 - \tau_1)G_<(x_1, x_2), \quad (2.1.12)$$

donde

$$\begin{aligned} G_>(x_1, x_2) &= \frac{1}{Z} \text{Tr}\{e^{-\beta H} \Phi(x_1)\Phi(x_2)\}, \\ G_<(x_1, x_2) &= \frac{1}{Z} \text{Tr}\{e^{-\beta H} \Phi(x_2)\Phi(x_1)\}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Evaluando el promedio estadístico de $G_>$ con respecto a un conjunto completo de estados $|n\rangle$, los cuales son estados propios del hamiltoniano H , tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{e^{-\beta H} \Phi(x_1)\Phi(x_2)\} &= \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} \langle m | e^{iH\tau_1} \Phi(0) e^{-iH\tau_1} | n \rangle \\ &\quad \times \langle n | e^{iH\tau_2} \Phi(0) e^{-iH\tau_2} | m \rangle \\ &= \sum_{m,n} \exp\{-iE_n(\tau_1 - \tau_2) + iE_m(\tau_1 - \tau_2 + i\beta)\} \\ &\quad \times \langle m | \Phi(0) | n \rangle \langle n | \Phi(0) | m \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

para que la suma anterior sea acotada, es necesario que se cumpla la desigualdad $-\beta \leq \text{Im}(\tau_1 - \tau_2) \leq 0$. Similarmente, $G_<$ impone la restricción $0 \leq \text{Im}(\tau_1 - \tau_2) \leq \beta$. Notando que $G_>$ y $G_<$ están multiplicadas por $\theta_c(\tau_1 - \tau_2)$ y $\theta_c(\tau_2 - \tau_1)$ respectivamente, lo anterior quiere decir que para que la función de Green de dos puntos sea analítica a lo largo del contorno C , se requiere que la parte imaginaria de dicho contorno sea monótona decreciente y, además, C debe estar definido en el intervalo $-\beta \leq \text{Im} \tau \leq \beta$. En general, es necesario y suficiente que la función de Green de dos puntos sea analítica para que la función de Green de n puntos lo sea [28, 29].

Otra propiedad importante que podemos derivar de la definición de la función de Green de dos puntos, es la llamada condición de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [30, 29]. Esta condición es una consecuencia de la ciclicidad de la traza y de que $e^{-\beta H}$ se considera como un operador de evolución. Esto es, para un operador A se satisface $A(\tau + \tau') = e^{i\tau' H} A(\tau) e^{-i\tau' H}$. En particular

$$A(\tau - i\beta) = e^{iH} A(\tau) e^{-iH}. \quad (2.1.15)$$

14 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Consideremos ahora la función $G_{>}$, e introduzcamos el operador unidad entre los campos

$$\begin{aligned} G_{>}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr}\{e^{-\beta H} \Phi(\tau_1) e^{\beta H} e^{-\beta H} \Phi(\tau_2)\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr}\{e^{-\beta H} \Phi(\tau_2) \Phi(\tau_1 - i\beta)\} \\ &= G_{<}(\tau_1 - i\beta, \tau_2), \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

en donde hemos considerado la propiedad de las trazas: $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$. La relación entre $G_{>}$ y $G_{<}$ dada en la Ec. (2.1.16) es la condición de KMS. Esta condición será útil para determinar los propagadores térmicos [31], esto es, las funciones de Green térmicas de dos puntos.

2.2 Integrales de trayectoria a temperatura finita

2.2.1 Funcional generatriz

Una forma elegante de obtener las funciones de Green térmicas es a partir de la funcional generatriz Z , definida como

$$Z[J] \equiv \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H} T_c \exp \left\{ i \int_C d^3x d\tau J(\mathbf{x}, \tau) \Phi(\mathbf{x}, \tau) \right\} \right\}, \quad (2.2.17)$$

donde la integral sobre la parte espacial se extiende a todo el espacio y la integral temporal está definida en el contorno C . Ya hemos demostrado que C puede ser cualquier contorno que va de τ_i a $\tau_i - i\beta$, con la restricción de que la parte imaginaria sea monótona decreciente. Las funciones de Green térmicas de n puntos están dadas por

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.2.18)$$

La elección más simple para el contorno C es el segmento rectilíneo a lo largo del eje temporal imaginario desde $-t_0$ hasta $-t_0 - i\beta$ (ver Fig. 2.2). Este contorno, con $t = 0$, fue introducido por Matsubara [1] y sirve de base para el formalismo de tiempo imaginario de la teoría [2]. En él, los campos están ordenados temporalmente en términos de la variable $\tau = it$. La funcional generatriz en la Ec. (2.2.17) genera funciones de Green térmicas definidas por los valores esperados de la integral de trayectoria de campos con argumento temporal imaginario. La ventaja que presenta el formalismo

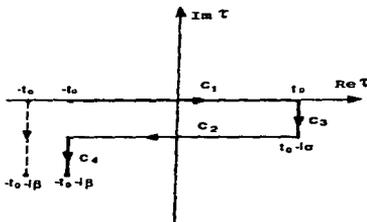


Figura 2.2: En esta figura, el contorno con línea continua es el que se emplea para el formalismo de tiempo real, en este, σ define una infinidad de posibles contornos y se considera el límite $t_0 \rightarrow \infty$. El contorno con línea interrumpida es el contorno empleado para el formalismo de tiempo imaginario.

de tiempo imaginario es que genera un desarrollo perturbativo similar al de la teoría en el vacío. Su principal dificultad es que las funciones de Green que se obtienen son de argumento imaginario; en principio se puede hacer una continuación analítica del eje imaginario al eje real, pero este procedimiento no siempre es sencillo, sobre todo en el caso de funciones de Green de tres o más puntos [32, 33, 39].

En el caso del formalismo de tiempo real, el contorno en el plano complejo va del punto inicial $\tau_i = -t_0$ al punto final $\tau_f = -t_0 - i\beta$ de tal manera que se incluya al eje real (Fig. 2.2). Esta trayectoria la podemos dividir en cuatro subcontornos: C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , los cuales coinciden con los segmentos rectilíneos $[-t_0, t_0 - i\epsilon]$, $[t_0 - i\sigma, -t_0 - i\sigma - i\epsilon]$, $[t_0 - i\epsilon, t_0 - i\sigma]$ y $[-t_0 - i\sigma - i\epsilon, -t_0 - i\beta]$ respectivamente, donde $0 < \sigma < \beta$ y ϵ es una cantidad infinitesimal que se agrega para dar pendientes infinitesimales a los subcontornos C_1 y C_2 para cumplir con el requerimiento de que la trayectoria sea monótona decreciente en su parte imaginaria. Frecuentemente podemos ignorar al factor ϵ , sin embargo será necesario tomarlo en cuenta para asegurar que la integral de trayectoria sea convergente. Al final se considera el límite $t_0 \rightarrow \infty$ de tal manera que C incluya a todo el eje real. Esto permite incorporar en el tramo $(-t_0, t_0 - i\epsilon)$ a toda la teoría de campos a temperatura cero.

Existe una infinidad de contornos correspondientes a distintos valores de σ . Por ejemplo, para $\sigma = 0$ se tiene el contorno con el cual Keldysh [35] construyó un formalismo que incluye procesos fuera de equilibrio. Otra elección, debida a Niemi y Semenoff [3], corresponde a poner $\sigma = \beta/2$ y quizás sea el contorno más popular dentro del formalismo de tiempo real. Para comprobar que las cantidades físicas son independientes de σ [2], deduciremos las funciones de Green térmicas utilizando un contorno con σ arbitrario. En su momento, tomaremos el valor simétrico $\sigma = \beta/2$.

Tal y como se ha formulado la teoría de campos sobre el contorno C , se requiere considerar campos en los cuales el argumento temporal es complejo. Posteriormente, para el formalismo de tiempo real, demostraremos que es posible reformular la teoría de tal manera que los argumentos temporales sean reales; esto se logra a expensas de duplicar el número de grados de libertad al aparecer campos de tipo-1 y tipo-2. Primeramente veremos que la funcional generatriz Z puede ser expresada por medio de una integral de trayectoria y que los campos deben cumplir condiciones específicas de frontera en los extremos de C . Después, encontraremos los propagadores bosónicos y fermiónicos. Finalmente y para concluir este capítulo, construiremos las reglas de Feynman para el formalismo de tiempo real.

2.2.2 Campo escalar real

En esta subsección encontraremos, por medio de integrales funcionales, la representación de la funcional generatriz Z para el campo escalar real.

Consideremos un campo escalar real $\Phi(x)$ cuya dinámica está descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - V[\Phi]. \quad (2.2.19)$$

Para encontrar la representación en integrales de trayectoria de la funcional generatriz Z para el campo $\Phi(x)$, consideremos la descomposición en términos de las soluciones de la correspondiente ecuación de movimiento sin interacción ($V = 0$):

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \tilde{d}\mathbf{k} [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}] \equiv \Phi^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \Phi^{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (2.2.20)$$

donde $\tilde{d}\mathbf{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}$, $k \cdot x = \omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$, y $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Es claro que la descomposición

$$\Phi^{(+)}(x) = \int \tilde{d}\mathbf{k} \hat{a}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x},$$

$$\Phi^{(-)}(x) = \int \tilde{d}k \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (2.2.21)$$

corresponde a las soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente, de la ecuación de Klein-Gordon. En este caso, los estados coherentes son estados propios de la solución de energía positiva, esto es

$$\Phi^{(+)}(x) | \chi \rangle = \int \tilde{d}k \chi(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} | \chi \rangle \equiv f(x) | \chi \rangle, \quad (2.2.22)$$

donde $\chi(\mathbf{k})$ es el valor propio del operador de aniquilación, es decir

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) | \chi \rangle = \chi(\mathbf{k}) | \chi \rangle. \quad (2.2.23)$$

Como mencionamos en el apéndice A, los valores propios $\chi(\mathbf{k})$ son números complejos arbitrarios; es necesario elegirlos de tal manera que se cumpla la igualdad

$$\chi(\mathbf{k}) = \chi^*(-\mathbf{k}), \quad (2.2.24)$$

lo cual implica, en particular, que $f(x)$ es real al tiempo $t = 0$.

El operador de momento canónico conjugado Π asociado al campo Φ está dado por la siguiente relación

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}, t) &= \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) = -i \int \tilde{d}k \omega_k [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}] \\ &\equiv \Pi^{(+)}(\mathbf{x}, t) - \Pi^{(-)}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Notemos que $\Pi^{(+)}$ satisface una ecuación de valores propios similar a la que satisface $\Phi^{(+)}$:

$$\Pi^{(+)}(x) | \chi \rangle = -i \int \tilde{d}k \omega_k \chi(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} | \chi \rangle \equiv g(x) | \chi \rangle. \quad (2.2.26)$$

La representación de la funcional generatriz Ec. (2.2.17) en la base de los estados coherentes (ver apéndice A) se puede escribir como

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \prod_{\mathbf{k}} \frac{d\chi^*(\mathbf{k}) d\chi(\mathbf{k})}{2\pi i} e^{-\int \tilde{d}k \chi^*(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k})} \\ &\times \langle \chi | e^{-\beta H T_c} e^{i \int_c d^3x d\tau J(\mathbf{x}, \tau) \Phi(\mathbf{x}, \tau)} | \chi \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

donde hemos usado la Ec. (A.1.6) y estamos tomando en cuenta que los modos normales son continuos. El hamiltoniano H se obtiene de \mathcal{L} a través de una transformada de Legendre, el resultado es

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + V[\Phi] \right] \equiv \int d^3x \mathcal{H}. \quad (2.2.28)$$

18 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Es conveniente expresar $Z[J]$ directamente en términos de los valores propios $f(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})$ de los estados coherentes. Para ello definimos:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x})], \\ \pi(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [g(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})].\end{aligned}\quad (2.2.29)$$

Como consecuencia de las definiciones anteriores, la relación

$$\int d\tilde{k} \chi^{*\prime}(\mathbf{k}) \chi(\mathbf{k}) = i \int d^3x \pi'(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \quad (2.2.30)$$

es válida, con lo cual tanto el producto escalar entre dos estados coherentes como la medida, en términos de π y ϕ , son los siguientes

$$\begin{aligned}\langle \chi' | \chi \rangle &= e^{i \int d^3x \pi'(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})}, \\ \prod_{\mathbf{k}} \frac{d\chi^*(\mathbf{k}) d\chi(\mathbf{k})}{2\pi i} &= \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\pi(\mathbf{x}) d\phi(\mathbf{x})}{2\pi}.\end{aligned}\quad (2.2.31)$$

Mientras que la función delta está dada por

$$\delta(\phi(\mathbf{x}) - \phi'(\mathbf{x})) = \int \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\pi(\mathbf{x})}{2\pi} e^{i \int d^3x \pi(\mathbf{x})(\phi(\mathbf{x}) - \phi'(\mathbf{x}))}. \quad (2.2.32)$$

Con los resultados anteriores es fácil convencerse que Z en la Ec. (2.2.27) puede ser expresada, en términos de ϕ y π , como sigue

$$\begin{aligned}Z[J] &= \int \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\pi(\mathbf{x}) d\phi(\mathbf{x})}{2\pi} e^{i \int d^3x \pi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})} \\ &\times \langle \chi | e^{-i\tau_N H} T_c e^{i \int_c d^3x d\tau J(\mathbf{x}, \tau) \Phi(\mathbf{x}, \tau)} e^{i\tau_0 H} | \chi \rangle,\end{aligned}\quad (2.2.33)$$

donde $\tau_N = \tau_i - i\beta$ y $\tau_0 = \tau_i$, adicionalmente hemos utilizado la ciclicidad de la traza.

Consideremos un contorno C arbitrario (con la restricción de que la parte imaginaria sea monótona decreciente) que empieza en τ_i y termina en $\tau_i - i\beta$. Sea una partición del mismo con $N+1$ puntos $\tau_0 = \tau_i, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N = \tau_i - i\beta$ y sea $\Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}$. La integral en la Ec. (2.2.27) puede aproximarse por una suma y, tomando en cuenta el ordenamiento temporal, podemos

introducir $N + 1$ conjuntos completos de estados coherentes, con lo cual Z puede aproximarse como

$$Z[J] \approx \int \prod_{\mathbf{x}, n=0}^N \frac{d\pi(\mathbf{x})d\phi(\mathbf{x})d\pi_n(\mathbf{x})d\phi_n(\mathbf{x})}{2\pi} e^{-i \sum_{n=0}^N \int d^3x \tau_n \phi_n} \\ \times e^{-i \int d^3x (\pi \phi - \pi \phi_N - \pi_0 \phi)} \prod_{n=1}^N \langle \chi_n | e^{i \Delta \tau_n \int d^3x (J(\tau_n) \Phi(0) - \mathcal{H})} | \chi_{n-1} \rangle . \quad (2.2.34)$$

El operador hamiltoniano se supone ordenado normalmente. La aproximación es válida hasta ordenes lineales en $\Delta \tau_n$. Si definimos $F \equiv J\Phi(0) - \mathcal{H}$ y escribimos su dependencia en términos de los operadores Φ y Π correspondientes a las soluciones de energía positiva y negativa como:

$$F[\Pi^{(-)}, \Pi^{(+)}, \Phi^{(-)}, \Phi^{(+)}];$$

tendremos que, utilizando (A.1.10), (2.2.22) y (2.2.26), se obtiene

$$\langle \chi_n | :F: | \chi_{n-1} \rangle \approx F[g_n^+, g_{n-1}^-; f_n^+, f_{n-1}^-] e^{\int d^3x \tau_n \phi_{n-1}}, \quad (2.2.35)$$

donde los dos puntos indican ordenamiento normal.¹ Sustituyendo (2.2.35) en la Ec. (2.2.34) y utilizando la función delta en (2.2.32), vemos que la integral sobre ϕ y ϕ_0 en (2.2.34) impone la condición $\phi_N = \phi_0$ y obtenemos, para la funcional generatriz, el resultado

$$Z[J] = \int \prod_{\mathbf{x}, n=1}^N \frac{d\pi_n(\mathbf{x})d\phi_n(\mathbf{x})}{2\pi} \exp \left\{ -i \sum_{n=1}^N \Delta \tau_n \int d^3x \left(\pi_n \left(\frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta \tau_n} \right) - F[g_n^+, g_{n-1}^-; f_n^+, f_{n-1}^-] \right) \right\}. \quad (2.2.36)$$

Utilizando las definiciones (2.2.29), podemos identificar $\phi_n(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{x}, \tau_n)$ y, tomando el límite $N \rightarrow \infty$ de tal forma que $\Delta \tau_n \rightarrow 0$, finalmente obtenemos

$$Z[J] = \int_c \prod_{\mathbf{x}, \tau} \frac{d\pi(\mathbf{x}, \tau)d\phi(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi} \exp \left\{ i \int_c d\tau d^3x [\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}[\pi, \phi] + J\phi] \right\}. \quad (2.2.37)$$

¹ Esto es, en un producto de operadores, todos los operadores de creación se encuentran a la izquierda de los operadores de aniquilación.

20 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Esta es la fórmula para la funcional generatriz de las funciones de Green, donde la densidad hamiltoniana \mathcal{H} es

$$\mathcal{H}[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V[\phi], \quad (2.2.38)$$

y la condición de periodicidad sobre el campo ϕ está dada por

$$\phi(\tau_i) = \phi(\tau_i - i\beta). \quad (2.2.39)$$

Después de integrar sobre el momento canónico conjugado en la Ec. (2.2.37), hasta una constante multiplicativa que podemos absorber en la normalización, tendremos que

$$Z[J] = \int_c D\phi \exp i \int_c [L(\phi) + J\phi], \quad (2.2.40)$$

donde

$$D\phi \equiv \prod_{\mathbf{x}, \tau} \frac{d\phi(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi}, \quad L(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_{\mu,c}\phi\partial_c^\mu\phi - m^2\phi^2) - V(\phi). \quad (2.2.41)$$

En la expresión anterior, el subíndice C indica que la derivada temporal es a lo largo del contorno C .

2.2.3 Campo escalar complejo

De igual forma como hemos hecho para un campo escalar real, podemos deducir la funcional generatriz para un campo escalar cargado. Introduzcamos para ello un doblete de campos reales Φ_1 y Φ_2 tales que

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2), \\ \Phi^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2). \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Sustituyendo para Φ_1 y Φ_2 los desarrollos de Fourier correspondientes, se tiene

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \tau) &= \int \bar{d}\mathbf{k} [\hat{a}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \\ \Phi^\dagger(\mathbf{x}, \tau) &= \int \bar{d}\mathbf{k} [\hat{b}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \hat{a}(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1(\mathbf{k}, \tau) + i \hat{a}_2(\mathbf{k}, \tau)), \\
 \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}, \tau) - i \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}, \tau)), \\
 \hat{b}(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1(\mathbf{k}, \tau) - i \hat{a}_2(\mathbf{k}, \tau)), \\
 \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}, \tau) + i \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k}, \tau)), \tag{2.2.44}
 \end{aligned}$$

con $\hat{a}(\mathbf{k}, \tau) = U^{-1}(\tau, 0)\hat{a}(\mathbf{k})U(\tau, 0), \dots$, etc. Como consecuencia de las relaciones de conmutación para $\hat{a}_{1,2}(\mathbf{k})$ y $\hat{a}_{1,2}^\dagger(\mathbf{k})$, tenemos los siguientes conmutadores a tiempos iguales

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \tau), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', \tau)] = [\hat{b}(\mathbf{k}, \tau), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}', \tau)] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{2.2.45}$$

con todos los otros conmutadores, a tiempos iguales, igual a cero. Para una interacción que depende de $\Phi^\dagger\Phi$, el lagrangiano tiene asociada una simetría global $U(1)$. Como consecuencia del teorema de Noether, tendremos una corriente conservada:

$$J_\mu =: \Phi^\dagger(\partial_\mu\Phi) - (\partial_\mu\Phi^\dagger)\Phi : . \tag{2.2.46}$$

La correspondiente carga conservada Q es

$$Q = \int \tilde{d}\mathbf{k} [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k})\hat{b}(\mathbf{k})] = N_a - N_b, \tag{2.2.47}$$

a partir de la cual, vemos que los cuantos de tipo a tienen carga eléctrica positiva y los de tipo b negativa.

Puesto que \hat{a} y \hat{b} conmutan, podemos formar un estado coherente común a ambos operadores:

$$\begin{aligned}
 \hat{a}(\mathbf{k}) | \chi_a, \chi_b \rangle &= \chi_a(\mathbf{k}) | \chi_a, \chi_b \rangle \\
 \hat{b}(\mathbf{k}) | \chi_a, \chi_b \rangle &= \chi_b(\mathbf{k}) | \chi_a, \chi_b \rangle . \tag{2.2.48}
 \end{aligned}$$

De particular importancia es el siguiente resultado, que será de utilidad para obtener las condiciones de frontera análogas a (2.2.39) para el campo escalar cargado:

$$e^{\mu Q} | \chi_a, \chi_b \rangle = | e^\mu \chi_a, e^{-\mu} \chi_b \rangle , \tag{2.2.49}$$

22 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

este resultado se puede demostrar a partir de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff: $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots$

La funcional generatriz para el campo escalar complejo es

$$Z[J, J^*] = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta(H - \mu Q)} T_c e^i \int_c J^* \Phi + \Phi^\dagger J \right\}, \quad (2.2.50)$$

donde J (J^*) es la fuente para Φ^\dagger (Φ) y μ es el potencial químico. Para encontrar una expresión análoga a (2.2.40) usamos (A.1.6) y (2.2.48)

$$Z[J, J^*] = \int \prod_{\mathbf{k}} \frac{d\chi_a^* d\chi_a d\chi_b^* d\chi_b}{2\pi i} e^{-\int \tilde{d}k [\chi_a^* \chi_a + \chi_b^* \chi_b]} \langle \chi_a, \chi_b | e^{-\beta(H - \mu Q)} \times T_c e^i \int_c (J^* \Phi + \Phi^\dagger J) | \chi_a, \chi_b \rangle. \quad (2.2.51)$$

Procediendo de forma similar al caso del campo escalar real, la funcional generatriz Z se expresa en términos de los campos ϕ y ϕ^* :

$$Z[J, J^*] = \int_{\mathbf{x}, \tau} D\phi^*(\mathbf{x}, \tau) D\phi(\mathbf{x}, \tau) e^i \int_c (L(\phi^*, \phi) + J^* \phi + J \phi^*), \quad (2.2.52)$$

donde ϕ satisface la condición de periodicidad $\phi(\tau_i) = e^{\beta\mu} \phi(\tau_i - i\beta)$ y el campo ϕ^* satisface $\phi^*(\tau_i) = e^{-\beta\mu} \phi^*(\tau_i - i\beta)$.

2.2.4 Campo fermiónico

La relación espín-estadística impone relaciones de conmutación en los campos bosónicos, mientras que en los campos fermiónicos impone relaciones de anticonmutación. Las álgebras de números que anticonmutan son las álgebras de Grassmann y por eso los números de Grassmann son adecuados para describir los campos fermiónicos (ver apéndice A.2).

Los campos de Dirac $\Psi(\mathbf{x})$ y $\bar{\Psi}(\mathbf{x})$ se expanden en términos de los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \int \tilde{d}p 2m \sum_{i=1,2} [\hat{b}_i(\mathbf{p}) u_i(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \hat{d}_i^\dagger(\mathbf{p}) v_i(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}], \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}) &= \int \tilde{d}p 2m \sum_{i=1,2} [\hat{b}_i^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_i(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}_i(\mathbf{p}) \bar{v}_i(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}]. \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

donde $u^{(1,2)}$ y $v^{(1,2)}$ son las soluciones de energía positiva y negativa respectivamente, de la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)u &= 0, \\(\not{p} + m)v &= 0.\end{aligned}\tag{2.2.54}$$

En este caso, la funcional generatriz de las funciones de Green en presencia de las fuentes grassmannianas $\bar{\xi}$, ξ asociadas a los campos Ψ y $\bar{\Psi}$, respectivamente, se pueden escribir como (ver apéndice A.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\xi, \bar{\xi}] &= \int \prod_{\mathbf{p}} d\psi^\dagger(\mathbf{p}) d\psi(\mathbf{p}) e^{-\int d^4p \psi^\dagger(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) < -\eta} | e^{-\beta(H - \mu N)} \\ &\times \mathcal{T}_c e^{i \int_c [\bar{\xi}(\tau) \Psi(\tau) + \bar{\Psi}(\tau) \xi(\tau)]} | \eta > .\end{aligned}\tag{2.2.55}$$

Los resultados anteriores son utilizados para obtener la representación de la funcional generatriz como una integral de trayectoria. Procediendo de forma análoga a los casos de los campos escalares se obtiene que, para un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - \mathcal{L}_{int}(\bar{\Psi}, \Psi),\tag{2.2.56}$$

la funcional generatriz será

$$\mathcal{Z}[\xi, \bar{\xi}] = \int d\psi^\dagger d\psi e^{i \int_c [\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \mathcal{L}_{int}(\bar{\psi}, \psi) + \bar{\xi}(\tau)\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)\xi(\tau)]},\tag{2.2.57}$$

con las condiciones de frontera $\psi(\tau_i) = -e^{\beta\mu}\psi(\tau_i - i\beta)$ y $\bar{\psi}(\tau_i) = -e^{-\beta\mu}\bar{\psi}(\tau_i - i\beta)$. En (2.2.57) hemos omitido, por comodidad, los argumentos temporales y espaciales.

2.2.5 Recapitulación

Antes de continuar con la discusión resulta conveniente recapitular los puntos importantes del formalismo presentado hasta ahora:

- Hemos generalizado las funciones de Green térmicas en (2.1.5) a argumentos temporales complejos con soporte en un contorno C (Ec. (2.1.8)).
- La condición de analiticidad en las funciones de Green impone la restricción de que la parte imaginaria del contorno elegido sea monótona decreciente y que el contorno esté definido en el intervalo $-\beta \leq \text{Im}(\tau - \tau') \leq \beta$, donde $\tau, \tau' \in C$, sin restricción para la parte real. El contorno se inicia en a un tiempo arbitrario τ_i , y termina en $\tau_i - i\beta$.

- Hemos indicado como las funciones de Green en el contorno C , se pueden obtener a partir de la funcional generatriz Z (Ecs. (2.2.17) y (2.2.18)).
- Para evaluar perturbativamente la funcional generatriz hemos obtenido una representación como integral de trayectoria de Z , utilizando la base de los estados coherentes. Encontramos que, salvo un factor de normalización irrelevante, Z puede ser expresada de la siguiente manera:
 - i) Campo escalar real

$$Z[J] = \int D\phi e^{i \int_{\epsilon} [\frac{1}{2}((\partial_{\mu}\phi)^2 - m^2\phi^2) - V(\phi) + J\phi]}, \quad (2.2.58)$$

con la condición de frontera $\phi(\tau_i) = \phi(\tau_i - i\beta)$.

ii) Campo escalar complejo

$$Z[J, J^*] = \int D\phi^* D\phi e^{i \int_{\epsilon} ((\partial_{\mu}\phi)^*(\partial^{\mu}\phi) - m^2 - V(\phi^*, \phi) + J^*\phi + J\phi^*)}, \quad (2.2.59)$$

con $\phi(\tau_i) = e^{\beta\mu}\phi(\tau_i - i\beta)$ y $\phi^*(\tau_i) = e^{-\beta\mu}\phi^*(\tau_i - i\beta)$.

iii) Campo fermiónico

$$Z[\xi, \bar{\xi}] = \int d\psi^{\dagger} d\psi e^{i \int_{\epsilon} [\bar{\psi}(i\partial - m)\psi - \mathcal{L}_{int}(\bar{\psi}, \psi) + \xi(\tau)\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)\xi(\tau)]}, \quad (2.2.60)$$

con las condiciones $\psi(\tau_i) = -e^{\beta\mu}\psi(\tau_i - i\beta)$ y $\bar{\psi}(\tau_i) = -e^{-\beta\mu}\bar{\psi}(\tau_i - i\beta)$.

- La traza en la Ec. (2.2.17) impone de manera natural las condiciones de periodicidad o antiperiodicidad para los diferentes campos, mencionados en los incisos i), ii) e iii) del punto anterior.

Cabe resaltar que hasta ahora la forma del contorno C es arbitraria, excepto por la condición de que vaya de τ_i hasta $\tau_i - i\beta$. Más adelante analizaremos la estructura de la teoría cuando se elige el contorno mostrado en la Fig. 2.2.

