

46
zej



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EMISIÓN TÉRMICA DE CASQUETES POLARES EN PULSARES. "CAMPOS MAGNÉTICOS ROTACIONALES" "NO-DIPOLARES"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE F Í S I C O
P R E S E N T A
CARLOS PÉREZ TORRES

DIRECTOR DE TESIS
DR. DANNY P. PAGE R.

CIENCIAS
EXACTAS

MÉXICO, D.F.

1997

TESIS CON
FALJA DE ORIGEN





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrón Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

EMISION TERMICA DE CASQUETES POLARES EN PULSARES:
CAMPOS MAGNETICOS ROTACIONALES NO-DIPOLARES.

realizado por CARLOS PEREZ TORRES

con número de cuenta 9150760-8 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. DANY PIERRE PAGE ROLLINET

Propietario

DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

Propietario

DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ

Suplente

DR. ANTONIO SARMIENTO GALAN

Suplente

DR. EUGENE KURTZ STANLEY

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*A mis Padres
Eva Torres G. & Miguel Pérez R.
A mis dos importantes mujeres
Mi hermana, Guadalupe Pérez T.
Mi Novia, Diana Herrera E.*

**LA SCIENCE EST DE L'HUMANITE
ET POUR LA PROSPERITE DE TOUTE
LA RACE HUMANIE...
NON PAS LA DESTRUCION DE NOSTRE
MONDE**

Carlos Pérez Torres. Agosto - 1996

AGRADECIMIENTOS

Unas de las partes más difíciles es sin duda la redacción de los agradecimientos, es aquí, en donde uno se preocupa por no olvidar a alguien. Sin embargo, creo que he de agradecer no sólo al presente sino también al pasado.

Agradezco a quién se tenga que agradecer la existencia del universo que me tocó conocer, del cuál seguiré cautivado. No sólo por su especial presencia, sino porqué también es lo más hermoso que mis ojos y mi mente hallan podido gozar. Claro que yo no hubiese gozado de ésto sin la válida enseñanza que recibí, y que seguiré recibiendo de todos y cada uno de mis maestros, de mis amigos, de aquellos que con una sonrisa me hicieron comprender que la vida es algo más que números, trucos etc, que se ven a diario. Muchos de ellos son téstigos mudos y generadores de nuevas ideas, que aún sin saberlo contribuyen a fortalecer mi espíritu, mis ideales sobre el conocimiento y la manera de retribuir en algo el precioso regalo que en conjunto me han heredado.

Esta tesis esta dedicada a todos ellos, puesto que entre estos se encuentran mis padres, mi hermana y mi novia, quienes han sabido sabido ser ante todo mis mejores amigos, y de quienes he recibido quizá la mayor enseñanza, el saber amar y luchar por las cosas que uno elige, soportando todo y aceptando con sabiduría las consecuencias. Sin embargo, he de ser también explícito en el presente y agradecer con viva voz, a los maestros que con sus excelentes conocimientos han logrado, no sólo enseñarme, sino también ser partícipes de mi formación científica.

Excelentes personas y dedicada como, el Dr. Eugenio Ley Koo quién con una esquisita versatilidad es capaz de explicar lo más complicado de la física de manera impresionantemente sencilla, él es quién me ha mostrado el valor de ser amante de una disciplina como lo es la física. Que además de ser buen maestro es una persona impecable, honesta y hasta donde yo se, siempre dispuesta a colaborar con los que desean aprender. Al Dr. Jorge Ize Menchaca que con su sobría pero bien encausada rigidez, formó en mí el carácter para atacar los problemas, no sólo los académicos sino aún los reales, él es quién de alguna manera me enseñó con su forma de ser, y a través de sus cursos de cálculo - I hasta EDO, la sistematización y el orden para resolver problemas, lo que ahora es parte de mi formación.

Así también quiero agradecer, a los sinodales, lo cuales con sus aportaciones me hicieron mejorar y complementar en algunos casos esta tesis. Por supuesto en especial a mi asesor, quién me ha brindado su confianza, su tiempo, y de quién de manera natural he recibido todas las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo, y aún más en el campo mismo de la astrofísica de estas estrellas especiales. A él le agradezco también, su válida amistad, su afable comunicación para conmigo, lo que he recibido del Instituto de Astronomía gracias a su ayuda y recomendaciones, y por lo mejor, el haberme permitido entrar en éste mundo fascinante de las *estrellas de neutrones*. Al Dr. Dany Pierre Page. R

INDICE

§0.1 Generalidades	(5)
0.1.1 Introducción.	

Capítulo 1

Planteamiento del problema (Modelo Mínimo de PAGE)

§1. Variabilidad de la fracción pulsada en curvas de luz.	
1.1 Introducción	(6)
1.2 Postulados del modelo mínimo.....	(10)
1.3 Formulación y aplicabilidad del modelo mínimo.....	(11)
1.4 Resultados (Espectro y curvas de luz).....	(13)
1.5 Flujo de fotones en espacio-tiempo plano.....	(16)
1.6 Flujo de fotones en espacio-tiempo curvado.....	(17)

Capítulo 2

Electrodinámica de una estrella de neutrones

§2 Modelos Básicos.

- 2.1 Rotor dipolar magnético en el vacío para un pulsar. (22)
- 2.2 Rotor dipolar magnético en un plasma. (27)
 - 2.2.1 Magnetosfera de un pulsar rotando.
- 2.3 Calentamiento de polos por colisiones. (30)
 - 2.3.1 Modelo Sturrock (1971).
 - 2.3.2 Modelo "Inner-Gap" Ruderman & Sutherland (1975).
 - 2.3.3 Modelo "Outer-Gap" de Chen, Ho & Ruderman.
 - 2.3.4 Modelo de Arons (1977).
- 2.4 Efectos geométricos en la luminosidad L_p (37)

Capítulo 3

Modelo magnético "Dipolar + Cuadrupolo".

§3. Descripción matemática del modelo D + C.	
3.1 Introducción.	(40)
3.2 Estructura del modelo D + C con gravedad.	(40)

Capítulo 4

Dimensiones y posición de los casquetes polares (D + C).

§4. Aplicación y resultados del modelo D + C.	
4.1 Introducción.	(44)
4.1.1 Generalidades.	
4.2 Integración de líneas de campo.	(45)
4.3 Variabilidad posicional de los casquetes polares.	(47)
4.4 Procedimiento del cálculo de áreas.	(51)
4.1.1 Algunos resultados previos.	
4.5 Aplicación del modelo a pulsares jóvenes.	(57)
4.5.1 Introducción.	

4.6 Extensión del modelo.	(62)
§5.0 Conclusiones.	(64)
§Apéndices	
A.1 Radiación de curvatura.	(66)
B Algunos datos técnicos de los detectores de ROSAT.	(68)
B.1 Elementos de medida del detector PSPC.	
B.2 Eficiencia cuántica.	
B.3 Resolución de energía.	
B.4 ¿ Qué es el Background ?	
B.5 Tasa de conteo de fotones (Razón de cuentas esperadas).	
B.6 Fracción pulsada (Respuesta del detector).	
C Tabulaciones de los cuadrupolos aplicados en el modelo.	(73)
D Matemáticas.	(78)
D.0.7 Solución general del campo eléctrico del modelo C+D.	
E Desarrollos de algunas ecuaciones importantes.	(81)
F Referencias.	(83)
F.1 Artículos.	
F.2 Bibliografía.	

0.1 Generalidades

0.1.1 Introducción

La radiación emitida por los objetos celestes es de suma importancia, pues del conocimiento y análisis de ésta, es posible modelar la estructura de tales objetos. En el presente trabajo de tesis nos dedicaremos a explicar y modelar la emisión térmica para los objetos llamados Pulsares (Estrellas de neutrones en alta rotación). En particular se considera que dicha radiación térmica puede provenir de las partes polares (casquetes polares), saliendo al medio externo por vía líneas de campo magnético. Los modelos actuales consideran que dicha estructura del campo magnético puede ser representada por un dipolo simple, resultando de dicho modelo buenas aproximaciones sobre la estructura, pero no explica las variaciones en las curvas de luz observadas de algunos pulsares. Llevandonos a pensar la posibilidad de la existencia de un campo magnético más complejo, el cual probablemente genere las variaciones en las curvas de luz, variaciones que de aquí en adelante llamaremos fracción pulsada.

El interés básico de este trabajo, es poder modelar el campo magnético en un orden de magnitud superior, es decir; aplicar componentes cuadrupolares al dipolo natural, y observar de los resultados si es posible generar estas variaciones debido a modificaciones en su campo magnético superficial. Lo anterior se realizará con la ayuda de ciertas hipótesis y modificaciones sobre el modelo básico de dipolo, y sobre la base de observaciones realizadas por un satélite que detecta rayos-X (ROSAT).

En el trabajo expuesto a continuación, encontraremos las bases físicas y observacionales sobre las cuales descansan los argumentos de juicio para el modelaje de la emisión térmica de los casquetes polares bajo el modelo dipolo+cuadrupolo, llevando un orden creciente de base. Así en el capítulo 1, desarrollaré los fundamentos en términos de un modelo mínimo, y la descripción de posibilidades para generar la variación en las curvas de luz. En el capítulo 2, encontraremos algunos de los modelos teóricos para explicar la emisión de los casquetes y su mecanismo. En el capítulo 3, nos referiremos a la base matemática del modelo dipolo+cuadrupolo propuesto en este trabajo, para que así, en el capítulo 4, encontremos la aplicación directa y resultados del modelo a pulsares jóvenes (Geminga, PSR 1929+10).

1 Variabilidad de la fracción pulsada en curvas de luz.

1.1 Introducción

A pesar de la ya basta experiencia del hombre, en la ciencia, es bien conocido que ningún campo de estudio está completamente descubierto, y aún más en el área de astrofísica. Es por esto que en éste apartado se establecen los elementos mínimos para justificar la emisión térmica en estrellas de neutrones fuertemente magnetizada propuestos por el Dr PAGE en 1994.¹

Desde entonces se mencionaba que todos los datos observacionales eran radiación que provenía de los alrededores, pero no de la superficie de la estrella. Pese a su singular comportamiento respecto de otras estrellas, llamemos a éstas últimas normales, entonces es posible pensar que dentro de ciertas condiciones se pueden originar emisiones de regiones superficiales específicas.

Al hablar de regiones superficiales, en realidad no cometemos ningún error de expresión, puesto que quizá las estrellas de neutrones sean las únicas que en realidad tienen superficie. Los escenarios que proveen el nacimiento de estas estrellas son bastante cálidos, del orden de 10^{11} K, temperaturas que descenderán rápidamente en una escala de tiempo de pocos días a 10^9 K en el interior, llegando posteriormente a temperaturas superficiales del orden de $\approx 5 \times 10^6$ K. A éstas temperaturas, el mecanismo dominante de enfriamiento será la emisión de neutrinos, los cuales junto con su contraparte, los antineutrinos, escapan de la estrella, lo que trae como consecuencia dicho enfriamiento. En general el mecanismo básico es el llamado URCA modificado, y se lleva a cabo de la siguiente forma:

¹Talk presented at the Jubilee Gamow Seminar, A.F.Ioffe Physico-Technical Institute, St. Petersburg, Sep. 12/14/1994.

$$n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$n + p + e^- \rightarrow n + n + \nu_e$$

De lo anterior resulta que las temperaturas reinantes en la superficie son del orden de $10^6 K$ y la radiación modelada con cuerpo negro muestra su máximo (pico) a 240 eV. Produciendo una componente de radiación en rayos - X, y si además se considera una luminosidad como la de una masa solar ($L_{\odot} = 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$), encontramos que se espera un radio estelar de $\approx 10^7 m$.

De las recientes observaciones de satélites dotados de sistemas de detección en bandas de radiación X, γ , e inclusive muy actualmente en bandas de UV (extremo), se considera que existe fuerte evidencia de radiación térmica en varios pulsares. Así también, el telescopio espacial hace su contribución usando la FOC (Faint Object Camera), detectando pulsares a través del filtro U (F342). Mostrando una interesante comparación con los resultados de las partes suave, y térmica del espectro del ROSAT en rayos X. A continuación se presenta en la tabla 1, los elementos comparativos de estas observaciones.

Pulsar	log(edad)	Radio	Optico	X _{ray}	T _{drift}
0531+21	3.1	P	P.(HST)	P,M	P
0540-69	3.2	P	P.(HST)	P,M	...
1509-58	3.2	P	D	P,M	...
0833-45	4.1	P	P.(HST)	P.S+M	P
1706-44	4.2	P	...	?	P
1800-21	4.2	P	...	D.?	...
1823-13	4.3	P	...	d.?	...
2334+61	4.6	P	...	D.?	...
1951+32	5.0	P	...	P.?	P
0656+14	5.0	P	D.(HST)	P,S,C,M	?
¶Geminga	5.5	...	D.(HST)	P,S,C,M	P
1055-52	5.7	P	D.(HST)	P,M,S,C	P
0355+54	5.75	P	...	D,S+?	...
1929+10	6.5	P	D.(HST)	P,C	...
0823+26	6.69	P	...	D.?	...
0950+08	7.2	P	D.(HST)	D,C,M	...

Table 1:

Observaciones en multifrecuencia de estrellas de neutrones aisladas. Donde *S* = emisión térmica de la superficie, *M* = emisión de la magnetosfera, *C* = emisión de los casquetes, *P* = emisión pulsada, *D* = simplemente detectado, *HST*=(Hubble Space Telescope).

¶ Noticia importante (15/02/97): Se ha detectado Geminga en ondas-radio, como lo indica Central Bureau for Astronomical Telegrams. INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION (Texto que se imprime en la versión original).

PSR J0633+1746 A. D. Kuzmin and B. Y. Losovsky, Lebedev Physical Institute, Moscow, report a radio detection of the pulsar PSR J0633+1746 (Geminga) with period 0.237 s. A flux density of about 0.1 Jy at frequency 102 MHz, corresponding to a spectral index of δ 1.7, and a dispersion measure of 3 ± 1 pc cmE⁻³ was determined. The width of the integrated profile at 50 percent of peak intensity, *W*50, is 80 deg of the total pulse phase; *W*10 = 130 deg. There is apparently an interpulse of 0.2 of the main pulse intensity spaced by about 190 deg.

Las observaciones hechas por *ROSAT* de cuatro pulsares cercanos, abren un nuevo campo de estudio (Los pulsares son; PSR 0833-45, PSR 0656+14 , PSR 0630+178 , PSR 1055-52). Estos muestran características comunes en donde todos tienen una componente espectral suave en el rango de energías desde 0.1 KeV hasta 0.5-1.0 KeV, interpretado como emisión térmica de toda la superficie del pulsar, y un componente duro, cuyo origen puede ser emisión térmica de los casquetes polares o emisión no-térmica de la magnetosfera; ambas componentes son pulsadas (figura-1).

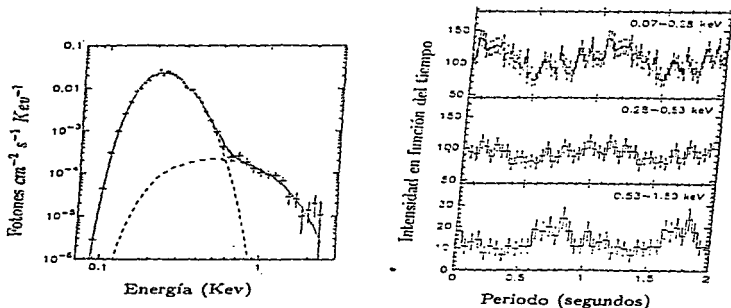


Figura. 1 (Izq) Espectro del pulsar Geminga detectado por *ROSAT*, donde se ven las dos componentes (suave y dura), y donde las líneas segmentadas muestran los límites de cada componente. (Der) Curvas de luz de Geminga en tres bandas distintas de energía.

A pesar de que la estructura interna de las estrellas de neutrones es un problema teórico con muchas interrogantes, de lo que sí estamos seguros es de la existencia de un fuerte campo magnético que las envuelve, digamos del orden de $10^8 - 10^{13}$ Gauss. Dicho campo determina, en principio, el estado físico de la superficie y el flujo de calor del interior estelar hacia la corteza superficial. Este flujo se habrá de afectar por los intensos campos magnéticos, generando fuertes variaciones en el gradiente de temperatura entre las regiones donde el campo puede ser radial o tangencial. De ésta manera, las diferencias de temperatura se manifiestan como una modulación en la emisión térmica en rayos-X.

1.2 Postulados del modelo mínimo

A reserva de ser más precisos en el futuro, aclaremos parte de las ideas. Como sólo se evidencia la existencia de un fuerte campo magnético entonces los postulados más elementales serán:

A) La componente suave detectada es radiación térmica de toda la superficie.

Lo cuál significa que no es de la magnetosfera.

B) La temperatura de la superficie es determinada por el calor que fluye desde el interior hasta la superficie por medio de la corteza magnetizada.

Lo cuál significa que la conductividad térmica en la envoltente se vea afectada por el campo magnético, implicando que la temperatura superficial no sea uniforme.

C) Las modulaciones observadas en las curvas de luz se hacen presentes debido a las inhomogeneidades en la distribución de temperaturas, inducidas por el campo magnético.

Despreciando naturalmente la posibilidad de absorción en la magnetosfera.

D) La emisión total se considera como un radiador cuerpo-negro (BB).

Como postulados alternativos o complementarios se proponen:

A') La componente suave se puede comprender como emisión magnetosférica, pero aún no se ha podido proponer un modelo.

B') La superficie puede ser calentada por medio de partículas rechazadas por la magnetosfera hacia la superficie produciendo emisión en rayos-X de regiones privilegiadas (Poloidales).

C') Se considera que el flujo emitido de la superficie a pasado por la magnetosfera donde la absorción y dispersión se encuentra en resonancia, modificando de ésta manera la forma de la curva de luz. ²

D') Se proponen varias opciones de atmósferas magnetizadas:

- 1) Compuesta de hidrógeno puro.³
- 2) Con elementos pesados.⁴
- 3) Superficie magnetizada con atmósfera débil.⁵
- 4) Composición de cadenas y moléculas magnéticas.⁶

1.3 Formulación y aplicabilidad del modelo mínimo.

Considerando los cálculos teóricos realizados para estrellas de neutrones con envoltente magnetizada ⁷, se encuentran grandes diferencias en temperaturas en relación con las componentes tangenciales (T_{\perp}) y radiales (T_{\parallel}), donde las últimas llegan a alcanzar valores hasta 10 veces más altos que las tangenciales. Esto no resulta claro a primera vista, pero si consideramos el transporte de calor en el caso de un campo magnético radial u ortogonal, entonces nos restringiremos a un caso unidimensional puesto que por simetría, el flujo de calor sólo puede ser radial (en ambos campos radial y ortogonal). Para un caso intermedio, es decir, para una orientación arbitraria del campo, el problema de transporte es bidimensional. Sin embargo, haciendo uso

²Halpern & Ruderman. 1993.

