UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESQUEMA DEDUCTIVO Y SU APLICACION EN LOS CARDINALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MARICELA SOLORZANO AUDIFFRED

DIRECTOR DE TESIS: MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI

FACULTAD DE CIENCIAS
U N A M

MEXICO, D. F. 1997.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"EL ESQUEMA DEDUCTIVO Y SU APLICACION EN LOS CARDINALES"

realizado por MARICELA SOLORZANO AUDIFFRED

con número de cuenta 8955520-4, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	MAT. GONZALO ZUBIETA RUSSI
Propietario	M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO
Propietario	M. en C. CARLOS TORRES ALCARAZ
Suplente	M. en C. CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ
Suplente	M. en I. de O. NORMA ELVIRA PERALTA MARQUEZ

P.a Virginia Abrín Batule
Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A la memoria de mi Padre.

A mi Madre por su apoyo y comprensión durante mi carrera.

A mi familia por el cariño que me han brindado a lo largo de mi vida.

A Luis A. por su cariño y comprensión.

AGRADECIMIENTOS

Al **Profesor Zubieta** por sus enseñanzas y la valiosa dirección de este trabajo.

A **Pablo Barrera S.** por el apoyo y los consejos que me ha brindado en diferente etapas de mi carrera.

Prólogo

El Esquema Deductivo es el agente de un formalismo lógico, ajeno al simbolismo de la lógica simbólica.

Uno de los principales problemas para las personas que se inician en la carrera de matemáticas, o en carreras afines, es el entender y hacer demostraciones. Sin embargo, dentro de la enseñanza muy pocas veces se hace énfasis en este problema, pues se considera que se aprende a demostrar mediante la práctica, pero de acuerdo a la experiencia esto no siempre se consigue.

El Esquema Deductivo es un proceso formal que presenta las demostraciones de manera accesible y de fácil aplicación a cualquier nivel, desde un curso de lógica a nivel medio superior hasta un curso avanzado de la carrera de matemáticas.

Las demostraciones basadas en el Esquema Deductivo son de las cosas tangibles que se pueden ofrecer en matemáticas.

Una demostración debe aportar frescura al razonamiento y no ser aparatosa o irritante. Podemos decir que el apego al Esquema Deductivo es un compromiso con la lógica y con la ética, pues cada deducción está basada en afirmaciones ya establecidas y, por otro lado, el apego a la naturalidad es un compromiso con la estética.

Este Esquema Deductivo está presente en el quehacer de todo matemático. Su exhibición, en la forma depurada que se ostenta aquí, se debe al profesor G. Zubieta, a quien también se debe el modo de utilizarlo para demostrar los silogismos y las afirmaciones sobre veraces y mitómanos, que sirven de modelo para demostrar en matemáticas.

INDICE

1. EL ESQUEMA DEDUCTIVO

1.1. Introducción.

Un **condicional** es una frase que consta de hipótesis y tesis

Ejemplos de condicionales:

> **Si** x es socio de y **entonces** x cumple
> **Si** x no cumple **entonces** x no es socio de y.

Para negar una condicional se afirma la hipótesis y se niega la tesis. En el caso de las dos anteriores, sus negaciones son, respectivamente:

> x es socio de y y x no cumple.
> x no cumple y x es socio de y.

Dos condicionales se llaman giros, la una de la otra, si, y sólo si, tienen la misma negación. Así, las dos condicionales anteriores son giros la una de la otra, porque tienen, salvo el orden, la misma negación.

Axiomas:
En general, los axiomas son válidos por definición, y son las únicas verdades que no necesitan ser demostradas.

I. Si x es veraz, y x dice que sucede tal cosa, entonces sucede tal cosa.

II. Si x es mitómano, y x dice que sucede tal cosa, entonces no sucede tal cosa.

III. Si x es veraz entonces x no es mitómano.
Si x es mitómano entonces x no es normal.
Si x es normal entonces x no es veraz.

IV. x es veraz o x es mitómano o x es normal.

Estos axiomas constituyen una definición implícita de los términos veraz, mitómano y normal.

Otros axiomas:
i)Si x dice que sucede tal cosa, y no sucede tal cosa, entonces x miente.

ii)Si x dice que sucede tal cosa, y sucede tal cosa, entonces x no miente.

Estos axiomas constituyen una definición implícita de los términos mentir y no mentir.

Aunque ya se dieron los axiomas sobre veraces y mitómanos estos pueden ser definidos también de la siguiente manera: El que es veraz siempre dice la verdad, el que es mitómano siempre miente, y el que no es ni veraz ni mitómano es normal.
Luego el que dice alguna mentira no es veraz, y el que dice alguna verdad no es mitómano. Toda persona es veraz o mitómano o normal, pero solo una de estas tres cosas.

1.1.1. Ejemplos Parvipontanos

Parvipontano es el nombre que se le daba a Adam Balsam, escolástico del siglo XII que profesaba en el Petit Pont de París. Fue el primero en ocuparse de acertijos como los que vamos a presentar aquí. Pero a él sólo le interesaban los insolubles.

Acertijos parvipontanos
Estos son el tipo de acertijos que le interesaban a Adam Balsam.

A dice que B miente.
B dice que A miente:
A miente-B no miente. 1ª solución
A no miente-B miente. 2ª solución

A dice que B miente.
B dice que A no miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

En el **apéndice A**, se encontrará una tabla de acertijos parvipontanos

Para el arte de demostrar, sin embargo, son más importantes los acertijos sobre veraces y mitómanos, como:

A dice que B es normal.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A miente:
B no es mitómano.
Si C es veraz entonces B es veraz.
Si A es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal
B dice que C es veraz
C dice que A no miente:
B no es veraz.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

En el **apéndice B**, se encuentra una tabla completa de veraces y mitómanos.

1.2. Esquema Deductivo

El esquema deductivo universal es una estructura carente de contenido que toma vida dentro de ciertos contextos. Consta de tres modos hipotéticos, para inferir, y de cinco modos descendentes.

Los modos hipotéticos son:

Si P o Q,
y si no P, *Reducción por exclusión.*
entonces Q.

Si, si P entonces Q,
y si, si P entonces no Q, *Reducción por contradicción.*
entonces no P.

Si P o Q,
si, si P entonces R, *Reducción por casos.*
y si, si Q entonces R,
entonces R.

Los modos descendentes son del estilo siguiente:

De lo idéntico:
Si x es socio de y entonces x es socio de y.

De la conjunción a la parte:
Si x es socio de y y y fuma entonces y fuma.

De la parte a la disyunción:
Si x llega hoy entonces x llega hoy o x llega mañana.

De lo general a lo particular:
Si, para todo x, x depende de y,
entonces y depende de y.

En este ejemplo, lo que la hipótesis afirma de todo x la tesis lo afirma de y. Nótese la colocación de la tesis.

De lo específico a lo inespecífico:
Si x es socio de y y x fuma,
entonces existe z tal que
z es socio de y y z fuma.

Aquí, lo que la hipótesis afirma de x, la tesis lo afirma de algún z, sin especificar. Obsérvese la colocación de la tesis.

Aparte de los ocho modos anteriores, se puede inferir también por traducción, por giro, por definición, o por algo demostrado antes.

1.2.1. Aplicación del esquema deductivo a veraces y mitómanos

Las siguientes demostraciones exhiben el uso de los tres modos hipotéticos.

A dice que B es normal.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A miente. *Datos*

B no es mitómano: *Afirmación a demostrar*

(1) B dice que C no es mitómano — Dato
(2) C es mitómano o C no es mitómano — Axioma lógico

(3)Si C es mitómano entonces B no es mitómano:

(a)C es mitómano Hpt
(b)C dice que A miente Dato
(c)A no miente (a)(b)Def de mitómano
(d)A dice que B es normal Dato
(e)B es normal (d)(c)Def de mentir, girada
(f)B no es mitómano (e)Def de mitómano, girada

(4)Si C no es mitómano entonces B no es mitómano:

(a)C no es mitómano Hpt
(b)B dice que C no es mitómano Dato
(c)B no es mitómano (b)(a)Def de mitómano, girada

(5)B no es mitómano (2)(3)(4)Por casos

Si A es mitómano entonces B es veraz: *Afirmación a demostrar*

(1)A es mitómano Hpt
(2)A dice que B es normal Dato
(3)B no es normal (1)(2)Def de mitómano
(4)B es mitómano o B es veraz (3)Def común
(5)B no es mitómano:

(a)B dice que C no es mitómano Dato
(b)C dice que A miente Dato
(c)A miente (2)(3)Def de mentir
(d)C no es mitómano (b)(c)Def de mitómano, girada
(e)B no es mitómano (a)(d)Def de mitómano, girada

(6)B es veraz (4)(5)Por exclusión

A dice que B es normal.
B dice que C es veraz.
C dice que A no miente. Datos

B no es veraz: *Afirmación a demostrar*

(1)Si B es veraz entonces A no miente:

(a)B es veraz Hpt
(b)B dice que C es veraz Dato
(c)C es veraz (a)(b)Def de veraz
(d)C dice que A no miente Dato
(e)A no miente (c)(d)Def de veraz

(2)Si B es veraz entonces A miente:

(a)B es veraz Hpt
(b)A dice que B es normal Dato
(c)B no es normal (a)Def de común
(d)A miente (b)(c)Def de mentir

(3)B no es veraz (1)(2)Por contradicción

1.2.2. Aplicación del esquema deductivo a los acertijos parvipontanos

A dice que B miente
B dice que A no miente

No es cierto que A miente:

•(1)A miente Neg
(2)A dice que B miente Dato
(3)B no miente (1)(2)Def de mentir, girada
(4)B dice que A no miente Dato
•(5)A no miente (3)(4)Def de mentir, girada

No es cierto que A no miente:

•(1)A no miente Neg
(2)A dice que B miente Dato
(3)B miente (1)(2)Def de mentir, girada
(4)B dice que A no miente Dato
•(5)A miente (3)(4)Def de mentir, girada

2. Conceptos básicos

Los ejemplos sobre veraces y mitómanos del capítulo anterior, aparte de su aspecto festivo, tienen el atractivo de que existe una manera uniforme de demostrarlos, manera según la cual cada paso determina, dentro de cierto margen de libertad, cuál es el paso siguiente. Las fórmulas del presente capítulo, aunque carecen del carácter festivo de los ejemplos mencionados, ofrecen el atractivo de su importancia en matemáticas, y de que también existe una manera uniforme de demostrarlas.

En ese sentido, el presente capítulo viene a completar la labor formativa iniciada en el capítulo anterior, en un ámbito de amenidad que le es análogo.

2.1. Igualdad

Leyes de la igualdad:
$x = x$ *Reflexiva.*
Si $x = y$ entonces $y = x$ *Simétrica.*
Si $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$ *Transitiva.*
Si $x = y$ entonces el peso de x = el peso de y *De monotonía.*
Si x es hermano de y, $x = x'$, y $y = y'$,
entonces x' es hermano de y' *De sustitución.*
Estas leyes son válidas por definición, son axiomas.

Según la ley de monotonía, dadas dos cosas iguales, al aplicarles la misma operación los resultados son iguales.

Según la ley de sustitución, se pasa de la hipótesis a la tesis sustituyendo iguales por iguales en la proposición de base. La proposición de base es una parte de la hipótesis que se parece a la tesis. La hipótesis consta de la proposición de base en conjunción con ciertas igualdades anexas.
A continuación se repite el ejemplo último anterior, subrayando en la proposición de base los elementos que se sustituyen para pasar a la tesis:

Si $\underline{x}$ es hermano de $\underline{y}$, $x = x'$, y $y = y'$,
entonces x' es hermano de y'.

2.2. Algebra de conjuntos

El álgebra de conjuntos versa sobre las operaciones de unión, intersección, resta y producto cartesiano.

Aunque es notable el parecido con el álgebra ordinaria, las fórmulas de ésta tienen contenido aritmético, en tanto que las fórmulas del álgebra de conjuntos tienen contenido lógico

Inclusión
Se hablará de conjuntos $A, B, C, ...$, y de sus elementos $x, y, z, ...$. Se escribe $x \in A$ en lugar de cualquiera de las frases siguientes:

> x *está en* A,
> x *pertenece a* A,
> x *es elemento de* A.

Se dice que A *está contenido en* B, (en símbolos, $A \subseteq B$) cuando *todo elemento de* A *es elemento de* B, es decir, cuando *para todo* x, si $x \in A$ *entonces* $x \in B$.

Propiedades:
$A \subseteq A$. *Reflexiva.*
Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ *Transitiva.*
Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$. *Antisimétrica.*

La propiedad antisimétrica dice que si todo elemento de A es elemento de B, y todo elemento de B es elemento de A, entonces $A = B$, lo cual es un axioma sobre los conjuntos conocido como el <u>principio de extensionalidad</u>.

Unión, intersección y diferencia
Se define la <u>unión</u> $A \cup B$, mediante los siguientes axiomas:
Para todo x, $x \in A \cup B$ si, y sólo si, $x \in A$ o $x \in B$.

De este axioma se desprende que:

si $x \in A$ entonces $x \in A \cup B$,
si $x \in B$ entonces $x \in A \cup B$,
si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ o $x \in B$.

Se define la <u>intersección</u> $A \cap B$, mediante los siguientes axiomas:
Para todo x, $x \in A \cap B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \in B$.

De este axioma se desprende que:
si $x \in A \cap B$ entonces $x \in A$,
si $x \in A \cap B$ entonces $x \in B$,
si $x \in A$ y $x \in B$ entonces $x \in A \cap B$.

Se define la diferencia $A - B$ de tal modo que, $x \in A - B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \notin B$.

Familia de conjuntos
Una *familia de conjuntos* $(A_i)_{i \in I}$ es una correspondencia, A que a cada elemento $i \in I$ le asocia un conjunto único A_i.

Se define la unión e intersección de una familia tal, como sigue:

Para todo x, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ssi existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. *Unión.*
Para todo x, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ssi para todo i, si $i \in I$ entonces $x \in A_i$. *Intersección.*

2.3. Funciones

Producto cartesiano
Por definición, (x, y) es la *pareja ordenada* cuyo primer elemento es x y cuyo segundo elemento es y, en tanto que $A \times B$ es el producto cartesiano o conjunto de las parejas (x, y) tales que $x \in A$ y $y \in B$. Implícitamente:

Para todo x, y todo y, si $(x, y) \in A \times B$ entonces $x \in A$,
Para todo x, y todo y, si $(x, y) \in A \times B$ entonces $y \in B$,
Para todo x, y todo y, si $x \in A$ y $y \in B$ entonces $(x, y) \in A \times B$.

Idea de función
Función es una correspondencia f que a cada elemento x, de un conjunto A, llamado dominio de f, le asocia un objeto único $f(x)$, llamado valor de f en x. El conjunto de tales valores es, por definición, el curso o imagen de f.

Una función $f : A \to B$ es una correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asocia un elemento único $f(x) \in B$.

Formalmente una función de A a B es un subconjunto f de $A \times B$ tal que para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Si $Dom f = D$
$Dom g = D$
y si, para todo $x \in D$, $f(x) = g(x)$
entonces $f = g$. *Axioma de extensionalidad para función.*

Se dice que f va de A a B, en símbolos $f : A \longrightarrow B$, si, y sólo si, $Dom f = A$ y, para todo x, si $x \in A$ entonces $f(x) \in B$. *Def de incidencia.*

Dadas $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, se define la composición $g \circ f$ tal que $Dom(g \circ f) = A$ y para todo $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. *Def de composición.*

$g \circ f$ se lee g de f, g precedida de f, o f seguida de g.

Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si, y sólo si, f va de A a B y, para todos $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva si, y sólo si, f va de A a B y, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si, y sólo si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Imagen directa

Dada $f : X \longrightarrow Y$, a cada conjunto $A \subseteq X$ se le asocia su imagen $f[A]$ (que denotaremos por $f(A)$) como el conjunto de los $f(x)$ tales que $x \in A$. Implícitamente se tiene:

Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$.
Si $y \in f(A)$ entonces existe x tal que $x \in A$ y $f(x) = y$. *Def de imagen.*

Si f va de A a B, y g va de B a C entonces $g \circ f$ va de A a C:

(1) f va de A a B Hpt
(2) $Dom f = A$ (1)Def de incidencia
(3) Para todo $x \in A$, $f(x) \in B$ (1)Def de incidencia
(4) g va de B a C Hpt
(5) $Dom g = B$ (4)Def de incidencia
(6) Para todo $y \in B$, $g(x) \in C$ (4)Def de incidencia
(7) $Dom(g \circ f) = A$ (1)(4)Def de $\circ$
(8) Para todo $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$ (1)(4)Def de $\circ$

(9)Para todo x, si $x \in A$ entonces $g \circ f(x) \in C$:

(a)$x \in A$ Hpt
(b)$g \circ f(x) = g(f(x))$ (a)Por (8)
(c) $f(x) \in B$ (a)Por (3)
(d)Si $f(x) \in B$ entonces $g(f(x)) \in C$ (6)Desc
(e)$g(f(x)) \in C$ (c)Por (d)
(f)$g \circ f(x) \in C$ (e)(b)Def de $=$

(10)f va de A a C (7)(9)Def de incidencia

Si f va de A a B, y $B \subseteq C$ entonces f va de A a C:

(1) f va de A a B Hpt
(2)$Dom f = A$ (1)Def de incidencia
(3)Para todo $x \in A$, $f(x) \in B$ (1)Def de incidencia
(4)$B \subseteq C$ Hpt
(5)Para todo y, si $y \in B$ entonces $y \in C$ (4)Def de$\subseteq$
(6)Para todo x, si $x \in A$ entonces $f(x) \in C$:

(a)$x \in A$ Hpt
(b)$f(x) \in B$ (a)Por (3)
(c)Si $f(x) \in B$ entonces $f(x) \in C$ (5)Desc
(d)$f(x) \in C$ (b)Por (c)

(7)f va de A a C (2)(6)Def de incidencia

Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, y $B \subseteq C$ entonces $f : A \longrightarrow C$ es inyectiva:

(1)$f : A \longrightarrow B$ es inyectiva Hpt
(2)f va de A a B (1)Def de iny
(3)Para todo $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ ent. $f(x_1) \neq f(x_2)$ (1)Def de iny
(4)$B \subseteq C$ Hpt
(5)f va de A a C (2)(4)Dm (2.3)
(6)$f : A \longrightarrow C$ es inyectiva (5)(3)Def de iny

<u>Si</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>y</u> $g : B \longrightarrow C$ <u>son</u> <u>inyectivas</u> <u>entonces</u> $g \circ f : A \longrightarrow C$ <u>es</u> <u>inyectiva</u>:

(1)$f : A \longrightarrow B$ es inyectiva Hpt
(2)f va de A a B (1)Def de incidencia
(3)Para todo $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ ent $f(x_1) \neq f(x_2)$ (1)Def de iny
(4)$g : B \longrightarrow C$ es inyectiva Hpt
(5)g va de B a C (4)Def de incidencia
(6)Para todo $y_1, y_2 \in B$, si $y_1 \neq y_2$ ent $g(x_1) \neq g(x_2)$ (4)Def de iny
(7)$g \circ f$ va de A a C (2)(5)Dm (2.3)
(8)Dados $x_1, x_2 \in A$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$:

(a)$x_1 \in A$ Hpt
(b)$x_2 \in A$ Hpt
(c)$x_1 \neq x_2$ Hpt
(d)$f(x_1) \neq f(x_2)$ (a)(b)(c)Por (3)
(e)$f(x_1) \in B$ (a)Por (2)
(f)$f(x_2) \in B$ (b)Por (2)
(g)Si $f(x_1) \neq f(x_2)$ ent $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (e)(f)Por (6)
(h)$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (d)Por (g)
(i)$g \circ f(x_1) = g(f(x_1))$ (a)Def de $\circ$
(j)$g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$ (b)Def de $\circ$
(k)$g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ (h)(i)(j)Def de $=$