2.3 Propagadores térmicos

A continuación expresaremos la funcional generatriz para el campo escalar complejo en una forma convenientemente para los cálculos perturbativos y que además es útil para analizar las propiedades de simetría. El

análisis de la funcional generatriz para el campo espinorial es similar. La lagrangiana que aparece en la Ec. (2.2.52), puede expresarse en una forma más conveniente notando que si el campo se anula en el infinito, entonces integrando por partes:

$$\int_c d^3x d\tau [(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi] = - \int_c d^3x d\tau \phi^* [\square_c + m^2] \phi, \quad (2.3.61)$$

en donde recordamos que la derivada temporal se toma a lo largo del contorno C . Es fácil verificar que la funcional generatriz se puede expresar como

$$\mathcal{Z}[J, J^*] = e^i \int_c d^3x d\tau V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(\tau)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^*(\tau)} \right] \mathcal{Z}_0[J, J^*], \quad (2.3.62)$$

donde

$$\mathcal{Z}_0[J, J^*] = \int D\phi^* D\phi e^{-i \int_c d^3x d\tau (\phi^* [\square_c + m^2] \phi - J^* \phi - \phi^* J)}, \quad (2.3.63)$$

es la funcional generatriz para la parte libre. En la Ec. (2.3.62) hemos utilizado la definición de derivada funcional: $\frac{\delta \mathcal{Z}(z)}{\delta J(y)} = \delta_c(x_0 - y_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Hagamos en \mathcal{Z}_0 el cambio de variable $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$; este cambio de variable no alteran la medida en la integral funcional. Elegimos ϕ_0 de tal forma que satisfaga la siguiente ecuación

$$[\square_c + m^2] \phi_0 = -J, \quad (2.3.64)$$

cuya solución formal es

$$\phi_0(x) = \int_c d^3y d\tau_y D_c(x - y) J(y), \quad (2.3.65)$$

donde

$$[\square_c + m^2] D_c(x - y) = -\delta_c(x - y). \quad (2.3.66)$$

Con esto, la funcional generatriz resulta

$$\mathcal{Z}[J, J^*] = N e^i \int_c d^3x d\tau V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(\tau)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^*(\tau)} \right] e^{-i \int_c d^3x d\tau J^*(x) D_c(x - y) J(y)}, \quad (2.3.67)$$

con

$$N = \int D\phi^* D\phi e^{-i \int_c d^3x d\tau \phi^* [\square_c + m^2] \phi}. \quad (2.3.68)$$

26 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

A fin de encontrar la solución de la ecuación (2.3.66), notemos primeramente que D_c se puede descomponer en la forma

$$D_c(x-y) = \theta_c(\tau_x - \tau_y) D_>(x-y) + \theta_c(\tau_y - \tau_x) D_<(x-y). \quad (2.3.69)$$

Usando la condición de frontera $\phi(\tau) = e^{\beta\mu} \phi(\tau - i\beta)$ conjuntamente con la solución para ϕ_0 Ec. (2.3.65), se puede comprobar que se satisfacen las condiciones de Kubo-Martin-Schwinger (KMS):

$$D_<(x-y; \tau_x - \tau_y) = e^{\beta\mu} D_>(x-y; \tau_x - i\beta - \tau_y). \quad (2.3.70)$$

Es conveniente pasar al espacio de momentos a través de una transformada de Fourier, sólo en la parte espacial:

$$D_c(x-y; \tau_x - \tau_y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \bar{D}_c(k; \tau_x - \tau_y) e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (2.3.71)$$

La función delta es pues

$$\delta_c(x-y) = \delta_c(\tau_x - \tau_y) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (2.3.72)$$

Sustituyendo estos últimos resultados en la Ec. (2.3.66) obtenemos la ecuación

$$(\partial_{\tau_x}^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \bar{D}_c(k; \tau_x - \tau_y) = -\delta_c(\tau_x - \tau_y). \quad (2.3.73)$$

La solución para la parte homogénea de esta ecuación es

$$\bar{D}_c^H(k; \tau_x - \tau_y) = A(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} + B(\mathbf{k}) e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}, \quad (2.3.74)$$

con $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. La solución de la parte inhomogénea se obtiene utilizando el método de variación de parámetros y está dada por

$$\bar{D}_c^I(k; \tau_x - \tau_y) = \frac{1}{2i\omega_k} (\theta_c(\tau_x - \tau_y) e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} + \theta_c(\tau_y - \tau_x) e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}), \quad (2.3.75)$$

combinando los resultados anteriores, la solución a la Ec. (2.3.73) es

$$\begin{aligned} \bar{D}_c(k; \tau_x - \tau_y) = & \theta_c(\tau_x - \tau_y) [A(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} + B(\mathbf{k}) e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} \\ & + \frac{1}{2i\omega_k} e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}] + \theta_c(\tau_y - \tau_x) [A(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} \\ & + B(\mathbf{k}) e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)} + \frac{1}{2i\omega_k} e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}]. \end{aligned} \quad (2.3.76)$$

Aplicando la condición de KMS encontramos los coeficientes A y B :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2i\omega_k} \frac{1}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1}, \\ B(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2i\omega_k} \frac{1}{e^{\beta(\omega_k + \mu)} - 1}, \end{aligned} \quad (2.3.77)$$

con lo cual finalmente podemos identificar los resultados

$$\begin{aligned} \tilde{D}_> &= \frac{1}{2i\omega_k} \left[\frac{e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y) + \beta(\omega_k - \mu)}}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1} + \frac{e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(\omega_k + \mu)} - 1} \right], \\ \tilde{D}_< &= \frac{1}{2i\omega_k} \left[\frac{e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1} + \frac{e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y) + \beta(\omega_k + \mu)}}{e^{\beta(\omega_k + \mu)} - 1} \right], \end{aligned} \quad (2.3.78)$$

que, insertados en (2.3.69), nos dan el propagador para el campo escalar cargado en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} D_c(x - y) &= \frac{1}{2i\omega_k} \left\{ \theta_c(\tau_x - \tau_y) \left[\frac{e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y) + \beta(\omega_k - \mu)}}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1} + \frac{e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(\omega_k + \mu)} - 1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \theta_c(\tau_y - \tau_x) \left[\frac{e^{-i\omega_k(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(\omega_k - \mu)} - 1} + \frac{e^{i\omega_k(\tau_x - \tau_y) + \beta(\omega_k + \mu)}}{e^{\beta(\omega_k + \mu)} - 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.79)$$

De forma análoga, para el campo fermiónico, hacemos el cambio

$$\psi(\tau) \rightarrow \psi(\tau) - \int_c d\tau' S_c(\tau - \tau') \psi(\tau'), \quad (2.3.80)$$

en la Ec. (2.2.60), donde S_c satisface la ecuación

$$(i\partial - m) S_c(\tau) = \delta_c(\tau). \quad (2.3.81)$$

Salvo un factor de normalización irrelevante, la funcional generatriz para el campo espinorial está dada por

$$Z[\xi, \bar{\xi}] = e^{i \int_c d^4x V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(x)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}(x)} \right]} e^{-i \int_c d^4y d^4x \bar{\xi}(x) S_c(x-y) \xi(y)}. \quad (2.3.82)$$

Con el ansatz

$$S_c(\tau - \tau') = \theta_c(\tau - \tau') S_>(\tau - \tau') + \theta_c(\tau' - \tau) S_<(\tau - \tau'), \quad (2.3.83)$$

y las condiciones de frontera antiperiódicas en los campos, reproducimos las condiciones de KMS:

$$S_<(\tau - \tau') = -e^{-\beta\mu} S_>(\tau - i\beta - \tau'). \quad (2.3.84)$$

28 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

La solución única a (2.3.81) que satisface (2.3.84) es

$$i S_c(x-y) = (i\mathcal{P}_x - m) \int \tilde{d}p e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ \theta_c(\tau_x - \tau_y) \left[\frac{e^{-iE_p(\tau_x - \tau_y) + \beta(E_p - \mu)}}{e^{\beta(E_p - \mu)} - 1} + \frac{e^{iE_p(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(E_p + \mu)} - 1} \right] + \theta_c(\tau_x - \tau_y) \left[\frac{e^{-iE_p(\tau_x - \tau_y)}}{e^{\beta(E_p - \mu)} - 1} + \frac{e^{iE_p(\tau_x - \tau_y) + \beta(E_p + \mu)}}{e^{\beta(E_p + \mu)} - 1} \right] \right\}, \quad (2.3.85)$$

que es el propagador para el campo fermiónico.

2.4 Formalismo de tiempo real

Los resultados obtenidos hasta ahora son válidos para un contorno C arbitrario, con la restricción que vaya de τ_i a $\tau_i - i\beta$. En el formalismo de tiempo imaginario se elige para C una línea recta que une directamente t_0 con $t_0 - i\beta$. Debido a que el intervalo temporal es finito, las frecuencias del desarrollo de Fourier resultan discretas; las llamadas frecuencias de Matsubara.

En lo sucesivo consideraremos el formalismo de tiempo real.

2.4.1 Factorización de Z

En el caso del contorno C que contiene al eje real (Fig. 2.2), se puede escribir como la suma de cuatro contribuciones: $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4$, tal y como se ilustra en la figura mencionada. La parte libre de Z es bilineal en el contorno C (ver (2.3.67)), por lo cual se puede escribir como una suma de todas las contribuciones por pares:

$$\int_C \int_C d^4x d^4y J^*(x) D_c(x-y) J(y) = \left[\int_{C_1} \int_{C_1} + \int_{C_1} \int_{C_2} + \dots + \int_{C_4} \int_{C_4} \right] d^4x d^4y J^*(x) D_c(x-y) J(y). \quad (2.4.86)$$

Esencial para el formalismo de tiempo real será el demostrar que podemos prescindir de las contribuciones que provienen de C_3 y C_4 , de tal manera que los argumentos temporales pueden ser considerados reales.

A fin de examinar el comportamiento asintótico de cada una de las integrales en (2.4.86), consideramos primero el propagador bosónico $D_c(x-y)$

con $t_x, t_y \in C_1$, con lo cual los argumentos temporales son reales y las funciones escalón en (2.3.76) son funciones escalón ordinarias de argumento real. Escribiendo en coordenadas esféricas la integral (2.3.71) e integrando sobre la parte angular, resulta

$$\begin{aligned} i D_c(x-y) &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k} k \operatorname{sen}(kr) e^{-i(\omega_k |t|)} \\ &+ \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k} k \operatorname{sen}(kr) \cos(\omega_k |t|) \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}, \end{aligned} \quad (2.4.87)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ y $|t| = |t_x - t_y|$. En la segunda integral, pasando a la variable de integración $\omega_k \equiv \omega$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi^2 r} \int_m^\infty d\omega \cos(\omega |t|) \operatorname{sen}(r \sqrt{\omega^2 - m^2}) \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (2.4.88)$$

ésta es la transformada coseno de una función absolutamente integrable. Podemos, entonces, aplicar el lema de Riemman-Lebesgue [36], el cual establece que la transformada de Fourier de una función absolutamente integrable tiende a cero cuando el valor absoluto de la variable de Fourier tiende a infinito. La primera integral en (2.4.87), la cual corresponde al propagador libre en el vacío, no es absolutamente integrable y por lo tanto no se puede aplicar el lema anterior. No obstante, puede ser evaluada explícitamente en términos de funciones cilíndricas [37]

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k} k \operatorname{sen}(kr) e^{-i(\omega_k |t|)} = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{cases} Y_0(m\sqrt{t^2 - r^2}) & , t > r \\ -\frac{2}{\pi} K_0(m\sqrt{r^2 - t^2}) & , r > t \end{cases} \quad (2.4.89)$$

La expresión anterior tiene el comportamiento asintótico $\sim |t|^{-3/2}$, para $|t| \rightarrow \infty$. Con esto hemos demostrado que se cumple la condición

$$\lim_{|t_x - t_y| \rightarrow \infty} D_c(x-y) = 0, \quad t_x, t_y \in C_1. \quad (2.4.90)$$

Consideremos ahora el caso en que $\tau_x \in C_1$ y $\tau_y \in C_3$. Parametricemos a estas variables temporales en la forma $\tau_x = t_x$ y $\tau_y = t_0 - i\lambda$ (recordemos que se considera el límite $t_0 \rightarrow \infty$), con $0 < \lambda \leq \beta$. En este caso obtenemos

$$i D_c(x-y) = i D_c^<(x-y; t_x - t_y + i\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k} k \operatorname{sen}(kr) e^{-i\omega_k |t| - \lambda \omega_k} \\
&+ \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k} \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{e^{\beta \omega_k} - 1} [e^{\lambda \omega_k} e^{-i\omega_k |t|} + e^{-\lambda \omega_k} e^{i\omega_k |t|}],
\end{aligned} \tag{2.4.91}$$

para t_x finito y $t_0 \rightarrow \infty$, el lema de Riemman-Lebesgue es válido para ambas integrales en (2.4.91) y por lo tanto $D_c \rightarrow 0$. Sin embargo, para $t_x \rightarrow \infty$ tendremos que $|t| \rightarrow 0$ y entonces el lema no es aplicable en este caso. Para asegurar que la contribución que liga C_1 con C_3 ó C_4 se cancele completamente, imponemos que las fuentes se anulen en el pasado y el futuro remoto, esto es

$$\lim_{\operatorname{Re} \tau \rightarrow \pm \infty} J(\mathbf{x}, \tau \in C_1, C_2) = 0, \tag{2.4.92}$$

que es la llamada condición de adiabaticidad, la cual garantiza el resultado deseado

$$\int_{C_1} \int_{C_3} d^4 x d^4 y J^*(x) D_c(x-y) J(y) \rightarrow 0, \tag{2.4.93}$$

es decir, C_1 se desacopla de C_3 .

De igual manera se encuentra que C_1 y C_4 se desacoplan. Un análisis similar se utiliza para demostrar que C_2 se desacopla de C_3 y C_4 .

En conclusión, considerando la estructura de la funcional generatriz completa en la Ec. (2.3.67), concluimos que Z puede ser factorizada en la forma

$$Z[J, J^*] = Z_{12}[J, J^*] Z_{34}[J, J^*], \tag{2.4.94}$$

donde $Z_{12}[J, J^*]$ corresponde a la contribución para puntos sobre $C_{12} = C_1 \oplus C_2$, mientras que $Z_{34}[J, J^*]$ representa la contribución para puntos sobre $C_3 \oplus C_4$. La parte correspondiente a Z_{12} está dada por

$$Z_{12}[J, J^*] = e^{-i \int_{C_{12}} d^4 x V \left[\frac{1}{2} J^{\dot{A}}(\vec{x}), \frac{1}{2} J^{\dot{A}}(\vec{x}) \right]} e^{-i \int_{C_{12}} d^4 y d^4 x J^*(x) D_c(x-y) J(y)}. \tag{2.4.95}$$

Al considerar las funciones de Green térmicas de tiempo real, el factor Z_{34} representa un factor multiplicativo que podemos absorber en la normalización y por lo tanto, ignorar. Sin embargo, para el cálculo de variables termodinámicas tales como la presión o la energía interna del sistema, dicho factor no puede ser despreciado [2]. Por lo tanto, en cuanto estemos

interesados en funciones de Green para un tiempo real, podemos omitir las contribuciones que provienen de C_3 y C_4 y considerar la funcional generatriz simplemente como

$$Z[J, J^*] = Z_{12}[J, J^*]. \quad (2.4.96)$$

Ahora los grados de libertad tienen soporte en C_1 y C_2 . En C_1 el argumento temporal $\tau = t$ es puramente real. Por otro lado, si bien en C_2 el tiempo es complejo $\tau = t - i\sigma$, sólo su parte real varía; consecuentemente podemos redefinir las funciones de tal manera que todos los argumentos temporales sean reales. Definido las fuentes con soporte en C_1 y C_2 como fuentes independientes:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= J(t) \\ J_2(t) &= J(t - i\sigma). \end{aligned} \quad (2.4.97)$$

Tomando en cuenta lo anterior, vemos que la funcional generatriz (2.4.95) puede ser expresada en la forma:

$$Z[J, J^*] = e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \{V[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1(x)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_1^*(x)}] - V[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2(x)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_2^*(x)}]\}} Z_0[J_a, J_b^*], \quad (2.4.98)$$

donde el signo menos del segundo término del potencial es una consecuencia de la orientación negativa en C_2 , la parte libre de Z se escribe como

$$Z_0[J_a, J_b^*] = \exp\{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt_x dt_y d^3y d^3x J_a^*(x) D^{ab}(x-y) J_b(y)\}. \quad (2.4.99)$$

Los cuatro propagadores de tiempo real se definen a partir del propagador libre general en (2.3.69) como

$$\begin{aligned} D^{11}(t_x - t_y) &= D_c(t_x - t_y), \\ D^{12}(t_x - t_y) &= D_{<}(t_x - t_y + i\sigma), \\ D^{21}(t_x - t_y) &= D_{>}(t_x - t_y - i\sigma), \\ D^{22}(t_x - t_y) &= -D_c(t_y - t_x). \end{aligned} \quad (2.4.100)$$

La notación indica que para $D^{ab}(t_x - t_y)$ el tiempo t_x toma valores en C_a y t_y en C_b . Es claro, por ejemplo, que para D^{12} , sólo contribuye $D_{<}$ ya que de acuerdo al ordenamiento definido en C , cualquier tiempo en C_1 es anterior a tiempos en C_2 .

32 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Una representación para Z_{12} como integral de trayectoria está dada por

$$Z_{12}[J, J^*] = \int D\phi_a^* D\phi_b \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\phi_a^* (D^{-1})^{ab} \phi_b + V[\phi_1^*, \phi_1] - V[\phi_2^*, \phi_2] - J_a^* \phi^a - \phi_a^* J^a \right) \right\}, \quad (2.4.101)$$

donde se suma sobre índices repetidos con $a, b = 1, 2$ y $(D^{-1})^{ab}$ son los inversos de los propagadores $(D)^{ab}$. Para obtener el resultado anterior, primeramente expresamos la funcional generatriz Z_0 como integral de trayectoria; este procedimiento implica invertir los pasos que nos llevaron de (2.3.66) a (2.3.68), tomando en cuenta que ahora el propagador tiene estructura matricial. Posteriormente se hacen actuar los términos del potencial para llegar al resultado deseado.

Las funciones de Green térmicas con ordenamiento temporal se obtienen derivando funcionalmente con respecto a las fuentes J_1 y haciendo posteriormente J_1 y J_2 igual a cero:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z[0, 0]} \frac{\delta}{\delta J_1(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} Z[J_1, J_2] \Big|_{J_1=J_2=0}. \quad (2.4.102)$$

Esto implica que sólo los campos de tipo-1, esto es, aquellos cuyo argumento temporal corresponden al subcontorno C_1 , pueden aparecer en líneas externas de diagramas de Feynman. Por eso a los campos tipo-2 se les llama fantasmas térmicos. Como anunciamos al inicio de este capítulo, hemos llegado, finalmente, a una teoría en la que los grados de libertad en los campos se han duplicado. Existen dos tipos de campos: campos tipo-1 y tipo-2. Si bien la estructura topológica y combinatoria de los diagramas no cambia, los propagadores son matrices de 2×2 . Como se desprende de (2.4.101) a nivel de árbol existen también vértices de tipo-1 y vértices de tipo-2, donde la interacción es sólo entre campos de tipo-2, con el signo de las constantes de acoplamiento invertido.

2.4.2 Propagadores

De las ecuaciones (2.3.76) y (2.4.97) podemos obtener explícitamente los propagadores libres para el campo escalar complejo. Una transformada de Fourier en la parte temporal, da como resultado los propagadores en el espacio de momentos

$$iD_{11}(k) = i\Delta(k) + 2\pi\eta_B(k_0)\delta(k^2 - m^2),$$

$$\begin{aligned}
i D_{22}(k) &= -i\Delta^*(k) + 2\pi\eta_B(k_0)\delta(k^2 - m^2), \\
i D_{12}(k) &= 2\pi e^{\sigma k_0} [\eta_B(k_0) + \theta(-k_0)]\delta(k^2 - m^2), \\
i D_{21}(k) &= 2\pi e^{-\sigma k_0} [\eta_B(k_0) + \theta(k_0)]\delta(k^2 - m^2),
\end{aligned} \tag{2.4.103}$$

donde θ es la función escalón, η_B está dado por

$$\eta_B(k_0) = \frac{\theta(k_0)}{e^{\beta(k_0-\mu)} - 1} + \frac{\theta(-k_0)}{e^{-\beta(k_0-\mu)} - 1}, \tag{2.4.104}$$

y

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.4.105}$$

Recordemos que el factor $i\epsilon$ que aparece en Δ , tiene su origen en las condiciones de analiticidad discutidas en la Secc. 2.1.1; el contorno debe ser monótonamente decreciente en su parte imaginaria.

De manera similar, para el campo fermiónico, los propagadores se obtienen usando (2.3.85):

$$\begin{aligned}
i S_{11}(p) &= [i\Delta(p) - 2\pi\eta_F(p_0)\delta(p^2 - m^2)](\not{p} + m), \\
i S_{22}(p) &= [-i\Delta^*(p) - 2\pi\eta_F(p_0)\delta(p^2 - m^2)](\not{p} + m), \\
i S_{12}(p) &= -2\pi e^{\sigma p_0} [\eta_F(p_0) - \theta(-p_0)]\delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m), \\
i S_{21}(p) &= -2\pi e^{-\sigma p_0} [\eta_F(p_0) - \theta(p_0)]\delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m),
\end{aligned} \tag{2.4.106}$$

donde η_F está dado por

$$\eta_F(p_0) = \frac{\theta(p_0)}{e^{\beta(p_0-\mu)} + 1} + \frac{\theta(-p_0)}{e^{-\beta(p_0-\mu)} + 1}. \tag{2.4.107}$$

2.4.3 Reglas de Feynman

En el formalismo de tiempo imaginario, a diferencia del formalismo de tiempo real, no hay la duplicidad de los campos que aparece en este formalismo. Las reglas para los diagramas de Feynman en el formalismo de tiempo imaginario, son análogas a las reglas que se dan en el vacío. Debido a la duplicidad en los campos que ocurre en el formalismo de tiempo real, las reglas de Feynman son un poco más complicadas.

Tomemos como ejemplo sencillo una teoría escalar con interacción $\lambda\phi^3$. La densidad lagrangiana que se obtiene, de acuerdo a (2.4.101), es

$$\phi_a(D^{-1})^{ab}\phi_b + \lambda\phi_1^3 - \lambda\phi_2^3, \tag{2.4.108}$$

34 CAPÍTULO 2. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

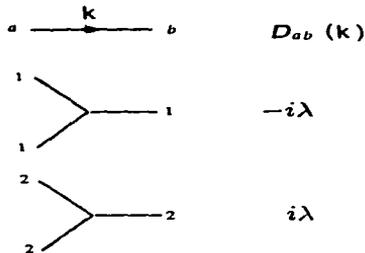


Figura 2.3: Reglas de Feynman para la teoría escalar ϕ^3 .

donde el propagador D_{ab} está dado por la Ec. (2.4.103). Las reglas de Feynman se extraen de manera directa de la expresión anterior. Un propagador tiene índices térmicos a y b : es decir, una línea asociada al propagador D_{ab} conecta un campo ϕ_a a otro ϕ_b . Existen dos tipos de vértices: los tipo-1 y tipo-2, los cuales difieren por un signo. En el caso particular de la teoría ϕ^3 asociamos un factor $-i\lambda$ a los vértices tipo-1, mientras que para los de tipo-2 asociamos el factor $+i\lambda$, respectivamente. Finalmente, para calcular una función de Green de n puntos, recordemos que los campos en las líneas externas son siempre de tipo-1. Por lo tanto, dibujamos todos los diagramas posibles con n -patas externas de tipo-1, para los vértices internos se suma sobre todos sus posibles valores. En la Fig. 2.3 se muestran las reglas de Feynman para la teoría ϕ^3 .

Para finalizar el capítulo haremos un resumen breve del mismo. Hemos estudiado la formulación la teoría de campos a temperatura finita en un contorno C , en el plano complejo temporal, a través de integrales de trayectoria. Encontramos que, a largo del contorno C , la teoría de campos a temperatura finita es similar a la correspondiente teoría del vacío, pero con diferentes condiciones de frontera que se reflejan en los propagadores. Analizamos detalladamente el formalismo de tiempo real (una parte del contorno C incluye al eje temporal real). Vimos que este formalismo lleva a que los grados de libertad en los campos se duplique.

CAPÍTULO 3

SIMETRÍAS EN LA TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Las simetrías que presenta la naturaleza nos permite entenderla. Por ejemplo, cuando un sistema físico es invariante bajo traslaciones, el momento lineal se conserva. Si además es invariante bajo rotaciones, entonces también el momento angular es una cantidad conservada, etcétera.

Es bien conocido que la electrodinámica clásica posee una simetría de norma: las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la transformación de norma $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$, donde $\Lambda(x)$ es una función arbitraria de x_μ . Sin embargo, cuando se requiere una formulación cuántica de la electrodinámica, es necesario fijar la norma. Si bien, algunas cantidades pueden depender de la condición de la norma elegida, la simetría de norma se ve reflejada en el hecho de que las cantidades físicas u observables no dependen de dicha condición de norma. En la QED en el vacío, las identidades de Ward son una consecuencia de la invariancia de norma y relacionan distintas funciones de Green. Podemos preguntarnos si este hecho se hace extensivo para la teoría térmica y cuales son las correspondientes identidades de Ward. La respuesta definitiva es uno de los objetivos fundamentales de este capítulo.

Estudiaremos algunas simetrías relacionadas con el formalismo de tiempo real de la TCTF, para el campo escalar y la QED. En el caso del campo escalar, deduciremos la ecuación efectiva de movimiento y demostraremos que ésta es independiente del parámetro de contorno σ . En la QED a temperatura finita, analizaremos con detalle la simetría de intercambio \mathcal{Z}_2 en-

tre los campos físicos y sus fantasmas térmicos y las consecuencias de esta simetría en las funciones de Green de dos y tres puntos. Posteriormente estudiaremos la simetría de norma en la QED; en particular, deduciremos las identidades de Ward. Apoyados en la simetría \mathcal{Z}_2 y las identidades de Ward, demostraremos que de ocho funciones de Green de tres puntos que se tienen inicialmente, sólo tres son independientes. En particular, para la parte longitudinal de la función vértice, probaremos que el número de funciones independientes se reduce a uno. Finalmente, demostraremos que las identidades de Ward predicen que algunos vértices son singulares cuando el momento de la línea fotónica tiende a cero.

Este capítulo contiene material nuevo y es el núcleo de la tesis. Las aplicaciones, de los resultados que se obtengan aquí, se harán en los siguientes capítulos.

3.1 Propagador libre

En el capítulo anterior hemos encontrado los propagadores libres para campos escalares y fermiónicos, a partir de la funcional generatriz Z . Como una consecuencia de imponer que el contorno en el plano complejo temporal incluya al eje real, los grados de libertad se duplican y, por lo tanto, el propagador adquiere una estructura matricial de 2×2 . Denotaremos al propagador escalar como

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{pmatrix} D_{11}^{(0)} & D_{12}^{(0)} \\ D_{21}^{(0)} & D_{22}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

con una expresión similar para los fermiones. El superíndice 0 indica que se trata de los propagadores libres. Utilizando las expresiones explícitas (2.4.103) se comprueba que los elementos del propagador térmico cumplen con las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} D_{11}^{(0)}(k) + D_{22}^{(0)}(k) &= e^{-\sigma k_0} D_{12}^{(0)}(k) + e^{\sigma k_0} D_{21}^{(0)}(k), \\ D_{22}^{(0)}(k) &= -(D_{11}^{(0)}(k))^*, \\ D_{12}^{(0)}(k) &= e^{-2\sigma k_0} e^{\beta k_0} D_{21}^{(0)}(k). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Estas tres restricciones implican, en efecto, que sólo una de las cuatro componentes de $\mathbf{D}^{(0)}$ es independiente. Podemos elegir, por ejemplo, el propagador $D_{11}^{(0)}$. Alternativamente es posible escoger un propagador con propiedades

causales bien definidas (el propagador retardado, o el avanzado, o el ordenado temporalmente). Si bien es posible expresar cualquier resultado en términos de una componente independiente, en la práctica el desarrollo perturbativo de la teoría se simplifica recurriendo a la estructura matricial completa.

Utilizando los resultados anteriores y la siguiente representación de la función delta

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (3.1.3)$$

se demuestra que $\mathbf{D}^{(0)}$ puede ser factorizado en la forma

$$\mathbf{D}^{(0)}(k) = \mathbf{U}_B(k_0) \Delta_D^{(0)}(k) \mathbf{U}_B(k_0), \quad (3.1.4)$$

donde

$$\Delta_D^{(0)}(k) = \begin{pmatrix} \Delta^{(0)} & 0 \\ 0 & -\Delta^{(0)*} \end{pmatrix}, \quad (3.1.5)$$

y

$$\mathbf{U}_B(k_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_B(k_0) + 1} & e^{\sigma k_0} \frac{\eta_B(k_0) + \theta(-k_0)}{\sqrt{\eta_B(k_0) + 1}} \\ e^{-\sigma k_0} \frac{\eta_B(k_0) + \theta(k_0)}{\sqrt{\eta_B(k_0) + 1}} & \sqrt{\eta_B(k_0) + 1} \end{pmatrix}. \quad (3.1.6)$$

En (3.1.5), $\Delta^{(0)} = (k^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$ es el propagador de Stueckelberg-Feynman en el vacío, es decir, el propagador con ordenamiento temporal. Este propaga partículas de energía positiva hacia el futuro y partículas de energía negativa hacia el pasado. A su vez, $-\Delta^{(0)*}$ es el propagador anti-ordenado temporalmente, que propaga partículas de energía negativa hacia el futuro y de energía positiva hacia el pasado. A temperatura finita, ambos propagadores contribuyen en los diagramas de Feynman.

Observemos que la información térmica está contenida en la matriz \mathbf{U}_B ; con la propiedad: $\det \mathbf{U}_B = 1$, y su inverso es

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_B^{-1}(k_0) &= \sigma_3 \mathbf{U}_B(k_0) \sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_B(k_0) + 1} & -e^{\sigma k_0} \frac{\eta_B(k_0) + \theta(-k_0)}{\sqrt{\eta_B(k_0) + 1}} \\ -e^{-\sigma k_0} \frac{\eta_B(k_0) + \theta(k_0)}{\sqrt{\eta_B(k_0) + 1}} & \sqrt{\eta_B(k_0) + 1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

donde σ_3 es la tercera matriz de Pauli.

3.1.1 Límite $T \rightarrow 0$

Consideremos ahora el límite $T \rightarrow 0$. En este límite recuperamos la teoría de campos en el vacío, lo cual podemos demostrar fácilmente observando que (para $\sigma \neq 0$) las componentes no diagonales de \mathbf{U}_B , así como η_B en la Ec. (3.1.6) tienden a cero en el límite $T \rightarrow 0$. Por lo tanto, \mathbf{U}_B se reduce simplemente a la matriz identidad. Esto significa que los campos de tipo-1 y de tipo-2 se desacoplan y la funcional generatriz $Z_{12}[J]$ en la Ec. (2.4.99) se factoriza como: $Z_{12}[J] = Z_1[J]Z_2[J]$. El segundo factor puede absorberse en la normalización y sólo nos queda $Z_1[J]$, la cual genera las funciones de Green ordinarias en el vacío.

3.2 Propagador exacto

3.2.1 Campo escalar

El propagador completo, es decir el que incluye las correcciones radiativas, tiene también una estructura matricial. Vamos a deducir el propagador exacto para un campo escalar.

Con el valor del parámetro $\sigma = \beta/2$, la matriz \mathbf{U}_B adquiere la forma, particularmente sencilla,

$$\mathbf{U}_B(k_0) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad (3.2.8)$$

con

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta|k_0|}}}, \\ \sinh \theta &= \frac{e^{-\beta|k_0|/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta|k_0|}}}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

El propagador para un parámetro de contorno σ arbitrario, se obtiene a través de la transformación de similitud

$$\mathbf{D}_\sigma^{(0)} = \mathbf{C} \mathbf{D}_{\sigma=\beta/2}^{(0)} \mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{k_0(2\sigma-\beta)/4} & 0 \\ 0 & e^{-k_0(2\sigma-\beta)/4} \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Cabe resaltar que la matriz \mathbf{U}_B en (3.2.8) y su análogo fermiónica en (3.2.22) dan lugar a transformaciones de Bogoliubov en un baño térmico. Dichas transformaciones han sido ampliamente discutidas por Umezawa y colaboradores [4, 5, 6].



Figura 3.1: Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador exacto.

En lo que sigue usaremos el valor simétrico del parámetro de contorno $\sigma = \beta/2$.

Es de esperar que el propagador exacto tenga una estructura matricial análoga a la del propagador libre dado en la Ec. (3.1.4). Existen varias alternativas para establecer este resultado. Una de ellas se basa en el trabajo de Semenoff y Umezawa [38], quienes mostraron que el propagador exacto tiene la siguiente representación espectral

$$\mathbf{D}_{ab}(k_0, \kappa) = \int_0^\infty d\kappa' \mathbf{D}_{ab}^{(0)}(k_0, \kappa') \rho(\kappa', \kappa), \quad (3.2.11)$$

donde ρ es una función que sólo depende de las componentes espaciales del momento $\kappa = |\mathbf{k}|$ y $\kappa' = |\mathbf{k}'|$. Puesto que la matriz \mathbf{U}_B no depende de κ , el propagador exacto adquiere la forma

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_B \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^- \end{pmatrix} \mathbf{U}_B. \quad (3.2.12)$$

Consideremos ahora la ecuación de Schwinger-Dyson (ver Fig. 3.1)

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{D}^{(0)} \mathbf{\Pi} \mathbf{D}, \quad (3.2.13)$$

de la última ecuación y de (3.2.12) y (3.1.4), se sigue que la matriz de autoenergía se puede escribir como

$$\mathbf{\Pi}(k) = \mathbf{U}_B^{-1} \begin{pmatrix} -\Pi(k) & 0 \\ 0 & \Pi^+(k) \end{pmatrix} \mathbf{U}_B^{-1}. \quad (3.2.14)$$

De las ecuaciones (3.2.12) y (3.2.14) podemos concluir que la función Δ es el propagador de Feynman completo:

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - \Pi(k) + i\epsilon}. \quad (3.2.15)$$

De esta forma hemos probado que, al igual que el propagador, la matriz de autoenergía tiene un sólo elemento independiente. Por ejemplo, podemos elegir Π_{11} como la componente independiente. En términos de dicha componente las tres restantes son

$$\begin{aligned}\Pi_{12} &= \Pi_{21} = -i \tanh 2\theta \operatorname{Im} \Pi_{11}, \\ \Pi_{22} &= -\Pi_{11}^*.\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

Notemos que la Ec. (3.2.14) nos da explícitamente los elementos de Π_{ab} en términos de Π y Π^* como

$$\begin{aligned}\Pi_{11} &= \Pi \cosh^2 \theta - \Pi^* \sinh^2 \theta, \\ \Pi_{12} &= \Pi_{21} = -(\Pi - \Pi^*) \sinh \theta \cosh \theta.\end{aligned}\quad (3.2.17)$$

Cabe destacar que las relaciones que existen entre las componentes, tanto de la autoenergía como de los propagadores, se deben a la simetría de intercambio \mathcal{Z}_2 entre los campos de tipo-1 y tipo-2, tal y como discutiremos en la subsección 3.3.1. Como hemos mencionado anteriormente, el caso del vacío ($T = 0$) se recupera porque los campos de tipo-1 y tipo-2 se desacoplan.

