

55
Zej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**EVOLUCION DE LAS FLUCTUACIONES PRIMIGENIAS
DE DENSIDAD EN EL UNIVERSO**



T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a:

FERMIN VINIEGRA HERNANDEZ



SECRETARÍA DE ESTUDIOS
Director de Tesis:
DR. CLAUDIO FIRMANI CLEMENTI

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

MEXICO, D. F.

MAYO DE 1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Evolución de las fluctuaciones primigenias de densidad en el universo"

realizado por Fermín Viniegra Hernández

con número de cuenta 8852825-8 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. CLAUDIO FIRMANI CLEMENTI

Propietario

DR. LUKAS NELLEN FILLA

Propietario

DR. PEDRO COLIN ALMAZAN

Suplente

DR. GABRIELLA PICCINELLI BOCCHI

Suplente

DR. PABLO DE LA MORA Y PALOMAR ASKINASY

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

[Handwritten signatures and stamps]
 2 de Feb
 DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
 DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A mi Mamá

**EVOLUCIÓN DE LAS
FLUCTUACIONES PRIMIGENIAS DE
DENSIDAD EN EL UNIVERSO.**

Fermín Viniegra Hernández

Contents

1	Introducción	5
2	Antecedentes a la formación de Galaxias	6
1	Introducción	6
2	La Evolución Global del Universo: Modelo Estandar	6
	2.2.1 Modelo Newtoniano	6
	2.2.1.1 Cinemática de la Expansión	6
	2.2.1.2 Dinámica de la Expansión	8
3	Resumen de Relatividad General	10
	2.3.1 El Principio de Equivalencia	10
	2.3.2 La Curvatura del Espacio-Tiempo	14
	2.3.3 Las Ecuaciones de Campo de Einstein	16
	2.3.4 La Métrica de Robertson-Walker	17
	2.3.5 El Tensor Energía-Momento	19
4	Modelo Estandar	20
	2.4.1 Dominio de la Materia	21
	2.4.2 Dominio de la Radiación	23
	2.4.3 Dificultades del modelo estandar	24
	2.4.4 Modelos inflacionarios	24
	2.4.5 Fluctuaciones del Período Inflacionario	26
3	Evolución de las Fluctuaciones Primigenias	27
1	Introducción	27
2	Aproximación Newtoniana	27
	3.2.1 Mecánica de Fluidos	28
3	Análisis de Jeans	38
	3.3.1 Inestabilidades en un Fluido sin Expansión	38
	3.3.2 Inestabilidades en un Fluido en Expansión	40
4	Evolución no Lineal y Linearización	44
	3.4.1 Introducción	44
	3.4.2 El colapso esférico	45
5	Fluctuaciones Adiabáticas y Materia Oscura	48
4	El Campo de Fluctuaciones Primigenias	50
1	Introducción	50
2	El campo de Fluctuaciones Primordiales	51
	4.2.1 Introducción	51

	4.2.2 El Campo de Fluctuaciones	52
	4.2.2.1 Introducción	52
	4.2.2.2 Campos de Densidad Aleatorio Gaussiano	52
	4.2.2.3 Descomposición de Fourier de las Fluctuaciones de densidad	53
	4.2.2.4 Condición Inicial Probabilística: Campo Gaussiano	54
	4.2.2.5 Conclusión	56
3	El Espectro de Potencias	56
	4.3.1 La Función de correlación para Galaxias	56
	4.3.2 Caracterización del Campo de Fluctuaciones vía el Espectro de Potencias	58
	4.3.3 La Función de correlación y El Espectro de Potencias	59
4	La Función de Masa de Press-Schechter ¹ y Jedamzik ¹	61
	4.4.1 Introducción	61
	4.4.2 Formalismo de Press-Schechter	61
	4.4.3 Formalismo de Jedamzik ²	66
5	Historias de Formación Galáctica	70
	4.5.1 Introducción	70
	4.5.2 Formalismo Gaussiano de Bower ³	70
	4.5.3 Historias de Formación: Estadística no Gaussiana	78
	4.5.3.1 Motivaciones	78
	4.5.3.2 Propiedades Estadísticas de la distribución Lognormal	78
	4.5.3.3 Análisis de la Probabilidad Condicional Lognormal	79
	4.5.4 Evolución Galáctica: Estadística Lognormal	80
	4.5.4.1 Campos de Densidad que obedecen a una estadística Lognormal	80
	4.5.5 Fórmula de Jedamzik-Firmani	85
5	Conclusiones	87
6	Gráficas	90
7	Apéndice	91
	1 Propiedades Estadística de la distribución Lognormal, cálculos completos	91
	2 Análisis de la Probabilidad Condicional Lognormal	95
	3 Cálculo de la Función \bar{F}	98
	4 Cálculo de la Función \bar{f}	99
8	Bibliografía	101
	1 Libros	101
	2 Artículos	101
	3 Notas de Cursos:	101

Introducción

La cosmología es la rama de la física que se ocupa del estudio de la evolución del universo.

La formación de estructura en el universo es, probablemente, una de las metas más ambiciosas e importantes que se propone explicar la cosmología moderna.

El objetivo de esta tesis es estudiar algunas de las características propias de las galaxias, desde la perspectiva cosmológica. En particular, se establecerá un modelo teórico para explicar dos propiedades observacionales importantes de las galaxias. Estas propiedades son, las **curvas de rotación planas** y los **núcleos de densidad constante** de una galaxia.

Las hipótesis físicas principales serán: la existencia de un campo de fluctuaciones primordiales de densidad, el cual, en última instancia, evolucionará hasta convertirse en alguna de las estructuras que se observan en el espacio en forma de galaxias, cúmulo de galaxias, etc. y segundo, la existencia de materia oscura no bariónica, como componente principal de estas fluctuaciones.

La tesis se divide en cinco capítulos, el primer capítulo es esta introducción, el segundo capítulo intenta resumir los conceptos básicos que se requieren para entender el modelo estandar e inflacionario.

En el tercer capítulo, se estudia el comportamiento evolutivo de las pequeñas inhomogeneidades de densidad, que surgen en el universo primitivo.

El cuarto capítulo, tema central de la tesis, se dedica al análisis evolutivo del campo de fluctuaciones primigenias.

Usando la física estadística como modelo, se trata de establecer una conexión entre el aparato teórico aplicado a las fluctuaciones y propiedades observadas en las galaxias.

Finalmente, en el último capítulo se exponen las gráficas, conclusiones, apéndices y bibliografía.

Capítulo 2

Antecedentes a la formación de Galaxias

2.1 Introducción

En este capítulo se plantearán algunos de los aspectos teóricos más importantes de la evolución del universo. La segunda sección se dedicará a explicar la cinemática y la dinámica del modelo estandar desde el punto de vista de la mecánica Newtoniana. En la tercera sección se resumirán los conceptos fundamentales de la relatividad general, y en las siguientes secciones se describirán las características principales del modelo estandar e inflacionario, destacando a este último por ser el generador de las fluctuaciones primigenias de densidad en el universo.