³Shibanov *et al.*, 1992

⁴Miller, 1996

⁵Pashikid, Gundmunsson & Phetick.1989.

⁶Laf. Sulpeter & Shapiro. 1992.

⁷Schnaaf, M.E. 1990. A & A.227,61.

de una situación física, como considerar delgada la envolvente, donde es uniforme la orientación del campo, entonces en una primera aproximación podemos reducir el problema a una dimensión.

Como la T_s (temperatura superficial) depende sólo de la magnitud B del campo magnético y de su ángulo Θ_D respecto de la dirección normal (radial) \vec{n} , Greenstein & Hartke (1983) muestran que la descripción puede estar definida sólo por el ángulo explícito Θ_D como

$$T_s(\Theta_D) = \eta(\Theta_D) * T_s(\Theta_D = 0) \quad [1.1]$$

donde η se define en términos de Θ_D como

$$\eta(\Theta_D) = (\cos^2(\Theta_D) + \eta_0^4 \sin^2(\Theta_D))^{\frac{1}{4}} \quad [1.2]$$

Tomando η_0 como el cociente de las conductividades térmicas paralelas y ortogonales, que en principio los autores consideran constantes en la envolvente.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) se pueden reescribir como

$$T_s^4(\Theta_D) = T_{s,\perp}^4 \sin^2 \Theta_D + T_{s,\parallel}^4 \cos^2 \Theta_D \quad [1.3]$$

donde $T_{s,\parallel}$ y $T_{s,\perp}$ aparecen como temperatura superficial cuando el campo es radial ($\Theta_D = 0$) o tangente ($\Theta_D = 90$) y entonces,

$$\eta_0 = \frac{T_{s,\perp}}{T_{s,\parallel}} \quad [1.4]$$

Finalmente reconocemos dos importantes aproximaciones:

a) Considerar que los gradientes de temperatura radial y ortogonal son distintos y en general $dT/dr > dT/dx$ donde x representa la componente ortogonal.

b) Que el cociente de las conductividades es constante $K_{\perp}/K_{\parallel} = cte \Rightarrow$ que $(T_{\perp}/T_{\parallel})^4 = K_{\perp}/K_{\parallel}$.

Capa de magnetosfera

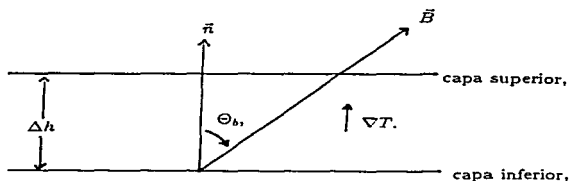


Figura.2 Las componentes de la temperatura sólo dependen del ángulo Θ_D entre la línea de campo y la normal a la superficie, pues la conductividad térmica es mayor cuando es radial.

En estos cálculos sólo se han incluido el transporte de energía por medio de fotones y electrones, aún cuando para el caso de $(\Theta = 90)$ se puede llevar a cabo por otros mecanismos, como a través de iones o láctices. Debido a la fuerte dependencia de la temperatura respecto del campo magnético, las correcciones debidas a estos últimos sistemas son suficientemente pequeños, y por lo tanto despreciables. Entonces se puede considerar que los efectos de no-uniformidad de la temperatura observados en el espectro (considerando emisión de cuerpo negro), serían pequeños aún cuando se hiciera la corrección para estos últimos mecanismos, permitiendo suponer que las anisotropías son inducidas por el campo magnético.

1.4 Resultados: El espectro y las curvas de luz.

Hasta este momento hemos usado las curvas de luz y espectros sin saber realmente como se generan, pero pronto será aclarado.

Sabemos que un objeto celeste de 10 Km de radio con una masa de $1.4M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1$ masa-solar), deberá tener además del campo magnético, un gran campo gravitacional. En tanto, mostraré como afecta en la determinación del espectro y las curvas de luz.

En general se acepta que los pulsares son estrellas de neutrones rotantes. La frecuencia fundamental del tren de pulsos observados se considera como representante de la frecuencia angular de rotación de la estrella (Ω). Esta frecuencia fundamental se obtiene a partir de un promedio del perfil de pulsos, que en muchos casos es extremadamente estable.

Las observaciones de este perfil promediado de pulsos y de su polarización (esto en radio), proporciona mucha información de la forma de como emite el pulsar. Las variaciones observadas en polarización, la dependencia en frecuencia, y la simetría de los perfiles, sugieren que se debe a una emisión cónica y posiblemente emitida en las vecindades de los polos magnéticos.

Como un ejemplo podemos citar a los pulsares PSR 1055-52 y Geminga, los cuales son estrellas consideradas como rotores ortogonales (Esto es que el ángulo entre el eje de rotación y el del dipolo magnético sea 90°): Los análisis efectuados en emisiones γ y en ondas de radio, respectivamente, muestran un doble pico lo cual está de acuerdo con el modelo dipolar de emisión. Sin embargo, existe un marcado contraste con la forma de la curva de luz de en el caso de rayos -X, en donde observamos sólo un pico (fig-3). Lo anterior se explica de la siguiente manera ; del análisis espectral completo se encuentra que se compone de dos componentes, una suave , y una dura que es posiblemente emisión de los casquetes polares. Dada la eficiencia de producción de rayos- γ y su curva de luz con dos picos separados a 180° , nos indica que el dipolo magnético esta altamente inclinado, así el pulso sencillo resultante en la banda de rayos-X no puede ser entendido como proveniente de un casquete polar, puesto que es de esperarse también dos pulsos del dipolo magnético alineado. Además cuando se utilizan espectros que no son de cuerpo negro, producen grandes variaciones en la fracción pulsada pero el haz resultante de emisión en el pico, resulta extremadamente angostos lo que aumenta la contradicción del modelo dipolar con los datos observados.

8

Lo que lleva a argumentar la posibilidad que los polos estén muy cerca y no puedan ser resueltos o separados en la curva de luz. Estas anomalías pueden ser consideradas como distorsiones en el campo magnético, inspirando a pensar que se deba considerar una componente cuadrupolar.⁹

En éste trabajo considero esta última idea; eligiendo un campo cuadrupolar más el dipolo intrínscico (*dipolo + cuadrupolo* -D+C).

⁸Yu.A. Shivanov, (Private communication)

⁹Davis et al., 1984

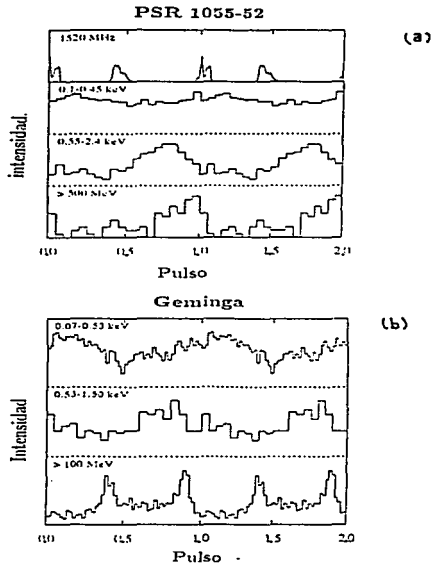


Figura.3 (A) Curvas de luz para el PSR 1055-52 en diferentes rangos de frecuencias, de arriba hacia abajo (i) Ondas-radio, (ii)-(iii) rayos-X, (iv) rayos- γ . (B) De la misma manera para Geminga, donde notamos los máximos también en distintas fases y frecuencias, en (i), (ii), banda de rayos-X, en (iii) banda de rayos- γ .

1.5 Flujo de fotones en "Espacio-Tiempo" Plano.

Si tenemos datos de las estrellas como su distancia (D) y de alguna manera podemos conocer la posición de donde se emite la radiación $f(\theta; \phi)$ sobre la estrella, y aún más la sección transversal donde inside dicha radiación esto es el área del detector $A(E)$, entonces podemos calcular en principio el número de fotones que son emitidos por la superficie de la estrella en un elemento de área $dA = R_*^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$, tomando como R_* el radio estelar. Ahora considerando el espacio fase del volumen tendremos que en realidad sólo estamos queriendo representar el número de estados de forma estadística

$$d^6 N = 2 \frac{d^3 x d^3 p}{h^3} * n(E, T, B, \mu, \dots) \quad [1.5]$$

Donde $n(\dots)$ es la función de distribución que puede depender de aún más elementos. Pero que en nuestro caso de análisis sólo tomaremos $n(E, T)$. Como estamos usando el modelo de radiación de cuerpo-negro (BB), entonces la $n(E, T)$, toma una forma más sencilla

$$n(E, T) = \left(\frac{1}{e^{E/kT} - 1} \right) \quad [1.6]$$

En tanto, escribiendo los elementos de volumen y de momento en el espacio fase de manera explícita, tendremos

$$d^3 x = c dt * dA \cos \theta \quad [1.7]$$

y

$$d^3 p = p^2 dp d\Omega_p = \frac{E^2 dE * A(E)}{c^3 D^2} \quad [1.8]$$

Cabe mencionar que la integración deberá realizarse sobre la región de emisión de la porción visible. Esto se hace importante cuando se trabaja con alteraciones de lentes gravitacionales, como se verá después.

La absorción interestelar en la energía es incluida como el factor $(e^{-N_H \sigma(E)})$, donde la columna de densidad de hidrógeno neutro entre la estrella y el observador es (N_H) , así también la sección efectiva de captación será $\sigma(E)^{10}$
Con las consideraciones anteriores finalmente llegamos a que el flujo de fotones es

$$d^2 N = \frac{2^2}{c^3 h^3 D^2} * \int_0^1 2x dx \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} * n(E; T(\theta; \phi)) e^{-N_H \sigma(E)} E^2 A(E) dt dE \quad [1.9]$$

Con $x = \sin(\theta)$.

¹⁰Morrison & McCammon, 1983.

1.6 Flujo de fotones en "Espacio-Tiempo" Curvado.

En este caso tendremos que reconocer dos efectos presentes, uno de ellos se presenta sobre la frecuencia del fotón (ω) o de manera equivalente, sobre su energía, lo que se conoce como el corrimiento al rojo (Red-shift). Sin embargo, he de mencionar que el corrimiento en la energía se ve como; $E_{\infty} = Ee^{\phi}$, siendo ésta menor que la energía emitida, debido a que $e^{\phi} < 1$ (se define más adelante). Este efecto se puede ver como un cambio temporal es decir, el fotón emitido debiera tener un retraso respecto al recibido, y esto lo podemos ver simplemente si suponemos que estamos en la superficie de la estrella con lo cual se establece la relación entre estos dos tiempos dado por el tiempo propio, el cuál relaciona el tiempo del mundo de la partícula con el tiempo del observador.

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad [1.10]$$

Con esto en mente podemos decir que la frecuencia del fotón vista desde la superficie ω_{em} deberá ser sólo el recíproco del tiempo propio de las dos crestas de la onda emitida, por lo tanto, tendremos las siguientes relaciones

$$\omega_{em} = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}} dx^0} \quad [1.11]$$

Especificando el potencia gravitacional $e^{\phi} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} = \sqrt{g_{00}}$, y reconsiderando la frecuencia de emisión.

$$\omega_{em} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} dx^0} \quad [1.12]$$

multiplicando por una constante de Planck. Entonces tenemos

$$E_{em} = E_{re} e^{-\phi} \quad [1.13]$$

Reconocemos que esta última será menor, mientras que el tiempo de arriba o de recepción estará dado como

$$dt_{re} = e^{-\phi} dt \quad [1.14]$$

donde nos percatamos que será mayor, por lo que reescribiendo la ecuación para el flujo con los límites definidos y asignando $em \rightarrow \infty$ tenemos

$$d^2 N = \frac{2\pi R_{\infty}^2}{c^3 h^3 D^2} * \int_0^1 2x dx \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} * n(E_{\infty}; T(\theta; \phi)) e^{-N_H \sigma(E_{\infty})} E_{\infty}^2 A(E_{\infty}) dt_{\infty} dE_{\infty} \quad [1.15]$$

donde $R_\infty = Re^{-\phi}$ mayor que R , verdadero.

Por otro lado el segundo efecto se le conoce como "Lente Gravitacional", el cual consiste en desviar la trayectoria de salida del fotón de la superficie. El efecto de lente gravitacional sobre los fotones esta bien desarrollado por Pechenick, Ftacias & Cohen, (1983), y de esto resulta que más de la mitad de la superficie de la estrella es visible para un observador en infinito. Respecto a los fotones para una región de emisión en colatitud θ , deberá tener una deflexión angular δ vista por el observador con respecto a la normal (Figura-4).

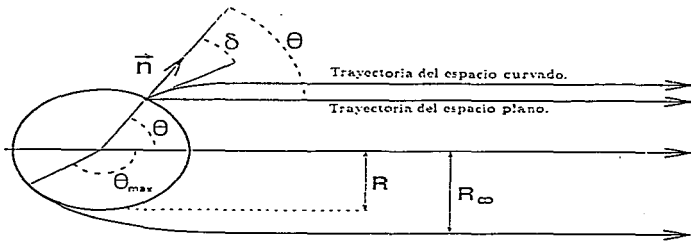


Figura.4 Interpretación del significado y efecto del lente gravitacional sobre la geometría de los haces de emisión, y la diferencia del tratamiento espacio plano - espacio curvado.

La ecuación que describe este comportamiento es :

$$\theta = \theta(x) = \int_0^{GM/R.c^2} \frac{x du}{\sqrt{(1 - \frac{2GM}{R.c^2})(\frac{GM}{R.c^2})^2 - (1 - 2u)u^2 x^2}} \quad [1.16]$$

Donde $x = \text{sen} \delta$.

El parámetro de impacto b de la trayectoria del fotón se da en términos del radio al infinito (R_∞) como; $b = x * R_\infty$. Lo anterior indica que el máximo ángulo de colatitud visible para un observador será cuando $\delta = \frac{\pi}{2}$, i.e., cuando $\theta_{max} = \theta(x = 1)$, y la estrella se observe como un disco de radio R_∞ . Considerando una masa M para una estrella, el valor mínimo posible de R_∞ y R_∞^{min} esta dado en función del radio

de Schwarzschild R_s donde $R_s = 2GM/c^2 = 2.95M/M_\odot$ Km, este R_∞^{\min} se alcanza cuando R_s vale

$$R_s^{\min} = \frac{3}{2}R_s \equiv 4.425 \frac{M}{M_\odot} \text{ Km} \quad [1.17]$$

y es dado por

$$R_\infty^{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R_s \equiv 7.67 \frac{M}{M_\odot} \text{ Km} \quad [1.18]$$

Se grafican estos valores para obtener la relación entre el efecto de lente gravitacional máximo θ_{\max} como función del radio de la estrella R_s . De la figura(5), notamos que el valor de 180° se alcanza cuando la proporción entre $\frac{R}{R_s} \approx 1.76$, en tanto; los 360° cuando la proporción es de ≈ 1.509 , observando claramente que cuando el valor $\theta \rightarrow \infty$, x tiende a 1.5 ¹¹.

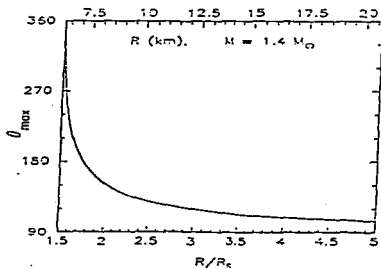


Figura.5 Se muestra la variación del ángulo θ contra el cociente $\frac{R}{R_s}$, para una masa de $1.4M_\odot$, y radio de 7 a 20 km.

Una vez observados las repercusiones del efecto de lente gravitacional. Para obtener el flujo de fotones recibidos en el detector, el único cambio por hacer será

¹¹En el caso límite $R = 1.5 \cdot R_s = r_\gamma$ es conocida como el radio orbital fotónico, esto es cuando el fotón orbita en forma kepleriana alrededor de la estrella, si $R \leq r_\gamma$.

sustituir $\cos(\theta)$ por $\cos(\delta)$. Lo que implica sólo un cambio en la forma de expresar el ángulo sólido $d\Omega$ a la forma

$$d\omega_p = \frac{x dx}{\cos\delta \sin\theta d\theta} \frac{A(F)}{D^2} \quad [1.19]$$

Por ende, las expresiones (1.15) para el flujo son válidas con sólo cambiar $x \equiv \sin\delta$ ¹².

Sin embargo, los cálculos teóricos predicen que para una estrella de masa de $1.4M_{\odot}$, el radio está entre 6.5Km a 14Km. Aún considerando predicciones con materia condensada de kaones¹³ o con hiperiones¹⁴, claro que el límite superior es obtenido considerando modelo de nucleones y desarrollos en teoría de campo.

Por otro lado las formas de las curvas de luz que se observan de estas regiones calientes no se ajustan a un modelo de campo dipolar, debido al efecto producido por la lente gravitacional sobre las modulaciones (aplanamiento), indicando de esta manera que las variaciones no se pueden producir por un campo dipolar.

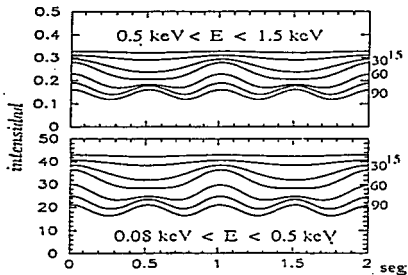
La representación es posible en el caso que se pueda usar un radio más grande o bien una masa más pequeña para no aplanar tanto la fracción pulsada observada como se reconoce en la figura-6.

¹²Ver más detalles en Pechenick *et al.* 1983

¹³Thorsson, Prakash & Iattimer 1994

¹⁴Pandharipande 1971

(a)



(b)

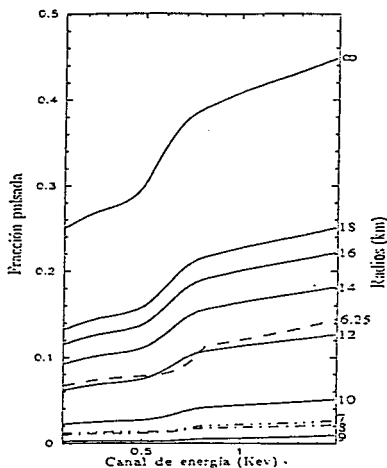


Figura.6 (A) Efecto de la lente gravitacional sobre la curva de luz, realizada para el mismo modelo dipolar de los pulsares Geminga y PSR 1055-52. (B) Efecto sobre la fracción pulsada y la dependencia del radio.