Resulta de interés analizar la componente 11 del propagador completo. De (3.2.12) y (3.2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned}D_{11}(p) &= \Delta \cosh^2 \theta + \Delta^* \sinh^2 \theta \\ &= \frac{\cosh^2 \theta}{k^2 - m^2 - \Pi(k) + i\epsilon} + \frac{\sinh^2 \theta}{p^2 - m^2 - \Pi^*(k) - i\epsilon}.\end{aligned}\quad (3.2.18)$$

A temperatura cero $\cosh \theta = 1$ y $\sinh \theta = 0$ y $D_{11}(k)$ se reduce al propagador $\Delta(k)$. Los efectos térmicos dan lugar a que Δ y Δ^* contribuyan a D_{11} con amplitudes $\cosh \theta$ y $\sinh \theta$, respectivamente. Notemos que Δ^* representa un flujo de energía en la dirección opuesta a la Δ . Una interpretación más clara de estas afirmaciones se obtiene si utilizamos las expresiones para la autoenergía retardada y avanzada

$$\begin{aligned}\Pi_R(k) &= \theta(k_0)\Pi(k) + \theta(-k_0)\Pi^*(k), \\ \Pi_A(k) &= \Pi_R^*(k),\end{aligned}\quad (3.2.19)$$

para expresar D_{11} como

$$D_{11}(k) = \frac{\theta(k_0) \cosh^2 \theta - \theta(-k_0) \sinh^2 \theta}{k^2 - m^2 - \Pi_R(k) + i\epsilon k_0} - \frac{\theta(k_0) \sinh^2 \theta - \theta(-k_0) \cosh^2 \theta}{k^2 - m^2 - \Pi_A(k) - i\epsilon k_0}.\quad (3.2.20)$$

De donde resulta que, a temperatura finita, las soluciones de energía positiva (negativa) se propagan tanto al futuro con amplitud $\cosh\theta$ ($\sinh\theta$) como hacia el pasado con amplitud $\sinh\theta$ ($\cosh\theta$).

3.2.2 Campo espinorial

Para el caso de los fermiones el procedimiento es análogo al caso escalar, por lo cual sólo resumiremos los resultados más importantes.

El propagador libre está dado por

$$\mathbf{S}^{(0)}(p) = \mathbf{U}_F(p_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{p-m+ic} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{p-m-ic} \end{pmatrix} \mathbf{U}_F(p_0), \quad (3.2.21)$$

para $\sigma = \beta/2$, la matriz \mathbf{U}_F adquiere la forma

$$\mathbf{U}_F(p_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\epsilon(p_0) e^{\beta\mu/2} \sin\varphi \\ \epsilon(p_0) e^{-\beta\mu/2} \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.2.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\theta(p_0)e^{x/4} + \theta(-p_0)e^{-x/4}}{\sqrt{e^{x/2} + e^{-x/2}}}, \\ \sin\varphi &= \frac{\theta(p_0)e^{-x/4} + \theta(-p_0)e^{x/4}}{\sqrt{e^{x/2} + e^{-x/2}}}, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

con $x = \beta(p_0 - \mu)$. El propagador exacto admite una representación similar

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{U}_F(p) \begin{pmatrix} S_F(p) & 0 \\ 0 & -S_F^-(p) \end{pmatrix} \mathbf{U}_F(p_0), \quad (3.2.24)$$

con la convención de que la operación de conjugación no opera sobre las matrices de Dirac.¹ Usando ahora la ecuación de Schwinger-Dyson

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)} + \mathbf{S}^{(0)} \Sigma \mathbf{S}, \quad (3.2.25)$$

se comprueba que la matriz de autoenergía fermiónica se puede escribir como

$$\Sigma = \mathbf{U}_F^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma^- \end{pmatrix} \mathbf{U}_F^{-1}, \quad (3.2.26)$$

¹ Hemos usado esta notación por simplicidad. Una notación alternativa es: $\tilde{\mathbf{S}} = \gamma_0 \mathbf{S}^1 \gamma_0$, la cual tiene el mismo efecto de no conjuar las matrices de Dirac.

y podemos entonces identificar a la función S que aparece en el propagador exacto con

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma + i\epsilon}. \quad (3.2.27)$$

De la Ec. (3.2.26), es fácil verificar que se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \Sigma_{12}(p) &= -e^{-\beta\mu} \Sigma_{21} = i\epsilon(p_0) e^{-\beta\mu/2} \tan 2\varphi \operatorname{Im} \Sigma_{11}, \\ \Sigma_{22}(p) &= -\Sigma_{11}^*(p). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Es conveniente contar con las expresiones de la autoenergía retardada y avanzada en términos de los elementos de Σ_{ab} . Combinando el equivalente fermiónico de (3.2.19) con la Ec. (3.2.26), obtenemos

$$\begin{aligned} \Sigma_R(p) &= \Sigma_{11} + e^{-\beta p_0/2} \Sigma_{12}, \\ \Sigma_A(p) &= \Sigma_{11} + e^{\beta p_0/2} \Sigma_{21}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Estas relaciones fueron obtenidas por Kobes [39] utilizando una adaptación al caso térmico del método causal de 't Hooft. De acuerdo a este método, si consideramos el diagrama de autoenergía con las orientaciones para el flujo de energía tal y como se muestra en la Fig. 3.2, con $p_0 > 0$, entonces Σ_R (Σ_A) representa la propagación del tiempo t_1 a t_2 , con $t_2 > t_1$ ($t_2 < t_1$). Finalmente podemos utilizar (3.2.28) para escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma_R(p) &= \operatorname{Re} \Sigma_A(p) = \operatorname{Re} \Sigma_{11}(p) \\ \operatorname{Im} \Sigma_R(p) &= -\operatorname{Im} \Sigma_A(p) = \epsilon(p_0) \sec(2\varphi) \operatorname{Im} \Sigma_{11}(p) \\ &= -ie^{-\beta\mu} \csc(2\varphi) \Sigma_{12}(p). \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Si bien es posible calcular cualquier autoenergía a partir de Σ_{11} , es más simple calcular las partes imaginarias utilizando Σ_{12} , que es una cantidad puramente imaginaria. Por esta razón y para futura comparación con el resultado de la función de tres-puntos, hemos escrito la segunda igualdad para la parte imaginaria de Σ_R .

3.3 Acción efectiva y ecuaciones de movimiento

3.3.1 Simetría de intercambio

En esta sección estudiaremos las simetrías y las ecuaciones de movimiento para el campo escalar.

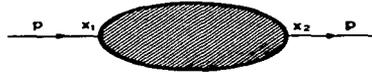


Figura 3.2: Autoenergía exacta. Las flechas indican el flujo de energía.

En el capítulo anterior demostramos que la funcional generatriz Z para las funciones de Green térmicas, puede ser factorizada en tal forma que sólo los contornos C_1 y C_2 contribuyen a las funciones de Green, con lo cual los grados de libertad de los campos se duplica. El resultado es una teoría efectiva cuya funcional generatriz puede ser representada en la siguiente forma

$$Z[J_1, J_2] = \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \exp \left\{ i \int dt (L[\phi_1, \phi_2] + J_1 \phi_1 + J_2 \phi_2) \right\}, \quad (3.3.31)$$

donde la lagrangiana está dada por

$$L[\phi_1, \phi_2] = \frac{1}{2} \phi_a [D_{ab}^{(0)}]^{-1} \phi_b - V[\phi_1] + V[\phi_2]. \quad (3.3.32)$$

Esta lagrangiana posee una simetría discreta de intercambio \mathcal{Z}_2 [3]

$$L[\phi_1, \phi_2] = -L^*[\phi_2^*, \phi_1^*], \quad (3.3.33)$$

en la cual los campos de tipo-1 y tipo-2 se intercambian y, como consecuencia, la funcional generatriz satisface la siguiente igualdad

$$Z[J_1, J_2] = Z^*[-J_2^*, -J_1^*]. \quad (3.3.34)$$

Esta simetría se puede demostrar considerando las ecuaciones (3.3.31) y (3.3.33), así como las propiedades del propagador $\mathbf{D}^{(0)}$ que se siguen de (3.1.2).

A partir de (3.3.34), es fácil comprobar que \mathcal{Z}_2 se verifica también para la funcional generatriz de los diagramas de Feynman conexos, es decir:

$$W[J_1, J_2] = -W^*[-J_2^*, -J_1^*]. \quad (3.3.35)$$

donde

$$W[J_1, J_2] = -i \ln Z[J_1, J_2]. \quad (3.3.36)$$

Para cada fuente J_a ($a = 1, 2$), los campos clásicos φ_a están definidos por

$$\varphi_a = \frac{\delta W[J_1, J_2]}{\delta J_a}, \quad (a = 1, 2). \quad (3.3.37)$$

Puesto que los campos φ_a son funcionales de las fuentes J_1 y J_2 , heredan la simetría de intercambio, de tal forma que

$$\varphi_1[J_1, J_2] = \varphi_2^*[-J_2^*, -J_1^*]. \quad (3.3.38)$$

La funcional generatriz $\Gamma[\varphi_1, \varphi_2]$ de los llamados diagramas de Feynman irreducibles de una partícula (1PI), también llama acción funcional efectiva, se define a través de la transformada funcional de Legendre:

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = W[J_1, J_2] - \int J_a \varphi^a. \quad (3.3.39)$$

Finalmente, a partir de los resultados anteriores, puede comprobarse que esta funcional posee también la simetría \mathcal{Z}_2 :

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = -\Gamma^*[\varphi_2^*, \varphi_1^*]. \quad (3.3.40)$$

3.3.2 Ecuaciones de movimiento

En el vacío, la ecuación de movimiento está dada por la ecuación

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} = -J. \quad (3.3.41)$$

Si derivamos la Ec. (3.3.39) funcionalmente con respecto a φ_a , obtenemos

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_a} = -J_a, \quad (a = 1, 2). \quad (3.3.42)$$

La comparación con (3.3.41) sugiere considerar las anteriores como las ecuaciones de movimiento a temperatura finita. Sin embargo, nos interesa precisar cual es la ecuación efectiva a partir de la cual podemos extraer información física acerca de las propiedades del sistema. Por ejemplo, ¿Cuáles son las características de los modos normales que se propagan en el sistema? Para proceder en esta dirección, recordemos que los campos de tipo-1 son los campos físicos, mientras que los del tipo-2 son campos auxiliares o fantasmas. Las funciones de Green físicas son generadas derivando a la funcional

generatriz con respecto a J_1 . Una forma de imponer estas condiciones, sugerida por Niemi y Semenoff [3], es pedir en (3.3.42) que J_2 se anule, es decir se impone la restricción

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_2} = -J_2 = 0. \quad (3.3.43)$$

En principio se puede usar esta ecuación para obtener φ_2 en función de φ_1 , o sea $\varphi_2 = \varphi_2[\varphi_1]$. En particular, en virtud de la Ec. (3.3.38) y debido a la simetría \mathcal{Z}_2 , se debería satisfacer $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ en el límite $J_a \rightarrow 0$. Esto nos lleva a definir la acción efectiva a temperatura finita como

$$\Gamma_\beta[\varphi_1] \equiv \Gamma[\varphi_1, \varphi_2[\varphi_1]], \quad (3.3.44)$$

de donde, la ecuación de movimiento efectiva es la siguiente

$$\frac{\delta \Gamma_\beta[\varphi_1]}{\delta \varphi_1} = -J_1. \quad (3.3.45)$$

Insistimos en que el campo φ_2 es considerado como un campo fantasma y la Ec. (3.3.43) nos permite eliminarlo completamente, de tal forma que la ecuación de movimiento efectiva puede ser escrita sólo en términos de φ_1 . A partir de la ecuación anterior, esperamos extraer información física acerca de las propiedades del sistema. Sin embargo, tal y como discutiremos posteriormente, en ocasiones es necesario imponer condiciones adicionales.

Nos interesa expresar la ecuación de movimiento en términos de las funciones de Green que se calculan de diagramas de Feynman. Lo haremos en la aproximación lineal, despreciando términos de orden mayor al cuadrático en la acción efectiva. Recordemos que el propagador exacto D_{ab} se obtiene al derivar dos veces la funcional W con respecto a las fuentes y evaluando en $J_1 = J_2 = 0$:

$$D_{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 W[J_1, J_2]}{\delta J_a(x) \delta J_b(y)} \right|_{J_a=0} = - \left. \frac{\delta \varphi_a(x)}{\delta J_b(y)} \right|_{J_a=0}, \quad (3.3.46)$$

mientras que la función de dos puntos $\Gamma_{ab}(x, y)$, se define como

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_1, \varphi_2]}{\delta \varphi_a(x) \delta \varphi_b(y)} \right|_{\varphi_a=0} = - \left. \frac{\delta J_a(x)}{\delta \varphi_b(y)} \right|_{\varphi_a=0}, \quad (3.3.47)$$

con lo cual se comprueba que Γ_{ab} es el inverso de D_{ab} :

$$\begin{aligned} \int dz D_{ac}(x, z) \Gamma_{cb}(z, y) &= \int dz \frac{\delta \varphi_a(x)}{\delta J_c(z)} \frac{\delta J_c(z)}{\delta \varphi_b(y)} \\ &= \delta_{ab} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

Consideremos el desarrollo funcional de la acción en serie de potencias en los campos clásicos. En el espacio de momentos se obtiene

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = \int dk \varphi_a^*(k) \Gamma_{ab}^{(2)}(k) \varphi_b(k) + \dots, \quad (3.3.49)$$

donde los puntos suspensivos indican términos de orden mayor en los campos, los cuales no necesitamos considerar. En la Ec. (3.3.48) hemos probado que Γ_{ab} es el inverso del propagador D_{ab} . Si utilizamos las Ecs. (3.1.1) y (3.2.13) obtendremos

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(k) = (k^2 - m^2) \sigma_3 - \Pi_{ab}(k). \quad (3.3.50)$$

donde σ_3 es la tercera matriz de Pauli. La Ec. (3.3.44) combinada con (3.3.49) nos permite eliminar φ_2 en términos de φ_1 y, utilizando (3.3.50), encontramos que la ecuación de movimiento efectiva (3.3.45) toma la forma

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_{22}} \left[(k^2 - m^2)^2 - (k^2 - m^2) \text{Tr}(\sigma_3 \Pi) - \det(\Pi) \right] \varphi_1 = J_1. \quad (3.3.51)$$

Como habíamos mencionado anteriormente, las cantidades físicas deben ser independientes del parámetro de contorno σ . La ecuación de movimiento efectiva cumple con dicha condición. En efecto, la autoenergía para un valor arbitrario de σ se obtiene a partir de la correspondiente matriz con $\sigma = \beta/2$ mediante una relación de similitud análoga a (3.2.10):

$$\Pi_\sigma = C \left[\Pi_{\sigma=\beta/2} \right] C^{-1}. \quad (3.3.52)$$

De aquí resulta que $\text{Tr}(\sigma_3 \Pi_\sigma) = \text{Tr}(\sigma_3 \Pi_{\sigma=\beta/2})$ y $\det(\Pi_\sigma) = \det(\Pi_{\sigma=\beta/2})$, con lo cual se demuestra que la ecuación de movimiento (3.3.51) no depende de σ . Empleando (3.2.14), la ecuación de movimiento efectiva puede ser escrita en términos de Π y de Π^*

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_{22}} (k^2 - m^2 - \Pi) (k^2 - m^2 - \Pi^*) \varphi_1 = J_1. \quad (3.3.53)$$

Alternativamente, si recurrimos a (3.2.19), puede expresarse en términos de las autoenergías retardadas y avanzadas:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_{22}} (k^2 - m^2 - \Pi_A) (k^2 - m^2 - \Pi_R) \varphi_1 = J_1. \quad (3.3.54)$$

La ecuación de movimiento (3.3.53) ó (3.3.54) incluye el efecto de las correcciones cuánticas perturbativas a través de la autoenergía. Notemos que

la ecuación de movimiento en (3.3.53) tiene el límite correcto a temperatura cero, en ese límite $\Pi_{22} = -\Pi^*$ y recobramos la ecuación $(k^2 - m^2 - \Pi) \varphi_1 = J_1$. A temperatura finita tanto Π como Π^* contribuyen a la ecuación de movimiento.

Para una perturbación externa del sistema representada por la fuente J_1 , la ecuación de movimiento nos permite despejar el campo φ_1 como función de J_1 . Es fácil corroborar que una función de Green necesaria para resolver (3.3.53) está dada por el propagador D_{11} de la Ec. (3.2.18). En efecto, D_{11} es inverso de la cantidad que multiplica a φ_1 en (3.3.53). Sin embargo, es necesario imponer una restricción dictada por las condiciones de frontera o causalidad. Si la perturbación (J_1) se “enciende” a un tiempo t , la respuesta debe anularse para tiempos anteriores. Por lo tanto, sólo debemos considerar la parte retardada del propagador D_{11} . Con lo cual podemos escribir para la solución de la ecuación de movimiento en el espacio de configuración:

$$\varphi(x) = \int dx G_R(x - x') J(x') \quad (3.3.55)$$

donde $G_R(x - x')$ es la transformada de Fourier de la contribución retardada a D_{11} (ver (3.2.20)), es decir

$$G_R(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - x')} \left[\frac{\theta(k_0) \cosh^2 \theta - \theta(-k_0) \sinh^2 \theta}{k^2 - m^2 - \Pi_R + i\epsilon k_0} \right]. \quad (3.3.56)$$

Los resultados en (3.3.55) y (3.3.56) son los esperados de acuerdo a la teoría de respuesta lineal [40, 41]. Finalmente, notamos que para determinar las cuasipartículas, o sea los modos normales que se propagan en el medio, debemos encontrar los polos del propagador en G_R ; es decir, se debe resolver la ecuación

$$k^2 - m^2 = \Pi_R(k), \quad (3.3.57)$$

y la correspondiente ecuación de movimiento está dada por

$$(k^2 - m^2 - \Pi_R(k)) \varphi = 0. \quad (3.3.58)$$

3.4 Electrodinámica

3.4.1 QED a temperatura finita

Como discutimos en la introducción, nuestro interés primordial consiste en estudiar las simetrías de las teorías de norma a temperatura finita, en

particular de la electrodinámica cuántica. Consideremos un sistema de fermiones y fotones a temperatura finita, descritos por la Lagrangiana de QED que incluye el término que fija la norma de Lorentz

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{\epsilon}{2}(\partial \cdot A)^2. \quad (3.4.59)$$

En el contorno C en el plano complejo, la funcional generatriz tiene la expresión formal

$$\mathcal{Z}[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int [DA_\mu D\psi D\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int_C (\mathcal{L}_{QED} + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\nu A^\nu) \right\}, \quad (3.4.60)$$

con las condiciones de frontera $A_\nu(-\tau_i) = A_\nu(-\tau_i - i\beta)$ para los campos de norma y $\psi(-\tau_i) = -e^{\beta\mu}\psi(-\tau_i - i\beta)$, $\bar{\psi}(-\tau_i) = -e^{-\beta\mu}\bar{\psi}(-\tau_i - i\beta)$ para los campos de Fermi. La acción sin el término que fija la norma y sin los términos de fuentes, es invariante bajo la transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi \rightarrow \exp\{-ie\Lambda\}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp\{ie\Lambda\}\bar{\psi}, \quad (3.4.61)$$

donde la derivada temporal tiene soporte a lo largo de C . La pregunta que surge y a la cual responderemos en la subsección 3.4.3 es si la formulación de la teoría en tiempo-real preserva la simetría de norma.

Siguiendo el método explicado en la subsección 2.2.1, la funcional generatriz \mathcal{Z} puede ser expresada en términos de una integral sobre los campos en tiempo real, pero con los grados de libertad en los campos duplicados:

$$\mathcal{Z}[J_a^\mu, \eta_a, \bar{\eta}_a] = \int [DA_a^\mu D\psi_a D\bar{\psi}_a] \exp\{iS_{ef}\}, \quad (3.4.62)$$

donde la acción efectiva S_{ef} es

$$S_{ef} = S_{QED} + \int (\bar{\psi}_a \eta_a + \bar{\eta}_a \psi_a + J_a^\mu A_a^\mu), \quad (3.4.63)$$

la cual incluye los términos de fuentes y la acción $S_{QED} = \int \mathcal{L}_{QED}[1; 2]$ se escribe en términos de la lagrangiana a temperatura finita

$$\mathcal{L}_{QED}[1; 2] \equiv \mathcal{L}_{QED}[\psi_1, A_1^\mu; \psi_2, A_2^\mu]. \quad (3.4.64)$$

Es conveniente separar en la lagrangiana las contribuciones que provienen de los campos fermiónicos, de los campos de norma y del término de interacción:

$$\mathcal{L}_{QED}[1; 2] = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_i, \quad (3.4.65)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}_a [S^{(0)}]_{ab}^{-1} \psi_b, \\ \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2} A_\mu^a [D_{\mu\nu}^{(0)}]_{ab}^{-1} A_b^\nu, \\ \mathcal{L}_i &= - [e\bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi^1 A_1^\mu - e\bar{\psi}^2 \gamma_\mu \psi^2 A_2^\mu]. \end{aligned} \quad (3.4.66)$$

El propagador fermiónico libre ya ha sido ampliamente examinado en las secciones anteriores. Para el campo de norma, el propagador libre está dado por la expresión

$$\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} k_\mu k_\nu \frac{\partial}{\partial k^2} \right) \mathbf{D}^{(0)}(k, 0), \quad (3.4.67)$$

donde $\mathbf{D}^{(0)}(k, 0) \equiv \mathbf{D}^{(0)}(k, m=0)$ se obtiene a partir del propagador escalar (3.1.4) poniendo la masa igual a cero. La derivación de el propagador del campo de norma (3.4.67) se muestra en el apéndice B y en la Ref. [42].

A partir de la expresiones (3.2.21) y (3.4.67), encontramos que el inverso de los propagadores libres fermiónico y de norma pueden ser expresados en la forma

$$\begin{aligned} [S^{(0)}(p)]^{-1} &= (\not{p} - m) \sigma_3 + i\epsilon [\mathbf{U}_F^{-1}(p_0)]^2, \\ [\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k)]^{-1} &= [-k^2 g_{\mu\nu} + (1-\xi) k_\mu k_\nu] \sigma_3 - i\epsilon g_{\mu\nu} [\mathbf{U}_B^{-1}(k_0)]^2. \end{aligned} \quad (3.4.68)$$

En las expresiones anteriores hemos retenido el término que contiene la cantidad infinitesimal ϵ , para definir apropiadamente los propagadores en el espacio de Minkowski. A temperatura cero, la cantidad ϵ es incluida como un factor de convergencia, de tal manera que las integrales de trayectoria estén bien definidas. A temperatura finita, este procedimiento es esencial no sólo para garantizar la convergencia, sino también para mantener la información de la temperatura. De la Ec. (3.4.68), es claro que toda la información de la temperatura reside en el término que contiene al factor ϵ . Puede observarse, también, que los campos de tipo-1 y de tipo-2 se desacoplan en el límite en que $\epsilon \rightarrow 0$ ó $T \rightarrow 0$. Notemos que la rotación de Wick puede llevarse a cabo para D_{11} , pero no para D_{22} , donde habría que hacer $p_0 \rightarrow -ip_0$ para evitar los polos. Para el sistema completo de campos físicos y fantasmas térmicos no se puede hacer la rotación de Wick.

Como una consecuencia de mantener el término proporcional a ϵ , la acción es no local en la variable temporal. Sustituyendo (3.4.68) en la Ec. (3.4.65) encontramos, en el espacio de configuración, las siguientes expresiones que contribuyen a la parte fermiónica de la acción:

$$\int \mathcal{L}_\psi = \int dx_0 dy_0 dx \bar{\psi}_a(x_0, \mathbf{x}) \left[\delta(x_0 - y_0)(i\cancel{\partial} - m)\sigma_3 + i\epsilon \mathbf{M}(x_0 - y_0) \right]^{ab} \psi_b(y_0, \mathbf{x}), \quad (3.4.69)$$

donde

$$\mathbf{M}_{ab}(x_0 - y_0) = \int \frac{dk_0}{2\pi} [\mathbf{U}_F^{-1}(p_0)]_{ab}^2 e^{-ip_0(x_0 - y_0)}. \quad (3.4.70)$$

Similarmente, la contribución de los campos de norma está dada por

$$\int \mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \int dx_0 dy_0 dx A_a^\mu(x_0, \mathbf{x}) \times [\delta(x_0 - y_0)\{g_{\mu\nu}\square + (\xi - 1)\partial_\mu\partial_\nu\}\sigma_3 + i\epsilon g_{\mu\nu} \mathbf{N}(x_0 - y_0)]^{ab} A_b^\nu(y_0, \mathbf{x}), \quad (3.4.71)$$

con

$$\mathbf{N}^{ab}(x_0 - y_0) = \int \frac{dk_0}{2\pi} [\mathbf{U}_B^{-1}(k_0)]_{ab}^2 e^{-ik_0(x_0 - y_0)}. \quad (3.4.72)$$

En el límite de temperatura cero $\mathbf{N} = \mathbf{M} = \mathbf{I}\delta(x_0 - y_0)$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad. En este límite los campos físicos y los campos fantasma se desacoplan y la localidad temporal se recupera.

Finalmente, resumimos algunos resultados referentes al propagador término del fotón. La ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador completo toma la forma

$$\mathbf{D}_{\mu\nu}^{-1}(k) = [\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k)]^{-1} + i\Pi_{\mu\nu}(k). \quad (3.4.73)$$

donde $[\mathbf{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k)]$ está dado por la Ec. (3.4.67) y el tensor de polarización tiene la estructura matricial siguiente

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \mathbf{U}_B^{-1}(k_0) \begin{pmatrix} \Pi_{\mu\nu}(k) & 0 \\ 0 & -\Pi_{\mu\nu}(k)^* \end{pmatrix} \mathbf{U}_B^{-1}(k_0). \quad (3.4.74)$$

De manera análoga al caso fermiónico, discutido en la subsección 3.2.2, se encuentra el tensor de polarización retardado y avanzado como función de

los elementos de la matriz $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\Pi_R^{\mu\nu}(k) &= \Pi_{11}^{\mu\nu} + e^{-\beta p_0/2} \Pi_{12}^{\mu\nu}, \\ \Pi_A^{\mu\nu}(k) &= \Pi_{11}^{\mu\nu} + e^{\beta p_0/2} \Pi_{21}^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.4.75)$$

Otras relaciones útiles son las siguientes

$$\begin{aligned}\Pi_{12}^{\mu\nu} &= \Pi_{21}^{\mu\nu} = -i \tanh 2\theta \operatorname{Im} \Pi_{11}^{\mu\nu}, \\ \Pi_{11}^{\mu\nu} &= (\Pi_{22}^{\mu\nu})^*.\end{aligned}\quad (3.4.76)$$

3.4.2 Simetría \mathcal{Z}_2 en QED

Como ya hemos discutido en la subsección 3.3.1, la teoría escalar a temperatura finita tiene una simetría \mathcal{Z}_2 bajo el intercambio de los campos de tipo-1 y de tipo-2. Para discutir las simetrías discretas de la lagrangiana de QED a temperatura finita, tal y como hemos hecho en la Ref. [43], es conveniente expresar los campos de norma y los campos fermiónicos como espinores de dos componentes

$$\mathbf{A}^\mu = \begin{pmatrix} A_1^\mu \\ A_2^\mu \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2), \quad (3.4.77)$$

y de igual forma para las fuentes

$$\mathbf{J}^\mu = (J_1^\mu \quad J_2^\mu), \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} = (\bar{\eta}_1 \quad \bar{\eta}_2). \quad (3.4.78)$$

La parte de la lagrangiana que sólo contiene los campos de norma en la Ec. (3.4.65) tiene una simetría \mathcal{Z}_2 similar a la del campo escalar. Esta simetría puede ser escrita en términos de \mathcal{L}_A (3.4.66) como

$$\mathcal{L}_A[\mathbf{A}_\mu] = -\mathcal{L}_A^*[\sigma_1 \mathbf{A}_\mu]. \quad (3.4.79)$$

Por otra parte, observemos que el inverso del propagador fermiónico en la Ec. (3.4.68) satisface la condición²

$$[\mathbf{S}^{(0)}]^{-1*} = -\bar{\sigma} [\mathbf{S}^{(0)}]^{-1} \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{\beta\mu/2} \\ -ie^{-\beta\mu/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.80)$$

²Notemos que, para potencial químico cero, $\bar{\sigma} \rightarrow -\sigma_2$. Recordemos que S^* es en realidad $\gamma_0 S^\dagger \gamma_0$.

A partir de este resultado es inmediato determinar que la simetría de la parte fermiónica está dada por

$$\mathcal{L}_\psi [\bar{\Psi}, \Psi] = -\mathcal{L}_\psi^* [\bar{\Psi}^* \bar{\sigma}, \bar{\sigma} \Psi^*]. \quad (3.4.81)$$

Por lo tanto se tiene

$$\mathcal{L}_{QED} [\bar{\Psi}, \Psi, \mathbf{A}^\mu] = -\mathcal{L}_{QED}^* [\bar{\Psi}^* \bar{\sigma}, \bar{\sigma} \Psi^*, \sigma_1 \mathbf{A}^\mu], \quad (3.4.82)$$

y como consecuencia de esta igualdad, la funcional generatriz posee también una simetría \mathcal{Z}_2 dada por

$$\mathcal{Z} [\bar{\eta}, \eta, \mathbf{J}^\mu] = \mathcal{Z}^* [-\bar{\eta}^* \bar{\sigma}, -\bar{\sigma} \eta^*, -\mathbf{J}^\mu \sigma_1]. \quad (3.4.83)$$

Nuevamente consideramos la funcional generatriz W , de los diagramas conexos, definida por

$$W [\bar{\eta}, \eta, \mathbf{J}^\mu] = -i \ln \mathcal{Z} [\bar{\eta}, \eta, \mathbf{J}^\mu], \quad (3.4.84)$$

así como la funcional generatriz Γ de las gráficas 1PI, definida por la transformación de Legendre

$$\Gamma [\bar{\Psi}, \Psi, \mathbf{A}^\mu] = W [\bar{\eta}, \eta, \mathbf{J}^\mu] - \int (\bar{\eta} \cdot \Psi + \bar{\Psi} \cdot \eta + \mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu). \quad (3.4.85)$$

Derivando funcionalmente la acción anterior con respecto a las fuentes y a los campos se encuentran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial J_\mu^a} &= A_\mu^a, & \frac{\partial \Gamma}{\partial A_\mu^a} &= -J_\mu^a, \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{\eta}^a} &= \psi^a, & \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi^a} &= -\bar{\eta}^a, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta^a} &= \bar{\psi}^a, & \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\psi}^a} &= -\eta^a. \end{aligned} \quad (3.4.86)$$

En las ecuaciones (3.4.85) y (3.4.86) ψ_a , $\bar{\psi}_a$ y A_μ^a se refieren a los campos clásicos. Para confundir al lector, utilizamos la misma notación para los campos clásicos y para aquellos que aparecen en la integral de camino. La simetría \mathcal{Z}_2 en la teoría se realiza en la funcional Γ con la condición

$$\Gamma [\bar{\Psi}, \Psi, \mathbf{A}^\mu] = -\Gamma^* [\bar{\Psi}^* \bar{\sigma}, \bar{\sigma} \Psi^*, \sigma_1 \mathbf{A}^\mu]. \quad (3.4.87)$$

Esta simetría puede ser utilizada para reducir el número de funciones de Green irreducibles de una partícula (1PI) independientes, tal y como explicaremos a continuación. Las funciones vértice irreducibles se obtienen derivando Γ con respecto a los campos clásicos. La función fermiónica de dos puntos es el inverso del propagador exacto. La relación explícita en el espacio de momentos es

$$(2\pi)^4 \delta(p - p') iS_{ab}^{-1}(p) = \int dx dy e^{i(p'x - py)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x) \delta \psi_b(y)} \Big|_0. \quad (3.4.88)$$

Empleando la ecuación anterior, la condición dada en (3.4.87) y la ecuación de Schwinger-Dyson (Ec. (3.2.25)), se puede demostrar que se satisfacen las siguientes relaciones entre las componentes de la matriz de autoenergía

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= -\Sigma_{22}^* \\ \Sigma_{12} &= e^{\beta\mu} \Sigma_{21}^*. \end{aligned} \quad (3.4.89)$$

Si combinamos estas relaciones con las expresiones para las autoenergías retardadas y avanzadas (3.2.29), encontramos que la condición $\Sigma_R = \Sigma_A^*$ implica la siguiente igualdad

$$\Sigma_{11} + e^{-\beta\mu_0/2} \Sigma_{12} + e^{\beta\mu_0/2} \Sigma_{21} + \Sigma_{22} = 0. \quad (3.4.90)$$

Esta ecuación corresponde exactamente a la llamada "ecuación circular", que resulta de aplicar relaciones de causalidad a las funciones de dos puntos [39]. Las relaciones (3.4.89) y (3.4.90) muestran que de las cuatro componentes (complejas) de la matriz de autoenergía, sólo una es independiente. Como habíamos mencionado anteriormente, la simetría \mathcal{Z}_2 es la explicación de poder escribir la autoenergía y el propagador (ver (3.2.24), (3.2.26)) en términos de una función independiente. Si bien el resultado anterior se puede establecer de otras maneras (por ejemplo, recurriendo a la representación espectral como ilustramos en la Secc. 3.2), el uso de la simetría \mathcal{Z}_2 provee un método sistemático que permite simplificar no sólo funciones de dos-puntos, sino también las de n -puntos.