Establecidos los escenarios evolutivos del universo, se iniciará el análisis de los elementos básicos que conciernen en la evolución galáctica.

2.2 La Evolución Global del Universo: Modelo Estandar

2.2.1 Modelo Newtoniano

2.2.1.1 Cinemática de la Expansión

A grandes escalas el universo se puede visualizar como un gas de galaxias en expansión. La forma más sencilla de entender la física de la expansión es con el modelo cosmológico Newtoniano. Si bien, ésta aproximación da características fundamentales del fenómeno de la expansión, debe tenerse siempre en mente que se trata de una sobre simplificación del problema.

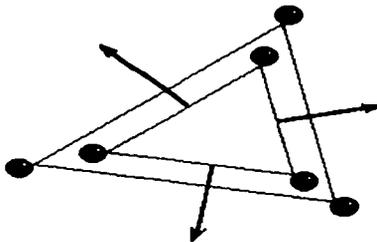
Considérese un volumen esférico de radio r , donde r , es mucho más grande que la distancia entre dos galaxias cercanas. r , será una función del tiempo, y determinará la posición de las galaxias en la superficie del volumen esférico en cuestión. Además fijémonos en una galaxia de masa m que yace en la superficie de dicha esfera.



Evidentemente, esta galaxia adquirirá una energía cinética debido a la expansión o contracción del volumen esférico. Si a grandes rasgos, la materia contenida en este volumen está homogéneamente distribuida y se supone que la expansión no tiene una dirección privilegiada (principio cosmológico), la expansión del sistema se describe con la siguiente expresión:

$$r(t) = r_0 \bar{a}(t), \quad (1)$$

donde r_0 es el radio de la esfera a un cierto tiempo arbitrario y \bar{a} es el factor de escala por el cual la esfera aumenta o disminuye su tamaño en el tiempo. Vemos entonces que debido a la homogeneidad e isotropía del universo el triángulo formado por las galaxias A, B y C al tiempo t_1 será similar al triángulo formado por estas mismas galaxias al tiempo t_2 , como se muestra en la siguiente figura:



El cambio del radio de la esfera respecto al tiempo estará determinado por:

$$v \equiv \frac{dr}{dt} = r_0 \frac{d\bar{a}}{dt}. \quad (2)$$

Ésta fórmula también representa la velocidad de alejamiento entre dos galaxias cualesquiera. A la relación anterior se le puede expresar de manera que el término arbitrario r_0 no aparezca y toda la información de la expansión resida en el factor de escala \bar{a} . Dividiendo v por r se obtiene:

$$v = \left(\frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{dt} \right) r. \quad (3)$$

El parámetro de expansión \bar{a} se puede normalizar a uno de tal manera que el factor $\left(\frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{dt} \right)$ lo igualemos a algún valor dado por la observación:

$$\bar{a}(t_0) \equiv 1,$$

$$H_0 = H(t_0) = \left(\frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{dt} \right)_{t=t_0} = 100h \frac{km/s}{Mpc}, \quad (4)$$

donde $h \in [1, 0.5]$.

H_0 se identifica como la Constante de Hubble que aparece en la ley empírica de recesión de galaxias. Se encuentra así, que la ley empírica de Hubble tiene su origen físico en la homogeneidad de la distribución de galaxias, en la isotropía del espacio y en su expansión. Y no solo eso, además, se ha añadido un elemento extra, la expansión del universo puede variar con el tiempo, lo cual se traduce en una "constante" de Hubble que depende del tiempo:

$$\boxed{v = H(t) r}. \quad (5)$$

2.2.1.2 Dinámica de la Expansión

El siguiente paso en este formalismo Newtoniano es el de encontrar como cambia en el tiempo el parámetro de Hubble.

Se usará la conservación de la energía total del sistema como argumento físico para encontrar la soluciones.

La energía cinética de una galaxia situada en la superficie de la esfera considerada será:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \quad (6)$$

por lo tanto, sustituyendo la ecuación(2) en la ecuación anterior, la energía cinética para una galaxia en un medio en expansión (no relativista) sería:

$$T = \frac{1}{2} m r_0 \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \right)^2. \quad (7)$$

Por otro lado la masa del sistema, se puede considerar separada en dos partes: la masa interior de la esfera y la masa de la superficie. La masa total proporcionará la fuerza de atracción gravitacional que siente la galaxia. Debido a la ley de Gauss, las masas externas a este volumen no contribuyen a la fuerza que siente la galaxia. La energía potencial del sistema en la superficie de la esfera será:

$$\mathcal{V} = -\frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{r_0\bar{a}}. \quad (8)$$

Escribiendo la masa M en términos de la densidad masa-energía promedio $\bar{\rho}$, de la materia del universo, ésta se expresa como:

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3} = \frac{4\pi\rho_0^3\bar{a}^3}{3}. \quad (9)$$

Lo cual da la energía potencial debida a un sistema en expansión de masa M sobre la galaxia:

$$\mathcal{V} = -\frac{4\pi r_0^2 Gm}{3\bar{a}} \bar{\rho} \bar{a}^3, \quad (10)$$

donde el factor de expansión \bar{a} y la densidad promedio $\bar{\rho}$ son funciones del tiempo. Con la ecuación(7) y la ecuación(10), se tienen los elementos necesarios para obtener resultados de la conservación de la energía, la energía total del sistema será:

$$E = T + \mathcal{V} = \frac{1}{2}mrv_0^2 \left(\frac{d\bar{a}}{dt}\right)^2 - \frac{4\pi r_0^2 Gm}{3\bar{a}} \bar{\rho} \bar{a}^3. \quad (11)$$

Ya que la energía se conserva, el contenido energético total de la galaxia no cambiará en el transcurso de la expansión. En general los valores de esta energía se pueden clasificar según el comportamiento global del sistema en tres tipos:

- a) $E > 0$,
- b) $E = 0$,
- c) $E < 0$.

En el caso a) se tiene que la energía cinética domina frente a la energía potencial, esto se traducirá en una expansión infinita en el tiempo, la energía potencial nunca logrará contrarrestar a la energía cinética. En el caso b) se observa el equilibrio justo entre energía cinética y potencial, la dinámica de este tipo de expansión será en tal forma que al infinito la energía potencial del sistema logrará contrarrestar a la energía cinética inicial de expansión. En el caso c) se tiene que la energía potencial domina frente a la energía cinética, lo cual indica que en cierto momento, toda la energía cinética inicial de la expansión se convertirá en energía potencial y el sistema completo, frenará su movimiento expansivo, para luego caer en un régimen de contracción cada vez más y más violento.