2 Modelos básicos.

2.1 Rotor dipolar magnético en el vacío para un pulsar.

La caracterización de la radiación a nivel teórico en una estrella de neutrones se puede realizar de dos maneras importantes. Una de ellas es por medio de los mecanismos de emisión a través de líneas de campo electromagnético, y la otra por mecanismos de enfriamiento. Sin embargo, ninguno de los mecanismos está desligado, más aún están estrechamente relacionados. El modelo del rotor dipolar para una estrella de neutrones se basa principalmente en la hipótesis de considerar que la emisión total se genera a partir de la pérdida de energía rotacional cinética ¹⁵.

Antes de introducir aspectos más propios de la composición o estructura magnética de un pulsar debo hacer referencia a las ecuaciones que serviran de base para el desarrollo del modelo, las bien conocidas ecuaciones de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad [2.1]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [2.2]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad [2.3]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad [2.4]$$

De la ecuación (2.4) y tomando su divergencia, observaremos que nos resultara una expresión conocida, la ecuación de continuidad; $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. También de la ecuación (2.3) notaremos que las líneas de campo magnético son cerradas. Esto es importante señalarlo, puesto que en los modelos que veremos más adelante se refieren a la emisión llevada a cabo por trayectoria de las líneas abiertas producidas por la rotación.

Con lo anterior en mente, es posible pensar que la ecuación (2.3) se puede escribir como el rotacional de un potencial \vec{A} dependiente del tiempo que nos permita calcular

¹⁵En el argot de astrofísica se le conoce como Spin-down

el campo magnético de forma más sencilla, y de esta manera describir el campo electromagnético de la estrella en términos de potenciales

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad [2.5]$$

Haciendo referencia al modelo magnético de un rotor oblicuo con frecuencia angular Ω (Para el vacío) con simetría esférica (para la estrella), y momento dipolar \vec{m} orientado en un ángulo θ respecto al eje de rotación, encontramos una representación gruesa de la radiación emitida por un pulsar. Cabe mencionar que se han hecho suposiciones adicionales como la inexistencia de deformaciones debidas a la rotación extremadamente rápida. Luego entonces, consideremos la existencia de un campo magnético $B_S(r, \theta)$, cuyas componentes se obtienen de las siguientes expresiones generales

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \quad [2.6]$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r A_\phi) \quad [2.7]$$

$$B_\phi = 0 \quad [2.8]$$

donde A_ϕ es definido para el caso particular de un dipolo, y está expresado como

$$A_\phi = \frac{I \pi R^2}{c} \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \quad [2.9]$$

Es claro que debido a que hay simetría azimutal, es decir respecto a ϕ la $B_\phi = 0$, y considerando que el momento dipolar \vec{m} en general es $m = (I/c) * \text{área}$ entonces se simplifican las expresiones en términos de "m". La A_ϕ se ha definido considerando que existe una trayectoria circular de corriente como se ilustra en la figura 7.

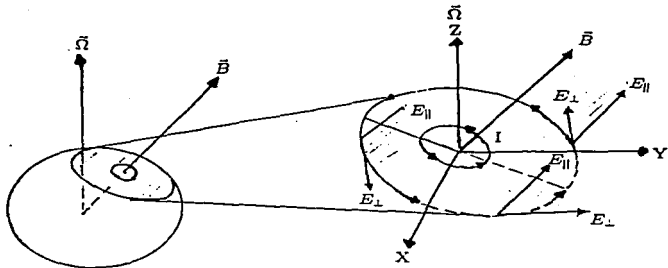


Figura.7 Debido a la rotación de la estrella, las cargas distribuidas en la superficie generan una corriente circular. En esta figura se ilustra la forma de las líneas de corriente como las del campo ortogonal \vec{E}_{\perp} . Con lo cual se llega a las expresiones que relacionan las componentes del campo con el momento \vec{m} dipolar.

$$B_r = \frac{2\vec{m}}{r^3} \cos(\theta) \quad [2.9]$$

$$B_{\theta} = \frac{\vec{m}}{r^3} \sin(\theta) \quad [2.10]$$

$$B_{\phi} = 0 \quad [2.11]$$

Donde el momento dipolar es una función del tiempo debido a la rotación de éste, y es expresado como $\vec{m} = B_r R_p^3$, perdiendo energía por radiación magnetodipolar.

En la figura 7, representamos el caso de una distribución uniforme (esta se presupone), puesto que no es difícil imaginar al menos para el caso alineado (eje de rotación y campo magnético paralelos), que la superficie conductora corrote con el resto de la estrella, lo que implica que las cargas tengan la misma velocidad tangencial dada como $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{R}_{cp}$, donde R_{cp} es el radio del casquete polar definido por medio de un ángulo Θ cuyo vértice se encuentra en el centro de la estrella y cuyos límites definen el perfil del casquete. Entonces, las cargas deberán estar sujetas a una fuerza de Lorentz dada como $\vec{f}_L = q\vec{E} + (\frac{q}{c})\vec{v} \times \vec{B}$, la cual recomodará las cargas hasta generar

una distribución donde las fuerzas sobre las cargas sea cero. Aquí, cabe aclarar, que dichas fuerzas se anulan si uno se fija en la estrella. Si deseamos relacionarlo con el campo externo deberemos usar relaciones de transformación de Lorentz para campos, con lo cual tendremos para el caso no relativista: ¹⁶

$$E'_{\perp} = \left(E_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \quad [2.12]$$

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad [2.13]$$

donde en nuestro caso particular, corresponde la coordenada \perp a la coordenada esférica θ , y la \parallel a la componente paralela al campo \vec{B} . Por lo tanto

$$E'_{\theta} = E_{\theta} + \frac{v_{\theta} B_r}{c} = 0 \quad [2.14]$$

y

$$E_{\parallel} = \frac{\Omega R_*}{c} B_r \approx 6 \times 10^6 B_{12} P^{-1} [V \text{ cm}^{-1}] \quad [2.15]$$

con $v_{\theta} = \Omega R_* B_r$ y B_r como en (2.9). La fuerza eléctrica $F_{\perp} = qE_{\perp}$ actúa sobre los electrones y iones de la superficie, y su magnitud es mayor que la fuerza gravitacional, llevandonos a pensar que las cargas pueden ser arrastradas o aceleradas para que posteriormente se acumulen en la magnetosfera, la cual no puede estar vacía (Goldreich Julian 1969).

Una manera de analizar que significa esto, es por medio de la tasa de pérdida de energía respecto al tiempo \dot{E}_{rad} , la cual está definida para un caso especial dipolar en términos del momento magnético como

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}_{rad} = \frac{2|\ddot{m}|^2}{3c^3} \quad [2.16]$$

donde la \ddot{m} se expresa con sus componentes angulares completas como

$$m = \frac{1}{2} B_* R_*^2 (e_{\parallel} \cos \theta + e_{\perp} \sin \theta + e'_{\perp} \sin \Omega t) \quad [2.17]$$

reconociendo entonces que \dot{E}_{rad} es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia angular;

¹⁶Leonard Eyger. The Classical Electromagnetic Field, P.232

$$\dot{E}_{rot} = -\frac{B_p^2 R_p^6 \Omega^4 \sin^2 \theta}{6c^3} \quad [2.18]$$

Por otro lado, si consideramos la simetría esférica de la estrella, y su comportamiento como un cuerpo rígido, llegaremos a la expresión de la energía rotacional

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad [2.19]$$

Aplicando la hipótesis del modelo, de que la tasa de pérdida de energía rotacional es igual a la energía radiada ($\dot{E}_{rot} = \dot{E}_{rad}$), y de la ecuación (2.19) de la cual se obtiene de manera muy simple la expresión de \dot{E}_{rot}

$$\dot{E}_{rot} = I \Omega \dot{\Omega} \quad [2.20]$$

llegamos a obtener un tiempo de vida de la actividad de emisión τ para las condiciones anteriores (con $I = 4/5 M_p R_p^2$ como el momento de inercia)

$$\tau = \left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \right) = - \left(\frac{6 I c^3}{B_p^2 R_p^6 \Omega^3 \sin^3 \theta} \right) = - \frac{24}{5} \frac{M_p c^3}{B_p^2 R_p^4 \Omega^2 \sin \theta} \quad [2.21]$$

que para valores normales de un pulsar con periodo $P = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 0.2 \text{ seg}$, nos reporta una edad de emisión continua de 3.5 millones de años.

Según estimaciones hechas por *Pacini & Gold* para características típicas

$$M = 1.4 M_\odot, R = 12, \text{ km}, I = 1.4 \times 10^{45} \text{ g cm}^2$$

se obtiene para el pulsar del cangrejo, una $\dot{E}_{rot} = 6.4 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$ y una $E = 2.5 \times 10^{49} \text{ erg}$, mencionando que sólo se a usado rotación como única fuente de energía. Se obtiene también que la \dot{E}_{rot} es comparable con la luminosidad bolométrica de la nebulosa sincrótón que rodea al pulsar.

2.2 Rotor dipolar magnético en un plasma.

Este sistema es más complicado pero también más razonable, puesto que se considera la existencia de una magnetosfera con carga eléctrica (plasma), la cual presenta ciertas características que a continuación se exponen:

2.2.1 Magnetosfera de un pulsar rotando.

A partir de la Ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad [2.22]$$

notamos que si hacemos que la conductividad tienda a ∞ , entonces lo de adentro del paréntesis deberá anularse y de esta manera se establece la condición llamada de "flujo congelado", que significa que las líneas se muevan con la superficie de la estrella.

Considerando la condición anterior de flujo congelado y despreciando la inercia de las partículas en la magnetosfera, la relación de Ohm para la condición de rotación es:

$$\left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} \right) = 0 \quad [2.23]$$

Por lo tanto el campo inducido \vec{E} es de esta forma, pero rescatando una característica importante, que las superficies equipotenciales de \vec{E} contiene líneas de campo magnético \vec{B} , con lo que observamos de la ecuación (2.23) que la componente E_{\perp} se anula ($\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$).

Por otro lado, la existencia del campo eléctrico determina la distribución de carga en la magnetosfera

$$\rho_c = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2\pi c} \vec{\Omega} \cdot \vec{B} \quad [2.24]$$

numericamente la cantidad de cargas en la distribución es $n_c = 7 \times 10^{-2} B_z P^{-1} \text{ cm}^{-3}$, con B_z la componente Z del campo magnético en gauss y P el periodo en segundos, y es reconocida está como la densidad de Goldreich & Julian corrotacional. El mecanismo que produce esta distribución es la emisión de partículas de la superficie, y considerando que la divergencia del campo es cero, consecuentemente tenemos corrotación de las cargas.

Pero ésta última no es estricta cuando ya no estamos en la cercanía de la superficie, puesto que llega a existir una distancia en la cual la velocidad tangencial es igual a

<i>PSR's</i>	B_{12}/P	$D(pc)$	$Area_{(m)}(10^{10} cm^2)$	$T(10^6) K$
0531+21	3,400	2,000	8.2	7.6
1929+10	10	110	1.2	4.2
1055-52	31	1,100	1.4	7.0
0833-45	430	500	3.0	6.7

Table 2: Resultados de modelos teóricos, para calcular las dimensiones de las fuentes emisoras (casquetes) a partir de temperaturas observadas. Todos los resultados son establecidos suponiendo un radio extremo superior de 16.0 Km y considerando el modelo Outer-Gap .

la velocidad de la luz, formando una estructura geométrica cilíndrica conocida como cilindro de luz, cuyo radio está determinado por

$$R_d = \frac{c}{\Omega} 5 \times 10^9 P \text{ [cm]} \quad [2.25]$$

La estricta corrotación es clara para las partículas que están en las líneas cerradas cuyos radios son menores que R_d . Sin embargo, las líneas más grandes que no se cierran deberán cruzar el cilindro de luz (líneas abiertas), estas serán las que determinen la región de emisión, es decir los casquetes polares. Por lo que, si podemos determinar cuál es la primera línea abierta tendremos así el perfil o límite del casquete de emisión.

$$R_{\eta} = R_* \text{sen}(\theta_{\eta}) = R_* \left(\frac{\Omega R_*}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [2.26]$$

El área de los casquetes es calculada con las líneas abiertas del campo magnético tangente al cilindro de luz como:

$$A_{\eta} = \frac{\pi R_*^2 (\Omega R_*)}{c} \quad [2.27]$$

Con estos criterios se han obtenido resultado, los cuales han sido publicados , y en la tabla-2 se muestran algunos de estos para el caso especial de una estrella de 16 Km de radio. Estos pulsares, son elegidos en esta tabla de tal forma que sean representativos para la aplicación del modelo cuadrupolar propuesto en esta tesis. ¹⁷

Por otro lado, las partículas cargadas, en una primera aproximación se considera que se desplazan a través de las líneas abiertas escapándose al infinito, produciendo

¹⁷Yancopoulos S. Hamilton T.T. ref 33

una corriente la cual genera una componente toroidal magnética. Está es más intensa cuanto más proxima este a la línea de campo magnético crítica, que funciona como separatriz de las líneas cerradas y abiertas (fi-8).

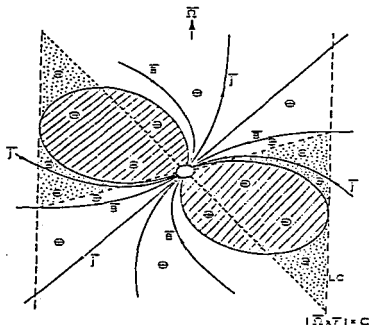


Figura.8 La distribución de carga para un campo dipolar en el espacio, está se reparte en cargas (+) por arriba de la línea crítica y con polaridad (-) por debajo de esta misma (le = línea crítica). Las corrientes que fluyen por estas líneas son j_- para el caso negativo, y j_+ para el positivo. Notamos también, que el cilindro de luz esta denotado o alcanzado cuando la velocidad de las partículas alcanzan la velocidad de al límite. (Ruderman 1971) .

2.3 calentamiento de polos por colisiones de partículas

Para la magnetosferas de un pulsar encontramos gran variedad de modelos entre los que se mencionan a continuación los más relevantes.

2.3.1 Modelo de Sturrock (1971)

A partir del modelo estandar (Modelo dipolar) de emisión, Sturrock desarrolla su modelo sobre las consecuencias del flujo de partículas a lo largo de las líneas abiertas de campo magnético, considerando la densidad de carga dada por la expresión de Goldreich-Julian $n_e \approx \frac{B\Omega}{2\pi ec}$, y que el flujo sale con velocidad c , suponiendo que proviene de dos regiones polares cuyos radios son determinados por las líneas abiertas del campo magnético que parten de la superficie de la estrella (Ecu. 2.26). Reconociendo que el calentamiento de los casquetes se produzca como un reflujó de partículas impulsadas desde la magnetosfera ya que se forma una especie de pantalla eléctrica (apantallamiento magnetosferico), esto como consecuencia de la distribución de carga en esta región (§2.2). Entonces se piensa que corresponde a un segundo flujo de partículas. Esto es, el primer flujo de partículas provenientes de la superficie del pulsar que esta definido por

$$\dot{N}_p = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 B_0 R^3}{ec} \quad [2.28]$$

Para valores comunes de e (carga unitaria), c (velocidad de la luz), la expresión anterior se reduce a una ecuación dependiente sólo de la intensidad del campo magnético y del período del pulsar,

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N}_p \approx 2 \times 10^{31} B_{12}^2 P^{-2} s^{-1} \quad [2.29]$$

donde $R_{10} = R_*/10 \text{ km}$, $B_{12} = B_0 \times 10^{12} \text{ gauss}$, y P en segundos.

Un ejemplo es para el PSR 1929+10, con $P=0.227 \text{ s}$ y campo magnético $B = 10^{12} \text{ gauss}$, con lo cual obtenemos un $\dot{N}_p \approx 3.38 \times 10^{31} \text{ part/seg}$.

Como se nota en la figura-8, se tienen líneas de campo abiertas y cerradas, esto nos muestra que la magnetosfera corrotante estará acotada por una línea de campo, ya sea la primera abierta o la última cerrada pero con algo en común, que ambas parten de la superficie de la estrella formando en conjunto el perfil del casquete polar, éstas líneas se expresan en forma analítica como $\sin\theta_{op} = (\Omega R_*/c)^{\frac{1}{2}}$. Por otra parte, debido a que los casquetes generados tienen un distribución de carga, se debe crear

una diferencia de potencial entre el el perfil del casquete y el polo. Esta diferencia de potencial esta en términos del potencial definido como

$$\Phi \approx \left(\frac{2\Omega B_0}{c} \right) h^2 \quad [2.30]$$

el cual es responsable de la aceleración de partículas y que produce una densidad de carga superficial dada como $\rho_s \approx (\Omega B_0 / 2\pi c) = (1/4\pi) \nabla^2 \Phi$. Haciendo aproximaciones adecuadas llegamos a $\rho_s \approx (1/4\pi) \Phi (1/h^2)$, donde h es la altura típica de aceleración. Sturrock también propuso que la altura fuera del orden del radio del casquete polar R_{η} , que se calcula como $R_{\eta} = 10^{4.8} R_*^{1.5} P^{-0.5}$ en su publicación de 1971.

Por lo tanto se tiene una diferencia de potencial entre los extremos del casquete $h=0$ y $h=R_{\eta}$ estimada como

$$\Delta\Phi \approx \frac{\Omega B_0}{2c} h^2 \equiv \frac{\Omega^2 R^3 B_0}{2c^2} \quad [2.31]$$

En base a lo anterior se encuentra que la diferencia de potencial de arrastre para acelerar partículas desde la superficie es del orden $\Delta V \approx 6 \times 10^{12} B_{12} P^{-2}$ volts, hasta que los electrones alcanzan un factor de Lorentz $\gamma = e\Delta V / m_e c^2 \geq 10^7$. Como se sabe la energía radiada tendrá dos componentes determinadas por el movimiento de las partículas, una longitudinal y otra perpendicular. De las cuales la última se disipará rápidamente como radiación sincrotrónica, mientras que la longitudinal será radiación de curvatura a lo largo de las líneas de campo del dipolo.

De esta manera Sturrock menciona que debido al fuerte campo eléctrico se crea un grupo secundario de pares, los cuales deberán ser acelerados además de producir rayos γ (sólo para pulsares con periodos menores de 1 seg) que al mismo tiempo producirán nuevos pares, que en forma global se generará una cascada de creación de pares (electrón-positrón). Con esto en mente, Sturrock explica los pulsos de altas-energías en rayos γ que aparecen en los espectros observados (Vía Satélite), los cuales son bien claros en los pulsares del cangrejo y de vela. En tanto, la radiación coherente a bajas frecuencias producidas por estos mismos pares deberán ser observados en ondas-radio. Por otra lado, es claro que las radiaciones de estos tipos deberán cesar debido al mecanismo Slow-Down con el cual la diferencia de potencial $\Delta V \propto B P^{-2} \approx \frac{E^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{3}{2}}}$ que representa un valor crítico para el cual ya no habrá producción de pares, la correspondiente línea llamada de "extinción" (Death line) deberá ser proporcional a $P \propto P^3$, con lo que quedan descritas las condiciones para este modelo.