(9)$g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva (7)(8)Def de iny

Noción de equivalencia
Se dice que A <u>es</u> <u>equivalente</u> <u>a</u> B (en símbolos $A \sim B$), si, y sólo si, existe f tal que $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Propiedades:
$A \sim A$ *Reflexiva.*
Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$ *Simétrica.*
Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$ *Transitiva.*

Imagen inyectiva
<u>Si</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>es</u> <u>inyectiva</u> <u>y</u> $S \subseteq A$ <u>entonces</u> $S \sim f(S)$:

(1) $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva Hpt
(2)$S \subseteq A$ Hpt
(3)f va de A a B (1)Def de iny
(4)Dados $x_1, x_2 \in A$, si $f(x_1) = f(x_2)$ ent $x_1 = x_2$ (1)Def de iny, girada
(5)Para todo x, si $x \in S$ ent $x \in A$ (2)Def de $\subseteq$

(6) $Dom h = S$

(7) Para todo x, si $x \in S$ ent. $h(x) = f(x)$ **Def de h**

(8) Para todo x, si $x \in S$ ent. $h(x) \in f(S)$:

(a) $x \in S$ **Hpt.**

(b) $h(x) = f(x)$ (a)Por (7)

(c) $f(x) \in f(S)$ **(a)Def de imagen**

(d) $h(x) \in f(S)$ (c)(b)**Def de =**

(9) h va de S a $f(S)$ (6)(8)**Def de incidencia**

(10) Dados $x_1, x_2 \in S$, si $h(x_1) = h(x_2)$ ent. $x_1 = x_2$:

(a) $x_1 \in S$ **Hpt.**

(b) $x_2 \in S$ **Hpt.**

(c) $h(x_1) = h(x_2)$ **Hpt.**

(d) $x_1 \in A$ **(a)Por (5)**

(e) $x_2 \in A$ **(b)Por (5)**

(f) $h(x_1) = f(x_1)$ **(a)Por (7)**

(g) $h(x_2) = f(x_2)$ **(b)Por (7)**

(h) $f(x_1) = f(x_2)$ (c)(f)(g)**Def de =**

(i) $x_1 = x_2$ (d)(e)(h)Por (4)

(11) Dados $x_1, x_2 \in S$, si $x_1 \neq x_2$ ent. $h(x_1) \neq h(x_2)$ (10)Giro

(12) Dado $y \in f(S)$, existe $x \in S$ tal que $h(x) = y$:

(a) $y \in f(S)$ **Hpt.**

(b) Existe x tal que $x \in S$ y $f(x) = y$ **(a)Def de imagen**

(c) $x \in S$

(d) $f(x) = y$ Def de x

(e) $h(x) = f(x)$ (c)Por (7)

(f) $h(x) = y$ (d)(e)Def de =

(g) $x \in S$ y $h(x) = y$ (c)(f)Desc

(h) Existe x tal que $x \in S$ y $h(x) = y$ (g)Desc

(13) $h : S \longrightarrow f(S)$ es biy (9)(11)(12)Def de biy

(14) Existe h tal que $h : S \longrightarrow f(S)$ es biy (13)Desc

(15) $S \sim f(S)$ (14)Def de $\sim$

<u>Si</u> A <u>es</u> <u>equivalente</u> <u>a</u> <u>algún</u> <u>subc</u> <u>de</u> B <u>ent</u> <u>existe</u> f <u>tal</u> <u>que</u> $f : A \to B$ <u>es</u> <u>iny</u> :

(1)A es equivalente a algún subc de B Hpt
(2)Existe Y tal que $Y \subseteq B$ y $A \sim Y$ (1)Trad
(3)$Y \subseteq B$
(4)$A \sim Y$ Def de Y
(5)Existe f tal que $f : A \to Y$ es biy (4)Def de $\sim$
(6)$f : A \to Y$ es biy Def de f
(7)$f : A \to Y$ es iny (6)Def de biy
(8)$f : A \to B$ es iny (7)(3)Dm (2.3 imagen directa)
(9)Existe f tal que $f : A \to B$ es iny (8)Desc

Función reflexiva
<u>Si</u> $f : A \to A$ <u>es</u> <u>inyectiva</u> <u>y</u> $U \subseteq A - f(A)$ <u>ent</u> $A \sim A - U$: [8]

Teorema de Bernstein
Lema:
<u>Si</u> $f : A \to A$ <u>es</u> <u>inyectiva</u> <u>y</u> $A \supseteq X \supseteq f(A)$ <u>entonces</u> $A \sim X$:

(1)$f : A \to A$ es iny Hpt
(2)$A \supseteq X$ Hpt
(3)$X \supseteq f(A)$ Hpt
(4)$A - X \subseteq A - f(A)$ (3)Alg
(5)$A \sim A - (A - X)$ (1)(4)Dm (2.3 función reflexiva)
(6)$A - (A - X) = X$ (2)Alg
(7)$A \sim X$ (5)(6)Def de =

Teorema de Bernstein:
<u>Si</u> A <u>es</u> <u>equivalente</u> <u>a</u> <u>algún</u> <u>subc</u> <u>de</u> B,
<u>y</u> B <u>es</u> <u>equivalente</u> <u>a</u> <u>algún</u> <u>subc</u> <u>de</u> A,
<u>entonces</u> $A \sim B$:

(1)A es equivalente a algún subc de B Hpt
(2)Existe f tal que $f : A \to B$ es iny (1)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(3)$f : A \to B$ es iny Def de f
(4)B es equivalente a algún subc de A Hpt
(5)Existe g tal que $g : B \to A$ es iny (4)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(6)$g : B \to A$ es iny Def de g
(7)$g \circ f : A \to A$ es iny (3)(6)Dm (2.3 imagen directa)

(8)f va de A a B	(3)Def de iny
(9)$f(A) \subseteq B$:	(8)
(10)g va de B a A	(6)Def de iny
(11)$g(B) \subseteq A$:	(10)
(12)$g(f(A)) \subseteq g(B)$:	(9)
(13)$g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$	(12)(11)Desc
(14)$A \sim g(B)$	(7)(13)Lema
(15)$B \subseteq B$	Reflexiva de $\subseteq$
(16)$B \sim g(B)$	(6)(15)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(17)$g(B) \sim B$	(16)Simetría de $\sim$
(18)$A \sim B$	(14)(17)Transitividad de $\sim$

3. Cardinales

3.1. Número cardinal

A cada conjunto A se le asocia un número cardinal el cual se denomina número cardinal del conjunto A y se denota por card A de tal modo que:
card $A =$ card B si, y solo si $A \sim B$. *Def de* card
Por definición los primeros cardinales son:
$0 =$ card $\emptyset$, $1 =$ card $\{0\}$, $2 =$ card $\{0, 1\}$,...,$\aleph_0 =$ card $\{0, 1, ..., n, ...\}$, o $\aleph_0 =$ card $\mathbb{N}$, ($\aleph_0$ se lee alef cero).

Se dice que A tiene α elementos si, y sólo si, card $A = \alpha$.

Según lo anterior, $\emptyset$ tiene 0 elementos, $\{0\}$ tiene 1 elemento,...,$\{0, 1, ..., n, ...\}$ tiene $\aleph_0$ elementos.

card $A <$ card B si, y sólo si, A es equivalente a algún subc de B y $A \nsim B$ *Def de* $<$

card $A >$ card B si, y sólo si, card $B <$ card A *Def de* $>$

Se dice que A es finito si, y sólo si, card $A < \aleph_0$ y que A es numerable si, y sólo si, card $A \leq \aleph_0$.

Si A es equivalente a algún subc de B entonces card $A \leq$ card B:

(1)A es equivalente a algún subc de B Hpt
(2)$A \sim B$ o $A \nsim B$ Axioma
(3)Si $A \sim B$ ent card $A \leq$ card B :

(a)$A \sim B$ Hpt
(b)card $A =$ card B (a)Def de card
(c)card $A \leq$ card B (b)Desc

(4)Si $A \nsim B$ ent. card $A \leq$ card B :

(a)$A \nsim B$ Hpt.
(b)A es equivalente a algún subc de B y $A \nsim B$ (1)(a)Desc
(c)card $A <$ card B (b)Def de $<$
(d)card $A \leq$ card B (c)Desc

(5)card $A \leq$ card B (2)(3)(4)Por casos

<u>Si</u> card $A \leq$ card B <u>entonces</u> A <u>es</u> <u>equivalente</u> <u>a</u> <u>algún</u> <u>subc</u> <u>de</u> B :

(1)card $A \leq$ card B Hpt.
(2)card $A <$ card B o card $A =$ card B (1)Trad
(3)Si card $A <$ card B ent. A es equivalente a algún subc de B :

(a)card $A <$ card B Hpt.
(b)A es equivalente a algún subc de B y $A \nsim B$ (a)Def de $<$
(c)A es equivalente a algún subc de B (b)Desc

(4)Si card $A =$ card B ent. A es equivalente a algún subc de B :

(a)card $A =$ card B Hpt.
(b)$A \sim B$ (a)Def de card
(c)$B \subseteq B$ Reflexiva de $\subseteq$
(d)$B \subseteq B$ y $A \sim B$ (c)(b)Desc
(e)Existe X tal que $X \subseteq B$ y $A \sim X$ (d)Desc
(f)A es equivalente a algún subc de B (e)Trad

(5)A es equivalente a algún subc de B (2)(3)(4)Por casos

<u>Si</u> $A \subseteq B$ <u>entonces</u> card $A \leq$ card B :

(1)$A \subseteq B$ Hpt.
(2)$A \sim A$ Reflexiva de $\sim$
(3)$A \subseteq B$ y $A \sim A$ (1)(2)Desc
(4)Existe X tal que $x \subseteq B$ y $A \sim X$ (3)Desc
(5)A es equivalente a algún subc de B (4)Trad
(6)card $A \leq$ card B (5)Dm (3.1)

Si card $A \leq$ card $B \leq$ card A **entonces** card $A =$ card B :

(1)card $A \leq$ card B Hpt.
(2)A es equivalente a algún subc de B (1)Dm (3.1)
(3)card $B \leq$ card A Hpt.
(4)B es equivalente a algún subc de A (3)Dm (3.1)
(5)$A \sim B$ (2)(4)Bernstein
(6)card $A =$ card B (5)Def de card

Si $f : A \to B$ **es inyectiva entonces** card $A \leq$ card B :

(1)$f : A \to B$ es iny Hpt.
(2)$A \subseteq A$ Reflexiva de $\subseteq$
(3)$A \sim f(A)$ (1)(2)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(4)f va de A a B (1)Def de iny
(5)$f(A) \subseteq B$: (4)
(6)card $A =$ card $f(A)$ (3)Def de card
(7)card $f(A) \leq$ card B (5)Dm (3.1)
(8)card $A \leq$ card B (7)(6)Def de $=$

Si $f : A \to B$ **es suprayectiva entonces** card $A \geq$ card B :

(1)$f : A \to B$ es supra Hpt.
(2)f va de A a B (1)Def de supra
(3)Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (1)Def de supra
(4)Para todo $y \in B$, $x_y \in A$ y $f(x_y) = y$ Def de x_y

(5)$Dom\Phi = B$
(6)Para todo $y \in B, \Phi(y) = x_y$ Def de Φ

(7)Para todo $y \in B$, $\Phi(y) \in A$:

(a)$y \in B$ Hpt.
(b)$\Phi(y) = x_y$ (a)Por (6)
(c)$x_y \in A$ (a)Por (4)
(d)$\Phi(y) \in A$ (c)(b)Def de $=$

(8)Φ va de B a A (5)(7)Def de incidencia.

(9) Dados $y_1, y_2 \in B$, si $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$ ent $y_1 = y_2$:

(a) $y_1 \in B$ Hpt
(b) $y_2 \in B$ Hpt
(c) $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$ Hpt
(d) $\Phi(y_1) = x_{y_1}$ (a)Por (6)
(e) $\Phi(y_2) = x_{y_2}$ (b)Por (6)
(f) $x_{y_1} = x_{y_2}$ (c)(d)(e)Def de =
(g) $f(x_{y_1}) = f(x_{y_2})$ (f)Def de =
(h) $f(x_{y_1}) = y_1$ (a)Por (4)
(i) $f(x_{y_2}) = y_2$ (b)Por(4)
(j) $y_1 = y_2$ (g)(h)(i)Def de =

(10) $\Phi : B \longrightarrow A$ es iny (8)(9)Def de iny
(11) card $B \leq$ card A (10)Dm (3.1)

<u>Si</u> card $A \leq$ card B <u>y</u> card $B \leq$ card C <u>entonces</u> card $A \leq$ card C :

(1) card $A \leq$ card B Hpt
(2) A es equivalente a algún subc de B (1)Dm (3.1)
(3) Existe f tal que $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva (2)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(4) $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva Def de f
(5) card $B \leq$ card C Hpt
(6) B es equivalente a algún subc de C (5)Dm (3.1)
(7) Existe g tal que $g : B \longrightarrow C$ es inyectiva (6)Dm (2.3 imagen inyectiva)
(8) $g : B \longrightarrow C$ es inyectiva Def de g
(9) $g \circ f : A \longrightarrow C$ es inyectiva (4)(8)Dm (2.3 imagen directa)
(10) card $A \leq$ card C (9)Dm (3.1)

3.2. Suma de cardinales

Por definición:
$\sum_{i \in I}$ card A_i = card $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$ *Def de* $\sum$

Dados $i, j \in I$, si $i \neq j$ entonces $\{i\} \times A_i$ es ajeno a $\{j\} \times A_j$:

(1) $i \in I$ Hpt
(2) $j \in I$ Hpt

(3)$i \neq j$ Hpt
(4)Para todo (x,y), si $(x,y) \in \{i\} \times A_i$ entonces $(x,y) \notin \{j\} \times A_j$:

(a)$(x,y) \in \{i\} \times A_i$ Hpt
(b)$x \in \{i\}$ (a)Def de $\times$
(c)$x = i$ (b)Def de $\{i\}$
(d)$x \neq j$ (3)(c)Def de $=$
(e)$x \notin \{j\}$ (d)Def de $\{j\}$
(f)$(x,y) \notin \{j\} \times A_j$ (e)Def de $\times$, girada

(5)$\{i\} \times A_i$ es ajeno a $\{j\} \times A_j$ (4)Def de ajeno

card $\bigcup_{i\in I} A_i \leq \sum_{i\in I}$ card A_i : *Subaditividad*

(1)$Dom\Phi = \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)$
(2)Para todo $i \in I$ y todo $y \in A_i$, $\Phi(i,y) = y$ Def de Φ
(3)Para todo $(x,y) \in \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)$, $\Phi(x,y) \in \bigcup_{i\in I} A_i$:

(a)$(x,y) \in \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)$ Hpt
(b)Existe i tal que $i \in I$ y $(x,y) \in \{i\} \times A_i$ (a)Def de $\bigcup$
(c)$i \in I$
(d)$(x,y) \in \{i\} \times A_i$ Def de i
(e)$x \in \{i\}$ (d)Def de $\times$
(f)$y \in A_i$ (d)Def de $\times$
(g)$x = i$ (e)Def de $\{i\}$
(h)$(x,y) = (i,y)$ (g)Def de $=$
(i)$\Phi(x,y) = \Phi(i,y)$ (h)Def de $=$
(j)$\Phi(i,y) = y$ (c)(f)Por (2)
(k)$\Phi(x,y) = y$ (i)(j)Def de $=$
(l)$\Phi(x,y) \in A_i$ (f)(k)Def de $=$
(m)$i \in I$ y $\Phi(x,y) \in A_i$ (c)(l)Desc
(n)Existe i tal que $i \in I$ y $\Phi(x,y) \in A_i$ (m)Desc
(o)$\Phi(x,y) \in \bigcup_{i\in I} A_i$ (n)Def de $\bigcup$

(4)Φ va de $\bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)$ a $\bigcup_{i\in I} A_i$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dado $z \in \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $(x,y) \in \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times A_i)$ tal que $\Phi(x,y) = z$:

(a)$z \in \bigcup_{i\in I} A_i$ Hpt
(b)Existe i tal que $i \in I$ y $z \in A_i$ (a)Def de $\bigcup$
(c)$j \in I$

(d)$z \in A_j$ Def de j
(e)$j \in \{j\}$ Def de $\{j\}$
(f)$(j, z) \in \{j\} \times A_j$ (e)(d)Def de $\times$
(g)$j \in I$ y $(j, z) \in \{j\} \times A_j$ (c)(f)Desc
(h)Existe i tal que $i \in I$ y $(j, z) \in \{i\} \times Ai$ (g)Desc
(i)$(j, z) \in \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$ (h)Def de $\bigcup$
(j)$\Phi(j, z) = z$ (c)(d)Por (2)
(k)$(j, z) \in \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$ y $\Phi(j, z) = z$ (i)(j)Desc
(l)Existe (x, y) tal que $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$ y $\Phi(x, y) = z$ (k)Desc

(6)$\Phi : \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ es supra (4)(5)Def de supra
(7)$\text{card} \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i) \geq \text{card} \bigcup_{i \in I} A_i$ (6)Dm (3.1)
(8)$\text{card} \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i) = \sum_{i \in I} \text{card } A_i$ Def de $\sum$
(9)$\sum_{i \in I} \text{card } A_i \geq \text{card} \bigcup_{i \in I} A_i$ (7)(8)Def de $=$
(10)$\text{card} \bigcup_{i \in I} A_i \leq \sum_{i \in I} \text{card } A_i$ (9)Trad

3.3. Producto y potencia

El *producto cartesiano* $\times_{i \in I} A_i$ de una familia de conjuntos, es por definición el conjunto de las funciones $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tales que $f(i) \in A_i$ para cada $i \in I$.

Cada elemento de este producto es una *función de elección*, o sea, una manera de elegir $x_i \in A_i$ para cada i. Así, un elemento de $A_1 \times A_2$ es una manera de elegir $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$, es decir, una pareja ordenada (x_1, x_2).

Definimos la *potencia* A^I como *producto cartesiano de tantos factores iguales a* A *como elementos hay en* I. En símbolos

$$A^I = \times_{i \in I} A_i \qquad \text{donde } A_i = A \text{ para cada } i.$$

Luego A^I es el *conjunto de todas las funciones* $f : I \longrightarrow A$.

Por definición
$\prod_{i \in I} \text{card } A_i = \text{card } \times_{i \in I} A_i$ *Def de* $\prod$
$(\text{card } A)^{\text{card } B} = \text{card}(A^B)$ *Def de* $(\text{card})^{\text{card}}$

$\{0,1\}^A$

Por definición de potencia, $\{0,1\}^A$ es el conjunto de las funciones $f : A \longrightarrow \{0,1\}$, llamadas funciones características en A.

Por definición toda función, $\Phi : A \longrightarrow \{0,1\}^A$ asocia a cada $x \in A$ una función característica $\Phi(x) \in \{0,1\}^A$. Escribiremos simplemente Φ_x en lugar de $\Phi(x)$.

P(A)

Por definición, $P(A)$ llamado parcialidad de A, es el conjunto de las partes de A, o conjunto de las partidas de elementos de A.