Hasta aquí estaría completamente justificado el modelo cosmológico Newtoniano, sin embargo, con el afán de entender mejor los resultados posteriores, se asignará un valor para la energía total, de esta manera se obtendrá una de las fórmulas encontradas por la cosmología relativista.

Se impone entonces, que la energía total sea función de un parámetro independiente del tiempo k :

$$E = -\frac{1}{2}mrv_0^2 c^2 k, \quad (12)$$

donde k puede tomar los valores:

$$k = 1, 0, -1 \quad (13)$$

A este término k se le conoce como el *parámetro de curvatura*. Juntando estos elementos, la conservación de la energía provee la ecuación:

$$\left(\frac{1}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} - \frac{kc^2}{\bar{a}^2}, \quad (14)$$

llamada la ecuación de Friedmann, que como se verá, también se encuentra a partir de argumentos de homogeneidad e isotropía bajo el formalismo de la relatividad general. Otra forma de escribir la ecuación anterior, es usando la definición del parámetro de Hubble:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} - \frac{c^2 k}{\bar{a}^2}. \quad (15)$$

En la estructura de esta ecuación, se distinguen básicamente tres elementos, la tasa de expansión vía H , la densidad promedio del volumen en consideración (en este caso el volumen del universo), vía $\bar{\rho}$ y el parámetro de curvatura k .

En las siguientes subsecciones se verán algunas soluciones a esta ecuación. Por el momento baste con recalcar que la física que llevo a esta fórmula, propia del formalismo Newtoniano, fue la conservación de la energía.

2.3 Resumen de Relatividad General

2.3.1 El Principio de Equivalencia

Las primeras evidencias experimentales sobre la naturaleza de la interacción gravitacional sugerían que la relación existente entre la distribución de materia en una región y su campo gravitacional asociado estaba dado por:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (16)$$

donde Φ es el potencial gravitacional y ρ es la densidad de masa. Esta relación sin embargo tiene varias carencias, por ejemplo, suponiendo que tanto Φ como ρ son cantidades escalares esta ecuación no es invariante ante transformaciones de Lorentz. Si ahora se corrigiera ese error proponiendo una ecuación D'Alambertiana, al final, se concluiría que tampoco ésto soluciona el problema, ya que según la definición de densidad de masa:

$$\rho = \frac{M}{V},$$

y según la relatividad especial, estas cantidades, la masa y el volumen, se transforman como:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \gamma M, \\ \bar{V} &= \frac{V}{\gamma}, \end{aligned}$$

con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$, razón por la cual la densidad de masa tiene una ley de transformación:

$$\bar{\rho} = \gamma^2 \rho.$$

Evidentemente γ^2 no puede aparecer en la transformación Lorentziana de una cantidad escalar o vectorial. Los objetos geométricos en los que aparece la cantidad γ^2 ante una transformación de Lorentz son tensores de segundo rango.

Este tipo de resultados, indican que el concepto de masa y campo gravitacional, deben ser revisados con mayor cuidado.

Considérese el contenedor de un gas. Podemos asignarle tres formas operacionales de masa, estas son:

- o Masa Inercial $\rightarrow M_I$,
- o Masa Gravitacional Pasiva $\rightarrow M_P$,
- o Masa Gravitacional Activa $\rightarrow M_A$.

o La *masa inercial*, es aquella que determina cuanto un cuerpo se resiste al cambio de movimiento, esta masa, es la masa-energía contenida en el objeto, es decir, en el ejemplo del contenedor se contabilizan las contribuciones de la energía cinética debida a la agitación térmica del gas.

o La *masa gravitacional pasiva*, es la que determina cuanto va a jalar el campo gravitacional al objeto en consideración. Esta es la cantidad de carga gravitacional que tiene un cuerpo al ser sometido a la interacción con un campo gravitacional.

o La *masa gravitacional activa*, es la propiedad del objeto que genera el campo gravitacional.

Con estos elementos básicos se construye la relatividad general. El principio fundamental del cual se desprenderá toda la teoría es el llamado **Principio de Equivalencia**, este afirma que el valor numérico de las tres definiciones operacionales de masa, para un mismo objeto sometido a un campo gravitacional, es el mismo e independientemente de su forma y de su composición química:

$$M_I = M_P = M_A.$$

La consecuencia más dramática de este principio es que no solo la materia sino que también la energía, E , es generadora de campo gravitacional. Esto trae consigo el siguiente dilema:

Para conocer:	→	Requerimos conocer:
Φ	→	ρ
E	→	Φ
ρ	→	E

requerimos conocer la densidad de materia-energía ρ para calcular el campo gravitacional Φ , requerimos conocer Φ para conocer la energía gravitacional E , pero resulta que para conocer ρ , también requerimos conocer E .

Esto lleva a un círculo vicioso, que pone de manifiesto la naturaleza no lineal del fenómeno gravitacional. Dicho de otra forma, la consecuencia de estas propiedades es que el campo gravitacional es a su vez generador de campo gravitacional.

Afortunadamente, esta "enfermedad", es en sí la vacuna, ya que la segunda consecuencia fundamental del principio de equivalencia, proporciona la clave para solucionar el problema.

La segunda consecuencia directa del Principio de Equivalencia, es que, permite simular una región del espacio en la que se manifiesta un campo gravitacional usando sistemas de referencia no inerciales. Lo anterior se sigue de la ley de gravitación universal, la segunda ley de Newton y el principio de equivalencia:

$$\vec{F} = M_p \vec{g},$$

y

$$\vec{F} = M_I \vec{a},$$

por lo que:

$$M_p \vec{g} = M_I \vec{a}.$$

Aplicando el principio de equivalencia se sigue que:

$$\vec{g} = \vec{a},$$

lo cual indica que dada la dinámica gravitacional (miembro izquierdo), la cinemática será siempre la misma (miembro derecho), sin importar cual sea la masa inercial o gravitacional del cuerpo. Si la trayectoria de una partícula, abandonada a la acción de un campo gravitacional es la misma, independientemente de cual sea su masa, las dos formulaciones siguientes son equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Marco de referencia inercial + partícula actuada por fuerzas} \\ \circ \text{ Marco de referencia no inercial + partícula libre} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Trayectoria del} \\ \text{ punto A al B} \end{array} \right\}$$

Imaginemos a un observador, aislado de sus alrededores, y abandonado a caer libremente en un campo gravitacional ¿Puede éste determinar su estado de movimiento tan solo por experimentos mecánicos o electromagnéticos realizados en su entorno?