2.3.2 Modelo "Inner-Gap" de Ruderman & Sutherland.(1975)

El presente modelo hace un estudio del efecto que produce la pérdida de electrones a través de las líneas abiertas de campo magnético.

Una característica importante del mecanismo de emisión como ya he mencionado, es que cruzan el cilindro de luz partículas relativista, usando como medio de conducción las líneas abiertas. A primera vista reconocemos que este flujo de partículas deberá ser compensado por un flujo de partículas de carga opuesta dirigida hacia la superficie, con el fin de mantener una densidad de partículas constante. Es este punto, el que Ruderman & Sutherland analizaron, suponiendo que debido a su gran campo magnético ($10^{11} - 10^{13}$ gauss), los núcleos en la superficie de la estrella deberán estar limitados como un estado condensado (Fuertemente ligados). Por otro lado, la temperatura superficial no es suficiente para lograr o mantener un flujo de partículas de polaridades distintas (iones-electrones), las cuales puedan fluir en direcciones opuestas por el apantallamiento de la magnetosfera, con el fin de balancear el flujo saliente que es observado en la vecindad del cilindro de luz.

En base a esto, y aceptando el modelo convencional que supone el no regreso de los electrones a la estrella, llevó a suponer que el momento dipolar magnético intrínscito tienda a ser antiparalelo al espín del momento angular de la estrella. Creando de esta manera una *vacuum-gap* que extiende las líneas de campo magnético por arriba de la superficie estelar (alrededor de 10^4 cm). Una característica fundamental de este *vacuum-gap* es que $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, aún cuando este sea cero en cualquier parte cercana de la magnetosfera.

Al existir el *vacuum-gap* da origen a una diferencia de potencia entre las capas iniciales y finales, el cual es del orden de 10^{12} volts. Este *vacuum-gap* se rompe frecuentemente por una chispa de descarga, la cual ocurre en unos cuantos microsegundos, para formarse de esta manera los pares electron-positron (e^- , e^+). Como consecuencia de esto es posible aceptar que de las propiedades de la chispa de descarga en términos energéticos en el gap los lleva directamente a sustentar las siguientes aseveraciones:

a) La luminosidad total del pulsar en términos de su periodo P es:

$$L_{max} \approx 10^{30} P^{-15/7} \text{ erg s}^{-1}$$

b) El desplazamiento observado de los subpulsos.

c) La dependencia de la emisión con el decremento del periodo.

d) La producción de radiación coherente en microondas en las cercanías de la magnetosfera.

La existencia del una diferencia de potencial entre la superficie y la magnetosfera

determina una distinción entre la capa cercana a la superficie, en la que se encuentra un gran campo eléctrico ($E_{\parallel} = -\nabla_{\parallel}\Phi$). Estas capas son parecidas a las superficies de *Langmuir* cercana a la superficie de un cuerpo en un plasma, conocido como la doble capa o vacuum-gap. Es aquí donde las partículas adquieren la alta energía para producir la radiación de curvatura de fotones, que serán los generadores de pares en el plasma. Esto permite que exista una zona de vacío llamada "breakdown".

La radiación de curvatura es en términos simples similar a la radiación sincrotrón, con la única diferencia que en lugar de usar el radio de Larmor, se considera el radio de curvatura de la línea de campo. Por lo que tendremos para la radiación de curvatura una expresión

$$E_{cur} = m_e c^2 \frac{\mathfrak{R}}{\rho_l} \gamma^3 \quad [2.32]$$

con $\mathfrak{R} = h/2\pi m_e c = 3.9 \times 10^{-11}$ cm, que es la conocida longitud de Compton, y $\rho_l = 8 \times 10^7$ cm el radio de curvatura.

Para saber cuando aplicar este modelo, los autores proponen como criterio: ¹⁸

$$\frac{B_{12}}{P} < 10. \quad [2.33]$$

Con esto en mente predicen una luminosidad en la banda X dada por

$$L_x \approx 1 \times 10^{30} \frac{\epsilon B_{12}}{P^2} \text{ erg s}^{-1} \quad [2.34]$$

Proponen que ϵ represente la energía de enlace de los átomos en la corteza del casquete polar, arguyendo que los valores que puede tomar ϵ están en el rango de ($10^{-3} < \epsilon < 1$). ¹⁹

Se calcula también la temperatura tomando un espectro de radiación de cuerpo negro, esperando que su valor sea

$$T = \left(\frac{L_x}{A\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad [2.35]$$

Con σ la constante de "Stefan-Boltzmann" y A el área del casquete polar (calculado por líneas abiertas). La expresión reducida puede tomarse como

¹⁸Thermal X-ray emission from neutron star, David J. Helfand, et al., Nature N.- 5745, vol 283, January 24, 1980.

¹⁹Los autores eligen los valores de ϵ de alguna forma arbitraria, esperando que la luminosidad L_x cambie en función del periodo. Esto es, para pulsares con periodo igual que 0.25 s, y con un campo de $B = 5 \times 10^{12}$ gauss se tiene una $L_x \approx 10^{32}$ c. Mientras que para periodos grandes, como 1 s, y un campo $B = 5 \times 10^{11}$ gauss disminuye a $L_x = 5 \times 10^{29}$ c.

$$T = 0.65 \times 10^6 \left(\frac{L_p}{10^{28} \text{ erg s}^{-1}} \right)^{1/4} \left(\frac{A}{10^9 \text{ cm}^2} \right)^{-1/4} K \quad [2.36]$$

Cabe mencionar que la diferencia respecto al modelo de Sturrock radica en que la aceleración se lleva a cabo en regiones huecas o vacías, donde $E \cdot B \neq 0$. La consecuencia que se observa a todas luces es que cuando los pares se mueven más allá de la altura "h", donde la condición $E \cdot B \neq 0$ ya no existe, los pares ya no son acelerados y la corriente de pares saldrá con un factor $\gamma_s \approx 3$. Por lo que la densidad de la corriente de los pares será

$$n_s \approx n_e \frac{\gamma_e + e^-}{\gamma_s} \approx 10^3 n_e \text{ cm}^{-3} \quad [2.37]$$

Observando que se excede la densidad n_e , pensamos que el plasma es esencialmente neutro. Sin embargo, se tienen puntos débiles que ilustraré:

Uno de ellos es la fuerte dependencia de la energía de enlace de los iones, que en principio consideran que son de (Fe), las cuales evaden los potenciales existentes

Pues de los cálculos muestran que el orden de esta energía en campos magnéticos del orden de (10^{11} a 10^{12} gauss) está entre 2.5 Kev a 50 Kev.²⁰

El otro detalle visible es que, en este modelo juega un papel preponderante la radiación de curvatura para la detección de rayos γ , mientras que en las regiones superiores donde se produce la chispa de descarga se encuentra en banda de radio, y el flujo (chorro) de radiación que se ramifica por el plasma inestable deberá generar la radiación coherente.

También, en los huecos de descarga la condición de corrotación no se ve obligada, en tanto esperaríamos que al menos rotaran estos alrededor del casquete polar, con lo cual justificaríamos los subpulsos que han sido observados.²¹

Por último, de los análisis de radio - pulsos, se obtiene que los vectores de polarización presentan ligeros cabeceos o balanceos en la fase, lo cual está de acuerdo a un modelo de emisión localizado de casquetes polares, pero opuesto a modelos donde la emisión se realiza cerca del cilindro de luz.²²

²⁰Hillebrandt & Müller, 1976; Flowers *et al.*, 1977; Kössel *et al.*, 1978.

²¹Manchester & Taylor, 1977

²²Lyne & Manchester, 1988; Radhakrishnan & Cooke, 1969

2.3.3 Modelo de "Outer-Gap" de Chen, Ho & Ruderman.

El presente modelo establece que el calentamiento de los casquetes polares es debido a los impactos de partículas que emergen de una capa de la magnetosfera con carga invertida, y que gracias a esto se crea un gran flujo de partículas (positrones) que chocan contra los casquetes calentándolos de esta manera hasta $10^7 K$. Esta región se calcula que debe estar aproximadamente a $0.2R_d$ de la superficie de la estrella (Donde R_d es el radio del cilindro de luz). Implícitamente el modelo toma en cuenta la alta emisión de energía de radiación γ . En general se a reportado ser buen modelo para pulsares viejos como el PSR 0740-28, PSR 1822 -09. La aplicación en nuestro caso es por el estudio del PSR 1929+10, el cual se encuentra en el límite y quizá convenga estudiar también el PSR 1055-52, el cual presenta características de rayos - X. La condición para la aplicación de este modelo está implícito en el cálculo de la luminosidad hecha por Rudermann y Sutherland con el cociente de la intensidad de campo magnético y el periodo del pulsar como

$$\frac{B_{12}}{P^2} > 10 \quad [2.38]$$

donde B_{12} es la intensidad de campo magnético en 10^{12} Gauss y P es el periodo tomado en segundos.

Con esta condición es posible seleccionar de los 110 pulsares con características de radiación X que pueden representar radiación térmica, pero la contribución interesante es la de Rudermann, que estima que el calentamiento de los casquetes polares se deberá a el bombardeo de partículas cargadas cuya luminosidad (L_x) será sólo un 10% de la luminosidad en radiación γ . Esta suposición queda determinada por la ecuación $L_x = 0.1L_\gamma$ con $L_\gamma = 0.5\dot{E}$

$$L_x = 0.1L_\gamma = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin^2(\theta)}{120c^3} \quad [2.39]$$

considerando esta suposición que en principio no se justifica y calculando el área del casquete polar, es posible definir la temperatura de los casquetes polares.

2.3.4 Modelo de Arons.

En el modelo de Arons se presupone una corriente de cargas cuya densidad es la de Goldreich & Julian, la cual fluira a velocidades relativistas. El modelo hace uso tanto de la diferencia de potencial, como de la tasa de pérdida de partículas adoptada por "Sturrock", con lo que se calcula que la energía producida por el pulsar cada segundo debe ser ²³:

$$L_{Total} = e\Delta\Phi_{max}\dot{N}_p \approx 1.4 \times 10^{31} R_6^6 B_{12}^2 P^{-4} \text{ erg s}^{-1} \quad [2.40]$$

Arons & Scharlemann (Astrophys. J)

Se predice un flujo de rayos-X de los casquetes polares con una luminosidad mínima L_x , dada por $L_x \approx 2 \times 10^{30} \left(\frac{0.1}{P}\right)^2 \text{ erg s}^{-1}$

Se obtiene con esto que las temperaturas deberán estar entre $(0.4-2.0) \times 10^6$ K. Debiendo observar que la expresión anterior proporciona un límite inferior para el calentamiento de los casquetes polares, bajo la suposición que existe creación de pares.

El calentamiento se estima que se deba en gran medida al atrapamiento de positrones e^+ arriba de la región de creación, o bien debido a las descargas inestables como lo proponen claramente Ruderman y Sutherland.

Con la consideración que la absorción del medio es constante de orden de $N_H \approx 1 \text{ cm}^{-3}$, estiman que los casquetes tienen áreas del orden de 10^{10} cm^2 . ²⁴

²³Goldreich & Julian. 1969. Ostriker & Gunn, 1969. Pacini, 1967.

²⁴Valores obtenidos con datos de Einstein Observatory (IPC), con 10^4 s de observación.

Ambas luminosidades se consideran adecuadas para explicar la tasa de emisión de energía de la mayoría de los pulsares. Sin embargo, el potencial de arrastre es elegido de la misma forma que "Sturrock (1975)", donde el apantallamiento del campo de aceleración generado por la densidad de la magnetosfera (Goldreich & Julian) es despreciado.

En otros términos se conoce como cargas de fuerza-libre magnetosférica, lo anterior es mejorado en el modelo de Ruderman-Sutherland, quienes como ya lo mencione, introducen un gap para reducir la luminosidad máxima posible. Recordando que las descargas ocurren cuando $\Delta\Phi \approx \Delta\Phi_{R-S} \approx 10^{12}$ Volts, que en realidad puede ser menor del valor máximo del potencial de los casquetes. Para periodos cortos $P \leq 1$, se obtiene que la luminosidad total bajará por un factor $\Delta\Phi_{R-S}/\Delta\Phi_{max}$, en tanto implica que tengamos para pulsares de período corto otra expresión para la luminosidad recibida.

$$L_{sr} = L_x \frac{\Delta\Phi_{r-s}}{\Delta\Phi} = L_x \frac{2 \times 10^{12} c^2}{\Omega^2 R^3 B_0} \quad [2.41]$$

Lo que significa que cambia como P^2 por una constante, y como $P \leq 1$ este valor será siempre menor.

2.4 Efectos geométricos en la luminosidad L_x .

La relación del campo magnético y la luminosidad es una de las hipótesis más críticas actualmente, pero en breve explicaré cual es la base real del caso propuesto. Como ya he tratado, en muchos modelos de pulsares se considera que las características observadas en los espectros son producidas por radiación de curvatura a distancias $r \ll R_d$. Pensando entonces en pulsares de largo período, la potencia total emitida por un electrón simple es

$$W_{ra} = \frac{2e^2 c \gamma^4}{3\rho^2} \quad [2.42]$$

donde como mencionamos en el capítulo anterior, ρ (radio de curvatura) es del orden de 10^8 cm para el dipolo, y de 10^6 cm para el cuadrupolo. Como se puede observar, no hay dependencia de campo magnético. Sin embargo, si consideramos pulsares con periodos cortos ($P < 0.1$ s), la emisión deberá ser generada cerca del cilindro de luz, región donde las partículas tendrán una ligera desviación angular η , y una considerable radiación sincrotrónica suficientemente alta respecto a la radiación de curvatura con lo cual se tiene

$$W_s = \frac{2e^4 B^2 \sin^2 \eta}{3m^2 c^3} \gamma^2 \quad [2.43]$$

Aquí notamos ya una dependencia del campo magnético cerca del cilindro de luz, cuya relación que define al campo magnético cerca del cilindro de luz B_d esta definido como

$$B_d = B_s \left(\frac{R_*}{R_d} \right)^3 \quad [2.44]$$

donde B_s es la intensidad de la componente dipolar del campo magnético en la superficie de la estrella y, la relación de luminosidad se relaciona como $L \propto B_d^{3/2}$.

La otra relación importante es la dependencia en el ángulo inclinación del eje de rotación respecto al eje del campo magnético. En realidad se conocen sólo 4 de estos ángulos θ para pulsares cuya emisión es de rayos-X, aun cuando existen tabulados muchísimos de estos ángulos para pulsares en ondas-radio. A partir de estos 4 ángulos conocidos se obtiene, por medio de una sencilla regresión lineal ²⁵.

$$\log(L) = 0.049\theta + 27.488. \quad [2.45]$$

²⁵Los datos fueron obtenidos de las publicaciones de Minlov. *J.F. Malov Sov. Astron 34(2). March 1990. P.192 Tablas de la 1-4*

De la figura (9) podemos hacer un análisis simple sobre el efecto de la magnitud de θ .

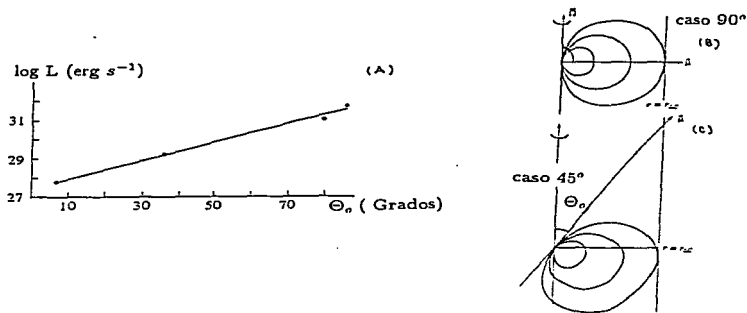


Figura.9 (A) El efecto de la orientación de la región de emisión sobre la intensidad del pulso detectado para 4 pulsares con inclinación conocida. (De derecha a izquierda y de abajo hacia arriba PSR 0534+66, PSR 1929+10, PSR 1055-52, PSR 0531+21. (B) La emisión y el recorrido para 90° y. (C) para 45° .

Cuando $\theta = 90^\circ$ las partículas que emergen de la superficie recorreran una distancia $r = R_d$ y en breve llegar a una región donde $\Omega r \approx c$, pero cuando $\theta = 30^\circ$ las partículas deberán recorrer $r \approx 2R_d$ para llegar a la región anterior. Puesto que $B \propto r^{-3}$, notamos que el campo cerca del cilindro de luz es menor por un orden de magnitud respecto al ortogonal. Con lo cual observamos que la luminosidad se afecta en cuatro ordenes de magnitud para un cambio de 7° a 35° en θ .

3 Descripción matemática del modelo D + C.

3.1 Introducción.

Del capítulo 1 queda de manifiesto que el modelo dipolar carece en extremo de ser el mejor representante para describir el flujo recibido de radiación. En tanto, presento bajo que condiciones se construye el modelo (D + C) ²⁶

Un punto importante que no se debe descuidar es que la radiación recibida no sólo está influenciada por el campo gravitacional y electromagnético, sino también depende de la orientación del dipolo (geometría). Con esto pretendo decir que deberemos tomar en cuenta la influencia del ángulo de emisión de los casquetes polares (Con lo cual se justifica la existencia de *interpulsos*). De ésta manera se pretende encontrar, a través del modelo de radiación de cuerpo negro (BlackBody-EB), las modificaciones en la luminosidad y secciones transversales de los casquetes que hayan sido producidas por la asociación de los campos cuadrupolares, y el efecto gravitacional.

3.2 Estructura del modelo D+C con gravedad.

El campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones (NS), está dada por la métrica de Schwarzschild, al cual se le superpone el campo magnético intrínseco de la estrella.

$$ds^2 = -e^{\lambda} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad [3.1]$$

Con $e^{\lambda} = e^{-\lambda} = (1 - \frac{r_g}{r})$, lo que implica que las componentes no nulas del tensor métrico sean

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = -\frac{1}{g_{11}} \quad [3.2]$$

$$g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta,$$

siendo $r_g = 2GM/c^2$ el radio gravitacional.