Axioma:

Para todo U, $U \in P(A)$, si, y sólo si, $U \subseteq A$. *Def de* $P(A)$

$P(A) \sim \{0,1\}^A$: **1ª etapa**

(1)$Dom\Phi = P(A)$

(2)Para todo $U \in P(A)$, $Dom\Phi_U = A$
$\Phi_U(x) = 1$ si $x \in U$
$\Phi_U(x) = 0$ si $x \in A - U$ Def de Φ

(3)Para todo $U \in P(A)$, $\Phi_U \in \{0,1\}^A$:

(a)$U \in P(A)$ Hpt

(b)$Dom\Phi_U = A$ (a)Por (2)

(c)Para todo $x \in A$, $\Phi_U(x) \in \{0,1\}$:

(c_1)$x \in A$ Hpt

(c_2)$U \subseteq A$ (a)Def de $P(A)$

(c_3)$x \in U$ o $x \in A - U$ (c_1)(c_2)Alg

(c_4)Si $x \in U$ ent. $\Phi_U(x) = 1$ (a)Por (2)

(c_5)Si $x \in A - U$ ent. $\Phi_U(x) = 0$ (a)Por (2)

(c_6)$\Phi_U(x) = 1$ o $\Phi_U(x) = 0$ (c_3)(c_4)(c_5)Por casos

(c_7)$\Phi_U(x) \in \{0,1\}$ (c_6)Def de $\{0,1\}$

(d)Φ_U va de A a $\{0,1\}$ (b)(c)Def de incidencia

(e)$\Phi_U : A \longrightarrow \{0,1\}$ (d)Def de incidencia

(f)$\Phi_U \in \{0,1\}^A$ (e)Def de potencia

(4)Φ va de $P(A)$ a $\{0,1\}^A$ (1)(3)Def de incidencia

(5)Dados $U, V \in P(A)$, si $\Phi_U = \Phi_V$ ent. $U = V$: **Pend** 2ª etapa

(6)Para todo $f \in \{0,1\}^A$, existe $U \in P(A)$ tal que $\Phi_U = f$: **Pend 3ª** etapa
(7)$\Phi : P(A) \to \{0,1\}^A$ es biy **(4)(5)(6)Def de biy**
(8)Existe Φ tal que $\Phi : P(A) \to \{0,1\}^A$ es biy **(7)Desc**
(9)$P(A) \sim \{0,1\}^A$ **(8)Def de $\sim$**

$P(A) \sim \{0,1\}^A$: **2ª etapa**

(1)$Dom\Phi = P(A)$
(2)Para todo $U \in P(A)$, $Dom\Phi_U = A$
$\Phi_U(x) = 1$ si $x \in U$
$\Phi_U(x) = 0$ si $x \in A - U$ Def de Φ

(3)Para todo $U \in P(A)$, $\Phi_U \in \{0,1\}^A$ Dm 1ª etapa
(4)Φ va de $P(A)$ a $\{0,1\}^A$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dados $U, V \in P(A)$, si $\Phi_U = \Phi_V$ ent. $U = V$:

(a)$U \in P(A)$ Hpt.
(b)$V \in P(A)$ Hpt.
(c)$\Phi_U = \Phi_V$ Hpt.
(d)Si $x \in U$ ent. $x \in V$:

(d$_1$)$x \in U$ Hpt.
(d$_2$)Si $x \in U$ ent. $\Phi_U(x) = 1$ (a)Por (2)
(d$_3$)$\Phi_U(x) = 1$ (d$_1$)Por (d$_2$)
(d$_4$)$\Phi_U(x) = \Phi_V(x)$ (c)Def de $=$
(d$_5$)$\Phi_V(x) = 1$ (d$_3$)(d$_4$)Def de $=$
(d$_6$)$U \subseteq A$ (a)Def de $P(A)$
(d$_7$)$x \in A$ (d$_1$)(d$_6$)Alg
(d$_8$)$V \subseteq A$ (b)Def de $P(A)$
(d$_9$)$x \in V$ o $x \in A - V$ (d$_7$)(d$_8$)Alg
(d$_{10}$)Si $x \in A - V$ ent. $\Phi_V(x) = 0$ (b)Por (2)
(d$_{11}$)$\Phi_V(x) \neq 0$ (d$_5$)Porque $1 \neq 0$
(d$_{12}$)$x \notin A - V$ (d$_{11}$)Por (d$_{10}$), girado
(d$_{13}$)$x \in V$ (d$_9$)(d$_{12}$)Exclusión

(e)$U \subseteq V$ (d)Def de $\subseteq$
(f)Si $x \in V$ ent. $x \in U$: Dm análoga a la de (d)
(g)$V \subseteq U$ (f)Def de $\subseteq$
(h)$U = V$ (e)(g)Antisimétrica

(6)Para todo $f \in \{0,1\}^A$, existe $U \in P(A)$ tal que $\Phi_U = f$: **Pend 3ª** etapa

(7)$\Phi : P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ es biy (4)(5)(6)Def de biy
(8)Existe Φ tal que $\Phi : P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ es biy (7)Desc
(9)$P(A) \sim \{0,1\}^A$ (8)Def de $\sim$

$P(A) \sim \{0,1\}^A$: **3ª etapa**

(1)$Dom\Phi = P(A)$
(2)Para todo $U \in P(A)$, $Dom\Phi_U = A$
$\Phi_U(x) = 1$ si $x \in U$
$\Phi_U(x) = 0$ si $x \in A - U$ Def de Φ

(3)Para todo $U \in P(A)$, $\Phi_U \in \{0,1\}^A$ Dm 1ª etapa
(4)Φ va de $P(A)$ a $\{0,1\}^A$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dados $U, V \in P(A)$, si $\Phi_U = \Phi_V$ ent $U = V$ Dm 2ª etapa
(6)Para todo $f \in \{0,1\}^A$, existe $U \in P(A)$ tal que $\Phi_U = f$:

(a)$f \in \{0,1\}^A$ Hpt
(b)$f : A \longrightarrow \{0,1\}$ (a)Def de pot
(c)$Domf = A$ (b)Def de incidencia
(d)Para todo $x \in A$, $f(x) \in \{0,1\}$ (b)Def de incidencia
(e)Para todo x, $x \in U$ ssi $x \in A$ y $f(x) = 1$ Def de U
(f)Para todo x, si $x \in U$ ent $x \in A$:

(f_1)$x \in U$ Hpt
(f_2)Si $x \in U$ ent $x \in A$ y $f(x) = 1$ (e)Desc
(f_3)$x \in A$ y $f(x) = 1$ (f_1)Por (f_2)
(f_4)$x \in A$ (f_3)Desc

(g)$U \subseteq A$ (f)Def de $\subseteq$
(h)$U \in P(A)$ (g)Def de $P(A)$
(i))$Dom\Phi_U = A$ (h)Por (2)
(j)Para todo $x \in A$, $\Phi_U(x) = f(x)$:

(j_1)$x \in A$ Hpt
(j_2)$f(x) \in \{0,1\}$ (j_1)Por (d)
(j_3)$f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ (j_2)Def de $\{0,1\}$
(j_4)Si $f(x) = 0$ ent $\Phi_U(x) = f(x)$:

(α)$f(x) = 0$ Hpt
(β)$f(x) \neq 1$ (α)Porque $1 \neq 0$
(γ)Si $x \in U$ ent $x \in A$ y $f(x) = 1$ (e)Desc

(δ)No ocurre que $x \in A$ y $f(x) = 1$ (β)Desc, girada
(ε)$x \notin U$ (δ)Por (γ) girado
(ζ)$x \in A - U$ (j_1)(ε)Def de $-$
(η)Si $x \in A - U$ ent. $\Phi_U(x) = 0$ (h)Por (2)
(θ)$\Phi_U(x) = 0$ (ζ)Por (η)
(ι)$\Phi_U(x) = f(x)$ (θ)(α)Def de $=$

(j_5)Si $f(x) = 1$ ent. $\Phi_U(x) = f(x)$:

(α)$f(x) = 1$ Hpt.
(β)Si $x \in A$ y $f(x) = 1$ ent. $x \in U$ (e)Desc
(γ)$x \in A$ y $f(x) = 1$ (j_1)(α)Desc
(δ)$x \in U$ (γ)Por (β)
(ε)Si $x \in U$ ent. $\Phi_U(x) = 1$ (h)Por (2)
(ζ)$\Phi_U(x) = 1$ (δ)Por (ε)
(η)$\Phi_U(x) = f(x)$ (ζ)(α)Def de $=$

(j_6)$\Phi_U(x) = f(x)$ (j_3)(j_4)(j_5)Por casos

(k)$\Phi_U = f$ (i)(c)(j)Extensionalidad
(l)$U \in P(A)$ y $\Phi_U = f$ (h)(k)Desc
(m)Existe U tal que $U \in P(A)$ y $\Phi_U = f$ (l)Desc

(7)$\Phi : P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ es biy (4)(5)(6)Def de biy
(8)Existe Φ tal que $\Phi : P(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ es biy (7)Desc
(9)$P(A) \sim \{0,1\}^A$ (8)Def de $\sim$

3.4. Ordenaciones

En lugar de conjunto ordenado, y de conjunto bien ordenado, como se dice en la práctica, se hablará de ordenación y buena ordenación respectivamente. La idea de ordenación viene del análisis combinatorio, donde se consideran ordenaciones finitas solamente.

Ordenaciones

Vagamente, ordenación es una lista A, sin repeticiones, de objetos cualesquiera. Decimos que x es menor que y según A, en símbolos $x <_A y$, si x aparece a la izquierda de y en la lista. Ejemplos:

$$A = (1,2,3,4,5,6,\ldots), \qquad B = (1,3,5,\ldots,2,4,6,\ldots),$$
$$C = (2,4,6,\ldots,1,3,5,\ldots), \qquad D = (\ldots,6,5,4,3.2,1).$$

Estas ordenaciones son diferentes entre si. Por ejemplo $A \neq B$ porque $2 < 3$ según A, pero no según B.

Formalmente una ordenación A consta de un conjunto $[A]$, llamado soporte, y de una relación binaria $<_A$, definida entre elementos del soporte, de tal modo que:
$x \not<_A x$,
si $x <_A y$ y $y <_A z$ entonces $x <_A z$,
si $x, y \in [A]$ entonces $x = y$ o $x <_A y$ o $y <_A x$,
si $x <_A y$ entonces $x, y \in [A]$.
Estos axiomas se mencionan diciendo que la relación $<_A$ es irreflexiva, transitiva y conexa, y que sólo rige entre elementos de $[A]$.

Buenas ordenaciones
Dado $S \subseteq [A]$, se dice que S tiene mínimo según A si, y sólo si, existe m tal que $m \in S$ y ningún menor que m, según A, está en S. A se llama buena ordenación si, y sólo si, A es ordenación y todo subconjunto no vacío de $[A]$ tiene mínimo según A. Ejemplos:

$A = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$	Buena ordenación
$B = (2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5, \ldots)$	Buena ordenación
$C = (\ldots, 6, 4, 2, \ldots, 5, 3, 1)$	Ordenación no buena.

3.5. Ordinales

Los números ordinales indican el rango o posición de cada elemento en relación a otro en una buena ordenación. Así en la ordenación

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, y_0, y_1, \ldots)$$

x_0 tiene posición 0, x_1 tiene posición 1, y_0 tiene posición ω, y_1 tiene posición $\omega + 1$, donde ω es el primer ordinal transfinito.

Diremos que A es corte de B si, y sólo si, existe y tal que $y \in [B]$ y $A = B_y$, donde B_y es la ordenación resultante de B al suprimir y y todo elemento posterior a y.

Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es monótona (estrictamente creciente) si, y sólo, si f va de $[A]$ a $[B]$ y, dados $x_1, x_2 \in [A]$, si $x_1 <_A x_2$ entonces $f(x_1) <_B f(x_2)$.

Se dice que $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo si, y sólo, si $f : [A] \longrightarrow [B]$ es biyectiva y, para todo $x_1, x_2 \in [A]$, $x_1 <_A x_2$ si, y sólo, si $f(x_1) <_B f(x_2)$.

Dadas dos ordenaciones, se dice que A es isomorfo a B, (en símbolos $A \simeq B$) si y sólo si, existe f tal que $f : A \longrightarrow B$ es isomorfismo

3.5.1. Número ordinal

A cada ordenación A se le asocia su tipo de orden, tipo A, de tal modo que
tipo $A =$ tipo B si, y sólo si, $A \simeq B$. *Def de* tipo

Cuando A es buena ordenación, su tipo de orden se llama número ordinal. Los primeros ordinales son:

$0 =$ tipo $\emptyset$, $1 =$ tipo (0), $2 =$ tipo $(0, 1), \ldots$
$\omega =$ tipo $(0, 1, \ldots, n, \ldots)$, $\omega + 1 =$ tipo $(0, 1, \ldots, n, \ldots, \omega)$.

Dadas A y B, buenas ordenaciones, se dice que tipo $A <$ tipo B ssi A es isomorfo a algún corte de B.

M(α)
A cada ordinal α se le asocia la ordenación $M(\alpha)$, de los predecesores de α, como sigue:
$\xi \in [M(\alpha)]$ si, y sólo si, $\xi < \alpha$,
$\xi <_{M(\alpha)} \eta$ si, y sólo si, $\xi < \eta < \alpha$. *Def de* $M(\alpha)$.

tipo $M(\alpha) = \alpha$: ([8])

Teorema de Zermelo:
Dado un conjunto M, existe A tal que A es buena ordenación y $[A] = M$: ([8])

4. Cardinalidad de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

La <u>cardinalidad</u> de un conjunto es el total de elementos que contiene el conjunto.

La cardinalidad más importante de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es $\aleph = 2^{\aleph_0}$, el cual comúnmente es designado por **c**, pues como veremos más adelante este es el <u>cardinal del continuo</u>.

4.1. Algebra de $\mathbb{R}^n$

Dados $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $r = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Se definen:
$p + q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ Suma de p y q.
$p - q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$ Resta de p y q.
$p \cdot q = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ Producto escalar.
$\lambda p = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ Múltiplo real de p.

Propiedades:
$p \cdot q = q \cdot p$:

(1)$p = (x_1, x_2, x_3)$ Def de p
(2)$q = (y_1, y_2, y_3)$ Def de q
(3)$p \cdot q = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (1)(2)Def de $\cdot$
(4)$q \cdot p = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$ (2)(1)Def de $\cdot$
(5)$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$ Arit
(6)$p \cdot q = q \cdot p$ (5)(3)(4)Def de $=$

$p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$:

(1)$p = (x_1, x_2, x_3)$ Def de p
(2)$q = (y_1, y_2, y_3)$ Def de q
(3)$-q = (-y_1, -y_2, -y_3)$ (2)Múltiplo de λq, $\lambda = -1$
(4)$p \cdot (-q) = x_1(-y_1) + x_2(-y_2) + x_3(-y_3)$ (1)(3)Def de $\cdot$
(5)$p \cdot q = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (1)(2)Def de $\cdot$

$(6) -(p \cdot q) = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ (5)Def de $=$
$(7) x_1(-y_1) + x_2(-y_2) + x_3(-y_3) = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ Arit.
$(8) p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$ (7)(4)(6)Def de $=$

$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$:

$(1) p = (x_1, x_2)$ Def de p
$(2) q = (y_1, y_2)$ Def de q
$(3) r = (z_1, z_2)$ Def de r
$(4) q + r = (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$ (2)(3)Def de $+$
$(5) p \cdot (q + r) = x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2)$ (1)(4)Def de $\cdot$
$(6) p \cdot q = x_1y_1 + x_2y_2$ (1)(2)Def de $\cdot$
$(7) p \cdot r = x_1z_1 + x_2z_2$ (1)(3)Def de $\cdot$
$(8) p \cdot q + p \cdot r = (x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1z_1 + x_2z_2)$ (6)(7)Def de $=$
$(9) x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) = (x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1z_1 + x_2z_2)$ Arit.
$(10) p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ (9)(5)(8)Def de $=$

Se define $|p|$, *módulo de p*, tal que $|p| = \sqrt{p \cdot p}$

Axiomas:
$|p| \geq 0$;
$|p|^2 = p \cdot p$

$(p - q) + (q - r) = p - r$:

$(1) p = (x_1, x_2)$ Def de p
$(2) q = (y_1, y_2)$ Def de q
$(3) r = (z_1, z_2)$ Def de r
$(4) p - q = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ (1)(2)Def de $-$
$(5) q - r = (y_1 - z_1, y_2 - z_2)$ (2)(3)Def de $-$
$(6) (p - q) + (q - r) = (x_1 - y_1 + y_1 - z_1, x_2 - y_2 + y_2 - z_2)$ (4)(5)Def de $+$
$(7) x_1 - y_1 + y_1 - z_1 = x_1 - z_1, \quad x_2 - y_2 + y_2 - z_2 = x_2 - z_2$ Arit.
$(8) (x_1 - y_1 + y_1 - z_1, x_2 - y_2 + y_2 - z_2) = (x_1 - z_1, x_2 - z_2)$ (7)Def de $=$
$(9) (p - q) + (q - r) = (x_1 - z_1, x_2 - z_2)$ (6)(8)Def de $=$
$(10) p - r = (x_1 - z_1, x_2 - z_2)$ (1)(3)Def de $-$
$(11) (p - q) + (q - r) = p - r$ (9)(10)Def de $=$

$|-p| = |p|$:

$(1)|-p| = \sqrt{(-p)\cdot(-p)}$ Def de $|\quad|$
$(2)|p| = \sqrt{p\cdot p}$ Def de $|\quad|$
$(3)(-p)\cdot(-p) = p\cdot p$:

$$
\begin{aligned}
(-p)\cdot(-p) &= -[(-p)\cdot p] && \text{Dm (4.1)}\\
&= -[p\cdot(-p)] && \text{Porque } (-p)\cdot p = p\cdot(-p)\\
&= -[-(p\cdot p)] && \text{Porque } p\cdot(-p) = -(p\cdot p)\\
&= p\cdot p && \text{Arit}
\end{aligned}
$$

$(4)\sqrt{(-p)\cdot(-p)} = \sqrt{p\cdot p}$ (3)Def de $=$
$(5)|-p| = |p|$ (4)(1)(2)Def de $=$

Si $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entonces $|p|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$:

$(1)p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Hpt
$(2)|p|^2 = p\cdot p$ Def de $|\quad|$
$(3)p\cdot p = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ (1)(1)Def de $\cdot$
$(4)|p|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ (2)(3)Def de $=$

Desigualdad de Lagrange
$x^2 + y^2 \geq 2xy$:

$(1)(x-y)^2 \geq 0$ Arit
$(2)(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ Arit
$(3)x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (1)(2)Def de $=$
$(4)x^2 + y^2 \geq 2xy$ (3)Arit

4.2. Desigualdades en $\mathbb{R}^n$

Lema:
$p \cdot q \leq |p|\,|q|$:

(1)$p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Def de p
(2)$q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Def de q
(3)$|p| = 0$ o $|q| = 0$, o $|p| \neq 0$ y $|q| \neq 0$ Axioma
(4)Si $|p| = 0$ entonces $p \cdot q \leq |p|\,|q|$: (2)
(5)Si $|q| = 0$ entonces $p \cdot q \leq |p|\,|q|$: (1)
(6)Si $|p| \neq 0$ y $|q| \neq 0$ entonces $p \cdot q \leq |p|\,|q|$:

(a)$|p| \neq 0$ Hpt
(b)$|q| \neq 0$ Hpt
(c)$|p| > 0$: (a)
(d)$|q| > 0$: (b)
(e)$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|p|^2} = 1$:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|p|^2} = \frac{x_1^2}{|p|^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{|p|^2}$ Def de $\sum$
$= \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{|p|^2}$ Arit
$= \frac{|p|^2}{|p|^2}$ Porque $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = |p|^2$
$= 1$ Arit