La respuesta en general es que sí, por ejemplo, si el entorno del observador es lo suficientemente grande, notará que las partículas que él deja libres, empiezan a aproximarse o alejarse unas de otras. Un observador externo podrá distinguir que ese efecto, se debe a las fuerzas de marea, es decir, a que el campo gravitacional es inhomogéneo.

Sin embargo, en un entorno lo suficientemente pequeño como para que no se distingan las fuerzas de marea, es decir, que el campo sea localmente homogéneo, el campo gravitacional afectará a todos por igual, los resultados de los experimentos en el entorno del observador serán independientes del estado de caída libre de su sistema de referencia. Nótese que si la física es la misma (localmente), para todos los sistemas de referencia en caída libre, quiere decir que podemos comparar resultados experimentales entre sistemas de referencia cuyas velocidades y aceleraciones relativas son muy distintas entre sí. En este sentido, el principio de equivalencia es una extensión del principio de relatividad especial, solo que hemos cambiado sistemas de referencia inerciales cuya descripción es global por sistemas de referencia acelerados cuya descripción es local.

Cuando se habla de sistemas de referencia, que en general, pueden estar acelerados unos respecto de otros, evidentemente las transformaciones lineales de la sección anterior dejan de tener validez, así que es conveniente introducir una notación adecuada para describir esta situación.

Se mapea el espacio tiempo con las cuatro coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) , otro observador mapeará: $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$. La ley que vincula ambos mapeos es:

$$d\bar{x}^\alpha = L_\beta^\alpha dx^\beta,$$

donde L_β^α consta de los llamados elementos de la matriz Jacobiana:

$$L_\beta^\alpha = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Por otro lado el tensor métrico de Minkowski ya no será invariante ante estas transformaciones, por lo que es reemplazado por un tensor que satisfaga esta nueva ley de transformación propia de sistemas de referencia no inerciales:

$$\|\eta_{\alpha\beta}\| \rightarrow \|g_{\alpha\beta}\|.$$

Así, el elemento de línea invariante ante transformaciones de coordenadas generales será:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

La ecuación que describe a los sistemas de referencia locales en caída libre es la **Ecuación Geodésica**. La interpretación de esta ecuación es como sigue: si nos encontramos en un sistema de referencia S localmente inercial (puede estar en caída libre o no), el movimiento del otro sistema de referencia \bar{S} local estará gobernado por las siguientes leyes:

desde S :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

desde \bar{S} :

$$\frac{d^2 \bar{x}^\alpha}{ds^2} = 0$$

El símbolo $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ se conoce como el símbolo de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right),$$

este objeto geométrico no satisface las leyes de transformación de un tensor, sin embargo es de gran importancia ya que, según S , una partícula libre en el sistema de referencia \bar{S} seguirá una trayectoria en principio distinta de la línea recta. En resumen se ha conectado:

localidades del campo gravitacional \implies sistemas de referencia no inerciales locales

A continuación analizaremos que ocurre en el caso global.

2.3.2 La Curvatura del Espacio-Tiempo

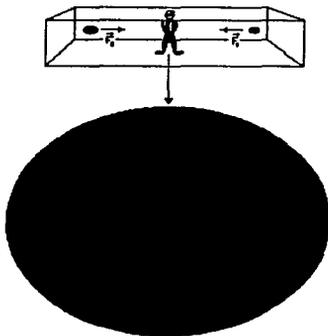
La pregunta sin contestar en la sección anterior fue ¿Existe, en general, algún sistema de referencia no inercial global que simule, idénticamente, al campo gravitacional generado por una masa?. La respuesta es no, solo se puede simular parcialmente al campo gravitacional por medio de sistemas de referencia no inerciales. La consecuencia directa es, que en general, no existe una transformación de coordenadas global que permita anular los efectos del campo gravitacional.

Un ejemplo simple, es el campo gravitacional generado por la tierra, supóngase que tenemos tres observadores ubicados en tres lugares distintos de la tierra, digamos uno en el polo norte y los otros dos en puntos distintos y alejados del ecuador. Debido al principio de equivalencia, los tres podrán simular en una región pequeña, (lo suficientemente pequeña para que las fuerzas de marea no se perciban), al campo gravitacional que los afecta, mediante sistemas de referencia no inerciales que se aceleraran en dirección radial, acelerados a $9.81 \frac{m}{s^2}$, sin embargo lo que no podrán lograr es proponer un sistema de referencia no inercial que además de servirles a ellos, les sirva a sus otros dos compañeros.

Entonces, básicamente el problema es que se requiere de una variedad de sistemas de referencias no inerciales, cada uno con distinta velocidad y aceleración, simulando así, tan solo una pequeña localidad del campo gravitacional real.

Pensando en estos términos, lo que se necesita es un *pegamento* que úna a toda esta variedad de sistemas de referencia no inerciales.

La clave que indica donde puede encontrarse este pegamento, lo dan las llamadas fuerzas de marea.



Debido a las fuerzas de marea, un individuo en un satélite suficientemente grande, puede saber que no se encuentra en un sistema de referencia no inercial, al observar que las partículas a su alrededor están actuadas por fuerzas propias de un campo gravitacional real e imposibles para un

sistema de referencia no inercial.

Las fuerzas de marea, como se dijo, se deben a las inhomogeneidades del campo gravitacional:

$$\Delta F \equiv F_2 - F_1.$$

El efecto cinemático de éstas fuerzas será una aceleración relativa entre las partículas ubicadas en 1 y 2:

$$\Delta F \rightarrow a_{rel}.$$

Entonces regresando a la descripción geométrica de las geodésicas, es posible encontrar la aceleración relativa entre dos geodésicas, (es decir, entre dos sistemas de referencia no inerciales), usando la llamada derivada covariante:

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \frac{DA^\mu}{ds} \hat{e}_\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu A^\sigma \right) dx^\nu \hat{e}_\mu,$$

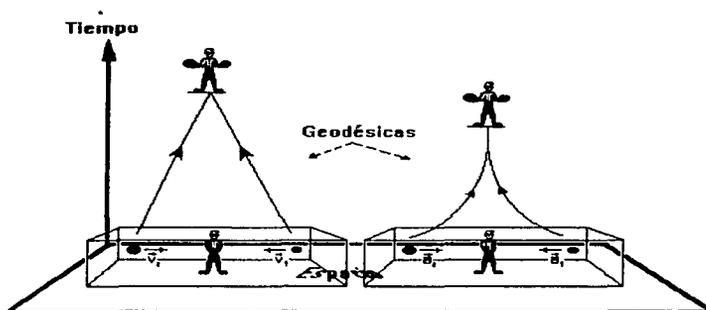
donde:

$$A^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu A^\sigma$$

y el resultado aplicado a la aceleración relativa entre geodésicas, el resultado es:

$$a_{rel}^\mu = R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} U^\alpha U^\beta \xi^\nu,$$

donde la \vec{U} y la $\vec{\xi}$ representan la velocidad de cada geodésica y la separación entre éstas, respectivamente. La constante de proporcionalidad $\|R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}\|$ se conoce como el tensor de Riemann.