²⁶D + C es la abreviatura o nomenclatura para describir el modelo dipolar + cuadrupolo magnético

Usando el concepto de líneas de campo congeladas (§cap2), la forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell para un campo gravitacional caracterizado por la métrica $g_{\mu\nu}$ toman la forma de

$$F_{i,k,l} + F_{i,l,k} + F_{k,l,i} = 0 \quad [3.3]$$

y

$$(\sqrt{-g}F^{ik})_{,k} = -\sqrt{-g}\frac{4\pi}{c}j^i \quad [3.4]$$

donde F^{ik} es el tensor de campo electromagnético, y la relación entre \vec{B} y \vec{E} con F^{ik} la establecemos como

$$F^{ik} = \epsilon^{ikl}B_k \quad [3.4]$$

así es $\epsilon^{ikl} = \pm 1$ para permutaciones (1,2,3) impares o pares. Si esto lo sustituimos en la ecuación $F_{,k}^{ik} = 0$ encontraremos que sólo se satisface cuando $(B_k = \nabla\Phi)_k$ que significa que debe estar en términos de un gradiente de un escalar Φ , o de manera explícita como

$$B^\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu} \quad [3.5]$$

$$E_\nu = F_{0\nu}, B_\lambda = \gamma_{\lambda\nu} \quad [3.6]$$

siendo $\gamma_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + O(j^2)$ que es el tensor métrico en tres-dimensiones con $\mu = \nu$.

El estudio de la dependencia radial del multipolo magnético fuera de una estrella en la métrica de Schwarzschild fue hecha en términos de funciones de *legendre* de segunda especie por Anderson y J.cohen. ²⁷

Si tomamos la corriente de desplazamiento nula y $j^i = 0$ entonces ; de la ecuación (3.1.) tenemos para $i = 1 - 3$

$$\nabla_\phi B_\theta - \frac{1}{\sin\theta}\nabla_\theta(\sin\theta B_\phi) = 0 \quad [3.7]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{-g_{00}r}B_\phi) - \nabla_\phi B_r = 0 \quad [3.8]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{-g_{00}r}B_\theta) - \nabla_\theta B_r = 0 \quad [3.9]$$

con partes angulares del operador dadas por

²⁷J.L.Anderson & J.M. Cohen, *Astrophys. Space Sci.* 9,146,1970

$$\nabla_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}, \nabla_{\phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad [3.10]$$

De las últimas cuatro ecuaciones con la condición de frontera $B(a) = B(\theta, \phi)$ queda determinado el campo en la zona cercana de la estrella de neutrones.

$$B_r(r, \theta, \phi) = \sum_l^m (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} f_l(r) b_{lm} Y_{lm}(\theta, \lambda) \quad [3.11]$$

$$B_x(r, \theta, \phi) = - \sum_l^m \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sqrt{g_{00} g_l(r)} b_{lm} \nabla_x Y_{lm}(\theta, \lambda) \quad [3.12]$$

donde $\chi = (\theta, \phi)$ y $Y_{lm}(\theta, \lambda)$ son los armónicos esféricos, con $\lambda = (\phi - \Omega t)$. Los coeficientes b_{lm} son calculados usando las condiciones de frontera que enseguida se mencionaran. Las funciones f_l y g_l se encuentran al resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dx} (x^l f_l) - l x^{l-1} g_l = 0 \quad [3.13]$$

$$\frac{d}{dx} [(1-x)x^{l+1} g_l] - (l+1)x^l f_l = 0 \quad [3.14]$$

cuyas soluciones que la forma de funciones hipergeométricas son

$$f_l = F(l, l+2; 2(l+1); x), g_l = F(l+1, l+2; 2(l+1); x) \quad [3.15]$$

donde la $x = \frac{r}{a}$ y las funciones para $l = 1, 2$, son fácilmente expresadas con funciones elementales en la forma (caso dipolar)

$$f_1 = -\frac{3}{2x^3} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{2} x(x+2) \right] \quad [3.16]$$

$$g_1 = -2f_1 + \frac{3}{(1-x)} \quad [3.17]$$

Enseguida se presentan las soluciones para el caso cuadrupolar magnético, las cuales son obtenidas usando el mismo procedimiento que el caso simple dipolar.

$$f_2 = \frac{10}{3x^4} \left[6 \ln(1-x) \frac{(3x-4)}{x} + x^2 + 6x - 24 \right] \quad [3.18]$$

$$g_2 = \frac{10}{x^4} \left[6 \ln(1-x) \frac{(2-x)}{x} + \frac{x^2 - 12x + 12}{(1-x)} \right] \quad [3.19]$$

En general éstas son la ecuaciones que nos permiten calcular la intensidad y el comportamiento de los campos magnéticos en la zona cercana de un estrella de neutrones, así como en el apéndice final se muestra el procedimiento y soluciones para el campo eléctrico.

4 Aplicación y resultados del modelo D+C

4.1 Introducción.

Hasta ahora hemos revisado de forma general los elementos substanciales de los modelos teóricos, y observacionales. En seguida doy la descripción de las técnicas y métodos de cálculo, así también los resultados de aplicar el modelo a pulsares específicos.

4.1.1 Generalidades.

Primeramente aplicaremos el programa *Ccaps* para identificar la posición de las líneas de campo abiertas que habrán de generar el perfil del casquete polar, con lo cual poderemos a determinar el centro geométrico del mismo (considerando que la morfología es simétrica). Este programa identifica la posición de las líneas del campo dando como coordenadas dos cantidades angulares (θ, ϕ), las cuales son proyectadas en una superficie isométrica.

Esto es importante, pues cuando se aplican componentes de un campo cuadrupolar superpuesto al ya existente dipolo, se espera que cambie la posición, lo cual nos permitiera observar como influye la aplicación de éste en la posición respecto de la orientación del dipolo.

Una vez determinada la posición de las líneas abiertas sobre la superficie isométrica, y el centro del casquete, se sigue el procedimiento que nos permitirá determinar el área de los casquetes polares, así como la identificación de su forma. Lo anterior se realiza en dos modalidades:

- Tomando la influencia gravitacional más un conjunto de componentes cuadrupolares superpuesto al dipolo natural.
- Considerando sólo el efecto de las componentes cuadrupolares más el dipolo, y despreciando el efecto gravitacional.

Las estructuras geométricas de los casquetes polares en general no tienen formas regulares, esto implica que no exista una fórmula exacta para su determinación. Además cuando se aplican campos cuadrupolares, las formas pueden ser todavía más irregulares. Es por esto, que su determinación o cálculo se lleva a través de un procedimiento numérico, el cual se explica posteriormente.

Por otro lado, compararemos las áreas calculadas a partir de nuestro modelo con respecto a las determinadas con elementos puramente observacionales $A_{obs} = L_{obs}/\sigma T_{obs}^4$, es decir: La luminosidad en rayos-X observada y la temperatura determinada a partir del espectro observado. Enseguida se propone como tasa de precisión un cociente de

las áreas del modelo y las observacionales , con lo cual entre más cercano estemos al valor de la unidad, deberemos pensar que nuestro ajuste es cada vez mejor. Después en base a los valores obtenidos de las áreas calcularé la temperatura de cada casquete usando un modelo de radiación de cuerpo negro (BB) (equi 2.35), considerando una luminosidad fija y dada por métodos observacionales.

4.2 Integración de líneas de campo.

Para desarrollar todo lo anterior se utilizó tanto el programa *Ccaps.out*, así como programas auxiliares en *77* que en conjunto determinan la posición de las líneas de campo sobre la superficie de la esfera. Esto es, a partir de seleccionar las líneas de campo que son tangentes a la superficie del cilindro de luz, e integrandolas hasta llegar a la superficie de la estrella. De aquí notamos que las proximas líneas deberán ser abiertas, y entonces formamos el perfil del casquete (figura-10).

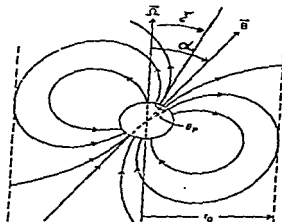


Figura.10 Se muestra el método de integración de la línea de campo que es tangente al cilindro de luz, donde alfa α representa el ángulo entre el campo B y el eje de rotación. Zeta es el ángulo de visión y el eje de rotación.

El programa llamado *Ccaps* es el que produce los valores antes mencionados, al cual se le suministran parametros que son caracteristicas globales promedio para pulsares: Como radio promedio de (10-12) km, el campo magnético del orden de 10^{12} gauss, periodo entre (0.1 y 0.5) seg, y masa de $1.4M_{\odot}$, además de la elección de las componentes del campo cuadrupolar. Este programa también genera la proyección

isométrica de los casquetes que en lo subsecuente llamaré mapa isométrico (MISO). La característica de estos mapas (MISO) son las siguientes: Están divididos en razones angulares de arriba hacia abajo en $\theta = 30^\circ$, y de izquierda a derecha en $\phi = 30^\circ$, para representar el ángulo de observación α se utilizan líneas de contorno como se muestra en la figura (11), siendo este el MISO para una configuración dipolar con inclinación del campo \vec{B} respecto del eje de rotación $\vec{\Omega} = 30^\circ$, y ángulo de visión $\alpha = 30^\circ$.

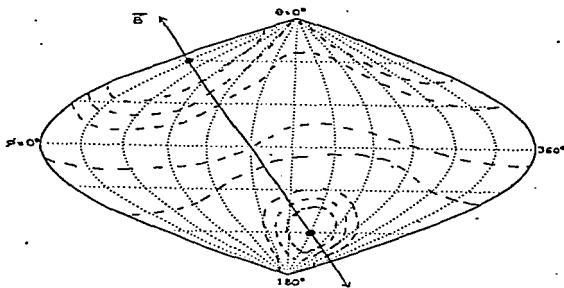


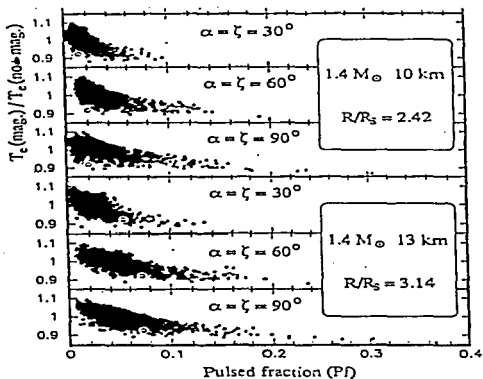
Figura.11 Se observa que el polo norte en la figura está en $\theta = 30^\circ$ y $\phi = 30^\circ$, en tanto el polo sur deberá estar a 180° de estos, es decir en $\theta = 150^\circ$ y $\phi = 210^\circ$. Por otro lado, las líneas de isocontornos muestran el ángulo α de visión.

Una vez que se han obtenido los MISO correctos de localización de los casquetes (caso dipolar-multipolar), se crean archivos de valores angulares (θ) y (ϕ), con los cuales se determinarán los centros de los casquetes a partir del programa `pxy`, el cual busca el mínimo y el máximo del conjunto de valores tanto de θ como de ϕ , para después sacar el promedio y generar la coordenada central (θ_{prom} , ϕ_{prom}).

4.3 · Variabilidad posicional de los casquetes polares.

Para observar como se afecta la posición de los casquetes polares cuando se ven influenciados por un campo cuadrupolar, es necesario reconocer primero que este conjunto de componentes cuadrupolares de campo no son arbitrarias, es decir; no cualquier campo puede ser aplicado con la condición de que produzca fuertes pulsaciones en la curva de luz. Sin embargo, del análisis estadístico (D. Page & A. Sarmiento, *Ap.J. Nov 1996*) sobre una muestra de 1000 modelos cuadrupolares, es posible seleccionar algunos y ver cual es el efecto de estos.

Los valores específicos están en uno de los apéndices al final, pero en la siguiente gráfica se muestran los resultados obtenidos de dicho análisis.



Page & Sarmiento 1996

Figura.12 Distribución estadística de los campos cuadrupolares con mayor fracción pulsada, versus cociente de temperaturas efectivas (Una con campo magnético y la otra sin campo, ambas son estimaciones). También se representa para cada radio estelar la orientación del observador respecto al dipolo magnético (alfa y zeta están definidas en la figura 10).

Lo que reconocemos de la figura es que la mayoría de los cuadrupolos producen grandes variaciones en la fracción pulsada, que recordando un poco es éste el objetivo de aplicar campos cuadrupolares a la configuración clásica dipolar. Sólo en el caso de tomar $\alpha = 90^\circ$ para un radio de 10 Km, vislumbramos unos pocos cuadrupolos que producen gran fracción pulsada, en comparación con el dipolo que está representado por el círculo en blanco en la figura-12. Para 13 Km y ángulos de $\alpha = 60^\circ$ y 90° tenemos mayor cantidad de cuadrupolos posibles.

Una vez seleccionados los cuadrupolos posibles, estos se aplican al caso del dipolo orientado en $\theta = 30^\circ$ y $\phi = 0^\circ$, resultando la distribución de los casquetes polares que se muestran en la figura 13, donde la característica importante es el dominio de la magnitud de la componente q_n , que a priori parece realizar una traslación casi paralela de los casquetes respecto del eje dipolar (línea continua figura-13), con la componente q_n del orden de 10^{11} gauss y, las componentes sobrantes $q_{l+1} \approx 10^{10}$ gauss, que para nuestro caso son casi de orden cero o campos nulos. También es importante mencionar algo sobre el desplazamiento en la dirección θ , el cual es dependiente de la magnitud y, del signo de la carga. Esto es, las cargas positivas tienden a desplazarse hacia el norte, mientras que las negativas al sur.

Las líneas punteadas muestran el comportamiento cuando las componentes dominantes son q_n y q_l , produciendo las mismas variaciones laterales casi paralelas, pero con mayor desplazamiento en el ángulo ϕ .

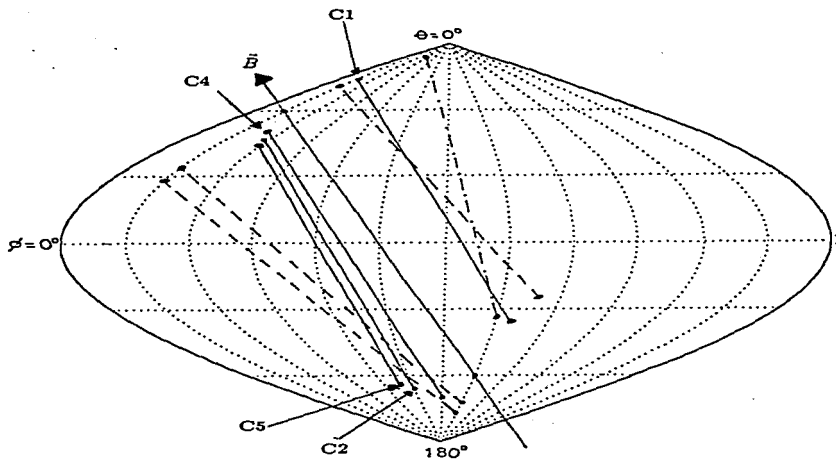


Figura. 13 Distribución de las posiciones de los casquetes polares con el modelo teórico D+C. Aplicando los 4 modelos con mayor fracción pulsada y con la característica de que q_0 domine. El radio estelar es de 10 Km, el período está entre (0.1-0.25) seg, masa de $1.4M_{\odot}$ y, una inclinación de $\theta = 30^\circ$, los valores precisos de las componentes se encuentran en un apéndice al final con la nomenclatura utilizada sobre el mapa para mejor orientación.

En la siguiente figura (14), muestro el caso de inclinaciones $\theta = 60^\circ$ $\phi = 60^\circ$, observando el mismo comportamiento en la distribución, tanto en la dependencia de la magnitud, signo, así como la traslación semi-paralela respecto del eje del campo dipolar, inclusive se pone el caso cuando domina η_4 con línea segmentada.

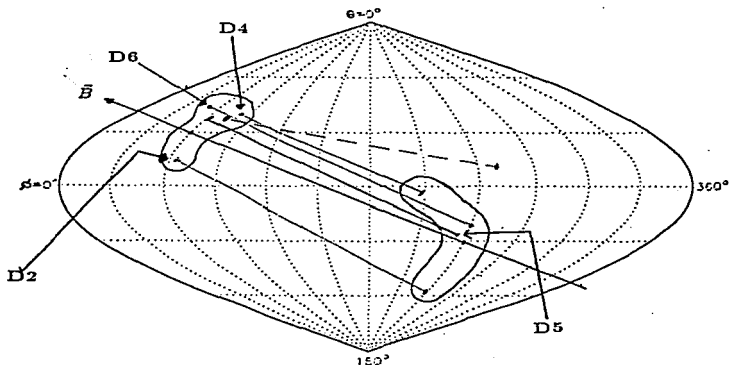


Figura.14 Distribución de las posiciones de los casquetes para $\theta = 60^\circ$ $\phi = 60^\circ$, sobre la superficie estelar.

El caso ortogonal es de suma importancia pero sera tratado como un caso aplicado a pulsares jóvenes, en particular GEMINGA que es el pulsar ortogonal más estudiado.

4.4 Procedimiento del cálculo de áreas.

El programa *Ccaps*, sólo integra líneas y reconoce la posición de ésta en base al modelo del capítulo 3, ya sea el caso con correcciones gravitacionales o sin estas.²⁸ El siguiente paso a seguir es la determinación de la geometría del casquete, para que después se pueda calcular su área y luego su temperatura por medio de un modelo de cuerpo-negro.

El problema de las áreas no es tan sólo de cálculo analítico, sino también de resolución computacional. En general, las fuentes de emisión en el caso dipolar sin campo gravitacional son regulares y casi circulares, por lo que es posible hacer el cálculo como sigue:

Considerando una esfera como se muestra en la figura 15, en coordenadas esféricas y con trigonometría básica.

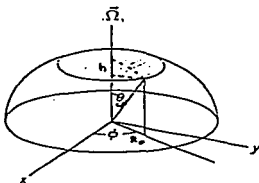


Figura.15 Geometría simple del cálculo del área de un casquete alineado y circular.

²⁸El diseño del programa en principio fue de D. Page & A. Sarmiento, salvo pequeñas modificaciones hechas por Carlos Pérez, para que pudiera integrar con correcciones gravitacionales, y programas complementarios para el cálculo de áreas etc.

Tomando la altura h como la curvatura y consideramos además que es circular el casquete, el cual formará un ángulo θ_{σ_1} con respecto al eje-central del casquete en dirección Z , con lo cual tenemos las siguientes relaciones

$$\cos\theta_{\sigma_1} = \frac{R_s - h}{R_s} \quad [4.1]$$

$$\operatorname{sen}\theta_{\sigma_1} = \frac{R_{\sigma_1}}{R_s} \quad [4.2]$$

donde es claro que se puede despejar de (4.2) el radio del casquete polar el cual se requiere para calcular el área, con lo cual sólo basta elevar al cuadrado y multiplicar por π , lo cual resulta

$$A_{\sigma_1} = \pi^2 \operatorname{sen}^2\theta_{\sigma_1}. \quad [4.3]$$

Por lo que el cálculo del área se reduce a conocer o determinar el ángulo θ_{σ_1} de manera exacta.

