

30
28/



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VISUALIZACION Y
MANIPULACION DE LK.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
O C T A V I O P A E Z O S U N A



DIRECTOR DE TESIS: DR. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI

SECRETARIA DE ESTUDIOS

1997

FACULTAD DE CIENCIAS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Banlie
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

VISUALIZACIÓN Y MANIPULACIÓN DE LK_6

realizado por OCTAVIO PAEZ OSUNA

con número de cuenta 9150808-3 , presente de la carrera de MATEMÁTICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Rodolfo San Agustín Chf

Propietario

Dr. Emilio Lluís Riera

Propietario

Dr. Adalberto García Méynez

Suplente

Dra. Laura Hidalgo Solís

Suplente

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Rodolfo San Agustín
Emilio Lluís Riera
Adalberto García Méynez
Laura Hidalgo Solís
Laura Pastrana R.



M. en C. Manuel F. V. Magaña

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Contenido

Introducción.....	2
1. UNA INTRODUCCIÓN A LAS CONFIGURACIONES PROYECTIVAS PLANAS Y AL HEXAGRAMA MÍSTICO.	3
1.1 ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO PROYECTIVO. CERRADOS ALGEBRAICOS.	3
1.1.1 <i>El espacio proyectivo P^2</i>	3
1.1.2 <i>Colineaciones y correlaciones de P^2</i>	9
1.1.3 <i>Varietades algebraicas. Hipersuperficies.</i>	16
1.1.4 <i>Conos.</i>	18
1.1.5 <i>La ecuación de una superficie cúbica genérica referida a un pentaedro.</i>	19
1.2 CONFIGURACIONES PROYECTIVAS PLANAS.	25
1.3 CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO.	30
1.4 EL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE VERONESE	53
2. UNA CONSTRUCCIÓN ALGORÍTMICA DEL HEXAGRAMA MÍSTICO.....	58
2.1 CONSTRUCCIÓN DE UNA COMPONENTE ARGUESIANA DADA UNA DE SUS RECTAS.	58
2.2 GENERANDO LAS SEIS COMPONENTES.	59
3. RELACIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO CON LK_6.	60
3.1 AUTOMORFISMOS EXTERIORES DE S_6 . TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE K_6	62
3.2 REPRESENTACIONES DE HM EN K_6 Y EN LK_6	65
3.3 VISUALIZACIÓN Y MANIPULACIÓN DE LK_6	74
3.3.1 <i>IMPLEMENTACIÓN</i>	78
3.3.2 <i>OBSERVACIONES</i>	81
3.3.3 <i>RELACIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO CON LK_6</i>	82
4. PARAMETRIZACIÓN DE HM.....	82
4.1 SISTEMAS DE STEINER Y DISEÑOS COMBINATORIOS	82
4.2 LA CONFIGURACIÓN DE DESARGUES.....	84
4.3 HM COMO UN SISTEMA DE STEINER.....	85
4.4 UNA PARAMETRIZACIÓN DE HM.....	85
Apéndice: Implementaciones.....	87
Bibliografía.....	104

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es el desarrollar un programa de computadora para la visualización y manipulación de la gráfica de líneas de la gráfica completa en seis vértices (LK_6) en su relación al hexagrama místico de Pascal (HM).

En la primera parte expondremos la construcción en el espacio del hexagrama dada por L. Cremona. Conservaremos su notación, ya que esta nos facilitará el conteo de los elementos del hexagrama, así como la implementación del programa.

En la segunda parte trataremos de dar una construcción algorítmica del caso plano, y se implementa en un programa de computadora que dibuja las sesenta rectas de Pascal y las colorea de acuerdo al teorema de descomposición de Veronese.

La tercera parte trata de la relación del hexagrama con LK_6 y se da el modelo de la gráfica a implementar.

En la última parte se da una descripción del hexagrama en términos de un triple sistema de Steiner. Se justifica combinatoriamente la parametrización de los diferentes elementos del hexagrama.

Este trabajo esta basado en la tesis doctoral del profesor Rodolfo San Agustín Chi (ver [2]), y en el artículo de L. Cremona (ver [1]).

1. UNA INTRODUCCIÓN A LAS CONFIGURACIONES PROYECTIVAS PLANAS Y AL HEXAGRAMA MÍSTICO.

1.1 ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO PROYECTIVO. CERRADOS ALGEBRAICOS.

1.1.1 El espacio proyectivo P^r

Comenzaremos por dar algunas propiedades del espacio proyectivo de cualquier dimensión.

La entidad básica del espacio proyectivo es el vector de coordenadas homogéneas (x_0, \dots, x_r) , definido como un conjunto ordenado de $r+1$ números pertenecientes a un campo, no todos cero, y cuyas razones son lo que realmente interesa.

Cada uno de estos puntos pertenece a una y sólo una clase de coordenadas; y los diferentes representantes de cada clase se relacionan unos a otros por el grupo de transformaciones lineales homogéneas no singulares de la forma siguiente:

$$py_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r \quad (i=0, \dots, r),$$

donde p es un factor de proporcionalidad y $|a_{ij}| \neq 0$.

Se sigue pues, que cualquier representación de coordenadas queda completamente determinada por :

- i) el simplejo fundamental, y
 ii) su punto unitario.

siendo los $r+1$ puntos constituyentes A_0, \dots, A_r , los cuales tendrán por coordenadas $(1,0,0, \dots, 0)$, $(0,1,0, \dots, 0)$, \dots , $(0,0,0, \dots, 1)$, y el último punto sería U cuyas coordenadas son $(1,1,1, \dots, 1)$.

1.1.1.1 Espacios lineales

El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una simple ecuación lineal

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_rx_r = 0 \quad (1)$$

lo llamaremos hiperplano¹. Lo denotaremos por S_{r-1} o por $[r-1]$; y llamaremos a a_0, a_1, \dots, a_r las coordenadas del hiperplano. Aquí vemos que para toda transformación lineal homogénea de un punto x_i , existe una transformación lineal homogénea asociada de un hiperplano a_i . Esto quiere decir que con el espacio r -dimensional de puntos existe un espacio proyectivo r -dimensional de hiperplanos; e intercambiando punto por hiperplano tenemos el principio de dualidad para P^r .

Teorema 1. Existe un único hiperplano conteniendo r puntos en posición general.

Demostración.

¹ En la literatura clásica en inglés se le llama *prime*.

Demostración.

Si al hiperplano (1) se le hace pasar por $r-1$ puntos en posición general sus coeficientes estarán sujetos a $r-1$ condiciones linealmente independientes. Entonces deberíamos escribir a (1) en la forma $A+\lambda B=0$, donde A y B son formas lineales fijas y λ es un parámetro arbitrario, y los hiperplanos $A=0$ y $B=0$ pasan por los puntos dados. El secundum buscado es la base de tal haz.

■

Definición. A la totalidad de puntos comunes a $r-k$ hiperplanos linealmente independientes ($0 \leq k < r$) le llamaremos espacio k -dimensional S_k o simplemente $[k]$.

Un caso análogo al teorema III sería

Teorema IV. Existe un único S_k que contiene a $k+1$ puntos en posición general. ■

Como casos particulares tenemos:

Un espacio [1], llamado recta, está determinado únicamente por dos puntos dados.

Un espacio [2], llamado plano queda determinado de manera única por tres puntos no colineales.

Teorema V. Si un hiperplano contiene a $k+1$ puntos en posición general de un $[k]$, entonces coincide con $[k]$.

Demostración.

Los $k+1$ puntos imponen $k-1$ condiciones independientes al hiperplano que los contiene, y la ecuación de tal hiperplano se puede reducir entonces a la forma

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_{r-k} A_{r-k} = 0,$$

donde las ecuaciones $A_i=0$ ($i=1, \dots, r-k$) representan $r-k$ hiperplanos en posición general, que contienen a los puntos dados. Desde que estos se intersectan en el único $[k]$ definido por los puntos dados, todo hiperplano por esos puntos debe contener el mismo $[k]$. ■

Corolario. Cualquier $[h]$ que contenga $k+1$ puntos en posición general en $[k]$ ($h>k$) contiene a todo $[k]$.

Demostración.

El espacio $[h]$ es común a $r-h$ hiperplanos, cada uno de los cuales contiene a $k+1$ puntos en posición general de $[k]$. ■

1.1.1.2 Intersecciones (meet) y uniones (join) de espacios

Dados dos o más espacios, quisiéramos conocer el espacio de mayor dimensión común a ellos, es decir la *intersección* de estos espacios (*meet*). O quisiéramos encontrar el espacio de dimensión mínima que los contiene, llamado *join*.

Teorema VI. Dos espacios $[h]$ y $[k]$ en posición general se intersectan en un espacio $[h+k-r]$ ($h+k \geq r$).

Demostración.

Esto se sigue de la definición de los espacios involucrados:

Por $[h]$ y $[k]$ pasan respectivamente $r-h$ y $r-k$ hiperplanos linealmente independientes. El conjunto completo de esos $2r-h-k$ hiperplanos linealmente

independientes, tienen en común un espacio $[h+k-r]$, siempre y cuando $h+k-r \geq 0$. ■

Corolario. Un espacio $[k]$ y un espacio $[r-k]$ se intersectan en general en un punto. ■

Corolario. En general, dados n espacios $[k_1], [k_2], \dots, [k_n]$ se intersectarán en un espacio $[k_1+k_2+\dots+k_n-(n-1)r]$ ($\sum_{i=1}^n k_i \geq (n-1)r$).

Demostración.

Esto último se obtiene aplicando el teorema V $n-1$ veces. ■

En lo concerniente al join de dos espacios, tenemos:

Teorema VII. Dos espacios $[h]$ y $[k]$ ($h+k \leq r-2$) están en general en un espacio $[h+k+1]$.

Demostración.

Si tomamos $h+1$ puntos en posición general en $[h]$ y $k+1$ puntos en $[k]$, con la misma propiedad, podremos generar con ellos un espacio $[h+k+1]$ único, siempre y cuando $h+k+1 \leq r-1$; y, por el teorema V, este espacio contendrá completamente a ambos espacios. ■

Corolario. Si los espacios tienen un espacio $[s]$ en común, entonces estos están contenidos en un espacio $[h+k-s]$ ³.

Es decir $\dim \langle A, B \rangle = \dim A + \dim B - \dim A \cap B - 1$.

Demostración.

³ A este espacio se le denomina el *espacio base* del conjunto de hiperplanos considerados.

Tomemos $s+1$ puntos de los $h+1$ puntos que están en $[s]$; entonces sería suficiente tomar otros $k-s$ puntos en $[k]$ para definir un espacio $[h+k-s]$ el cual contendrá a $[h]$ y a $[k]$. ■

Observemos que la totalidad de espacios $[k]$ de un $[s]$ forman una lattice geométrica, ya que los espacios $[1]$ los llamamos puntos, a los $[2]$ rectas, a los $[3]$ planos, etc. es decir, los espacios $[k]$ de un $[s]$ están en correspondencia con los elementos de nuestra geometría.

1.1.2 Colineaciones y correlaciones de P^n

Introduciremos el concepto de transformación lineal en el espacio proyectivo, ese es un tema de suma importancia en el estudio de la geometría proyectiva. Expresaremos el álgebra de tales transformaciones en notación matricial.

Por ejemplo el punto de coordenadas (x_0, x_1, \dots, x_r) será representado por la matriz columna

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

y el hiperplano cuya ecuación es

$$l_0 x_0 + l_1 x_1 + \dots + l_r x_r = 0 \quad (1)$$

será representado por la matriz renglón

$$I = (l_0, l_1, \dots, l_r).$$

De tal forma que la ecuación del hiperplano se puede escribir entonces como sigue:

$$Ix = 0 \quad (2)$$

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de $r+1 \times r+1$, entonces Ax es la matriz columna, cuyas entradas son las $r+1$ formas lineales

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (i=0, \dots, r)$$

en x . Un producto escalar $x'Ax'$ es una forma bilineal

$$\sum_{r+1} a_{rs} x_r x_s,$$

en las entradas de x y x' , y $x'Ax$ es la forma cuadrática

$$\sum_{r+1} a_{rs} x_r x_s.$$

Definición. Si x y y representan puntos de dos espacios r -dimensionales Σ y Σ' , y si A es cualquier matriz cuadrada no singular de orden $r+1$, entonces a la transformación lineal definida por la ecuación

$$y = Ax \quad (3)$$

la llamaremos colineación de Σ en Σ' .

A cualquier punto x de Σ le corresponde un único punto y de Σ' ; e inversamente, ya que A es no singular, podemos escribir

$$x = A^{-1}y, \quad (4)$$

lo que muestra que la inversa de una colineación es una colineación.

Si el punto x describe a el hiperplano l cuya ecuación es (2), entonces, por (4), el punto correspondiente y de Σ' describe a el hiperplano m cuya ecuación es $lA^{-1}y=0$: de esta manera la correspondencia entre m y l de Σ y Σ' esta dada por la ecuación:

$$m = lA^{-1} \text{ (o } m^i = (A^{-1})^i l^i); \quad (6)$$

e inversamente,

$$l = mA \text{ (o } l^i = A^i m^i). \quad (7)$$

De aquí que una colineación entre dos espacios proyectivos puede ser pensada como una transformación lineal de hiperplanos en hiperplanos.

De hecho, si l pasa por el punto fijo x de Σ , entonces

$$0 = lx = mAx = my,$$

de esta forma m pasa por el punto correspondiente y de Σ' ; y viceversa.

1.1.2.1 Productos de colineaciones.

Si suponemos que los espacios Σ' y Σ son el mismo, obtendremos una colineación de Σ en sí mismo. La transformación $T(x) = Ax$ llevara el punto x en algún otro punto y , y la transformación iterada, representada por

$$z = T(y) = T^2(x), \quad (8)$$

llevará el punto y en otro punto z . En general z será diferente de x e y .

Sin embargo es posible que, para alguna transformación T , z siempre coincida con x ; a tales transformaciones les llamaremos *involuciones*.

Teorema VIII. El producto finito de colineaciones es una colineación.

Demostración.

Esto se sigue del hecho de que si $y = Ax$ y $z = By$, entonces $z = BAx$, y la matriz cuadrada BA teniendo por determinante $|B||A|$. ■

1.1.2.2 Correlaciones.

Con la notación anterior tenemos la siguiente

Definición. Si x es un punto de Σ , y m es un hiperplano de Σ' , entonces la transformación

$$m' = Ax \quad (\text{o } m = x'A'), \quad (9)$$

define una correlación entre Σ y Σ' ; en otras palabras, una transformación lineal entre los puntos de Σ y los hiperplanos de Σ' .

Directamente de (9) obtenemos la transformación inversa

$$x = A^{-1}m'. \quad (10)$$

Supongamos que x describe al hiperplano cuya ecuación es $lx=0$. Entonces $x'l'=0$; por (9) obtenemos que $m(A')^{-1}l'=0$. Esta relación muestra que todos los hiperplanos de Σ' correspondientes a los puntos de l pasan por el punto y definido por

$$y = (A')^{-1}l'. \quad (11)$$

Se dice entonces que este punto corresponde a l . Como un caso especial de correlación tenemos a la dualidad, cada vez que conozcamos la imagen de cada punto.

1.1.2.3 Las cuádricas coincidentes.

Asumiremos ahora que los espacios Σ y Σ' coinciden. Si x^* es cualquier punto del hiperplano correspondiente al punto x tendríamos que

$$x'A'x^* = 0, \quad (15)$$

la cual es una relación bilineal entre las coordenadas de x y x^* . Transponiendo el producto de la izquierda obtenemos

$$(x^*)^t A x = 0, \quad (16)$$

que quiere decir por (11), que x está en el hiperplano correspondiente a x^* en Σ .

Si el punto x pertenece a su hiperplano correspondiente, entonces

$$x'Ax = \sum a_{rr}x_r x_r = 0. \quad (17)$$

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen esta propiedad es una cuádrica, que llamaremos la *primera cuádrica coincidente* Q_1 de la correlación.

Sabemos que a cada cuádrica se le corresponde una matriz cuadrada simétrica A , es decir cada cuádrica es la primera de una correlación, siempre y cuando $|A| \neq 0$.

De la misma manera, la colección de hiperplanos l que pasan por sus puntos correspondientes $T(l)$ o $T^{-1}(l)$ tiene por ecuación

$$lA^{-1}l' = \sum b_r l_r = 0. \quad (18)$$

Esto de nuevo define una cuádrica que llamaremos la *segunda cuádrica coincidente* Q_2 de la correlación.

Observemos que Q_1 y Q_2 son duales. Ahora bien dadas Q_1 y Q_2 cuádricas, entonces suponiendo que sus matrices asociadas son no singulares, entonces serán la primera y la segunda cuádricas coincidentes de la correlación cuya matriz sea NA^{-1} , donde N es la matriz asociada a Q_2 y A la matriz asociada a Q_1 .

1.1.2.4 Polaridades.

Fijémonos ahora en la colineación T^2

$$x' = T^2(x) = T(xtAt) = (A^{-1})^{-1}Ax. \quad (19)$$

Esta colineación tendrá por matriz a $(A^{-1})^{-1}A$. La transformación inversa $(T^2)^{-1}$ tendrá por matriz a $A^{-1}A$, la cual es idéntica a la matriz de $(T^{-1})^2$.

Se dice que la transformación T^2 es involutiva si la colineación T^2 es simplemente la transformación idéntica $px' = x$, donde p es un escalar. Esto implica que si un punto x^* esta en el hiperplano $T(x)$, entonces x esta en el hiperplano $T(x^*)$.

Si T es involutiva, tendríamos

$$(A^t)^{-1}A = \rho I$$

donde I es una matriz unitaria. Así

$$A = \rho A^t, \quad (20)$$

es decir

$$a_{rs} = \rho a_{sr}, \text{ (para todos } r \text{ y } s)$$

Supongamos que a_{rs} es distinto de cero para algún par de índices, digamos, el par r_0, s_0 .

Si $r_0 = s_0$ entonces $\rho = 1$.

Si $r_0 \neq s_0$, entonces $a_{s_0 r_0}$ tampoco es nulo; de esta forma, además de $a_{s_0 r_0} = a_{r_0 s_0}$, tenemos también la relación $a_{s_0 s_0} = \rho a_{s_0 s_0}$.

Combinando esto obtenemos que $\rho^2 = 1$, que es válido para ambos casos.

Si $\rho = 1$, tenemos que $a_{rs} = a_{sr}$: la matriz A es simétrica, y Q_1 y Q_2 coinciden. Es decir $Q_1 = Q_2 = Q$. Entonces diremos que la correlación T es una polaridad que relaciona a un punto (polo) con su polar con respecto a la cuádriga Q .

Si $\rho = -1$, tendríamos que $a_{rs} = -a_{sr}$, y $a_{rr} = 0$: la matriz A es antisimétrica⁴ y entonces Q_1 y Q_2 no existen ya que la condición

$$\sum a_{rs} x_r x_s = 0$$

se satisface idénticamente.

Este tipo de correlación, en la cual cada punto pertenece a su polar. la llamaremos polaridad nula. Y como el determinante de una matriz antisimétrica de $n \times n$ se anula cuando n es impar, una polaridad nula en cualquier espacio de dimensión par es necesariamente singular (degenerada).

⁴ Una matriz A de $n \times n$ es antisimétrica si $A^t = -A$. Sabemos que $\det(A) = 0$ para n impar.

1.1.3 Variedades algebraicas. Hipersuperficies.

Hasta aquí hemos considerado solo aquellas variedades que son representadas por una o más ecuaciones lineales: ahora discutiremos algunos aspectos de las variedades no lineales.

Definición. Una variedad (o hipersuperficie) en $[r]$ es el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma

$$F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$

donde F es un polinomio.

Si F es de grado n , se dice que la variedad (o hipersuperficie) es de grado n y la denotaremos por V_{r-1}^n . Si F es de grado dos, la variedad es llamada cuadrática, etc.

De aquí en adelante F será un polinomio homogéneo a menos de que se indique lo contrario.

1.1.3.1 Variedades polares.

Una propiedad fundamental de una variedad se expresa en el siguiente teorema:

Teorema X. Una recta arbitraria intersecciona a V_{r-1}^n en n puntos.

Demostración.