La función vértice $\Gamma_{abc}^\mu(q, p)$ de QED (ver Fig. 3.3), está definida por

$$ie(2\pi)^4 \delta(p' - p - q) \Gamma_{abc}^\mu(q, p) = \int dx dy dz e^{i(p'z - py - qx)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \psi_c(z) \delta \bar{\psi}_b(y) \delta A_a^\mu(x)} \Big|_0, \quad (3.4.91)$$

donde el primer índice se refiere a la línea externa fotónica con momento q , el índice intermedio se refiere a la línea del fermión entrante con momento

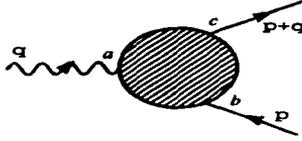


Figura 3.3: Función vértice.

p y el último índice se refiere al fermión saliente que tiene momento $p+q$. Notemos que debido a que los índices a , b y c pueden tomar valores 1 y 2, tenemos en total ocho funciones vértice; sin embargo, como veremos en seguida, sólo tres de ellas son independientes.

La simetría \mathcal{Z}_2 , dada en (3.4.87), combinada con la definición anterior implica las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\Gamma_{222}^{\nu}(q, p) &= -[\Gamma_{111}^{\nu}(q, p)]^* , \\ \Gamma_{221}^{\nu}(q, p) &= e^{\beta\mu} [\Gamma_{112}^{\nu}(q, p)]^* , \\ \Gamma_{212}^{\nu}(q, p) &= e^{-\beta\mu} [\Gamma_{121}^{\nu}(q, p)]^* , \\ \Gamma_{122}^{\nu}(q, p) &= -[\Gamma_{211}^{\nu}(q, p)]^* .\end{aligned}\quad (3.4.92)$$

Existe una relación adicional entre las distintas funciones vértice (ecuación circular); dada por

$$\begin{aligned}\Gamma_{111}^{\mu} + e^{-\beta q_0/2}\Gamma_{211}^{\mu} + e^{-\beta p_0/2}\Gamma_{121}^{\mu} + e^{\beta r_0/2}\Gamma_{221}^{\mu} \\ + e^{-\beta r_0/2}\Gamma_{112}^{\mu} + e^{\beta p_0/2}\Gamma_{212}^{\mu} + e^{\beta q_0/2}\Gamma_{122}^{\mu} + \Gamma_{222}^{\mu} = 0,\end{aligned}\quad (3.4.93)$$

donde $r_0 = p_0 + q_0$. La Ec. (3.4.93) se obtiene utilizando el método causal de Kobes [39] a las funciones vértice para QED. Junto con (3.4.92) representan cinco restricciones complejas, en consecuencia sólo tres funciones son independientes. Es conveniente definir estas funciones de forma tal que tengan propiedades de causalidad bien definidas.

Siguiendo el método de Kobes, introducimos las siguientes funciones de tres puntos

$$\Gamma_{R1}^{\mu}(q, p) = \Gamma_{111}^{\mu} + e^{-\beta p_0/2}\Gamma_{121}^{\mu} + e^{-\beta r_0/2}\Gamma_{112}^{\mu} + e^{\beta q_0/2}\Gamma_{122}^{\mu},$$

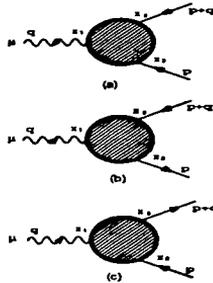


Figura 3.4: La figura (a) representa a la función retardada Γ_{R1}^{μ} , mientras que (b) y (c) representan a las funciones Γ_{R2}^{μ} y Γ_{R3}^{μ} , respectivamente.

$$\begin{aligned}\Gamma_{R2}^{\mu}(q, p) &= \Gamma_{111}^{\mu} + e^{-\beta q_0/2} \Gamma_{211}^{\mu} + e^{-\beta r_0/2} \Gamma_{112}^{\mu} + e^{\beta p_0/2} \Gamma_{212}^{\mu}, \\ \Gamma_{R3}^{\mu}(q, p) &= \Gamma_{111}^{\mu} + e^{-\beta q_0/2} \Gamma_{211}^{\mu} + e^{-\beta p_0/2} \Gamma_{121}^{\mu} + e^{\beta r_0/2} \Gamma_{221}^{\mu},\end{aligned}\quad (3.4.94)$$

donde Γ_{R1}^{μ} , Γ_{R2}^{μ} y Γ_{R3}^{μ} son las funciones vértices retardadas con respecto a la línea externa 1, 2 ó 3, respectivamente. El 1, 2 y 3 se refieren al fotón, al electrón con momento p y al electrón con momento $p + q$, respectivamente. En el caso de la función de dos puntos (autoenergía) se puede definir una sólo función retardada (ver Fig. 3.2 y discusión de la Secc. 3.2.2). Para el caso de una función de tres puntos, los diagramas en la Fig. 3.4 ayudan a entender porque se puede definir tres funciones retardadas. En efecto, consideremos que las componentes p_0 y q_0 son positivas, para las orientaciones presentadas en la Fig. (a), Γ_{R1}^{μ} representa el vértice (al pasar a la representación del espacio de configuración) tal que el tiempo t_1 es el tiempo mayor (es decir, $t_1 > t_2, t_3$). Existen otras dos configuraciones independientes mostradas en las Figs. (b) y (c) correspondientes a Γ_{R2}^{μ} y Γ_{R3}^{μ} en las cuales, t_2 y t_3 corresponden al tiempo mayor. Los diagramas conjugados (o con las flechas invertidas) representan las funciones vértice avanzadas.

3.4.3 Identidades de Ward

En esta sección estudiaremos la simetría de norma de la electrodinámica cuántica a temperatura finita y las correspondientes identidades de Ward. Recordemos primero que, a temperatura cero, la lagrangiana de QED es invariante bajo una transformación de norma. Sin embargo, para poder definir el propagador del fotón es necesario añadir un término que fija la norma. Debido a la presencia de ese término, así como a los que dependen de las fuentes, la acción efectiva en la funcional generatriz ya no es invariante de norma. Sin embargo, aún cuando la invariancia de norma de la teoría no es manifiesta, dicha invariancia preserva en los observables. Las cantidades físicas de la teoría, expresadas en términos de las funciones de Green, no dependen de la norma usada, lo cual se logra si las funcionales generatrices $Z[J]$ ó Γ son invariantes de norma. Este requisito da por resultado condiciones no triviales que conducen a las identidades de Ward de la teoría, válidas a todo orden en teoría de perturbaciones.

Como hemos establecido en la subsección 3.4.1, la lagrangiana de QED a temperatura finita sin el término que fija la norma, formulada a lo largo del contorno complejo C , es invariante de norma. Ya que la teoría ha sido reformulada en tiempo real, de tal manera que los grados de libertad en los campos se han duplicado, cabe preguntarse acerca de las propiedades de la invariancia de norma de la teoría efectiva y de sus consecuencias.

Consideremos la transformación de norma infinitesimal:

$$\begin{aligned} A_a^\mu &\rightarrow A_a^\mu + \partial^\mu \Lambda_a, \\ \psi_a &\rightarrow \psi_a - ie\Lambda_a \psi_a, \\ \bar{\psi}_a &\rightarrow \bar{\psi}_a + ie\Lambda_a \bar{\psi}_a, \end{aligned} \quad (3.4.95)$$

donde $\Lambda^a(x)$ con $a = 1, 2$ son funciones arbitrarias. De acuerdo a las relaciones anteriores, cada campo térmico se transforma de manera independiente. La acción efectiva a temperatura finita S_{eff} que aparece en la funcional generatriz en (3.4.62) no es invariante bajo una transformación de norma. Al igual que en el vacío, S_{eff} cambia debido a los términos que fijan la norma y a los que contienen las fuentes. Pero ahora aparece una contribución nueva al cambio de S_{eff} debida a los términos que dependen explícitamente de la temperatura. Lo anterior puede observarse de la Ec. (3.4.69): las componentes no diagonales de la matriz M dan lugar a términos de la forma $\bar{\psi}_a \psi_b$ con $a \neq b$ que, de acuerdo a las transformaciones (3.4.95), no permanecen invariantes. Asimismo, debido a que la acción es no local en el tiempo, ni

quiera los términos diagonales permanecen invariantes. La interrogante ahora es si estos términos arruinan la invariancia de norma de la teoría o, si al igual que en el vacío, podemos exigir que la funcional generatriz $Z[J]$ permanezca invariante.

A fin de responder la cuestión planteada, es conveniente descomponer en dos partes la variación de S_{ef} bajo una transformación de norma infinitesimal y escribir

$$\delta S_{ef} = \delta S_0 + \delta S_T, \quad (3.4.96)$$

donde δS_0 resulta de la variación del término que fija la norma y los términos de las fuentes, mientras que δS_T proviene de la variación de los términos que dependen explícitamente de la temperatura. Utilizando las Ecs. (3.4.62)-(3.4.68) conjuntamente con (3.4.96), resulta

$$\delta S_0 [\bar{\Psi}, \Psi, \mathbf{A}^\mu] = \int dx [-\xi \epsilon_a (\partial \cdot A_a) \square + J_a^\mu \partial_\mu - i c (\bar{\eta}_a \psi_a - \bar{\psi}_a \eta_a)] \Lambda_a. \quad (3.4.97)$$

con $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$. La variación δS_T , obtenida combinando (3.4.95) con (3.4.69) y (3.4.71), está dada por

$$\begin{aligned} \delta S_T [\bar{\Psi}, \Psi, \mathbf{A}^\mu] = i \epsilon \int dx dx_0 dy_0 \{ & -\Lambda^a(x_0) \partial_{(x)}^\mu [\mathcal{N}_{ab}(x_0 - y_0) A_b^\mu(y_0)] \\ & + i \epsilon [\Lambda^a(x_0) - \Lambda^b(y_0)] \bar{\psi}_a(x_0, \mathbf{x}) M^{ab}(x_0 - y_0) \psi_b(y_0, \mathbf{x}) \}. \end{aligned} \quad (3.4.98)$$

A pesar de que S_{ef} cambia bajo la transformación de norma, exigimos que la funcional generatriz sea invariante de norma. Si sustituimos la variación de S_{ef} en la expresión para la funcional generatriz Z , considerando que las funciones arbitrarias Λ_a son infinitesimales y haciendo además las sustituciones

$$\psi_a \longrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_a}, \quad \bar{\psi}_a \longrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_a}, \quad A_a^\mu \longrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_a^\mu}, \quad (3.4.99)$$

la condición de que Z sea invariante ante una transformación de norma implica:

$$\left\{ \delta S_0 \left[\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^\mu} \right] + \delta S_T \left[\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^\mu} \right] \right\} Z[\bar{\eta}, \eta, \mathbf{J}^\mu] = 0. \quad (3.4.100)$$

Usando la definición dada en la Ec. (3.4.84), podemos expresar esta relación en términos de la funcional W . Finalmente, empleando las ecuaciones (3.4.85)

y (3.4.86), obtenemos la condición dictada por la invariancia de norma para la funcional Γ :

$$\begin{aligned}
 & - \xi \epsilon_a \square \partial \cdot A^a(x) + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a(x)} - ie \left(\psi_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_a(x)} - \bar{\psi}_a(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_a(x)} \right) \\
 & + iee \int dy_0 \left[i\bar{\psi}_a(x_0) M^{ab}(x_0 - y_0) \psi_b(y_0) + M^{ab}(x_0 - y_0) \frac{\partial \psi_b(y_0)}{\partial \eta_a(y_0)} \right. \\
 & \left. - (a \leftrightarrow b, x_0 \leftrightarrow y_0) \right] - ie \int dy_0 \partial_{(x)}^\mu \left[N_{ab}(x_0 - y_0) A_\mu^b(y_0, \mathbf{x}) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{3.4.101}$$

donde hemos utilizado el hecho de que las funciones de norma Λ_a son arbitrarias y no se suma sobre el índice a , pero sobre b sí. Esta ecuación refleja el contenido general de las identidades de Ward en el formalismo de tiempo real de la teoría de campos a temperatura finita. Derivadas funcionales de la Ec. (3.4.101) evaluadas en $A_\mu^a = \bar{\psi}_a = \psi_a = 0$, generan relaciones entre las funciones de Green irreducibles de una partícula (1PI), las cuales son una consecuencia de la invariancia de norma de la teoría.

Derivemos primero (3.4.101) con respecto al campo $A_\mu^a(x)$ para obtener una relación para el inverso del propagador exacto del fotón. Recurriendo a la definición

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu \delta A_\nu} \right|_0 = \mathbf{D}_{\mu\nu}^{-1}, \tag{3.4.102}$$

obtenemos el siguiente resultado en el espacio de momentos

$$q^\mu \mathbf{D}_{\mu\nu}^{-1}(q) = -\xi \sigma_3 q_\nu q^2 - ie q_\nu \left[\mathbf{U}_B^{-1}(q_0) \right]^2. \tag{3.4.103}$$

Esta relación se satisface a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. Al orden más bajo, empleando (3.4.68) comprobamos que (3.4.103) se satisface para el caso del propagador libre. Por otro lado, de acuerdo a la ecuación de Schwinger-Dyson, el efecto de las correcciones radiativas es agregar un término de autoenergía $\mathbf{\Pi}_{\mu\nu}$ al propagador desnudo. De esta forma, a partir de (3.4.103), obtenemos

$$q^\mu \mathbf{\Pi}_{\mu\nu}(q) = 0, \tag{3.4.104}$$

lo cual demuestra que todas las componentes del tensor de polarización del fotón son transversales con respecto al momento q . Consecuentemente, cualquier tensor de polarización efectivo definido como una combinación lineal de los elementos de $\mathbf{\Pi}_{\mu\nu}$ será también transversal. De aquí que el tensor

de polarización ordenado temporalmente, el avanzado y el retardado, sean todos transversales: $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = q^\mu \Pi_{\mu\nu}^A = q^\mu \Pi_{\mu\nu}^R = 0$.

Aunque por lo común se acepta que la invariancia de norma no es afectada por la temperatura, recientemente se han hecho sugerencias en el sentido de que las identidades de Ward podrían violarse a temperatura finita [44, 45]. Nuestro análisis demuestra la falsedad de tales elucubraciones. Hemos visto que las contribuciones térmicas contenidas en el término ϵ requieren un tratamiento especial [43]. Las contribuciones del parámetro de norma y las del factor ϵ en la Ec. (3.4.103), se cancelan exactamente con las correspondientes contribuciones que provienen del inverso del propagador exacto del fotón, de tal forma que, el tensor de polarización es manifiestamente transverso a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. Con ello demostramos que las identidades de Ward se satisfacen, no sólo a nivel de un rizo sino a todos los órdenes en teoría de perturbaciones.

Como una segunda aplicación de la igualdad (3.4.101), derivemos dicha ecuación con respecto a ψ_b y $\bar{\psi}_c$. Evaluamos en $A_\mu^a = \bar{\psi}_a = \psi_a = 0$ y utilizando la definición de la función vértice (3.4.91) y la expresión para el inverso del propagador exacto (3.4.88) del fermión, obtenemos

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_{abc}^\mu(q, p) &= \delta_{ab} \left[S_{ca}^{-1}(p+q) - i\epsilon \left[U_F^{-1}(p_0+q_0) \right]_{ca}^2 \right] \\ &- \delta_{ac} \left[S_{ab}^{-1}(p) - i\epsilon \left[U_F^{-1}(p_0) \right]_{ab}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.4.105)$$

Estas son las identidades de Ward que relacionan el inverso del propagador fermiónico exacto con las funciones vértice.³

Las identidades de Ward dadas por (3.4.105) se satisfacen al orden más bajo. En efecto, sustituyendo el inverso del propagador libre (3.4.68), resulta

$$q_\mu \Gamma_{abc}^\mu(q, p) = q_\mu \gamma^\mu \epsilon_a \delta_{ab} \delta_{ca}, \quad (3.4.106)$$

la cual es trivialmente satisfecha, ya que los únicos vértices distintos de cero a nivel de árbol son $\Gamma_{111}^\mu = -\Gamma_{222}^\mu = \gamma^\mu$. De acuerdo a esto, podemos escribir

³ Es instructivo comparar la estructura de las identidades de Ward a temperatura finita con las correspondientes identidades que se obtienen en el vacío. La Ec. (3.4.105) representa ocho relaciones, una para cada elemento de Γ_{abc}^μ , las cuales incluyen contribuciones explícitas que provienen del término $i\epsilon$. A temperatura cero, la matriz $U_F(p_0)$ se reduce a la identidad, con lo cual los términos que dependen de ϵ se anulan. Adicionalmente los campos tipo-1 y tipo-2 se desacoplan, con lo cual tenemos sólo dos identidades de Ward; una para los campos físicos y la otra para los campos fantasmas térmicos.

la funciones vértice como

$$\Gamma_{abc}^{\mu}(q, p) = \gamma^{\mu} \epsilon_a \delta_{ab} \delta_{ca} + \Lambda_{abc}^{\mu}(q, p), \quad (3.4.107)$$

donde $\Lambda_{abc}^{\mu}(q, p)$ representan las correcciones radiativas al vértice. Entonces, las identidades de Ward combinadas con la ecuación de Schwinger-Dyson (3.2.25) implican las relaciones

$$q_{\mu} \Lambda_{abc}^{\mu}(q, p) = -[\delta_{ab} \Sigma_{ca}(p+q) - \delta_{ac} \Sigma_{ab}(p)]. \quad (3.4.108)$$

Explícitamente, estas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} q_{\mu} \Lambda_{111}^{\mu}(q, p) &= -[\Sigma_{11}(p+q) - \Sigma_{11}(p)], \\ q_{\mu} \Lambda_{112}^{\mu}(q, p) &= -\Sigma_{21}(p+q), \\ q_{\mu} \Lambda_{121}^{\mu}(q, p) &= \Sigma_{12}(p), \\ q_{\mu} \Lambda_{122}^{\mu}(q, p) &= 0, \\ q_{\mu} \Lambda_{211}^{\mu}(q, p) &= 0, \\ q_{\mu} \Lambda_{212}^{\mu}(q, p) &= \Sigma_{21}(p), \\ q_{\mu} \Lambda_{221}^{\mu}(q, p) &= -\Sigma_{21}(p+q), \\ q_{\mu} \Lambda_{222}^{\mu}(q, p) &= -[\Sigma_{22}(p+q) - \Sigma_{22}(p)]. \end{aligned} \quad (3.4.109)$$

A partir de la relaciones anteriores, podemos deducir algunos resultados importantes. En primer lugar, notemos que la función vértice, para la cual los índices térmicos que se refieren a los fermiones son iguales pero distintos al índice térmico que etiqueta al fotón, esto es Γ_{122}^{μ} y Γ_{211}^{μ} , son vértices transversos al momento q . Observemos también que las funciones $\Lambda_{111}^{\mu}(0, p)$ y $\Lambda_{222}^{\mu}(0, p)$ pueden ser determinadas en términos de las componentes diagonales de la autoenergía del fermión:

$$\begin{aligned} \Lambda_{111}^{\mu}(0, p) &= -\frac{\partial \Sigma_{11}(p)}{\partial p_{\mu}}, \\ \Lambda_{222}^{\mu}(0, p) &= -\frac{\partial \Sigma_{22}(p)}{\partial p_{\mu}}. \end{aligned} \quad (3.4.110)$$

Otros resultados se siguen de comparar la segunda (tercera) igualdad con la sexta (séptima) igualdad en (3.4.109). De esa manera obtenemos las siguientes relaciones para las partes longitudinales (respecto a q_{μ})

$$\begin{aligned} q_{\mu} \Lambda_{112}^{\mu}(q, p) &= -q_{\mu} \Lambda_{212}^{\mu}(q, p+q), \\ q_{\mu} \Lambda_{221}^{\mu}(q, p) &= -q_{\mu} \Lambda_{121}^{\mu}(q, p+q). \end{aligned} \quad (3.4.111)$$

Es de notar que el momento del fermión en el vértice del lado derecho cambia de p a $p+q$. Las cuatro funciones vértice en (3.4.111) son imaginarias puras ya que Σ_{12} y Σ_{21} en (3.4.109) también lo son.

Un resultado interesante se obtiene al comprobar que las cuatro funciones vértice en (3.4.111) son singulares en el límite $q_\mu \rightarrow 0$. En efecto, en dicho límite las identidades de Ward en (3.4.109) exigen o bien que dichos vértices sean singulares en $q^\mu = 0$ ó que los elementos no diagonales de Σ se anulen en dicho límite. Como sabemos que, en general, ningún elemento de la autoenergía se cancela, tenemos que concluir que las funciones vértice ($\Lambda_{abc}^\mu(q, p)$; $b \neq c$), son singulares en $q^\mu = 0$. La estructura de dicha singularidad será analizada con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Las identidades de Ward que hemos encontrado son útiles no solamente para probar la invariancia de norma de la teoría, sino también para reducir el número de funciones vértice independientes. Primero combinamos las relaciones (3.4.92) y (3.4.93), debidas a la simetría \mathcal{Z}_2 , con (3.4.111) para obtener la siguiente relación (válida para las componentes longitudinales)

$$q_\nu [\text{Im } \Lambda_{11}^\nu(q, p)] = ic^{-\beta\mu/2} q_\nu [\text{csc}(2\varphi_{p+q}) \Lambda_{121}^\nu(q, p+q) - \text{csc}(2\varphi_p) \Lambda_{121}^\nu(q, p)]. \quad (3.4.112)$$

Utilizando este resultado podemos demostrar que las funciones vértice retardadas definidas en la Ec. (3.4.94), pueden ser escritas en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Re} \Lambda_{R_1}^\nu(q, p) &= \text{Re} \Lambda_{R_2}^\nu(q, p) = \text{Re} \Lambda_{R_3}^\nu(q, p) = \text{Re} \Lambda_{11}^\nu(q, p) \\ \text{Im} \Lambda_{R_1}^\nu(q, p) &= \frac{1}{i} e^{-\beta\mu/2} [\text{csc}(2\varphi_{p+q}) \Lambda_{121}^\nu(q, p+q) + \text{csc}(2\varphi_p) \Lambda_{121}^\nu(q, p)] \\ \text{Im} \Lambda_{R_2}^\nu(q, p) &= \frac{1}{i} e^{-\beta\mu/2} [\text{csc}(2\varphi_{p+q}) \Lambda_{121}^\nu(q, p+q) - \text{csc}(2\varphi_p) \Lambda_{121}^\nu(q, p)] \\ &= -\text{Im} \Lambda_{R_3}^\nu(q, p). \end{aligned} \quad (3.4.113)$$

Estas igualdades son de gran utilidad, ya que demuestran que (para la parte longitudinal) de ocho funciones complejas Λ_{abc}^μ que representan el vértice de QED, sólo una es independiente. La combinación de las relaciones que se siguen de la simetría \mathcal{Z}_2 con las obtenidas de las identidades de Ward, permite expresar las componentes de Λ_{abc}^μ y por lo tanto los vértices retardados, en términos de una sola función compleja. De acuerdo a (3.4.113) podemos elegir a las funciones $\text{Re} \Lambda_{11}^\mu(q, p)$ y $\Lambda_{121}^\mu(q, p)$, para determinar completamente los tres vértices retardados. Es de señalarse que aunque $\Lambda_{121}^\mu(q, p)$ es singular en el límite $q^\mu \rightarrow 0$, dicha singularidad se cancela para los vértices

$\Lambda_{R_2}^\mu$ y $\Lambda_{R_3}^\mu$. En consecuencia, sólo $\Lambda_{R_1}^\mu(q, p)$ presenta una singularidad en dicho límite.

De acuerdo con la Ec. (3.2.29), vemos que la parte real e imaginaria de Σ_R se obtienen a partir de $\text{Re}\Sigma_{11}$ y Σ_{12} , respectivamente. Aquí hemos encontrado un resultado análogo para el vértice. Según (3.4.113) la parte real e imaginaria de los vértices retardados son determinados por $\text{Re}\Lambda_{11}^\mu$ y Λ_{12}^μ , respectivamente.

Finalmente, combinando (3.4.94) con (3.2.29) y con (3.4.108), podemos escribir las identidades de Ward para las autoenergías y vértices retardados y avanzados:

$$\begin{aligned} q_\mu \Lambda_{R_1}^\mu(q, p) &= [\Sigma_A(p+q) - \Sigma_R(p)], \\ q_\mu \Lambda_{R_2}^\mu(q, p) &= q_\mu \Lambda_{R_3}^\mu(q, p) = [\Sigma_A(p+q) - \Sigma_A(p)]. \end{aligned} \quad (3.4.114)$$

De la última ecuación notamos que la función vértice retardada con el tiempo más grande correspondiente al fermión entrante $\Lambda_{R_2}^\mu$, se relaciona solamente con la autoenergía avanzada. Por el contrario, si la línea asociada al fotón entrante tiene el tiempo más grande, entonces la identidad de Ward relaciona al vértice con una combinación de las autoenergías retardadas y avanzadas. Cabe destacar que estas ecuaciones son consistentes con el hecho que sólo $\Lambda_{R_1}^\mu(p, q)$ es singular en $q_\mu = 0$.

Para finalizar este capítulo, resulta conveniente hacer un resumen de los resultados más importantes del mismo. En primer lugar, utilizando la simetría \mathcal{Z}_2 obtuvimos una ecuación de movimiento efectiva para el campo escalar (3.3.54). Con la misma simetría, pero aplicada a la QED, encontramos que sólo tres de ocho vértices que existen en la teoría son independientes (3.4.94). En segundo lugar, derivamos las identidades de Ward para la QED a temperatura finita (3.4.109). Mostramos que estas identidades predicen que algunos de los vértices de QED son singulares cuando el momento de la línea fotónica tiende a cero. Asimismo, hicimos ver que las identidades de Ward son útiles para reducir el número de funciones vértice longitudinales a una sola (Ec. (3.4.113)).

CAPÍTULO 4

EL PLASMA RELATIVISTA. CÁLCULOS PERTURBATIVOS

En el estudio de la renormalización de la Electrodinámica Cuántica en el vacío (QED) [46], se consideran tres diagramas: a) la polarización del vacío, b) la autoenergía del electrón y c) el vértice. Los tres procesos son divergentes, lo cual da lugar a tres constantes de renormalización que pueden ser reabsorbidas en una redefinición de la masa del electrón, de la constante de acoplamiento y de los campos. En este análisis, la invariancia de norma y las correspondientes identidades de Ward, resultan de suma importancia. Por un lado, garantizan que el polo del propagador del fotón permanece en $q^2 = 0$, es decir, la masa del fotón sigue siendo cero. Por otro lado, dan lugar al conocido resultado $Z_1 = Z_2$; donde Z_1 y Z_2 son las constantes de renormalización asociadas al vértice y a la autoenergía del electrón. Las identidades de Ward son un ingrediente esencial para probar la renormalizabilidad de la teoría a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. En efecto, en QED aparecen divergencias traslapadas, las cuales son la principal dificultad para probar que la teoría es renormalizable. Esta clase de divergencias sólo aparece en algunos términos de la autoenergía tales como el que se muestra en la Fig.4.2b. En su forma diferencial $\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma = -\Lambda_\mu$, las identidades de Ward esencialmente lo que hacen es insertar a estas gráficas divergentes una línea de fotón de momento cero en cada línea fermiónica in-

terna. De esta forma, desaparecen las divergencias traslapadas que aparecen en la autoenergía y se demuestra que la teoría es renormalizable a todos los órdenes en teoría de perturbaciones.

Los procesos radiativos descritos, nos dan además información acerca de fenómenos intrínsecamente cuánticos, tales como el corrimiento Lamb y el momento magnético anómalo del electrón. Para un medio a temperatura y/o densidad finita, el análisis de los tres procesos mencionados también provee información fundamental acerca del sistema. Ejemplos conocidos, abordados con teorías no-relativistas [31, 41] como la teoría cinética o la teoría cuántica de muchos cuerpos, incluyen el plasma no-relativista y el modelo del gas de electrones. En ambos casos se tiene un sistema de electrones interactuando entre sí y con un fondo estático de cargas positivas. En este capítulo trataremos principalmente un sistema relativista, que requiere de la teoría cuántica de campos para su descripción: el plasma relativista. Este plasma es un sistema ideal formado por electrones, positrones y fotones en equilibrio térmico a alta temperatura. El estudio de la autoenergía fermiónica y del tensor de polarización nos permiten determinar los modos normales de propagación en el medio, mientras que el vértice nos da información acerca de las interacciones de los fermiones dentro del plasma.

En el formalismo de tiempo real, las funciones de Green se pueden descomponer en una contribución del vacío y en otra dependiente de la temperatura. La primera contribución contiene las divergencias usuales que conducen a la renormalización. Las contribuciones térmicas son finitas. En efecto, las distribuciones de Fermi o de Bose (según el caso) actúan como reguladores en la región ultravioleta. Sin embargo, el comportamiento de las funciones de Green en la región infrarroja puede ser empeorado por la temperatura [47].

En QED en el vacío, el vértice a un rizo no tiene singularidades cuando se toma el límite de momento cero para la línea fotónica externa. De igual forma, la autoenergía del fotón tampoco tiene singularidades en ese mismo límite. Sin embargo como demostraremos, a temperatura finita, en dicho límite ambos diagramas no tienen un comportamiento bien definido.

En este capítulo, para empezar, demostraremos explícitamente que las identidades de Ward se satisfacen hasta orden de dos rizos. Primero, en la Secc. 4.1 verificaremos que dichas identidades son válidas a un rizo. Después, en la Secc. 4.2, en base al resultado anterior, verificaremos que dichas identidades se satisfacen también a nivel de dos rizos. Posteriormente, deduciremos y analizaremos las relaciones de dispersión para los fermiones y los fotones en el plasma. En la Secc. 4.3. deduciremos las relaciones de

dispersión para fermiones quirales en el régimen de alta temperatura. A diferencia del vacío, veremos que existen cuatro soluciones no degeneradas para las relaciones de energía-momento. Dos de ellas son debidas a los modos de partícula revestida por el medio, mientras que las dos restantes son debidas a modos de propagación que no existen en el vacío, las cuales son excitaciones colectivas del medio. En la siguiente sección analizaremos las relaciones de dispersión para los fotones que se propagan en el medio. Como se sabe, en el vacío el modo único de propagación es el modo transversal. Sin embargo, en un medio, además del modo transversal existe también el modo longitudinal, el cual asimismo es una excitación colectiva del medio. Finalmente estudiaremos el vértice. En la Secc. 4.5, analizaremos la estructura de Lorentz para la parte real del vértice. Veremos que la descomposición del vértice en factores de forma es más compleja que en el caso del vacío. No obstante, demostraremos que puede ser simplificada de manera considerable. Para finalizar, en la Secc. 4.6 mostraremos en forma detallada que a nivel de un rizo, el vértice $A_{121}^{\mu}(q, p)$ tiene un polo en $q = 0$, tal y como las identidades de Ward lo predicen.

4.1 Identidades de Ward. Demostración a un rizo

En el capítulo anterior dedujimos las identidades de Ward para la QED a temperatura finita. Una de nuestras motivaciones fue las sugerencias recientes de que dichas identidades se violan a temperatura finita (Fujimoto *et.al.* [44] y Kaneko [45]). Esto pone en duda la invariancia de norma de la teoría. Las afirmaciones de dichos artículos se basan en resultados de cálculos a nivel de uno y dos rizos. El trabajo de la Ref. [45] se basa en el formalismo de tiempo imaginario y, como se supone que los resultados de este formalismo coinciden con los de tiempo real una vez realizada la continuación analítica, creemos que dicha continuación no se hizo de manera correcta. En el trabajo de Fujimoto, basado en el formalismo de "Thermo Field Dynamics", la conclusión es que las identidades de Ward en su forma diferencial, no se satisfacen para la respectiva componente temporal. En dicho dicho trabajo no se tomó en cuenta el término proporcional a la cantidad ϵ (ver Secc. 3.4), lo cual llevó a una conclusión errónea.