Sin embargo, las formas reales no son nada simétricas, pues en realidad son elipses degeneradas. En tanto el procedimiento es más complicado, pues se tuvo que realizar un programa en código computacional, el cual realizará una retícula sobre la proyección del casquete en un plano, y por medio de un escaneo buscar el número de unidades base contenidas en la figura, no importando la posición sobre la esfera estelar (figura-16).

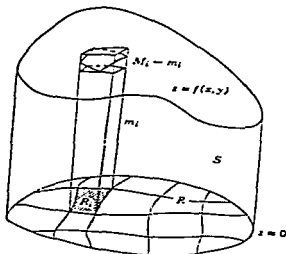


Figura.16 Proyección del casquete en el plano x-y para cualquier posición en la esfera.

Cuando la imagen ha sido proyectada en el plano, la proyección se divide en cuadros de longitud pequeña y uniforme, con lo cual se escanea de izquierda a derecha y, cuando se reconoce un punto del perfil, un contador empieza a almacenar el número de cuadros encontrados en la superficie, esto hasta llegar al otro extremo de la figura. Claro que antes, para hacer continuo el reconocimiento, se unió por segmentos de recta los puntos proyectados a través de una ecuación lineal (figura-17).

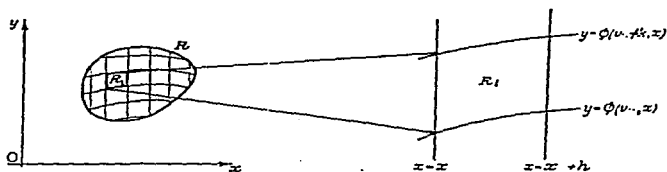


Figura.17 Modelo del escaneo para determinar las áreas de forma más precisa.

Un segundo procedimiento rápido es considerar elipses homogéneas y, entonces tener un par de ángulos $\theta_{ep}(max)$ y uno $\theta_{ep}(min)$, que represente el eje mayor y menor de una elipse. Sin embargo, sólo se aplicó esta simplificación para los caso regulares, con lo cual se definió un ángulo promedio $\theta_{ep}(prom)$ que cumple con lo siguiente

$$\theta_{ep}(prom) = \frac{\theta_{ep}(max) + \theta_{ep}(min)}{2} \quad [4.4]$$

con un cierto error dado por

$$Err_{max} = \frac{\theta_{ep}(prom) - \theta_{ep}(min)}{\theta_{ep}(prom)} \quad [4.5]$$

Método que será invalidado cuando los errores sean mayores del 10% (criterio): En la siguiente figura muestro las formas que cumplen con los requisitos.

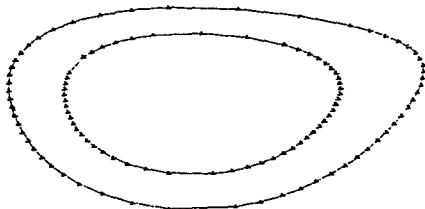


Figura.18 Formas de casquetes regulares donde se aplican las simplificaciones del cálculo de áreas elípticas.

4.4.1 Algunos resultados previos.

Es importante señalar como cambian las áreas de los casquetes cuando se aplican componentes cuadrupolares, ésto por la relación que existe entre la temperatura y el área (2.35, 2.36).

Retomando la ecuación (2.36) observamos que para cada luminosidad (observacional) y área A , existe una temperatura asociada T_{oc} , en particular para un periodo de 0.25 seg, con dipolo magnético la luminosidad es del orden de $L_x = 5 \times 10^{31} \text{ erg s}$, (ver ref-18).

Algo interesante que resultó de la aplicación de éste modelo cuadrupolar, es que las dimensiones de los casquetes para el mismo conjunto de componentes cuadrupolares, no son iguales (polo sur, polo norte).

En lo subsecuente se dan los resultados obtenidos para cuadrupolos específicos con la determinación del área y, temperatura *a priori*.

Para el caso sin gravedad el cuadrupolo C-3, observamos que el casquete norte tiene una área de $1.17 \times 10^{11} \text{ cm}^2$, mientras que el casquete sur tiene $5.41 \times 10^{11} \text{ cm}^2$, produciendo una diferencia del orden del 4 veces más área. Para el caso con gravedad encontramos que el casquete norte tiene $1.02 \times 10^{12} \text{ cm}^2$, y para el casquete sur $8.66 \times 10^{11} \text{ cm}^2$, produciendo una variación del 1.2 veces más área.

Esto nos lleva a tener dos temperaturas para una luminosidad observacional $L_r(\text{min})$ en dos grados de intensidad, una $T_{\text{emp}}(\text{sup})$, y una $T_{\text{emp}}(\text{inf})$, con lo cual se propone obtener una $T_{\text{prom}}(\text{m})$, y en forma gruesa una relación de comparación proporcional entre el radio teórico y el observacional calculado como

$$r_{\text{obs}} \approx \left(\frac{L_r}{4\pi\sigma T^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad [4.6]$$

así entonces, con el criterio de un buen ajuste se realiza la proporción de ambas, buscando acercarse a la unidad.

$$\frac{r_{\text{obs}}}{r_{\text{teo}}} \approx 1 \quad [4.7]$$

Para las relaciones en temperatura, recordemos que la temperatura teórica es la temperatura al infinito T_{∞} , por lo tanto, la temperatura superficial estará dada por

$$T_o = (1 + Z)T_{\infty} \quad [4.8]$$

donde $(1 + Z)^{-1} = (1 - \frac{2GM}{Rc^2})^{\frac{1}{2}} = (1 - \frac{R_g}{R})^{\frac{1}{2}}$, de tal forma que para las condiciones establecidas por el modelo, la temperatura obtenida deberá ser corregida por el factor $(1+Z)$, restringiendo el R_o como $1.4R_g < R_o < 3.5R_g$, con masa de $1.4M_{\odot}$.

A continuación se tabulan los resultados obtenidos para los diferentes conjuntos de componentes cuadrupolares (tabla-3), dando las áreas y temperaturas promedios.

Es notable reconocer que de acuerdo a las intensidades de las componentes q_i el área se incrementa y por ende, la temperatura disminuye. Para hacer esto más claro y preciso, veamos los resultados de C-3 y C-11, notando que en intensidad C11 > C3. Esto significa que cuando la componente q_o crece positivamente, el casquete se expande trayendo consigo una disminución en la temperatura (además de la traslación ya mencionada). Comparando C-5 y C-12 reconocemos este mismo efecto, pero ahora los valores son para carga negativa, con lo que podemos decir que depende del valor absoluto de la intensidad de la carga y no del signo.

Otro detalle importante es el comportamiento de los casquetes con el campo gravitacional (tabla-3). Cuando no hay gravedad y la configuración es dipolar puro, encontramos valores para las áreas del orden de magnitud de los publicados en las

<i>Cuadrupolo</i>	θ_{cr}	$\text{área} \times 10^{11} \text{ cm}^2$	$T \times 10^6 \text{ K}$
sin gravedad			
Polo-norte	3.2685	10.2127	0.95202
C-1			
Polo-sur	3.0111	8.6686	0.9918824
con gravedad			
Polo-norte	1.10803	1.1747	1.63168
C-1			
Polo-sur	2.3796	5.4161	1.1155
cuadruplos específicos.			
C3-norte	0.7657	0.5611	1.9663
C5-norte	1.3352	1.7058	1.4891
C11-norte	1.8556	3.2972	1.2695
C12-norte	0.4627	2.049	2.5293

Table 3: Resultados del modelo $D+C$, para $P=0.25 \text{ seg}$, $R = 10 \text{ Km}$, $\theta = 30^\circ$

referencias 18 y 10 (Ver tabla-2), lo cual asegura que el programa y el modelo reproduce los datos observacionales en promedio. Pero lo que realmente hay que notar, es cuando se aplica campo gravitacional los casquetes se contraen, lo que implica menores áreas y mayor temperatura (observe resultados tabla-3 parte inferior).

<i>Pulsar</i>	<i>LogE</i>	<i>Periodo</i>	<i>Distancia</i>	<i>LogL_s</i>	<i>LogL_smul.</i>	<i>LogB</i>
0630+18	34.54	0.237	0.1	31.7	29.6	12.2
1929+10	33.60	0.227	0.1	28.5	?	11.71

Table 4: *Elementos de los dos pulsares analizados.*

4.5 Aplicación del modelo a pulsares jóvenes .

4.5.1 Introducción

En particular se analizan dos pulsares representativos, como son:

- GEMINGA (PSR 0630+18) orientado ortogonalmente y, con estructura que apoya el modelo C+D.
- PSR 1929+10 pulsar con elementos mejor determinados.

Una vez mostrado el modelo para casos generales, es momento de aplicarlo y comparar resultados con pulsares específicos (tabla-4).

Como ya mencione, el pulsar GEMINGA (PSR 0630+18) es un pulsar cuyo eje de rotación esta a 90° del eje de dipolo magnético, lo que hace más interesante y notable, la localización de los casquetes polares. Además el efecto de aplicar las componentes cuadrupolares, debería ser más claro pues veríamos las alteraciones de frente.

Aplicando el modelo para este caso en particular tenemos que su periodo es de $P = 0.237$ seg, su campo magnético superficial de 1.5×10^{12} gauss, y con ángulos $\theta = 90^\circ$ y $\zeta = 0^\circ$. La masa y el radio son estandares que se han utilizado para todos los casos ($1.4M_\odot$ y $R_* = 10$ Km).

Con los datos anteriores se obtiene el siguiente MISO, representado en la figura-19, donde observamos los casquetes polares sin componentes cuadrupolares y, con algunas líneas de campo, note que éste es el caso esperado para el dipolo natural.

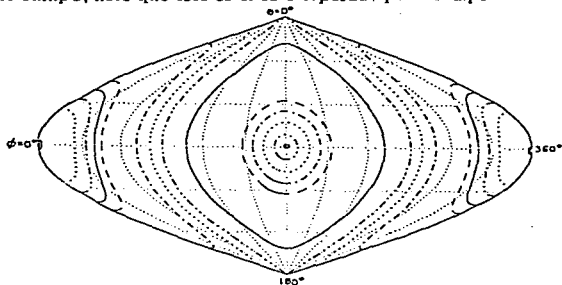


Figura.19 Dipolo puro en PSR 0630+18 (Geminga), obtenido con el programa Ccaps.out. Aquí, representamos un caso ideal, es decir; lo que esperaríamos ver, considerando que la emisión proviene de casquetes polares. Estos además ubicados antipodales al eje magnético.

Tratándose de un pulsar orthogonal es claro que los casquetes deban acomodarse en el ecuador del mapa isométrico (MISO), y efectivamente así sucede. Cuando se aplican las componentes cuadrupolares, el mismo efecto de traslación se presenta, pero ahora sobre el eje del ecuador lo cual se vuelve interesante remarcar, pues en los caso no ortogonales notamos también un desplazamiento sobre ϕ ²⁹. Aún cuando para el mismo conjunto de componentes cuadrupolares con intensidades duplicadas en magnitud, continua el desplazamiento sobre el eje ecuatorial.

²⁹ Cabe aclarar que existe la posibilidad que con otros arreglos cuadrupolares se manifieste ese corrimiento en ϕ , pero aclaro que para los cuadrupolos utilizados por mí, no se presenta este caso

Otro detalle interesante es, cuando se intensifican las componentes (digamos a dos veces de la intensidad real, los casquetes parecen tender a aproximarse a su ortocentro, mientras que cuando se disminuyen tienden a alejarse, esto lo notamos sobre el MISO de manera más clara en la figura-20.

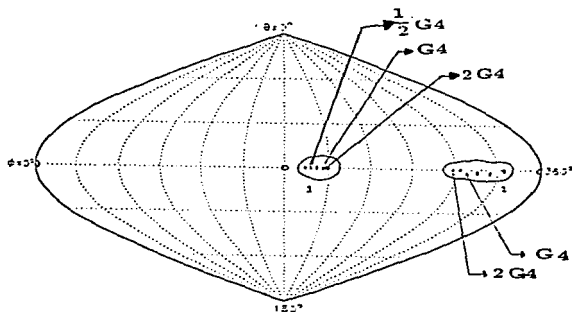


Figura.20 Distribución de los casquetes al aplicar campos cuadrupolares. Los círculos en blanco representan el dipolo intrínseco, mientras que los rellenos (en negro) muestran los casquetes con la aplicación de las componentes del cuadrupolo $G4$ como base. Enseguida se duplica la intensidad ($2G4$), y luego se disminuye a la mitad ($0.5G4$), como se ilustra en la figura. Notando claramente el comportamiento antes mencionado.

Reconocemos de la figura-20 que los casquetes ya no están distribuidos digamos a razón de 180° (antipodos), lo que nos daría la fase en el pulso para ver dos de ellos. De las publicaciones sobre este pulsar mencionan que se ve sólo un pulso (Halpen & Ruderman 1993) en fase a 105° .

Cuadrupolo	θ_{η}	área $\times 10^{11} \text{ cm}^2$	$T \times 10^6 \text{ K}$
G4-norte	0.911547	0.79515	1.8022
G4-sur	.0747692	0.53496	1.9895

Table 5: Resultados obtenidos con el modelo D+C para GEMINGA, los cuales se aproximan a los datos publicados en la ref-18.

De los MISOS que nuestro ensueño notaremos que la separación de los casquetes emisores están en nuestro caso alrededor de 110° , lo que es importante para el modelo teórico (figuras 21,22)(Tabla-5).

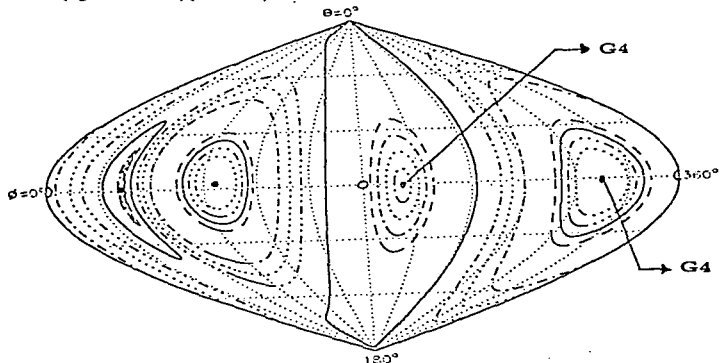


Figura.21 Aspecto de las líneas de campo y la posición de los casquetes polares con la aplicación del cuadrupolo G4 respecto a la orientación del dipolo. Apreciamos que la separación entre ambos casquetes es de 110° , en el caso concreto de GEMINGA.

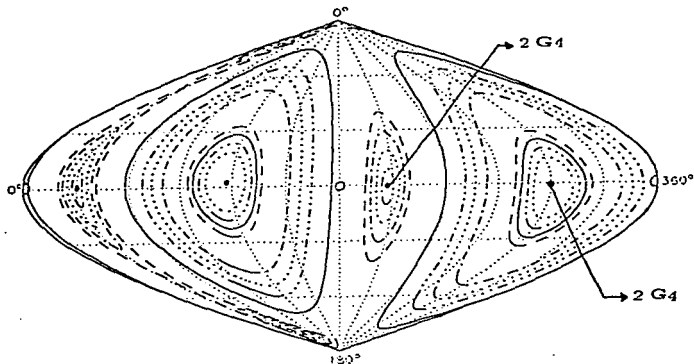


Figura.22 Mismo caso anterior pero con las componentes duplicadas en magnitud. Donde podemos observar también, el desplazamiento hacia el ortocentro sobre la línea ecuatorial.

Para el caso del PSR 1929+10 encontramos los resultados que se exponen en la tabla-3 en la parte superior, para el modelo C-1, y en el inferior para los modelos C3,C5,C11,C12 (Estos modelos no están ajustados a su ángulo exacto, se utilizaron modelos para 30°). En este caso se realizó sólo una prueba o aplicación debido a que es un pulsar que tiene un ángulo de inclinación del dipolo respecto a eje de rotación diferente de 90° , por lo cual no es posible aplicar las componentes cuadrupolares libremente. Ya que estas fueron calculadas para ángulos de $30, 60, 90$, grados, y el PSR 1929+10 tiene un ángulo de 19.5°

4.6 Extensión del modelo.

Hasta aquí, hemos de reconocer que el modelo que describe mejor el espectro de emisión de una estrella de neutrones pulsante, es el conocido modelo de "cono-líneo" (hollow-cone) alineado.

La extensión consiste en reforzar las ideas y observaciones que se han hecho a nivel de radio-emisión de los casquetes. En general la emisión de radio es debida a la radiación de curvatura de las partículas relativistas que fluyen desde los polos magnéticos a lo largo de las líneas abiertas de campo. Esta radiación se amplifica hasta la frecuencia de plasma, esto implica que existan para diferentes frecuencias, diferentes radios de emisión.

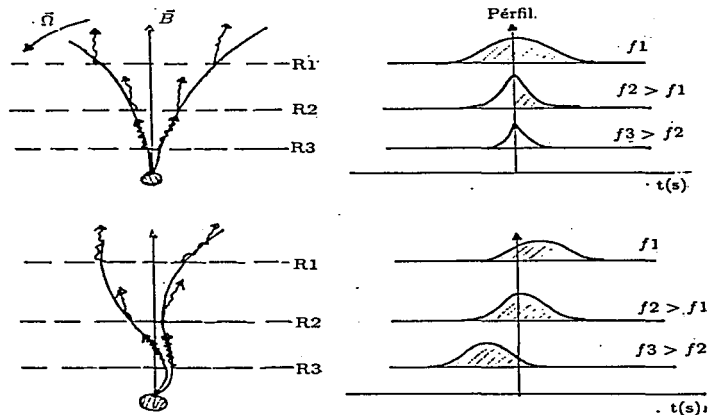


Figura.23 Esquemas sobre la diferencia de radios (según idea de Kuz'min) y frecuencia. En (a) notamos la geometría y los pulsos esperados, en (b) las modificaciones de componentes multipolares.

En el caso dipolar magnético se encuentra una relación sencilla respecto al radio de emisión ²⁰

$$f(r) \approx r^{-2} \quad [4.9]$$

En ondas de radio la emisión también es pulsada debido a la rotación de la estrella, el cono generado barre una región espacial, produciendo una distribución de longitudes de onda, de la fuente de emisión a través del cono. Por lo que, la forma del pulso sobre un ancho de banda $\Delta\nu$ respecto al tiempo, el cual puede ser utilizado para reconocer la configuración del campo magnético.

Caso (a) Dipolo:

En éste caso la línea de emisión será en el centro del cono de emisión, con lo cual debemos esperar que todos los pulsos lleguen al mismo tiempo para todas las frecuencias (Fig-23.a)

Caso (b) Multipolos:

En esta situación la distribución de cargas deberá deformar la línea de emisión, de lo cual esperamos cambios en el tiempo de arribo para cada f_i diferentes, lo que en realidad encuentra Kuz'min (fig-23.b).