En la figura anterior se representa un diagrama de espacio tiempo. Claramente el observador de la derecha puede deducir que no se encuentra en un campo gravitacional. Según la fórmula anterior, encontrará que el tensor de Riemann:

$$\|R_{\alpha\nu\beta}^{\mu}\| = 0.$$

Mientras que el observador de la izquierda podrá reconocer de inmediato la aceleración de las partículas y por lo tanto, concluirá que se encuentra en un campo gravitacional real. En este caso la implicación será que:

$$\|R_{\alpha\nu\beta}^{\mu}\| \neq 0.$$

garantizando así que la aceleración relativa, sea distinta de cero.

La consecuencia final de estas consideraciones, se encuentra cuando se comparan éstos resultados con la **geometría de espacios topológicos**. Ahí se observa que, los espacios tiempos *construidos* con sistemas de referencia no inerciales, solo pueden lograrse, *pegando*, a cada sistema de referencia no inercial, en una estructura con topología distinta de la euclídea.

La conclusión final: el espacio-tiempo se deforma en presencia de un cuerpo masivo.

2.3.3 Las Ecuaciones de Campo de Einstein

En las subsecciones anteriores se concluyeron básicamente tres cosas, la primera es que la forma en que las cantidades de masa y energía se transforman en el contexto gravitacional, indican que la densidad de masa-energía, es la componente de un tensor de orden dos:

$$\|T^{\alpha\beta}\|.$$

Otro concepto importante es que, debido a que tanto la materia como la energía son generadores de interacción gravitacional, la interacción gravitacional no puede ser entendida como un potencial relacionado directamente con la energía, ya que eso imposibilita la descripción del fenómeno gravitacional en términos de causas y efectos.

Por otro lado se hizo notar que espacio-tiempos curvos, explican la atracción entre cuerpos, a partir de puros conceptos cinemáticos, es decir sin invocar a conceptos de energía.

Entonces reuniendo toda la información de la energía y el momento en un solo tensor de orden dos, obtenemos:

$$\|T^{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{array}{c|ccc} \boxed{T^{00}} & & & \\ \hline & T^{0i} & & \\ & \vdots & \dots & -T^{1j} \\ & T^{i0} & \searrow T^{ij} & \vdots \\ & & T^{j2} & \dots & \ddots \end{array} \right\|.$$

donde cada componente representa:

- o T^{00} : Densidad de Energía.
- o cT^{0i} : Flujo de Energía por unidad de área Paralela a la Dirección i .
- o T^{ii} : Flujo por unidad de área de la componente i -ésima del Momento en la dirección i .
- o T^{ij} : Flujo por unidad de área de la i -ésima componente del Momento en la dirección j .

o cT^{ij} : Densidad de la i -ésima componente del Momento.

Einstein afirmó que este tensor, debe ser la fuente del campo gravitacional. Ya que el campo gravitacional esta representado por medio del tensor de Riemann y el tensor de Riemann es de orden cuatro, se debe hacer alguna operacion sobre $R_{\alpha\beta}^{\mu}$ de manera que se obtenga un tensor de segundo orden.

Para igualar cantidades, define el siguiente tensor de orden dos, que contiene toda la información del tensor de Riemann:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}R,$$

donde $R_{\alpha\beta} \equiv g^{\mu\nu}R_{\alpha\nu\beta}^{\mu}$ se define como el tensor de Ricci y $R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ se define como el escalar de curvatura. Adicionalmente añade un término extra, llamado "la constante cosmológica":

$$g_{\alpha\beta}\Lambda.$$

Juntando los términos anteriores, afirma que las ecuaciones que gobiernan la evolución del campo gravitacional son:

$$G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (17)$$

donde la constante de proporcionalidad se encuentra fácilmente al analizar el límite Newtoniano del campo gravitacional.

Una propiedad importante de estas ecuaciones es que:

$$(G^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\Lambda)_{;\beta} = 0,$$

lo cual indica que la divergencia covariante de $T^{\alpha\beta}$ es:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0.$$

Esta última ecuación, resulta en leyes de balance entre las componentes del tensor.

A continuación veremos la aplicación de esta formulación a la evolución del universo.

2.3.4 La Métrica de Robertson-Walker

A partir de las observaciones de homogeneidad e isotropía en las cuales se fundamenta el análisis de la evolución del universo, es que se formula el llamado **Principio Cosmológico**, el cual establece que: *el universo a un cierto tiempo y a escalas mayores que la separación entre cúmulos de galaxias es y ha sido tal que:*

I) desde cualquier galaxia el universo se observa similar a como lo observamos desde nuestra galaxia, y

II) las direcciones espaciales son todas equivalentes no importa desde que galaxia observemos.

Para modelar al universo con la relatividad general conviene visualizar al universo como si se tratara de un fluido ideal que llena todo el espacio, el movimiento promedio de cada galaxia será representado por el movimiento de una partícula de dicho *fluido cósmico*.

La característica principal del fluido será que satisfaga el principio cosmológico. El objetivo de esta subsección es la de deducir la métrica que representará a nuestro universo.

Lo primero que se aclarará es lo que se entiende en el Principio Cosmológico por: "*el universo a un cierto tiempo*", esta frase podría parecer estar en contradicción con la desincronización de relojes que prevee la relatividad general en regiones expuestas a la presencia de objetos masivos. Sin embargo bajo la suposición de homogeneidad e isotropía es posible .

Se procede como sigue, imagínese que se asigna un reloj a cada región del fluido cósmico que representa al espacio. Las marchas de los relojes, no necesariamente coinciden. Imagínese también que se tiene la capacidad de medir la temperatura y la densidad en diferentes regiones de este fluido: (T, ρ) . Es posible entonces pensar, que cada región del espacio tendrá en algún momento de su existencia los valores (T_1, ρ_1) , evidentemente cada región alcanzará estos valores a distintos tiempos respecto de nuestro reloj, sin embargo, por construcción, se obliga a que la marcha del reloj propio de cada región, sea tal, que en ese instante marque el tiempo t_1 . Siguiendo con este método cuando las distintas regiones tengan los valores (T_2, ρ_2) , cada reloj deberá marcar el tiempo t_2 , en resumen:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{regiones} & \longrightarrow & \text{tiempo} \\
 \text{del fluido} & & \text{cósmico} \\
 (T_1, \rho_1) & \longrightarrow & t_1 \\
 (T_2, \rho_2) & \longrightarrow & t_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 (T_n, \rho_n) & \longrightarrow & t_n
 \end{array} \quad (18)$$

De esta manera, a partir de ciertas propiedades locales del universo, se han sincronizado los relojes y por lo tanto, el estado físico del universo dependerá del mismo tiempo en todos lados. A este tiempo se le conoce como el **tiempo cósmico**.