Sean P y Q puntos cuyas coordenadas son (x_0, x_1, \dots, x_r) y (y_0, y_1, \dots, y_r) respectivamente. Entonces un punto sobre la recta PQ tiene coordenadas $(x_0 + \lambda y_0, \dots, x_r + \lambda y_r)$ para alguna λ , y este punto pertenece a V_{r-1}^n si

$$F(x_0 + \lambda y_0, \dots, x_r + \lambda y_r) = 0. \quad (2)$$

Esta es una ecuación de grado n en λ por lo cual la recta PQ intersectará a V_{r-1}^n en n puntos. ■

Desarrollando (2) como una ecuación en λ en la forma

$$F(x) + \lambda \Delta_x F(x) + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta_x^2 F(x) + \dots + \lambda^n F(y) = 0, \quad (3)$$

donde $F(x) = F(x_0, x_1, \dots, x_r)$, Δ_x es el operador diferencial

$$y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + y_r \frac{\partial}{\partial x_r}.$$

Si P pertenece a V_{r-1}^n , entonces $F(x) = 0$, y así una de las raíces de (3) es cero. Si la recta PQ es tangente a V_{r-1}^n en P , entonces una segunda raíz de (3) debe ser cero, es decir

$$\Delta_x F(x) = y_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + y_r \frac{\partial F}{\partial x_r} = 0. \quad (4)$$

Si suponemos que las y_i son ahora las coordenadas obtenemos el siguiente

Teorema XI. Si P es un punto genérico de una V_{r-1}^n , entonces el lugar geométrico de las rectas tangentes a V_{r-1}^n en P es un hiperespacio. ■

Definición. Al hiperespacio del teorema anterior le llamaremos hiperespacio tangente a V_{r-1}^n en P .

Definición. Un caso particular sucede cuando todas las parciales se anulan en un punto P , es entonces cuando diremos que P es un punto singular de V_{r-1}^n .

Si ahora fijamos el punto Q en (4), siendo ahora las coordenadas las x_i . Entonces la ecuación representara una hipersuperficie de orden $n-1$, la cual llamaremos la primer polar de Q con respecto a V_{r-1}^n ; y cualquier punto P de

V_{r-1}^n , que pertenezca a esta polar es tal que la recta PQ tiene dos de sus intersecciones con V_{r-1}^n , coincidentes en P .

Regresando a (3) observamos que esta ecuación tendrá una tercera raíz igual a cero si

$$\Delta_r^3 F(x) = \left(y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + y_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right)^3 F(x) = 0. \quad (5)$$

En este caso la recta PQ tendrá tres puntos de contacto con V_{r-1}^n en P .

Definición. Decimos que un punto P de V_{r-1}^n tiene multiplicidad k , siempre y cuando toda recta por P intersecará a la superficie fuera de P en $n-k$ puntos.

Si (x_i) es tal punto P , entonces por (3) las expresiones

$$F(x), \Delta_r F(x), \Delta_r^2 F(x), \dots, \Delta_r^{k-1} F(x)$$

se anulan para cualquier punto $(y_i) \neq Q$; para que esto suceda sabemos que una condición necesaria y suficiente (debido a la homogeneidad de las ecuaciones) es que todas las derivadas parciales de orden $k-1$ se anulen en P .

Análogamente para un punto P de multiplicidad k en V definimos:

Definición. El cono tangente por P en V es la variedad algebraica definida por

$$CT_r(V) = \sum \frac{\partial^k F}{\partial x_0^k \dots \partial x_r^k} (P) x_0^k \dots x_r^k = 0.$$

1.1.4 Conos.

Definición. Toda variedad en S_r la cual es generada por un hiperespacio variable S_{h+1} sobre un hiperespacio fijo S_h la llamaremos un S_{h+1} -cono de S_r .

Para generar un S_h -cono, procederemos en general uniendo un hiperespacio fijo S_h a todo punto de una variedad V_k ($k \leq r-h-2$): los $[h+1]$ generan un S_h -cono que denotaremos por $S_h(V_k)$, y llamaremos vértice a S_h y a V_k su directriz, y los $[h+1]$ sus generadores.

En general $S_h(V_k)$ tendrá dimensión $h+k+1$; es decir, si $k=r-h-2$. $S_h(V_k)$ es un S_h -cono (o hipersuperficie cónica).

Teorema XV. Si S_h no interseca a V_k , entonces el orden de $S_h(V_k)$ es igual al orden de V_k .

Demostración.

Sea V_k una variedad de orden n , entonces un S_{r-k} arbitrario la interseca en n puntos. Como $S_h(V_k)$ tiene dimensión $h+k+1$, su orden es el número de puntos en los cuales interseca a un espacio Π , de dimensión $r-h-k-1$; en otras palabras, su orden es el número de sus generadores que intersecan a dicho espacio. Un generador de $S_h(V_k)$ interseca a Π si y sólo si este está contenido en el espacio Π' de dimensión $r-k$ que une a Π con S_h ; lo que indica que este debe ser uno de los n generadores que unen S_h a las n intersecciones de Π' con V_k , ninguna de tales intersecciones pertenezca a S_h , pues, por hipótesis, S_h no interseca a V_k . Así entonces, $S_h(V_k)$ tiene orden n .

■

1.1.5 La ecuación de una superficie cúbica genérica referida a un pentaedro.

Teorema (Sylvester). La ecuación de una superficie cúbica genérica (lisa o nodal) $S \subset \mathbb{P}^3$ se puede escribir de una y sólo una manera en la forma siguiente:

$$\sum_{i=0}^4 \lambda_i z_i^2 = 0 \quad (20)$$

donde $\{z_i\}$ son cinco formas lineales cuatro a cuatro linealmente independientes y que satisfacen la relación:

$$\sum_{i=0}^4 z_i = 0 \quad (21)$$

y $\{\lambda_i\}_{i=0, \dots, 4}$ son constantes no nulas determinadas excepto por un factor, y que satisfacen la condición:

$$\sum_{i=0}^4 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = 0 \quad (22)$$

si y solo si S es singular.

Demostración (del Centina y Bardelli [14]).

Primer caso: S es una superficie cúbica lisa de ecuación (20) con las hipótesis sobre las z_i y las λ_i .

Como S es lisa (no singular) tenemos que (22) es distinta de cero.

La superficie H , Hessiana de S es una cuártica con diez puntos dobles Q_1, Q_2, \dots, Q_{10} (a saber, intersecciones de las ternas de $\{z_i=0\}$) y pasa por las diez rectas $\{z_i=z_j=0\}$, $0 \leq i < j \leq 4$.

Observemos que por cada Q_i pasan exactamente tres rectas del conjunto $\{Q_i, Q_k\}$, $k \neq i$, contenidas en H . Por lo que el pentaedro es único, teniendo sus vértices en los puntos dobles de H y sus aristas, totalmente contenidas en H . Siendo sus caras los cinco planos $\{z_i=0\}$.

Ahora bien si S tiene otra representación de la forma:

$$\sum \mu_i y_i^2 = 0$$

con las mismas propiedades anteriores, vemos que, calculando el Hessiano de S , excepto por una permutación de los índices, $\{z_i=0\}$ coincide con $\{y_i=0\}$. Ahora bien, la independencia lineal de los z_i^2 implica que $\mu_i = \lambda_i$.

excepto por un factor de proporcionalidad común. Con lo que el pentaedro queda determinado de manera única por S .

Segundo caso: S es singular.

Observación. S satisface (22).

Demostración.

En efecto sea S como en las hipótesis del teorema, entonces

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = 3\lambda_0 x_0^2 - 3\lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 3\lambda_1 x_1^2 - 3\lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 3\lambda_2 x_2^2 - 3\lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_3} = 3\lambda_3 x_3^2 - 3\lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

Como suponemos a S singular estas parciales se anularán en algún punto, por lo que

$$\lambda_0 x_0^2 = \lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\lambda_1 x_1^2 = \lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\lambda_2 x_2^2 = \lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

$$\lambda_3 x_3^2 = \lambda_4 (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)^2$$

y tomando raíces

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_0}}(-x_0 - x_1 - x_2 - x_3) \\
 x_1 &= \frac{\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_1}}(-x_0 - x_1 - x_2 - x_3) \\
 x_2 &= \frac{\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_2}}(-x_0 - x_1 - x_2 - x_3) \\
 x_3 &= \frac{\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\lambda_3}}(-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

y sumando las igualdades anteriores obtenemos

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{\lambda_4} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \right) (-x_0 - x_1 - x_2 - x_3)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{\lambda_4}} &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \\
 \sum \frac{1}{\lambda_i} &= 0
 \end{aligned}$$

como esperábamos.

Observemos que:

i) La cúbica genérica de la forma (20) con las λ_i satisfaciendo (22) tiene un único punto doble pues el sistema (23) tiene solución única $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$.

y

ii) La Hessiana de S en este caso tendrá once puntos dobles Q_1, \dots, Q_{10}, Q , donde Q es el nodo de S , que por su definición estará en H .

Observemos También que si $\prod \lambda_i \neq 0$ ninguna de las rectas $\{Q_i\}$ estará contenida en H , y por tanto concluimos la existencia de un único pentaedro con sus vértices en Q_1, \dots, Q_{10} con las mismas propiedades del anterior. ■

Observación. Sea S una superficie cúbica con un solo nodo, sea O dicho punto, entonces hay exactamente seis rectas totalmente contenidas en S y concurrentes en O . Estas rectas constituyen la intersección completa de S y su cono tangente en O .

Demostración.

Sea $S: (F=0)$ dicha superficie. Y escribamos a F como en el teorema anterior. Haciendo $O=(0,0,0,1)$, entonces el cono tangente a S en O se escribe como:

$$\sum \lambda_i a_{ij} a_{jk} a_{ki} x_j x_k = 0$$

Queremos encontrar una recta l que pase por O y esté contenida en S , es decir queremos que:

$$F(l: (O + \mu P)) = 0. \quad (24)$$

Expandiendo (24) en serie de Taylor alrededor de O (como en (3)), observamos que tanto $F(O)=0$ (al estar O en S) y $F'(O)=0$ (al ser S singular en O), por lo que el primer término distinto de cero en la serie es el término de grado dos, por lo que $F(O + \mu P)$ se reduce a

$$F(O + \mu P) = \frac{1}{2} \mu^2 \Delta_x^2 F(O)$$

y entonces F se anula si P está en el cono tangente a S en O .

En dado caso la recta l estará contenida en dicho cono y en S . Ahora bien, supongamos que $l: (x_2=x_3=0)$ y escribamos a F como:

$$F: Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_1^2 + Dx_0 + Ex_1 + G$$

Donde $A, B, C, D, E, G \in K[x_2, x_3]$ y A, B, C de grado uno, D y E de grado dos y G de grado tres.

Consideraremos la ecuación anterior como una cuádrlica variable, y tomando en cuenta sus casos degenerados, es decir, cuando el determinante

$$\Delta(x_2, x_3) = 4ACG + BDE - AE^2 - B^2G - CD^2 = 0$$

se anula. El cual es una ecuación de grado cinco en x_2 y x_3 .

Ahora bien, cualquier plano por l , está dado por $\pi: (\mu x_2 = \alpha x_3)$. Si $\mu \neq 0$, podemos suponerla como $\mu=1$ y entonces $\pi: (x_2 = \alpha x_3)$.

Así, la restricción de S al plano π (en coordenadas homogéneas (x_0, x_1, x_3)) está dada por

$$F|_{\pi} = x_3 Q(x_0, x_1, x_3)$$

donde

$$Q(x_0, x_1, x_3) = A(\alpha, 1)x_0^2 + B(\alpha, 1)x_0x_1 + C(\alpha, 1)x_1^2 + D(\alpha, 1)x_0 + E(\alpha, 1)x_1 + G(\alpha, 1)$$

Entonces $\Delta(x_2, x_3)$ es una ecuación de grado cinco en α . Así cada raíz α determina un plano del haz mencionado.

Ahora bien, cada uno de estos cinco planos intersecciona al cono tangente en otra recta l' la cual estará contenida en S (primera parte). Por esto $\Delta(x_2, x_3)$ no tiene raíces repetidas.

Así entonces, $S|_x = l \cup l' \cup l''$. Observemos que l , l' y l'' no pueden ser concurrentes, pues dicho cono no contiene ningún plano, pues O es un nodo. Con esto queda demostrada la observación. ■

1.2 Configuraciones proyectivas planas.

Una configuración es un arreglo de l rectas y p puntos en un plano proyectivo de tal manera que

- (i) Cada punto es incidente con exactamente λ rectas y
- (ii) cada recta es incidente con exactamente π puntos del arreglo.

Tal sistema se puede indicar mediante la matriz $\begin{pmatrix} p & l \\ \pi & \lambda \end{pmatrix}$.

Para la cual, por (i) y (ii), $p\lambda = \pi l$.

Por ejemplo, consideremos cuatro rectas en posición general en un plano proyectivo, y sus seis puntos de intersección al tomarlas por pares. Su símbolo sería entonces

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, dado un polígono cerrado de n lados, este constituirá una configuración del tipo n_2 .

En el caso en que $p=l$, tendremos como consecuencia que $\pi=\lambda$ de donde el símbolo p_λ bastará para denotar a tal configuración.

Un ejemplo clásico de este tipo de configuraciones es la configuración de Desargues: la cual es una del tipo 10_3 y se construye de acuerdo al siguiente teorema:

Teorema(Desargues). Si dos triángulos se encuentran en perspectiva desde un punto, entonces las intersecciones de los pares de lados correspondientes de tales triángulos están alineados.

Demostración.

Expondremos una demostración en la versión espacial del teorema, sin embargo es posible demostrarlo para el caso plano.

Sea O el centro de perspectiva de los triángulos ABC y $A'B'C'$, sea l la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 determinados por los triángulos ABC y $A'B'C'$ respectivamente.

Las rectas AB , AC y BC (intersecciones de los planos OAB , OAC y OBC con π_1) se proyectan desde O en las rectas $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$ (intersecciones de los planos $OAB=OA'B'$, $OAC=OA'C'$ y $OBC=OB'C'$ con π_2) respectivamente. Sean P , Q y R los puntos de intersección de las rectas AB , AC y BC respectivamente con la recta l , común a los planos π_1 y π_2 , y sean P' , Q' y R' las intersecciones de sus imágenes bajo la proyección desde O con l . Aquí vemos inmediatamente que $P=P'$, $Q=Q'$ y $R=R'$, por lo que el teorema es cierto.

Considerando entonces los diez puntos O , A , B , C , A' , B' , C' , P , Q , R y las diez rectas OA , OB , OC , AB , AC , BC , $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, l , obtenemos una configuración de rectas del tipo mencionado, pues por construcción por cada punto pasan tres rectas y en cada recta inciden tres puntos. Ver figura 1.

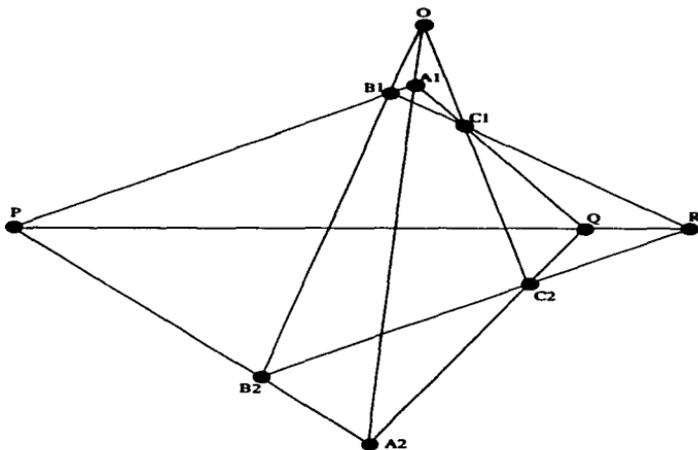


Figura 1. La configuración de Desargues.

El símbolo \mathcal{P}_λ no determina a una sola configuración. Por ejemplo las figuras 2a y 2b dan algunos ejemplos de diferentes configuraciones de tipos 9_3 y 10_3 respectivamente (ver Bokowski-Sturmfels [6] y R. San Agustín [4]).

Por ejemplo, una propiedad característica de la configuración de Desargues es la siguiente:

Proposición. El conjunto de puntos no vecinos de cada punto de la configuración pertenecen a una misma recta de dicha configuración. ■

Por ejemplo, al quitar el punto O en la figura 1 junto con sus vecinos, los puntos A, A', B, B', C y C' , solamente quedará de nuestra configuración la recta PQR , la cual pertenecía a la configuración. Podemos proceder por inspección con los otros dos ejemplos de configuraciones 10_3 de la figura 2b, y observaremos que esta propiedad no se mantiene, al menos para alguno de sus puntos. Así pues a la configuración de Desargues la denotaremos por $(10_3)_1$ o simplemente por D .

Podemos extender el concepto de configuración como sigue:

Definición. Un elemento de dimensión i es fuertemente incidente con un elemento de dimensión j si uno contiene al otro.

Definición. Una configuración C en \mathbb{P}^r es un sistema que consta de n_{00} puntos, n_{11} rectas y, en general, n_{ij} subespacios lineales de \mathbb{P}^r de dimensión i tales que cada uno de sus elementos de dimensión i es fuertemente incidente con exactamente n_{ij} elementos de dimensión j .

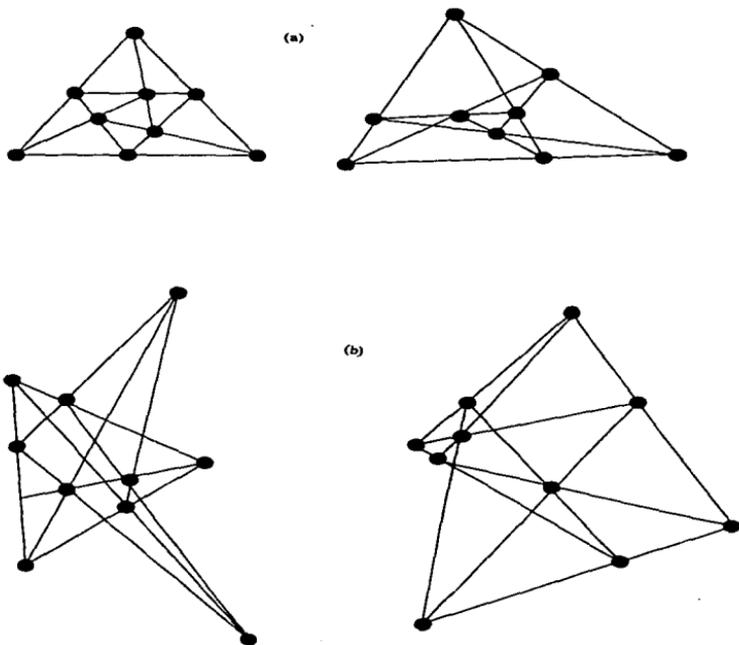


Figura 2. (a) Configuraciones 9, (b) Configuraciones 10.

P_{ijmn} y P_{klmn} , es decir cada terna de rectas así tomadas es coplanar, y las únicas quince posibilidades están listadas en la tabla 1. Los planos determinados por cada terna de rectas son tangentes a la superficie en los tres puntos de intersección determinados por ellas, de aquí que sean llamados *tritangentes*. ■

12.34.56	12.35.46	12.36.45
13.24.56	13.25.46	13.26.45
14.23.56	14.25.36	14.26.35
15.23.46	15.24.36	15.26.34
16.23.45	16.24.35	16.25.34

Tabla 1. Los quince planos tritangentes a \mathfrak{S} .

Observemos que, según la tabla 1, en cada recta r inciden tres de los quince planos τ . En otras palabras la superficie \mathfrak{S} contiene quince triángulos τ^7 , cuyos vértices son todos distintos de O , y cada recta es lado común a tres triángulos τ .

II. Diremos que dos triángulos τ forman *un par*, cuando no tienen un lado en común. Cada triángulo pertenece a ocho pares. Tenemos entonces que el número de pares es $\frac{15 \cdot 8}{2} = 60$. Los planos de dos triángulos de un par se intersectan en una recta, que llamaremos *recta de Pascal*⁸, la cual intersecta a la superficie \mathfrak{S} en tres puntos P , en los cuales los tres lados de un triángulo se intersectan con los lados del otro. Esto es, la recta común a los planos 12.34.56, 13.25.46 que forman un par, intersecta a la superficie en los puntos (12.46), (34.25) y (13.56).

⁷ Usaremos la palabra triángulo para referirnos a la terna de rectas que definen al mismo plano τ .

⁸ Por las razones que veremos adelante.

Notación. (Coexeter) Una configuración C en P^r con parámetros $\{n_{ij}\}$ se denota mediante la matriz

$$(n_{ij}).$$

1.3 Construcción del Hexagrama Místico.

Expondremos aquí la construcción dada por L. Cremona (ver [1]), tratando de conservar su notación.

I. Sea \mathfrak{S} una superficie cúbica nodal, con nodo en el punto O y consideremos las seis rectas contenidas en la superficie que pasan por O' .

Denotémoslas por $1, 2, 3, 4, 5,$ y 6 . Los quince planos que determinan estas rectas tomadas de dos en dos intersectan a la superficie \mathfrak{S} en una tercer recta. Obtenemos así otras quince rectas r (distintas de las anteriores), que denotaremos por $12, 13, 14, 15, 16, 23, \dots, 56$. De tal forma que las rectas $1, 2$ y 12 son coplanares⁶.