(f)$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{|q|^2} = 1$: Dm análoga a (e)
(g)$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{|p|^2} + \frac{y_i^2}{|q|^2}\right) = 2$ (e)(f)Arit
(h)$\frac{x_i^2}{|p|^2} + \frac{y_i^2}{|q|^2} \geq 2\frac{x_i}{|p|}\frac{y_i}{|q|}$ Desigualdad de Lagrange
(i)$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{|p|^2} + \frac{y_i^2}{|q|^2}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\frac{x_i}{|p|}\frac{y_i}{|q|}$ (h)Arit
(j)$2 \geq \sum_{i=1}^{n} 2\frac{x_i}{|p|}\frac{y_i}{|q|}$ (i)(g)Def de $=$
(k)$|p|\,|q| \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (j)(c)(d)Arit
(l)$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (1)(2)Def de $\cdot$
(m)$|p|\,|q| \geq p \cdot q$ (k)(l)Def de $=$
(n)$p \cdot q \leq |p|\,|q|$ (m)Trad

(7)$p \cdot q \leq |p|\,|q|$ (3)(4)(5)(6)Por casos

Desigualdad del triángulo
$|p+q| \leq |p| + |q|$:

(1)$|p+q|^2 \leq (|p|+|q|)^2$:

$$
\begin{aligned}
|p+q|^2 &= (p+q)\cdot(p+q) && \text{Def de } |\ | \\
&= (p+q)\cdot p + (p+q)\cdot q && \text{Distri} \\
&= (p\cdot p + q\cdot p) + (p\cdot q + q\cdot q) && \text{Distri} \\
&= (p\cdot p + p\cdot q) + (p\cdot q + q\cdot q) && \text{Porque } q\cdot p = p\cdot q \\
&= p\cdot p + 2p\cdot q + q\cdot q && \text{Arit} \\
&\leq p\cdot p + 2\,|p|\,|q| + q\cdot q && \text{Porque } p\cdot q \leq |p|\,|q| \\
&= |p|^2 + 2\,|p|\,|q| + |q|^2 && \text{Porque } |p|^2 = p\cdot p \text{ y } |q|^2 = q\cdot q \\
&= (|p|+|q|)^2 && \text{Arit}
\end{aligned}
$$

(2)$|p+q| \leq |p| + |q|$ (1)Arit

Desigualdad de Schwartz
$|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$:

(1)$p\cdot q \geq 0$ o $p\cdot q < 0$ Arit
(2)Si $p\cdot q \geq 0$ entonces $|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$:

(a)$p\cdot q \geq 0$ Hpt
(b)$|p\cdot q| = p\cdot q$ (a)Arit
(c)$p\cdot q \leq |p|\,|q|$ Lema
(d)$|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$ (c)(b)Def de =

(3)Si $p\cdot q < 0$ entonces $|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$:

(a)$p\cdot q < 0$ Hpt
(b)$|p\cdot q| = -(p\cdot q)$ (a)Arit
(c)$-(p\cdot q) = p\cdot(-q)$ Dm (4.1)
(d)$|p\cdot q| = p\cdot(-q)$ (b)(c)Def de =
(e)$p\cdot(-q) \leq |p|\,|-q|$ Lema
(f)$|p\cdot q| \leq |p|\,|-q|$ (e)(d)Def de =
(g)$|-q| = |q|$ Dm (4.1)
(h)$|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$ (f)(g)Def de =

(4)$|p\cdot q| \leq |p|\,|q|$ (1)(2)(3)Por casos

$|p-q|+|q-r| \geq |p-r|$:

$(1)(p-q)+(q-r)=p-r$ Dm (4.1)
$(2)|(p-q)+(q-r)|=|p-r|$ (1)Def de =
$(3)|(p-q)+(q-r)| \leq |p-q|+|q-r|$ Dm (4.2)
$(4)|p-r| \leq |p-q|+|q-r|$ (3)(2)Def de =
$(5)|p-q|+|q-r| \geq |p-r|$ (4)Trad

Si $p=(x_1,\ldots,x_n)$ entonces $|p| \leq |x_1|+\cdots+|x_n|$:

$(1)p=(x_1,\ldots,x_n)$ Hpt
$(2)|p|^2=|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2$ (1)Dm (4.1)
$(3)x_i^2=|x_i|^2$ Arit
$(4)|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2 \leq (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$ Arit
$(5)x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$ (4)(3)Def de =
$(6)|p|^2 \leq (|x_1|+\cdots+|x_n|)^2$ (5)(2)Def de =
$(7)|p| \leq |x_1|+\cdots+|x_n|$ (6)Arit

4.3. Conjuntos abiertos

Dados E, $U \subseteq \mathbb{R}^n$; p, $q \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$

E es vecindad de p, de radio ε, ssi para todo q, $q \in E$, ssi $|p-q|<\varepsilon$ *Def de vecindad.*

E es vecindad de p, ssi existe ε tal que E es vecindad de p, de radio ε *Def de vecindad de p.*

E es vecindad ssi existen p y ε tales que E es vecindad de p, de radio ε

p es interior a U, ssi existe E tal que E es vecindad de p y $E \subseteq U$ *Def de interior.*

U es abierto, si, y sólo si, todo punto de U es interior a U *Def de abierto.*

Lemas:
Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe E vecindad de p, de radio ε :

$(1)p \in \mathbb{R}^n$
$(2)\varepsilon \in \mathbb{R}$ Hpt
$(3)q \in E$ ssi $|p-q|<\varepsilon$ Def de E

(4)E es vec de p, de radio ε, ssi para todo q, $q \in E$, ssi $|p - q| < \varepsilon$ **Def de vec**
(5)E es vec de p, de radio ε (3)Por(4)
(6)Existe E vecindad de p, de radio ε (5)Desc

<u>Si</u> E_1 <u>es vecindad de</u> p, <u>de radio</u> ε
<u>y</u> E_2 <u>es vecindad de</u> p, <u>de radio</u> ε
<u>entonces</u> $E_1 = E_2$:

(1)E_1 es vecindad de p, de radio ε Hpt
(2)E_2 es vecindad de p, de radio ε Hpt
(3)Para todo q, $q \in E_1$ ssi $|p - q| < \varepsilon$ (1)Def de vec
(4)Para todo q, $q \in E_2$ ssi $|p - q| < \varepsilon$ (2)Def de vec
(5)$E_1 \subseteq E_2$:

(a)Para todo q, si $q \in E_1$ entonces $q \in E_2$:

(a_1)$q \in E_1$ Hpt
(a_2)$|p - q| < \varepsilon$ (a_1)Por (3)
(a_3)$q \in E_2$ ssi $|p - q| < \varepsilon$ (4)Desc
(a_3)$q \in E_2$ (a_2)Por (a_3)

(b)$E_1 \subseteq E_2$ (a)Def de $\subseteq$

(6)$E_2 \subseteq E_1$: Dm análoga a (5)
(7)$E_1 = E_2$ (5)(6)Antisimétrica

<u>Dados</u> E_1 <u>una vecindad de</u> p, <u>de radio</u> ε_1
<u>y</u> E_2 <u>una vecindad de</u> p, <u>de radio</u> ε_2
<u>si</u> $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ <u>entonces</u> $E_1 \neq E_2$: Def de vec

Toda vecindad es un abierto

<u>Para todo</u> E, <u>si</u> E <u>es vecindad de</u> p, <u>de radio</u> ε, <u>entonces</u> E <u>es abierto</u>:

(1)E es vecindad de p, de radio ε Hpt
(2)Para todo q, $q \in E$, si, y sólo si, $|p - q| < \varepsilon$ (1)Def de vec
(3)Para todo q, si $q \in E$ entonces q es interior a E :

(a)$q \in E$ Hpt.
(b)Existe D tal que D es vec de q y $D \subseteq E$:

(b$_1$)D es vec de q, de radio $\varepsilon - |p - q|$ Axioma
(b$_2$)Para todo r, $r \in D$ ssi $|q - r| < \varepsilon - |p - q|$ (b$_1$)Def de vec
(b$_3$)D es vec de q (b$_1$)Desc
(b$_4$)$D \subseteq E$:

(α)$r \in D$ Hpt.
(β)$r \in D$ ssi $|q - r| < \varepsilon - |p - q|$ (b$_2$)Desc
(γ)$|q - r| < \varepsilon - |p - q|$ (α)Por (β)
(δ)$|p - q| + |q - r| < \varepsilon$ (γ)Arit.
(ε)$|p - r| \leq |p - q| + |q - r|$ Dm (4.2)
(ζ)$|p - r| < \varepsilon$ (ε)(δ)Arit.
(η)$r \in E$, si, y sólo si, $|p - r| < \varepsilon$ (2)Desc
(θ)$r \in E$ (ζ)Por (η)

(b$_5$)D es vec de q y $D \subseteq E$ (b$_3$)(b$_4$)Desc
(b$_6$)Existe D tal que D es vec de q y $D \subseteq E$ (b$_5$)Desc

(c)q es interior a E (b)Def de int

(4)Todo elemento de E es interior a E (3)Trad
(5)E es abierto (4)Def de abierto

Toda unión arbitraria de abiertos es un abierto

Si, para todo $i \in I$, A_i es abierto, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto:

(1)Para todo $i \in I$, A_i es abierto Hpt.
(2)Para todo p, si $p \in \bigcup A_i$ entonces p es interior a $\bigcup A_i$:

(a)$p \in \bigcup A_i$ Hpt.
(b)Existe i tal que $i \in I$ y $p \in A_i$ (a)Def de $\bigcup$
(c)$i \in I$
(d)$p \in A_i$ Def de i
(e)A_i es abierto (c)Por (1)
(f)Todo punto de A_i es interior a A_i (e)Def de abierto
(g)Para todo q, si $q \in A_i$ entonces q es interior a A_i (f)Trad
(h)Si $p \in A_i$ entonces p es interior a A_i (g)Desc
(i) p es interior a A_i (d)Por (h)

(j)Existe D tal que D es vecindad de p y $D \subseteq A_i$ (i)Def de interior
(k)D es vecindad de p
(l)$D \subseteq A_i$ Def de D
(m)$D \subseteq \bigcup A_i$: (c)(l)
(n)D es vecindad de p y $D \subseteq \bigcup A_i$ (k)(m)Desc
(o)Existe D tal que D es vecindad de p y $D \subseteq \bigcup A_i$ (n)Desc
(p)p es interior a $\bigcup A_i$ (o)Def de interior

(3)Todo elemento de $\bigcup A_i$ es interior a $\bigcup A_i$ (2)Trad
(4)$\bigcup A_i$ es abierto (3)Def de abierto

4.4. Puntos racionales

$(x_1, \ldots, x_n)$ es <u>punto</u> <u>racional</u> ssi $x_1, \ldots, x_n$ son números racionales *Def de punto racional.*

D es <u>celda</u> <u>abierta</u> si, y sólo si, existen $J_1, J_2, \ldots, J_n$ tales que $J_1, J_2, \ldots, J_n$ son intervalos abiertos y $D = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$. *Def de celda abierta.*

Toda celda abierta tiene puntos racionales

<u>Para</u> <u>todo</u> E, <u>si</u> E <u>es</u> <u>celda</u> <u>abierta</u> <u>entonces</u> E <u>tiene</u> <u>puntos</u> <u>racionales</u>:

(1)E es celda abierta Hpt
(2)Existen $J_1, J_2, \ldots, J_n$ tales que $J_1, J_2, \ldots, J_n$ son intervalos abiertos y $E = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ (1)Def de celda abierta
(3)$J_1, J_2, \ldots, J_n$ son intervalos abiertos
(4)$E = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ Def de $J_1, J_2, \ldots, J_n$
(5)Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, J_i es intervalo abierto (3)Trad
(6)Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, existe r tal que r es racional y $r \in J_i$ (5)Arit
(7)Para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, r_i es racional y $r_i \in J_i$ Def de r_i
(8)$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ es punto racional: (7)
(9)$(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$: (7)
(10)Existe q tal que q es punto racional y $q \in J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ (8)(9)Desc
(11)Existe q tal que q es punto racional y $q \in E$ (10)(4)Def de =
(12)E tiene puntos racionales (11)Trad

Toda vecindad contiene celdas abiertas

Para todo E, si E es vecindad de p, de radio ε, ent existe D tal que D es celda abierta y $D \subseteq E$:

(1)E es vecindad de p, de radio ε Hpt
(2)Para todo q, $q \in E$ ssi $|p-q| < \varepsilon$ (1)Def de vec
(3)$p = (x_1, \ldots, x_n)$ Def de $x_1, \ldots, x_n$
(4)$D = \left\langle x_1 - \frac{\varepsilon}{n}, x_1 + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle x_n - \frac{\varepsilon}{n}, x_n + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle$ Def de D
(5)D es celda abierta: (4)
(6)$D \subseteq E$:

(a)Para todo q, si $q \in D$ entonces $q \in E$:

(a_1)$q \in D$ Hpt
(a_2)$q = (y_1, \ldots, y_n)$ Def de $y_1, \ldots, y_n$
(a_3)$(y_1, \ldots, y_n) \in D$ (a_1)(a_2)Def de $=$
(a_4)$(y_1, \ldots, y_n) \in \left\langle x_1 - \frac{\varepsilon}{n},\ x_1 + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle \times \cdots \times \left\langle x_n - \frac{\varepsilon}{n},\ x_n + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle$ (a_3)(4)Def de $=$
(a_5)$y_1 \in \left\langle x_1 - \frac{\varepsilon}{n},\ x_1 + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle, \ldots, y_n \in \left\langle x_n - \frac{\varepsilon}{n},\ x_n + \frac{\varepsilon}{n} \right\rangle$ (a_4)Def de $\times$
(a_6)$x_1 - \frac{\varepsilon}{n} < y_1 < x_1 + \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, x_n - \frac{\varepsilon}{n} < y_n < x_n + \frac{\varepsilon}{n}$ (a_5)Def de $\langle\ \ \rangle$
(a_7)$|x_1 - y_1| < \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{n}$ (a_6)Arit
(a_8)$|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| < \varepsilon$ (a_7)Arit
(a_9)$|p-q| \leq |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$: (3)(a_2)
(a_{10})$|p-q| < \varepsilon$ (a_9)(a_8)Arit
(a_{11})$q \in E$ ssi $|p-q| < \varepsilon$ (2)Desc
(a_{12})$q \in E$ (a_{10})Por (a_{11})

(b)$D \subseteq E$ (a)Def de $\subseteq$

(7)D es celda abierta y $D \subseteq E$ (5)(6)Desc
(8)Existe D tal que D es celda abierta y $D \subseteq E$ (7)Desc

Toda vecindad tiene puntos racionales

Para todo E, si E es vec de p, de radio ε, ent existe q tal que q es punto rac y $q \in E$:

(1)E es vecindad de p, de radio ε Hpt
(2)Existe D tal que D es celda abierta y $D \subseteq E$ (1)Dm anterior
(3)D es celda abierta
(4)$D \subseteq E$ Def de D
(5)D tiene puntos racionales (3)Dm (3.4)

(6)Existe q tal que q es punto racional y $q \in D$ (5)Trad
(7)q es punto racional
(8)$q \in D$ Def de q
(9)$q \in E$ (8)(4)Alg
(10)q es punto racional y $q \in E$ (7)(9)Desc
(11)Existe q tal que q es punto racional y $q \in E$ (10)Desc

4.5. Vecindades racionales

B es <u>vecindad</u> <u>racional</u> si, y sólo si, existe q punto racional, y ε número racional, tales que B es vecindad de q, de radio ε.

Toda vecindad contiene vecindades racionales que incluyen a su centro

<u>Para</u> <u>todo</u> E, <u>si</u> E <u>es</u> <u>vec</u> <u>de</u> p, <u>de</u> <u>radio</u> ε, <u>ent</u> <u>existe</u> B <u>tal</u> <u>que</u> B <u>es</u> <u>vec</u> <u>rac</u> <u>y</u> $p \in B \subseteq E$:

(1)E es vec de p, de radio ε Hpt
(2)Para todo q, $q \in E$ ssi $|p - q| < \varepsilon$ (1)Def de vec
(3)E' es vec de p, de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ Def de E'
(4)Para todo q, $q \in E'$ ssi $|p - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ (3)Def de vec
(5)Existe r tal que r es punto racional y $r \in E'$ (3)Dm (4.4)
(6)r es punto racional
(7)$r \in E'$ Def de r
(8)$r \in E'$ ssi $|p - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4)Desc
(9)$|p - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ (7)Por (8)
(10)Existe δ tal que δ es racional y $|p - r| < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ (9)Arit
(11)δ es racional
(12)$|p - r| < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ Def de δ
(13)B es vecindad de r, de radio δ Def de B
(14)$p \in B$:

(a)$|p - r| < \delta$ (12)Desc
(b)$|p - r| = |r - p|$ Alg
(c)$|r - p| < \delta$ (a)(b)Def de =
(d)Para todo p, $p \in B$ ssi $|r - p| < \delta$ (13)Def de vec
(e)$p \in B$ ssi $|r - p| < \delta$ (d)Desc
(f)$p \in B$ (c)Por (e)

(15)Existen r, punto rac, y δ, num rac tales que B es vec de r, de radio δ (6)(11)(13)Desc
(16)B es vecindad racional (15)Def de vec rac

(17)$B \subseteq E$:

(a)Para todo q, si $q \in B$ entonces $q \in E$:

(a$_1$)$q \in B$ Hpt
(a$_2$)Para todo q, $q \in B$ ssi $|r - q| < \delta$ (13)Def de vec
(a$_3$)$q \in B$ ssi $|r - q| < \delta$ (a$_2$)Desc
(a$_4$)$|r - q| < \delta$ (a$_1$)Por (a$_3$)
(a$_5$)$\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ (12)Desc
(a$_6$)$|r - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ (a$_4$)(a$_5$)Arit
(a$_7$)$|p - q| \leq |p - r| + |r - q|$ Dm (4.2)
(a$_8$)$|p - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ (9)Desc
(a$_9$)$|p - q| < \varepsilon$ (a$_7$)(a$_8$)(a$_6$)Arit
(a$_{10}$)$q \in E$ ssi $|p - q| < \varepsilon$ (2)Desc
(a$_{11}$)$q \in E$ (a$_9$)Por (a$_{10}$)

(b)$B \subseteq E$ (a)Def de $\subseteq$

(18)B es vecindad racional, $p \in B$ y $B \subseteq E$ (16)(14)(17)Desc
(19)Existe B tal que B es vecindad racional y $p \in B \subseteq E$ (18)Desc

Todo abierto es unión de vecindades racionales

<u>Para todo U, si U es abierto entonces U es unión de vecindades racionales</u>:

(1)U es abierto Hpt
(2)Para todo p, si $p \in U$ ent existe B tal que B es vec rac y $p \in B \subseteq U$:

(a)$p \in U$ Hpt
(b)p es interior a U (1)(a)Def de abierto
(c)Existe E tal que E es vec de p y $E \subseteq U$ (b)Def de int
(d)E es vec de p
(e)$E \subseteq U$ Def de E
(f)Existe B tal que B es vec rac y $p \in B \subseteq E$ (d)Dm (4.5)
(g)B es vec rac
(h)$p \in B \subseteq E$ Def de B
(i)$p \in B \subseteq U$ (h)(e)Alg
(j)B es vec rac y $p \in B \subseteq U$ (g)(i)Desc
(k)Existe B tal que B es vec rac y $p \in B \subseteq U$ (j)Desc

(3)Para todo p, si $p \in U$ entonces B_p es vec rac y $p \in B_p \subseteq U$ Def de B_p

(4)$U = \bigcup_{p \in U} B_p$:

(a)Para todo q, si $q \in U$ ent $q \in \bigcup B_p$:

(a_1)$q \in U$ Hpt
(a_2)B_q es vec rac y $q \in B_q \subseteq U$ (a_1)Por (3)
(a_3)B_q es vec rac
(a_4)$q \in B_q$ (a_2)Desc
(a_5)$q \in U$ y $q \in B_q$ (a_1)(a_4)Desc
(a_6)Existe p tal que $p \in U$ y $q \in B_p$ (a_5)Desc
(a_7)$q \in \bigcup B_p$ (a_6)Def de $\bigcup$