En esta sección demostraremos explícitamente que las identidades de Ward se satisfacen a nivel de un rizo. Como primer paso, consideremos el

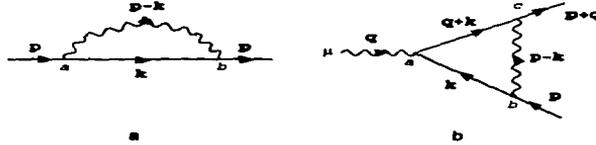


Figura 4.1: Diagramas de la autoenergía y del vértice a nivel de un rizo.

propagador libre del fermión (3.2.21)

$$\mathbf{S}^{(0)}(p) = \mathbf{U}_F(p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \not{p} - m + i\epsilon & 0 \\ 0 & -\not{p} - m - i\epsilon \end{pmatrix} \mathbf{U}_F(p). \quad (4.1.1)$$

Este propagador cumple la siguiente relación

$$\mathbf{S}^{(0)}(p) (\not{p} - m) = \sigma_3 + \mathcal{O} \left\{ \epsilon^2, \frac{\epsilon(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} \right\} \approx \sigma_3, \quad (4.1.2)$$

donde vemos que se puede tomar sin ningún problema el límite $\epsilon \rightarrow 0$ obteniendo resultados bien definidos.

En el capítulo anterior mostramos que las identidades de Ward en la Ec. (3.4.106) se satisfacen a nivel de árbol. Para demostrar la validez (ver Ref. [48]) de la Ec. (3.4.109) a nivel de un rizo, consideremos la autoenergía Σ_{ab} cuya expresión (ver Fig. 4.1a) es la siguiente:

$$-i\Sigma_{ab}(p) = \epsilon_a \epsilon_b e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S_{ab}(k) \gamma_\beta D_{ab}^{\alpha\beta}(p-k). \quad (4.1.3)$$

De manera similar, la corrección radiativa al vértice propio Λ_μ a nivel de un rizo (Ver Fig. 4.1b) está dado por la expresión

$$\Lambda_{abc}^\mu(q, p) = i\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S_{ba}(k) \gamma^\mu S_{ac}(q+k) \gamma_\beta D_{bc}^{\alpha\beta}(p-k). \quad (4.1.4)$$

Contrayendo la última igualdad con el momento q_μ , obtenemos

$$q_\mu \Lambda_{abc}^\mu(q, p) = i\epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S_{ba}(k) \{ (\not{q} + \not{k} - m) - (\not{k} - m) \} \\ \times S_{ac}(q+k) \gamma_\beta D_{bc}^{\alpha\beta}(p-k), \quad (4.1.5)$$

donde hemos sumado y restado el término $\not{p} - m$. De acuerdo a la Ec. (4.1.2), los términos $(\not{q} + \not{p} - m)$ y $(\not{p} - m)$ de la ecuación anterior, son identificados con $\epsilon_a S_{ab}^{-1}(q+k)$ y $\epsilon_a S_{ab}^{-1}(k)$, respectivamente. Por lo tanto, el resultado anterior se reduce a

$$\begin{aligned} -ieq_\mu \Lambda_{abc}^\mu(q,p) &= \epsilon_b \epsilon_c \delta_{ac} e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S_{ba}(k) \gamma_\beta D_{ba}^{\alpha\beta}(q+p-k) \\ &\quad - \epsilon_b \epsilon_c \delta_{ab} e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S_{ac}(k) \gamma_\beta D_{ac}^{\alpha\beta}(p-k). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Es inmediata la identificación del lado derecho en la última igualdad, ésta es la diferencia de autoenergías evaluadas en los momentos $q+p$ y p . Las ecuaciones en (4.1.6) son las identidades de Ward a nivel de un rizo, las cuales coinciden con las relaciones generales (3.4.109) que obtuvimos en el capítulo anterior.

También podemos corroborar las correspondientes identidades de Ward para la autoenergía del fotón. En el capítulo anterior encontramos las relaciones para el tensor de autoenergía del fotón

$$q_\mu \Pi_{ab}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.1.7)$$

válidas a cualquier orden en teoría de perturbaciones. Para la demostración a nivel de un rizo, consideremos la expresión explícita del tensor

$$-i\Pi_{ab}^{\mu\nu}(q) = \frac{\epsilon_a \epsilon_b}{(2\pi)^4} e^2 \int d^4 p \operatorname{Tr} \{ \gamma^\mu S_{ab}(p) \gamma^\nu S_{ab}(q-p) \}. \quad (4.1.8)$$

Contrayendo el tensor de autoenergía en la Ec. (4.1.8) con el momento q_μ y utilizando otra vez el truco de sumar y restar las cantidades adecuadas; en este caso $\not{q} = (\not{q} - \not{p} - m) - (\not{p} - m)$, obtenemos como resultado

$$q_\mu \Pi_{ab}^{\mu\nu} = ie^3 \delta_{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \{ S_{ab}(q-p) \gamma^\nu - S_{ab}(p) \gamma^\nu \}, \quad (4.1.9)$$

cuando $a \neq b$ la Ec. (4.1.7) se satisface directamente; cuando $a = b$ la validez de dicha ecuación se comprueba haciendo $q-p \rightarrow p$ en el primer término de la integral. Una demostración similar para probar la transversalidad de $\Pi_{\mu\nu}$ al orden de un rizo, fue presentada recientemente por Das y Hott [57]. Notemos que, a este nivel, el tensor de autoenergía del fotón es simétrico bajo el intercambio de los índices de Lorentz. En efecto, la traza en la Ec. (4.1.8) es proporcional a la cantidad $\operatorname{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}-m) \gamma^\nu (\not{q}-\not{p}-m) \}$, la cual permanece invariante ante el intercambio de los índices μ y ν , de donde concluimos que también se satisface $q_\mu \Pi_{ab}^{\mu\nu} = 0$.

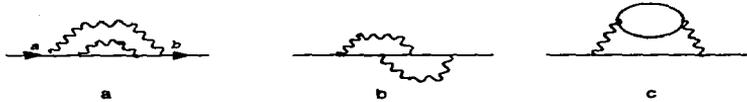


Figura 4.2: Los diferentes diagramas que contribuyen a la autoenergía del electrón a nivel de dos rizados

4.2 Demostración a dos rizados

Consideremos todos los posibles diagramas irreducibles de una partícula que contribuyen al vértice a segundo orden $\Lambda_\mu^{(2)}$ (Ver Fig. 4.3). Es de esperar que estos diagramas de vértice se relacionen con los correspondientes diagramas para la autoenergía a segundo orden $\Sigma_{ab}^{(2)}$ (mostrados en la Fig. 4.2) a través de las identidades de Ward. Por ejemplo, los diagramas para el vértice (a-c) se obtienen de la autoenergía (a) haciendo inserciones de líneas externas fotónicas en cada una de las líneas fermiónicas internas.

Para facilitar la demostración y la notación es conveniente considerar la siguiente definición:

$$\hat{S} \equiv S^{(0)} \Sigma^{(1)} S^{(0)}, \quad (4.2.10)$$

donde $\Sigma^{(1)}$ es la autoenergía del fermión a nivel de un rizo. De esta definición se sigue que

$$\begin{aligned} (\not{p} - m) \hat{S}(p) &= \Sigma^{(1)}(p) S^{(0)}(p) \\ \hat{S}(p) (\not{p} - m) &= S^{(0)}(p) \Sigma^{(1)}(p). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

La demostración de que las identidades de Ward se satisfacen a orden de dos rizados es directa y sólo ilustraremos el caso de los tres primeros vértices en la Fig. 4.3; los otros casos se demuestran de forma análoga. Consideremos los vértices (a, b y c) de dicha figura. La expresión para estos en términos de \hat{S} es¹

$$\Lambda_{abc}^{(2)\mu}(q, p) \equiv \Lambda_{(a)}^\mu + \Lambda_{(b)}^\mu + \Lambda_{(c)}^\mu$$

¹ Los índices térmicos abc no deben confundirse con las etiquetas (a), (b) y (c) que se refieren a las gráficas de la Fig. 4.3

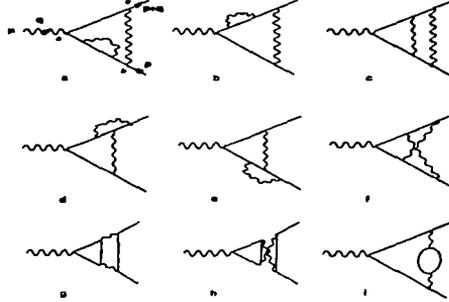


Figura 4.3: Diagramas del vértice a nivel de dos rizos.

$$\begin{aligned}
 &= (-ie)^2 \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \left\{ \hat{S}_{ba}(p-k) \gamma^\mu \hat{S}_{ac}^{(0)}(p-k+q) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{S}_{ba}^{(0)}(p-k) \gamma^\mu \hat{S}_{ac}(p-k+q) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{S}_{bd}^{(0)}(p-k) \Lambda_{adc}^{(1)\mu}(q, p-k) \hat{S}_{ac}^{(0)}(p-k+q) \right\} \\
 &\quad \times \gamma_\beta D_{bc}^{\alpha\beta}(k). \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

mientras que la autoenergía del diagrama 4.2a está dada por la expresión siguiente

$$\Sigma_{ab}^{(a)}(p) = ie^2 \epsilon_a \epsilon_b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \hat{S}_{ab}(p-k) \gamma_\nu D_{ab}^{\mu\nu}(k), \quad (4.2.13)$$

Contrayendo q^μ con Λ^μ en la Ec. (4.2.12), en los dos primeros términos de la ecuación anterior, utilizamos la siguiente igualdad: $\not{q} = (\not{p} - \not{k} + \not{q} - m) - (\not{p} - \not{k} - m)$, conjuntamente con la Ec. (4.2.11). Mientras que para el último término de la Ec. (4.2.13), usamos las identidades de Ward a nivel de un rizo. Con estas consideraciones, es inmediata la demostración de que las identidades de Ward se satisfacen. De igual forma, se puede probar que los vértices correspondientes d, e y f (g, h e i) mostrados en la Fig. 4.3 están

relacionados con la autoenergía $b(c)$ de la Fig. 4.2. Con ello se completa la demostración de la validez de las identidades de Ward a nivel de dos rizados.

4.3 Relaciones de dispersión del electrón

En esta sección discutiremos las relaciones de dispersión para un fermión que se propaga en un plasma de fotones, electrones y positrones en el régimen de temperatura alta ($T \gg m, p$, donde p es el momento del electrón). Debemos hacer notar que un sistema no relativista requiere de un potencial químico, de tal manera que se tenga una densidad de partículas no-nula. En contraste, un sistema ultrarrelativista ($T \gg m$) no se encuentra vacío, aún cuando el potencial químico se anule. En el plasma a alta temperatura, las antipartículas se encontrarán presentes con una densidad igual a la de las partículas. Uno de los resultados notables del plasma relativista es que, aún en el límite quiral, el sistema tiene el doble de grados de libertad fermiónicos comparado con el caso del vacío. Además de electrones y positrones² que se propagan en el medio, también se tienen hoyos y antihoyos fermiónicos propagándose. Para la discusión, seguiremos de cerca los trabajos de Weldon [49], Klimov [50] y Pisarski [51].

A temperatura cero, la autoenergía para un electrón es de la forma

$$\Sigma(p) = a\not{p} + c, \quad (4.3.14)$$

donde los coeficientes a y c son función de p^2 . En particular, en el límite quiral ($m = 0$) c se anula, esto implica que la simetría quiral del fermión no se ve alterada por las correcciones radiativas; el polo del propagador permanece en $p^2 = 0$, pero con distinto residuo.

En un plasma, las partículas del medio constituyen un marco de referencia especial; el sistema de referencia donde el plasma está en reposo. En general, la teoría se puede escribir en forma covariante asociando una cuadrivelocidad u_μ , con $u^2 = 1$, al medio. En el sistema en reposo del plasma se tiene $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$. Esto indica que la forma más general de la autoenergía (a nivel de un rizo)³ es

$$\Sigma(p) = a\not{p} + b\not{u} + c, \quad (4.3.15)$$

²Estas partículas por supuesto que están "revestidas" por el efecto del medio.

³A niveles más altos en teoría de perturbaciones, un término proporcional a $\not{p}\not{u}$ también contribuye. Además, estamos suponiendo que la teoría posee la simetría CP.

donde α , b y c son funciones de los escalares de Lorentz

$$\begin{aligned} E &= p \cdot u, \\ |\mathbf{p}| &= \sqrt{E^2 - p^2} \equiv P, \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

los cuales, en el sistema en reposo del medio, coinciden con la energía y la magnitud del tri-momento. Nuevamente tendremos que en el límite quiral el coeficiente c se anula. Como estamos interesados en el límite de alta temperatura ($T \gg m$) supondremos, a menos que se indique lo contrario, que $m = c = 0$.

En el capítulo anterior encontramos que los propagadores, al igual que la autoenergía, adquieren una estructura matricial. También encontramos que los modos normales que se propagan en el medio, se obtienen a partir de la ecuación de movimiento efectiva que involucra a la autoenergía retardada (3.3.57). Por lo tanto, para el fermión, la ecuación de movimiento efectiva en el límite quiral es

$$(\not{p} - \Sigma_R)U = 0. \quad (4.3.17)$$

Para que los modos normales puedan existir, se requiere que las razones de decaimiento ("damping rates") provenientes de la parte imaginaria de la autoenergía, sean pequeñas comparadas con las correspondientes partes reales. La parte imaginaria puede ser despreciada, ya que en el límite de temperaturas grandes los términos imaginarios dominantes son del orden de T , mientras que para la parte real son del orden de T^2 .

De acuerdo a la Ec. (3.2.30) la parte real de Σ_R se obtiene de la componente Σ_{11} , por lo tanto la ecuación de movimiento que determina los modos normales fermiónicos del plasma es

$$(\not{p} - \Sigma_{11})U = 0. \quad (4.3.18)$$

Las relaciones de dispersión para el electrón en un plasma están determinadas por la condición de que la ecuación anterior tenga soluciones no triviales; dadas por la ecuación: $\det |\not{p} - \Sigma_{11}(p)| = 0$ esto nos conduce, en el caso quiral, a la ecuación

$$(1 - a)^2 p^2 + b^2 - 2b(1 - a)p \cdot u = 0. \quad (4.3.19)$$

Es importante resaltar que esta condición coincide con la parte real del polo del propagador 11 dado en la ecuación (3.2.24). La expresión para la

autoenergía a nivel de un rizo está dada en la ecuación (4.1.3). De esta ecuación y de los propagadores fermiónico y bosónico de tipo 11 dados en las ecuaciones (2.4.106) y (B.1.17) respectivamente, la expresión para la autoenergía 11 en la norma de Lorentz ($\xi = 1$),⁴ para el caso de fermiones quirales y potencial químico nulo, es la siguiente:

$$\Sigma_{11}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu \left[\frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi i \delta((p-k)^2)}{e^{\beta|p_0 - k_0|} + 1} \right] \times \left[-\frac{1}{k^2 + i\epsilon} - \frac{2\pi i \delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \right]. \quad (4.3.20)$$

Se puede observar que la autoenergía contiene dos términos; uno que es debido a las fluctuaciones del vacío y el otro que depende de la temperatura. Puesto que estamos interesados en la parte real de las correcciones que dependen de la temperatura, la parte de la autoenergía que contribuye a las relaciones de dispersión del fermión que se propaga en el plasma, puede expresarse en la forma

$$\Sigma^T(p) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3} \int d^4k \left\{ \frac{\not{k} \delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} + 1} + \frac{(\not{p} - \not{k}) \delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \right\} \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k}, \quad (4.3.21)$$

donde, el superíndice T en la autoenergía indica que es la parte real dependiente de la temperatura. Para obtener el resultado anterior realizamos el cambio de variable $p - k \rightarrow k$, en el primer término.

Es conveniente analizar con cierto detalle las integrales que intervienen en la Ec. (4.3.21). Consideremos los siguientes vectores covariantes, unitarios y ortogonales

$$P_\mu = -\frac{1}{p^2} (p_\mu - \mathbf{E} u_\mu), \\ V_\mu = \frac{1}{p^2} (\mathbf{E} p_\mu - p^2 u_\mu), \quad (4.3.22)$$

en términos de estos vectores, la autoenergía se puede expresar en la siguiente forma

$$\Sigma^T = AP + BY, \quad (4.3.23)$$

⁴Al final de esta sección comentaremos con respecto a la invariancia de norma.

lo cual resulta conveniente porque los coeficientes se despejan como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \text{Tr}\{\mathcal{P} \Sigma^T\}, \\ B &= \frac{1}{4} \text{Tr}\{\mathcal{Y} \Sigma^T\}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

De acuerdo a (4.3.21), existe una contribución fermiónica y una bosónica a los coeficientes A y B : es decir $A = -\frac{2\kappa^2}{(2\pi)^3}(A_F + A_B)$, $B = -\frac{2\kappa^2}{(2\pi)^3}(B_F + B_B)$. Con los elementos anteriores, podemos calcular las contribuciones fermiónicas:

$$\begin{aligned} A_F &= -\frac{1}{2} \int d^4k \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} + 1} + \frac{p^2}{2} \int d^4k \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} + 1} \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \\ &= \pi \int_0^\infty \frac{d\kappa}{e^{\beta\kappa} + 1} \left(-\kappa + \frac{p^2}{4P} \left[\ln \left| \frac{\kappa - E_+}{\kappa - E_-} \right| - \ln \left| \frac{\kappa + E_+}{\kappa + E_-} \right| \right] \right), \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} B_F &= \int d^4k \frac{k_0 \delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} + 1} \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \\ &= \frac{\pi}{2P} \int_0^\infty \frac{\kappa d\kappa}{e^{\beta\kappa} + 1} \left(-2 \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right| + \ln \left| \frac{\kappa - E_+}{\kappa - E_-} \right| + \ln \left| \frac{\kappa + E_+}{\kappa + E_-} \right| \right), \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

con $E_\pm = \frac{1}{2}(E \pm P)$. Para obtener el resultado anterior realizamos la integración sobre la componente temporal k_0 , aprovechando la delta que aparece en el integrando. Posteriormente realizamos la integración angular, quedando el resultado como una integral sobre el momento κ .

Como habíamos mencionado, estamos interesados en el régimen de alta temperatura ($T \gg E, P$). Es posible obtener una expansión sistemática para el desarrollo a altas temperaturas [52]. Sin embargo, los términos dominantes en el desarrollo pueden ser fácilmente obtenidos siguiendo las ideas introducidas por Braaten y Pisarski [26]. El método consiste en identificar los términos que, en ausencia de distribución térmica, tendrían divergencias ultravioletas. La divergencia de mayor orden da el término dominante, con la temperatura actuando como parámetro de corte. Por ejemplo, si la integral, omitiendo la distribución térmica, diverge cuadráticamente, tendremos entonces que la contribución dominante será de orden T^2 . Podemos utilizar ahora estas ideas para evaluar los términos dominantes. De la Ec. (4.3.25)

para A_F , vemos que el primer término (salvo la distribución térmica) tiene el comportamiento asintótico κ , mientras que el segundo término va como κ^{-1} . Por lo tanto, el primer término contribuye al orden T^2 , mientras que el segundo da contribuciones de orden $\ln T$ que podemos despreciar. En resumen, el orden dominante para A_F es:

$$A_F \approx -\pi \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa}{e^{\beta\kappa} + 1} = -\frac{\pi^3 T^2}{6}, \quad (4.3.27)$$

y de manera similar, para B_F , tendremos

$$B_F \approx -\frac{\pi^3 T^2}{12P} \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right|. \quad (4.3.28)$$

Bajo el criterio que explicamos anteriormente, la contribución bosónica a la autoenergía proviene de la integral

$$\int d^4k \frac{\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1} \frac{\not{k}}{p^2 - 2p \cdot k} = A_B \not{P} + B_B \not{Y}, \quad (4.3.29)$$

donde los coeficientes A_B y B_B en el límite de alta temperatura son los siguientes:

$$\begin{aligned} A_B &= -\frac{\pi^3 T^2}{3}, \\ B_B &= -\frac{\pi^3 T^2}{6P} \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right|. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

De las ecuaciones anteriores, vemos que la autoenergía en el límite de alta temperatura se puede aproximar como

$$\begin{aligned} \Sigma^T &= \frac{e^2 T^2}{8} \left[\not{P} + \frac{1}{2P} \not{Y} \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right| \right] \\ &= \frac{e^2 T^2}{8P^2} \left[-\left(1 - \frac{E}{2P} \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right| \right) \not{p} + \left(E - \frac{P^2}{2P} \ln \left| \frac{E_+}{E_-} \right| \right) \not{\epsilon} \right], \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

comparando con la Ec. (4.3.18), obtenemos los coeficientes a y b :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{M^2}{P^2} \left(1 - \frac{E}{2P} \ln \left| \frac{E+P}{E-P} \right| \right), \\ b &= -\frac{M^2}{P} \left(-\frac{E}{P} + \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{P^2} - 1 \right) \ln \left| \frac{E+P}{E-P} \right| \right), \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

donde hemos definido

$$M^2 \equiv \frac{e^2 T^2}{8}. \quad (4.3.33)$$

Notemos que a es una función par de E , mientras que b es impar. Con las propiedades anteriores de a y b y de la relación de dispersión en la Ec. (4.3.19), podemos observar que si E es una solución de la Ec. (4.3.19), entonces también $-E$ es solución; lo cual es una consecuencia de la invariancia ante CPT. Por otro lado, esta ecuación puede factorizarse en la forma

$$[(1-a)(E-P)-b][(1-a)(E+P)-b] \equiv f(E, P) f(-E, P) = 0. \quad (4.3.34)$$

Por consiguiente, la ecuación anterior tiene cuatro soluciones, ya que ambos factores que intervienen en dicha ecuación tienen soluciones tanto para $E(P)$ como para $-E(P)$. Sustituyendo las expresiones para a y b obtenemos que, para $E > 0$, los modos normales están determinados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} f(E, P) &= E_p - P - \frac{M^2}{P} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_p}{P} \right) \ln \left| \frac{E_p + P}{E_p - P} \right| \right) = 0, \\ f(-E, P) &= E_h + P + \frac{M^2}{P} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_h}{P} \right) \ln \left| \frac{E_h + P}{E_h - P} \right| \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Donde los subíndices p y h se refieren a partícula y hoyo, respectivamente. En $P = 0$ las soluciones a estas ecuaciones son $E_p = E_h = M$. Podemos entonces definir a M como la masa térmica del fermión que se propaga en el plasma. Para momentos grandes ($P \gg M$), las soluciones coinciden nuevamente $E_p \approx E_h \approx P$. Sin embargo, en general, las dos soluciones son diferentes (ver Fig. 4.4). Podemos encontrar soluciones a las ecuaciones anteriores en las regiones asintóticas:

$$\begin{aligned} E_p &\approx M + \frac{P}{3} & (P \ll M), \\ E_h &\approx M - \frac{P}{3} & (P \ll M), \\ E_p &\approx P + \frac{M^2}{P} & (P \gg M), \\ E_h &\approx P & (P \gg M). \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

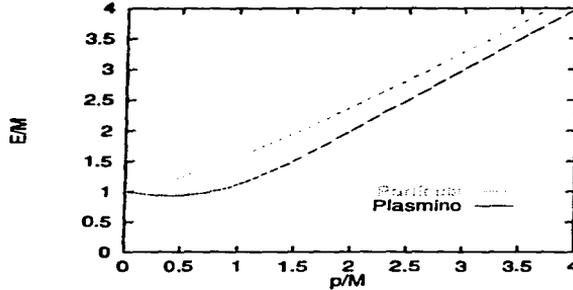


Figura 4.4: Relaciones de dispersión para un electrón que se propaga en un plasma compuesto de electrones y fotones.

Regresando a la ecuación de movimiento (4.3.18) y utilizando la forma de la autoenergía (4.3.15) en el caso quiral, la ecuación de movimiento puede ser escrita como (sistema de reposo del medio)

$$[nE\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}]U = 0, \quad (4.3.37)$$

donde hemos definido

$$n = 1 - \frac{b/E}{1 - a}. \quad (4.3.38)$$

En el vacío, la invariancia de Lorentz implica que $n = 1$ y la ecuación da lugar al resultado bien conocido de que la quiralidad y la helicidad coinciden para partículas de masa nula. Sin embargo, en un medio, los resultados anteriores permiten comprobar que existen dos soluciones (no-degeneradas) de energía positiva. Para la solución de partícula, $n > 0$, la solución se obtiene de $E_p = P/n$ que no es otra cosa que la primera ecuación en (4.3.35). Para la solución de hoyo $n < 0$ y por lo tanto, la correspondiente solución de energía positiva se obtiene de $E_h = -P/n$ (segunda ecuación en (4.3.35)).

Multiplicando la Ec. (4.3.37) por $\gamma_5 \gamma_0$ y utilizando el hecho que $\gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Sigma}$ es el operador de helicidad, observamos que, para el modo de partícula, la

quiralidad y la helicidad coinciden, mientras que para el modo de hoyo son opuestas. El primer modo corresponde a una propagación modificada del "electrón" quiral en el plasma. El segundo modo representa una excitación colectiva (a veces llamada hoyo o plasmino) debida al medio, la cual no existe a temperatura cero. Para el caso de un plasma de quarks y gluones, algunas consecuencias físicas de esta excitación han sido discutidas por Weldon [49] y por Pisarski [51]. En particular, Weldon ha discutido la posibilidad de que existan estados mesónicos quark-hoyo.

Un último comentario se refiere a la posible modificación de estos resultados en una norma arbitraria. Para ello deberíamos considerar al propagador del fotón escrito en forma covariante, con lo cual la autoenergía depende del parámetro de norma ξ . Sin embargo, aplicando los métodos discutidos anteriormente a dichos términos, se encuentra que no contribuyen a orden T^2 (las contribuciones son orden de T). Consecuentemente, la autoenergía resulta independiente de la norma, al menos en el límite de alta temperatura.

4.4 Relaciones de dispersión para el fotón

En el capítulo anterior demostramos en forma general que el tensor de autoenergía del fotón es transverso (respecto al momento del fotón). En particular, en la Secc.4.1 comprobamos explícitamente que lo anterior se satisface a nivel de un rizo. Debido a esta propiedad y de considerar que el medio introduce de manera natural el vector u_μ , una manera conveniente de expresar $\Pi_{\mu\nu}$ es la siguiente:

$$\Pi_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \Pi_T + B_{\mu\nu} \Pi_L, \quad (4.4.39)$$

donde los proyectores sobre las partes longitudinal y transversal están dados por [52]

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu + \frac{1}{\kappa^2} [k_\mu - \omega u_\mu] [k_\nu - \omega u_\nu], \\ B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{k^2 \kappa^2} [k^2 u_\mu - \omega k_\mu] [k^2 u_\nu - \omega k_\nu], \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

con $\omega = k \cdot u$ y $\kappa = \sqrt{(k \cdot u)^2 - k^2}$. Ya que $k^\mu A_{\mu\nu} = k^\mu B_{\mu\nu} = 0$, la condición de transversalidad $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente. Los coeficientes transversal y longitudinal se pueden obtener como

$$\Pi_L = -\frac{k^2}{\kappa^2} u_\mu u_\nu \Pi^{\mu\nu},$$

$$\Pi_T = -\frac{1}{2}\Pi_L + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}. \quad (4.4.41)$$

A orden de un rizo, el tensor de polarización está dado en la Ec. (4.1.8). El cálculo de la parte real dependiente de la temperatura de las funciones dadas en la Ec. (4.4.41), fue realizado por Weldon [52]. En el régimen de alta temperatura ($T \gg \kappa, \omega$) dichas funciones están dadas por

$$\begin{aligned} \text{Re}\Pi_L &= \frac{e^2 T^2}{3} \left[1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right] \left[1 - \frac{\omega}{2\kappa} \ln \left| \frac{\omega + \kappa}{\omega - \kappa} \right| \right], \\ \text{Re}\Pi_T &= \frac{e^2 T^2}{6} \left[\frac{\omega^2}{\kappa^2} + \left[1 - \frac{\omega^2}{\kappa^2} \right] \frac{\omega}{2\kappa} \ln \left| \frac{\omega + \kappa}{\omega - \kappa} \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

Tal y como habíamos mencionado, el tensor de polarización del fotón no tiene un límite bien definido en la región infrarroja, en el sentido que los límites $\omega \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0$ no conmutan. En efecto, la parte longitudinal y la transversal tienen el siguiente comportamiento:

$$\begin{aligned} \text{Re}\Pi_L(\kappa, 0) &= \frac{e^2 T^2}{3}, \\ \text{Re}\Pi_T(\kappa, 0) &= 0, \\ \text{Re}\Pi_L(0, \omega) &= \frac{e^2 T^2}{9}, \\ \text{Re}\Pi_T(0, \omega) &= \frac{e^2 T^2}{9}. \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Los modos normales se obtienen a partir de los polos del propagador o de la ecuación de movimiento efectiva para el fotón que se propaga en el plasma, la cual está dada por

$$[k^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi)k_\mu k_\nu - \Pi_{\mu\nu}] A^\nu = 0. \quad (4.4.44)$$

Utilizando la Ec. (4.4.39), obtenemos las siguientes ecuaciones que se siguen de la condición de que (4.4.44) tenga soluciones no triviales:

$$(k^2 - \Pi_T)(k^2 - \Pi_L) = 0. \quad (4.4.45)$$

Con lo cual obtenemos dos soluciones independientes; una para el modo longitudinal y otra para el transversal. El comportamiento se muestra en la Fig. 4.5. A partir de (4.4.42), las soluciones aproximadas para la parte real

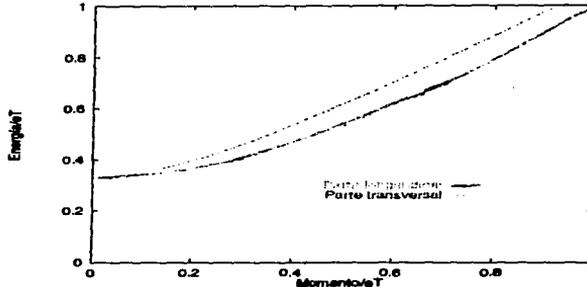


Figura 4.5: Relaciones de dispersión para un fotón que se propaga en un plasma relativista.

de $\omega_{L,T}$ resultan:

$$\begin{aligned}
 \omega_L^2 &\approx \frac{e^2 T^2}{9} + \frac{3}{5} \kappa^2 & (\omega \sim \frac{eT}{3}), \\
 \omega_L^2 &\approx \kappa^2 & (\omega \gg \frac{eT}{3}), \\
 \omega_T^2 &\approx \frac{e^2 T^2}{9} + \frac{6}{5} \kappa^2 & (\omega \sim \frac{eT}{3}), \\
 \omega_T^2 &\approx \kappa^2 + \frac{e^2 T^2}{6} & (\omega \gg \frac{eT}{3}).
 \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

En $\kappa = 0$, determinamos la masa del "fotón" como $M_\gamma = eT/3$. El modo transversal puede interpretarse como el mismo modo transversal del vacío, pero ahora revestido por los efectos del medio. Sin embargo, el modo longitudinal (plasmón) es un resultado del comportamiento colectivo del medio. Notemos que no hay propagación para ω_L y $\omega_T < eT/3$ ya que para esta frecuencia el número de onda es puramente imaginario.

En el límite "estático" ($\omega = 0$), el propagador (longitudinal o transversal) se comporta aproximadamente como

$$\frac{1}{k^2 + \Pi_{L,T}(\omega = 0, \kappa)} \tag{4.4.47}$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Debido al resultado (4.4.43), tendremos una interacción efectiva apantallada por el modo longitudinal

$$V \sim \frac{1}{r} e^{-r/\lambda_D}, \quad (4.4.48)$$

donde la distancia de Debye está dada por $\lambda_D = \sqrt{3}/eT$. Notemos, sin embargo, que los modos transversales no son apantallados.