Kuz'min mismo determina que a radios medios el campo se observa cercanamente dipolar para (100 a 1000) Mhz, pero que en radios pequeños, campos multipolares pueden adicionarse al dipolo para distorcionar la línea de emisión. Estas ideas se pueden aplicar para identificar variaciones en la posición de las líneas de emisión de nuestro rango de estudio (0.2 - 2.4) Kev. Esto se realizó para n (veces) el radio de la estrella (R_*), con $n=2$, hasta 10, y se observó cambios que pueden ir como una relación de $F \approx F(\theta, \phi) \approx r^{-2}$, pero hasta ahora no me es posible dar el valor de γ por falta de certidumbre del método aplicado.

²⁰Observational constraints on the structure of the pulsar magnetic field. A.D. Kuz'min. Radio Astronomy Department, Lebedev Physical Institute.

5 Conclusiones.

Como se ha podido observar a lo largo de este trabajo, el objetivo principal de esta investigación ha sido cubierto, puesto que en el desarrollo de la teoría de pulsares, aún ahora no se ha visto publicación que mencione como se distribuyen los casquetes polares (máximos de emisión), ni como se visualizarían los cambios en el área de los mismos. Me refiero estrictamente, cuando estos son embebidos en campos magnéticos no dipolares (en particular me refiero al modelo dipolo+cuadrupolo). Sin duda, el ver la posibilidad de modelar el campo superficial por componentes cuadrupolares, es una buena proposición que puede seguir produciendo datos, y entender cada vez mejor la estructura magnética, esto es aplicándolo, tanto a la estructura interna como a la externa de una estrella de neutrones rotante (Pulsar).

Por una lado, he podido comprobar que el campo magnético en su configuración cuadrupolar, sí presenta cambios reconocibles en su superficie, y en particular sobre la estructura de los casquetes polares, cuya emisión térmica se ha demostrado. Considero entonces, que los resultados obtenidos tanto de las variaciones en las dimensiones (áreas), así como de la morfología, es en extremo ilustrativo y consistente para poder en el futuro hacer un modelo más completo, en donde involucremos rotación y deformaciones de las líneas de campo magnético, con lo que espero poder tener una mejor visión del comportamiento del campo y de las alteraciones posibles sobre la radiación térmica emitida.

La comparación de los resultados contra los datos de la literatura ya existente, aseguran de una manera razonable la veracidad del modelo, que aún cuando es menos ideal los resultados fluctúan de manera adecuada (apelando al sentido físico común) de los modelos ideales (Caso dipolar).

Cabe mencionar que aún cuando el análisis de la fracción pulsada no se llevo a cabo, es posible pensar que para estos cambios de temperatura, que se han generado por la aplicación de componentes cuadrupolares superpuestas en el dipolo, puedan producir la variación en la curva de luz, y entonces aceptar que la distribución de temperaturas pueda dar cambios detectables.

En lo personal, el que los casquetes no presenten el mismo tamaño de pulsar a pulsar me hace pensar, que este 20% de variación en temperatura (teóricamente) pueda estar relacionado, con aquella variación en la fracción pulsada que es del mismo orden.

Algo más que mencioné, pero que no desarrollé profundamente es la dependencia angular del campo magnético, pero considero que es claro a los resultados presentados, que el cambio de posición de los casquetes polares es debido a la alteración de las componentes del campo magnético superficial (dipolo + cuadrupolo), soportandome sobre la referencia de *Ku'min*, quién propone que el campo magnético lejano se aprecie dipolar, mientras que en campo cercano tenga características multipolares, esperando quizá que de alguna manera las partículas emitidas desde la superficie, traigan consigo herencia del campo que las origino.

A Apéndices.

A.1 Radiación de curvatura.

Esta se hace presente aún cuando no exista una situación magnética, pues su efecto neto es curvar la trayectoria de una partícula cargada. En particular en los pulsares surge del movimiento longitudinal de las partículas a lo largo del dipolo (multipolo) a través de sus líneas.³¹

La importancia de este efecto se presenta cuando las partículas están en su nivel base de Landau. Esto es cuando no se tiene todavía la energía suficiente para producir radiación sincrotrónica o ciclotrónica. Por supuesto que, si los niveles son excitados aparecerá éste tipo de radiaciones además de la componente de curvatura.

Es claro que estas alteraciones no afectan de la misma forma, pues mientras uno es un cambio energético transversal respecto de \vec{B} , la radiación de curvatura es un cambio energético longitudinal. Ambos cambios están relacionados a la carga de la partícula. En general como la curvatura de las líneas de campo del pulsar son grandes, respecto a la energía de las partículas, la fórmula de radiación clásica es válida,³² por ende; para el espectro de energía de una partícula tenemos:

$$\frac{dJ_\omega}{d\omega} = \sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma f \left\{ \frac{2\omega}{\omega_0} \right\} \quad [A.1]$$

donde $\omega_0 = 3/2 \frac{c^2}{\rho_c}$ que representa la máxima frecuencia esperada para un radio de curvatura ρ_c y la función $f(x)$ es;

$$f(x) = 2.149x^{\frac{1}{2}}, x \ll 1 \quad [A.2]$$

$$f(x) = 1.253x^{\frac{1}{2}} e^{-x}, x \gg 1$$

³¹Sturrock, 1971.

³²Ver Electrodynamics classical, Jackson. 1975.

que satisface el espectro de radiación sincrotrónica para un radio de curvatura del orden de 10^8 cm². Con esto podemos decir que la potencia radiada será;

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho_a^2} \beta^3 \gamma^4 \text{ ergs s}^{-1}. \quad [A.3]$$

De aquí obtenemos que para pulsares típicos con $B \approx 10^{12}$ gauss, $R \approx 10^8$ cm y energías de pares de creación de ($10^{12} - 10^{13}$ ev), se obtiene un rango de energías de GeV. rango sobre el cual se encuentra el umbral de γ creación y 2γ creación produciendo cascada. Donde parte de los segundos es re-ejectado para calentar los polos de la estrella.

<i>Característica</i>	<i>Cantidad</i>
Dimensión de Ventana	8cm de diámetro
Campo de visión	2° de diámetro
Mezcla de gases.	65% Argón
-----	15% Metano
-----	20% Xenon
Presión de operación	1.466 bars a 22°C
Resolución de energía	43% a 93% en KeV
Resolución espacial	300 micrómetros (25 seg de arco), 1 KeV
Ventana de entrada	Polipropileno

Table 6: Condiciones óptimas de detección

B Algunos datos técnicos de los detectores del ROSAT

B.1 Elementos de medida del detector PSPC.

El satélite ROSAT esta equipado con varios detectores y cámaras sensibles en la banda de Rayos-X. Pero el que nos interesa es el PSPC cuyas siglas significan "Position sensitive proportional counter", estos contadores estan localizados en el plano focal del arreglo de espejos que funcionan como telescopio de rayos-X. En éste detector se observa que tanto la resolución espectral como la espacial aumentan en proporción al incremento de energía. Los rayos penetran a través de una ventana de polipropileno más un empaquetado de carbón y lexano, los últimos evitan o disminuyen la transmisión (UV), las características globales de óptima detección se dan en la tabla 1.

También tiene un revólver con cuatro posiciones donde se encuentran cuatro filtros en el frente del detector, y son usados dependiendo del modo de operación, es decir; el primer filtro es para uso estandar de observaciones y monitoreo de partículas de fondo. La tercera posición se usa para calibración espectral, mientras que el cuarto es un filtro de boro, el cuál incrementa la resolución a bajas energías.

B.2 Eficiencia cuántica.

Para que el PSPC detecte un fotón de *rayos - X* como un evento, este debe ser transmitido por la ventana de entrada y luego absorbido por el contador. La ventana de entrada es una hoja de polipropileno de grano de $1 \mu\text{m}$ encaquetado con $50 \mu\text{g cm}^{-2}$ carbón y $40 \mu\text{g cm}^{-2}$ Iexáno.

Esto implica que la ventana es básicamente opaca a energías justo arriba del límite del carbón en 0.28 Kev, pero transmite alrededor de 50 % abajo del carbón.

B.3 Resolución de energía.

Esta se encuentra descrita por la relación empírica a la máxima apertura angular media. Sobre la sección transversal del contador, considerándolo como un contador proporcional simple

$$\frac{\Delta E}{E} = 0.43 \left(\frac{E}{0.93} \right)^{-0.5} \quad [B.1]$$

B.4 ¿Qué es el Background?

La inducción de partículas del fondo medio-interestelar en el PSPC, se espera que sea bajo debido a la muy eficiente re-ejeción arriba de 99.5% sobre la tierra.

En órbita produce una taza de $\approx 2.5 \times 10^{-5}$ Cts $s^{-1} \text{ min arc}^{-2}$.

Primero:

La sensibilidad de detección de una fuente puntual depende de las propiedades del telescopio y del fondo contra el cuál deba competir. Para el Rosat existen cuatro fuentes de fondo relevantes:

- i) El fondo instrumental (dark currents).
- ii) El fondo del ambiente espacial (carga de partículas).
- iii) Dispersión de radiación solar y fondo de radiación X difusa.

Lo importante es que el espectro de las partículas cuyo fondo es relativamente plano con una pequeña cola de pulso alto.

Para fuentes lejanas de rayos X , las proporciones (tasas) de conteo van de 4.2 a 2.1×10^{-3} Cts $cm^{-2} \text{ min arc}^{-2}$, y depende esencialmente de la resolución espacial, que en promedio está entre 10^{-3} Cts s^{-1} . Mucho de este flujo aparece en la banda C a energía abajo de 0.28 KeV.

B.5 Tasa de conteo esperado de fotones.

La mínima tasa de conteo del PSPC depende de la razón de conteo del fondo y de la dimensión efectiva de la fuente ³³, el mínimo detectable entonces se encuentra como

$$M_{min} = t^{-0.5} \left(\frac{N_{\sigma}^2 B_{celda}}{f^2} + \frac{N_{min}^2}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [B.2]$$

donde N_{σ} es el umbral de significación requerido (señal-ruido), B_{celda} es la tasa de conteo en la celda de detección; f la fracción del conteo total de la fuente en la celda detectora, N_{min} es el número de fotones que se requiere para constituir una detección y t es el tiempo de integración.

Teniendo en mente lo anterior observamos que la función de respuesta para un "punto efectivo" depende de la energía, y entonces del espectro de la fuente específica, también de la posición en el campo de visión del detector.

Para los cálculos de sensibilidad de un detector de 23 arc-sec de radio, la fracción de todos los fotones de la fuente sobre la celda es de $\approx 90\%$ a 5σ de nivel de confianza, así como un mínimo de 10 cts suponiendo valores típico. Ya que la sensibilidad del PSPC depende de la energía se establecen dos conjuntos de datos:

- a) Sobre la banda total (0.1 - 2.4 KeV).
- b) En la banda dura (0.4 - 2.4 KeV) ³⁴.

Razón de cuentas esperadas

Esta razón depende sensiblemente del espectro incidente, el cuál se desconoce para la mayoría de las fuentes. Por lo tanto, en general, la relación entre el área efectiva y el espectro incidente es una función no trivial, ésta se encuentra graficada en el manual del funcionamiento del PSPC conocido como el factor de conversión EFC.

³³ Esto significa que depende del ángulo de orientación.

³⁴ Aquí el efecto de background es significativamente reducido.

Las gráficas de esta función es para las razones o tasas de conteo de una ley de potencia espectral, una línea térmica y de cuerpo negro, además como la función de la absorción del medio interestelar puede ser importante se considera la densidad de la columna de N_H .

Las gráficas en general dan los factores de conversión (EFC = energy-to-counts conversion factor). Es decir, el factor por el cual debe multiplicarse el flujo de la fuente sin absorción,³⁵ y de esta manera se obtiene la razón esperada de conteo para la fuente alineada (on-axis).

B.6 Fracción pulsada.

Siendo las curvas de luz las únicas herramientas de detección de los pulsares, es en estas donde se encuentran las características importantes. En principio presentan de uno a dos picos de emisión, fases entre estos, dependencia de la energía del fotón y, por supuesto la fracción pulsada. Donde esta última expresa sólo un promedio relativo respecto al número de cuentas realizadas

$$f_p(i) = \frac{1}{2} \frac{Cts_{pmax} - Cts_{min}}{Cts_{pmax}} \quad [B.3]$$

para observar como es el proceso iniciamos por definir como responde el detector PSPC del ROSAT.

Respuesta del detector

El número de cuentas en los canales de salida del detector $O(i)$, es obtenido de $N(E_\infty)$ con la matriz de respuesta del detector $R_{i,j}$. Entonces una cuenta de detección estará definida por

$$Cts(i) = \Delta t \sum_j R_{i,j} N(E_j) \delta E_j \quad [B.4]$$

En particular el PSPC de ROSAT, dispone de 256 canales de salida, esto hace que la i corra de $i = 1, 2, 3, 4 \dots 256$, pero cabe aclarar que los primeros 7 canales se han dispuesto de tal forma que tengan área efectiva nula. Mientras que el flujo recibido es distribuido en 729 bandas de fracción δE_j , por lo tanto, la j corre de $j = 1, 2, 3, \dots 729$, y Δt representa el tiempo de observación. Como el elemento de matriz $R_{i,j}$ tiene dimensiones de cm^{-2} para cada energía E_j , se llega a que el área efectiva del detector

³⁵En cantidades de $10^{-11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, para la banda de (0.1 - 2.4 KeV).

es; $A(E_j) = \sum_i R_{i,j}$, en tanto que, para cada canal de salida será; $A_j = \sum_i R_{i,j}$. Una manera de hacer más simple los cálculos es considerar una resolución perfecta en donde se cumple la condición $I = J$ y $R_{i,j} = \delta_{i,j} A(E_i)$.³⁶ Con lo anterior en mente reconocemos que la fracción pulsada es una característica medible pero delicada por la forma en la que se define sobre el rango de los canales de salida.

Algo que es de suma importancia mencionar es que esta depende de la geometría del sistema, así como de los efectos antes mencionados de lente y temperatura.

Es importante entonces, para el caso de un dipolo magnético el considerar situaciones que generen uno y dos pulsos (picos) en las curvas de luz, situaciones se presentan sólo si las condición de espacio-plano se cumple entre el ángulo (eje de rotación y el eje del dipolo magnético), y el ángulo ζ (eje de rotación y la línea de visión del observador) de la forma siguiente, $\alpha + \zeta < 90^\circ$ asegurando con esto que sólo un polo se observe.

Apoyándonos en la figura(2), notamos que la configuración de un pulso sencillo es cuando $\alpha = \zeta$. El máximo de la fracción se encuentra cuando $\alpha \approx \zeta \approx 45^\circ$, lo que justifica la dependencia de la orientación del dipolo como se mencionó al principio. En tanto, para $\alpha \approx \zeta > 45^\circ$ la fracción es ligeramente menor, apareciendo un segundo pico o pulso. Pero en ambos casos reconocemos que *la fase de los picos en las curvas son independientes de la energía del fotón, en el rango de estudio (0.08-2,5)KeV.*

Otra característica importante es que a más baja temperatura efectiva T_e resulta una mayor f_p (fracción pulsada), este hecho se explica de comparar la diferencia entre la temperatura máxima (T_{max}) y la mínima (T_{min}).

Si se considera una muy buena resolución de un detector para la f_p , entonces ésta será independiente de la absorción del medio, ya que el factor de corrección es de la forma $e^{(-N_{H0}(E))}$, en donde para el caso especial de PSPC se toma $\sigma(E) \approx E^{-3}$.

Bajo estas condiciones nos damos cuenta que las observaciones de un pulsar esta relativamente limitadas por los instrumentos de observación, así como, de propiedades físicas intrínsecas.

³⁶Esto se hace como una primera aproximación. Marzo 19, 1992. Danny PAGE.

C tabulaciones de los cuadrupolos aplicados en el modelo.

Estas componentes cuadrupolares se obtuvieron para tres ángulos característicos de 30, 60, y 90 grados de inclinación.

90 grados
M = 1.40
R = 10.00
R/Rs = 2.42
R_∞ = 13.06
gs14 = 2.42
máximo ángulo de lente : $\theta = 132.0$ grados
Dirección del observador : $\zeta = 90.0$ grados
Tb = 1.00E+03
B_o, θ , = 1.000E+12 90. 0.
Número de modelo = 1201
Q_{norm}, Q_{min}, Q_{max} = 1.000E+12 , 1.000E+10 , 5.000E+12
Máximo campo de fuerza = 1.47E+12 Gauss
mínimo campo de fuerza = 8.35E+11 Gauss
maxima T_r (local)=9.7738E+05
minima T_r (local)=9.6766E+05
T_{max}/T_{min} = 1.01000

Q_n	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	f_p
Tmax/Tmin = 1.16 - 1.17					
G1 1.240E+10	2.280E+10	1.670E+10	1.600E+11	-2.080E+10	1.165
Tmax/Tmin = 1.12 - 1.13					
G2 -1.150E+11	3.950E+10	-1.070E+10	1.850E+11	1.160E+10	1.125
G3 -1.230E+10	2.980E+10	-3.170E+10	-1.540E+11	5.610E+10	1.120
Tmax/Tmin = 1.11 - 1.12					
G4 -1.230E+10	2.980E+10	-3.170E+10	-1.540E+11	5.610E+10	1.120
Tmax/Tmin = 1.09 - 1.10					
G5 -1.100E+10	-1.540E+10	4.330E+10	2.660E+11	-1.970E+10	1.093
G6 7.710E+10	-1.400E+10	8.250E+10	9.880E+10	1.120E+10	1.094
G7 -1.350E+11	1.120E+10	-8.620E+10	9.780E+10	1.670E+10	1.092
Tmax/Tmin = 1.08 - 1.09					
G8 3.560E+11	-9.090E+10	-1.980E+10	5.710E+10	3.560E+11	1.081
Tmax/Tmin = 1.07 - 1.08					
G9 4.050E+10	1.250E+10	-8.050E+10	-3.100E+11	-9.090E+10	1.071
G10 1.360E+11	2.090E+10	1.530E+10	1.720E+11	2.140E+11	1.078
G11 3.050E+10	1.880E+10	-2.880E+10	3.570E+11	-1.540E+10	1.075
G12 -3.340E+11	1.030E+11	-6.840E+10	1.520E+11	1.440E+11	1.070
G13 -9.600E+11	1.350E+10	1.250E+11	5.050E+10	-6.760E+10	1.074
G14 5.890E+10	-7.500E+10	7.900E+10	-2.660E+11	-1.450E+11	1.073
G15 6.640E+11	1.770E+11	1.390E+11	1.290E+10	-4.640E+10	1.075
Tmax/Tmin = 1.06 - 1.07					
G16 -5.110E+11	2.200E+10	-1.770E+11	-1.550E+11	1.580E+11	1.060
G17 9.380E+10	2.960E+10	5.860E+10	-9.930E+10	4.340E+10	1.062
G18 7.710E+11	2.800E+11	-2.360E+11	1.640E+10	-3.590E+10	1.063
G19 -1.250E+11	2.740E+10	6.060E+10	-2.020E+11	-2.560E+11	1.061
G20 1.710E+11	4.220E+10	-1.210E+11	-1.650E+11	-1.080E+11	1.067
G21 -6.480E+10	-3.380E+11	-1.370E+11	-1.670E+10	-3.580E+11	1.061
G22 -3.340E+11	1.080E+11	-6.840E+10	1.520E+11	1.440E+11	1.070
G23 1.870E+11	-1.160E+10	2.570E+10	-5.810E+10	-7.730E+10	1.066
G24 1.850E+11	4.440E+11	1.370E+10	8.200E+10	-2.810E+11	1.063
G25 -2.860E+11	4.390E+10	1.630E+10	1.570E+11	-2.350E+10	1.063
G26 -2.280E+11	5.290E+11	1.280E+10	4.900E+10	2.320E+11	1.064

Table 7: Cuadrupolos posibles a 90° de inclinación.

Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	f_p
Tmax/Tmin = 1.07 - 1.08					
D1 2.690E+10	-5.240E+10	-1.960E+11	1.960E+11	1.130E+10	1.073
Tmax/Tmin = 1.06 - 1.07					
D2 -6.580E+11	1.000E+10	-3.160E+10	5.110E+10	-3.790E+10	1.063
D3 9.380E+10	2.960E+10	5.860E+10	-9.930E+10	4.340E+10	1.061
D4 3.560E+11	-9.090E+10	-1.980E+10	5.710E+10	3.560E+11	1.065
D5 7.710E+10	-1.400E+10	8.250E+10	9.880E+10	1.120E+10	1.069
D6 1.850E+11	4.440E+11	1.370E+10	8.200E+10	-2.810E+11	1.060
D7 -8.650E+11	-1.660E+10	1.390E+11	-6.100E+10	-1.370E+11	1.062
D8 6.640E+11	1.770E+11	1.390E+11	1.290E+10	-4.640E+10	1.066
D9 1.240E+10	2.280E+10	1.670E+10	1.600E+11	-2.080E+10	1.060
D10 -1.350E+11	1.120E+10	-8.620E+10	9.780E+10	1.670E+10	1.061
D11 -2.280E+11	5.290E+11	1.280E+10	4.900E+10	2.320E+11	1.064

Table 8: Cuadруполос posibles a 60° de inclinación.

60 grados

M = 1.40

R = 10.00

R/Rs = 2.42

R_∞ = 13.06

gs14 = 2.42

Máximo ángulo de lente : = 132.0 grados .

Dirección del observador : ζ = 60.0 grados .

Tb = 1.00E+08

Bo , , φ = 1.000E+12 , 60. , 0.

Number of models = 1201

Q_{norm} , Q_{min} , Q_{max} = 1.000E+12 , 1.000E+10 , 5.000E+12

Máximo campo = 1.47E+12 Gauss

Mínimo campo = 8.35E+11 Gauss

Máximo Te (local) = 9.7738E+05

Mínimo Te (local) = 9.6767E+05

T_{max}/T_{min} = 1.0100

30 grados
M = 1.40
R = 10.00
R/Rs = 2.42
R_∞ = 13.06
gs14 = 2.42

Máximo ángulo de lente : = 132.0 grados
Dirección del observador : ζ = 30.0 grados
Tb = 1.00E+08

Bo, θ, φ = 1.000E+12 , 30. , 0.

Número de modelo = 1201

$Q_{norm}, Q_{min}, Q_{max} = 1.000E+12, 1.000E+10, 5.000E+12$

Máximo campo = 1.47E+12 Gauss

Mínimo campo = 8.35E+11 Gauss

Máxima Te (local) = 9.7739E+05

Mínima Te (local) = 9.7101E+05

$T_{max}/T_{min} = 1.0066$

Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	f_p
$T_{max}/T_{min} = 1.04 - 1.05$					
C1 3.490E+11	-3.130E+10	2.380E+11	2.000E+10	2.240E+10	1.048
C2 -4.350E+11	-2.230E+10	3.070E+10	2.320E+10	-2.880E+10	1.042
C3 3.950E+11	-4.170E+10	1.390E+10	1.550E+10	5.440E+10	1.042
C4 -1.180E+11	1.470E+11	-1.740E+10	-1.380E+10	-1.550E+10	1.045
$T_{max}/T_{min} = 1.03 - 1.04$					
C5 -6.580E+11	1.000E+10	-3.160E+10	5.110E+10	-3.790E+10	1.038
C6 1.190E+12	3.430E+10	3.420E+11	-1.740E+10	3.830E+11	1.030
C7 9.920E+11	1.360E+10	2.180E+11	-1.060E+11	1.860E+11	1.038
C8 -4.370E+11	6.090E+10	1.020E+10	-1.440E+11	-1.300E+10	1.031
C9 -1.590E+10	-1.110E+11	-8.920E+10	5.700E+10	1.720E+11	1.036
C10 1.850E+11	4.440E+11	1.370E+10	8.200E+10	-2.810E+11	1.030
C11 5.160E+11	4.850E+10	5.790E+10	-1.530E+10	8.820E+10	1.038
C12 -1.620E+11	3.690E+11	2.490E+10	-7.580E+10	2.930E+10	1.032
C13 6.640E+11	1.770E+11	1.390E+11	1.290E+10	-4.640E+10	1.030
C14 -2.950E+11	3.520E+11	5.180E+10	-3.060E+10	-1.850E+10	1.034
C15 2.690E+10	-5.240E+10	-1.960E+11	1.960E+11	1.130E+10	1.030
C16 -1.750E+11	-1.800E+11	-1.560E+10	2.000E+10	-4.580E+10	1.035
C17 -1.350E+11	1.120E+10	-8.620E+10	9.780E+10	1.670E+10	1.031
C18 7.380E+11	-2.380E+10	5.380E+11	2.270E+10	3.140E+11	1.033

Table 9: Cuadrupolos posibles a 30° de inclinación.

D Matemáticas

D.1 Solución general del campo eléctrico del modelo C+D.

Ahora para el campo eléctrico de la ecuación (3.4., §3) con $i = 0$ obtenemos

$$\frac{g_{00}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{\sqrt{g_{00}}} \dot{E}_r \right] + \frac{1}{\text{sen}\theta} \nabla_\theta (\text{sen}\theta \dot{E}_\theta) + \nabla_\phi \dot{E}_\phi = 0. \quad [D.1]$$

Aquí se representa el campo eléctrico visto desde el sistema de referencia lejos de la estrella.³⁷

Usando la ecuación (3.3., §3) con $i = 0$ con $k = 1, 2, 3$ y $l = 1, 2, 3$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\nabla_\phi E_\theta - \frac{1}{\text{sen}\theta} \nabla_\theta (\text{sen}\theta E_\phi) \right] &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_r \\ \frac{\sqrt{g_{00}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) - \frac{1}{r} \nabla_\phi E_r &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_\theta \\ \frac{1}{r} \nabla_\theta E_r - \sqrt{\frac{g_{00}}{r}} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_\phi. \end{aligned} \quad [D.2]$$

Usando las condiciones de campo magnético congelado y conductividad infinita en la corteza, la solución de las ecuaciones (b1.2) deberán satisfacer las condiciones de frontera para \vec{E}

$$E_r(a) = \frac{1}{c} \left[(\Omega X r) X B \right]_{r|_{r=a}} + 4\pi\sigma \quad [D.3]$$

$$E_x(a) = -\frac{1}{c} \left[(\Omega X r) X B \right]_{x|_{x=a}},$$

donde σ es la densidad de carga superficial inducida en la estrella, y $B(\theta, \phi)$ es el campo magnético designado en la superficie.

³⁷Ln $\vec{E} = E + wXB$ donde la $w = \frac{v}{c^2} \int X \dot{r}$

La solución de las ecuaciones con las condiciones de frontera tiene la forma de

$$E_r = \sqrt{g_{00}} \sum_l^m \left[(l+1) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \xi_l(r) e_{lm}^r - \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \lambda) \quad [D.4]$$

$$E_x = - \sum_l^m \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \eta_l(r) e_{lm}^r \nabla_x - \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} f_l(r) e_{lm}^r X(n, X \nabla)_x + \frac{1}{r} \Phi_{lm} \nabla_x \right] Y_{lm}(\theta, \lambda)$$

donde $\xi_l(r) = \frac{\psi_l(r)}{\eta_l(r)}$ y $\eta_l(r) = \frac{n_l(r)}{\tau(r)}$.

Las funciones ψ y τ son soluciones del siguiente sistema

$$\frac{d}{dx} (x^l \psi_l) - l x^{l-1} (1-x)^{-l} \eta = 0 \quad [D.5]$$

$$\frac{d}{dx} (x^{l+1} \eta) - (l+1) x^l \psi_l = 0$$

teniendo la forma hipergeométrica

$$\eta = F(l, l+1; 2(l+1); x) \quad [D.6]$$

$$\psi_l = F(l, l+2; 2(l+1); x)$$

Los coeficientes e_{lm}^r y e_{lm}^T son encontrados al sustituir las condiciones de frontera, expresandose como

$$e_{lm}^r = -\frac{1}{a} \Phi_{lm}(a) + \frac{\Omega a}{c} (f_{l+1}(a) b_{l+1, m} \frac{(l+2)}{(l+1)} \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} - f_{l-1}(a) b_{l-1, m} \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}}) \quad [D.7]$$

además cumple que $e_{00}^r = 0$, ahora bien si la carga de la estrella es nula entonces resulta que $e_{lm}^T = -im \frac{\Omega a}{c} b_{lm}$. Donde reconecemos que en todas las ecuaciones anteriores, Φ_{lm} es el potencial escalar en la expresión para \vec{E} dada por la ecuación diferencial.

$$(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_{lm} - \frac{l(l+1)}{x^2} \Phi_{lm} = Q_{lm} \quad [D.8]$$

con el siguiente conjunto de equivalencias,

$$Q_{i,m} = \frac{2GJ}{c^2 a} \left(\frac{a}{r_g} \right)^{l+2} (F_{l-1,m} x^l + g_{l+1,m} x^{l+2})$$

$$F_{l-1,m} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} b_{l-1,m} (2l f_{l-1} - (l-1) g_{l-1}) \quad [D.9]$$

$$g_{l+1,m} = (l+2) \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} b_{l-1,m} \left(\frac{a}{r_g} \right)^2 (2f_{l+1} + g_{l+1})$$

E Desarrollos de algunas ecuaciones importantes.

Solución de la ecuación [2.30].

Consideremos una caja cilíndrica de altura h y área A , de tal forma que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \rightarrow E = 4\pi\rho A h$$

además sabemos que

$$\rho = -\frac{1}{2\pi c} \vec{\Omega} \cdot \vec{B}$$

con lo cual llegamos a

$$E = 4\pi\rho h = \frac{2\Omega B_* h}{c}$$

finalmente

$$\phi = EXh = \left(\frac{2\Omega B_*}{c}\right) h^2$$

Ecuación [2.28].

Comencemos con (2.4) estableciendo

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

cuando se llega al cilindro de luz,

$$B_d \cdot 2\pi R_d = 4\pi J$$

con $R_d = c/\Omega$, por lo tanto

$$B_d = B_o \left(\frac{R_o}{R_d}\right)^3$$

lo que implica al despejar j y sustituyendo el valor B_d que,

$$j = \frac{c}{2} B_o \left(\frac{R_o^3}{R_d^3}\right) = \frac{c}{2} B_o \left(\frac{\Omega^2}{c^2}\right) R_d^2$$

con lo anterior y considerando que $j = e\dot{N}_p$, concluimos en

$$\dot{N}_p = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 E_0 R^3}{\epsilon c}$$

La ecuación (2.26) se deduce de calcular las ecuaciones de las líneas de campo eléctrico, dado que la componente paralela es igual a la del magnético. Establezcamos entonces que el potencial para un dipolo eléctrico en coordenadas esféricas es de la forma

$$\Phi = \left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\cos\theta}{r^2}$$

calculando el gradiente de Φ encontramos

$$E = \hat{r} \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \hat{\theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \hat{\phi} \left(-\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right)$$

resultando

$$E = -\nabla\Phi = \hat{r} \left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{2\cos\theta}{r^3} + \hat{\theta} \left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\sin\theta}{r^3}$$

donde uno puede dibujar las líneas de fuerza a partir de E_r con E_θ , con lo cual se obtiene

$$r d\theta_\theta = \frac{dr}{E_r}$$

llegando a

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = 2 \frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

que al integrar y seleccionando de manera adecuada la constante K_{dip} tenemos

$$\ln(r) = 2\ln(\sin\theta) + \ln(K_{dip})$$

reduciendo y sustituyendo $R_l = r$ concluimos

$$\ln(r) = \ln(K_{dip} \sin^2\theta)$$

$$R_l = K_{dip} \sin^2\theta$$

resultando ser la línea de campo, con lo cual se obtiene (2.26).

F REFERENCIAS

F.1 Artículos.

- (1) Alpar, M.A., Guseinov, O.H., A search for X-ray from five pulsars: 1984, Ap.J. 276, 325.
- (2) Anderson L.J. and Cohen M.J. Gravitational collapse of the magnetic neutron stars. 1970, ASS.
- (3) Arshakyan T.G. Statistical analysis of the angular distribution of pulsar emission. 1994, Astronomy Reports.
- (4) Becker R.H., and Helfand D.J. An X-ray study of two crablike supernova remnants. 1982, Ap.J.
- (5) Beker W., Braizer K.T.S., and Trümper J. ROSAT observation of the radio and gamma-ray pulsar. 1994, A&A.
- (6) Camilo F., and Thorsett S.E. The magnetic fields, ages, and original spin periods of millisecond pulsars. 1993, Ap.J.
- (7) Daugherty J.K., and Harding A.K. Gamma ray pulsars: Emission from extended polar cap cascade. 1995, Ap.J.
- (8) Gudmunsson, Petrick, and Eptein. Structure of neutron star envelopes. 1983, Ap.J, september.
- (9) Helfand D.J., and Becker R.H. Observation of stellar remnants from recent supernovae. 1984, Nature.
- (10) Helfand D.J., Gary A., and Novick R. Thermal X-ray emission from neutron star. 1980, Nature.
- (11) Hernquist Lars and Applegate H. James. Analytical models of neutron star envelopes. 1984, Ap.J December.
- (12) J.F. Malov. Angle between the magnetic field and the rotation axis in pulsars. Sov. Astron. 34(2), March 1990.
- (13) Kuz'min A.D. Observational constraints on the structure of the pulsar magnetic field. 1986, R.A.D. Levedev Physical Institute.
- (14) Ley Koo E. and Góngora A.T. El desarrollo multipolar por fuera y por dentro. 1988, Rev Mexicana de Física.
- (15) Lindblom L. Limits on the gravitational redshift from neutron stars. Ap.J. 1984.
- (16) Manchester R.N. The shape of pulsar beams. 1995, J. Astrophys.
- (17) Manchester R.N., and Taylor J.H. Observer and derived parameters for 330 pulsars. Astron.J, 86(12), December 1981.
- (18) Miller C.M., and Hamilton R.J. Reliability of magnetic inclination angle determinations for pulsars. 1993. Ap.J.
- (19) Muslimov A.G., and Tsygan A.I. Electric fields generated by rotating neutron star in a vacuum whit allowance for GRT effect. 1986, Sov. Astron.

- (20) Ögelman H. X-ray observations of cooling neutron stars. 1993, Wisconsin Astrophys.
- (21) Page D. Surface temperature of magnetized neutron stars and interpretation of the ROSAT data.I. dipolar fields. 1994. Ap.J.
- (22) Page D.,and Sarmiento A. Surface temperature of magnetized neutron stars and interpretation of the ROSAT data.II. 1996, Ap.J.
- (23) Page R.D. Thermal radiation from magnetized neutron stars. 1994. Space science Review.
- (24) Possenti A. Merghetti S., and Colpi M. The pulsed soft X-ray emission from PSR 0656+14. 1996, A&A.
- (25) Radhakrishnan V., and Cook D.J. Magnetic pole and polarization structure of pulsar radiation. Astrophysical Letters, 1989.
- (26) Ryderman M.A., and Sutherland P.G. Theory of pulsars: Polar Gaps, Spark and coherent microwave radiation. 1975, Ap.J.
- (27) Sewar F.D., and Harden F.R. A new fast X-ray in the supernovae remnant MSH 15-52. 1982, Ap.J.
- (28) Sewar F.D., and Wang Z.R. Pulsars X-ray synchrotron nebulae, and guest stars. 1988, Ap.J.
- (29) Steven J.Sturner. Electron energy losses near pulsar polar caps, June, 1995. Ap.J.
- (30) Sturrock P.A. A model of pulsars. 1971. Ap.J.
- (31) Treves A., and Szuszkiewicz E. On the electrodynamic of a rotating accretor. 1995, Ap.J.
- (32) Usov V.V., and Melrose D.B. Pulsar with satron magnetic fields: Polar gaps, bound pair creation and nonthermal luminosities. 1985, JETP letters.
- (33) Yancopoulos S., Hamilton T.T., and Helfand D.J. The detection of pulsar X-ray emission from a nearby radio pulsar. 1994. Ap.J.

F.2 Bibliografia

- (1) Beskin. V.S., Gurevich. A.V., and Istomin. Ya. N. Physics of the pulsar magnetosphere. Cambridge, university press.
- (2) Cohen-Tannoudji C. Diu B., and Lalöe F. Quantum mechanics. Vol.1. J.W.& S.
- (3) Leonard Eyges. The classical electromagnetic field, (1972). Addison-Wesley Publishing Company.
- (4) Greiner W. Quantum mechanics. Third edition, Springer-Verlag
- (5) Landau L.D., and Lifshitz E.M. The classical theory of fields. Pergamon Press.
- (6) Mészfos P. High enrgy radiation from magnetized neutron stars. The univesity of chicago Press.
- (7) Misner C.W., Thorne K., and Wheeler J.A. Gravitation. Freeman.
- (8) Parks G.K. Physic of space plasmas. Addison-Wesley Publishing Company.
- (9) Shadowitz A. The electromagnetic field. Dover publication, inc N.Y.
- (10) Shapiro S. L., and Teukolsky S.A. Black Holes, White dwarfs and neutron stars. John Wiley & Sons.
- (11) Wyld H.W. Mathematical methods for physics. Cummings Publishing company, Inc.