Reagrupando todos los elementos mencionados anteriormente, tenemos:

o Un fluido tridimensional en el cual el movimiento de sus partículas representa el movimiento de las galaxias.

o Una reetiquetación del tiempo en términos de un par de parámetros físico $(T, \rho) \rightarrow t$.

o La descripción del fluido se hará siguiendo a las galaxias que tengan el mismo valor de t .

Con estos tres puntos podemos ahora construir un escenario cuatridimensional en el cual desarrollar una teoría cosmológica relativista, sustituiremos los tres elementos anteriores por uno equivalente.

Supondremos ahora que la descripción del universo y su evolución se pueden representar por medio de un **cuadri-fluido** en el cual una rebanada a un cierto t representara al universo a ese tiempo cósmico. El medio es el que se expande y por lo tanto las galaxias trazan la expansión de este medio, sin embargo las galaxias se encuentran en todo momento en reposo respecto del medio.

Ya que cada rebanada del fluido se caracteriza por tener un mismo valor del tiempo, el elemento de línea de este cuadri-fluido será tal que su tensor métrico cumple una relación del tipo:

$$ds^2 = (cdt)^2 - \alpha_{ij} dx^i dx^j,$$

la forma del tensor $\|\alpha_{ij}\|$ será, en su forma más sencilla:

$$\alpha_{ij} = a(t) \delta_{ij}.$$

Esta es la **Métrica de Robertson-Walker**. $a(t)$ representa el factor de escala. La razón de esta fórmula se desprende del principio cosmológico, ya que, una α_{ij} con esta forma, mantiene

las propiedades de homogeneidad e isotropía, a cada tiempo cósmico t . Además se garantiza que cualquier otro observador, podrá medir eventos en el espacio tiempo, según:

$$ds^2 = (cd\bar{t})^2 - \bar{\alpha}_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j.$$

En coordenadas esféricas, la métrica de Robertson-Walker se escribe:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right\},$$

donde (t, r, θ, ϕ) son las **coordenadas comóviles**, y k es el parámetro de curvatura que estará encargado de escalar las coordenadas, para un espacio de curvatura positiva negativa o cero. El valor de $k = 1, -1, 0$ respectivamente.

La propiedad comóvil viene de que, para cualquier observador cuyo movimiento sea nulo respecto de las coordenadas comóviles, cumplirá que:

$$ds^2 = c^2 dt^2,$$

lo que significa que la línea de mundo, de la partícula, se encuentra en caída libre en el fluido cósmico.

Ahora bien, del principio de equivalencia se sabe que los sistemas de referencia en caída libre, observan las mismas leyes que los sistemas de referencia inerciales, solo que localmente. Por lo tanto, un sistema comóvil, es un sistema inercial local; sin embargo, tiene la peculiaridad de ser el único en el cual, la radiación de fondo se observa isótropa. Esto significa que el **sistema de referencia comóvil es un sistema preferente** en el universo. Esta afirmación no se encuentra en contraposición con los preceptos de la relatividad general, ya que afirma que la radiación de fondo, se ve isótropa en localidades con distintas velocidades y aceleraciones, que se relacionan según la métrica de Robertson-Walker.

En cuanto al principio de Mach, los efectos inerciales producidos por la distribución de materia en el universo, se explica, notando que las galaxias lejanas, trazan un sistema de referencia, que es precisamente el sistema comóvil.

2.3.5 El Tensor Energía-Momento

En la subsección anterior, se dedujo la forma aproximada de la métrica del espacio-tiempo promedio en el universo, conviene ahora dar la distribución de materia-energía que se espera haya en el universo.

Como se vio en la subsección de las ecuaciones de campo, la información respecto al generador del campo gravitacional se encuentra en el tensor de energía momento, por lo tanto, si en primera aproximación el tensor de energía-momento de un fluido perfecto es usado para modelar el contenido de materia y energía del universo, este tensor tendrá la estructura:

$$\|T^{ij}\| = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix}, \quad (19)$$

o en general:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) v_\alpha v_\beta - p g_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

con ρ la densidad de materia-energía, p la presión generada por la materia y energía en el sistema de referencia localmente plano y v_α la velocidad del fluido. La velocidad \vec{v} en un sistema de referencia comóvil tiene componentes $\vec{v} = (c, 0, 0, 0)$.

Usando el hecho de que:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

se encuentra que :

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3). \quad (21)$$

Adicionalmente se dará una relación constitutiva entre ρ y p , esta será en general:

$$p = \epsilon \rho, \quad (22)$$

que sustituida en la ecuación (21), resulta:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\frac{\epsilon}{p})}, \quad (23)$$

donde por simplicidad se ha supuesto que ϵ es independiente del tiempo. Los valores de ϵ determinarán, el tipo de densidad materia-energía, que gobierna la evolución del universo. Los casos más importantes son:

$$\begin{aligned} \epsilon = -c^2 &\Rightarrow \text{Vacío,} \\ \epsilon = \frac{c^2}{3} &\Rightarrow \text{Radiación,} \\ \epsilon = 0 &\Rightarrow \text{Materia.} \end{aligned} \quad (24)$$

Con esta información es suficiente para el desarrollar el modelo estandar desde la perspectiva relativista.

2.4 Modelo Estandar

Para estudiar al universo a gran escala, conviene realizar algunas suposiciones, se considerará que en primera aproximación, las irregularidades locales como polvo, planetas y estrellas no contribuyen a la curvatura global del universo.

Calculando las componentes de $g_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ y $T_{\alpha\beta}$, e igualándolas según la ecuación (17), se encuentra que las ecuaciones de campo son:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3}, \quad (25)$$

y

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{c^2\Lambda}{3}. \quad (26)$$

En donde a la segunda ecuación no es independiente de la primera y en conjunto, proporcionan la dinámica de los modelos de universo cuya densidad y presión de materia y radiación son ρ y p . En general $\rho = \rho(\rho_{materia}, \rho_{radiación}, \rho_{vacío})$, la primera hipótesis que se realiza aquí es que:

$$\rho = \rho_{materia} + \rho_{radiación} + \rho_{vacío}$$

Ahora bien, por simplicidad, se puede dividir a la evolución del universo, en tres etapas, estas son:

I) cuando la densidad que domina en el universo es la de la materia, esto será en las épocas más recientes. Cuando $\rho_{materia} \sim 1/a^3$ domine.

II) Cuando la densidad predominante sea la de la radiación, es decir cuando $\rho_{radiación} \sim 1/a^4$ domine.

III) Cuando la constante cosmológica domine y por lo tanto $\rho_{vacío} = constante$ sea el termino líder.