Observación. Las quince rectas r son coplanares por ternas en quince planos τ que son los planos tritangentes de la superficie \mathfrak{S} (ver tabla 1).

Demostración.

Consideremos primero el par de rectas ij y kl de tal manera que $| \{i, j, k, l\} | = 4$ y supongamos que no son coplanares. Sea l la transversal a ij y kl que pasa por O . Entonces l intersecta a ij en P y a kl en Q , lo cual contradice la definición de O . Lo cual implica que $P=Q$. Ahora bien, cada terna de rectas ij, kl, lm tal que $| \{i, j, k, l, m, n\} | = 6$, concurren por pares en los puntos P_{ijkl} .

⁵ Estas seis rectas son la intersección completa de la superficie y su cono tangente en O .

⁶ Según esta notación, una de las rectas $1, 2, \dots, 6$ se intersecta con alguna de las rectas $12, 13, \dots, 56$ si tienen algún índice en común. Inversamente, dos de las rectas $12, 13, \dots, 56$ están en un mismo plano si no existe entre ellas un índice en común. Ver demostración.

P_{ijmn} y P_{klmn} , es decir cada terna de rectas así tomadas es coplanar, y las únicas quince posibilidades están listadas en la tabla 1. Los planos determinados por cada terna de rectas son tangentes a la superficie en los tres puntos de intersección determinados por ellas, de aquí que sean llamados *tritangentes*. ■

12.34.56	12.35.46	12.36.45
13.24.36	13.25.46	13.26.45
14.23.56	14.25.36	14.26.35
15.23.46	15.24.36	15.26.34
16.23.45	16.24.35	16.25.34

Tabla 1. Los quince planos tritangentes a \mathfrak{S} .

Observemos que, según la tabla 1, en cada recta r inciden tres de los quince planos τ . En otras palabras la superficie \mathfrak{S} contiene quince triángulos τ^7 , cuyos vértices son todos distintos de O , y cada recta es lado común a tres triángulos τ .

II. Diremos que dos triángulos τ forman *un par*, cuando no tienen un lado en común. Cada triángulo pertenece a ocho pares. Tenemos entonces que el número de pares es $\frac{15 \cdot 8}{2} = 60$. Los planos de dos triángulos de un par se intersectan en una recta, que llamaremos *recta de Pascal*⁸, la cual intersecta a la superficie \mathfrak{S} en tres puntos P , en los cuales los tres lados de un triángulo se intersectan con los lados del otro. Esto es, la recta común a los planos 12.34.56, 13.25.46 que forman un par, intersecta a la superficie en los puntos (12.46), (34.25) y (13.56).

⁷ Usaremos la palabra triángulo para referirnos a la terna de rectas que definen al mismo plano τ .

⁸ Por las razones que veremos adelante.

Las sesenta rectas determinadas por los pares de triángulos τ de esta manera son las sesenta rectas de Pascal.

III. Puesto que cada plano tritangente pertenece a ocho pares, cada plano contiene ocho rectas de Pascal. Vale decir pues, que las sesenta rectas de Pascal se distribuyen ocho a ocho en los quince planos tritangentes. Por cada recta de Pascal pasan dos planos tritangentes.

IV. En un punto P concurren dos rectas r , por ejemplo 12 y 46 , por esto, además del plano $12.46.35$ determinado por estas dos rectas, concurren en P otros dos planos tritangentes que contienen a la recta 12 (que son, según la tabla 1, $12.34.56$ y $12.36.45$), y otros dos planos que contienen a la recta 46 (que son, según la tabla 1, $13.25.46$ y $15.23.46$). Con los dos planos por 12 junto con los dos planos por 46 podemos formar cuatro pares τ : por lo cual en cada punto P concurren cuatro rectas de Pascal.

El número de puntos P es pues $\frac{60 \cdot 3}{4} = 45$; aunque esto ya lo sabíamos pues son los vértices de los quince triángulos de los planos tritangentes. Estando cada recta r contenida en tres planos tritangentes, intersectará a otras seis rectas r . De donde cada una de las quince rectas r contiene a seis puntos P .

V. Las tres parejas de rectas r (por ejemplo 12.46 , 34.25 , 13.56) concurrentes en tres puntos P de una recta de Pascal (intersección de los planos $12.34.56$ y $13.25.46$) nos dan tres triángulos τ , cuyos terceros lados (35 , 16 y 24 respectivamente) son coplanares, formando un nuevo triángulo τ . Se tiene así un triedro formado por tres triángulos τ ($12.34.56$, $13.25.46$ y $16.24.35$) y observamos que las nueve rectas r que los forman se distribuyen

en otros tres triángulos τ (12.35.46, 16.25.34 y 13.24.56) constituyendo un nuevo triedro. Este par de triedros son un par de triedros conjugados, o triedros de Steiner⁹ conjugados.

Los vértices de dos triedros conjugados se llamarán *puntos de Steiner* (conjugados uno del otro respecto de cierta cónica).

Cada par τ determina dos triedros conjugados; y cada triedro está formado por tres pares τ , así el número de triedros es $\frac{60}{3} = 20$, conjugados dos a dos. Las aristas de estos triedros son las sesenta rectas de Pascal del Hexagrama Místico.

Observamos que cada recta de Pascal es arista de un (y solo uno) triedro, es decir contiene un solo punto de Steiner. Y como cada triedro contiene tres aristas, entonces en cada punto de Steiner concurren tres rectas de Pascal.

VI Para tres planos τ que forman uno de estos triedros, los otros doce planos tritangentes se distribuyen de la siguiente manera:

1° tres planos forman el triedro conjugado.

2° nueve planos, cada uno de los cuales contiene una y solo una de las nueve rectas r situadas en el triedro propuesto. Se sigue de aquí que las seis rectas r no situadas en el triedro propuesto, no determinan a dos triángulos τ , sino que forman un hexágono torcido (no plano).

Un plano que sea cara de un triedro entra en dos de los tres pares τ pertenecientes al triedro. Ahora bien, un plano es común a ocho pares; con

⁹ Al conjunto de tres planos tritangentes se le llama *Triedro de Steiner*.

lo que un plano tritangente pertenece a cuatro triedros distintos. entonces contiene a cuatro puntos de Steiner. Dos de cada uno de estos puntos no pueden ser conjugados, pues dos triedros conjugados no pueden tener ningún plano en común.

VII Aquí tenemos otros triedros, que llamaremos de segunda especie. En efecto, tómesese un par τ : los planos que lo forman contienen seis rectas r (por ejemplo *12.34.56*, *13.25.46*): las otras nueve rectas r se pueden combinar, de una sola manera, en tres triángulos (*14.26.35*, *15.24.36*, *16.23.45*) formando otro triedro, cuyas aristas son tres rectas de Pascal (todas ellas distintas de la dada por el par dado τ). A cuyo vértice de concurrencia llamaremos *punto de Kirkman*.

VIII Dado un par de planos tritangentes (por ejemplo *14.26.35*, *15.24.36*), los otros trece planos τ se pueden clasificar de la siguiente manera:

1° el plano *16.25.34* que con el par dado forma un triedro de primera especie.

2° los tres planos *14.25.36*, *15.26.34* y *16.24.35* que forman el triedro de primera especie, conjugado al anterior.

3° los seis planos *14.23.56*, *26.13.45*, *35.12.46*, *15.23.46*, *24.13.56* y *36.12.45* que contienen a una de las seis rectas r del par.

4° los tres planos *12.34.56*, *13.25.46*, *16.23.45*, cada uno de los cuales forma con un plano del par dado un nuevo par τ . Cualquiera de estos tres planos constituye, junto con el par dado, un triedro de segunda especie. Un par τ entra, por tanto, en tres triedros de segunda especie; inversamente, un triedro contiene a tres pares, de esta forma el número de triedros de segunda especie es $\frac{60 \cdot 3}{3} = 60$.

Considerando nuevamente que un par τ tiene tres triedros de segunda especie, se sigue que cada recta de Pascal contiene tres puntos de Kirkman, y en un punto de Kirkman (vértice de un triedro de segunda especie) concurren tres rectas de Pascal¹⁰.

IX. Los sesenta triedros de segunda especie, es decir los sesenta puntos de Kirkman, se corresponden unívocamente¹¹ a los sesenta pares τ (según la construcción *VII*), es decir a las sesenta rectas de Pascal: en cuanto que las quince rectas r se separan (en sesenta formas distintas) en dos grupos, uno de nueve rectas situadas en los tres planos de un triedro de segunda especie; el otro de seis rectas, que yacen en los dos planos del par τ correspondiente.

De muchas maneras se puede así asignar cinco planos τ que contengan las quince rectas r de la superficie Σ . Las quince rectas r constituyen la intersección completa de una superficie de tercer grado con una de quinto; pero nueve de esas rectas están en un triedro, quedando así las otras seis en una superficie de segundo grado. Ahora bien, o esta superficie es un hiperboloide, o es el sistema de dos planos. El primer caso de verifica cuando el triedro que forman las nueve rectas es de primera especie y el otro cuando el triedro es de segunda:

- Los tres planos tritangentes *12.34.56*, *13.25.46* y *16.24.35* constituyen un triedro de primera especie, y las seis rectas restantes *14*, *15*, *23*, *26*, *36* y *45* se pueden agrupar en dos conjuntos:

$$\{14, 15, 45\} \text{ y}$$

$$\{23, 26, 36\}.$$

¹⁰ Con esto tenemos que las sesenta rectas de Pascal y los sesenta puntos de Kirkman constituyen una configuración del tipo 60.

¹¹ En este contexto la llamaremos correspondencia de Hesse, y la estudiaremos más adelante en ??

Cada uno de estos conjuntos (o clases de rectas) tienen la propiedad de que cada par de rectas de uno se intersectan, y cada recta de uno no intersecta a ninguna del otro, es decir, estas seis rectas definen un hiperboloide (ver D. Hilbert[??]).

- Si ahora tomamos un triedro de segunda especie, las seis rectas restantes se distribuyen en dos planos τ , que forman un par. Este es el par correspondiente al punto de Kirkman de partida según la correspondencia de Hesse.

Con esto también se verifica que solo hay veinte triedros de primera especie (conjugados dos a dos) y sesenta de segunda especie, no habiendo otros triedros tangentes a la superficie \mathfrak{J} en nueve rectas 12, 13, . . .

X. Un par de triedros conjugados de primera especie determina un hiperboloide que intersecta a \mathfrak{J} en seis rectas con las propiedades antes mencionadas. Los diez hiperboloides son entonces (indicados por las rectas que contienen):

{12, 13, 23}. {45, 46, 56},
 {12, 14, 24}. {35, 36, 56},
 {12, 15, 25}. {34, 36, 46},
 {12, 16, 26}. {34, 35, 45},
 {13, 14, 34}. {25, 26, 56},
 {13, 15, 35}. {24, 26, 46},
 {13, 16, 36}. {24, 25, 45},
 {14, 15, 45}. {23, 26, 36},
 {14, 16, 46}. {23, 25, 35},
 {15, 16, 56}. {23, 24, 34}.

XI. Los tres planos de un triedro de segunda especie y los dos planos del par correspondiente constituyen un pentaedro, en el cual tres caras cualesquiera forman un triedro de segunda especie, que corresponde al par de las caras restantes: de hecho, este par contiene seis rectas, y las otras tres caras contienen a las nueve restantes. Con lo que los diez vértices del pentaedro son diez puntos de Kirkman, y las diez rectas correspondientes son las aristas de tal pentaedro.

Cada punto de Kirkman determina a un pentaedro; y como cada pentaedro tiene diez vértices, tenemos que el número de pentaedros es $\frac{60}{10} = 6$.

De esta manera obtenemos el siguiente resultado:

Teorema (G. Veronese). Los sesenta puntos de Kirkman y las sesenta rectas de Pascal se distribuyen en seis grupos, cada uno formado por diez puntos y las correspondientes diez rectas. ■

G. Veronese llamo en un principio a estos seis grupos *figuras*, ahora sabemos que cada una de estas figuras es una configuración de Desargues como veremos mas adelante.

XII. Cada cara de un pentaedro combinada con las otras cuatro nos da cuatro pares τ : pero como sabemos, cada plano tritangente entra en ocho pares, por lo que cada cara de un pentaedro pertenece a dos pentaedros, en otras palabras, dos pentaedros siempre tienen un plano en común.

XIII. Si ahora proyectamos desde el punto O los puntos y las rectas hasta aquí obtenidos en un plano arbitrario, las rectas 1, 2, 3, 4, 5, 6 se proyectan en seis puntos situados en una cónica; los sesenta pares de triángulos dan los sesenta hexágonos inscritos que se pueden formar con estos seis puntos; y las sesenta rectas de Pascal, los sesenta puntos de Kirkman y los veinte

puntos de Steiner, nos dan las rectas y los puntos igualmente denominados en la teoría plana del Hexagrama Místico. Cada una de las seis figuras del teorema anterior se proyecta en una configuración de rectas del tipo 10₃: En efecto, en cada punto inciden tres rectas de Pascal, y en cada recta inciden tres puntos de Kirkman. Obsérvese que si quitamos de un pentaedro un par τ , la figura que obtenemos es el triedro correspondiente de segunda especie, pues este triedro y el par correspondiente no tienen ninguna recta r en común. Análogamente, toda vez que quitemos un triedro de segunda especie de un pentaedro obtendremos el par τ correspondiente. Esta es una propiedad característica de una configuración de Desargues (ver R. San Agustín [2]).

XIV. Indiquemos los seis pentaedros con los números romanos I, II, ..., VI. El plano I.II será el plano tritangente común a los pentaedros I y II; la recta de Pascal I(II.III) será arista del pentaedro I intersección de los planos I.II y I.III; el punto de Kirkman I(II.III.IV) será el vértice del pentaedro I en el cual concurren los planos I.II, I.III, I.IV.

Dos planos tritangentes de un par pertenecen siempre a un mismo pentaedro. Así por ejemplo los planos I.II y I.III, cuyos símbolos tienen el índice común I, forman un par perteneciente al pentaedro I. Pero por ejemplo los planos I.II y III.IV no forman un par, si no que se intersectan en una de las rectas r de la superficie. Se deduce pues que un pentaedro contiene a las quince rectas r . De aquí que los seis pentaedros inducen a una notación para los quince planos tritangentes y de las quince rectas r análoga a la inducida por las seis rectas por el punto O determinadas por la superficie y su cono tangente.

XV. Como cada recta de Pascal contiene un sólo punto de Steiner cada recta concurrente en uno de estos puntos pertenecerá a tres pentaedros distintos. Es decir, los tres planos tritangentes que forman un triedro de primera especie pertenecen a tres pentaedros distintos. Como vimos, un par de triedros conjugados de primera especie contienen a las mismas nueve rectas r . Resulta pues que dos rectas de Pascal, aristas de dos triedros conjugados, no pueden estar en un mismo pentaedro.

Como consecuencia de lo anterior, las seis rectas de Pascal, aristas de dos triedros conjugados, pertenecen a seis pentaedros distintos. Es decir, un punto de Steiner es común a tres pentaedros distintos, y su conjugado pertenece a los otros tres.

XVI. Ya que las diez rectas de Pascal de un pentaedro concurren por ternas en los diez puntos de Kirkman del pentaedro, dos de ellas no pueden tener un punto P en común, es decir cada pentaedro contiene a treinta puntos P distintos. Y las cuatro rectas de Pascal concurrentes en un punto P pertenecen a cuatro pentaedros distintos.

XVII. Cada plano tritangente contiene a cuatro puntos de Steiner, es decir dos pentaedros tienen en común a cuatro puntos de Steiner. Los cuatro puntos conjugados a los anteriores no los podemos tomar en algún otro par de pentaedros.

Siguiendo con la notación establecida por los pentaedros, el punto de Steiner común a tres pentaedros se podrá indicar por los índices de los pentaedros que lo determinan. Por ejemplo el punto de Steiner común a los pentaedros I, II, III se le indicará con el símbolo I.II.III, y el símbolo de su

conjugado será entonces IV.V.VI. Los dos pentaedros I, II tienen en común a los puntos de Steiner I.II.III, I.II.IV, I.II.V y I.II.VI, siendo sus conjugados los puntos IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI Y III.IV.V respectivamente¹².

Esta notación pone en evidencia por ejemplo que el par I.II, I.III debe estar asociado al plano II.III para determinar un triedro de primera especie; mientras que junto con los planos I.IV, I.V Y I.VI da los tres triedros de segunda especie a los cuales entra el par propuesto.

XVIII. Consideremos los cuatro puntos de Steiner contenidos en algún plano tritangente, por ejemplo, en el plano I.II, por los cuales pasan las cuatro rectas de Pascal: III(I:II), IV(I:II), V(I:II) y VI(I:II). Dos de estas rectas se intersectan; en efecto, los planos II.III, II.IV y I.IV se intersectan en una recta de F; así también los planos II.III y I.IV tienen una recta r en común que yace en el mismo plano V.VI; por lo que los cuatro planos I.III y II.III, I.IV y II.IV -el primer y segundo par se intersectan en las rectas de pascal III(I:II) y IV(I:II) respectivamente- tienen un punto en común: el cual es un punto P , ya que es común a dos rectas r situadas en el plano tritangente V.VI.

Ya que las cuatro rectas de Pascal mencionadas anteriormente se intersectan dos a dos, estas son coplanares. A este plano lo llamaremos *plano de Plücker*, y lo indicaremos con el símbolo I.II. Los cuatro puntos de Steiner de los cuales parten las rectas de Pascal anteriores están contenidos en el plano tritangente I.II y también en el plano de Plücker I.II, por lo que estos cuatro puntos son colineales. A esta recta la llamaremos *recta de Steiner-Plücker* o simplemente *recta de Steiner* o simplemente *recta de Plücker*. Y

¹² Si al símbolo de dos puntos de Steiner conjugados se le sustituye por su número arábigo en la forma (123)(456), vemos claramente que esta notación designa al hiperboloide (12.13.23)(45.46.56).

la indicaremos con el mismo símbolo del plano tritangente o del plano de Plücker a los cuales pertenece.

XIX. De esta manera a los quince planos tritangentes se les corresponden los quince planos de Plücker, que contienen, cada uno, a cuatro rectas de Pascal; y les corresponden también las quince rectas de Plücker, cada una de las cuales contendrá a los cuatro puntos de Steiner correspondientes. La recta de Plücker I.II contiene a los cuatro puntos de Steiner I.II.III, I.II.IV, I.II.V y I.II.VI. Inversamente, en el punto de Steiner I.II.III concurren las rectas de Plücker II.III, III.I y I.II, es decir, por cada punto de Steiner inciden tres rectas de Plücker¹³.

XX. Hemos mostrado que un plano de Plücker contiene a cuatro rectas de Pascal, y que estas rectas de Pascal se intersectan dos a dos en seis puntos P . Por un punto P pasan dos planos de Plücker; por ejemplo, el punto P intersección de las rectas comunes a los planos I.III, II.IV y V.VI con la recta común los planos I.IV, II.III y V.VI estará contenida en los planos de Plücker I.II y III.IV. En un punto P concurren cuatro rectas de Pascal y de los seis planos que estas determinan, cuatro son tritangentes, y los otros dos son planos de Plücker.

XXI. Dos rectas de Plücker se intersectan en un punto de Steiner si sus símbolos tienen algún índice en común; por ejemplo las recta de Plücker I.II y I.III concurren en el punto de Steiner I.II.III. De aquí se sigue que las cinco rectas de Plücker I.II, I.III, I.IV, I.V y I.VI se intersectan por pares, es

¹³ Con esto, las quince rectas de Plücker y los veinte puntos de Steiner constituyen la *configuración alemana*, del tipo:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

decir están contenidas en un mismo plano, indicado por I. formando así un pentágono completo cuyos diez vértices son todos puntos de Steiner. De esta manera los veinte puntos de Steiner se distribuyen diez a diez y las quince rectas de Plücker cinco a cinco en seis planos. En resumen: los veinte puntos de Steiner son los vértices (conjugados dos a dos) y las quince rectas de Plücker son las aristas de un hexaedro completo, cuyas caras podemos denotar por los símbolos I.II, III, IV, V y VI, en relación a los seis pentaedros.