(b)$U \subseteq \bigcup B_p$ (a)Def de $\subseteq$
(c)Para todo q, si $q \in \bigcup B_p$ ent $q \in U$:

(c_1)$q \in \bigcup B_p$ Hpt
(c_2)Existe p tal que $p \in U$ y $q \in B_p$ (c_1)Def de $\bigcup$
(c_3)$p \in U$
(c_4)$q \in B_p$ Def de p
(c_5)B_p es vec rac y $p \in B_p \subseteq U$ (c_3)Por (3)
(c_6)$B_p \subseteq U$ (c_5)Desc
(c_7)$q \in U$ (c_4)(c_6)Alg

(d)$\bigcup B_p \subseteq U$ (c)Def de $\subseteq$
(e)$U = \bigcup B_p$ (b)(d)Antisimétrica

(5)Para todo p, si $p \in U$ ent B_p es vec rac: (3)
(6)$U = \bigcup B_p$ y para todo p, si $p \in U$ ent B_p es vec rac (4)(5)Desc
(7)U es unión de vec rac (6)Trad

4.6. Cardinalidad de $\mathbb{R}$

<u>Existe</u> Φ <u>tal</u> <u>que</u> $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ <u>es</u> <u>suprayectiva</u>:

(1)$Dom\Phi = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
(2)Para todo $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\Phi(f) = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{4} + \cdots$ Def de Φ
(3)Para todo $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\Phi(f) \in [0,1]$:

(a)$f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Hpt
(b)$Domf = \mathbb{N}$ (a)Def de potencia
(c)Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \{0,1\}$ (a)Def de potencia

(d)Para todo $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \frac{f(1)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$:

(d$_1$)$n \in \mathbf{N}$ Hpt
(d$_2$)$f(n) \in \{0,1\}$ (d$_1$)Por (c)
(d$_3$)$f(n) = 0$ o $f(n) = 1$ (d$_2$)Def de $\{0,1\}$
(d$_4$)Si $f(n) = 0$ entonces $0 \leq f(n) \leq 1$ Arit
(d$_5$)Si $f(n) = 1$ entonces $0 \leq f(n) \leq 1$ Arit
(d$_6$)$0 \leq f(n) \leq 1$ (d$_3$)(d$_4$)(d$_5$)Por casos
(d$_7$)$0 \leq \frac{f(n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ (d$_6$)Arit

(e)$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (d)Arit
(f)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} = \Phi(f)$ (a)Por (2)
(g)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ Arit
(h)$0 \leq \Phi\ (f) \leq 1$ (e)(f)(g)Def de $=$
(i)$\Phi\ (f) \in [0,1]$ (h)Def de $[0,1]$

(4)Φ va de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ a $[0,1]$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dado $y \in [0,1]$, existe $f \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tal que $\Phi(f) = y$: ([8])
(6)$\Phi : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \longrightarrow [0,1]$ es supra (4)(5)Def de supra
(7)Existe Φ tal que $\Phi : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \longrightarrow [0,1]$ es supra (6)Desc

Nota: Φ no es inyectiva ya que $\Phi(1,0,0,\ldots) = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$

$$\Phi(0,1,1,\ldots) = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}$$

<u>si</u> $a < b$ <u>entonces</u> card $[0,1] =$ card $[a,b]$:

(1)$a < b$ Hpt
(2)$Dom f = [0,1]$
(3)Para todo $x \in [0,1]$, $f(x) = a + (b-a)x$ Def de f
(4)Para todo $x \in [0,1]$, $f(x) \in [a,b]$:

(a)$x \in [0,1]$ Hpt
(b)$0 \leq x \leq 1$ (a)Def de $[0,1]$
(c)$b - a > 0$ (1)Arit
(d)$(b-a)0 \leq (b-a)x \leq (b-a)1$ (b)(c)Arit
(e)$0 \leq (b-a)x \leq (b-a)$ (d)Arit
(f)$a + 0 \leq a + (b-a)x \leq a + (b-a)$ (e)Arit
(g)$a \leq a + (b-a)x \leq b$ (f)Arit
(h)$f(x) = a + (b-a)x$ (a)Por (3)

(i)$a \leq f(x) \leq b$ (g)(h)Def de $=$
(j)$f(x) \in [a, b]$ (i)Def de $[a, b]$

(5)f va de $[0, 1]$ en $[a, b]$ (2)(4)Def de incidencia
(6)Dados $x_1, x_2 \in [0, 1]$, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$:

(a)$x_1 \in [0, 1]$
(b)$x_2 \in [0, 1]$
(c) $f(x_1) = f(x_1)$ Hpt
(d)$f(x_1) = a + (b - a)x_1$ (a)Por (3)
(e)$f(x_2) = a + (b - a)x_2$ (b)Por (3)
(f)$a + (b - a)x_1 = a + (b - a)x_2$ (c)(d)(e)Def de $=$
(g)$(b - a)x_1 = (b - a)x_2$ (f)Arit
(h)$b - a > 0$ (1)Arit
(i)$x_1 = x_2$ (g)(h)Arit

(7)Dados $x_1, x_2 \in [0, 1]$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ (6)Giro
(8)$f : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ es inyectiva (5)(7)Def de iny
(9)Para todo $y \in [a, b]$, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = y$:

(a)$y \in [a, b]$ Hpt
(b)$a \leq y \leq b$ (a)Def de $[a, b]$
(c)Existe x tal que $a + (b - a)x = y$ (1)Arit
(d)$a + (b - a)x = y$ Def de x
(e)$x \in [0, 1]$: (b)(d)Arit
(f)$f(x) = a + (b - a)x$ (e)Por (3)
(g)$f(x) = y$ (f)(d)Def de $=$
(h)$x \in [0, 1]$ y $f(x) = y$ (e)(g)Desc
(i)Existe x tal que $x \in [0, 1]$ y $f(x) = y$ (h)Desc

(10)$f : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ es suprayectiva (5)(9)Def de supra
(11)$f : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ es biyectiva (7)(10)Def de biyectiva
(12)Existe f tal que $f : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ es biyectiva (11)Desc
(13)$[0, 1] \sim [a, b]$ (12)Def de $\sim$
(14)card $[0, 1] =$ card $[a, b]$ (13)Def de card

card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = $ card $[0,1]$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ es supra   Dm (4.6)
(2)$\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ es supra   Def de Φ
(3)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \geq$ card $[0,1]$ (2)Dm (3.1)
(4)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq$ card $[0,1]$:

(a)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$:

(a_1)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = (\text{card } \{0,1\})^{\text{card } \mathbb{N}}$ Def de card$^{\text{card}}$
(a_2)card $\{0,1\} = 2$ Def de 2
(a_3)card $\mathbb{N} = \aleph_0$ Def de $\aleph_0$
(a_4)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$ (a_1)(a_2)(a_3)Def de =

(b)No existe λ tal que $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$ Hpt del continuo
(c)Para todo λ, si $\aleph_0 < \lambda$ entonces $\lambda \not< 2^{\aleph_0}$ (b)Giro
(d)Si $\aleph_0 <$ card $[0,1]$ entonces card $[0,1] \not< 2^{\aleph_0}$ (c)Desc
(e)$\aleph_0 <$ card $[0,1]$ Por el método de diagonal de Cantor
(f)card $[0,1] \not< 2^{\aleph_0}$ (e)Por (d)
(g)card $[0,1] \geq 2^{\aleph_0}$ (f)Conexidad
(h)$2^{\aleph_0} \leq$ card $[0,1]$ (g)Trad
(i)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \leq$ card $[0,1]$ (h)(a)Def de =

(5)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} =$ card $[0,1]$ (3)(4)Dm (3.1)

card $[0,1] = \aleph$:

(1)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} =$ card $[0,1]$ Dm anterior
(2)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \aleph$:

(a)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = (\text{card } \{0,1\})^{\text{card } \mathbb{N}}$ Def de card$^{\text{card}}$
(b)card $\{0,1\} = 2$ Def de 2
(c)card $\mathbb{N} = \aleph_0$ Def de $\aleph_0$
(d)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$ (a)(b)(c)Def de =
(e)$2^{\aleph_0} = \aleph$ Def de $\aleph$
(d)card $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \aleph$ (d)(e)Def de =

(5)card $[0,1] = \aleph$ (2)(1)Def de =

Nota: Como $2^{\aleph_0} = \aleph$ entonces card $[0,1] = 2^{\aleph_0}$

<u>si</u> $a < b$ **<u>entonces</u>** card $[a, b] = \aleph$:

(1)$a < b$ **Hpt**
(2)card $[0,1] =$ **card** $[a, b]$ **(1)Dm (4.6)**
(3)card $[0,1] = \aleph$ **Dm anterior**
(4)card $[a, b] = \aleph$ **(3)(2)Def de =**

Nota: Esto en particular nos demuestra que el card $[-n, n] = \aleph$

card $\mathbb{R} = \aleph$:

(1)$\aleph \leq$ card $\mathbb{R}$:

(a)$[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ Arit
(b)card $[0,1] \leq$ card $\mathbb{R}$ (a)Dm (3.1)
(c)card $[0,1] = \aleph$ Dm (4.6)
(d)$\aleph \leq$ card $\mathbb{R}$ (b)(c)Def de =

(2)card $\mathbb{R} \leq \aleph$:

(a)$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ Arit
(b)card $\mathbb{R} \leq$ card $\bigcup[-n, n]$ (a)Dm (3.1)
(c)card $\bigcup[-n, n] \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[-n, n]$ Subaditividad
(d)card $\mathbb{R} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[-n, n]$ (b)(c)Dm (3.1)
(e)Para todo $n \in \mathbb{N}$, card $[-n, n] = \aleph$ Dm (4.6)
(f) $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[-n, n] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph$ (e)Def de =
(g) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph = \aleph$ Dm ([8])
(h) $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[-n, n] = \aleph$ (f)(g)Def de =
(i)card $\mathbb{R} \leq \aleph$ (d)(h)Def de =

(3)card $\mathbb{R} = \aleph$ (1)(2)Dm (3.1) card $\mathbb{R}^+ = \aleph$:

(1)$\aleph \leq$ card $\mathbb{R}^+$:

(a)$[\frac{1}{2}, 1] \subseteq \mathbb{R}^+$ Arit
(b)card $[\frac{1}{2}, 1] \leq$ card $\mathbb{R}^+$ (a)Dm (3.1)
(c)card $[\frac{1}{2}, 1] = \aleph$ Dm (4.6)
(d)$\aleph \leq$ card $\mathbb{R}^+$ (b)(c)Def de =

(2)card $\mathbb{R}^+ \leq \aleph$:

(a)$\mathbb{R}^+ \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2n}, n]$ Arit
(b)card $\mathbb{R}^+ \leq$ card $\bigcup[\frac{1}{2n}, n]$ (a)Dm (3.1)
(c)card $\bigcup[\frac{1}{2n}, n] \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[\frac{1}{2n}, n]$ Subaditividad
(d)card $\mathbb{R}^+ \leq \sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[\frac{1}{2n}, n]$ (b)(c)Dm (3.1)
(e)Para todo $n \in \mathbb{N}$, card $[\frac{1}{2n}, n] = \aleph$ Dm (4.6)
(f) $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[\frac{1}{2n}, n] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph$ (e)Def de =
(g) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph = \aleph$ Dm ([8])
(h) $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ card $[\frac{1}{2n}, n] = \aleph$ (f)(g)Def de =
(i)card $\mathbb{R}^+ \leq \aleph$ (d)(h)Def de =

(3)card $\mathbb{R}^+ = \aleph$ (1)(2)Dm (3.1)

card $\mathbb{R}^n = \aleph$:

(1)$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n factores) Def de $\mathbb{R}^n$
(2)card $\mathbb{R}^n =$ card $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$ (1)Def de =
(3)card $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) =$ (card $\mathbb{R}$)(card $\mathbb{R}$) $\cdots$ (card $\mathbb{R}$) Def de $\prod$
(4)card $\mathbb{R} = \aleph$ Dm (4.6)
(5)card $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = \aleph\aleph \cdots \aleph$ (3)(4)Def de =
(6)$\aleph\aleph \cdots \aleph = \aleph$ Dm ([8])
(7)card $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = \aleph$ (5)(6)Def de =
(8)card $\mathbb{R}^n = \aleph$ (2)(7)Def de =

4.7. Total de vecindades en $\mathbb{R}^n$

Definición de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}_0$:
Para todo E, $E \in \mathbf{V}$ si, y sólo si, E es vecindad (en $\mathbb{R}^n$).
Para todo E, $E \in \mathbf{V}_0$ si, y sólo si, E es vecindad racional (en $\mathbb{R}^n$).

Existe Φ tal que $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbf{V}$ es suprayectiva:

(1) $Dom\Phi = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$
(2) Para todo $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, $\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε — Def de Φ
(3) Para todo $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, $\Phi(p, \varepsilon) \in \mathbf{V}$:

- (a) $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ — Hpt
- (b) $\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε — (a)Por (2)
- (c) $\Phi(p, \varepsilon)$ es vecindad — (b)Desc
- (d) $\Phi(p, \varepsilon) \in \mathbf{V}$ si, y sólo si, $\Phi(p, \varepsilon)$ es vecindad — Def de $\mathbf{V}$
- (e) $\Phi(p, \varepsilon) \in \mathbf{V}$ — (c)Por (d)

(4) Φ va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ a $\mathbf{V}$ — (1)(3)Def de incidencia
(5) Dado $E \in \mathbf{V}$, existe $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ tal que $\Phi(p, \varepsilon) = E$:

- (a) $E \in \mathbf{V}$ — Hpt
- (b) E es vecindad — (a)Def de $\mathbf{V}$
- (c) Existen $p \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que E es vec de p, de radio ε — (b)Def de vec
- (d) $p \in \mathbb{R}^n$
- (e) $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
- (f) E es vec de p, de radio ε — Def de p, ε
- (g) $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ — (d)(e)Def de $\times$
- (h) $\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε — (g)Por (2)
- (i) $\Phi(p, \varepsilon) = E$ — (h)(f)Lema (4.3)
- (j) $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi(p, \varepsilon) = E$ — (g)(i)Desc
- (k) Existe (p, ε) tal que $(p, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi(p, \varepsilon) = E$ — (j)Desc

(6) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbf{V}$ es supra — (4)(5)Def de supra
(7) Existe Φ tal que $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbf{V}$ es supra — (6)Desc

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales — *Def de* $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los racionales positivos — *Def de* $\mathbb{Q}^+$
$\mathbb{Q}^-$ es el conjunto de los racionales negativos — *Def de* $\mathbb{Q}^-$
$\mathbb{Q}^n$ es el conjunto de los puntos racionales — *Def de* $\mathbb{Q}^n$

$\aleph \geq$ **card** $\mathbf{V}$:

(1)**Existe** Φ **tal que** $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbf{V}$ **es suprayectiva** **Dm anterior**
(2)$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbf{V}$ **es suprayectiva** **Def de** Φ
(3)**card** $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) \geq$ **card** $\mathbf{V}$ (2)**Dm (3.1)**
(4)**card** $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) = \aleph$:

(a)**card** $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) =$ (**card** $\mathbb{R}^n$)(**card** $\mathbb{R}^+$) **Def de** $\prod$
(b)**card** $\mathbb{R}^n = \aleph$, **card** $\mathbb{R}^+ = \aleph$ **Dm (4.6)**
(c)**card** $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) = \aleph\aleph$ (a)(b)**Def de** $=$
(d)$\aleph\aleph = \aleph$ **Dm ([8])**
(e)**card** $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+) = \aleph$ (c)(d)**Def de** $=$

(5)$\aleph \geq$ **card** $\mathbf{V}$ (3)(4)**Def de** $=$

$\aleph \leq$ **card** $\mathbf{V}$:

(1)**Existe** Φ **tal que** $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbf{V}$ **es inyectiva:**

(a)$p_0 \in \mathbb{R}^n$ **Def de** p_0
(b)$Dom\Phi = \mathbb{R}^+$
(c)**Para todo** $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(\varepsilon)$ **es vec de** p_0, **de radio** ε **Def de** Φ
(d)**Para todo** $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(\varepsilon) \in \mathbf{V}$:

(d_1)$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ **Hpt**
(d_2)$\Phi(\varepsilon)$ **es vec de** p_0, **de radio** ε (d_1)**Por (c)**
(d_3)$\Phi(\varepsilon)$ **es vec** (d_2)**De lo específico**
(d_4)$\Phi(\varepsilon) \in \mathbf{V}$ (d_3)**Def de** $\mathbf{V}$

(e)Φ **va de** $\mathbb{R}^+$ **a** $\mathbf{V}$ (b)(d)**Def de incidencia**
(f)**Dados** $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$, **si** $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ **entonces** $\Phi(\varepsilon_1) \neq \Phi(\varepsilon_2)$:

(f_1)$\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ **Hpt**
(f_2)$\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ **Hpt**
(f_3)$\Phi(\varepsilon_1)$ **es vec de** p_0, **de radio** ε_1 (f_1)**Por (c)**
(f_4)$\Phi(\varepsilon_2)$ **es vec de** p_0, **de radio** ε_2 (f_2)**Por (c)**
(f_5)**Si** $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ **entonces** $\Phi(\varepsilon_1) \neq \Phi(\varepsilon_2)$ (f_3)(f_4)**Lema (4.3)**

(g)$\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbf{V}$ **es inyectiva** (e)(f)**Def de iny**
(h)**Existe** Φ **tal que** $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbf{V}$ **es inyectiva** (g)**Desc**

(2)$\Phi_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{V}$ es inyectiva Def de Φ_1
(3)card $\mathbb{R}^+ \leq$ card $\mathbf{V}$ (2)Dm (3.1)
(4)card $\mathbb{R}^+ = \aleph$ Dm (4.6)
(5)$\aleph \leq$ card $\mathbf{V}$ (3)(4)Def de $=$

card $\mathbf{V} = \aleph$:

(1)$\aleph \geq$ card $\mathbf{V}$ Dm (4.7)
(2)$\aleph \leq$ card $\mathbf{V}$ Dm (4.7)
(3)card $\mathbf{V} = \aleph$ (1)(2)Dm (3.1)

card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ es suparayectiva:

(a)$Dom\Phi = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$
(b)Para todo $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\Phi(i, j) = \frac{i}{j}$ Def de Φ
(c)Para todo $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\Phi(i, j) \in \mathbb{Q}^+$:

(c_1)$(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Hpt
(c_2)$\Phi(i, j) = \frac{i}{j}$ (c_1)Por (b)
(c_3)$i, j \in \mathbb{N}$ (c_1)Def de $\times$
(c_4)$\frac{i}{j} \in \mathbb{Q}^+$ (c_3)Def de $\mathbb{Q}^+$
(c_5)$\Phi(i, j) \in \mathbb{Q}^+$ (c_4)(c_2)Def de $=$

(d)Φ va de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}^+$ (a)(c)Def de incidencia
(e)Para todo $y \in \mathbb{Q}^+$, existe $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\Phi(i, j) = y$:

(e_1)$y \in \mathbb{Q}^+$ Hpt
(e_2)y es número racional positivo (e_1)Def de $\mathbb{Q}^+$
(e_3)Existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $y = \frac{i}{j}$ (e_2)Trad
(e_4)$i \in \mathbb{N}$
(e_5)$j \in \mathbb{N}$
(e_6)$y = \frac{i}{j}$ Def de i, j
(e_7)$(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (e_4)(e_5)Def de $\times$
(e_8)$\Phi(i, j) = \frac{i}{j}$ (e_7)Por (b)
(e_9)$\Phi(i, j) = y$ (e_8)(e_6)Def de $=$
(e_{10})$(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\Phi(i, j) = y$ (e_7)(e_9)Desc
(e_{11})Existe (i, j) tal que $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\Phi(i, j) = y$ (e_{10})Desc