A continuación un resumen de cada uno de estos dominios.

2.4.1 Dominio de la Materia

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de movimiento de un fluido perfecto. Sin embargo si se piensa que cada partícula del fluido no interacciona mucho con sus vecinos, la presión no será tan importante, $p = 0$, ésta es la ecuación de estado.

Éste es el caso reciente de la evolución del universo, en el que los grandes cúmulos de galaxias representan las partículas del fluido, y efectivamente su interacción es despreciable.

A este modelo libre de presión se le conoce como modelo de polvo.

En este caso las ecuaciones de evolución se reducen a:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{c^2\Lambda}{3}, \quad (27)$$

y ya que se esta describiendo el **Dominio de la Materia**, la densidad, la podemos expresar más convenientemente por la densidad de materia, presente al día de hoy: ρ_0 . Según las ecuaciones (23 y 24) se tendrá que $\rho = \rho_0 a^{-3}$. Adicionalmente se puede suponer que en estas etapas del desarrollo, la constante cosmológica no desempeña un papel preponderante, $\Lambda = 0$, así que la ecuación anterior se expresa, más convenientemente, como:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3a}\rho_0 - kc^2. \quad (28)$$

Las soluciones de esta ecuación dependen, de dos valores, la densidad de materia, ρ_0 y el parámetro de curvatura k . Como se verá a continuación, estas cantidades están relacionadas de tal manera, que tan solo la densidad de materia existente en el universo determinará su evolución.

La ecuación (28), evaluada al día de hoy, $t = t_0$, $a = 1$ y $H = H_0$, implica que:

$$k = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 - \frac{H_0^2}{c^2}. \quad (29)$$

Lo cual indica que se tiene un valor crítico de $k = 0$ si la densidad actual del universo es:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (30)$$

A esta densidad se le conoce con el nombre de **Densidad Crítica**.
Se introduce el **Parámetro de Densidad de Materia**:

$$\Omega_M \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c}. \quad (31)$$

Se introduce también, el **Parámetro de Densidad del Vacío**:

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_{\text{vacío}}}{\rho_c}, \quad (32)$$

donde la **Densidad del Vacío** se define como:

$$\rho_{\text{vacío}} \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (33)$$

Con esta notación la ecuación (29) se escribe incluyendo la constante cosmológica como:

$$k = \frac{H_0^2 (\Omega - 1)}{c^2}, \quad (34)$$

que muestra de inmediato, que el valor crítico se da cuando $\Omega = 1$ al tiempo $t = t_0$.

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación (27) la ecuación de Friedmann se expresa como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_M H_0^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Definiendo a:

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda,$$

la ecuación de evolución quedará expresada como:

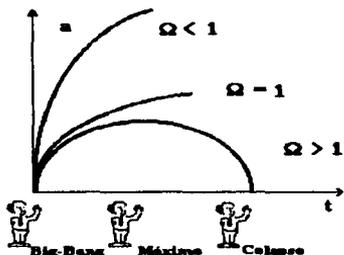
$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega}{a} - (\Omega - 1) \right], \quad (35)$$

en donde se ha sustituido la ecuación (34).

Las soluciones para esta ecuación son, en términos del tiempo:

$$t = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{\max}}{c} \left[\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{a}{a_{\max}}} - \sqrt{\frac{a}{a_{\max}}} \left(1 - \frac{a}{a_{\max}} \right) \right] \Leftrightarrow \Omega < 1 \\ \frac{2a_{\max}}{3c} \left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \Omega = 1 \\ \frac{a_{\max}}{c} \left[\sqrt{\frac{a}{a_{\max}}} \left(1 + \frac{a}{a_{\max}} \right) - \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{\frac{a}{a_{\max}}} \right] \Leftrightarrow \Omega > 1 \end{array} \right\} \quad (36)$$

Que en una gráfica se ven:



Cada una de las soluciones representa un modelo de evolución distinto, el cual dependerá de el valor de $\rho_{vacío}$ y $\rho_{materia}$. El primer modelo, tiene una geometría abierta hiperbólica, su expansión es infinita en el tiempo. El segundo modelo, es el modelo crítico, corresponde a una geometría plana y es punto inestable entre un modelo cerrado o abierto, en este modelo el valor de expansión tiende a cero en el infinito, también se le conoce como el modelo de Einstein de Sitter.

El tercer modelo, tiene geometría esférica cerrada y tiene un tiempo de colapso finito.

2.4.2 Dominio de la Radiación

En contraposición a los modelos de la materia, el dominio de la radiación se caracteriza por tener presiones representativas en la evolución. En este caso la ecuación constitutiva del fluido será: $p = \frac{1}{3}\rho$, que se obtiene de considerar partículas relativistas.

La densidad de radiación, se relaciona con la densidad de energía por: $\varepsilon = \rho c^2$. Si $N(h\nu)$ es la densidad numérica de fotones de frecuencia ν , la densidad de energía de la radiación es:

$$\varepsilon = \sum_{\nu} h\nu N(h\nu)$$

ahora el número de fotones varia con el la expansión como:

$$N = \frac{N_0}{a^3}$$

Por otro lado la energía de cada fotón cambia con la expansión, debido al cambio en su longitud de onda como:

$$\nu = \frac{v_0}{a}$$

En conclusión, el cambio de la densidad de energía respecto de la expansión del universo va como:

$$\rho = \frac{1}{c^2} \sum_{\nu_o} h\nu_o N_o (h\nu_o) \cdot \frac{1}{a^4}$$

o bien:

$$\rho = \frac{\epsilon_o}{c^2} \frac{1}{a^4}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Friedmann originales, se obtiene que la evolución del universo queda descrita por las ecuaciones:

$$\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\epsilon_o}{a^3}$$

y

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\epsilon_o}{a^2} - c^2 k$$

Resolviendo estas ecuaciones se encuentra que el factor de expansión evoluciona como:

$$a = \left(\frac{32\pi G \epsilon_o}{3c^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, el modelo de radiación dominante indica que la evolución del universo es simplemente proporcional a $t^{1/2}$.

2.4.3 Dificultades del modelo estandar

El modelo estandar, logra dar explicación a tres características de nuestro universo, la recesión isotrópica de galaxias, la temperatura de la radiación de fondo y las abundancias de elementos ligeros, basándose únicamente en el principio cosmológico.

Sin embargo, el modelo estandar sufre de algunas dificultades, parte de ellas son de carácter predictivo y otras más bien filosófico.

Entre las dificultades predictivas están:

- I) El modelo predice un universo que no es plano, en contradicción con las observaciones.
- II) predice una abundancia de monopolos magnéticos, que no se observan.