XXII. Consideremos ahora al punto de Kirkman en el cual concurren los tres planos I.IV, II.IV y III.IV en el pentaedro IV. Este triedro está en perspectiva con el triedro formado por los planos I.V, II.V y III.V, ya que sus aristas correspondientes se intersectan en tres puntos P : en efecto, por ejemplo las rectas de Pascal IV(I.II) y V(I.II) están en el plano de Plücker I.II. Los tres puntos P así obtenidos son los vértices de un triángulo inscrito en el primer triedro teniendo por lados las rectas de Pascal I(IV.V), II(IV.V) y III(IV.V), las cuales están contenidas en el plano de Plücker IV.V. Análogamente, intersectando el primer pentaedro con los planos I.VI, II.VI y III.VI, obtenemos un segundo triángulo inscrito, siendo sus lados las rectas de Pascal I(IV.VI), II(IV.VI) y III(IV.VI), pero contenido en el plano de Plücker IV.VI. Como estos dos triángulos están en perspectiva, sus lados correspondientes concurren en tres puntos colineales, esta recta es pues la intersección de los planos de Plücker IV.V y IV.VI, y pasa por el punto de Steiner IV.V.VI ya que este está contenido en ambos planos. Estarán alineados pues, los puntos en los cuales las rectas de Pascal de la primera terna intersectan a las de la segunda, vale decir pues que los puntos de las tres ternas de planos I(IV.V.VI), II(IV.V.VI) y III(IV.V.VI), los cuales son tres puntos de Kirkman, pertenecientes a los pentaedros I, II y III y

correspondientes a las rectas de Pascal I(II.III), II(III.I) y III(I.II) que concurren en el punto de Steiner I.II.III. Es decir: a las tres rectas de Pascal concurrentes en un punto de Steiner le corresponden tres puntos de Kirkman alineados en una recta, que pasa por el punto de Steiner conjugado al de partida. Llamaremos a esta recta *recta de Cayley-Salmon* o simplemente *recta de Cayley*.

Una recta de Cayley y un punto de Steiner serán llamados correspondientes y se indicarán con el mismo símbolo siempre y cuando tal recta contenga a los tres puntos de Kirkman correspondientes a las tres rectas de Pascal de tal punto. Una recta de Cayley pasa por el punto de Steiner conjugado a aquel al cual es correspondiente. Hay pues veinte rectas de Cayley.

Diremos que una recta de Cayley pertenece a aquellos pentaedros a los cuales pertenece el punto de Steiner correspondiente.

XXIII. Del razonamiento anterior deducimos que los puntos de Kirkman de una recta de Cayley pertenecen a tres pentaedros distintos, y que los pentaedros a los cuales pertenece el punto de Steiner correspondiente son los tres restantes.

XXIV. Vimos que la recta de Cayley I.II.III pasa por el punto de Steiner IV.V.VI y está contenida en los planos de Plücker IV.V y IV.VI. Si cambiamos los símbolos IV y V en el razonamiento del paso XXII. habremos probado que tal recta de Cayley pertenecerá también al plano de Plücker V.VI. Y como el plano de Plücker V.VI contiene a la recta de Cayley I.II.III. contendrá a las rectas I.II.IV, I.III.IV y II.III.IV. Con lo que:

Las veinte rectas de Cayley se distribuyen cuatro a cuatro en los quince planos de Plücker; y por cada una de estas rectas pasan tres de estos planos.

XXV. Consideremos de nuevo a los pentaedros I y II, su planos no comunes

I.III, I.IV, I.V, I.VI

II.III, II.IV, II.V, II.VI

forman dos tetraedros que están en perspectiva: en efecto sus caras correspondientes se intersectarán en las rectas de Pascal

III(I.II), IV(I.II), V(I.II) y VI(I.II)

las cuales están contenidas en el plano de Plücker I.II. Con lo que los pares de vértices correspondientes están alineados con un mismo punto. Pero la recta que une los dos vértices (puntos de Kirkman)

I(IV.V.VI), II(IV.V.VI)

pasará también por el punto de Kirkman III(IV.V.VI) (vértice del pentaedro III) y por el punto de Steiner IV.V.VI, es decir, esta será la recta de Cayley I.II.III; y análogamente las otras tres rectas concurrentes serán las rectas de Cayley I.II.IV, I.II.V y I.II.VI; y estas cuatro rectas de Cayley pasan por los cuatro puntos de Steiner IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI y III.IV.V conjugados a aquellos alineados en la recta de Plücker I.II. Como los cuatro puntos de Steiner comunes a dos pentaedros están en una línea recta tenemos que:

Las cuatro rectas de Cayley comunes a dos pentaedros son concurrentes.

A este punto lo llamaremos *punto de Salmon* y lo indicaremos con el símbolo I.II.

XXVI. El punto de Salmon I.II es el centro de perspectiva común a tres tetraedros: dos formados por los planos tritangentes

I.III, I.IV, I.V, IVI

II.III, II.IV, II.V, II.VI

no comunes a los pentaedros I y II; el tercero formado por los puntos de Steiner conjugados a los cuatro de la recta de Plücker I.II, que es el formado con los planos III, IV, V y VI del hexaedro cuyos vértices son los veinte puntos de Steiner. Las caras del primer y tercer triedro se intersectan en las rectas de Plücker I.III, I.IV, I.V y I.VI, por lo que el plano de homología es el plano I del hexaedro. De manera similar, la cara II del hexaedro es el plano de homología del segundo y tercer tetraedro. En cuanto que respecto al primer y segundo triedro, ya habíamos visto que su plano de homología es el plano de Plücker I.II.

XXVII. Como la recta de Cayley I.II.III, que contiene dos vértices de los pentaedros I y II, pasará también por un vértice del pentaedro III, de esta manera, esta recta contendrá tres centros de perspectiva, vale decir los tres puntos de Salmon I.II, I.III y II.III. Entonces, los puntos de Salmon, quince en total, estarán alineados tres a tres en las veinte rectas de Cayley¹⁴.

XXVIII. Como se ha visto, las veinte rectas de Cayley son conjugadas por pares, si cuatro de ellas, por ejemplo

$$I.II.III, I.II.IV, I.II.V \text{ y } I.II.VI$$

concurren en un punto de Salmon, en este caso el I.II, pasarán respectivamente por los cuatro puntos de Steiner

$$IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI \text{ y } III.IV.V$$

¹⁴ Con esto, las veinte rectas de Cayley y los quince puntos de Salmon constituyen la *configuración inglesa*, del tipo:

$$\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$$

vértices de un tetraedro. los correspondientes cuatro conjugados están entonces en el plano de Plücker I.II, los cuales estarán alineados en la recta de Plücker I.II.

XXIX. El plano de Plücker I.II contiene un cuadrilátero completo cuyos lados son las cuatro rectas de Cayley IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI y III.IV.V (sus cuatro conjugadas concurren en el punto de Salmon I.II), cuyos vértices son los puntos de Salmon III.IV, III.V, III.VI, IV.V, IV.VI y V.VI, por los cuales pasan otros pares de rectas de Cayley. Por ejemplo en el punto III.IV, común a las rectas de Cayley III.IV.V y III.IV.VI, pasarán las rectas III.IV.I y la III.IV.II; etc. Estas doce rectas de Cayley son conjugadas dos a dos, por ejemplo III.IV.I y V.VI.II son conjugadas, así como III.IV.II y V.VI.I. Con esto, podemos decir que dos rectas conjugadas pasan por vértices opuestos del cuadrilátero.

Y como el plano de Plücker contiene a los seis puntos de Salmon anteriores, por ejemplo en el punto de Salmon I.II, pasarán los seis planos de Plücker III.IV, III.V, III.VI, IV.V y el V.VI, por lo que:

Los quince planos de Plücker pasan tres a tres por las veinte rectas de Cayley, y seis a seis por los puntos de Salmon.

XXX. Los planos de Plücker se corresponden a los puntos de Salmon: un plano de Plücker, por ejemplo el I.II, contiene los seis puntos de Salmon que son los correspondientes a los seis planos de Plücker que pasan por el punto de Salmon I.II. Y la recta de Cayley que contiene tres puntos de Salmon es conjugada a aquella por la cual pasan los tres planos de Plücker correspondientes a tales puntos.

XXXI. En un punto de Salmon, por ejemplo el I.II, convergen seis planos de Plücker, cuyas rectas de Plücker que contienen serán las seis aristas del tetraedro formado por las caras III, IV, V y VI del hexaedro. Dichos planos de Plücker son pues los planos proyectantes de las aristas de dicho tetraedro.

XXXII. A los cuatro puntos de Steiner alineados en una recta de Plücker, por ejemplo la I.II, les corresponden las cuatro rectas de Cayley concurrentes en el punto de Salmon I.II, así a los diez puntos de Steiner situados en un plano -por ejemplo en la cara I del hexaedro- les corresponden diez rectas de Cayley, que concurren dos a dos en los cinco puntos de Salmon -I.II, I.III, I.IV, I.V y I.VI- correspondientes a los cinco planos de Plücker cuyas rectas de Plücker pertenecen al plano I del hexaedro. Es decir: a los diez puntos de Steiner situados en una cara del hexaedro les corresponden las aristas de un pentágono completo (rectas de Cayley), cuyos cinco vértices son los cinco puntos de Salmon, siendo sus diez caras los diez planos de Plücker.

De manera análoga se ve que los diez puntos de Salmon restantes, las otras diez rectas de Cayley (conjugadas a las anteriores) y los otros cinco planos de Plücker son los vértices, las aristas y las caras de un pentaedro: el cual, en este sentido, es el correspondiente al pentágono. Los vértices del pentaedro están situados en las aristas del pentágono, y las caras de este pasan por las aristas de dicho pentágono.

Cada cara del hexaedro determina a un pentágono y a un pentaedro.

XXXIII. El plano tritangente I.II contiene tres rectas de la superficie Σ , las cuales están dadas por los pares de planos tritangentes:

III.IV, V.VI

III.V, IV.VI

III.VI, IV.V

Estas tres rectas forman un triángulo, por cuyos vértices P , P' y P'' pasan también, respectivamente, los planos:

P	III.V	III.VI	IV.V	IV.VI
P'	III.VI	III.IV	IV.V	V.VI
P''	III.IV	III.V	IV.VI	V.VI

también las rectas de Pascal

P	III(V.VI)	IV(V.VI)	V(III.IV)	VI(III.IV)
P'	III(IV.VI)	IV(III.V)	V(IV.VI)	VI(III.V)
P''	III(IV.V)	IV(III.VI)	V(III.VI)	VI(IV.V)

Estas doce rectas (que son las correspondientes a los doce puntos de Kirkman situados en el plano de Plücker I.II), las podemos tomar de tres en tres, de tal manera que pasen por los puntos de Steiner

IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI y III.IV.V

y por los cuatro puntos de Kirkman

III(IV.V.VI), IV(III.V.VI), V(III.IV.VI) y VI(III.IV.V)

pertenecientes a los pentaedros III, IV, V y VI respectivamente, y correspondientes a las cuatro rectas de Pascal que pertenecen al plano de Plücker I.II. Los cuatro puntos de Steiner y los cuatro puntos de Kirkman están alineados en las cuatro rectas de Cayley que concurren en el punto de Salmon I.II. Con lo que, estas cuatro rectas contienen los vértices de cuatro

tetraedros en perspectiva, vale decir los dos del paso XXV, formados de los planos no comunes a los pentaedros I y II; el tercero con vértices en los puntos de Steiner conjugados a los cuatro alineados en la recta de Plücker I.II; el cuarto cuyos vértices son los puntos de Kirkman pertenecientes a los cuatro pentaedros III, IV, V y VI.

Considerando el tercer y cuarto tetraedro, vemos que, de las dieciséis rectas posibles que unen sus vértices, cuatro son rectas de Cayley concurrentes en el punto de Salmon I.II, mientras que las otras doce, son las rectas de Pascal que concurren cuatro a cuatro en los tres vértices P , P' y P'' del triángulo I.II. Con lo que:

El tetraedro cuyos vértices son lo puntos de Steiner, conjugados a aquellos alineados en la recta de Plücker I.II y el tetraedro cuyos vértices son los puntos de Kirkman correspondientes a las cuatro rectas de Pascal contenidas en el plano de Plücker I.II, tienen cuatro centros de perspectiva; a saber, el punto de Salmon I.II y los vértices del triángulo I.II.

XXXIV. Con los seis planos de Plücker que pasan por el punto de Salmon I.II se pueden formar los tres pares

III.IV y V.VI

III.V y IV.VI

III.VI y IV.V

de caras opuestas del cuadrilátero completo alineados de las cuatro rectas de Cayley concurrentes en el punto dado.

Fijémonos en el primero de estos seis planos. Este contendrá a la recta de Cayley I.II.V en la cual están el punto de Steiner III.IV.VI y el punto de Kirkman VI(III.IV.V), y contiene también a la recta de Cayley I.II.VI que

pasa por el punto de Steiner III.IV.V y por el punto de Kirkman V(III.IV.VI). Uniendo el primer punto de Steiner con el segundo punto de Krikman, y el segundo de Steiner con el primero de Kirkman, antes considerados, estas rectas concurrirán pues, en un vértice del triángulo I.II. Por este mismo punto pasarán las rectas obtenidas análogamente del plano de Plücker V.VI, opuesto al considerado anteriormente. Con esto:
 Las rectas diagonales del cuadrilátero completo formado por las rectas de Cayley que concurren en el punto de Salmon I.II pasan por los vértices del triángulo I.II.

XXXV. Podemos afirmar ya que la intersección de dos planos de Plücker o contiene un punto de Salmon, o que contiene a tres. En el primer caso (por ejemplo los planos III.IV y V.VI) contendrá también a un punto P ; en el segundo la intersección será una recta de Cayley (por ejemplo los planos III.IV y III.V).

XXXVI. Un plano de Plücker, por ejemplo el I.II, contiene cuatro rectas de Cayley y seis puntos de Salmon, conjugados dos a dos (vértices opuestos del cuadrilátero formado de las rectas de Cayley). Por el punto de Salmon III.IV pasan las dos rectas de Cayley I.III.IV y II.III.IV -distintas a las dos contenidas en el plano considerado-, conjugadas a las dos II.V.VI y I.V.VI que pasan por el punto de Salmon V.VI. Con lo que las trazas de los planos de Plücker por el punto de Salmon I.II en el plano de Plücker I.II pasarán por los puntos de Salmon de este plano (y además por los puntos P , vértices del cuadrilátero formado por las cuatro rectas de Pascal); es decir:
 Las cuatro rectas de Cayley de un plano de Plücker y las cuatro rectas de Cayley concurrentes en el punto de Salmon correspondiente, forman un

cuadrilátero y un cuadrángulo tales que las caras del segundo pasan por los vértices del primero. Aunque esto lo habíamos visto ya en el punto XXXII.

XXXVII. El plano tritangente I.II es intersectado por los otros cuatro planos del pentaedro I en cuatro rectas de Pascal, por las cuales pasan respectivamente, los planos de Plücker II.III, II.IV, II.V y II.VI los cuales determinan un tetraedro, cuyos vértices son los puntos de Salmon I.III, I.IV, I.V y I.VI, situados en las cuatro rectas de Cayley correspondientes al punto de Salmon I.II. Así el mismo plano tritangente es intersectado por los cuatro planos restantes del pentaedro II en cuatro rectas de Pascal, por las cuales pasan los planos de Plücker I.III, I.IV, I.V y I.VI, constituyendo otro tetraedro, cuyos vértices serán los puntos de Salmon II.III, II.IV, II.V y II.VI, alineados con los anteriores en las cuatro rectas de Cayley que concurren en el punto de Salmon I.II. Los planos correspondientes de este par de tetraedros se intersectaran en las rectas de Cayley IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI y III.IV.V conjugadas a las anteriores. Con lo que el plano de homología de los dos tetraedros es el plano de Plücker I.II.

XXXVIII. Un plano de Plücker pues, contiene cuatro rectas de Pascal, cuatro rectas de Cayley, doce puntos de Kirkman y cuatro puntos de Steiner. Estos dieciséis puntos son la intersección de las primeras cuatro rectas con las segundas; pero los cuatro puntos de Steiner se encuentran alineados, con lo que los doce puntos de Kirkman situados en este plano se encuentran en una curva de tercer orden.

XXXIX. Considerando la traza de los quince planos tritangentes en el plano de Plücker I.II, ocho de estos se reducen a las cuatro rectas de Pascal III(I.II), IV(I.II), V(I.II) y VI(I.II) contenidas en el plano propuesto; otra

consiste en la recta de Plücker I.II; las otras seis contienen dos a dos a los doce puntos de Kirkman. En efecto los puntos de Kirkman III(I.II.IV) y IV(I.II.III) yacen en el plano III.IV; etc.

Estas seis rectas son la traza de los seis planos tritangentes:

III.IV y V.VI

III.V y IV.VI

III.VI y IV.V

que pasan dos a dos por las rectas comunes a la superficie Σ y al plano tritangente I.II. Las seis rectas forman tres pares concurrentes en los tres puntos en que la recta de Plücker I.II es intersectada por los lados del triángulo I.II.

XL. Veamos ahora la traza de los quince planos de Plücker sobre un plano tritangente, por ejemplo el I.II. Uno de ellos pasa por la recta de Plücker I.II. Otros ocho, vale decir

I.III y II.III

I.IV y II.IV

I.V y II.V

I.VI y II.VI

forman cuatro pares, dando las ocho rectas de Pascal situadas en el plano tritangente, y se intersectan por pares, en las rectas de Cayley IV.V.VI, III.V.VI, III.IV.VI y III.IV.V del plano de Plücker I.II. Los seis restantes son los que concurren en el punto de Salmon I.II, pero sus trazas son los lados de un cuadrángulo completo teniendo sus puntos diagonales en los vértices del triángulo I.II, ya que estos vértices son la traza de las rectas

diagonales del cuadrilátero formado por las cuatro rectas de Cayley concurrentes en el punto de Salmon I.II.

Cualesquiera de estos seis planos, por ejemplo el III.IV. contiene a cuatro rectas de Pascal - I(III.IV), II(III.IV), V(III.IV) y VI(III.IV) - y doce puntos de Kirkman, dos de los cuales - I(II.III.IV) y II(I.III.IV) - están también en el plano tritangente I.II. Con esto Las seis rectas contienen a los vértices correspondientes de dos cuadriláteros formados por las rectas de Pascal en el plano tritangente I.II - vale decir, las rectas que contienen a los puntos de Kirkman:

$$\begin{aligned} & I(II.III.IV) \text{ y } II(I.III.IV), \\ & I(II.III.V) \text{ y } II(I.III.V), \\ & I(II.III.VI) \text{ y } II(I.III.VI), \\ & I(II.IV.V) \text{ y } II(I.IV.V), \\ & I(II.IV.VI) \text{ y } II(I.IV.VI), \\ & I(II.V.VI) \text{ y } II(I.V.VI), \end{aligned}$$

son las trazas de los seis planos de Plücker que pasan por el punto de Salmon I.II.

1.4 EL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE VERONESE

En esta sección trataremos de resumir las propiedades del hexagrama, ya estudiadas en la sección anterior, en su versión plana. Lo anterior nos servirá para establecer mas adelante su relación con K_6 y LK_6 . El teorema de descomposición es el que nos dará la parametrización del hexagrama, la cual trataremos de implementar en el siguiente capítulo y la extendemos después a LK_6 .

Para demostrar el teorema de Pascal haremos uso del siguiente resultado:

Teorema. Si $A=0$, $B=0$, $C=0$ y $D=0$ son las ecuaciones de los lados consecutivos de un cuadrilátero, entonces una cónica circunscrita a dicho cuadrilátero tendrá una ecuación de la forma $\lambda AC + \mu BD = 0$, donde λ y μ son constantes no ambas nulas.

Demostración.

Para constantes cualesquiera λ y μ no ambas nulas, $\lambda AC + \mu BD$ es una función cuadrática, y por consiguiente $\lambda AC + \mu BD = 0$ será la ecuación de una cónica, la cual por definición pasará por los cuatro vértices del cuadrilátero. Y ya que podemos determinar la razón de las constantes λ y μ de tal forma que la cónica pase por un quinto punto dado, deducimos que la ecuación de una cónica que circunscribe a tal cuadrilátero tendrá una ecuación de la forma considerada. ■

Teorema 1.1 (Pascal). Si los vértices de un hexágono se encuentran sobre una cónica, entonces las intersecciones de pares de lados opuestos están alineadas.

Demostración.

Sea C la cónica que circunscribe al hexágono $abcdef$, la cual en particular circunscribe al cuadrilátero $abcd$ lo cual implica que por el teorema anterior

$$C: \lambda ab \cdot cd - \mu ef \cdot ad = 0$$

Análogamente, al circunscribir C también al cuadrilátero $defa$,

$$C: \lambda' de \cdot fa - \mu ef \cdot ad = 0$$

Así,

$$\lambda ab \cdot cd - \lambda' de \cdot fa = \mu(bc \cdot ef) \cdot ad$$

Al igualar a cero la expresión anterior, esta representa a una cónica tal que

(1) Pasa por los puntos (ab, de) , (cd, fa) , a y d , de acuerdo a los términos del lado izquierdo de la igualdad

y (2) Es reducible:

Siendo una de sus componentes la recta $ad=0$ y la otra, que es la recta $bc-ef=0$, pasa por los puntos (ab, de) , (cd, fa) y (bc, ef) , todo esto de acuerdo al término del lado derecho de la misma igualdad. ■

Definición 1.2. La recta del teorema anterior se llama recta de Pascal del hexágono $abcdef$. Y a los puntos de intersección de lados opuestos los llamaremos puntos fundamentales.