4.5 El vértice, estructura de Lorentz

Como mencionamos al inicio de este capítulo, para las correcciones radiativas en el vacío se requiere conocer la autoenergía del electrón, el tensor de polarización y el vértice. En el caso del plasma relativista ya hemos analizado la dos primeras funciones y sus consecuencias en la propagación de las respectivas partículas en el plasma. Ahora consideraremos el vértice y deduciremos algunas consecuencias generales referentes a la estructura de Lorentz del mismo.

Recordemos que, en el vacío, la corriente electromagnética

$$J_\mu = \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$$

describe una partícula con momento magnético cuya razón giromagnética es $g = 2$. Esto se demuestra a partir de las relaciones $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ y $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -2i\sigma_{\mu\nu}$ y de la ecuación de Dirac libre. Esto da como resultado la conocida descomposición de Gordon:

$$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [P_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(p), \quad (4.5.49)$$

donde $P = p' + p$ y $q = p' - p$. Cuando se toman en cuenta las correcciones radiativas provenientes del vértice, la corriente J_μ es corregida por el término $\bar{u}(p') \Lambda_\mu(p, p') u(p)$, donde Λ_μ resulta de la parte renormalizada del vértice propio. A nivel de un rizo, después de recurrir a la descomposición de Gordon, considerando que los fermiones están en su capa de masa y que $q \sim 0$, la corriente que incluye la corrección radiativa está dada por:

$$\begin{aligned} J_\mu &= \bar{u}(p') (\gamma_\mu + \Lambda_\mu) u(p), \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') [P_\mu + i(1 + \frac{\alpha}{2\pi}) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(p). \end{aligned} \quad (4.5.50)$$

de donde se extrae la corrección $\frac{\alpha}{\pi}$ a la razón giromagnética.

En un medio, tal como el plasma relativista, además de los vectores γ_μ , p_μ y p'_μ , tenemos que considerar también el vector u_μ . Por ello, la descomposición más general de la parte real del vértice

$$\Gamma_\mu \equiv \text{Re}\Gamma_\mu^{111}, \quad (4.5.51)$$

dictada por la estructura de Lorentz, contiene 32 factores de forma. No obstante la gran cantidad de factores de forma, que dificultan la extracción de información física, veremos que la corriente J_μ puede ser expresada en términos de sólo 5 factores independientes. Para aclarar el punto anterior, observemos primero que el vértice queda completamente determinado en el caso en que $q_\mu = 0$. Consideremos las identidades de Ward en su forma diferencial (ver Ec. (3.4.110))

$$\Lambda_{111}^\mu(0, p) = -\frac{\partial \Sigma_{11}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (4.5.52)$$

Recordando que la expresión más general para la autoenergía exacta⁵ es

$$\Sigma(p) = a\cancel{p} + b\cancel{p} + c, \quad (4.5.53)$$

donde los coeficientes a , b y c son funciones de los escalares $E = p \cdot u$ y $P = \sqrt{(p \cdot u)^2 - p^2}$. En virtud de la Ec. (4.5.52), para $q_\mu = 0$, el vértice está dado por

$$\Lambda_{111}^\mu(0, p) = F_1 \gamma_\mu + (F_2 + F_3 \cancel{p} + F_4 \cancel{p}) p_\mu + (F_5 + F_6 \cancel{p} + F_7 \cancel{p}) u_\mu, \quad (4.5.54)$$

con lo cual, vemos que puede ser escrito en términos de siete factores de forma. Estos factores están completamente determinados por las ecuaciones (4.5.52) y (4.5.53); por ejemplo:

$$\begin{aligned} F_1 &= -a, \\ F_2 &= -\frac{1}{P} \frac{\partial c}{\partial P}, \\ F_3 &= -\left(\frac{\partial c}{\partial E} - \frac{E}{P} \frac{\partial c}{\partial P} \right). \end{aligned} \quad (4.5.55)$$

Para $q_\mu \neq 0$, adicionalmente, tenemos que tomar en cuenta combinaciones lineales que provienen de los posibles vectores covariantes que se

⁵La estructura más general para la autoenergía es: $\Sigma(p) = a\cancel{p} + b\cancel{p} + c + d\cancel{p}\cancel{p}$. Sin embargo, se puede demostrar que en cuanto a la corriente J_μ , los resultados obtenidos son equivalentes.

pueden formar con q_μ .⁶ A pesar de la compleja estructura del vértice, el análisis se simplifica si consideramos la corriente electromagnética J_μ en el plasma, formada con dicho vértice:

$$J_\mu = \bar{U}(p')\Gamma_\mu(p, p')U(p), \quad (4.5.56)$$

donde $p' = p + q$ y los espinores U y \bar{U}' son soluciones de las ecuaciones de movimiento en el medio:⁷

$$\begin{aligned} \not{p} - m - \Sigma(p) U(p) &= 0, \\ \bar{U}'(p')[\not{p}' - m - \Sigma(p')] &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.57)$$

donde la prima en el espinor indica que está evaluado en p' . Como mencionamos, nos interesa la parte real del vértice, por lo tanto podemos suponer que los coeficientes a , b y c son reales. Adicionalmente supondremos que, al estar los fermiones en capa de masa, podemos considerar $p^2 = p'^2$.

A partir de las identidades de Ward (3.4.109) y la ecuaciones de movimiento anteriores, podemos demostrar que J_μ en (4.5.56) es una corriente conservada. En efecto, contrayendo la corriente J_μ con q_μ y usando (4.5.57) obtenemos

$$\begin{aligned} q^\mu \bar{U}'\Gamma_\mu U &= \bar{U}'[\not{q} - \Sigma(p') - \Sigma(p)]U, \\ &= \bar{U}'[(\not{p}' - \Sigma(p') - m) - (\not{p} - \Sigma(p) - m)]U = 0. \end{aligned} \quad (4.5.58)$$

Recurriendo a la ecuación de movimiento (4.5.57), podemos expresar \not{p} y \not{p}' en términos de \not{q} :

$$\begin{aligned} \not{p} U &= \frac{1}{1-a} [b\not{q} + c]U, \\ \bar{U}'\not{p}' &= \frac{1}{1-a'} \bar{U}'[b'\not{q} + c']. \end{aligned} \quad (4.5.59)$$

Otro resultado, que nos será de utilidad para simplificar el vértice, es la descomposición de Gordon a temperatura finita, la cual se deduce de manera similar al caso del vacío; y está dada por

$$\bar{U}'\gamma_\mu U = \frac{1}{2}U'[\frac{1}{c}Q_\mu + \frac{1}{c'}Q'_\mu + i(\frac{1}{c}Q^\nu - \frac{1}{c'}Q'^\nu)\sigma_{\mu\nu}]U, \quad (4.5.60)$$

⁶ Exhaustivamente, estos son los que se pueden formar con las cantidades: p_μ , p'_μ , u_μ , γ_μ , \not{p} , \not{p}' , \not{q} , $\not{p}\not{p}'$, $\not{p}\not{q}$, $\not{p}'\not{q}$ y $\not{p}\not{p}'\not{q}$. Por ejemplo, uno de los factores que interviene en el vértice es proporcional al vector $\not{p}\not{p}'\not{q}\gamma_\mu$.

⁷ En la Ref. [58] se da una demostración del hecho de que los espinores que se deben utilizar, en particular para las razones de decaimiento, son los de la solución de la ecuación de movimiento en el medio.

donde hemos definido $Q_\mu \equiv (1-a)p_\mu - bu_\mu$. A temperatura cero, $a = b = a' = b' = 0$ y $c = c' = m$ y se recupera el resultado (4.5.49). Los resultados anteriores permiten reagrupar los 32 factores de forma que aparecen en Γ_μ de tal manera que, para J_μ , el número de factores de forma se reduce a nueve. Una forma conveniente de escribir el resultado es la siguiente

$$J_\mu = \bar{U}'[\Gamma_1 P_\mu + \Gamma_2 q_\mu + \Gamma_3 u_\mu + (\Gamma_4 P^\nu + \Gamma_5 q^\nu + \Gamma_6 u^\nu)\sigma_{\mu\nu} + \psi(\Gamma_7 P_\mu + \Gamma_8 q_\mu + \Gamma_9 u_\mu)]U, \quad (4.5.61)$$

donde recordamos que $P = p' + p$ y $q = p' - p$. Debido a la conservación de la corriente, aún los nueve factores de forma no son todos independientes. Empleando la expresión explícita para J_μ en (4.5.61) y contrayendo con q_μ , los términos proporcionales a las matrices identidad, $\sigma_{\mu\nu}$ y ψ se deben anular por separado en virtud de la Ec. (4.5.58), dando como resultado tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 q^2 + \Gamma_3 u \cdot q &= 0, \\ \Gamma_4 [\mathcal{H}, \not{q}] + \Gamma_6 [\psi, \not{q}] &= 0, \\ \Gamma_8 q^2 + \Gamma_9 u \cdot q &= 0, \end{aligned} \quad (4.5.62)$$

donde se tomo en cuenta que $P \cdot q = 0$. Notemos que la segunda condición en (4.5.62) sólo se puede satisfacer en general si Γ_4 y Γ_6 se anulan idénticamente, por lo cual concluimos que existen sólo cinco factores de forma independientes. Combinando (4.5.61) con (4.5.62) obtenemos finalmente

$$J_\mu = \bar{U}'[(\Gamma_1 + \psi\Gamma_7)P_\mu + \Gamma_5 q^\nu \sigma_{\mu\nu} + (\Gamma_3 + \psi\Gamma_9)v_\mu]U, \quad (4.5.63)$$

donde hemos definido: $v_\mu \equiv u_\mu - \frac{u^2}{q^2}q_\mu$. Es ilustrativo considerar el límite de temperatura cero. En este caso, los factores asociados a términos donde aparece u_μ se deben cancelar: es decir Γ_3, Γ_7 y $\Gamma_9 \rightarrow 0$. Con lo cual sólo sobreviven Γ_1 y Γ_5 , correspondientes a la carga eléctrica y al momento magnético anómalo del electrón.

Para la interpretación del resultado general es conveniente considerar el sistema de reposo del medio, en cuyo caso $\psi = \gamma_0$. Como ya se mencionó Γ_1 y Γ_5 corresponden a los factores de forma de las razones de carga y del momento magnético anómalo. El tercer factor $\psi\Gamma_7 = \gamma_0\Gamma_7$ modificará, en general, la carga. En la representación usual de las matrices de Dirac asociamos γ_0 a la transformación de paridad, por lo tanto es de esperar que en un sistema en el que se conserva la paridad, el factor Γ_7 (y de manera similar Γ_9) se anulen. En este caso sólo quedarán tres factores de forma.

En una situación en la que el medio viole paridad, Γ_7 y Γ_9 serán diferentes de cero. Un ejemplo de un medio que viola paridad sería el de un plasma magnetizado. Finalmente, notamos que Γ_3 permite el acoplamiento de un campo externo a una corriente proporcional a $u_\mu - \frac{u_\nu q}{q^2} q_\mu$. El cálculo explícito de los factores de forma para el plasma relativista, es un trabajo que tenemos en progreso.

4.6 Polo del vértice

En el vacío, el vértice de la QED a nivel de un rizo no presenta singularidades cuando se toma el límite de momento cero en la línea fotónica externa. La autoenergía del fotón también es libre de singularidades en ese mismo límite, de hecho se anula, manteniendo con ello la masa del fotón igual a cero, no sólo a nivel de un rizo sino a todos los órdenes en teoría de perturbaciones.⁸

A temperatura finita las cosas son distintas. Ya hemos demostrado en la sección anterior que la parte real del tensor de polarización no tiene un límite bien definido en el infrarrojo:⁹

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(0, \mathbf{k}) \neq \lim_{k_0 \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(k_0, 0). \quad (4.6.64)$$

Para la parte imaginaria de la autoenergía [52], ambos límites coinciden. Al respecto existen diferentes opiniones. Por un lado [52] se cree que el comportamiento de la autoenergía es correcto desde el punto de vista físico; la cantidad $\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(0, \mathbf{k})$ describe el apantallamiento de los campos estáticos en el límite de longitudes de onda grandes, mientras que la cantidad $\lim_{k_0 \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(k_0, 0)$ es la frecuencia de oscilación del plasma en el límite cuasi-estático. Otro punto de vista [54, 55, 56] es que el límite de momento cero debe estar bien definido y que la desigualdad en (4.6.64) es más bien un problema de tipo matemático que de tipo conceptual. En particular, Nieves y Pal [55] afirman que el "mal comportamiento" de la autoenergía en el límite de momento cero puede evitarse utilizando los propagadores que incluyen correcciones radiativas en vez de usar los propagadores desnudos.

En el capítulo anterior hemos observado en forma general que las identidades de Ward predicen que el vértice exacto $A_{121}(p, q)$ tiene una singularidad

⁸ Una demostración de esta afirmación en $2 + 1D$ se encuentra en la Ref.[53].

⁹ Este problema no es exclusivo de la QED térmica. Se encuentra también en cálculos perturbativos de diferentes teorías a temperatura finita.

en $q_\mu = 0$. Recordemos que Λ_{121} sólo contribuye a la parte imaginaria del vértice retardado. En esta sección demostraremos explícitamente, a nivel de un rizo, que Λ_{121} tiene en efecto un singularidad. Para analizar tal comportamiento consideremos el diagrama para dicho vértice, el cual se muestra en la Fig. 4.1b para $a = c = 1$ y $b = 2$. De la Ec. (4.1.4) y de la expresión explícita de los propagadores en las ecuaciones (2.4.106) y (B.1.17), encontramos la expresión para el vértice:

$$\Lambda_\nu^{121}(p, q) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2} e^{\beta p_0/2 - \beta\mu} \int d^4k \lambda_\nu F(p, q, k), \quad (4.6.65)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_\mu &= 4m [2(p_\mu - k_\mu) + q_\mu] - 4(p_\mu - k_\mu + q_\mu)(\not{p} - \not{k}) + 2\gamma_\mu \not{p}(\not{p} - \not{k}), \\ F &= \frac{\epsilon(k_0)\epsilon(p_0 - k_0)\delta(k^2)\delta((p - k)^2 - m^2)}{(p - k + q)^2 - m^2} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \frac{1}{e^{\beta(p_0 - k_0 - \mu)} + 1}, \end{aligned} \quad (4.6.66)$$

con $\epsilon(x)$ la función signo. Para facilitar la discusión consideremos el caso de un fermión sin masa y potencial químico cero. Para $q_\mu \sim 0$, la parte singular del vértice tiene el comportamiento

$$\Lambda_\mu^{121} \sim \frac{2e^2 e^{\beta p_0/2}}{(2\pi)^2} \int d^4k \frac{k_\mu \not{k}}{k \cdot q} G(p, k), \quad (4.6.67)$$

con

$$G(p, k) = \epsilon(k_0)\epsilon(p_0 - k_0)\delta(k^2)\delta(p^2 - 2p \cdot k) \frac{1}{e^{\beta(p_0 - k_0)} - 1} \frac{1}{e^{\beta k_0} + 1}. \quad (4.6.68)$$

Cuando contraemos (4.6.67) con q_μ el resultado es la autoenergía del electrón $\Sigma_{21}(p)$, lo cual da una prueba directa que la correspondiente identidad de Ward se satisface.

Por otro lado, el vértice tiene los siguientes comportamientos para q_μ muy pequeña

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{121}(0, \mathbf{q}) &\sim -\frac{2e^2 e^{\beta p_0/2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{q}|} \int d^4k \frac{k_\mu \not{k}}{|\mathbf{k}| \cos \alpha} G(p, k), \\ \Lambda_\mu^{121}(q_0, \mathbf{0}) &\sim \frac{2e^2 e^{\beta p_0/2}}{(2\pi)^2} \frac{1}{q_0} \int d^4k \frac{k_\mu \not{k}}{k_0} G(p, k), \end{aligned} \quad (4.6.69)$$

donde α es el ángulo formado por los vectores \mathbf{p} y \mathbf{k} . De las expresiones anteriores, se ve claramente el comportamiento singular de Λ_{μ}^{121} en $q_{\mu} = 0$.

Para finalizar el capítulo, haremos un resumen de los puntos más importantes del mismo. En primer lugar, hemos demostrado que las identidades de Ward se satisfacen hasta orden de dos rizados. En segundo lugar, estudiamos las relaciones de dispersión para fermiones y fotones que se propagan en un plasma relativista a alta temperatura, en una norma fija y despreciando la parte imaginaria. Observamos que, en ambos casos, las relaciones de dispersión predicen la existencia de modos colectivos del medio. Después, analizamos la parte real del vértice. Hemos concluido que la compleja estructura inicial del mismo, puede ser reducida en forma considerable gracias a las identidades de Ward y a las ecuaciones de movimiento. Finalmente, verificamos, explícitamente, que la parte imaginaria del vértice (Λ_{121}) tiene un polo en $q_{\mu} = 0$, tal y como lo predicen las identidades de Ward.

CAPÍTULO 5

RELACIONES DE DISPERSIÓN PARA UN NEUTRINO

5.1 Introducción

Las relaciones de dispersión para un neutrino que se propaga a través de un medio, difieren en general de aquellos en el vacío. Esto es debido a las interacciones coherentes con las partículas en el medio. Este hecho puede ser tomado en cuenta a través de un índice de refracción o por un potencial efectivo $V_{e,l}$, para cada neutrino de un sabor dado ($\nu_l, l = e, \mu, \tau$). El conocimiento del potencial efectivo es un requisito esencial en el estudio de los efectos de la materia sobre las oscilaciones de neutrinos, y de las implicaciones físicas del mecanismo MSW [19, 20] para las transformaciones entre los neutrinos de diferentes sabores. Dentro del formalismo de tiempo real de la TCTF, el potencial efectivo es calculado a partir de las contribuciones del medio a la autoenergía de los neutrinos que se propagan en el medio. Hasta cantidades de orden M_W^{-2} , las correcciones son proporcionales a la asimetría partícula-antipartícula en el medio y se anulan si el medio es simétrico ante CP. En tales circunstancias, las correcciones térmicas del orden de M_W^{-4} que resultan de considerar los términos que dependen del momento en el propagador del bosón, tienen que ser consideradas y pueden ser dominantes.

En éste capítulo calcularemos las correcciones a las relaciones de dispersión dependientes de la temperatura, para un neutrino que se propaga en un medio compuesto de electrones, protones, neutrinos y sus respectivas

antipartículas. La parte real de las relaciones de dispersión fueron determinadas por D'Oliveo, Nieves y Torres [59] (ver también las referencias [60, 61]), mediante el formalismo de tiempo real de la TCTF. Nosotros calcularemos la parte real de las relaciones de dispersión por un método alternativo [62], el cual hace más evidente la física del problema. Este método consiste en promediar térmicamente la amplitud de dispersión hacia adelante (ángulo cero) de un neutrino que se propaga en el medio. Los neutrinos que estamos considerando son de masa cero, no obstante, el método puede ser aplicado para situaciones en que se tengan neutrinos masivos. Demostraremos, a nivel de un rizo, que el resultado obtenido con la TCTF es equivalente al obtenido promediando térmicamente la amplitud invariante. Es interesante resaltar que este resultado es similar al teorema óptico que se encuentra en la teoría de la dispersión. Este teorema relaciona la sección diferencial total a la parte imaginaria de la amplitud de dispersión a ángulo cero. En nuestro caso, lo que encontramos es que la parte real de la autoenergía del neutrino se relaciona con el promedio térmico de la amplitud de dispersión a ángulo cero. Para finalizar este capítulo extenderemos el método mencionado anteriormente para calcular la parte imaginaria de las relaciones de dispersión. El conocimiento de la parte imaginaria de las relaciones de dispersión es importante para determinar el tiempo medio en que el neutrino es absorbido por el medio (tiempo de termalización). En este caso, el cálculo lo realizaremos a nivel de dos rizados ya que a primer orden es nulo.

5.2 Parte real

Consideremos un “neutrino de prueba” que se propaga en un medio que se encuentra en equilibrio termodinámico. La amplitud de transición T_{fi} para la dispersión del neutrino debida a su interacción con un fermión f del medio, está dada por

$$T_{fi} = -i \frac{(2\pi)^4}{V^2} \delta^{(4)}(p_f - p_i + k_f - k_i) \mathcal{M}, \quad (5.2.1)$$

donde V es el volumen de normalización, \mathcal{M} es la amplitud invariante para el proceso $\nu f \rightarrow \nu f$; k_i (k_f) y p_i (p_f) son los momentos iniciales (finales) del neutrino y el fermión respectivamente. Cuando la dispersión es hacia adelante, tanto el neutrino como las partículas en el medio conservan sin cambio sus respectivos momentos. Este hecho implica que si la transición ocurre en un intervalo de tiempo t , entonces podemos emplear la igualdad

$\delta^{(4)}(0) = Vt/(2\pi)^4$, con lo cual

$$T_{fi} = -i \frac{t}{V} \mathcal{M}. \quad (5.2.2)$$

Para la amplitud de transición debida a la dispersión a ángulo cero provocada por una partícula en el medio.

Ahora construiremos el promedio térmico de la amplitud de transición, sumando coherentemente las contribuciones individuales, pesadas con la correspondiente distribución de Fermi:

$$\bar{T}_{fi} = -i \frac{t}{V} \int d^4p \delta(p^2 - m_f^2) \overline{\mathcal{M}} \eta_f(p \cdot u), \quad (5.2.3)$$

donde m_f es la masa del fermión y

$$\eta_f(p \cdot u) = \left[\frac{\theta(p \cdot u)}{e^x + 1} + \frac{\theta(-p \cdot u)}{e^{-x} + 1} \right]. \quad (5.2.4)$$

En la ecuación anterior, θ es la función escalón y $x = \beta(p \cdot u - \mu)$, tal y como habian sido definidas anteriormente. Puesto que estamos suponiendo que el medio no está polarizado, la amplitud invariante tiene que ser remplazada por su promedio sobre los espines de las partículas en el medio: $\overline{\mathcal{M}}$. Por otro lado, hemos introducido el vector de quadri-velocidad u_μ del medio para poder expresar en forma conveniente las fórmulas que se deriven. En el sistema de reposo del medio $u_\mu = (1, \mathbf{0})$ y $k_\mu = (\omega, \boldsymbol{\kappa})$.

Como habiamos mencionado en la introducción, el efecto del medio sobre la propagación de los neutrinos puede ser representado en términos de un potencial efectivo V_{ef} . Podemos definir esta cantidad pidiendo que, al orden más bajo en teoría de perturbaciones, la amplitud de transición del neutrino dispersado en dicho potencial externo, iguale la amplitud de transición calculada por la fórmula dada en la Ec. (5.2.3). En la aproximación de Born, la amplitud de transición hacia adelante está dado por

$$\begin{aligned} \bar{T}_{fi} &= -i \int d^4x \psi_f^\dagger(x) V_{ef}(\mathbf{x}) \psi_i(x) \\ &= -i \frac{(2\pi)^4}{V} u_L^\dagger(k_f) u_L(k_i) \delta(\omega_f - \omega_i) V_{ef}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

con $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_i$. En esta ecuación $\psi(x) = u_L(k) \exp(-ik \cdot x) / \sqrt{V}$, son las soluciones de helicidad izquierda de la ecuación de Dirac para un neutrino sin masa normalizadas en una caja de volumen V , y $V_{ef}(\mathbf{k})$ es la transformada de Fourier de $V_{ef}(\mathbf{x})$.

Igualando (5.2.3) y (5.2.5) y teniendo en cuenta la condición de normalización $u^\dagger u = 2\kappa$, resulta

$$V_{eJ} = \frac{1}{\kappa} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m_J^2) \overline{\mathcal{M}} \eta_J(p \cdot u), \quad (5.2.6)$$

donde \mathcal{M} es la amplitud invariante para dispersión de partículas en el vacío. La fórmula anterior muestra que el potencial efectivo se puede obtener al promediar térmicamente la amplitud de dispersión usual (la del vacío) para ángulo cero.

Consideremos ahora la definición del potencial efectivo de acuerdo al formalismo de la TCTF. Una definición alternativa para el potencial efectivo puede ser dada sustrayendo la energía cinética (en el vacío) de la parte real de la relación de dispersión del neutrino en el medio. Esto es

$$V_{eJ} = \omega(\kappa) - \kappa, \quad (5.2.7)$$

donde $\omega = k \cdot u$ y $\kappa = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ son la energía y la magnitud del tri-momento en sistema en reposo del medio, respectivamente. De acuerdo a los métodos de la TCTF, $\omega(\kappa)$ es calculado en términos de la parte real de la contribución del medio a la autoenergía Σ^T . Para neutrinos izquierdos, Σ^T es de la forma

$$\Sigma^T = R(a\not{k} + b\not{u})L, \quad (5.2.8)$$

donde $L, R = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$, son los proyectores de helicidad izquierda y derecha, respectivamente y los coeficientes a y b , en general dependen de las variables ω y κ . En la Ref. [59] se ha presentado un cálculo detallado de la autoenergía del neutrino en un medio general compuesto de leptones cargados, nucleones y neutrinos. En ése trabajo se demostró que, aunque la autoenergía del neutrino depende del parámetro de norma, las relaciones de dispersión no dependen de dicho parámetro, al menos hasta ordenes de M_{Pl}^{-4} . Tomando en cuenta este resultado, por simplicidad nosotros vamos a trabajar en la norma unitaria ($\xi \rightarrow \infty$). En general, $\omega(\kappa)$ depende de los coeficientes a y b y, por lo tanto, V_{eJ} también dependerá de esos coeficientes. No obstante, para las soluciones perturbativas de las relaciones de energía-momento alrededor del valor $\omega(\kappa) = \kappa$, puede aproximarse (ver la siguiente sección) que el potencial efectivo está dado aproximadamente por

$$V_{eJ} = b(\omega, \kappa)|_{\omega=\kappa} + O(g^4). \quad (5.2.9)$$

donde g es la constante de acoplamiento débil. En términos de la autoenergía, b puede ser expresado en la forma siguiente

$$b = \frac{1}{4} \text{Tr}(\not{X}\Sigma^T). \quad (5.2.10)$$

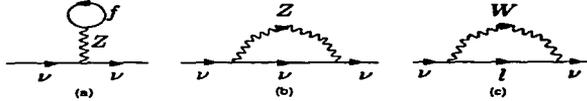


Figura 5.1: Diagramas para la autoenergía de un neutrino en un baño térmico compuesto de leptones cargados, nucleones y neutrinos. En (a), f indica alguna especie de fermión presente en el baño. En (c), el leptón cargado l es del mismo sabor que el neutrino.

con

$$\chi = \frac{1}{\kappa^2}(\omega\not{k} - k^2\not{1}). \quad (5.2.11)$$

Puesto que estamos suponiendo que los neutrinos son de masa nula, a nivel de un rizo, el campo de Higgs no contribuye a la autoenergía Σ^T y las únicas contribuciones son debidas a la del bosón cargado W y a la del bosón neutro Z (Ver Fig. 5.1)

Para encontrar el valor del coeficiente b separamos las diferentes contribuciones a este coeficiente:

$$b = b_W + b_Z + b_{lad}, \quad (5.2.12)$$

y utilizamos el formalismo descrito en los capítulos anteriores, para obtener:

$$\begin{aligned} b_B &= -\frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}\{\chi \Gamma_\mu^B(\not{p} + m_f) \Gamma_\nu^B\} \Delta_B^{\mu\nu}(k-p) \delta(p^2 - m_f^2) \eta_f(p \cdot u), \\ b_{lad} &= \frac{1}{4} \text{Tr}\{\chi \Gamma_\mu^Z\} \Delta_Z^{\mu\nu}(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}\{(\not{p} + m_f) \Gamma_\nu^Z\} \delta(p^2 - m_f^2) \eta_f(p \cdot u), \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

donde $B = W, Z$ y hemos denotado por Γ_μ^B al correspondiente vértice de la teoría electrodébil. En el cálculo a un rizo de la autoenergía del neutrino, empleamos el propagador de los bosones Z y W en el vacío

$$\Delta_B^{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - M_B^2} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_B^2}). \quad (5.2.14)$$

Esta aproximación es muy buena para temperaturas mucho menores que la masa del bosón W .

Comparemos ahora el resultado en (5.2.9) y (5.2.10) de la TCTF con (5.2.6) que se obtiene de promediar térmicamente la amplitud usual de dispersión a ángulo cero. Para $\omega = \kappa$, $\kappa \not\approx$ se reduce al proyector de energía en el vacío y puede ser remplazado por su expresión usual en términos de los espinores libres del vacío. Procediendo de igual forma para $\not{p} + m$, obtenemos:

$$b(\omega, \kappa)|_{\omega=\kappa} = \frac{1}{\kappa} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \overline{\mathcal{M}} \eta_f(p \cdot u), \quad (5.2.15)$$

donde

$$\overline{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \sum_s \left\{ \sum_{B=W,Z} \bar{u}_L(k) \Gamma_\mu^B u(p, s) \Delta_B^{\mu\nu}(k-p) \bar{u}(p, s) \Gamma_\nu^B u_L(k) - \bar{u}_L(k) \Gamma_\mu^Z u_L(k) \Delta_Z^{\mu\nu}(0) \bar{u}(p, s) \Gamma_\nu^Z u(p, s) \right\}, \quad (5.2.16)$$

es identificada como la amplitud invariante promediada sobre los espines para la dispersión hacia adelante del proceso $\nu f \rightarrow \nu f$, la cual es calculada con las reglas usuales de Feynman en el vacío. Existe una suma implícita sobre los diferentes fermiones que contribuyen a la amplitud invariante. De esta forma, tomando en cuenta la Ec. (5.2.9) y comparando con (5.2.6), concluimos que ambos métodos conducen a resultados idénticos en un cálculo perturbativo de V_{ef} .

Como habíamos mencionado en la introducción, los efectos de la materia sobre la propagación de los neutrinos también pueden describirse en términos del índice de refracción n . Su relación con el potencial efectivo puede encontrarse sustituyendo Ec. (5.2.7) en la definición del índice de refracción:

$$n = \frac{\kappa}{\omega(\kappa)}. \quad (5.2.17)$$

El resultado es el siguiente

$$n - 1 \simeq -\frac{V_{ef}}{\kappa}, \quad (5.2.18)$$

con V_{ef} calculado con (5.2.6) o con (5.2.10). La Ec. (5.2.18) reproduce la expresión introducida por Langacker y Liu [63] para evaluar la correcciones radiativas electrodébiles para el índice de refracción del neutrino en el universo temprano.

5.2.1 Cálculo del Potencial Efectivo

Como una aplicación de la Ec. (5.2.6), presentaremos el cálculo al orden más bajo de las contribuciones al potencial efectivo de un neutrino en un medio que contiene protones, neutrones, y leptones y sus correspondientes antipartículas. El primer paso es evaluar la amplitud invariante para la dispersión de un neutrino prueba $\nu_l(k)$ ($l = e, \mu, \tau$) debida a los fermiones en el medio. Los diagramas de Feynman al orden más bajo se muestran en la Fig. 5.2. El diagrama (a) da la misma contribución para todas las familias de neutrinos, mientras que (b) y (c) contribuyen sólo cuando el neutrino prueba y las partículas del medio (neutrinos y leptones cargados, respectivamente) son de la misma familia. Usando los procedimientos usuales, obtenemos los siguientes resultados para las amplitudes asociadas con cada una de las gráficas mostradas

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= \sqrt{2}G_F \sum_f [\alpha_f k \cdot p + \beta_f m_f k \cdot s], \\ \mathcal{M}_b &= -\sqrt{2}G_F \frac{M_Z^2}{q^2 - M_Z^2} k \cdot p, \\ \mathcal{M}_c &= \sqrt{2}G_F \frac{M_W^2}{q^2 - M_W^2} [k \cdot p - m_l k \cdot s + \frac{m_l^2}{2M_W^2} (p \cdot k + m_l k \cdot s)],\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

donde $q = p - k$, s_μ es el espín del fermión en el medio y la constante de acoplamiento de Fermi es definida como $G_F/\sqrt{2} \equiv g^2/8M_W^2$. Los coeficientes α_f y β_f toman los siguientes valores:

$$\alpha_l = -1 + 4 \sin^2 \theta_W, \quad \beta_l = 1,$$

$$\alpha_\nu = 1, \quad \beta_\nu = -1,$$

para los leptones cargados y los neutrinos, y

$$\alpha_p = 1 - 4 \sin^2 \theta_W, \quad \beta_p = -1,$$

$$\alpha_n = -1, \quad \beta_n = 1,$$

para los nucleones.