$(2)\Phi_1 : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}^+$ es supra Def de Φ_1
(3)card $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \geq$ card $\mathbf{Q}^+$ (2)Dm (3.1)
(4)card $(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \aleph_0$: Porque card $\mathbb{N} = \aleph_0$
$(5)\aleph_0 \geq$ card $\mathbf{Q}^+$ (3)(4)Def de $=$
$(6)\aleph_0 \leq$ card $\mathbf{Q}^+$: Porque $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}^+$
$(7)\aleph_0 = \mathbf{Q}^+$ (5)(6)Dm (3.1)

card $\mathbf{Q}^- = \aleph_0$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{Q}^-$ es biyectiva:

(a)$Dom\Phi = \mathbf{Q}^+$
(b)Para todo $x \in \mathbf{Q}^+$, $\Phi(x) = -x$ Def de Φ
(c)Para todo $x \in \mathbf{Q}^+$, $\Phi(i,j) \in \mathbf{Q}^-$:

$(c_1)x \in \mathbf{Q}^+$ Hpt
$(c_2)\Phi(x) = -x$ (c_1)Por (b)
$(c_3)-x \in \mathbf{Q}^-$ (c_1)Def de $\mathbf{Q}^-$
$(c_4)\Phi(x) \in \mathbf{Q}^-$ $(c_3)(c_2)$Def de $=$

(d)Φ va de $\mathbf{Q}^+$ a $\mathbf{Q}^-$ (a)(c)Def de incidencia
(e)Dados $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}^+$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$:

$(e_1)x_1 \in \mathbf{Q}^+$ Hpt
$(e_2)x_2 \in \mathbf{Q}^+$ Hpt
(e_3)Si $x_1 \neq x_2$ entonces $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$:

$(\alpha)x_1 \neq x_2$ Hpt
$(\beta)x_1 = x_2$ o $x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$ $(e_1)(e_2)$Arit
$(\gamma)x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$ $(\beta)(\alpha)$Exclusión
(δ)Si $x_1 < x_2$ entonces $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$:

$(\delta_1)x_1 < x_2$ Hpt
$(\delta_2)-x_1 > -x_2$ (δ_1)Arit
$(\delta_3)\Phi(x_1) = -x_1$ (e_1)Por (b)
$(\delta_4)\Phi(x_2) = -x_2$ (e_2)Por (b)
$(\delta_5)\Phi(x_1) > \Phi(x_2)$ $(\delta_2)(\delta_3)(\delta_4)$Def de $=$
$(\delta_6)\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$ (δ_5)Arit

(ε)Si $x_1 > x_2$ entonces $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$: Dm análoga a (δ)
$(\zeta)\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$ $(\gamma)(\delta)(\varepsilon)$Por casos

(f) Dado $y \in \mathbb{Q}^-$, existe $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\Phi(x) = y$:

(f$_1$)$y \in \mathbb{Q}^-$ Hpt
(f$_2$)Existe x tal que $x \in \mathbb{Q}^+$ y $-x = y$ (f$_1$)Def de $\mathbb{Q}^-$
(f$_3$)$x_0 \in \mathbb{Q}^+$
(f$_4$)$-x_0 = y$ Def de x_0
(f$_5$)$\Phi(x_0) = -x_0$ (f$_3$)Por (b)
(f$_6$)$\Phi(x_0) = y$ (f$_4$)(f$_5$)Def de =
(f$_7$)$x_0 \in \mathbb{Q}^+$ y $\Phi(x_0) = y$ (f$_3$)(f$_6$)Desc
(f$_8$)Existe x tal que $x \in \mathbb{Q}^+$ y $\Phi(x) = y$ (f$_7$)Desc

(g)$\Phi : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^-$ es biyectiva (d)(e)(f)Def de biy

(2)$\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{Q}^-$ (1)Def de $\sim$
(3)card $\mathbb{Q}^+ =$ card $\mathbb{Q}^-$ (2)Def de card
(4)card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$ Dm anterior
(5)card $\mathbb{Q}^- = \aleph_0$ (4)(3)Def de =

card $\mathbb{Q} = \aleph_0$:

(1)$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ Alg
(2)$\mathbb{Q}^-, \{0\}, \mathbb{Q}^+$ son ajenos entre si Arit
(3)card $\mathbb{Q} =$ card $\mathbb{Q}^-$ + card $\{0\}$ + card $\mathbb{Q}^+$ (1)(2)Dm ([8])
(4)card $\mathbb{Q}^- = \aleph_0$, card $\{0\} = 1$, card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$ Dm (4.7)
(5)card $\mathbb{Q} = \aleph_0 + 1 + \aleph_0$ (3)(4)Def de =
(6)$\aleph_0 + 1 + \aleph_0 = \aleph_0$ Dm ([8])
(7)card $\mathbb{Q} = \aleph_0$ (5)(6)Def de =

card $\mathbb{Q}^n = \aleph_0$:

(1)$\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ (n factores) Def de $\mathbb{Q}^n$
(2)card $\mathbb{Q}^n =$ (card $\mathbb{Q}$)(card $\mathbb{Q}$) $\cdots$ (card $\mathbb{Q}$) (1)Def de =
(3)card $\mathbb{Q} = \aleph_0$ Dm anterior
(4)card $\mathbb{Q}^n = \aleph_0\aleph_0 \cdots \aleph_0$ (2)(3)Def de =
(5)$\aleph_0\aleph_0 \cdots \aleph_0 = \aleph_0$ Dm ([8])
(6)card $\mathbb{Q}^n = \aleph_0$ (4)(5)Def de =

Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es suprayectiva:

(1)$Dom\Phi = \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$
(2)Para todo $(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$, $\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε Def de Φ
(3)Para todo $(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$, $\Phi(p, \varepsilon) \in \mathbf{V}_0$:

(a)$(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$ Hpt
(b)$\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε (a)Por (2)
(c)$p \in \mathbf{Q}^n$
(d)$\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ (a)Def de $\times$
(e)p es punto racional (c)Def de $\mathbf{Q}^n$
(f)ε es número racional (d)Def de $\mathbf{Q}^+$
(g)$\Phi(p, \varepsilon)$ es vec rac (b)(e)(f)Def de vec rac
(h)$\Phi(p, \varepsilon) \in \mathbf{V}_0$ (g)Def de $\mathbf{V}_0$

(4)Φ va de $\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$a $\mathbf{V}_0$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dada $E \in \mathbf{V}_0$, existe $(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$ tal que $\Phi(p, \varepsilon) = E$:

(a)$E \in \mathbf{V}_0$ Hpt
(b)E es vec rac (a)Def de $\mathbf{V}_0$
(c)Existen $p \in \mathbf{Q}^n$ y $\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$ tales que E es vec de p, de radio ε (b)Def de vec rac
(d)$p \in \mathbf{Q}^n$
(e)$\varepsilon \in \mathbf{Q}^+$
(f)E es vec de p, de radio ε Def de p, ε
(g)$(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$ (d)(e)Def de $\times$
(h)$\Phi(p, \varepsilon)$ es vec de p, de radio ε (g)Por (2)
(i)$\Phi(p, \varepsilon) = E$ (h)(f)Lema (4.3)
(j)$(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$ y $\Phi(p, \varepsilon) = E$ (g)(i)Desc
(k)Existe (p, ε) tal que $(p, \varepsilon) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$ y $\Phi(p, \varepsilon) = E$ (j)Desc

(6)$\Phi : \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es suprayectiva (4)(5)Def de supra
(7)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es suprayectiva (6)Desc

$\aleph_0 \geq$ card $\mathbf{V}_0$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es suprayectiva Dm anterior
(2)$\Phi : \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es suprayectiva Def de Φ
(3)card $(\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+) \geq$ card $\mathbf{V}_0$ (2)Dm (3.1)

(4)card $(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) = \aleph_0$:

(a)card $(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) = (\text{card } \mathbb{Q}^n)(\text{card } \mathbb{Q}^+)$ Def de Π
(b)card $\mathbb{Q}^n = \aleph_0$, card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$ Dm (4.7)
(c)card $(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) = \aleph_0\aleph_0$ (a)(b)Def de $=$
(d)$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ Dm ([8])
(e)card $(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) = \aleph_0$ (c)(d)Def de $=$

(5)$\aleph_0 \geq$ card $\mathbf{V}_0$ (3)(4)Def de $=$

$\aleph_0 \leq$ card $\mathbf{V}_0$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es inyectiva:

(a)$p_0 \in \mathbb{Q}^n$ Def de p_0
(b)$Dom\ \Phi = \mathbb{Q}^+$
(c)Para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\Phi(\varepsilon)$ es vec de p_0, de radio ε Def de Φ
(d)Para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\Phi(\varepsilon) \in \mathbf{V}_0$:

(d_1)$\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ Hpt
(d_2)$\Phi(\varepsilon)$ es vec de p_0, de radio ε (d_1)Por (c)
(d_3)p_0 es punto racional (a)Def de p_0
(d_4)ε es número racional (d_1)Def de $\mathbb{Q}^+$
(d_5)$\Phi(\varepsilon)$ es vec rac (d_2)(d_3)(d_4)Def de vec rac
(d_6)$\Phi(\varepsilon) \in \mathbf{V}_0$ (d_5)Def de $\mathbf{V}_0$

(e)Φ va de $\mathbb{Q}^+$ a $\mathbf{V}_0$ (b)(d)Def de incidencia
(f)Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Q}^+$, si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ entonces $\Phi(\varepsilon_1) \neq \Phi(\varepsilon_2)$:

(f_1)$\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}^+$
(f_2)$\varepsilon_2 \in \mathbb{Q}^+$ Hpt
(f_3)$\Phi(\varepsilon_1)$ es vec de p_0, de radio ε_1 (f_1)Por (c)
(f_4)$\Phi(\varepsilon_2)$ es vec de p_0, de radio ε_2 (f_2)Por (c)
(f_5)Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ entonces $\Phi(\varepsilon_1) \neq \Phi(\varepsilon_2)$ (f_3)(f_4)Lema (4.3)

(g)$\Phi : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es inyectiva (e)(f)Def de inyectiva

(2)$\Phi : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{V}_0$ es inyectiva Def de Φ
(3)card $\mathbb{Q}^+ \leq$ card $\mathbf{V}_0$ (2)Dm (3.1)
(4)card $\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$ Dm (4.7)
(5)$\aleph_0 \leq$ card $\mathbf{V}_0$ (3)(4)Def de $=$

$\text{card } \mathbf{V}_0 = \aleph_0$:

(1)$\aleph_0 \leq \text{card } \mathbf{V}_0$ Dm (4.7)
(2)$\aleph_0 \geq \text{card } \mathbf{V}_0$ Dm (4.7)
(3)$\text{card } \mathbf{V}_0 = \aleph_0$ (1)(2)Dm (3.1)

4.8. Total de abiertos en $\mathbb{R}^n$

Definición de $\mathbf{A}$:
Para todo U, $U \in \mathbf{A}$ si, y sólo si, U es abierto (en $\mathbb{R}^n$).

Existe Φ tal que $\Phi : P(\mathbf{V}_0) \to \mathbf{A}$ es suprayectiva:

(1)$Dom\Phi = P(\mathbf{V}_0)$
(2)Para todo $\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$, $\Phi(\mathbf{C}) = \bigcup_{E \in \mathbf{C}} E$ Def de Φ
(3)Para todo $\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$, $\Phi(\mathbf{C}) \in \mathbf{A}$:

> (a)$\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$ Hpt
> (b)$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{V}_0$ (a)Def de $P(\mathbf{V}_0)$
> (c)Para todo E, si $E \in \mathbf{C}$ entonces $E \in \mathbf{V}_0$ (b)Def de $\subseteq$
> (d)Para todo E, si $E \in \mathbf{C}$ entonces E es abierto: (c)
> (e) $\bigcup_{E \in \mathbf{C}} E$ es abierto (d)Dm (4.3)
> (f)$\Phi(\mathbf{C}) = \bigcup_{E \in \mathbf{C}} E$ (a)Por (2)
> (g)$\Phi(\mathbf{C})$ es abierto (e)(f)Def de $=$
> (h)$\Phi(\mathbf{C}) \in \mathbf{A}$ ssi $\Phi(\mathbf{C})$ es abierto Def de $\mathbf{A}$ Desc
> (i)$\Phi(\mathbf{C}) \in \mathbf{A}$ (g)Por (h)

(4)Φ va de $P(\mathbf{V}_0)$ a $\mathbf{A}$ (1)(3)Def de incidencia
(5)Dado $U \in \mathbf{A}$, existe $\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$ tal que $\Phi(\mathbf{C}) = U$:

> (a)$U \in \mathbf{A}$ Hpt
> (b)U es abierto (a)Def de $\mathbf{A}$
> (c)U es unión de vecindades racionales (b)Dm (4.5)
> (d)Existe $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C}$ es partida de vec rac y $\bigcup_{E \in \mathbf{C}} E = U$ (c)Trad
> (e)Existe $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$ y $\bigcup_{E \in \mathbf{C}} E = U$: (d)
> (f)$\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$
> (g) $\bigcup_{E \in \mathbf{C}} E = U$ Def de $\mathbf{C}$

(h)$\Phi(\mathbf{C}) = \bigcup_{E \in \mathbf{C}} E$ (f)Por (2)
(i)$\Phi(\mathbf{C}) = U$ (h)(g)Def de $=$
(j)$\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$ y $\Phi(\mathbf{C}) = U$ (f)(i)Desc
(k)Existe $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C} \in P(\mathbf{V}_0)$ y $\Phi(\mathbf{C}) = U$ (j)Desc

(6)$\Phi : P(\mathbf{V}_0) \longrightarrow \mathbf{A}$ es supra (4)(5)Def de supra
(7)Existe Φ tal que $\Phi : P(\mathbf{V}_0) \longrightarrow \mathbf{A}$ es supra (6)Desc

$\aleph \geq$ card $\mathbf{A}$:

(1)Existe Φ tal que $\Phi : P(\mathbf{V}_0) \longrightarrow \mathbf{A}$ es supra Dm anterior
(2)$\Phi : P(\mathbf{V}_0) \longrightarrow \mathbf{A}$ es supra Def de Φ
(3)card $P(\mathbf{V}_0) \geq$ card $\mathbf{A}$ (2)Dm (3.1)
(4)card $P(\mathbf{V}_0) = \aleph$:

(a)$P(\mathbf{V}_0) \sim \{0,1\}^{\mathbf{V}_0}$ Dm (3.3)
(b)card $P(\mathbf{V}_0) =$ card $\{0,1\}^{\mathbf{V}_0}$ (a)Def de card
(c)card $\{0,1\}^{\mathbf{V}_0} = 2^{\aleph_0}$:

(c_1)card $\{0,1\}^{\mathbf{V}_0} = [\text{card}\{0,1\}]^{\text{card}\,\mathbf{V}_0}$ Def de card $^{\text{card}}$
(c_2)card$\{0,1\} = 2$ Def de 2
(c_3)card $\mathbf{V}_0 = \aleph_0$ Dm (4.7)
(c_4)card $\{0,1\}^{\mathbf{V}_0} = 2^{\aleph_0}$ (c_1)(c_2)(c_3)Def de $=$

(d)card $P(\mathbf{V}_0) = 2^{\aleph_0}$ (b)(c)Def de $=$
(e)$2^{\aleph_0} = \aleph$ Def de $\aleph$
(f)card $P(\mathbf{V}_0) = \aleph$ (d)(e)Def de $=$

(5)$\aleph \geq$ card $\mathbf{A}$ (3)(4)Def de $=$

$\aleph \leq$ card $\mathbf{A}$:

(1)$\mathbf{V} \subseteq \mathbf{A}$ Porque toda vec es un abierto
(2)card $\mathbf{V} \leq$ card $\mathbf{A}$ (1)Dm (3.1)
(3)card $\mathbf{V} = \aleph$ Dm (4.7)
(4)$\aleph \leq$ card $\mathbf{A}$ (2)(3)Def de $=$

card $\mathbf{A} = \aleph$:

(1) $\aleph \geq$ card $\mathbf{A}$	Dm (4.8)
(2) $\aleph \leq$ card $\mathbf{A}$	Dm (4.8)
(3) card $\mathbf{A} = \aleph$	(1)(2)Dm (3.1)

5. BORELIANOS

Borelianos (en $\mathbb{R}^n$) son los conjuntos que se generan a partir de los abiertos mediante las operaciones de resta y de unión numerable.

Una colección $\mathbf{C}$, de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se llama *anillo sigma* ssi dados $E_1, E_2 \in \mathbf{C}$, $E_1 - E_2 \in \mathbf{C}$, y , dados $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathbf{C}$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathbf{C}$.

Se define la *colección* $\mathbf{B}$, *de los conjuntos borelianos*, como el mínimo anillo sigma que incluye a los abiertos.

Axiomas:
$\mathbf{B}$ es anillo sigma.
$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.
Para todo C, si C es anillo sigma y $\mathbf{A} \subseteq C$ entonces $\mathbf{B} \subseteq C$.

Para toda colección $\mathbf{C}$, de subc de $\mathbb{R}^n$, se definen las colecciones $\mathbf{C}^-$ y $\mathbf{C}^\infty$ como sigue:
Si $E_1, E_2 \in \mathbf{C}$ entonces $E_1 - E_2 \in \mathbf{C}^-$.
Dado $Y \in \mathbf{C}^-$, existen $E_1, E_2 \in \mathbf{C}$ tales que $E_1 - E_2 = Y$.

Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathbf{C}$ entonces $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathbf{C}^\infty$.
Dado $Y \in \mathbf{C}^\infty$, existen $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathbf{C}$ tales que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n = Y$.