Observación 1.3. Dada una cónica y un hexágono inscrito y ordenado cíclicamente entonces hay exactamente 60 rectas de Pascal.

Definición. Llamaremos lado fundamental a la recta que une a dos de los seis puntos del hexágono propuesto. Hay un total de 15 lados fundamentales.

Cabe mencionar aquí que estos quince lados fundamentales son la intersección de un plano genérico con los quince planos tritangentes de la construcción de Cremona de la sección anterior. En este sentido podemos referirnos a un lado fundamental como cierto plano tritangente a una superficie cúbica nodal.

Teorema 1.4 (Kirkman). Las rectas de Pascal de los hexágonos $abcdef$, $abdcef$ y $afcbde$ tienen un punto en común.

Demostración.

Pues las ecuaciones, según el teorema de Pascal, de las rectas de Pascal asociadas a dichos hexágonos son

$de-ab=0$, $fc-de=0$ y $cf-ab=0$
 respectivamente. Y al sumarlas obtenemos que
 $(de-ab)+(fc-de)-(cf-ab)=0$,
 es decir tales rectas son concurrentes. ■

Definición 1.5. El punto del teorema anterior se llama punto de Kirkman.

Un punto de Kirkman pues, es la proyección de un triedro de segunda especie en un plano genérico.

Observación 1.6. Existen exactamente 60 puntos de Kirkman. ■

Observación 1.7. Las rectas de Pascal concurren por ternas en los puntos de Kirkman y en cada recta de Pascal inciden tres puntos de Kirkman. Aquí encontramos la primera relación entre los puntos de Kirkman y las rectas de Pascal, pues tenemos una configuración del tipo 60. . Podemos también establecer una correspondencia uno a uno entre las rectas de Pascal y los puntos de Kirkman:

$$\{\text{Recta de Pascal}\} \longleftrightarrow \{\text{Punto de Kirkman}\} \blacksquare$$

Teorema 1.8 (Steiner). Las rectas de Pascal de los hexágonos $ahcdef$, $befcda$ y $fcbeda$ tienen un punto en común.

Demostración.

De nuevo, por el teorema de Pascal, las rectas asociadas a dichos hexágonos tendrán por ecuaciones a $bc-ef=0$, $ef-da=0$ y a $cb-da=0$ respectivamente.

Y como

$$(bc-ef)+(ef-da)-(cb-da)=0,$$

tales rectas tendrán un punto en común. ■

Definición 1.9. Al punto del teorema anterior se le llama *Punto de Steiner*.

Observación 1.10. Existen exactamente 20 puntos de Steiner. ■

Teorema de descomposición de Veronese 1.11. La configuración de puntos de Kirkman y rectas de Pascal del hexagrama místico se descompone en seis configuraciones de Desargues.

Demostración.

La correspondencia de la observación 1.10 asocia a cada recta de Pascal α un punto de Kirkman $K(\alpha)$ y a cada punto de Kirkman las tres rectas que concurren en él.

Repetiendo este procedimiento en las rectas así obtenidas obtenemos nueve rectas distintas de α que con ella suman diez. Estas rectas concurren por ternas en los puntos de Kirkman y en cada recta inciden tres de estos puntos, tenemos pues una configuración de puntos y rectas del tipo 10.

Observemos primeramente que, según la observación 1.10, las tres rectas de Pascal de $K(\alpha)$ son todas distintas entre sí y además distintas de α . Por otro lado α y las rectas de $K(\alpha)$ no tienen ningún punto de Kirkman en común, es decir los puntos y las rectas arriba obtenidas satisfacen la propiedad combinatoria característica de una configuración de Desargues (R. San Agustín y H. Cárdenas) que la diferencian de las otras del tipo 10_3 (ver J. Bokowski y B. Sturmfels [6]).

2. Una construcción algorítmica del Hexagrama Místico.

Trataremos de dar un algoritmo susceptible de implementar tal que nos permita construir el hexagrama y además la identificación de cada elemento construido.

Describiremos primeramente como es que se puede construir cada una de las componentes arguesianas del teorema de descomposición de Veronese. Haremos uso de las propiedades combinatorias de cada componente, así como de la correspondencia de Hesse. Esto nos permitirá generar las seis componentes arguesianas, y por lo tanto las sesenta rectas de Pascal, para alguna cónica y hexágono fijos.

De aquí en adelante *1, 2, 3, 4, 5* y *6* denotarán los vértices del hexágono inscrito, y los quince lados fundamentales se denotarán con los símbolos *12, 13, 14, 15, ...*

2.1 Construcción de una componente arguesiana dada una de sus rectas.

Sea $p=[a,b,c,d,e,f]$ la recta de Pascal asociada al hexágono $abcdef$. En esta recta concurren otras seis rectas de Pascal en los tres puntos de Kirkman incidentes con p , a saber

$$K_1 = \{p, [a,e,d,f,c,f], [a,b,d,c,f,e]\}, K_2 = \{p, [a,b,e,f,d,c], [a,c,b,e,d,f]\}$$

$$\text{y } K_3 = \{p, [a,b,f,e,c,d], [a,d,e,c,b,f]\}$$

De esta forma obtenemos seis rectas de la componente, aplicando ahora la correspondencia de Hesse a la recta p , obtenemos el punto de Kirkman

$$\{[a,c,e,b,f,d],[a,c,f,d,b,e],[a,d,b,f,c,e]\}$$

obteniendo otras tres rectas que sumadas con las otras siete nos dan las diez rectas de Pascal de una componente de HM.

2.2 Generando las seis componentes.

De manera similar dada una recta de Pascal podemos encontrar las otras dos rectas que concurren en el punto de Steiner que esta contiene, y las tres correspondientes que concurren en el punto conjugado a este. Esto se obtiene directamente de la construcción 1.3.

Aplicando la construcción 2.1 a cada una de estas rectas, obtenemos las seis componentes arguesianas del hexagrama, pues cada recta pertenece a una componente distinta.

El resultado de lo anterior son las sesenta rectas de Pascal, distribuidas de diez en diez en cada componente. Nos conviene entonces escribir cada componente en términos de sus sistemas como sigue:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
12.34.56	12.34.56	12.36.45	12.35.46	12.35.46	12.36.45
13.25.46	13.26.45	13.25.46	13.24.56	13.26.45	13.24.56
14.26.35	14.25.36	14.23.56	14.25.36	14.23.56	14.26.35
15.24.36	15.23.46	15.26.34	15.26.34	15.24.36	15.23.46
16.23.45	16.24.35	16.24.35	16.23.45	16.25.34	16.25.34

Notemos que la notación anterior corresponde a la notación de Cremona para los quince planos tritangentes, y cada D_i (columnas) así pensada corresponde a un pentaedro de la misma construcción. Aunque esto era de esperarse ya que dichos sintemas corresponden a la proyección de los quince planos tritangentes de la construcción 1.3 desde el nodo en nuestro plano.

Así pues, una vez establecida esta notación, es fácil determinar a cada elemento del hexagrama de acuerdo a la construcción de Cremona. De hecho podemos terminar la construcción de los elementos restantes del hexagrama no construidos en la sección 1.4.

El problema de implementar un programa que nos permita visualizar y destacar a cada elemento esta resuelto, pues según la construcción 1.3 basta determinar el elemento (sintema en este caso) común a dos D_i . Y esto, por el tamaño (que permanece constante) de los conjuntos involucrados no resulta de mayor problema computacional.

La implementación de este programa está en el apéndice.

3. RELACIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO CON LK_6 .

Antes que nada recordemos algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas:

Definición. Una gráfica G consiste de un conjunto no vacío de objetos llamados *vértices* junto con un conjunto de objetos llamados *aristas* no teniendo estos conjuntos ningún elemento en común.

Definición. Para cada arista están asociados dos y sólo dos vértices llamados sus *extremos*.

Definición. El *grado de un vértice* es el número de aristas que tienen como alguno de sus extremos a dicho vértice.

Definición. Una *subgráfica* H de una gráfica G es una gráfica contenida en G . Esto es, los vértices y aristas de H son vértices y aristas de G , y una arista de H tiene los mismos extremos que en la gráfica G .

Definición. Una *restricción* de G es una subgráfica de G que incluye a todos los vértices de G .

Definición. Una gráfica G se dice *regular* de orden n si todo vértice de G tiene grado n .

Definición. Un *n -factor* de una gráfica G es una restricción de G regular de orden n .

Definición. Una 1-factorización de una gráfica G se llama *perfecta* si la unión de dos de sus 1-factores ajenos (por aristas) constitutivos es conexa.

Notación. El símbolo $[...]'$ denotará al complemento de la gráfica $[...]$.

Definición. $\mathcal{S}(K_n)$ y $\mathcal{S}(LK_n)$ denotarán al la retícula de subgráficas generadoras sin vértices aislados de K_n y LK_n respectivamente, con la unión conjuntista $a \cup b =: a \vee b$ de dos elementos desempeñando el papel del supremo y la intersección $a \cap b =: a \wedge b$ como el ínfimo de dichos elementos.

Estudiaremos primeramente algunas propiedades características de la gráfica K_6 , y del grupo simétrico en seis elementos o S_6 . Con esto, relacionaremos (R. San Agustín [2], pag. 59) de dos maneras distintas a los elementos de HM con ciertas subgráficas de K_6 , respetando, en cada caso, la estructura jerárquica de HM en el sentido siguiente:

Construiremos una representación fiel

$$\Phi: HM \longrightarrow S(K_6)$$

con las dos propiedades siguientes:

1. Φ es un antihomomorfismo; es decir, los puntos de un cierto nivel de HM estarán asociados con el ínfimo de las gráficas asociadas a las rectas en el nivel anterior que los definen y, análogamente, las rectas de un cierto nivel de HM estarán asociadas con el supremo de las gráficas asociadas a los puntos en el nivel anterior que las definen y

2. Es biyectiva al actuar en clases.

Es decir, asocia a clases distintas de elementos de $S(K_6)$ a clases distintas de elementos de HM y es biyectiva una vez que se le restringe a cada una de estas clases.

3.1 AUTOMORFISMOS EXTERIORES DE S_6 , TEOREMA DE FACTORIZACIÓN DE K_6

Definición. Si P es un subgrupo de G y si X es la familia de conjugados de P en G , entonces existe un homomorfismo $\rho: G \longrightarrow S_X$ definido, para $a \in G$, por

$$\rho(a): gPg^{-1} \longrightarrow agPg^{-1}a^{-1}.$$

Este homomorfismo tiene kernel $\bigcap_{g \in G} aN(P)a^{-1}$ donde $N(P)$ es el normalizador de P en G . Llamaremos a ρ la representación de G en los conjugados de P .

Lema 3.1. Un subgrupo K de S_6 de orden 120 es igual a su normalizador: $K=N(K)$; K tiene exactamente seis conjugados.

Demostración. Si K tiene k conjugados, entonces $k \leq 6$ pues

$$k=[S_6:N(K)] \leq [S_6:K]=6!/120=6.$$

Si $k=6$ no hay nada que probar. Supongamos $k < 6$. La representación de S_6 en los conjugados de K da un homomorfismo $\rho: S_6 \rightarrow S_k$ y $\ker(\rho) \subseteq N(K)$. El núcleo o kernel de ρ es un subgrupo normal por lo que o es $\{1\}$, A_6 o S_6 , pues son los únicos subgrupos normales de S_6 . Si $\ker(\rho)=\{1\}$, entonces S_k tiene un subgrupo ($\text{im}(\rho)$) con $6!$ elementos; lo cual es absurdo cuando $k < 6$. Si $\ker(\rho)=A_6$, entonces $N(K)=A_6$, y K es normal en A_6 , contradiciendo la simplicidad de A_6 . Si $\ker(\rho)=S_6$, entonces K es normal en S_6 , pero esto es imposible, pues S_6 no tiene subgrupos normales de orden 120. ■

Definición. Un subgrupo K de S_X es transitivo si, para todo par de elementos $x, y \in X$, existe una permutación $\sigma \in K$ tal que $\sigma(x)=y$.

Observación. Si $\rho: G \rightarrow S_X$ es la representación de G en los conjugados de un subgrupo P de G , entonces $\text{im}(\rho)$ es un subgrupo transitivo de S_X . ■

Lema 3.2. Si K es un subgrupo transitivo de S_6 de orden 120, entonces K no contiene una transposición.

Demostración.

Antes que nada, K contiene un elemento de orden 5, el cual debe ser un 5-ciclo, digamos, $\alpha=(12345)$. Si la transposición $(ij) \in K$, entonces por ser K transitivo implica la existencia de $\beta \in K$ tal que $\beta(j)=6$. Por lo que

$$\beta(ij)\beta^{-1}=(i6)$$

para alguna $i(i \neq 6)$. Conjugando $(i6)$ con las potencias de α obtenemos que K contiene las transposiciones (16) , (26) , (36) , (46) y la (56) . Pero sabemos que estas transposiciones generan a todo S_6 . ■

Teorema (Hölder). Existe un automorfismo exterior de S_6 .

Demostración (G. Janusz y J. Rotman [12]).

Empezaremos mostrando que S_6 contiene un subgrupo transitivo K de orden 120.

Un 5-subgrupo de Sylow P de S_5 tiene 6 clases de conjugados (por los teoremas de Sylow). La representación ρ de S_5 en los conjugados de P da un homomorfismo $\rho: S_5 \rightarrow S_6$, el cual es uno a uno, así $\ker(\rho) \subseteq N(P)$ y además es distinto de A_5 o S_5 . Por lo que $K=\text{im}(\rho)$ es un subgrupo transitivo de S_6 de orden 120.

Ahora bien sea $\phi: S_6 \rightarrow S_6$ la representación en los conjugados de K . Aquí, análogamente al argumento anterior, vemos que ϕ es uno a uno y sobre por

lo que $\phi \in \text{Aut}(S_6)$. Si ϕ fuera un automorfismo interior, entonces $\phi(12)$ sería una transposición (fijando cuatro símbolos), y entonces (12) normaliza a exactamente cuatro conjugados de K . Si $\alpha \in S_6$ y $(12)\alpha K\alpha^{-1}(12) = \alpha K\alpha^{-1}$, entonces $\alpha^{-1}(12)\alpha$ estaría en $N(K)$. Pero por el lema 3.1. $K=N(K)$ y K contiene la transposición $\alpha^{-1}(12)\alpha$, lo cual contradice el lema 3.2. Por lo que ϕ es un automorfismo exterior. ■

Teorema de factorización de K_6 . Hay exactamente seis 1-factorizaciones de K_6 , todas ellas isomorfas entre sí. Dos 1-factores ajenos cualesquiera están contenidos en una única de estas factorizaciones.

Demostración (cf. Cameron y van Lint [15], p. 81).

(i) **Unicidad.** Observemos que cada 1-factorización de K_6 es perfecta; esto es, la unión de dos 1-factores ajenos siempre constituye un hexágono (figura 3). Y un tercer 1-factor ajeno a estos dos consistirá, o bien de las tres diagonales principales del hexágono mencionado o bien, de una de dichas diagonales y dos diagonales secundarias del hexágono mencionado. Así, la única posibilidad para los otros dos 1-factores que completarían una 1-factorización es que sean del segundo de estos tipos.

(ii) **Existencia.** Ya que se pueden elegir 15×8 pares de 1-factores ajenos y, por otra parte, cualquier 1-factorización contiene a 5×4 de tales pares, habrá exactamente $\frac{120}{20}$ 1-factorizaciones de K_6 . ■

Notación. $\Delta_1, \dots, \Delta_6$ serán dichas 1-factorizaciones de K_6 .

3.2 REPRESENTACIONES DE HM EN K_6 Y EN LK_6

Podemos ahora establecer el homomorfismo

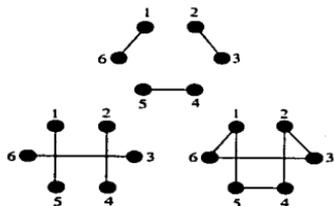


Figura 3. La unión de dos 1-factores ajenos es un hexágono.

$$\Phi: \text{HM} \longrightarrow \mathcal{S}(K_6)$$

mencionado anteriormente.

Definición.

$$\begin{aligned} \Phi: \{\text{sistemas}\} &\longrightarrow \mathcal{S}(K_6) \\ \{ab, cd, ef\} &\longrightarrow \{ab, cd, ed\} \end{aligned}$$

Veremos cómo se extiende la definición anterior:

Formulemos pues, la primera correspondencia; es decir, la que asocia a cada hexágono, digamos el $abcdef$, la subgráfica de K_6 formada con los lados de dicho hexágono: $\{ab, bc, cd, de, ef, fa\}$. Así, tenemos la relación definida en HM a nivel de rectas de Pascal como:

$$\Phi: abcdef \longrightarrow \{ab, bc, cd, de, ef, fa\}$$

la cual denotaremos con el símbolo Φ_{abcdef} .

Esta asignación extiende la definición de Φ , como homomorfismo, a nivel de sistemas como sigue:

Ya que los lados de cada hexágono se pueden descomponer en dos ternas de lados alternos y cada una de estas ternas constituye un 1-factor de K_6 , la gráfica Φ_{abcdef} es entonces

$$\Phi_{\{ab, cd, ef\}} \vee \Phi_{\{bc, de, fa\}}$$

Observación. La asignación anterior es una asignación biyectiva entre las sesenta rectas de Pascal y los sesenta hexágonos de K_6 .

Ahora bien, consideremos la gráfica

$$(\Phi_{abcde}) \vee (\Phi_{abdcfe}) \vee (\Phi_{afcbde})$$

la cual es el complemento del hexágono $acebfd$, o sea, una gráfica *producto* de tipo $K_3 \times K_2$. Así, tenemos que, si K es el punto de Kirkman donde concurren las rectas de Pascal $abcdef$, $abdefc$ y $afcbed$, entonces

$$\Phi_K := [ac, ce, eb, bf, fd, da]'$$

Observemos también que el complemento de una gráfica del tipo Φ_K es un hexágono. De esta manera, tomemos seis lados fundamentales de HM que formen un hexágono. Entonces los nueve lados fundamentales restantes determinan a tres hexágonos cuyas rectas de Pascal asociadas concurren en un punto de Kirkman. Con esto, la correspondencia de Hesse se puede expresar en términos de estas subgráficas y sus complementos respectivos.

Sea D_i una de las componentes de HM. Sus puntos y sus rectas determinan una cierta subgráfica de K_6 , la cual en principio, sería toda la gráfica K_6 . Por otra parte, en vista del teorema de factorización, vemos que hay una única 1-factorización que contiene a las gráficas asociadas a los puntos y rectas de D_i , sea Δ_i dicha 1-factorización. Así tenemos que

$$\Phi : D_i \longrightarrow \Delta_i$$

Observemos que la unión de dos hexágonos asociados a dos rectas de Pascal concurrentes en un punto de Steiner es tal que su complemento es un par de triángulos ajenos en vértices; es decir, se trata de una gráfica del tipo $K_{3,3}$, de donde:

$$\Phi_{S_i} := [ac, ce, ea, bd, df, fb]'$$

si las rectas de Pascal $abcdef$, $ab'f'cd$ y $ade'fd'$ concurren en un punto de Steiner.

Observación. Recíprocamente, tomemos seis lados fundamentales de HM que formen dos triángulos ajenos en vértices. Entonces, los nueve lados fundamentales restantes forman tres hexágonos¹⁵ cuyas rectas de Pascal concurren en un punto de Steiner. ■

Por otra parte, recordemos que tres figuras cualesquiera, digamos D_1 , D_2 y D_3 comparten un único punto de Steiner Sr y recíprocamente, por lo que también se ocurre asociar a cada punto de Steiner alguna gráfica relacionada con Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 .

Proposición. $\Phi_{Sr} = \bigvee_{i,j} (\Delta_i \cap \Delta_j)$.

Demostración.

$\forall (i,j)$, $\Delta_i \cap \Delta_j$ es un 1-factor de K_6 .