Como mencionamos anteriormente, en un medio no polarizado promediamos la amplitud invariante sobre los espines de las partículas en el medio; las contribuciones lineales en el espín se anulan. Adicionalmente, desarrollamos

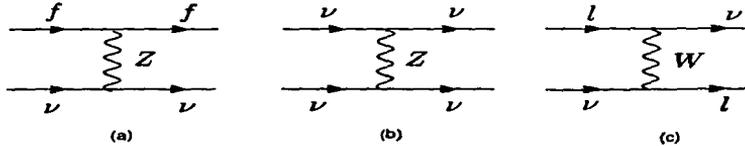


Figura 5.2: Diagramas de Feynman a nivel de árbol para la dispersión hacia adelante de un neutrino. En (a), f indica cualquier especie de fermión presente en el medio. En la gráfica (b), los neutrinos del medio son del mismo sabor que el del neutrino prueba. En (c), el leptón cargado l es del mismo sabor que el neutrino prueba.

el propagador del bosón W en potencias del inverso al cuadrado de la masa del mismo:

$$\frac{1}{q^2 - M_B^2} \approx -\frac{1}{M_B^2} \left(1 + \frac{q^2}{M_B^2} + \dots\right). \quad (5.2.20)$$

Este es un desarrollo que será válido cuando la temperatura sea mucho menor que la masa del bosón de norma ($T \ll M_B$). Entonces, despreciando además cantidades proporcionales a m_l^2/M_B^2 , encontramos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_a &\approx \sqrt{2}G_F \alpha_f k \cdot p, \\ \overline{\mathcal{M}}_b &\approx \sqrt{2}G_F \left[k \cdot p - \frac{2(p \cdot k)^2}{M_Z^2} \right], \\ \overline{\mathcal{M}}_c &\approx \sqrt{2}G_F \left[k \cdot p - \frac{2(p \cdot k)^2}{M_W^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Cuando sustituimos los resultados aproximados en la Ec. (5.2.6), las correspondientes contribuciones al potencial efectivo pueden ser escritas en términos de las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} p^\mu \delta(p^2 - m^2) \eta_f(p \cdot u) &= A u^\mu, \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} p^\mu p^\nu \delta(p^2 - m^2) \eta_f(p \cdot u) &= B u^\mu u^\nu + C g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

con $\eta_f(p \cdot u)$ definido en la Ec. (5.2.4). Los escalares A , B y C son evaluados más fácilmente en el sistema de reposo del medio. Contrayendo la primera de las igualdades anteriores con el cuadrivector de velocidad del medio u_μ y tomando en cuenta que $u^2 = 1$, resulta

$$A = \frac{1}{2}(n_f - n_{\bar{f}}), \quad (5.2.23)$$

donde n_f ($n_{\bar{f}}$) representa la densidad de fermiones (antifermiones) en el medio

$$n_{f,\bar{f}} = g_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(E \mp \mu_f)} + 1}. \quad (5.2.24)$$

En la última ecuación, $E = \sqrt{p^2 + m_f^2}$ y el factor g_f es igual a la unidad para neutrinos quirales e igual a dos para leptones cargados y nucleones. Los otros coeficientes B y C se determinan en forma similar; contrayendo la segunda ecuación en (5.2.22) con los tensores $u_\mu u_\nu$ y $g_{\mu\nu}$, respectivamente. Así, obtendremos

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{6} \left[m_f^2 \left(\langle \frac{1}{E_f} \rangle n_f + \langle \frac{1}{E_{\bar{f}}} \rangle n_{\bar{f}} \right) - \left(\langle E_f \rangle n_f + \langle E_{\bar{f}} \rangle n_{\bar{f}} \right) \right], \\ C &= -\frac{1}{6} \left[m_f^2 \left(\langle \frac{1}{E_f} \rangle n_f + \langle \frac{1}{E_{\bar{f}}} \rangle n_{\bar{f}} \right) - 4 \left(\langle E_f \rangle n_f + \langle E_{\bar{f}} \rangle n_{\bar{f}} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

donde los promedios térmicos de las energías E_f y de $1/E_f$ estan dados por la siguiente relación

$$\langle E_{f,\bar{f}}^n \rangle = \frac{g_f}{n_{f,\bar{f}}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E^n \frac{1}{e^{\beta(E \mp \mu_f)} + 1}, \quad (5.2.26)$$

con $n = 1, -1$. Usando los resultados anteriores en la Ec. (5.2.6), es directo hallar el potencial efectivo para un neutrino de un sabor dado. Los resultados se presentan en la Tabla 1 y coinciden a los que se obtuvieron en la Ref. [59]. Además de las contribuciones al orden de la constante de acoplamiento G_F , las cuales son proporcionales a la diferencia de densidades de fermiones y antifermiones: $n_f - n_{\bar{f}}$; existen también correcciones térmicas del orden de G_F/M_W^2 , que dependen de $\langle E \rangle$ ó $\langle \frac{1}{E} \rangle$. Las últimas correcciones resultan de los términos que dependen del momento en el propagador del bosón y tienen el mismo signo para partículas y antipartículas (ver Ec. (5.2.25)).

Para el problema de las oscilaciones de neutrinos en la materia, la cantidad relevante es la diferencia entre los potenciales efectivos de los distintos sabores de neutrinos ν_i . En el caso de la materia normal, compuesta de protones, neutrones y electrones, todos los neutrinos pueden ser dispersados por electrones y nucleones a través de la interacción con la corriente neutra (Fig. 5.2a), pero sólo el ν_e puede ser dispersado por los electrones mediante la interacción con la corriente cargada (Fig. 5.2c). El diagrama b en la Fig. 5.2 no contribuye, porque en el caso de materia normal no existen neutrinos en el medio. Esto significa que la diferencia $V_{ef}^{\nu_e} - V_{ef}^{\nu_f}$ ó ($V_{ef}^{\nu_e} - V_{ef}^{\nu_f}$), recibe contribuciones no nulas del orden de la constante de Fermi, las cuales son proporcionales a la densidad de electrones en el medio. Estas son las condiciones que prevalecen en el Sol y que han sido consideradas en muchos estudios que se han hecho sobre las implicaciones del mecanismo MSW en el problema de los neutrinos solares [21]. Sin embargo, las cosas pueden cambiar notablemente en otros contextos astrofísicos o el universo temprano. En este último caso, usualmente se supone que hubo casi igual número de partículas y de antipartículas, lo cual implica que las contribuciones al potencial efectivo proporcionales a $n_f - \bar{n}_f$ se anulen o sean muy pequeñas. Bajo estas circunstancias, correcciones del orden de G_F/M_W^2 , las cuales hemos considerado, pueden ser relevantes porque estas correcciones no se cancelan, aún en medios que tienen simetría ante CP.

Neutrino	Medio	V_{ef}
ν_e, ν_μ, ν_τ	p	$\pm \frac{G_F}{\sqrt{2}} (1 - 4 \sin^2 \theta_W) (n_p - n_{\bar{p}})$
ν_e, ν_μ, ν_τ	n	$\mp \frac{G_F}{\sqrt{2}} (n_n - n_{\bar{n}})$
ν_e	e	$\pm \frac{G_F}{\sqrt{2}} (1 + 4 \sin^2 \theta_W) (n_e - n_{\bar{e}})$ $+ \frac{2\sqrt{3}G_F m_e^2}{3M_W^2} [n_e \langle \frac{1}{E_e} \rangle + n_{\bar{e}} \langle \frac{1}{E_e} \rangle - \frac{1}{m_e^2} (n_e \langle E_e \rangle + n_{\bar{e}} \langle E_e \rangle)]$
ν_e	ν_e	$\pm \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (n_{\nu_e} - n_{\bar{\nu}_e}) - \frac{8\sqrt{3}G_F m_e^2}{3M_W^2} [n_{\nu_e} \langle E_{\nu_e} \rangle + n_{\bar{\nu}_e} \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle]$
ν_μ, ν_τ	e	$\pm \frac{G_F}{\sqrt{2}} (-1 + 4 \sin^2 \theta_W) (n_e - n_{\bar{e}})$
ν_μ, ν_τ	ν_e	$\pm \frac{2G_F}{\sqrt{2}} (n_{\nu_e} - n_{\bar{\nu}_e})$

Tabla 1. Potencial efectivo inducido sobre un neutrino que viaja a través de un medio. El signo superior (+) se refiere a neutrinos y el inferior (-) indica que es para antineutrinos.

5.3 Parte imaginaria

En la sección anterior hemos calculado la parte real de las relaciones de dispersión para un neutrino prueba que se propaga en medio. Dichas relaciones las hemos expresado en términos de un potencial efectivo, el cual fue identificado con el coeficiente b que aparece en la autoenergía (Ec. (5.2.8)). Ahora consideraremos la parte imaginaria de las relaciones de dispersión; como veremos más adelante, estas contribuciones pueden ser escritas en términos de la sección eficaz para el neutrino prueba promediada térmicamente. Tal y como mencionamos en el capítulo anterior, la parte imaginaria de la autoenergía contribuye a la razón de decaimiento, o de manera más precisa, a la rapidez de termalización de la partícula. Una condición esencial para que un modo normal se propague en el medio, es que las contribuciones reales a la relación de dispersión dominen sobre la correspondiente contribución imaginaria. La parte imaginaria de la autoenergía Σ se relaciona con la discontinuidad de la misma, en el sentido de que considerada como una función de variable compleja con cortes a lo largo del eje real; se tiene que $\text{Disc}\Sigma(\omega) = \Sigma(\omega + i\epsilon) - \Sigma(\omega - i\epsilon) = -2i\text{Im}\Sigma(\omega)$ es puramente imaginaria.

Las relación de dispersión para un neutrino que contiene contribuciones dispersivas y absorptivas, se puede calcular a partir de la ecuación de movimiento (ver, por ejemplo, Ec. (4.3.17)). Para el caso de masa nula, la autoenergía se parametriza en términos de los coeficientes a y b , dando lugar a la condición:

$$(1 - a)(\omega - \kappa) - b = 0. \quad (5.3.27)$$

En el desarrollo perturbativo a y b son del mismo orden en la constante de acoplamiento. Para un neutrino relativista, el efecto del medio da lugar a correcciones perturbativas de la correspondiente relación de dispersión para el neutrino libre; dada por $\omega = \kappa$. Por lo tanto, es conveniente escribir (5.3.27) como

$$\omega = \kappa + \frac{b}{1 - a}. \quad (5.3.28)$$

A orden de un rizo $b \propto a \propto g^2$, por lo cual la parte real de la relación de dispersión a orden g^2 es simplemente

$$\text{Re}\omega = \kappa + \text{Re} b|_{\omega=\kappa}. \quad (5.3.29)$$

Es posible demostrar que a orden g^2 las partes imaginarias de a y b se cancelan (la razón será explicada posteriormente), consecuentemente a dicho orden no existe contribución a $\text{Im}\omega$. De esta forma, las contribuciones de los coeficientes a y b a la parte imaginaria de la relación de dispersión, son ambas del orden g^4 y la solución perturbativa a este orden está dada por

$$\text{Im } \omega = \text{Im } b|_{\omega=\kappa}. \quad (5.3.30)$$

Es costumbre escribir la solución a la relación de dispersión como: $\omega(\kappa) = \text{Re } \omega + i\gamma$, donde $\text{Re } \omega(\kappa)$ determina los modos normales, mientras que γ es la razón de decaimiento de la partícula. Por lo tanto, en nuestro caso

$$\gamma \approx \text{Im } b|_{\omega=\kappa}. \quad (5.3.31)$$

Como demostramos anteriormente (subsección 3.2.2), las partes real e imaginaria de la autoenergía que intervienen en la relación de dispersión se obtienen a partir de las componentes de la matriz de autoenergía Σ_{11} y Σ_{12} , respectivamente. El resultado (con $\sigma = 0$) puede escribirse en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \text{Re } \Sigma &= \text{Re } \Sigma_{11} \\ \text{Im } \Sigma &= \frac{\epsilon(k \cdot u)}{2i\pi F(k \cdot u)} \Sigma_{12} \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

A nivel de dos rizos, los diagramas que contribuyen a Σ_{12} se presentan en la Fig. 5.3. Para los diagramas (a) y (b) obtenemos

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{12} &= - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Gamma_1^\mu(iS_{12}(q)) \Gamma_2^\nu \text{Tr} \{ \Gamma_1^\alpha(iS_{12}(p)) \\ &\quad \times \Gamma_2^\beta(iS_{21}(p-q+k)) \} i(\Delta_{\mu\alpha}^A(k-q))_{11} i(\Delta_{\nu\beta}^A(k-q))_{22}, \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

mientras que para los diagramas (c) - (f) se obtiene

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{12} &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Gamma_1^\mu(iS_{12}(q)) \Gamma_2^\beta(iS_{21}(-k+p+q)) \Gamma_1^\alpha(iS_{12}(p)) \Gamma_2^\gamma \\ &\quad \times i(\Delta_{\mu\alpha}^A(k-q))_{11} i(\Delta_{\nu\beta}^B(k-p))_{22}. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

donde $A, B = W, Z$ y recordamos que $\Gamma_1^\mu = -\Gamma_2^\mu$. En principio debemos sumar sobre los índices térmicos ($a = 1, 2$) de los vértices internos, pero debido a que estamos considerando temperaturas mucho menores que la masa

de los bosones de norma (es decir, $T/M_W \ll 1$), la matriz de los propagadores bosónicos es diagonal, coincidiendo esencialmente con los propagadores del vacío:

$$(\Delta_{\nu\beta}^A(k))_{11} = -(\Delta_{\nu\beta}^A(k))_{22} = \frac{1}{k^2 - M_A^2 + i\epsilon} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_A^2}). \quad (5.3.35)$$

El hecho de que el propagador bosónico sea diagonal, permite entender por qué la autoenergía del neutrino no recibe contribuciones a orden g^2 . A dicho orden, la parte imaginaria de Σ se obtendría de calcular la autoenergía del tipo 1-2 para los digramas de la figura 5.1, pero dichas contribuciones se cancelan porque son proporcionales a $(\Delta_{\nu\beta}^A(k))_{12}$. Por el contrario, los propagadores fermiónicos S_{12} y S_{21} ya han sido dados en la Ec. (2.4.106); poniendo $\sigma = 0$ nos queda:

$$\begin{aligned} S_{12}(p) &= 2\pi i \delta(p^2 - m^2) [\eta_f(x_p) - \theta(-p \cdot u)] (\not{p} + m), \\ S_{21}(p) &= 2\pi i \delta(p^2 - m^2) [\eta_f(x_p) - \theta(p \cdot u)] (\not{p} + m). \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

Tomando en cuenta los resultados anteriores tendremos que la razón de decaimiento se puede escribir como

$$\gamma = -i \frac{\epsilon(k \cdot u)}{2i\pi_F} \left\{ C^{WW} + C^{ZZ} - \sum_{AB=Z,W} D^{AB} \right\}, \quad (5.3.37)$$

donde C^{AB} se obtiene de (5.3.33):

$$\begin{aligned} C^{AA} &= \frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} \{ \not{p} \Gamma_1^\mu (\not{p} + m_1) \Gamma_2^\nu \} \text{Tr} \{ \Gamma_1^\alpha (\not{p} + m_2) \right. \\ &\quad \times \Gamma_2^\beta (Q + m_3) \} i(\Delta_{\mu\alpha}^A(k - q))_{11} i(\Delta_{\nu\beta}^A(k - q))_{22} \Big\} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - (q + p - k)) \delta(q^2 - m_1^2) \delta(p^2 - m_2^2) \delta(Q^2 - m_3^2) \\ &\quad \times [\eta_F(q_x) - \theta(-q \cdot u)] [\eta_F(p_y) - \theta(-p \cdot u)] [\eta_F(Q_z) - \theta(Q \cdot u)], \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

y D^{AB} de (5.3.34):

$$\begin{aligned} D^{AB} &= \frac{1}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \left\{ \text{Tr} \{ \not{p} \Gamma_1^\mu (\not{p} + m_1) \Gamma_2^\beta \} \Gamma_\alpha^\alpha(Q + m_2) \right. \\ &\quad \times \Gamma_\alpha^\nu(\not{p} + m_3) \} i(\Delta_{\mu\alpha}^A(k - q))_{11} i(\Delta_{\nu\beta}^B(k - p))_{22} \Big\} \end{aligned}$$

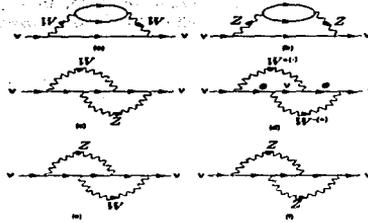


Figura 5.3: Diagramas de autoenergía a nivel de dos rizados para un neutrino que se propaga en un baño térmico de leptones cargados, nucleones y neutrinos. Los diagrama (a) y (b) contribuyen al cuadrado de la amplitud invariante, mientras que el resto de los diagramas (c, d, e y f) contribuyen a los términos de interferencia en la amplitud invariante.

$$\begin{aligned}
 & \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - (q + p - k)) \delta(q^2 - m_1^2) \delta(p^2 - m_2^2) \delta(Q^2 - m_3^2) \\
 & \times [\eta_F(q_x) - \theta(-q \cdot u)] [\eta_F(p_y) - \theta(-p \cdot u)] [\eta_F(Q_z) - \theta(Q \cdot u)].
 \end{aligned}
 \tag{5.3.39}$$

En las ecuaciones anteriores hemos introducido una integral extra sobre el momento Q , conjuntamente con una función delta de Dirac. Notemos que cada una de las contribuciones anteriores a la parte imaginaria de las relaciones de dispersión son independientes de la norma utilizada. En efecto, cuando evaluamos cada uno de los coeficientes en $\omega = \kappa$, el término $\kappa \not{n}$ puede ser remplazado por el correspondiente proyector de energía en el vacío. Podemos entonces recurrir a la ecuación de Dirac ($\not{u} = 0$), con lo cual las contribuciones dependientes de la norma que provienen de los propagadores bosónicos se anulan. Claro está, poniendo neutrinos que satisfacen la ecuación de Dirac.

Veremos ahora que γ puede ser expresado en términos de amplitudes de procesos físicos. Para ello usamos las relaciones

$$\begin{aligned}
 [\eta_F(x_i) - \theta(\pm x \cdot u)] &= \mp \epsilon(x \cdot u) n_F(\mp x_i), \\
 n_F(x_i) &= e^{-x_i} (1 - n_F(x_i)),
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n_F(w)} n_F(x) n_F(y) n_F(z) = e^{-z} n_F(x) n_F(y) n_F(z) + e^{z-x-y+w} (1 - n_F(x))(1 - n_F(y)) n_F(x) \quad (5.3.40)$$

y notamos además que tanto el momento total como la carga total son cantidades conservadas:

$$\begin{aligned} Q - q - p + k &= 0, \\ \mu_z - \mu_x - \mu_y + \mu_w &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

Adicionalmente, es necesario notar que, al orden considerado, se pueden utilizar las expresiones para los proyectores fermiónicos

$$\begin{aligned} \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) &= \not{p} + m, \\ \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) &= \not{p} - m. \end{aligned} \quad (5.3.42)$$

Notemos de las ecuaciones (5.3.33) y (5.3.34) que todos los propagadores fermiónicos internos son del tipo 12 ó 21 y por lo tanto, de acuerdo a (5.3.36), introducen un factor $\delta(p^2 - m^2)$ que los coloca en capa de masa. Esto lo podemos interpretar diciendo que, para el cálculo de la parte imaginaria, los diagramas de la Fig. 5.3 son cortados en todas las líneas fermiónicas internas. Las líneas bosónicas no se cortan porque estos diagramas no incluyen distribución térmica para $T \ll M_A$. La inclusión de los proyectores fermiónicos Ec. (5.3.42) en las ecuaciones (5.3.38) y (5.3.39), permite identificar en dichas expresiones las amplitudes de dispersión para los procesos que se obtienen de cortar las líneas fermiónicas internas. Las expresiones que se obtienen son demasiado extensas, sin embargo es posible entender como construir las de manera sistemática.

Consideremos los diagramas (a) y (d) de la Fig. 5.3. Al cortar las líneas fermiónicas, aparecerá un proceso de dispersión $\nu^* e \rightarrow \nu e$ mediado por un W que contribuye a la absorción o desaparición del neutrino de prueba ν^* . En general denotaremos a ν^* como el neutrino de prueba, mientras que todas las otras partículas se encuentran en equilibrio termodinámico. La amplitud del proceso $\nu^* e \rightarrow \nu e$ aparecerá multiplicada por el peso estadístico $n_e(p) [1 - n_e(q)] [1 - n_\nu(Q)]$. Esto muestra claramente que es proporcional a la densidad de fermiones en el estado inicial, multiplicado por un factor $[1 - n]$ para cada fermión en el estado final, representando el bloqueo de Pauli. La

reacción inversa $\nu e \rightarrow \nu^* e$ contribuye a la producción o "reaparición" del ν^* y tiene un peso estadístico $n_e(q)n_{\nu^*}(Q)[1 - n_e(p)]$. Al sumar¹ la amplitud de desaparición y reaparición obtenemos el peso estadístico:

$$n_e(p)[1 - n_e(q)] + n_{\nu^*}(Q)[n_e(q) - n_e(p)] \rightarrow n_e(p)[1 - n_e(q)].$$

Donde el último resultado se sigue de la invariancia ante inversión temporal. Adicionalmente, podrían aparecer procesos de decaimiento $\nu^* \rightarrow ee^- \nu$ ó de emisión de neutrinos $ee^- \nu \rightarrow \nu^* \nu$ ó $ee^- \nu \rightarrow \nu^*$, multiplicados por sus correspondientes pesos estadísticos. Sin embargo, en base a consideraciones cinemáticas, se puede demostrar que en la región de interés sólo debemos considerar los procesos de dispersión.

A temperatura cero, las reglas para obtener la parte imaginaria de una gráfica de Feynman se conocen como reglas de Cutkosky. Las correspondientes reglas de Cutkosky a temperatura finita han sido presentadas anteriormente por Kobes y Semenov [64] y por Weldon [65], para el caso de ciertas interacciones idealizadas a orden de g^2 en donde la parte imaginaria de la autoenergía a dicho orden no se anula.

En base a estas consideraciones, γ puede ser expresado en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{(2\pi)^4}{2\omega} \sum_X \left\{ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3Q}{(2\pi)^3 2E_Q} |\bar{\mathcal{M}}(\nu^* X \leftrightarrow \nu X)|^2 \right. \\ & \times \delta^4(k + p - q - Q) (1 - n_X(E_Q)) n_X(E_p) \\ & \left. + \text{todos los procesos posibles} \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

donde X denota algún fermion presente en el medio. Por todos los procesos posibles se entienden aquellos procesos de dispersión que se obtienen al cortar todas las líneas fermiónicas internas en los diagramas de las Fig. 5.3. Dichos procesos se enlistan en (5.3.48).

Para la dispersión $\nu^* X \leftrightarrow \nu X$, la sección eficaz está dada por la siguiente relación

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{2\omega 2E_p} \frac{1}{|\mathbf{V}_{rel}|} |\bar{\mathcal{M}}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k + p - q - Q) \\ & \times \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \frac{d^3Q}{(2\pi)^3 2E_Q}. \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

¹ El hecho de que las amplitudes de aparición y reaparición se deban sumar, se aplica al caso de fermiones; en el caso bosónico las correspondientes amplitudes se deben sustraer.

donde \mathbf{V}_{rel} denota la velocidad relativa entre el neutrino prueba y el fermión del medio. Por otro lado, esta velocidad puede expresarse como sigue

$$|\mathbf{V}_{rel}| = \frac{k \cdot p}{E_p \omega}, \quad (5.3.45)$$

entonces, encontramos que γ puede ser expresado en la forma

$$\gamma = \sum_X \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot p}{E_p \omega} \langle d\sigma \rangle n_X(E_p), \quad (5.3.46)$$

donde

$$\langle d\sigma \rangle = \frac{(2\pi)^4}{2\omega 2E_p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 Q}{2E_q} \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{M}|^2}{k \cdot p} \delta^4(k + p - q - Q) \times (1 - n_X(E_Q)). \quad (5.3.47)$$

Observemos que, si despreciamos el término de bloqueo de Pauli $(1 - n_X(E_Q))$, el promedio térmico sobre la sección eficaz se reduce al resultado que se obtiene de considerar que el proceso se realiza en el vacío.

Para calcular la parte imaginaria del índice de refracción para neutrinos sin masa, despreciamos el término de bloqueo de Pauli y consideraremos las siguientes secciones eficaces, que se obtienen de las reglas de Feynman para el modelo estandar, en la aproximación $q^2 \ll M_W^2$:

$$\begin{aligned} \sigma(\nu e \rightarrow \nu e) &= \frac{G_F^2}{12\pi} [\delta^2 - 5\delta + 7]S + \frac{G_F^2}{16\pi} m_e^2 [(2 - \delta)^2 - 1], \\ \sigma(\nu e^- \rightarrow \nu e^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi} [\delta^2 - 3\delta + 3]S + \frac{G_F^2}{16\pi} m_e^2 [(2 - \delta)^2 - 1], \\ \sigma(\nu_i \nu_i \rightarrow \nu_i \nu_i) &= \frac{G_F^2}{12\pi} 6S, \\ \sigma(\nu_i \nu_i^- \rightarrow \nu_i \nu_i^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi} 4S, \\ \sigma(\nu_i \nu_j \rightarrow \nu_i \nu_j) &= \frac{G_F^2}{12\pi} 3S, \\ \sigma(\nu_i \nu_j^- \rightarrow \nu_i \nu_j^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi} S, \\ \sigma(\nu_i N \rightarrow \nu_i N) &= \frac{G_F^2}{12\pi} 3S, \\ \sigma(\nu_i N^- \rightarrow \nu_i N^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi} S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\nu p \rightarrow \nu p) &= \frac{G_F^2}{12\pi}[\delta^2 + \delta + 1]S + \frac{G_F^2}{16\pi}m_p^2[\delta^2 - 1], \\
\sigma(\nu p^- \rightarrow \nu p^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi}[\delta^2 - \delta + 1]S + \frac{G_F^2}{16\pi}m_p^2[\delta^2 - 1], \\
\sigma(\nu\nu^- \rightarrow e e^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi}\left[\frac{1}{2}(\delta^2 - 4\delta + 5)\right]S + \frac{G_F^2}{16\pi}m_e^2[(2 - \delta)^2 - 1], \\
\sigma(\nu e\nu_e^- \rightarrow \nu\nu^-) &= \frac{G_F^2}{12\pi}S,
\end{aligned} \tag{5.3.48}$$

donde $\delta = 1 - 4\text{sen}^2\theta_W$ y $S = (k + p)^2 = m^2 + 2k \cdot p$.

En esta aproximación, en la que se desprecia el término de bloqueo de Pauli, lo que resta es calcular los promedios térmicos que aparecen en (5.3.46). En dicho cálculo es necesario considerar las siguientes integrales

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} (k \cdot p)^2 \theta(p \cdot u) \delta(p^2 + m_X^2) n_X(p \cdot u), \\
I_2 &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} (k \cdot p) \theta(p \cdot u) \delta(p^2 + m_X^2) n_X(p \cdot u),
\end{aligned} \tag{5.3.49}$$

por argumentos de covariancia, las integrales anteriores son de la forma

$$\begin{aligned}
I_1 &= k_\mu k_\nu (A u^\mu u^\nu + B g^{\mu\nu}) \\
I_2 &= k_\mu (C u^\mu),
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

donde los coeficientes A , B y C son los siguientes:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6g_X} N_X (4 \langle E_X \rangle - m_X^2 \langle \frac{1}{E_X} \rangle), \\
B &= -\frac{1}{6g_X} N_X (\langle E_X \rangle - m_X^2 \langle \frac{1}{E_X} \rangle), \\
C &= \frac{1}{2g_X} N_X,
\end{aligned} \tag{5.3.51}$$

donde hemos introducido las definiciones

$$\begin{aligned}
\langle E_X^i \rangle &= \frac{g_X}{N_X} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_\mu^i n_X(E_P), \\
N_X &= g_X \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_X(E_P),
\end{aligned} \tag{5.3.52}$$

con $i = 1, -1$ y g_X es igual a la unidad para neutrinos izquierdos y dos para leptones cargados. De las ecuaciones previas, obtenemos que la razón de

decaimiento γ para un neutrino que se propaga en un medio compuesto por electrones, protones, neutrones, neutrinos y sus correspondientes antipartículas, se puede expresar en forma concisa como:

$$\gamma = -\frac{G_F^2}{12\pi} \sum_X \frac{N_X}{g_X} \left\{ \left(\frac{8}{3} \langle E_X \rangle - \frac{2}{3} m_X^2 \left(\frac{1}{E_X} \right) \right) \omega A_X + m_X^2 (A_X + B_X) \right\}. \quad (5.3.53)$$

donde la suma en X se realiza sobre todas partículas del medio. Los diferentes valores que toman A_X y B_X , se muestran en la Tabla II.

X	A_X	B_X
e	$\delta^2 - 5\delta + 7$	$-\frac{3}{4}[(2-\delta)^2 - 1]$
e^-	$\delta^2 - 3\delta + 3$	$-\frac{3}{4}[(2-\delta)^2 - 1]$
ν	0	0
ν^-	4	0
$\nu_i \neq \nu$	3	0
$\nu_i^- \neq \nu^-$	1	0
N	3	0
N^-	1	0
P	$\delta^2 + \delta + 1$	$-\frac{3}{4}(\delta^2 - 1)$
P^-	$\delta^2 - \delta + 1$	$-\frac{3}{4}(\delta^2 - 1)$

Tabla II. Los diferentes valores que toman los coeficientes A_X y B_X , según las partículas presentes en el medio. Aquí, $\delta = 1 - 4\text{sen}^2\theta_W$.

En este capítulo hemos deducido tanto la parte real como la parte imaginaria de las relaciones de dispersión para neutrinos que se propagan en un medio compuesto por electrones, protones, neutrones, neutrinos y sus correspondientes antipartículas. La parte real de las relaciones de dispersión, la obtuvimos por un método alternativo a la Teoría de Campos a Temperatura Finita (TCTF); ése método consiste en promediar térmicamente la amplitud de dispersión a ángulo cero. Demostramos que, cuando los cálculos se realizan a nivel de un rizo en la TCTF y se consideran soluciones perturbativas de dichas relaciones alrededor de $\omega = \kappa$, los resultados con ambos métodos es el mismo. Posteriormente, dedujimos la parte imaginaria de las relaciones

de dispersión con los métodos de la TCTF; también considerando soluciones perturbativas alrededor de la capa de masa del vacío ($\omega = \kappa$). Realizamos el cálculo tomando en cuenta contribuciones de diagramas de Feynman a dos rizo, ya que las contribuciones que provienen de diagramas de un rizo son nulas para la parte imaginaria. Demostramos que, para las soluciones perturbativas, la parte imaginaria de las relaciones de dispersión se puede expresar como una rapidez de decaimiento. Cabe destacar que la parte real de las relaciones de dispersión es mucho mayor que la parte imaginaria ya que parte real $\sim G_F$, mientras que la parte imaginaria $\sim G_F^2$.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado diferentes cuestiones vinculadas con la invariancia de norma en la QED térmica. Además, poniendo especial atención en posibles efectos de la invariancia de norma, calculamos tanto la parte real como la parte imaginaria de las relaciones de dispersión para un neutrino que se propaga en un medio.

En el capítulo 2 presentamos de forma detallada el formalismo de tiempo real de la TCTF. Aunque los resultados allí presentados no son novedosos, hemos reunido y analizado de manera sistemática diferentes ideas que están dispersas en la literatura y que podrían ser de utilidad para futuros estudios o investigaciones.

En el siguiente capítulo analizamos la simetría discreta Z_2 y la simetría de norma asociadas con la QED térmica. Aunque la simetría Z_2 ha sido previamente analizada [3] para el campo escalar, nosotros la generalizamos al caso de la QED térmica [43]. Esta simetría permite reducir las funciones de Green irreducibles de una partícula independientes. Imponiendo la condición de que la funcional generatriz permanezca invariante bajo una transformación de norma, derivamos las identidades de Ward a temperatura finita. Aunque comúnmente se acepta que la invariancia de norma no es afectada por la temperatura, se han hecho sugerencias basadas en cálculos perturbativos a nivel de uno y dos rizados [44, 45], de que dichas identidades no se satisfacen. Nosotros hemos demostrado que las identidades de Ward se satisfacen en forma general a todo orden y a cualquier temperatura [43]. También demostramos que las mismas predicen que la parte imaginaria de uno de los vértices retardados posee un singularidad cuando el momento de la línea fotónica externa tiende a cero. Adicionalmente, probamos que, para la parte

longitudinal, de las ocho componentes del vértice, sólo una es independiente.