Lemas:
<u>Si</u> $\emptyset \in \mathbf{C}$ <u>entonces</u> $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^-$:

(1)$\emptyset \in \mathbf{C}$ Hpt
(2)Para todo E, si $E \in \mathbf{C}$ entonces $E \in \mathbf{C}^-$:

- (a)$E \in \mathbf{C}$ Hpt
- (b)$\emptyset \in \mathbf{C}$ (1)Desc
- (c)$E - \emptyset \in \mathbf{C}^-$ (a)(b)Def de $\mathbf{C}^-$
- (d)$E - \emptyset = E$ Alg
- (e)$E \in \mathbf{C}^-$ (c)(d)Def de $=$

(3)$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^-$ (2)Def de $\subseteq$

<u>Si</u> card $\mathbf{C} = \aleph$ <u>y</u> $\emptyset \in \mathbf{C}$ <u>entonces</u> card $\mathbf{C}^- = \aleph$:

(1)card $\mathbf{C} = \aleph$ Hpt.
(2)$\emptyset \in \mathbf{C}$ Hpt.
(3)$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^-$ (2)Dm anterior
(4)card $\mathbf{C} \leq$ card $\mathbf{C}^-$ (3)Dm (3.1)
(5)$\aleph \leq$ card $\mathbf{C}^-$ (4)(1)Def de $=$
(6)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^-$ es suprayectiva:

(a)$Dom\Phi = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$
(b)Dado $(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Phi(E_1, E_2) = E_1 - E_2$ Def de Φ
(c)Dado $(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\Phi(E_1, E_2) \in \mathbf{C}^-$:

(c_1)$(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ Hpt.
(c_2)$E_1, E_2 \in \mathbf{C}$ (c_1)Def de $\times$
(c_3)$E_1 - E_2 \in \mathbf{C}^-$ (c_2)Def de $\mathbf{C}^-$
(c_4)$\Phi(E_1, E_2) = E_1 - E_2$ (c_1) Por (b)
(c_5)$\Phi(E_1, E_2) \in \mathbf{C}^-$ (c_3)(c_4)Def de $=$

(d)Φ va de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^-$ (a)(c)Def de incidencia
(e)Dado $F \in \mathbf{C}^-$, existe $(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ tal que $\Phi(E_1, E_2) = F$:

(e_1)$F \in \mathbf{C}^-$ Hpt.
(e_2)Existen E_1, E_2 tales que $E_1, E_2 \in \mathbf{C}$ y $E_1 - E_2 = F$ (e_1)Def de $\mathbf{C}^-$
(e_3)$E_1, E_2 \in \mathbf{C}$
(e_4)$E_1 - E_2 = F$ Def de E_1, E_2
(e_5)$(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ (e_3)Def de $\times$
(e_6)$\Phi(E_1, E_2) = E_1 - E_2$ (e_5) Por (b)
(e_7)$\Phi(E_1, E_2) = F$ (e_6)(e_4)Def de $=$
(e_8)$(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ y $\Phi(E_1, E_2) = F$ (e_5)(e_7)Desc
(e_9)Existe $(E_1, E_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ tal que $\Phi(E_1, E_2) = F$ (e_8)Desc

(f)$\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^-$ es supra (d)(e)Def de supra

(7)$\Phi_1 : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^-$ es supra Def de Φ_1
(8)card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \geq$ card $\mathbf{C}^-$ (7)Dm (3.1)
(9)card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) = \aleph$:

(a)card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}) =$ (card $\mathbf{C}$)(card $\mathbf{C}$) Def de $\prod$
(b)card $\mathbf{C} = \aleph$ (1)Desc

(c) card $(\mathbf{C}\times\mathbf{C}) = \aleph\aleph$ (a)(b)Def de $=$
(d) $\aleph\aleph = \aleph$ Dm ([8])
(e) card $(\mathbf{C}\times\mathbf{C}) = \aleph$ (c)(d)Def de $=$

(10) $\aleph \geq$ card $\mathbf{C}^-$ (8)(9)Def de $=$
(11) $\aleph =$ card $\mathbf{C}^-$ (5)(10)Dm (3.1)

$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^\infty$:

(1)Para todo E, si $E \in \mathbf{C}$ entonces $E \in \mathbf{C}^\infty$:

(a) $E \in \mathbf{C}$ Hpt
(b) $E \cup \cdots \cup E \cup \cdots \in \mathbf{C}^\infty$ (a)Def de $\mathbf{C}^\infty$
(c) $E \cup \cdots \cup E \cup \cdots = E$ Alg
(d) $E \in \mathbf{C}^\infty$ (b)(c)Def de $=$

(2) $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^\infty$ (1)Def de $\subseteq$

Si card $\mathbf{C} = \aleph$ entonces card $\mathbf{C}^\infty = \aleph$:

(1)card $\mathbf{C} = \aleph$ Hpt
(2) $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^\infty$ Dm anterior
(3)card $\mathbf{C} \leq$ card $\mathbf{C}^\infty$ (2)Dm (3.1)
(4) $\aleph \leq$ card $\mathbf{C}^\infty$ (3)(1)Def de $=$
(5)Existe Φ tal que $\Phi : \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots \to \mathbf{C}^\infty$ es suprayectiva :

(a) $Dom\Phi = \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots$
(b)Para todo $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots$, $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ Def de Φ
(c)Para todo $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots$, $\Phi(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C}^\infty$:

(c_1) $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots$ Hpt
(c_2) $E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{C}$ (c_1)Def de $\times$
(c_3) $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \in \mathbf{C}^\infty$ (c_2)Def de $\mathbf{C}^\infty$
(c_4) $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$ (c_1)Por(b)
(c_5) $\Phi(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C}^\infty$ (c_3)(c_4)Def de $=$

(d) Φ va de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots$ a $\mathbf{C}^\infty$ (a)(c)Def de incidencia

(e) Para todo $F \in \mathbf{C}^{\infty}$, existe $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots$ tal que $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = F$:

(e$_1$) $F \in \mathbf{C}^{\infty}$ Hpt
(e$_2$) Existen $E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{C}$ tales que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n = F$ (e$_1$)Def de $\mathbf{C}^{\infty}$
(e$_3$) $E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{C}$
(e$_4$) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n = F$ Def de $E_1, E_2, \ldots$
(e$_5$) $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots$ (e$_3$)Def de $\times$
(e$_6$) $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ (e$_5$)Por(b)
(e$_7$) $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = F$ (e$_6$)(e$_4$)Def de $=$
(e$_8$) $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots$ y $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = F$ (e$_5$)(e$_7$)Desc
(e$_9$) Existe $(E_1, E_2, \ldots)$ tal que $(E_1, E_2, \ldots) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots$ y $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = F$ (e$_8$)Desc

(f) $\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\infty}$ es supra (d)(e)Def de supra

(6) $\Phi_1 : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \longrightarrow \mathbf{C}^{\infty}$ es supra Def de Φ_1
(7) card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots) \geq$ card $\mathbf{C}^{\infty}$ (6)Dm (3.1)
(8) card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots) = \aleph$:

(a) card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots) =$ (card $\mathbf{C}$)(card $\mathbf{C}$)$\cdots$ Def de $\prod$
(b) card $\mathbf{C} = \aleph$ (1)Desc
(c) card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots) = \aleph\aleph\cdots$ (a)(b)Def de $=$
(d) $\aleph\aleph\cdots = \aleph$ Dm ([8])
(e) card $(\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots) = \aleph$ (c)(d)Def de $=$

(9) $\aleph \geq$ card $\mathbf{C}^{\infty}$ (7)(8)Def de $=$
(10) $\aleph =$ card $\mathbf{C}^{\infty}$ (4)(9)Dm (3.1)

$I(\xi) = \{\lambda : \lambda < \xi\}$. λ ordinal
Para todo λ, $\lambda \in I(\xi)$ si y sólo si $\lambda < \xi$ Def de $I(\xi)$, ξ ordinal.

Lema:
Existe ξ tal que card $I(\xi) = \aleph$:

(1)Existe B tal que B es buena ordenación y $[B] = \mathbb{R}$ Zermelo
(2)B es buena ordenación
(3)$[B] = \mathbb{R}$ Def de B
(4)tipo $B = \beta$ Def de β
(5)tipo $M(\beta) = \beta$ Dm (3.5.1)
(6)tipo $M(\beta) =$ tipo B (5)(4)Def de $=$
(7)$M(\beta) \simeq B$ (6)Def de tipo
(8)$[M(\beta)] \sim [B]$: (7)
(9)$[M(\beta)] \sim \mathbb{R}$ (8)(3)Def de $=$
(10)$[M(\beta)] = I(\beta)$: Porque $\lambda \in [M(\beta)]$ ssi $\lambda < \beta$
(11)$I(\beta) \sim \mathbb{R}$ (9)(10)Def de $=$
(12)card $I(\beta) =$ card $\mathbb{R}$ (11)Def de card
(13)card $\mathbb{R} = \aleph$ Dm (4.6)
(14)card $I(\beta) = \aleph$ (12)(13)Def de $=$
(15)Existe ξ tal que card $I(\xi) = \aleph$ (14)Desc

Para ver que el total de Borelianos es alef ($\aleph$), primero se demostrará que card $\mathbf{B} \leq \aleph$, esta demostración se hará por etapas, pues hacerla en una sola etapa, sería muy pesado, posteriormente se demostrará que $\aleph \leq$ card $\mathbf{B}$.

card $\mathbf{B} \leq \aleph$: **1ª etapa**

(1)Existe ξ tal que $I(\xi)$ no es numerable: Lema
(2)$\alpha = \min \xi$ tal que $I(\xi)$ no es numerable Def de α
(3)$I(\alpha)$ no es numerable
(4)Para todo $\xi < \alpha$, $I(\xi)$ es numerable (2)Def de min

(5)$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$
(6)Para todo ξ, si $0 < \xi < \alpha$ ent. $\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ Def de $\mathbf{B}_\xi$

$(7)\mathbf{B} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

$(a)\mathbf{A} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

(a_1)**Para** todo E, si $E \in \mathbf{A}$ ent. $E \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

$(\alpha)E \in \mathbf{A}$ Hpt.
$(\beta)E \in \mathbf{B}_0$ $(\alpha)(5)$Def de $=$
$(\gamma)0 < \alpha$:

$(\gamma_1)0 \leq \alpha$ Arit. ([9],[10])
$(\gamma_2)0 \neq \alpha$:

(A)$I(0)$ es numerable Porque $I(0) = \emptyset$
(B)$I(\alpha)$ no es numerable (3)Desc
(C)$0 \neq \alpha$ (A)(B)Def de $=$, girada

$(\gamma_3)0 < \alpha$ $(\gamma_1)(\gamma_2)$Exclusión

$(\delta)0 < \alpha$ y $E \in \mathbf{B}_0$ $(\gamma)(\beta)$Desc
(ε)Existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $E \in \mathbf{B}_\xi$ (δ)Desc
$(\zeta)E \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ (ε)Def de $\bigcup$

$(a_2)\mathbf{A} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ (a_1)Def de $\subseteq$

(b)Si $E_1, E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $E_1 - E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$: **Pend** 2ª etapa
(c)Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $\bigcup_{n\in N} E_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$: **Pend** 3ª etapa
(d)$\bigcup \mathbf{B}_\xi$ es anillo sigma (b)(c)Def de anillo sigma
(e)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup \mathbf{B}_\xi$ (d)(a)Def de $\mathbf{B}$

(8)card $\mathbf{B} \leq$ card $\bigcup \mathbf{B}_\xi$ (7)Dm (3.1)
(9)card $\bigcup \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$: **Pend** 4ª etapa
(10)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ (8)(9)Dm (3.1)

card $\mathbf{B} \leq \aleph$: **2ª etapa**

(1)Existe ξ tal que $I(\xi)$ no es numerable: Lema
(2)$\alpha = \min \xi$ tal que $I(\xi)$ no es numerable Def de α
(3)$I(\alpha)$ no es numerable
(4)Para todo $\xi < \alpha$, $I(\xi)$ es numerable (2)Def de min

(5)$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$

(6)Para todo ξ, si $0 < \xi < \alpha$ ent $\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ Def de $\mathbf{B}_\xi$

(7)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

(a)$\mathbf{A} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ Dm 1ª etapa

(b)Si $E_1, E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $E_1 - E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

(b_1)$E_1 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ Hpt

(b_2)Existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $E_1 \in \mathbf{B}_\xi$ (b_1)Def de $\bigcup$

(b_3)$\xi(1) < \alpha$

(b_4)$E_1 \in \mathbf{B}_{\xi(1)}$ Def de $\xi(1)$

(b_5)$E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ Hpt

(b_6)Existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $E_2 \in \mathbf{B}_\xi$ (b_5)Def de $\bigcup$

(b_7)$\xi(2) < \alpha$

(b_8)$E_2 \in \mathbf{B}_{\xi(2)}$ Def de $\xi(2)$

Al llegar aquí hacemos en una hoja aparte una lista de enunciados empezando por la tesis, seguida de lo que ella quiere decir, y de todo lo que de ahí se desprenda, hasta llegar a un resultado del que se pueda deducir la tesis. Tal resultado es que exista ξ tal que:
$0 < \xi < \alpha$,
$\xi(1) < \xi$,
$\xi(2) < \xi$. *Desiderátum

Por lo tanto:

(b_9)Existe $\eta < \alpha$ tal que $\xi(1) \leq \eta$ y $\xi(2) \leq \eta$:

(α)$\xi(1) < \xi(2)$ o $\xi(2) \leq \xi(1)$ Axioma

(β)Si $\xi(1) < \xi(2)$ entonces vale (b_9): (b_7)

(γ)Si $\xi(2) \leq \xi(1)$ entonces vale (b_9): (b_3)

(δ)vale (b_9) (α)(β)(γ)Por casos

(b_{10})$\eta < \alpha$

(b_{11})$\xi(1) \leq \eta$

(b_{12})$\xi(2) \leq \eta$ Def de η

(b_{13})$0 < \eta + 1 < \alpha$:

(α)$0 \leq \eta < \eta + 1$ Arit. ([9],[10])

(β)$0 < \eta + 1$ (α)Arit. ([9],[10])

(γ)$\eta + 1 \leq \alpha$ (b_{10})Arit. ([9],[10])

$(\delta)\eta + 1 \neq \alpha$:

$(\delta_1) I(\eta + 1)$ **es numerable:**

$(A) I(\eta + 1) \subseteq I(\eta) \cup \{\eta\}$: Def de I
$(B) I(\eta)$ es numerable (b_{10})Por (4)
$(C) \{\eta\}$ es numerable Dm ([8])
$(D) I(\eta) \cup \{\eta\}$ es numerable (B)(C)Dm ([8])
$(E) I(\eta + 1)$ es numerable (A)(D)Dm ([8])

$(\delta_2) I(\alpha)$ no es numerable (3)Desc
$(\delta_3)\eta + 1 \neq \alpha$ $(\delta_1)(\delta_2)$Def de $=$, girada

$(\varepsilon)\eta + 1 < \alpha$ $(\gamma)(\delta)$Exclusión
$(\zeta) 0 < \eta + 1 < \alpha$ $(\beta)(\varepsilon)$Desc

$(b_{14})\xi(1) < \eta + 1$ (b_{11})Arit ([9],[10])
$(b_{15})\xi(2) < \eta + 1$ (b_{12})Arit ([9],[10])
*(b_{16})Existe ξ tal que $0 < \xi < \alpha$, $\xi(1) < \xi$ y $\xi(2) < \xi$ $(b_{13})(b_{14})(b_{15})$Desc
$(b_{17}) 0 < \xi < \alpha$
$(b_{18})\xi(1) < \xi$
$(b_{19})\xi(2) < \xi$ Def de ξ
$(b_{20}) E_1 \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$:

$(\alpha)\xi(1) < \xi$ (b_{18})Desc
$(\beta) E_1 \in \mathbf{B}_{\xi(1)}$ (b_4)Desc
$(\gamma)\xi(1) < \xi$ y $E_1 \in \mathbf{B}_{\xi(1)}$ $(\alpha)(\beta)$Desc
(δ)Existe λ tal que $\lambda < \xi$ y $E_1 \in \mathbf{B}_\lambda$ (γ)Desc
$(\varepsilon) E_1 \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$ (δ)Def de $\bigcup$

$(b_{21}) E_2 \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$: Dm análoga a (b_{20})

$(b_{22}) E_1 - E_2 \in \left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-$ $(b_{20})(b_{21})$Def de $\mathbf{C}^-$

$(b_{23}) E_1 - E_2 \in \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (b_{22})Porque $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^\infty$

$(b_{24}) \mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (b_{17})Por (6)

$(b_{25}) E_1 - E_2 \in \mathbf{B}_\xi$ $(b_{23})(b_{24})$Def de $=$
$(b_{26})\xi < \alpha$ (b_{17})Desc
$(b_{27})\xi < \alpha$ y $E_1 - E_2 \in \mathbf{B}_\xi$ $(b_{26})(b_{25})$Desc
(b_{28})Existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $E_1 - E_2 \in \mathbf{B}_\xi$ (b_{27})Desc

$(b_{29}) E_1 - E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ (b_{28})Def de $\bigcup$

(c)Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $\bigcup_{n\in N} E_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$: $\qquad$ **Pend 3ª etapa**

(d)$\bigcup \mathbf{B}_\xi$ es anillo sigma $\qquad$ (b)(c)Def de anillo sigma

(e)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ (d)(a)Def de $\mathbf{B}$

(8)card $\mathbf{B} \leq$ card $\bigcup \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ (7)**Dm (3.1)**

(9)card $\bigcup \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$: $\qquad$ **Pend 4ª etapa**

(10)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ $\qquad$ (8)(9)Dm (3.1)

card $\mathbf{B} \leq \aleph$: $\qquad$ **3ª etapa**

(1)Existe ξ tal que $I(\xi)$ no es numerable: $\qquad$ Lema

(2)$\alpha = \min \xi$ tal que $I(\xi)$ no es numerable $\qquad$ Def de α

(3)$I(\alpha)$ no es numerable

(4)Para todo $\xi < \alpha$, $I(\xi)$ es numerable $\qquad$ (2)Def de min

(5)$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$

(6)Para todo ξ, si $0 < \xi < \alpha$ ent $\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ $\qquad$ Def de $\mathbf{B}_\xi$

(7)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

(a)$\mathbf{A} \subseteq \bigcup \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ Dm 1ª etapa

(b)Si $E_1, E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $E_1 - E_2 \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ Dm 2ª etapa

(c)Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ entonces $\bigcup_{n\in N} E_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$:

$(c_1) E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ Hpt

(c_2)Para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ $\qquad$ (c_1)Trad

(c_3)Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $E_n \in \mathbf{B}_\xi$: $\qquad$ (c_2)

(c_4)Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi(n) < \alpha$ y $E_n \in \mathbf{B}_{\xi(n)}$ $\qquad$ Def de $\xi(n)$

(c_5)Existe $\eta < \alpha$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi(n) \leq \eta$:

(α)Para todo $\eta < \alpha$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(n) > \eta$ $\qquad$ Neg

$(\beta) I(\alpha) \subseteq \bigcup_{n\in \mathbf{N}} I(\xi(n))$:

$(\beta_1) \lambda \in I(\alpha)$ $\qquad$ Hpt

$(\beta_2) \lambda < \alpha$ $\qquad$ (β_1)Def de I

(β_3)Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi(n) > \lambda$ $\qquad$ (β_2)Por (α)

$(\beta_4) n \in \mathbb{N}$

$(\beta_5)\xi(n) > \lambda$ Def de n
$(\beta_6)\lambda < \xi(n)$ (β_5)Trad
$(\beta_7)\lambda \in I(\xi(n))$ (β_6)Def de I
$(\beta_8)n \in \mathbf{N}$ y $\lambda \in I(\xi(n))$ $(\beta_4)(\beta_7)$Desc
(β_9)Existe n tal que $n \in \mathbf{N}$ y $\lambda \in I(\xi(n))$ (β_8)Desc
$(\beta_{10})\lambda \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I(\xi(n))$ (β_9)Def de $\bigcup$

(γ)Para todo $n \in \mathbf{N}$, $I(\xi(n))$ es numerable: $(c_4)(4)$
$(\delta) \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I(\xi(n))$ es numerable (γ)Dm ([8])
$\bullet(\varepsilon)I(\alpha)$ es numerable $(\beta)(\delta)$Dm ([8])
$\bullet(\zeta)I(\alpha)$ no es numerable (3)Desc

$(c_6)\eta < \alpha$
(c_7)Para todo $n \in \mathbf{N}$, $\xi(n) \leq \eta$ Def de η
$(c_8)0 < \eta + 1 < \alpha$ (c_6)Dm etapa anterior
(c_9)Para todo $n \in \mathbf{N}$, $\xi(n) < \eta + 1$: (c_7)
$(c_{10})0 < \eta + 1 < \alpha$ y para todo $n \in \mathbf{N}$, $\xi(n) < \eta + 1$ $(c_8)(c_9)$Desc
*(c_{11})Existe ξ tal que $0 < \xi < \alpha$ y para todo $n \in \mathbf{N}$, $\xi(n) < \xi$ (c_{10})Desc
$(c_{12})0 < \xi < \alpha$
(c_{13})para todo $n \in \mathbf{N}$, $\xi(n) < \xi$ Def de ξ
(c_{14})Para todo $n \in \mathbf{N}$, $E_n \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$: $(c_{13})(c_4)$