Por otra parte, dos cualesquiera de las parejas (i,j) y (k,l) siempre comparten un índice, por lo que

$$(\Delta_i \cap \Delta_j) \vee (\Delta_k \cap \Delta_l)$$

es un hexágono por el teorema de factorización. ■

Consideremos ahora la relación siguiente:

$$Sr \longleftrightarrow \{K_1, K_2, K_3\} \longleftrightarrow Sr'$$

Dicha relación se puede ver a nivel de gráficas como la recomposición de los sistemas que integran a Φ_{Sr} de la única forma posible (de acuerdo con el paso XXII de la construcción 1.3).

¹⁵ Para esto hay dos posibilidades, las cuales corresponden a puntos de Steiner conjugados.

Con esto tenemos que

$$(\Phi_{K_1}) \wedge (\Phi_{K_2}) \wedge (\Phi_{K_3}) \wedge (\Phi_{St}) = [ab, bc, ca, de, ef, fd].$$

lo cual es una gráfica $2K_3$; es decir,

$$\Phi_c := [ab, bc, ca, dc, ef, fd]$$

si c es la recta de Cayley definida por los puntos K_1, K_2, K_3 y St' .

Así pues

Proposición. La correspondencia de rectas de Cayley y puntos de Steiner se da, como en el caso anterior, por la asociación entre una gráfica $2K_3$ y su gráfica complementaria. ■

Consideremos ahora el supremo de las gráficas asociadas a los cuatro puntos de Steiner de una recta de Plücker. Ya que dichas gráficas son complementos de ciertas gráficas de tipo $2K_3$ y por la definición de Φ a este nivel, la gráfica que buscamos sería el complemento de la unión de dichas subgráficas; a saber, el 1-factor $[af, be, cd]$, es decir:

$$\Phi_{pl} := [af, be, cd]$$

Finalmente, para conocer el valor de Φ en los puntos de Salmon S :

1. Fijémonos primeramente en las rectas de Cayley que definirían a uno de dichos puntos.
2. Fijémonos también en sus cuatro puntos de Steiner correspondientes.
3. Mediante Φ_{pl} obtenemos las gráficas $2K_3$ correspondientes:

$$[ad, de, ea, bc, cf, fh], [ab, bd, da, ce, ef, fe] \text{ y } [ac, ce, ea, bd, df, fh].$$

4. Finalmente, la gráfica requerida Φ_5 debe ser la unión de dichas $2K_1$, lo cual es una gráfica tripartita del tipo $K_{2,2,2}$: a saber:

$$\Phi_5 := [ab, bc, ca, de, ef, fd, bd, da, ce, fc, ea, fh]$$

Observación. La última gráfica es, precisamente, el complemento del 1-factor $[af, be, cd]$ por lo que nuevamente, la correspondencia entre puntos de Salmon y rectas de Plücker está dada por complementación de subgráficas de K_6 .

En resumen:

HM	$S(K_6)$
<i>punto de Salmon</i>	$K_{2,2,2}$
<i>recta de Cayley</i>	$2K_1$
<i>recta de Plücker</i>	$3K_2$
<i>punto de Kirkman</i>	$K_1 \cup K_2$
<i>punto de Steiner</i>	$K_{2,3}$
<i>recta de Pascal</i>	C_6
<i>figura</i>	1-factorización

Ahora extenderemos esta relación mediante el empleo de un automorfismo exterior de S_6 a otras subgráficas de K_6 y a ciertas subgráficas de LK_6 .

La desventaja aparente de esta extensión es que depende del automorfismo exterior α empleado, es necesario pues conocerlo en términos de permutaciones de S_6 .

Específicamente, si fijamos un automorfismo exterior de S_n , ω , la acción inducida por este automorfismo en K_6 se extiende a una acción ω^* en $\mathcal{S}(K_6)$. Así, componiendo a Φ con ω^* obtendremos el morfismo deseado:

$$\omega^* \circ \Phi : HM \longrightarrow \mathcal{S}(K_6)$$

Bastará conocer la acción del morfismo anterior en los sistemas para saber como esta definido en el resto de los elementos del hexagrama.

Nos delimitaremos en dar una descripción cualitativa de esta acción en las subgráficas de K_6 que nos interesan.

Lema. Un automorfismo exterior de S_6 intercambia transposiciones con productos triples de transposiciones ajenas.

Demostración.

Basta observar que dichos automorfismos cambian la longitud de las descomposiciones. ■

Por ejemplo, $\omega : (ab) \longleftrightarrow (bc)(de)(fa)$.

Es decir, la acción ω^* intercambiará aristas con 1-factores en K_6 .

Entonces $\omega^* \circ \Phi_{\pi} = (\text{arista})$.

Además, el intercambio mencionado es tal que:

Lema. Las aristas l y m comparten un vértice si y solo si $\omega^*(l)$ y $\omega^*(m)$ forman un hexágono.

Demostración. Observemos que la única manera de que dos 1-factores no formen un hexágono es que tengan una arista en común. Así, si (hi) y (jk) fuesen las transposiciones

asociadas a las aristas l y m , al conjugar $\omega(hi)$ y $\omega(jk)$, obtenemos de nuevo a $\omega(hi)$: es decir, $\omega(hi)$ y $\omega(jk)$ conmutan y de aquí que (hi) y (jk) también conmuten. Equivalentemente,

$$\{h,i\} \cap \{j,k\} = \emptyset$$

Esto último indica que la asociación anterior se extiende a las rectas de pascal como:

$$\omega^* \circ \Phi_p = (\text{par conexo de aristas})$$

Tenemos también que:

$$\omega^* \circ \Phi_K = (\text{terna de aristas con un extremo en común})$$

ya que la gráfica Φ_K consta de tres 1-factores tales que determinan por pares a tres hexágonos y cuyo complemento son dos 1-factores que también determinan un hexágono.

Observación. Estos cinco 1-factores constituyen una 1-factorización de las seis posibles en K_6 . Esta situación vuelve a ser análoga a aquella de los cinco planos tritangentes de un pentaedro de la construcción 1.3.

En cuanto a los puntos de Steiner, tenemos que, para cada uno de estos puntos St , la gráfica asociada Φ_{St} consta de tres 1-factores tales que determinan por pares a tres hexágonos y las aristas de su complemento constituyen una gráfica $2K_3$, por lo que no contiene ni un solo 1-factor.

Es decir, los tres 1-factores mencionados pertenecen a tres 1-factorizaciones distintas de K_6 , de donde

$$\omega^* \circ \Phi_{S_6} = K_3.$$

Lema. El complemento de un 1-factor se constituye, de dos maneras distintas, con cuatro 1-factores los cuales, en cada caso, forman seis hexágonos al tomarlos por pares. ■

Así, para S un punto de Salmon,

$$\omega^* \circ \Phi_S = (\text{dos conjuntos de cuatro aristas concurrentes}).$$

Ya que cada componente del hexagrama es una configuración de Desargues, la cual tiene por grupo de automorfismos a S_3 (ver sección 4.2), es natural (R. San Agustín) considerar las subgráficas de K_6 isomorfas a K_3 . Hay de dos tipos:

1. Aquellas cuyas aristas son todas las que pasan por un vértice de K_6 y
2. Sus gráficas complementarias.

Estas últimas son, las subgráficas completas determinadas por cinco vértices fijos de entre los seis vértices de K_6 . Pero un automorfismo exterior de S_6 , envía a una factorización de K_6 a una de las subgráficas de K_6 del tipo (1), por lo que tenemos:

$$\omega^* \circ \Phi = (\text{1-factorización}) \longrightarrow (\text{subgráfica de } K_6 \text{ de tipo (1)}).$$

3.3 VISUALIZACIÓN Y MANIPULACIÓN DE LK_6

Antes que nada echemos un vistazo a la gráfica completa en seis vértices K_6 . Denotaremos sus vértices por 1, 2, 3, 4, 5 y 6 entonces sus quince aristas estarán denotadas por los pares ordenados:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6)
 (1,3) (2,4) (3,5) (4,6)
 (1,4) (2,5) (3,6)
 (1,5) (2,6)
 (1,6)

Fijémonos en el conjunto de aristas que pasan por un vértice, digamos el vértice 1 (i.e. el conjunto de pares en los cuales aparece en alguna de sus entradas el número 1). Este subconjunto de aristas forman una subgráfica G_1 de K_6 . Construiremos la gráfica de líneas de esta subgráfica:

Observamos que G_1 tiene cinco aristas que tomadas de dos en dos dan diez pares de aristas, por lo tanto de acuerdo con la definición de gráfica de líneas, $L(G_1)$ tendrá cinco vértices y diez aristas y en cada vértice en $L(G_1)$ inciden cuatro aristas en $L(G_1)$ pues cada arista de G_1 es incidente con las otras cuatro en G_1 . Entonces $L(G_1) \cong K_5$. Aplicando este procedimiento a cada uno de los vértices de K_6 obtenemos G_2, G_3, G_4, G_5 y G_6 es decir las sesenta aristas y los quince vértices de LK_6 :

Notación: $D_i = L(G_i)$

Podemos observar que

$$D_i \cap D_j = v_{ij} \quad (1.1)$$

para $1 \leq i < j \leq 6$, que es precisamente el vértice correspondiente a la arista (i,j) en K_6 . De aquí que cada vértice (quince en total) en LK_6 sea de grado ocho.

Cada par de D_i comparten un vértice. Ahora bien si tomamos una terna de D_i , obtenemos tres vértices de LK_6 . Estos tres vértices están conectados por tres aristas (una por cada D_i), determinando una gráfica isomorfa a K_3 . Tenemos pues la asociación

$$\{ D_i, D_j, D_k \} \longleftrightarrow \text{subgráfica isomorfa a } K_3. \quad (1.2)$$

Si ahora coloreamos las aristas de LK_6 de tal forma que si una arista pertenece a D_i , entonces tiene color i , tendríamos seis colores distintos de aristas, y por 1.1, los vértices de LK_6 estarán bicolorados. Y 1.2 será entonces un triángulo tricolor en aristas.

De esta manera tenemos que LK_6 , así coloreada, contiene veinte triángulos tricolores (120 / 6) y sesenta triángulos monocromáticos (diez por cada color).

Podemos entonces establecer una correspondencia entre las aristas de LK_6 y los triángulos monocromáticos de 1.2:

$$\text{arista en } LK_6 \longleftrightarrow \text{triángulo monocromático} \quad (1.4)$$

La correspondencia 1.4 sería en este contexto la correspondencia de Hesse.

Cada vértice en LK_6 está determinado por la intersección de dos D_i , que de ahora en adelante les llamaremos *figuras* por razones que veremos adelante. Así pues, cada vértice queda determinado por la intersección de dos figuras y cada figura queda determinada por su color.

De esta manera el vértice a,b se obtiene de intersectar las figuras de colores a y b . Por otra parte los triángulos de 1.2 están dados por ternas de figuras, así el triángulo a, b, c es determinado por la terna de figuras con colores a, b y c respectivamente.

Describiremos la *vecindad perforada* de un vértice v en LK_6 :

- En v inciden ocho aristas de dos colores distintos, y exactamente cuatro aristas de cada uno de estos colores, pues como dijimos, v queda determinado por la intersección de dos *figuras*.

- Estas dos figuras son totalmente ajenas excepto por v . Es decir dicho vértice es un *punto de corte* de la gráfica que resulta de la unión de las dos *figuras* que determinan a v .

Entonces la vecindad perforada de v es una gráfica *no conexa* de la forma $K_2 \cup$.

Ahora bien, cada arista en LK_6 queda determinada por su color y por sus extremos, esto es, la arista a, b, c es la que tiene color a y sus extremos son los vértices determinados por la intersección de la figura de color a con las figuras de color b y c respectivamente (1.5).

Y el triángulo monocromático a, b, c es la gráfica *complementaria* de 1.5 del mismo color. Aquí, la correspondencia 1.4 está dada explícitamente por

arista a, b, c \longleftrightarrow triángulo monocromático a, b, c .

Cada triángulo tricolor es la intersección de tres figuras, ya que cada par de figuras comparten un vértice. Al tomarlas por pares obtenemos los vértices del triángulo, y las aristas serán pues, las que unen estos vértices en LK_6 .

También, cada triángulo tricolor puede ser puesto en correspondencia con el triángulo tricolor en colores complementarios.

En resumen la gráfica LK_6 tiene:

- Sesenta aristas, divididas en seis grupos de diez aristas cada uno.
- Ochenta triángulos: sesenta monocromáticos, y veinte tricolores.
- Los triángulos monocromáticos están en correspondencia con las aristas de LK_6 .
- En cada vértice inciden ocho aristas de dos colores (cuatro de cada uno).

3.3.1 IMPLEMENTACION

Necesitamos ahora dar un modelo de LK_6 susceptible de ser implementado en un programa de computadora. Tomaremos el modelo tridimensional de R. San Agustín, el cual se puede construir de la siguiente manera:

Tomemos los vértices y las aristas de un icosaedro, y tomemos otros tres puntos *casi* arbitrariamente en su interior. Uniendo cada uno de estos puntos con cada vértice de dos subconjuntos de cuatro (vértices) pertenecientes al icosaedro y completando con las aristas faltantes para hacer una gráfica 8-regular, obtenemos un modelo tridimensional de LK_6 . El siguiente paso es dar las coordenadas tridimensionales de los quince vértices de nuestro modelo.

Podemos suponer que el icosaedro esta inscrito en una esfera de radio uno, y que uno de sus vértices tiene coordenadas $V_0 = (0, 0, 1)$, así los demás vértices quedan determinados por la acción de rotaciones de quintos de vuelta en V_0 , alternando en cada caso el eje de rotación. Los tres vértices restantes se eligen casi al azar en el interior del icosaedro.

Hasta aquí ya tenemos los quince vértices de nuestra gráfica V_0, \dots, V_{14} , que podemos agrupar de cinco en cinco en varias formas distintas, una de ellas sería por ejemplo

$$S_1 = \{ V_6, V_7, V_8, V_{12} \}$$

$$S_2 = \{ V_6, V_7, V_8, V_{11}, V_{12} \}$$

$$S_3 = \{ V_5, V_6, V_{10}, V_{11}, V_{13} \}$$

$$S_4 = \{ V_6, V_7, V_8, V_9, V_{13} \}$$

$$S_5 = \{ V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{14} \}$$

$$S_6 = \{ V_3, V_4, V_9, V_9, V_{14} \}$$

Sea D_i la gráfica completa inducida por S_i con color i en aristas.

Así, vemos que, cada par D_i, D_j comparte un vértice, y los otros puntos discutidos anteriormente se pueden verificar fácilmente. Cada figura es entonces un D_i .

Discutimos ya como es que cada elemento, o subgráfica de LK_6 puede ser determinada por operaciones simples sobre los conjuntos D_i . Esto sin duda simplifica en gran medida la implementación de un paquete que permita la visualización y la manipulación total del objeto en cuestión. Las relaciones combinatorias impuestas por los conjuntos D_i parametrizan en una forma simple a cada uno de los elementos destacados anteriormente (ver tabla 1).

<i>Parámetros</i>	<i>Elemento de LK_6</i>
<i>a, b</i>	<i>vértice</i>
<i>f, a, b</i>	<i>arista</i>
<i>f, a, b</i>	<i>triángulo monocromático</i>
<i>a, b, c</i>	<i>triángulo tricolor</i>
<i>a, b, c</i>	<i>par de triángulos tricolores</i>
<i>a, b</i>	<i>vecindad perforada de v</i>
<i>f</i>	<i>figura</i>

Tabla 1 Parametrización de los elementos de LK_6 .

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Básicamente el problema de manipulación se reduce a determinar el vértice común a dos D_i , y esto, por el tamaño de los conjuntos no resulta mayor problema computacional.

Por ejemplo, la rutina en lenguaje "C" que nos permite visualizar una arista en particular de LK_6 , es:

```
Arista(f, b, c)
int f, b, c;
{
    int d, e;
    d = común(f, Vb);
    e = común(f, Vc);
    color(f);
    movet(d);
    draw(e);
}
```

Recordemos que la arista f, b, c era de color f , y de extremos los vértices comunes a las figuras de colores f, b y f, c respectivamente.

Se tiene ya este paquete implementado, para ello se utilizó el lenguaje "C" gnu, las bibliotecas de graficación VOGLE (Very Ordinary Graphics Library) de distribución gratuita, y el lenguaje TCL-TK para el diseño de la interfase para el usuario. El ambiente X11 es requerido para la versión actual. Se está preparando una versión para MS-DOS y otra para MS-WINDOWS, es por eso que se pensó en usar las bibliotecas VOGLE, pues estas permiten la portabilidad de software de graficación desde una PC hasta una Silicon Graphics.

Este objeto que acabamos de describir está relacionado con el estudio de las relaciones de incidencia de las *sesenta rectas de Pascal* o *Hexagrama Místico de Pascal*, de hecho esta

relación fue la que motivó en gran medida este trabajo. De aquí que este objeto sea también, una representación de ciertas familias de subgrupos del grupo simétrico S_6 (ver R. San Agustín [2]).

3.3.2 OBSERVACIONES

Vimos que cada vértice queda determinado por la intersección de dos figuras. digamos la de color a y la de color b . Aquí podríamos asociar a cada vértice el par ordenado (a,b) , sin embargo, podemos dar otro etiquetado, que esta también implícito en la relación de LK_6 y el Hexagrama Místico.

Ya vimos que cada automorfismo exterior de S_6 intercambia una transposición por un producto de tres transposiciones ajenas. Así pues, podemos considerar un vértice de LK_6 no como una pareja ordenada, sino como la transposición (ab) . Los cálculos están en la tabla 2.

(12)	(12)(36)(45)	(23)	(15)(23)(46)	(35)	(14)(25)(36)
(13)	(16)(24)(35)	(24)	(14)(26)(35)	(36)	(13)(26)(45)
(14)	(13)(25)(46)	(25)	(13)(24)(56)	(45)	(16)(23)(45)
(15)	(15)(26)(34)	(26)	(16)(25)(34)	(46)	(15)(24)(36)
(16)	(14)(23)(56)	(34)	(12)(34)(56)	(56)	(12)(35)(46)

Tabla 2 Acción de un automorfismo exterior en los vértices de LK_6 .

Pero este etiquetado depende del automorfismo exterior utilizado, por lo que no resulta totalmente invariante. Sabemos que dos automorfismos exteriores difieren por un automorfismo interior, lo cual podría salvarlo.

3.3.3 RELACIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO CON LK_6

Resumiremos la correspondencia entre los elementos del hexagrama místico y las subgráficas de LK_6 , basándonos en el trabajo de R. San Agustín (ver [2]), en la siguiente tabla.

<i>Hexagrama místico</i>	<i>LK_6</i>
<i>recta de Pascal</i>	<i>arista</i>
<i>recta de Plucker</i>	<i>vértice</i>
<i>punto de Kirkman</i>	<i>triángulo monocromático</i>
<i>punto de Steiner</i>	<i>triángulo tricolor</i>
<i>recta de Cayley</i>	<i>par de triángulos tricolores en colores complementarios</i>
<i>punto de Salmon</i>	<i>vecindad perforada de un vértice</i>
<i>figura</i>	<i>K_3</i>

Tabla 3 Correspondencia entre los elementos del hexagrama místico y las subgráficas de LK_6 .

4. PARAMETRIZACIÓN DE HM

En esta sección trataremos de dar una breve descripción combinatoria del hexagrama pero ahora en términos de diseños combinatorios que a continuación se definen.

4.1 SISTEMAS DE STEINER Y DISEÑOS COMBINATORIOS

Definición. Un diseño es una estructura de incidencia $S=(P,B,I)$ donde

- (i) P es un conjunto, cuyos elementos llamaremos *puntos*;
- (ii) B es un conjunto, cuyos elementos llamaremos *bloques*;
- (iii) I es una relación de incidencia entre P y B (i.e. $I \subseteq P \times B$).

Si $(p, B) \in I$, entonces diremos que el bloque B y el punto p son incidentes. Puede darse el caso en que si B_1 y B_2 son dos bloques distintos estos sean incidentes con el mismo subconjunto de puntos de P , en tal caso diremos que B_1 y B_2 son bloques repetidos. En caso contrario diremos que el diseño es simple.

Definición. Un t -diseño o t -diseño de bloques en v puntos con tamaño de bloque k y con índice λ , es una estructura de incidencia $D = (P, B, I)$ tal que

- (i) $|P| = v$,
- (ii) $|B| = k$ para todo $B \in B$
- (iii) para cualquier conjunto T de t puntos, existen exactamente λ bloques incidentes con todos los puntos de T .

Como vemos todos los bloques tienen el mismo tamaño y cada t -subconjunto del conjunto de puntos está contenido en el mismo número de bloques. Aquí usaremos las dos notaciones para este tipo de estructuras, escribiremos $S_\lambda(t, k, v)$ o bien t -(v, k, λ).