Contrariamente a las sugerencias contenidas en las referencias [44, 45], en el capítulo 4 demostramos explícitamente que dichas identidades sí se satisfacen perturbativamente a nivel de uno y dos rizados. En dicho capítulo también estudiamos, a partir de la ecuación de movimiento encontrada en el capítulo 3, los modos de propagación para los fermiones y fotones en un plasma relativista a alta temperatura. Falta dar una respuesta precisa a diversas cuestiones acerca de las propiedades de las partículas en el medio: ¿Cuál es la forma en que interactúan los modos en un medio? ¿Cuál es el comportamiento dinámico de los modos en presencia de campos externos? Al respecto, hemos hecho un avance parcial en esta dirección al reducir de manera considerable la compleja estructura de Lorentz que el vértice posee. En efecto, las identidades de Ward permiten demostrar que la corriente electromagnética J_μ en el medio es una cantidad conservada, lo cual impone restricciones que reducen el número de factores de forma independientes que aparecen en J_μ . Aparte de ser importante por sí mismo, este resultado puede ayudar para demostrar en forma general la invariancia de norma en las relaciones de dispersión, no sólo en el régimen de alta temperatura y/o densidad, como han sido considerados en la literatura.

En el capítulo 5, dedujimos tanto la parte real como la parte imaginaria de las relaciones de dispersión para neutrinos que se propagan en un medio compuesto de electrones, protones, neutrones, neutrinos y sus respectivas antipartículas. Aunque la parte real de las relaciones de dispersión fueron previamente determinadas [59, 60, 61] a través de los métodos de la TCTF, nosotros la determinamos por otro procedimiento; haciendo un promedio térmico de la amplitud invariante de dispersión a ángulo cero. Demostramos, también, que ambos métodos dan resultados equivalentes. Si bien el cálculo que realizamos es a nivel de un rizo, creemos que puede ser generalizado a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. La parte imaginaria de las relaciones de dispersión fue determinada utilizando la técnica de la TCTF mediante un cálculo a dos rizados, ya que a un rizo la contribución es nula. Una de las suposiciones implícitas para que exista propagación de partículas en un medio, es que la parte real de las relaciones de dispersión sea mucho menor que la respectiva parte imaginaria. En el caso de los neutrinos, esta condición se cumple en materia normal, como el Sol. Sin embargo, en un medio con simetría CP, tal como el universo temprano, las contribuciones dominantes a la parte real (que son proporcionales a la diferencia de densidades de partícula-antipartícula) se anulan y las correcciones son del orden de G_F/M_W^2 . Bajo tales circunstancias, la parte imaginaria que es del or-

den de G_F^2 , es comparable a la parte real y es relevante para el estudio de fenómenos que ocurrieron durante el universo temprano. Este estudio está en desarrollo.

APÉNDICE A

Estados coherentes

En éste apéndice discutiremos algunos aspectos relacionados con los estados coherentes bosónicos y fermiónicos.

A.1 Estados coherentes bosónicos

En esta sección analizaremos algunas propiedades de los estados coherentes bosónicos.

Una base útil del espacio de Fock \mathfrak{F} , para los cálculos perturbativos de las funciones de Green a temperatura finita, es la de los estados coherentes [66], la cual es el análogo de la base de autoestados de posición en mecánica cuántica. Consideremos un sistema de partículas bosónicas idénticas.

Una representación usual del espacio de Fock es la dada por la representación del número de ocupación

$$|n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle, \quad (\text{A.1.1})$$

donde el anterior representa un estado normalizado y simetrizado con n_α partículas en el estado $|\alpha\rangle$, con α caracterizando los números cuánticos del estado de una partícula (por ejemplo: momento, espín, etc.). El estado (A.1.1) es estado propio del operador de número $\hat{N} = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$, donde sus valores propios denotan el número de ocupación del α -ésimo estado. Los operadores de creación \hat{a}_α^\dagger y aniquilación \hat{a}_α satisfacen el álgebra: $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$ y $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta] = [\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\beta^\dagger] = 0$. El estado (A.1.1) se puede obtener del estado del vacío $|0\rangle$ (definido como $\hat{a}_\alpha |0\rangle = 0$) a través de múltiples aplicaciones de los operadores de creación.

Los estados coherentes son autoestados del operador de aniquilación \hat{a}_α , es decir,

$$\hat{a}_\alpha | \chi \rangle = \chi_\alpha | \chi \rangle, \quad (\text{A.1.2})$$

donde los χ_α son números complejos arbitrarios y $| \chi \rangle \in \mathfrak{S}$. Un estado coherente $| \chi \rangle$ puede construirse de la siguiente manera a partir del estado del vacío:

$$| \chi \rangle = \exp \left\{ \sum_\alpha \chi_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \right\} | 0 \rangle. \quad (\text{A.1.3})$$

El producto escalar de dos estados coherentes está dado por

$$\langle \chi' | \chi \rangle = \exp \left\{ \sum_\alpha \chi'_\alpha \chi_\alpha \right\}. \quad (\text{A.1.4})$$

Si bien los estados coherentes no forman una base ortonormal, generan el espacio de Fock. En efecto, los estados $| \chi \rangle$ forman un conjunto completo en el espacio de Fock:

$$\int \prod_\alpha \frac{d\chi_\alpha^* d\chi_\alpha}{2\pi i} \exp \left\{ - \sum_\alpha \chi_\alpha^* \chi_\alpha \right\} | \chi \rangle \langle \chi | = 1. \quad (\text{A.1.5})$$

Usando las propiedades anteriores, podemos expresar la traza de un operador A sobre un conjunto completo de estados $| n \rangle$ en términos de la base de estados coherentes:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ A \} &= \sum_n \langle n | A | n \rangle \\ &= \int \prod_\alpha \frac{d\chi_\alpha^* d\chi_\alpha}{2\pi i} \exp \left\{ - \sum_\alpha \chi_\alpha^* \chi_\alpha \right\} \langle \chi | A | \chi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

Un estado cualquiera $| \phi \rangle$ del espacio de Fock puede ser representado en la base $| \chi \rangle$:

$$| \phi \rangle = \int \prod_\alpha \frac{d\chi_\alpha^* d\chi_\alpha}{2\pi i} \exp \left\{ - \sum_\alpha \chi_\alpha^* \chi_\alpha \right\} \phi[\chi^*] | \chi \rangle, \quad (\text{A.1.7})$$

donde $\phi[\chi^*] \equiv \langle \chi | \phi \rangle$ es una funcional de la variable χ^* . De la última igualdad podemos obtener una representación para la función delta de Dirac

en la base de los estados coherentes, ya que la funcional $\phi [x'^*] = \langle x' | \phi \rangle$ puede representarse en la base $|x\rangle$ como

$$\phi [x'^*] = \int \prod_{\alpha} \frac{d\chi_{\alpha}^* d\chi_{\alpha}}{2\pi i} \exp \left\{ - \sum_{\alpha} (\chi_{\alpha}^* - x'_{\alpha}^*) \chi_{\alpha} \right\} \phi [x^*], \quad (\text{A.1.8})$$

donde hemos usado las Ecs. (A.1.7) y (A.1.4). Identificamos a la función delta como

$$\delta [x^* - x'^*] = \int \prod_{\alpha} \frac{d\chi_{\alpha}}{2\pi i} \exp \left\{ - \sum_{\alpha} (\chi_{\alpha}^* - x'_{\alpha}^*) \chi_{\alpha} \right\}. \quad (\text{A.1.9})$$

Una de las propiedades de los estados coherentes que es de gran utilidad, es la forma tan simple que toman los elementos de matriz de operadores ordenados normalmente.¹ Si $\hat{A} (\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{a}_{\beta})$ representa un operador ordenado normalmente, entonces es inmediato obtener su acción sobre estados coherentes:

$$\langle x | \hat{A} (\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}, \hat{a}_{\alpha}) | x' \rangle = A (x_{\alpha}^*, x'_{\alpha}) \exp \left\{ \sum_{\alpha} x_{\alpha}^* x'_{\alpha} \right\}. \quad (\text{A.1.10})$$

A.2 Estados coherentes fermiónicos

La relación espín-estadística impone relaciones de conmutación en los campos bosónicos, mientras que en los campos fermiónicos impone relaciones de anticonmutación. Las álgebras de números que anticonmutan son las álgebras de Grassmann y por eso los números de Grassmann son adecuados para describir los campos fermiónicos

Un álgebra de Grassmann está definida por un conjunto de generadores $\{\eta_{\alpha}\}$, con $\alpha = 1, 2, \dots, n$, los cuales anticonmutan

$$\eta_{\alpha} \eta_{\beta} + \eta_{\beta} \eta_{\alpha} = 0. \quad (\text{A.2.11})$$

En particular

$$\eta_{\alpha}^2 = 0. \quad (\text{A.2.12})$$

A cada generador η_{α} se le puede asociar otro generador η_{α}^* y con ello formar una base de $2n$ generadores. Esto se logra a través de la operación de

¹Esto es, en un producto de operadores, todos los operadores de creación se encuentran a la izquierda de los operadores de aniquilación.

conjugación

$$\begin{aligned}
 (\eta_\alpha)^* &= \eta_\alpha^*, \\
 (\eta_\alpha^*)^* &= \eta_\alpha, \\
 (\lambda \eta_\alpha)^* &= \lambda^* \eta_\alpha^*, \\
 (\eta_\alpha \eta_\beta)^* &= \eta_\beta^* \eta_\alpha^*,
 \end{aligned} \tag{A.2.13}$$

donde λ es un número complejo.

El desarrollo en serie de Taylor de una función de números de Grassmann sólo tiene un número finito de términos. Por ejemplo, para fijar ideas, consideremos una función analítica de una variable de Grassmann $f(\eta)$, entonces su desarrollo es

$$f(\eta) = a + b\eta, \tag{A.2.14}$$

donde a y b son números complejos. Todos los otros términos son cero en virtud de la Ec. (A.2.12).

Sea una función A que dependa de las variables η y η^* . Esta función tiene la forma

$$A(\eta^*, \eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^* + a_3\eta^*\eta. \tag{A.2.15}$$

Las nociones de derivada e integración se pueden extender a esta clase de números. La derivada se define de manera similar al caso de variable compleja, con la salvedad de que, para que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ actúe sobre η , deben encontrarse adyacentes. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta^*\eta) &= -\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta\eta^*) = -\eta^*, \\
 \frac{\partial}{\partial \eta^*}(\eta^*\eta) &= \eta, \\
 \frac{\partial}{\partial \eta}(a) &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.2.16}$$

con a complejo. El orden de derivación es importante, por ejemplo, para la función A en (A.2.15) tendremos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta}A(\eta^*, \eta) &= a_1 - a_3\eta^*, \\
 \frac{\partial}{\partial \eta^*}A(\eta^*, \eta) &= a_2 + a_3\eta, \\
 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta^*}A(\eta^*, \eta) &= -\frac{\partial}{\partial \eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta}A(\eta^*, \eta) = a_3.
 \end{aligned} \tag{A.2.17}$$

De igual forma podemos introducir la noción de integración para números de Grassmann:

$$\begin{aligned}\int d\eta 1 &= \int d\eta^* 1 = 0, \\ \int d\eta \eta &= \int d\eta^* \eta^* = 1,\end{aligned}\quad (\text{A.2.18})$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\int d\eta A(\eta^*, \eta) &= a_1 - a_3 \eta^* = \frac{\partial}{\partial \eta} A, \\ \int d\eta^* A(\eta^*, \eta) &= a_2 + a_3 \eta = \frac{\partial}{\partial \eta^*} A, \\ \int d\eta d\eta^* A(\eta^*, \eta) &= - \int d\eta^* d\eta A(\eta^*, \eta) = a_3.\end{aligned}\quad (\text{A.2.19})$$

Sea $f(\eta) = a + b\eta$, entonces

$$\int d\eta'(\eta' - \eta)f(\eta) = f(\eta). \quad (\text{A.2.20})$$

A partir de lo cual podemos definir la función delta de Dirac para números de Grassmann:

$$\begin{aligned}\delta(\eta, \eta') &= -(\eta - \eta') \\ &= \int d\eta'' (1 - \eta''(\eta - \eta')) \\ &= \int d\eta'' e^{-\eta''(\eta - \eta')}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.21})$$

El producto escalar de dos funciones está dado por

$$\langle f | g \rangle = \int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} f^*(\eta) g(\eta^*). \quad (\text{A.2.22})$$

Se puede verificar a partir de: $f = f_0 + f_1 \eta$ y $g = g_0 + g_1 \eta$, que se satisface la igualdad

$$\langle f | g \rangle = f_0^* g_0 + f_1^* g_1. \quad (\text{A.2.23})$$

En particular, para $f = g$, el producto escalar es positivo. Con esto hemos demostrado que las funciones de Grassmann tienen la estructura de un espacio de Hilbert.

Para encontrar una representación de la funcional generatriz de las funciones de Green térmicas para los campos fermiónicos en la base de los

estados coherentes, en primer lugar asociamos un generador del álgebra de Grassmann η_α al operador fermiónico de aniquilación \hat{a}_α y el asociado conjugado η_α^* al operador de creación \hat{a}_α^\dagger . Además es necesario que se satisfagan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \{\bar{\eta}, \bar{a}\} &= 0 \\ (\bar{\eta} \bar{a})^\dagger &= \bar{a}^\dagger \bar{\eta}^* , \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

donde los corchetes indican que se trata de anticonmutadores y la barra en \bar{a} significa que puede tratarse tanto del operador de creación como del de aniquilación, mientras que en $\bar{\eta}$ indica que puede ser un generador de Grassmann o su asociado complejo. En segundo lugar, es necesario definir un espacio de Fock para fermiones \mathfrak{F}_F , el cual es una combinación lineal de espacios de Fock \mathfrak{F} y cuyos coeficientes son números de Grassmann. Así, si un estado $|\psi\rangle \in \mathfrak{F}_F$, entonces este puede ser representado en la base \mathfrak{F}

$$|\psi\rangle = \sum_\alpha \eta_\alpha |\chi_\alpha\rangle , \quad (\text{A.2.25})$$

donde $|\chi_\alpha\rangle \in \mathfrak{F}$. Con esto es posible definir los estados coherentes fermiónicos $|\eta\rangle$, análogos a los estados coherentes bosónicos:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= e^{-\sum_\alpha \eta_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger} |0\rangle \\ &= \prod_\alpha (1 - \eta_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger) |0\rangle , \end{aligned} \quad (\text{A.2.26})$$

donde α representa los números cuánticos del sistema de una partícula y la última igualdad en (A.2.26) se sigue en virtud de que $\eta_\alpha^2 = (\hat{a}_\alpha^\dagger)^2 = 0$. Con esto, es fácil convencerse de que el estado $|\eta\rangle$ es un estado propio del operador de aniquilación, esto es

$$a_\alpha |\eta\rangle = \eta_\alpha |\eta\rangle . \quad (\text{A.2.27})$$

de igual forma se tiene

$$\langle \eta | a_\alpha^\dagger = \langle \eta | \eta_\alpha^* . \quad (\text{A.2.28})$$

El producto escalar entre dos estados coherentes es

$$\begin{aligned} \langle \eta | \eta' \rangle &= \langle 0 | \prod_\alpha (1 - \eta_\alpha^* \hat{a}_\alpha) (1 - \eta'_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger) | 0 \rangle \\ &= e^{\sum_\alpha \eta_\alpha^* \eta'_\alpha} . \end{aligned} \quad (\text{A.2.29})$$

y la relación de completéz está dada por

$$\int \prod_{\alpha} d\eta_{\alpha}^* d\eta_{\alpha} e^{-\sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^* \eta_{\alpha}} |\eta\rangle \langle \eta^*| = 1. \quad (\text{A.2.30})$$

La traza sobre un operador A en la base de estados coherentes se puede calcular en términos a los resultados anteriores y está dada como

$$\text{Tr}\{A\} = \int \prod_{\alpha} d\eta_{\alpha}^* d\eta_{\alpha} e^{-\sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^* \eta_{\alpha}} \langle -\eta | A | \eta \rangle. \quad (\text{A.2.31})$$

donde el signo menos en el bra es debido a las relaciones de anticonmutación. También podemos derivar una expresión análoga a (A.1.8):

$$|\psi\rangle = \int \prod_{\alpha} d\eta_{\alpha}^* d\eta_{\alpha} e^{-\sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^* \eta_{\alpha}} \psi(\eta^*) |\eta\rangle, \quad (\text{A.2.32})$$

donde $|\psi\rangle \in \mathfrak{S}_F$ y $\langle \eta | \psi \rangle \equiv \psi[\eta^*]$. La ventaja de utilizar estados coherentes es que el elemento de matriz de un operador A , que es función los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger ordenados normalmente, está dado simplemente por

$$\langle \eta | A(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) | \eta' \rangle = e^{\sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^* \eta'_{\alpha}} A(\eta_{\alpha}^*, \eta'_{\alpha}), \quad (\text{A.2.33})$$

de igual forma, la relaciones

$$\begin{aligned} e^{\rho \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}} |\eta\rangle &= |e^{\rho} \eta\rangle, \\ \langle \eta | e^{\rho \sum_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}} &= \langle e^{\rho} \eta |, \end{aligned} \quad (\text{A.2.34})$$

se satisfacen, con ρ un número real.

APÉNDICE B

Propagador del fotón

B.1

En este apéndice, a partir del lagrangiano de Stueckelberg [71], derivaremos el propagador para un campo vectorial masivo a temperatura finita. El formalismo que utilizaremos es el formalismo canónico de la TCTF [7]. Para ello emplearemos el método de cuantización de Gupta-Bleuler. Este enfoque, que no ha sido presentado en la literatura, elucidada el contenido físico y las suposiciones que están atrás de las fórmulas covariantes del propagador del fotón.

Nuestro punto de partida es el lagrangiano de Stueckelberg:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{\xi}{2}(\partial \cdot A)^2. \quad (\text{B.1.1})$$

para $\xi \neq 0$, este lagrangiano admite el límite correcto de masa cero, en el cual estamos interesados. La ecuación clásica de movimiento es

$$(\square^2 + m^2)A^\mu - (1 - \xi)\partial^\mu \partial \cdot A = 0, \quad (\text{B.1.2})$$

tomando la divergencia de esta ecuación obtenemos

$$\xi \left(\square^2 + \frac{m^2}{\xi} \right) \partial \cdot A = 0. \quad (\text{B.1.3})$$

De aquí que, para ξ distinto de cero, $\partial \cdot A$ es un campo escalar que satisface la ecuación de Klein-Gordon con masa $M^2 = m^2/\xi$. Como consecuencia de la Ec. (B.1.3), el campo A_μ se desdobra en dos partes

$$A_\mu = A_\mu^T - \frac{\xi}{m^2} \partial_\mu (\partial \cdot A), \quad (\text{B.1.4})$$

donde A_μ^T es un campo vectorial de espín uno y divergencia cero que satisface la ecuación de Klein-Gordon con masa m . Tomando en cuenta el hecho de que las masas de las componentes de espín uno y espín cero del campo A_μ son diferentes; su desarrollo en ondas planas es

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=1}^3 [a_{k\lambda} \epsilon_\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + h.c.] \\ + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\bar{\omega}_k} \frac{k_\mu}{m} [a_{k0} e^{-ik \cdot x} + h.c.], \quad (\text{B.1.5})$$

donde ω_k y $\bar{\omega}_k$ están dados por

$$\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ \bar{\omega}_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}, \quad (\text{B.1.6})$$

y los tres vectores espacialoides ortonormales $\epsilon_\mu(k, \lambda)$ son simultáneamente ortogonales a k_μ y satisfacen las relaciones

$$\epsilon(k, \lambda) \cdot \epsilon(k, \lambda') = -\delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\nu(k, \lambda) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right). \quad (\text{B.1.7})$$

Dentro de este enfoque, la teoría se cuantiza imponiendo reglas de conmutación de métrica indefinida:

$$[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a_{k0}, a_{k'0}^\dagger] = -(2\pi)^3 2\omega_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (\text{B.1.8})$$

con todos los otros conmutadores igual a cero.

Los elementos de la matriz del propagador se determinan sustituyendo el desarrollo en ondas planas de la Ec. (B.1.5) en el siguiente conjunto de relaciones

$$iD_{\mu\nu}^{11}(x-y) = \langle T(A_\mu(x)A_\nu(y)) \rangle, \\ iD_{\mu\nu}^{22}(x-y) = \langle \bar{T}(A_\mu(x)A_\nu(y)) \rangle, \\ iD_{\mu\nu}^{12}(x-y) = \langle A_\nu(y)A_\mu(x) \rangle, \\ iD_{\mu\nu}^{21}(x-y) = \langle A_\mu(x)A_\nu(y) \rangle, \quad (\text{B.1.9})$$

donde los corchetes angulares denotan el promedio térmico sobre los estados del sistema y los símbolos T y \bar{T} indican ordenamiento cronológico y anti-cronológico, respectivamente. Los promedios estadísticos de los productos de los operadores de creación y aniquilación están dados por:

$$\begin{aligned}
 \langle a_{k\lambda} a_{k'\lambda'}^\dagger \rangle &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (n_k + 1), \\
 \langle a_{k\lambda}^\dagger a_{k'\lambda'} \rangle &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n_k, \\
 \langle a_{k0} a_{k'0}^\dagger \rangle &= - (2\pi)^3 2\bar{\omega}_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\bar{n}_k + 1), \\
 \langle a_{k0}^\dagger a_{k'0} \rangle &= - (2\pi)^3 2\bar{\omega}_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \bar{n}_k,
 \end{aligned} \tag{B.1.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
 n_k &= \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}, \\
 \bar{n}_k &= \frac{1}{e^{\beta\bar{\omega}_k} - 1},
 \end{aligned} \tag{B.1.11}$$

con β el inverso de la temperatura. Usando las expresiones anteriores, un cálculo directo da el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}^{11}(k) &= \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \right] \\
 &\quad - 2\pi i \eta_\gamma(k) \mathcal{O}_{\mu\nu}, \\
 D_{\mu\nu}^{21}(k) &= -2\pi i \mathcal{O}_{\mu\nu} [\eta_\gamma(k) + \theta(k \cdot u)], \\
 D_{\mu\nu}^{12}(k) &= -2\pi i \mathcal{O}_{\mu\nu} [\eta_\gamma(k) + \theta(-k \cdot u)], \\
 D_{\mu\nu}^{22}(k) &= -D_{\mu\nu 11}^*(k),
 \end{aligned} \tag{B.1.12}$$

donde

$$\mathcal{O}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta(k^2 - m^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} [\delta(k^2 - m^2) - \delta(k^2 - M^2)], \tag{B.1.13}$$

θ es la función escalón y η_γ está definida por

$$\begin{aligned}
 \eta_\gamma(k) &\equiv \theta(k \cdot u) n_B(x) + \theta(-k \cdot u) n_B(-x) \\
 &= \frac{1}{e^{\beta|k \cdot u|} - 1},
 \end{aligned} \tag{B.1.14}$$

y

$$n_B(x) = \frac{1}{e^x - 1}. \tag{B.1.15}$$

es la distribución bosónica escrita en términos de la variable

$$x = \beta k \cdot u. \quad (\text{B.1.16})$$

La expresión covariante para el propagador del fotón, tomando en cuenta el límite de masa cero en la Ec. (B.1.12), es la siguiente

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{11}(k) &= A_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{k^2 + i\epsilon} - 2\pi i \eta_\gamma(k) \delta(k^2) \right\}, \\ D_{\mu\nu}^{21}(k) &= -2\pi i A_{\mu\nu} [\eta_\gamma(k) + \theta(k \cdot u)] \delta(k^2), \\ D_{\mu\nu}^{12}(k) &= -2\pi i A_{\mu\nu} [\eta_\gamma(k) + \theta(-k \cdot u)] \delta(k^2), \\ D_{\mu\nu}^{22}(k) &= -D_{\mu\nu}^{11*}(k), \end{aligned} \quad (\text{B.1.17})$$

donde

$$A_{\mu\nu} = - \left[g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k_\mu k_\nu \frac{\partial}{\partial k^2} \right]. \quad (\text{B.1.18})$$

Las fórmulas anteriores, para el propagador del fotón, coinciden con la que se obtienen por el método de integrales de camino [72] expuesto en el segundo capítulo de esta tesis. La derivación que presentamos (ver en particular la Ec. (B.1.10)) exhibe en una forma transparente el hecho de que los grados de libertad no físicos también se termalizan, a diferencia de otros enfoques [73, 74, 42], en donde sólo los grados de libertad físicos son termalizados.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Matsubara, *Progr. Theoret. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [2] N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, *Phys. Rep.* **145**, 141 (1987).
- [3] A. J. Niemi and G.W. Semenoff, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, 105 (1984); *Nucl. Phys.* **B230**, 181 (1984).
- [4] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collec. Phen.* **2**, 55 (1975).
- [5] H. Matsumoto, I. Ojima, and H. Umezawa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, 348 (1984).
- [6] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [7] J. F. Nieves, *Phys. Rev.* **D42**, 4123 (1990).
- [8] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380 (1960).
- [9] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 154 (1961).
- [10] P. W. Higgs, *Phys. Rev.* **145**, 1156 (1966).
- [11] T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155**, 1554 (1967).
- [12] D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *Phys. Lett.* **B42**, 471 (1972).
- [13] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D9**, 3357 (1974).
- [14] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9**, 3390 (1974).
- [15] Para una lista de referencias ver: R. G. Leigh, *Proc. 26th Int. Conf. on High Energy Physics* (Dallas 1992).

- [16] M. Klein and M. Torres, *Phys. Lett.* **B347**, 361 (1995).
- [17] G. Baym, *Nucl. Phys.* **A590**, 233c (1995).
- [18] J. C. Perry and M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1353 (1975).
- [19] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, *Sov. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985).
- [20] L. Wolfenstein, *Phys. Rev.* **D17**, 2369 (1979), *ibid.* **D42**, 2634 (1979).
- [21] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, (Cambridge, England, 1989).
- [22] E. Braaten, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1655 (1991).
- [23] K. Kajantie and J. Kapusta, *Ann. Phys. (N.Y.)* **160**, 477 (1985).
- [24] O. K. Kalashnikov and V. V. Klimov, *Yad. Fiz.* **33**, 848 (1981); *Sov. J. Nucl. Phys.* **33**, 443 (1981).
- [25] M. Kreuzer, A. Rebhan, and H. Schulz, *Phys. Lett.* **B244**, 58 (1990).
- [26] E. Braaten R. D. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1378 (1990); *Nucl. Phys.* **B337**, 569 (1990); *ibid.* **339**, 310 (1990); R.D. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1129 (1989).
- [27] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics; a Set of Lectures* (Benjamin, Reading, Mass. 1972).
- [28] R. Mills, *Propagator for Many-Particle Systems*, (Gordon & Breach, New York, (1964).
- [29] P. C. Martin and J. Schwinger *Phys. Rev.* **D115**, 1342 (1959).
- [30] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan* **12**, 570 (1957).
- [31] L. P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, (Benjamin, Reading, Mass. 1976).
- [32] T. S. Evans, *Phys. Lett.* **B249**, 286 (1990).
- [33] R. Kobes, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1384 (1991).
- [34] R. Kobes, *Phys. Rev.* **D42**, 362 (1990).
- [35] L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965).

- [36] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, (Cambridge University Press 1988), Chapter 52.
- [37] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York, 1965), Chapter 11.
- [38] G. W. Semenoff and H. Umezawa, Nucl. Phys. **B220**, 196 (1983)
- [39] R. Kobes, Phys. Rev. **D42**, 362 (1990).
- [40] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (Mc Graw-Hill, 1971).
- [41] D. Pines and P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids*, (Benjamin, N. Y. 1966)
- [42] J. C. D'Olivo, J. F. Nieves, M. Torres and E. Tútuti, "QED at Finite Temperature in the Coulomb Gauge", University of Puerto Rico preprint LTP-036-UPR, November 1993.
- [43] J. C. D'Olivo, M. Torres, and E. Tútuti, Phys. Rev. **D55**, 3859 (1997).
- [44] Y. Fujimoto and K. Shigemoto, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 3259 (1985)
- [45] T. Kaneko, Phys. Rev. **D52**, 1926 (1995).
- [46] Michio Kaku, *Quantum Field Theory*, (Oxford University Press 1993) Chapter 7.
- [47] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D44**, 3955 (1991).
- [48] J. C. D'Olivo, M. Torres, and E. Tútuti, "Ward Identities at Finite Temperature", en *Workshops on Particles and Fields and Phenomenology of Fundamental Interactions*, Juan Carlos D'Olivo, Arturo Fernández, and Miguel A. Pérez, Eds. (AIP Conference Proceedings 359), p. 471.
- [49] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D26**, 2789 (1982); *ibid.* **40**, 2410 (1989).
- [50] V. V. Klimov, Yad. Fiz. **33**, 1734 (1981) [Sov. Nucl. Phys. **33**, 934 (1981)].
- [51] R. D. Pisarski, Nucl. Phys. **A498**, 993c (1989).
- [52] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D26**, 1394 (1982).

- [53] S. Coleman and B. Hill, *Phys. Lett.* **B159**, 184 (1989).
- [54] P. S. Gribosky and B. R. Holstein, *Zeits. Phys.* **C47**, 205 (1990).
- [55] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Phys. Rev.* **D51**, 5300 (1995)
- [56] P. Arnold, S. Vokos, P. Bedaque, and A. Das, *Phys. Rev.* **D47**, 4698 (1993)
- [57] A. Das and M. Hott, *Mod. Phys. Lett.* **A1**, 3386 (1994).
- [58] J. C. D'Olivo and José F. Nieves *Phys. Rev.* **D52**, 2987 (1995).
- [59] J. C. D'Olivo, J. Nieves and M. Torres, *Phys. Rev.* **D46**, 1172 (1992).
- [60] D. Nötzold and G. Raffelt, *Nucl. Phys.* **B307**, 924 (1988).
- [61] K. Enqvist, K. Kainulainen and J. Maalampi, *Nucl. Phys.* **B349**, 754 (1991).
- [62] E. Tútuti, J. C. D'Olivo and M. Torres "Thermal Corrections to the Effective Potential of Massless Neutrinos", en *Proceedings at the 1993 Workshop on Particles and Fields*, R. Huerta, M. A. Pérez and L. F. Urrutia, Eds. (World Scientific, Singapore, 1994), p. 316.
- [63] P. Langacker and J. Liu, *Phys. Rev.* **D26**, 4140 (1990).
- [64] R. Kobes and G. Semenoff, *Nucl. Phys.* **B260**, 714 (1985).
- [65] H. A. Weldon *Phys. Rev.* **D28**, 2007 (1983).
- [66] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, (Addison-Wesley, 1988, *Frontiers in Physics Series*), Chapter 1.
- [67] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, 1980).
- [68] R. L. Kobes, G. W. Semenoff and N. Weiss, *Zeits. Phys.* **C29**, 371 (1985)
- [69] P. V. Landshoff and A. Rebhan, "Covariant gauges at finite temperature". preprint CERN-TH.6491/92, ENSLAPP-A-383/92; "Thermalisation of longitudinal gluons". preprint DAMTP 93-06, TUV-93-03.

- [70] J. C. D'Olivo and J. F. Nieves, "Coulomb and Covariant Gauges in Finite Temperature QED", University of Puerto Rico preprint LTP-043-UPR, September 1993.
- [71] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, 1980).
- [72] R. L. Kobes, G. W. Semenoff and N. Weiss, *Zeits. Phys.* **C29**, 371 (1985)
- [73] P. V. Landshoff and A. Rebhan, "Covariant gauges at finite temperature", preprint CERN-TH.6401/92, ENSLAPP-A-383/92; "Thermalisation of longitudinal gluons", preprint DAMTP 93-06, TUW-93-03.
- [74] J. C. D'Olivo and J. F. Nieves, "Coulomb and Covariant Gauges in Finite Temperature QED", University of Puerto Rico preprint LTP-043-UPR, September 1993.