(c_{15})Para todo $n \in \mathbf{N}$, $E_n \in \left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-$:

$(\alpha)n \in \mathbf{N}$ Hpt
$(\beta)E_n \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$ (α)Por(c_{14})

$(\gamma) \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \subseteq \left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-$:

$(\gamma_1)\emptyset \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$:

(A)$\emptyset \in \mathbf{A}$: Porque $\emptyset$ es abierto
(B)$\emptyset \in \mathbf{B}_0$ (A)(5)Def de $=$
(C)$0 < \xi$ (c_{12})Desc
(D)$0 < \xi$ y $\emptyset \in \mathbf{B}_0$ (C)(B)Desc
(E)Existe λ tal que $\lambda < \xi$ y $\emptyset \in \mathbf{B}_\lambda$ (D)Desc
(F)$\emptyset \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$ (E)Def de $\bigcup$

$(\gamma_2) \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \subseteq \left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-$ (γ_1)Dm (5.0)

$(\delta) E_n \in \left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-$ $(\beta)(\gamma)$Alg

$(c_{16}) \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (c_{14})Def de $\mathbf{C}^\infty$

$(c_{17}) \mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (c_{12})Por (6)

$(c_{18}) \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathbf{B}_\xi$ $(c_{16})(c_{17})$Def de $=$

$(c_{19}) \xi < \alpha$ (c_{12})Desc

$(c_{20}) \xi < \alpha$ y $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathbf{B}_\xi$ $(c_{19})(c_{18})$Desc

(c_{21})Existe ξ tal que $\xi < \alpha$ y $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathbf{B}_\xi$ (c_{20})Desc

$(c_{22}) \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ (c_{21})Def de $\bigcup$

(d)$\bigcup \mathbf{B}_\xi$ es anillo sigma (b)(c)Def de anillo sigma

(e)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup \mathbf{B}_\xi$ (d)(a)Def de $\mathbf{B}$

(8)card $\mathbf{B} \leq$ card $\bigcup \mathbf{B}_\xi$ (7)Dm (3.1)

(9)card $\bigcup \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$: **Pend** 4ª etapa

(10)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ (8)(9)Dm (3.1)

card $\mathbf{B} \leq \aleph$: **4ª etapa**

(1)Existe ξ tal que $I(\xi)$ no es numerable: Lema

(2)$\alpha = \min \xi$ tal que $I(\xi)$ no es numerable Def de α

(3)$I(\alpha)$ no es numerable

(4)Para todo $\xi < \alpha$, $I(\xi)$ es numerable (2)Def de min

(5)$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$

(6)Para todo ξ, si $0 < \xi < \alpha$ ent $\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ Def de $\mathbf{B}_\xi$

(7)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ Dm etapas anteriores

(8)card $\mathbf{B} \leq$ card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ (7)Dm (3.1)

(9)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$:

(a)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \sum_{\xi<\alpha}$ card $\mathbf{B}_\xi$ Subaditividad

(b)Para todo $\xi < \alpha$, card $\mathbf{B}_\xi = \aleph$: Por inducción **Pend** 5ª etapa

(c)$\sum_{\xi<\alpha}$ card $\mathbf{B}_\xi = \sum_{\xi<\alpha} \aleph$ (b)Def de $=$

(d) $= \sum_{\xi \in I(\alpha)} \aleph$: Def de I

(e) $= [\text{card } I(\alpha)]\aleph$ Dm ([8])

(f)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq [\text{card } I(\alpha)]\aleph$ (a)(e)Def de $=$

(g)card $I(\alpha) \leq \aleph$:

(g$_1$)Existe β tal que card $I(\beta) = \aleph$ Lema

(g$_2$)card $I(\beta) = \aleph$ Def de β

(g$_3$)$I(\beta)$ no es numerable (g$_2$)Dm ([8])

(g$_4$)Si $\beta < \alpha$ entonces $I(\beta)$ es numerable (4)Desc

(g$_5$)Si $I(\beta)$ no es numerable entonces $\beta \not< \alpha$ (g$_4$)Giro

(g$_6$)$\beta \not< \alpha$ (g$_3$)Por(g$_5$)

(g$_7$)$\alpha \leq \beta$ (g$_6$)Arit ([9],[10])

(g$_8$)$I(\alpha) \subseteq I(\beta)$: (g$_7$)Def de I

(g$_9$)card $I(\alpha) \leq$ card $I(\beta)$ (g$_8$)Dm (3.1)

(g$_{10}$)card $I(\alpha) \leq \aleph$ (g$_9$)(g$_2$)Def de $=$

(h)(card $I(\alpha))\aleph \leq \aleph\aleph$ (g)Dm ([8])

(i)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph\aleph$ (f)(h)Dm (3.1)

(j)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$: (i)Porque $\aleph\aleph = \aleph$ Dm([8])

(10)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ (8)(9)Dm (3.1)

card $\mathbf{B} \leq \aleph$: **5ª etapa**

(1)Existe ξ tal que $I(\xi)$ no es numerable: Lema

(2)$\alpha = \min \xi$ tal que $I(\xi)$ no es numerable Def de α

(3)$I(\alpha)$ no es numerable

(4)Para todo $\xi < \alpha$, $I(\xi)$ es numerable (2)Def de min

(5)$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}$

(6)Para todo ξ, si $0 < \xi < \alpha$ ent $\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ Def de $\mathbf{B}_\xi$

(7)$\mathbf{B} \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ Dm 2ª y 3ª etapas

(8)card $\mathbf{B} \leq$ card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi$ (7)Dm (3.1)

(9)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$:

(a)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \sum_{\xi<\alpha}$ card $\mathbf{B}_\xi$ Subaditividad (b)Para todo $\xi < \alpha$, card $\mathbf{B}_\xi = \aleph$:

(b$_1$)$\xi < \alpha$ Hpt
(b$_2$)Para todo $\lambda < \xi$, card $\mathbf{B}_\lambda = \aleph$ Hpt de inducción
(b$_3$)$\xi = 0$ o $0 < \xi < \alpha$ (b$_1$)Arit
(b$_4$)Si $\xi = 0$ entonces card $\mathbf{B}_\xi = \aleph$: (5)Porque card $\mathbf{A} = \aleph$
(b$_5$)Si $0 < \xi < \alpha$ entonces card $\mathbf{B}_\xi = \aleph$:

(α)$0 < \xi < \alpha$ Hpt
(β)$\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (α)Por (6)
(γ)card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda = \aleph$:

(γ_1)card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \leq \sum_{\lambda<\xi}$ card $\mathbf{B}_\lambda$ Subaditividad
(γ_2)Para todo $\lambda < \xi$, card $\mathbf{B}_\lambda = \aleph$ (b$_2$)Desc
(γ_3)$\sum_{\lambda<\xi}$ card $\mathbf{B}_\lambda = \sum_{\lambda<\xi} \aleph$ (γ_2)Def de =
(γ_4) $= \sum_{\lambda\in I(\xi)} \aleph$: Def de I
(γ_5) $= [\text{card } I(\xi)]\aleph$ Dm ([8])
(γ_6)card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \leq [\text{card } I(\xi)]\aleph$ (γ_1)(γ_5)Def de =
(γ_7)card $I(\xi) \leq \aleph_0$:

(A)$\xi < \alpha$ (α)Desc
(B)$I(\xi)$ es numerable (A)Por (4)
(C)card $I(\xi) \leq \aleph_0$ (B)Def de numerable

(γ_8)$[\text{card } I(\xi)]\aleph \leq \aleph_0\aleph$ (γ_7)Dm ([8])
(γ_9)card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \leq \aleph_0\aleph$ (γ_6)(γ_8)Dm (3.1)
(γ_{10})card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda \leq \aleph$: (γ_9)Porque $\aleph_0\aleph = \aleph$ Dm ([8])
(γ_{11})$\aleph \leq$ card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$: Porque $\mathbf{A} \subseteq \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$ y card $\mathbf{A} = \aleph$
(γ_{12})card $\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda = \aleph$ (γ_{10})(γ_{11})Dm (3.1)

(δ)$\emptyset \in \bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda$ Dm 3ª etapa paso (γ_1)
(ε)card $\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^- = \aleph$ (γ)(δ)Dm (5.0)
(ζ)card $\left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty = \aleph$ (ε)Dm (5.0)

$(\eta)\mathbf{B}_\xi = \left[\left(\bigcup_{\lambda<\xi} \mathbf{B}_\lambda\right)^-\right]^\infty$ (β)**Desc**

(θ)**card** $\mathbf{B}_\xi = \aleph$ $(\zeta)(\eta)$**Def de =**

(b_6)card $\mathbf{B}_\xi = \aleph$ $(b_3)(b_4)(b_5)$**Por casos**

(c) $\sum_{\xi<\alpha}$ card $\mathbf{B}_\xi = \sum_{\xi<\alpha} \aleph$ (b)Def de =

(d) $= \sum_{\xi\in I(\alpha)} \aleph$: Def de I

(e) $= [\text{card } I(\alpha)]\aleph$ Dm ([8])

(f)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq [\text{card } I(\alpha)]\aleph$ (a)(e)Def de =

(g)card $I(\alpha) \leq \aleph$ Dm 4ª etapa

(h)(card $I(\alpha))\aleph \leq \aleph\aleph$ (g)Dm ([8])

(i)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph\aleph$ (f)(h)Dm (3.1)

(j)card $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{B}_\xi \leq \aleph$: (i)Porque $\aleph\aleph = \aleph$

(10)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ (8)(9)Dm (3.1)

$\aleph \leq$ card $\mathbf{B}$:

(1)$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ Def de $\mathbf{B}$
(2)card $\mathbf{A} \leq$ card $\mathbf{B}$ (1)Dm (3.1)
(3)card $\mathbf{A} = \aleph$ Dm (4.8)
(4)$\aleph \leq$ card $\mathbf{B}$ (2)(3)Def de =

card $\mathbf{B} = \aleph$:

(1)card $\mathbf{B} \leq \aleph$ Dm (5.0)
(2)$\aleph \leq$ card $\mathbf{B}$ Dm (5.0)
(3)card $\mathbf{B} = \aleph$ (1)(2)Dm (3.1)

A. Acertijos parvipontanos

A dice que B miente.
B dice que A miente:
A miente-B no miente. 1ª solución
A no miente-B miente. 2ª solución

A dice que B miente.
B dice que A no miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B no miente.
B dice que A miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B no miente.
B dice que A no miente:
A miente-B miente. 1ª solución
A no miente-B no miente. 2ª solución

A dice que B miente.
B dice que C miente.
C dice que A miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B miente.
B dice que C miente.
C dice que A no miente:
A miente-B no miente-C miente. 1ª solución
A no miente-B miente-C no miente. 2ª solución

A dice que B miente.
B dice que C no miente.
C dice que A miente:
A miente-B no miente-C no miente. 1ª solución
A no miente-B miente-C miente. 2ª solución

A dice que B no miente.
B dice que C miente.
C dice que A miente:
A miente-B miente-C no miente. 1ª solución
A no miente-B no miente-C miente. 2ª solución

A dice que B miente.
B dice que C no miente.
C dice que A no miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B no miente.
B dice que C no miente.
C dice que A miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B no miente.
B dice que C miente.
C dice que A no miente:
No es cierto que A miente.
No es cierto que A no miente. Insoluble

A dice que B no miente.
B dice que C no miente.
C dice que A no miente:
A miente-B miente-C miente. 1ª solución
A no miente-B no miente-C no miente. 2ª solución

B. Tabla de veraces y mitómanos

Anteriormente el Prof. Gonzalo Zubieta Russi publicó una tabla sobre veraces y mitómanos ([3]), y esta tabla que aquí presentamos fue propuesta por el Prof. Zubieta y elaborada por Maricela Solórzano A.,Osvaldo De la Peña R. y Patricia Rodriguez R.

A dice que B es veraz.
B dice que C es veraz.
C dice que A miente:
A no es veraz. B no es veraz. C no es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es veraz.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A miente:
B no es mitómano.
C no es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si B es veraz entonces C es normal
Si C es veraz entonces B es normal

A dice que B es veraz.
B dice que C es normal.
C dice que A miente:
C no es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es veraz.

A dice que B es veraz.
B dice que C no es normal.
C dice que A miente:
Si A es veraz entonces C es mitómano.
Si B es veraz entonces C es mitómano.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es veraz.

B dice que C no es veraz.
C dice que A no miente:
B no es mitómano. C no es veraz.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es veraz entonces C es normal
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es veraz.
B dice que C es mitómano.
C dice que A no miente:
A no es veraz. B no es veraz. C no es veraz.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es veraz.
B dice que C es normal.
C dice que A no miente:
C no es veraz.
Si B es mitómano entonces C es mitómano.

A dice que B es veraz.
B dice que C no es normal.
C dice que A no miente:
Si A es veraz entonces C es veraz.
Si B es veraz entonces C es veraz.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C no es veraz.
C dice que A miente:
A no es veraz. B no es mitómano. C no es mitómano.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C es mitómano.
C dice que A miente:
B no es veraz. C no es mitómano.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es normal

A dice que B es mitómano.
B dice que C es normal.
C dice que A miente:
Si A es veraz entonces C es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es mitómano.
Si C es veraz entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C no es normal.
C dice que A miente:
C no es mitómano.
Si B es veraz entonces C es veraz.

A dice que B es mitómano.
B dice que C es veraz.
C dice que A no miente:
B no es veraz. C no es veraz.
Si A es veraz entonces C es normal.
Si A es mitómano entonces B es normal.
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A no miente:
A no es veraz. B no es mitómano. C no es veraz.
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C es normal.
C dice que A no miente:
Si A es veraz entonces C es veraz.
Si B es mitómano entonces C es veraz.
Si C es mitómano entonces B es normal.

A dice que B es mitómano.
B dice que C no es normal.
C dice que A no miente:
C no es veraz.
Si B es veraz entonces C es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C es veraz.
C dice que A miente:
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C no es veraz.
C dice que A miente:
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es veraz entonces B es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C es mitómano.
C dice que A miente:
B no es veraz.
Si C es veraz entonces B es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A miente:
B no es mitómano.
Si C es veraz entonces B es veraz.
Si A es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C es normal.
C dice que A miente:
Si C es veraz entonces B es mitómano.
Si B es mitómano entonces C es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C no es normal.
C dice que A miente:
Si B es veraz entonces C es veraz.
Si C es veraz entonces B es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C es veraz.
C dice que A no miente:
B no es veraz.
Si A es mitómano entonces B es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C no es veraz.
Cdice que A no miente:
B no es mitómano.
Si A es mitómano entonces B es veraz.
Si C es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C es mitómano.
C dice que A no miente:
Si B es mitómano entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es veraz.

A dice que B es normal.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A no miente:
Si B es veraz entonces C es normal.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C es normal.
C dice que A no miente:
Si B es mitómano entonces C es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es mitómano.

A dice que B es normal.
B dice que C no es mitómano.
C dice que A no miente:
Si B es veraz entonces C es mitómano.
Si C es mitómano entonces B es veraz.

Dualidad
El dual de veraz es mitómano, el dual de mitómano es veraz, y el dual de normal es normal. El conjugado de un término es la negación de su dual. Así, el conjugado de veraz es no mitómano, el conjugado de mitómano es no veraz, y el conjugado de normal es no normal.

Principio de dualidad
Si a partir de ciertos datos se demuestra cierta afirmación, entonces a partir de los datos conjugados se demuestra la afirmación dual.

Ejemplo:

Datos:
A dice que B es normal
B dice que C es veraz
C dice que A miente

Afirmación: Si B es mitómano entonces C es normal

Datos conjugados:
A dice que B no es normal
B dice que C no es mitómano
C dice que A miente

Afirmación dual: Si B es veraz entonces C es normal

Así la tabla anterior se duplica al pasar en cada caso de los datos a los datos conjugados, y de las afirmaciones a las afirmaciones duales.

C. Abreviaturas y simbologia

Abreviaturas

Mit	Mitómano
Def	Definición
Neg	Negación
Desc	Descendente
Hpt	Hipótesis
Iny	Inyectiva
Biy	Biyectiva
Supra	Suprayectiva
Trad	Traducción
Dm	Demostrado
Alg	Algebraico
card	Cardinal
Subc	Subconjunto
Pend	Pendiente
Dom	Dominio
Pot	Potencia
Arit	Aritmético
Distri	Distributiva
ssi	Si, y sólo si
vec	Vecindad
rac	Racional
int	Interior
ent	Entonces
min	Mínimo
num	Número

Símbolos

$\in$	Pertenece
$\subseteq$	Contenido
$\cup$	Unión de conjuntos
$=$	Igualdad
$\cdot$	Producto punto
$\circ$	Composición
$\sim$	Equivalente
$\simeq$	Isomorfo
$\rightarrow$	Incidencia
$<$	Menor que
$>$	Mayor que
$\neq$	Diferente de
$\notin$	No pertenece a
$\nsim$	No es equivalente a
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
$\{i\}$	Singulete i(singular i)
A_i	A índice i
$\prod$	Producto de cardinales
$\sum$	Suma de cardinales
$\lvert p\rvert$	Módulo de p
$\langle a, b\rangle$	Intervalo abierto ab
$[A]$	Soporte de A
$\bigcup$	Unión de una familia de conjuntos
$[a, b]$	Intervalo cerrado ab

D. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han desarrollado diversas demostraciones, que van desde las más elementales en las cuales no se involucra ningún conocimiento matemático, sino un mero razonamiento lógico, hasta aquellas que exigen cierto conocimiento y experiencia dentro del área de matemáticas, todas ellas han sido presentadas dentro del esquema deductivo de tal forma que pueden ser comprendidas aun sin contar con una preparación especial. Esto nos muestra la gran versatilidad que tiene este esquema.

La rigidez de las demostraciones en matemáticas es una de las principales causas de deserción en los diversos cursos de lógica y matemáticas en nivel superior por lo que el profesor Zubieta ha puesto en practica el uso de este esquema dentro de las clases que él imparte en en los primeros semestres de la facultad de Ciencias, obteniendo un índice de deserción considerablemente menor, esto mismo se ha observado dentro de la facultad de Contaduría, donde el profesor también ha aplicado el esquema.

Considero que el esquema es una excelente opción para introducir a las personas al razonamiento de las demostraciones, por lo que su principal utilidad esta dentro de los primeros semestres de matemáticas y en las carreras afines a ella, sin embargo su aplicación en semestres más avanzados puede resultar en un avance más lento del que normalmente se requiere.

BIBLIOGRAFÍA

[1] William y Martha Kneale, [1972]. **El desarrollo de la lógica**, Technos, Madrid.

[2] Zubieta Russi Gonzalo, [1992]. **Taller de lógica matemática**, McGraw-hill, México.

[3] Zubieta Russi Gonzalo, [1991]. **Análisis lógico**, Mathesis vol. VII, No.2, pp 205-222, Facultad de Ciencias, UNAM, México.

[4] Enderton, Herbert B., [1977]. **Elements of set theory**, Academia, New York.

[5] Hrbacek, Karel Jech, Thomas, Coaut., [1978]. **Introduction to set Theory**, M. Dekker, New York.

[6] Halmos, Paul Richard, [1966]. **Teoría intuitiva de los conjuntos**, Continental, México.

[7] Oubina, Lia G., [1974]. **Introducción a la teoría de conjuntos**, Eudaba, Buenos Aires.

[8] Zubieta Russi Gonzalo, **Notas de clase**, sin publicar.

[9] Abraham A. Fraenkel, [1976]. **Abstract set theory**, North-Holand, Pub.Company, Amsterdam.

[10] Abraham A. Fraenkel, [1976]. **Teoría de los conjuntos y lógica**, UNAM. IIF, México.