Definición. Un sistema de Steiner $S(t, k, v)$ es un t -diseño con $\lambda = 1$, y omitiremos el subíndice en el símbolo. Y un sistema de Steiner con $k=3$ lo llamaremos *sistema triple de Steiner*.

4.2 LA CONFIGURACIÓN DE DESARGUES

Un ejemplo de diseño combinatorio es la configuración de Desargues, siendo sus bloques sus rectas y sus diez puntos constituirán el conjunto P .

En este caso $v=10$ y $k=3$.

Si partimos de cinco puntos, P_1, \dots, P_5 , en posición general en \mathbf{P}^3 , y consideramos las diez rectas y los diez planos que ellos determinan y luego consideramos la intersección de la figura obtenida con un plano genérico obtenemos:

- Diez puntos: intersección de las rectas determinadas por los pares $P_i P_j$; $i \neq j$ con el plano.

- Diez rectas: intersecciones de los planos determinados por las ternas $P_i P_j P_k$ con el plano.

- El *diseño residual*¹⁶ de cada punto es una recta.

Observamos que esta intersección es una configuración de Desargues, en [3] se demuestra que el recíproco también es cierto.

En general sean n puntos en posición general, consideremos las $\binom{n}{2}$ rectas y los $\binom{n}{3}$ planos. Sea Π un plano genérico respecto de la figura anterior.

¹⁶ Entenderemos como diseño residual o *clase residual* de un punto P como el conjunto de bloques no incidentes con los bloques que contienen a P .

Entonces la configuración de puntos y rectas obtenidas es del tipo

$$C = \left(\begin{array}{c} \binom{n}{2} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} n-2 \\ \binom{n}{3} \end{array} \right).$$

Y es llamada *C-configuración de Cayley* y se denota simplemente por $Cay(n)$. Así pues, la configuración de Desargues es del tipo $Cay(5)$.

También a este tipo de configuraciones se les llama configuraciones combinatorias ya que, por construcción, tienen por grupo de automorfismos a S_n .

4.3 HM COMO UN SISTEMA DE STEINER

Por la construcción 1.3 tenemos que cada terna de componentes arguesianas comparte un único punto de Steiner. Lo que nos permite definir (R. San Agustín [2]) un sistema de Steiner $S(3,3,6)$ (o bien, un t -diseño $3-(6,3,1)$) dado por la pareja (X, B) , donde

$$X := \{\text{componentes arguesianas de HM}\} = \{D_i\}_{i=1 \dots 6}$$

y $B := \{\text{ternas de elementos de } X\}.$

4.4 UNA PARAMETRIZACIÓN DE HM

Vimos en la construcción 1.3 que los seis pentaedros inducen una notación para los distintos elementos del hexagrama. En resumen:

{puntos de Steiner} \longrightarrow $\{D_i, D_j, D_k\} \longrightarrow (i,j,k)$

{rectas de Plücker} \longrightarrow $\{D_i, D_j\} \longrightarrow (i,j)$

{puntos de Salmon} \longrightarrow $\{D_i, D_j\} \longrightarrow (i,j)$

Ahora bien sea S el punto de Steiner contenido en la recta de Pascal p . Sea D_i la componente a la cual pertenece p . Entonces podemos asociar:

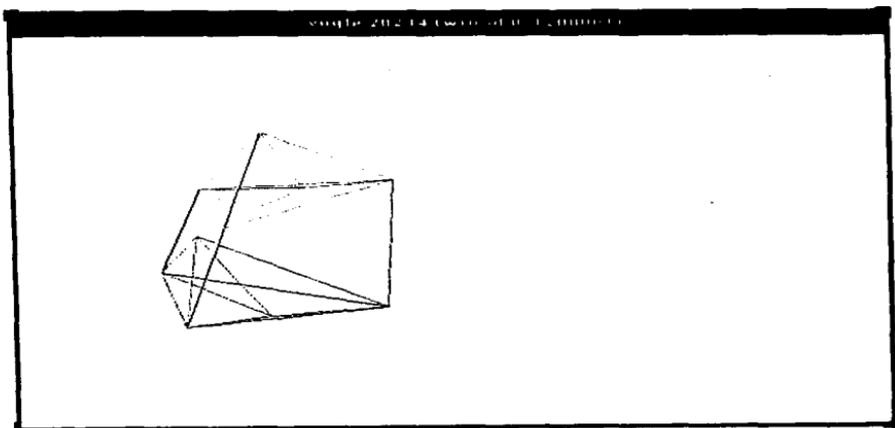
$$\{p\} \longrightarrow \{D_i, D_j, D_k\} \longrightarrow (i,j,k).$$

y mediante la correspondencia de Hesse:

$$\{\text{puntos de Kirkman}\} \longrightarrow \{D_i, D_k, D_j\} \longrightarrow (i,j,k)$$

Así pues, cada elemento del hexagrama es parametrizado por medio de las componentes del teorema de descomposición de Veronese. Así pues, hemos descrito algunas propiedades del sistema $S(3.3.6)$ descrito en la sección anterior.

Apéndice.



Programa de Muestreo (1.2)

Punto de Muestreo (1.2)

Visualización y Manipulación de LRS versión 1.0 1998

File Edit View

| Parámetro de Muestreo: |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Figura: <input type="checkbox"/> |
| S1: <input type="checkbox"/> |
| S2: <input type="checkbox"/> |
| S3: <input type="checkbox"/> |
| S4: <input type="checkbox"/> |
| S5: <input type="checkbox"/> |
| S6: <input type="checkbox"/> |
| S7: <input type="checkbox"/> |
| S8: <input type="checkbox"/> |
| S9: <input type="checkbox"/> |
| S10: <input type="checkbox"/> |
| S11: <input type="checkbox"/> |
| S12: <input type="checkbox"/> |
| S13: <input type="checkbox"/> |
| S14: <input type="checkbox"/> |
| S15: <input type="checkbox"/> |
| S16: <input type="checkbox"/> |
| S17: <input type="checkbox"/> |
| S18: <input type="checkbox"/> |
| S19: <input type="checkbox"/> |
| S20: <input type="checkbox"/> |
| S21: <input type="checkbox"/> |
| S22: <input type="checkbox"/> |
| S23: <input type="checkbox"/> |
| S24: <input type="checkbox"/> |
| S25: <input type="checkbox"/> |
| S26: <input type="checkbox"/> |
| S27: <input type="checkbox"/> |
| S28: <input type="checkbox"/> |
| S29: <input type="checkbox"/> |
| S30: <input type="checkbox"/> |
| S31: <input type="checkbox"/> |
| S32: <input type="checkbox"/> |
| S33: <input type="checkbox"/> |
| S34: <input type="checkbox"/> |
| S35: <input type="checkbox"/> |
| S36: <input type="checkbox"/> |
| S37: <input type="checkbox"/> |
| S38: <input type="checkbox"/> |
| S39: <input type="checkbox"/> |
| S40: <input type="checkbox"/> |
| S41: <input type="checkbox"/> |
| S42: <input type="checkbox"/> |
| S43: <input type="checkbox"/> |
| S44: <input type="checkbox"/> |
| S45: <input type="checkbox"/> |
| S46: <input type="checkbox"/> |
| S47: <input type="checkbox"/> |
| S48: <input type="checkbox"/> |
| S49: <input type="checkbox"/> |
| S50: <input type="checkbox"/> |
| S51: <input type="checkbox"/> |
| S52: <input type="checkbox"/> |
| S53: <input type="checkbox"/> |
| S54: <input type="checkbox"/> |
| S55: <input type="checkbox"/> |
| S56: <input type="checkbox"/> |
| S57: <input type="checkbox"/> |
| S58: <input type="checkbox"/> |
| S59: <input type="checkbox"/> |
| S60: <input type="checkbox"/> |
| S61: <input type="checkbox"/> |
| S62: <input type="checkbox"/> |
| S63: <input type="checkbox"/> |
| S64: <input type="checkbox"/> |
| S65: <input type="checkbox"/> |
| S66: <input type="checkbox"/> |
| S67: <input type="checkbox"/> |
| S68: <input type="checkbox"/> |
| S69: <input type="checkbox"/> |
| S70: <input type="checkbox"/> |
| S71: <input type="checkbox"/> |
| S72: <input type="checkbox"/> |
| S73: <input type="checkbox"/> |
| S74: <input type="checkbox"/> |
| S75: <input type="checkbox"/> |
| S76: <input type="checkbox"/> |
| S77: <input type="checkbox"/> |
| S78: <input type="checkbox"/> |
| S79: <input type="checkbox"/> |
| S80: <input type="checkbox"/> |
| S81: <input type="checkbox"/> |
| S82: <input type="checkbox"/> |
| S83: <input type="checkbox"/> |
| S84: <input type="checkbox"/> |
| S85: <input type="checkbox"/> |
| S86: <input type="checkbox"/> |
| S87: <input type="checkbox"/> |
| S88: <input type="checkbox"/> |
| S89: <input type="checkbox"/> |
| S90: <input type="checkbox"/> |
| S91: <input type="checkbox"/> |
| S92: <input type="checkbox"/> |
| S93: <input type="checkbox"/> |
| S94: <input type="checkbox"/> |
| S95: <input type="checkbox"/> |
| S96: <input type="checkbox"/> |
| S97: <input type="checkbox"/> |
| S98: <input type="checkbox"/> |
| S99: <input type="checkbox"/> |
| S100: <input type="checkbox"/> |

Figura 4. Salida del programa e interfase para el usuario.

Implementaciones:

Aquí presentamos el código fuente tanto del algoritmo 2.2 como del programa para visualizar y manipular a LK_6 . Al final se presenta el código de la interface para el usuario. Los primeros dos programas requieren de las bibliotecas de graficación VOGLE, las cuales se distribuyen de manera gratuita a través de la red internet. La interface para el usuario requiere de las bibliotecas Tcl/Tk también de distribución gratuita en el mismo medio. El ambiente X11 es requerido para la ejecución de estos programas.

Implementación del algoritmo 2.2:

```
#include <vgl.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

typedef int* sigma;
int nplanes;
float hx[9],hy[9];
float escala;

inicia()
{
    float a,b;
    int i,but;
    float v[2];
    short val;
    printf("480,480);
    vinit("X11");
    nplanes=getdepth();
    window(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0, 1.0, 1.0);

    color(BLACK);
    clear();

    escala= 100.0;
    ortho2(-escala,escala, -escala, escala );

    color(WHITE);
    move2(-100.0,100.0);
    for (a = -100.0; a <= 100.0; a += .1) {
        b=0.01*a*a;
        draw2(a,b);
    }
}

* s(n) genera los seis primeros elementos de s, *
sigma s(n)
int n;
{
    sigma uu,perm;
    int cr, i=1, j,r, s, rm, rlt, opo;
    uu={int*}malloc((n+1)*sizeof(int));
    perm={int*}malloc((n+1)*sizeof(int));
    for (j=0; j<(n+1); j++)
        {
            perm[j]=-j;
            uu[j]=0;
        }
    cr=0;

    while(i)
        {
            for (j=0; j<=n; j++)
                uu[j]=0;
            if (cr==6) break;
            cr++;
            recta_pascal(perm);
            desarguez(perm,cr);
            i=n-1;
            while (perm[i]>perm[i+1])
                i--;
            j=n;
            while(perm[i]>perm[j])
                j--;
            rm=perm[i];
            perm[i]=perm[j];
            perm[j]=rm;
        }
}
```

```

ren;
s=i+1;
while (r>s)
{
    rm=perm[s];
    perm[s]=perm[r];
    perm[r]=rm;
    r--;
    s++;
}
}
}

sigma
multiplica(f,j,i)
sigma fi,ji;
{
    int i;
    sigma prod;
    prod=(int*)malloc(7*sizeof(int));
    for (j=i;j<=6;j++)
    prod[j]=f[i];
    return prod;
}

/* se generan las seis componentes arguesianas */
desarguez(f,nc)
sigma fi;
int nc;
{
    int i;
    sigma ji,xi;
    ji=(int*)malloc(7*sizeof(int));
    xi=(int*)malloc(7*sizeof(int));
    color(nc);
    ji[1]=1; ji[2]= 2; ji[3]= 6;
    ji[4]= 5; ji[5]= 3; ji[6]= 4;
    for(i=1;i<=4;i++)
    {
        xi=multiplica(ji,fi);
        recta_pascal(xi);
        fi=xi;
    }

    ji[1]=1; ji[2]=5; ji[3]=2; ji[4]=4; ji[5]=6; ji[6]=3;
    for(i=1;i<=4;i++)
    {
        xi=multiplica(ji,fi);
        recta_pascal(xi);
        fi=xi;
    }
}

ji[1]=1; ji[2]=4; ji[3]=5; ji[4]=3; ji[5]=2; ji[6]=6;
for(i=1;i<=4;i++)
{
    xi=multiplica(ji,fi);
    recta_pascal(xi);
    fi=xi;
}

ji[1]=1; ji[2]=5; ji[3]=3; ji[4]=6; ji[5]=2; ji[6]=4;
for(i=1;i<=2;i++)
{
    xi=multiplica(ji,fi);
    recta_pascal(xi);
    fi=xi;
}

ji[1]=1; ji[2]=3; ji[3]=2; ji[4]=5; ji[5]=4; ji[6]=6;
for(i=1;i<=2;i++)
{
    xi=multiplica(ji,fi);
    recta_pascal(xi);
    fi=xi;
}

/* coordenadas del hexágono */
vertices()
{
    hx[1]=-100.0; hx[2]=-70.0; hx[3]=-30.0;
    hx[4]=50.0; hx[5]=90.0; hx[6]=120.0;
    hy[1]=100.0; hy[2]=49.0; hy[3]=9.0;
    hy[4]=25.0; hy[5]=81.0; hy[6]=144.0;
}

float pendiente(x1,y1,x2,y2)
float x1,y1,x2,y2;
{
    float dx,dy,pend;
    dx = x2-x1;
    dy = y2-y1;
    if (dx==0) return 999999.0;
    else
    {
        pend= dy / dx ;
        return pend;
    }
}

```

```

recta(x1,y1,x2,y2)
float x1,y1,x2,y2;
{
float m,y,b;
float v[2];
m=pendiente(x1,y1,x2,y2);
b=y1-m*x1;
movex2(-escala,(m*-escala)-b);
draw2(escala,(m*escala)+b);
};

recta_pascal(fi)
sigma fi;
{
float m1,m2,b1,b2,px,qx,qy,rx,ry,m,b;
int i;
i=0;
m1=
pendiente(hx[fi(1)],hy[fi(1)],hx[fi(2)],hy[fi(2)]);
m2=
pendiente(hx[fi(4)],hy[fi(4)],hx[fi(5)],hy[fi(5)]);
b1= hy[fi(1)]-m1*hx[fi(1)];
b2= hy[fi(4)]-m2*hx[fi(4)];
if (m1==m2)
{
px=999999.0;
py=999999.0;
};
else
{
px=(b2-b1)/(m1-m2);
py=(m1*b2-m2*b1)/(m1-m2);
i++;
};

m1=
pendiente(hx[fi(2)],hy[fi(2)],hx[fi(3)],hy[fi(3)]);
m2=
pendiente(hx[fi(5)],hy[fi(5)],hx[fi(6)],hy[fi(6)]);
b1= hy[fi(2)]-m1*hx[fi(2)];
b2= hy[fi(5)]-m2*hx[fi(5)];
if (m1==m2)
{
qx=999999.0;
qy=999999.0;
};
else
{
qx=(b2-b1)/(m1-m2);
qy=(m1*b2-m2*b1)/(m1-m2);
i++;
};

m1=
pendiente(hx[fi(3)],hy[fi(3)],hx[fi(4)],hy[fi(4)]);
m2=
pendiente(hx[fi(1)],hy[fi(1)],hx[fi(6)],hy[fi(6)]);
b1= hy[fi(3)]-m1*hx[fi(3)];
b2= hy[fi(1)]-m2*hx[fi(1)];
if (m1==m2)
{
rx=999999.0;
ry=999999.0;
};
else
{
rx=(b2-b1)/(m1-m2);
ry=(m1*b2-m2*b1)/(m1-m2);
i++;
};

if (i==3)
recta(px,py,qx,qy);

if (i==2)
{
if (px==999999.0)
recta(qx,qy,rx,ry);
if (qx==999999.0)
recta(px,py,rx,ry);
if (rx==999999.0)
recta(px,py,qx,qy);
};

/* puntos fundamentales */
circle(px,py,1.0);
circle(qx,qy,1.0);
circle(rx,ry,1.0);
}

controla()
{
char ch;
scanf("%s",&ch);
};

/* se puede entrar un hexágono cualquiera y su
color y se dibuja la recta de Pascal
correspondiente: */
especial()

```

```

{
int wi,co;
sigma j;
ji=(int*)malloc(7*sizeof(int));
ji[1]=1;
while (ji[1])
{
for (wi=1;wi<=6;wi++)
{
scanf("%d",&ji[wi]);
scanf("%d",&co);
color(co);
recta_pascal(ji);
}
}
}
/*programa:*/
main()
{
vertices();
inicia();
color(RED);
s(6);
color(YELLOW);
especial();
}

```

Programa para visualizar y manipular a LA_6 :

```

#include <stdio.h>
#include <vogle.h>
#include <fcntl.h>
#include <unistd.h>
#include <sys/types.h>
#include <sys/stat.h>

#define TRANS 0.06
int numobj,tipobj[100][4],disponible;
main()
{
char device[10],*p.mybuf[BUFSIZ];
float x,y,tdir = TRANS;
int but,nplanes,nbytes;
int i,n,co[60],a,b,c,inf,d,sino,
indice,indice2;
char buf[10][128],cara;
int tiobj[100];
unlink("bandera");
sino=1;
preposition(50, 50);
preFSIZE(600, 400);
vinit("X11");
nplanes = getdepth();
window(-1.0,1.0,-1.0,1.0,-1.0,1.0);
viewport(-1.0,1.0,-1.0,1.0,-1.0,1.0);
lookat(0.0,0.0,2.1,0.0,0.0,0.0,0.0);
textsize(0.15,0.3);
backfacef(1);

if (backbuffer() < 0) {
vexit();
}

exit(0);
}
objetos();
disponible=0;
numobj=0;
while((but = stocator(&x, &y)) != -1) ;
pushmatrix();
/*rota de acuerdo a la
posición del cursor:
rotata(120.0 * x, y);
rotata(120.0 * y, x);
color(BLACK);
clear();
color(RED);
*/ Dibuja la figura
completa:
move(0.780, 0.80, 0.0, 0.0);
if(sino<0)
drawshape(1);
callobj(0);
for(i=0;i<=numobj;i++)
callobj(i);
if (nplanes == 1)
drawshape(0);
popmatrix();
swappbuffers();
inf=open("bandera",O_RDONLY);
disponible=numobj;
if(infd!=-1)
{
nbytes=0;
while(nbytes==0)

```

```

nbytes=read(infd,&cara,1);

but=cara-48;
printf("%d ",but);
switch (but)
{
    case 1:/*pascal*/
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        a=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        b=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        c=cara-48;
        close(infd);

        makeobj(numobj);
        pascal(a-1,b-1,c-1);
        closeobj();

tipobj[disponible][0]=1;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

        numobj++;
        disponible=numobj;
        printf("%d ",disponible);
        unlink("bandera");
        break;

    case 2:/*kirkman*/
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)

```

```

nbytes=read(infd,&cara,1);
        a=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        b=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        c=cara-48;
        close(infd);

        makeobj(numobj);
        printf("pase pase ");
        kirkman(a-1,b-1,c-1);
        closeobj();

tipobj[disponible][0]=2;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

        numobj++;
        disponible=numobj;
        printf("%d ",disponible);
        unlink("bandera");
        break;

    case 3:/*steiner*/
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        a=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara,1);
        b=cara-48;
        nbytes=0;
        while(nbytes==0)

```

```

nbytes=read(infd,&cara,1);
c=cara-48;
close(infd);
makeobj(numobj);
steiner(a-1,b-1,c-1);
closeobj();

tipobj[disponible][0]=3;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

numobj++;
disponible=numobj;
printf("%d ",disponible);
unlink("bandera");
break;

case 5:/*salmon*/
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
a=cara-48;
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
b=cara-48;
close(infd);

makeobj(numobj);
salmon(a-1,b-1);
closeobj();

tipobj[disponible][0]=6;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

numobj++;
disponible=numobj;

printf("%d ",disponible);
unlink("bandera");
break;

case 4: *plucker*/
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
a=cara-48;
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
b=cara-48;
close(infd);

makeobj(numobj);
plucker(a-1,b-1);
closeobj();

tipobj[disponible][0]=5;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

numobj++;
disponible=numobj;
printf("%d ",disponible);
unlink("bandera");
break;

case 6: *cayley*/
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
a=cara-48;
nbytes=0;
while(nbytes==0)

nbytes=read(infd,&cara,1);
b=cara-48;
nbytes=0;
while(nbytes==0)

```

```

nbytes=read(infd,&cara.1);
c=cara-48;
close(infd);
makeobj(numobj);
cayley(a-1,b-1,c-1);
closeobj();

tipobj[disponible][0]=4;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

numobj--;
disponible=numobj;
printf("%sd ",disponible);
unlink("bandera");
break;

case 7: /* figura */
nbytes=0;
while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara.1);
a=cara-48;
close(infd);
makeobj(numobj);
desargues(a-1);
closeobj();

tipobj[disponible][0]=7;
tipobj[disponible][1]=a;
tipobj[disponible][2]=b;
tipobj[disponible][3]=c;

numobj++;
disponible=numobj;
printf("%sd ",disponible);
unlink("bandera");
break;

case 8: /* Quitar un objeto */
nbytes=0;

while(nbytes==0)
nbytes=read(infd,&cara.1);
a=cara-48;
close(infd);
delobj(a);
if(a==numobj)
numobj=numobj-1;

tipobj[a][0]=0;
tipobj[a][1]=0;
tipobj[a][2]=0;
tipobj[a][3]=0;
else
for(indice=a;indice<=numobj-1;indice++)
makeobj(indice);
callobj(indice+1), closeobj();

for(indice2=1;indice2<=3;indice2++)
tipobj[indice][indice2]=tipobj[indice+1][indice2];
tipobj[numobj-1][1]=0;
tipobj[numobj-1][2]=0;
tipobj[numobj-1][3]=0;
disponible=numobj-1;
numobj--;
} /* else */
close(infd);
unlink("bandera");
break;

case 9: sino = -sino;

default: close(infd); unlink("bandera");
} /* case */
close(infd); /* if */

/* Translaciones de la figura. La tecla z
corresponde al Zoom. La tecla '-' cambia la
dirección de la traslación: */
switch (but = checkkey()) {
case '\n':
translate(tdir, 0.0, 0.0);
break;
case 'y':
translate(0.0, tdir, 0.0);

```



```

        break;
    case 3:color(YELLOW);
        break;
    case 4:color(WHITE);
        break;
    case 5:color(MAGENTA);
        break;
    ;
}

desargues(f)
int f;
{
    int i,j;
    for(i=0;i<=4;i++)
    if(i!=f)
        for(j=i+1;j<=5;j++)
            kirkman(f,i,j);
}

plucker(a,b)
int a,b;
{
    int pl,i;
    pl=comun(a,b);
    point(xyz[pl][0],xyz[pl][1],xyz[pl][2]);
    for(i=0;i<=5;i++)
    {
        if(i!=a && i!=b)
            steiner(a,b,i);
    }
}

steiner(a,b,c)
int a,b,c;
{
    int d,e,f;
    d=comun(a,b);
    e=comun(a,c);
    f=comun(c,b);
    color(a);
    move(xyz[d][0],xyz[d][1],xyz[d][2]);
    draw(xyz[e][0],xyz[e][1],xyz[e][2]);
    color(c);
    draw(xyz[f][0],xyz[f][1],xyz[f][2]);
    color(b);
    draw(xyz[d][0],xyz[d][1],xyz[d][2]);
}

salmon(a,b)

int a,b;
{
    int pl,i,j,v1,v2;
    color(a);
    pl=comun(a,b);
    for(i=0;i<=4;i++)
    {
        for(j=0;j<=4;j++)
        {
            v1=figura[a][i];
            if(v1!=pl)
                move(xyz[v1][0],xyz[v1][1],xyz[v1][2]);

            v2=figura[a][j];
            if(v2!=pl)
                draw(xyz[v2][0],xyz[v2][1],xyz[v2][2]);
        }
    }
    /*segundo K4*/

    color(b);
    for(i=0;i<=4;i++)
    {
        if(figura[b][i]!=pl)
        {
            for(j=0;j<=4;j++)
            {
                v1=figura[b][i];
                if(v1!=pl)
                    move(xyz[v1][0],xyz[v1][1],xyz[v1][2]);

                v2=figura[b][j];
                if(v2!=pl)
                    draw(xyz[v2][0],xyz[v2][1],xyz[v2][2]);
            }
        }
    }
    /*closeobjt;*/
}

cayley(a,b,c)
int a,b,c;
{
    int d[3],i,j,gg;
    gg=0;
    steiner(a,b,c);
}

```

```

j=0;
for(i=0;i<=5;i++)
  {
  if(i!=a & i!=b & i!=c)
  {
  d[j]=i;
  j++;
  }
}
steiner(d[0],d[1],d[2]);
}

pascal(f,a,b)
int f,a,b;
{
  int c1,c2;
  c1=comun(f,a);
  c2=comun(f,b);
  colof();
  move(xyz[c1][0],xyz[c1][1],xyz[c1][2]);
  draw(xyz[c2][0],xyz[c2][1],xyz[c2][2]);
}

kirkman(f,a,b)
int f,a,b;
{
  int i,j,c1,c2,d[3];
  c1=comun(f,a);
  c2=comun(f,b);
  colof();
  j=0;
  for(i=0;i<=4;i++)
  {
  if(figura[f][i]!=c2 && figura[f][i]!=c1)
  {
  d[j]=i;
  j++;
  }
}
move(xyz[figura[f][d[0]]][0],xyz[figura[f][d[0]]][1],xyz[figura[f][d[0]]][2]);
for(j=1;j<=2;j++)
  draw(xyz[figura[f][d[j]]][0],xyz[figura[f][d[j]]][1],xyz[figura[f][d[j]]][2]);

draw(xyz[figura[f][d[0]]][0],xyz[figura[f][d[0]]][1],xyz[figura[f][d[0]]][2]);
}

drawshape(fill)

```

```

int fill;
{
  int i;
objetos();
}

/* Se dibujan las sesenta aristas componente a
componente: */
objetos()
{
  color(CYAN);
  move(xyz[4][0],xyz[4][1],xyz[4][2]);
  draw(xyz[1][0],xyz[1][1],xyz[1][2]);
  move(xyz[4][0],xyz[4][1],xyz[4][2]);
  draw(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);
  move(xyz[1][0],xyz[1][1],xyz[1][2]);
  draw(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);
  draw(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
  move(xyz[5][0],xyz[5][1],xyz[5][2]);
  draw(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);

  point(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);

  move(xyz[1][0],xyz[1][1],xyz[1][2]);
  draw(xyz[5][0],xyz[5][1],xyz[5][2]);
  draw(xyz[4][0],xyz[4][1],xyz[4][2]);
  draw(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
  draw(xyz[5][0],xyz[5][1],xyz[5][2]);
  draw(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
  draw(xyz[1][0],xyz[1][1],xyz[1][2]);

  move(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
  draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);
  move(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
  draw(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);
  draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);
  move(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
  draw(xyz[12][0],xyz[12][1],xyz[12][2]);
  draw(xyz[7][0],xyz[7][1],xyz[7][2]);
  move(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
  draw(xyz[7][0],xyz[7][1],xyz[7][2]);
  draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);
  draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
  draw(xyz[7][0],xyz[7][1],xyz[7][2]);
  draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
  draw(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);

  move(xyz[5][0],xyz[5][1],xyz[5][2]);
  draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
  draw(xyz[13][0],xyz[13][1],xyz[13][2]);
}

```

```

draw(xyz5[10],xyz5[11],xyz5[12]);
move(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
draw(xyz[13][0],xyz[13][1],xyz[13][2]);
draw(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);
point(xyz[13][0],xyz[13][1],xyz[13][2]);
move(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
draw(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);
draw(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
draw(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
draw(xyz[5][0],xyz[5][1],xyz[5][2]);
draw(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);

```

```

move(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
draw(xyz[7][0],xyz[7][1],xyz[7][2]);
draw(xyz[13][0],xyz[13][1],xyz[13][2]);
draw(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
move(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);
draw(xyz[13][0],xyz[13][1],xyz[13][2]);
draw(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
move(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
draw(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);
draw(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
draw(xyz[0][0],xyz[0][1],xyz[0][2]);
draw(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
draw(xyz[7][0],xyz[7][1],xyz[7][2]);
draw(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);

```

```

move(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
draw(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
draw(xyz[14][0],xyz[14][1],xyz[14][2]);

```

```

draw(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
move(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
draw(xyz[14][0],xyz[14][1],xyz[14][2]);
draw(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
move(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
draw(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
draw(xyz[10][0],xyz[10][1],xyz[10][2]);
draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);
draw(xyz[2][0],xyz[2][1],xyz[2][2]);
move(xyz[6][0],xyz[6][1],xyz[6][2]);
draw(xyz[11][0],xyz[11][1],xyz[11][2]);

```

```

move(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);
draw(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);
draw(xyz[14][0],xyz[14][1],xyz[14][2]);
draw(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);
draw(xyz[4][0],xyz[4][1],xyz[4][2]);
draw(xyz[14][0],xyz[14][1],xyz[14][2]);
draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);
move(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);
draw(xyz[4][0],xyz[4][1],xyz[4][2]);
draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);
draw(xyz[3][0],xyz[3][1],xyz[3][2]);
move(xyz[9][0],xyz[9][1],xyz[9][2]);
draw(xyz[8][0],xyz[8][1],xyz[8][2]);

```

```

}
```

Interface con el usuario:

```

#!/usr/local/bin/wish -f
=OPO
#181196
set noms (tipo)
set arch "arch"
set bandera "bandera"
global tk_version noms arch
frame .opo -relief raised -bd 3

listbox .opo.a -yscroll -opo.ay set -relief sunken -setgrid 1
scrollbar .opo.sx -command "opo.ayview" -relief sunken
pack .opo.a -side top -expand 1 -fill both -padx 1.2m
pack .opo -fill x
pack .opo.a -side left
pack .opo.sy -in .opo -side left -fill both

frame .letrero -relief sunken -bd 2

```

```
label .letrero.l -text "Visualizacion y manipulacion de LK6 version 1.0 1996" -anchor w
pack .letrero.l -side top -expand 1 -fill both
pack .letrero -in .opo -side top
```

```
frame .boton
button .boton.ca -text Salir -anchor s -command "destroy ."
button .boton.bo -text Quitar -anchor s -command {
    set fd [open $bandera "w"]
    puts -nonewline $fd "8"
    set sel [.opo.a curselection]
    puts -nonewline $fd $sel
    puts -nonewline $fd "
close $fd
    .opo.a delete $sel}
button .boton.ok -text Fondo -anchor s -command {
    set fd [open $bandera "w"]
    puts -nonewline $fd "9"
    puts -nonewline $fd " "
    close $fd
}
```

```
#pack .ls -fill x
#pack .ls.a -side left
#pack .ls.sy -in .ls -side left -fill both
pack .boton.ca .boton.bo .boton.ok -expand 1 -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .boton -in .opo -side left
```

```
frame .pascal -relief raised -bd 3
label .pascal.letrero -text "Recta de Pascal:" -anchor w
pack .pascal.letrero -side top -expand 1 -fill both
```

```
label .pascal.t -text "Figura " -anchor w
entry .pascal.figura -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable pa
pack .pascal.t.figura -side right -padx 2 -pady 2
pack .pascal.t -side top -expand 1 -fill both
```

```
label .pascal.tb -text "a:" -anchor w
entry .pascal.tb.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable pb
pack .pascal.tb.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .pascal.tb -side top -expand 1 -fill both
```

```
label .pascal.tc -text "b:" -anchor w
entry .pascal.tc.c -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable pc
pack .pascal.tc.c -side right -padx 2 -pady 2
pack .pascal.tc -side top -expand 1 -fill both
```

```
button .pascal.ok -text SI -anchor s -command [.opo.a insert end "Recta de Pascal (Spa.Spb.Spc)"
    set fd [open $bandera "w"]
    puts -nonewline $fd "1"
    puts -nonewline $fd Spa
```

```

puts -nonewline $fd $pb
puts -nonewline $fd $pc
puts -nonewline $fd ""
close $fd)

button .pascal.li -text NO -anchor s -command { set pa ""
set pb ""
set pc "" }
pack .pascal.ok .pascal.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .pascal -side left

frame .kirkman -relief raised -bd 3

label .kirkman.lettero -text "Punto de Kirkman:" -anchor w
pack .kirkman.lettero -side top -expand 1 -fill both

label .kirkman.t -text "Figura" -anchor w
entry .kirkman.ta -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable ka
pack .kirkman.ta -side right -padx 2 -pady 2
pack .kirkman.t -side top -expand 1 -fill both

label .kirkman.tb -text "a:" -anchor w
entry .kirkman.tb.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable kb
pack .kirkman.tb.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .kirkman.tb -side top -expand 1 -fill both

label .kirkman.tc -text "b:" -anchor w
entry .kirkman.tc.c -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable kc
pack .kirkman.tc.c -side right -padx 2 -pady 2
pack .kirkman.tc -side top -expand 1 -fill both

button .kirkman.ok -text SI -anchor s -command { .opo.a insert end "Punto de Kirkman ($ka.$kb.$kc)"

set fd [open $bandera "w"]
puts -nonewline $fd "2"
puts -nonewline $fd $ka
puts -nonewline $fd $kb
puts -nonewline $fd $kc
puts -nonewline $fd ""
close $fd)

button .kirkman.li -text NO -anchor s -command { set ka ""
set kb ""
set kc "" }
pack .kirkman.ok .kirkman.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .kirkman -side left

frame .steiner -relief raised -bd 3
label .steiner.lettero -text "Punto de Steiner:" -anchor w

```

pack .steiner.lettero -side top -expand 1 -fill both

label .steiner.ta -text "a:" -anchor w
entry .steiner.ta.a -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable sa
pack .steiner.ta.a -side right -padx 2 -pady 2
pack .steiner.ta -side top -expand 1 -fill both

label .steiner.tb -text "b:" -anchor w
entry .steiner.tb.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable sb
pack .steiner.tb.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .steiner.tb -side top -expand 1 -fill both

label .steiner.tc -text "c:" -anchor w
entry .steiner.tc.c -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable sc
pack .steiner.tc.c -side right -padx 2 -pady 2
pack .steiner.tc -side top -expand 1 -fill both

button .steiner.ok -text SI -anchor s -command {opo.a insert end "Punto de Steiner (\$Sa,\$Sb,\$Sc)"

```
set fd {open $bandera "w"}
puts -nonewline $fd "3"
puts -nonewline $fd $Sa
puts -nonewline $fd $Sb
puts -nonewline $fd $Sc
puts -nonewline $fd " "
close $fd
```

button .steiner.li -text NO -anchor s -command { set sa ""
set sb ""
set sc "" }

pack .steiner.ok .steiner.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m

pack .steiner -side left

frame .plucker -relief raised -bd 3
label .plucker.lettero -text "Recta de Plucker" -anchor w
pack .plucker.lettero -side top -expand 1 -fill both

label .plucker.t -text "a:" -anchor w
entry .plucker.ta -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable Pa
pack .plucker.ta -side right -padx 2 -pady 2
pack .plucker.t -side top -expand 1 -fill both

label .plucker.tb -text "b:" -anchor w
entry .plucker.tb.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable Pb
pack .plucker.tb.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .plucker.tb -side top -expand 1 -fill both

button .plucker.ok -text SI -anchor s -command {opo.a insert end "Recta de Plucker (\$Pa,\$Pb)"

```

set fd [open $bandera "w"]
puts -nonewline $fd "4"
puts -nonewline $fd $Pa
puts -nonewline $fd $Pb
puts -nonewline $fd ""
close $fd

button .plucker.li -text NO -anchor s -command { set Pa ""
set Pb "" }
pack .plucker.ok .plucker.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .plucker -side left

frame .cayley -relief raised -bd 3
label .cayley.letrero -text "Recta de Cayley" -anchor w
pack .cayley.letrero -side top -expand 1 -fill both

label .cayley.a -text "a:" -anchor w
entry .cayley.a -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable ca
pack .cayley.a -side right -padx 2 -pady 2
pack .cayley.a -side top -expand 1 -fill both

label .cayley.b -text "b:" -anchor w
entry .cayley.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable cb
pack .cayley.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .cayley.b -side top -expand 1 -fill both

label .cayley.c -text "c:" -anchor w
entry .cayley.c -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable cc
pack .cayley.c -side right -padx 2 -pady 2
pack .cayley.c -side top -expand 1 -fill both

button .cayley.ok -text SI -anchor s -command { .opo.a insert end "Recta de Cayley ($ca,$cb,$cc)"

set fd [open $bandera "w"]
puts -nonewline $fd "6"
puts -nonewline $fd $ca
puts -nonewline $fd $cb
puts -nonewline $fd $cc
puts -nonewline $fd ""
close $fd

button .cayley.li -text NO -anchor s -command { set ca ""
set cb ""
set cc "" }
pack .cayley.ok .cayley.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .cayley -side left

```

```

frame .salmon -relief raised -bd 3
label .salmon.letrero -text "Punto de Salmon" -anchor w
pack .salmon.letrero -side top -expand 1 -fill both

label .salmon.t -text "a:" -anchor w
entry .salmon.t.a -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable Sa
pack .salmon.t.a -side right -padx 2 -pady 2
pack .salmon.t -side top -expand 1 -fill both

label .salmon.tb -text "b:" -anchor w
entry .salmon.tb.b -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable Sb
pack .salmon.tb.b -side right -padx 2 -pady 2
pack .salmon.tb -side top -expand 1 -fill both

button .salmon.ok -text SI -anchor s -command { .opo.a insert end "Punto de Salmon ($Sa,$Sb)"

                                set fd [open $bandera "w"]
                                puts -nonewline $fd "$S"
                                puts -nonewline $fd $Sa
                                puts -nonewline $fd $Sb
                                puts -nonewline $fd " "
                                close $fd}

button .salmon.li -text NO -anchor s -command { set Sa ""
                                                set Sb "" }
pack .salmon.ok .salmon.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m
pack .salmon -side left

frame .figura -relief raised -bd 3
label .figura.letrero -text "Figura" -anchor w
pack .figura.letrero -side top -expand 1 -fill both

label .figura.t -text "Figura" -anchor w
entry .figura.t.a -width 1 -relief sunken -bd 2 -textvariable fa
pack .figura.t.a -side right -padx 2 -pady 2
pack .figura.t -side top -expand 1 -fill both

button .figura.ok -text SI -anchor s -command { .opo.a insert end "Figura ($fa)"

                                set fd [open $bandera "w"]
                                puts -nonewline $fd "7"
                                puts -nonewline $fd $fa
                                puts -nonewline $fd " "
                                close $fd}

button .figura.li -text NO -anchor s -command { set fa "" }
pack .figura.ok .figura.li -side left -ipadx 2m -ipady .3m

```

pack .figura -side left

Bibliografía

- [1] L. Cremona, *Teoremi Stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell' esagrammo di Pascal*. Memorie dei Reale academie dei Lincei, I (1887) p.p. 854-874.
- [2] San Agustín, R., *Dos representaciones del hexagrama místico*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias. UNAM, (1996).
- [3] San Agustín, R., *On Cayley's projective configurations, an algorithmic study*. Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry, (1995) p.p. 289-299.
- [4] San Agustín, R., *Configuraciones de rectas en el espacio*. UAM-I monografías num. 04.0406.II.01.11.92, (1993) México.
- [5] Cárdenas, H. y San Agustín, R., *On Cayley's construction and certain Combinatorial Designs*. Publicaciones preliminares 345, IMUNAM (1994).
- [6] L. Bokowski y B. Sturmfels, *Computational Synthetic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics No. 1355. Springer, 1989.
- [7] Reid, Miles. *Undergraduate Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 1988.

-
- [8] Salmon, G., *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*, Vol. II. CHELSEA Publishing Co. New York, 1965.
- [9] Hilbert, D. y Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*. CHELSEA, 1952.
- [10] Semple, J. G. y Roth, L., *Introduction to algebraic geometry*. Oxford at the clarendon press, 1949.
- [11] van Lint, J. H. y Wilson, L. M., *A course in combinatorics*. Cambridge university press, 1992.
- [12] Januz, G. y Rotman, J., *Outer automorphisms of S_6* . American Mathematical Monthly, Junio-Julio (1982), p.p. 407-410.
- [13] Miller, D. W., *On a theorem of Hölder*. American Mathematical Monthly, 65(1958) p.p. 252-254.
- [14] Bardelli, F. y Del Centina, A., *Nodal Cubic Surfaces and the Rationality of the Moduli Space of Curves Of Genus Two*. Mathematische Annalen, Springer-Verlag, (1985) p.p. 599-602.
- [15] Cameron, P. J. y van Lint, J. H., *Designs, Graphs. Codes and their links*. LMS Student texts 22. Cambridge University Press, 1991.