Entre las dificultades conceptuales están:

- III) No explica porqué la radiación de fondo proveniente de regiones opuestas del universo tienen la misma temperatura.
- IV) No puede dar explicación a la generación de fluctuaciones primordiales en el universo.

2.4.4 Modelos inflacionarios

En el intento de resolver este tipo de dificultades es que surge el modelo inflacionario. En este modelo se combinan elementos de la teoría de partículas elementales y los modelos del universo con constante cosmológica.

La idea principal es que en los procesos cuánticos, el vacío no es un ente inerte en lo absoluto, sino que goza de una estructura bien definida. En general se entiende al vacío como el estado de mínima energía del espacio tiempo en conjunción con sus campos residentes.

La dinámica de estos modelos se explica sencillamente con el modelo de de Sitter, de Sitter estudia la evolución de un universo cuyo contenido material es nulo:

$$\|T_{\alpha\beta}\| = 0 \quad (37)$$

y que la única contribución a la evolución del universo se da por la constante cosmológica. En este caso la ecuación de Friedmann se escribe como:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [c^2 \rho_{\text{vacío}} + 3p_{\text{vacío}}] a \quad (38)$$

donde $\rho_{\text{vacío}}$ se define en la ecuación (33) y la **Presión del Vacío** se define como:

$$p_{\text{vacío}} \equiv -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (39)$$

y es aquí donde entran las consideraciones de la teoría de partículas elementales. De la dinámica de estas, se requiere encontrar la ecuación constitutiva entre la densidad y la presión del vacío. Dependiendo del campo cuántico que se investigue, la relación entre estas dos cantidades dependerá del tiempo. La forma más simple es:

$$p_{\text{vacío}} = -c^2 \rho_{\text{vacío}} \quad (40)$$

En este caso la solución a la ecuación (38) será :

$$a(t) = A \exp \left[\frac{t}{\tau} \right],$$

donde τ se le conoce como la constante del tiempo de expansión y vale:

$$\tau = \left(\frac{3}{8\pi G \rho_{\text{vacío}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por eso la evolución de la constante de Hubble en el período inflacionario se determina por:

$$H(t) = \frac{1}{\tau}$$

La solución a las tres primeras dificultades, se sigue inmediatamente al considerar que, debido al crecimiento exponencial: I) en la localidad de nuestra galaxia, el universo se observará plano, II) la densidad de monopolos magnéticos tiende a cero y III) se tiene un crecimiento del universo mayor que la velocidad de la luz y por consiguiente, eventos que en un período pre-inflacionario estuvieron causalmente conectados, se desconectan en el período inflacionario, y una vez pasado el período de expansión super lumínica, están en condiciones de hacer contacto con sus conos de luz. Un caso particular es la radiación de fondo. El cuarto punto se explicará en la siguiente subsección.

2.4.5 Fluctuaciones del Período Inflacionario

Quizás la característica más importante del modelo inflacionario es que mediante un proceso físico propio del modelo, explica la generación de las primeras fluctuaciones del campo de densidad. Como se verá más adelante, la evolución de estas fluctuaciones, desarrolla hasta convertirse en la estructura que se observa hoy en el universo.

El proceso físico fundamental en la generación de las fluctuaciones de densidad se debe al **Principio de Incertidumbre de Heisenberg**, el cual en una de sus formas, indica que:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Esta relación, se puede interpretar como que un sistema jamás podrá permanecer en una energía, E , igual a cero y la razón es que en un tiempo lo suficientemente pequeño, Δt , puede ocurrir una fluctuación de energía considerable ΔE .

A este proceso se le conoce como la polarización del vacío y básicamente es el causante de la aparición espontánea de un par partícula-antipartícula. En este sentido el vacío es una estructura dinámica.

La manera en que ésto se relaciona con la cosmología, es precisamente, notando los tiempos propios de la evolución del universo. Se dice que una región está causalmente conectada, cuando su tamaño es menor que el de una región de radio $L_H = \frac{c}{H(t)}$. Para una región de radio L_H , el intervalo de tiempo en el cual ocurren los procesos son:

$$\Delta t = \frac{1}{H(t)},$$

significando que cambios en la razón de crecimiento del universo, influyen directamente en el tiempo de acción de sus procesos.

Sustituída en la relación de incertidumbre:

$$\Delta E \geq \hbar \cdot H,$$

y ya que, el dominio de la inflación, se caracteriza por mantener a H prácticamente constante:

$$\Delta E \sim \text{constante}$$

durante todo este período se generan fluctuaciones de densidad de energía: $\delta = \frac{\Delta E}{E}$, constantes.

En el capítulo siguiente analizaremos los diferentes procesos de atenuación y amplificación a los que se ven sometidas estas fluctuaciones.

Capítulo 3

Evolución de las Fluctuaciones Primigenias

3.1 Introducción

Hasta ahora se ha considerado al universo como un sistema cuya distribución de materia y radiación es totalmente homogénea e isotrópica, sin embargo, ésto es solo una aproximación de lo que ha ocurrido en la historia del universo. Que en él haya estructura: sistemas planetarios, estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias, etcétera, implica que cierto grado de inhomogeneidad hubo en tiempos muy remotos, y ya que la evolución del universo en su globalidad, se entiende bien, con modelos de fluidos, el siguiente paso fue considerar a la formación de estructura como el resultado de pequeñas inhomogeneidades en dicho fluido.

Hasta 1980 la explicación del origen de estas inhomogeneidades como consecuencia de un proceso físico era inexistente y por lo tanto se introducían ad hoc en el formalismo. El concepto lo introduce Guth con su modelo inflacionario, en éste modelo, de una manera muy natural, se generan fluctuaciones primordiales del campo de densidad de masa-energía, a partir de procesos físicos bien definidos.

3.2 Aproximación Newtoniana

En el capítulo anterior se analizaron algunos de los aspectos más importantes de la evolución del universo.

En un análisis detallado de las evidencias observacionales, se puede apreciar que ni la radiación de fondo ni la distribución de galaxias lejanas tienen una distribución absolutamente homogénea e isotrópica así mismo se puede apreciar que no todas las galaxias cumplen exactamente con la ley de Hubble, la manera más natural de explicar la existencia de estructura, es asumir que en el universo primitivo, existían pequeñas desviaciones de la homogeneidad e isotropía, las llamadas **fluctuaciones** $\delta(r)$, y como se dijo, son la diferencia entre la densidad promedio del universo y la densidad local de la inhomogeneidad (dividido por la densidad promedio para tener una cantidad adimensional más fácil de manejar), con la propiedad de que cada una de ellas puede tener pequeñas **velocidades** $\vec{v}(\vec{r})$ respecto de sus coordenadas comóviles originales y que en todo momento estas fluctuaciones están sometidas a su propio **campo gravitacional** $\Phi(\vec{r})$. Con este enfoque, se podrá

dar explicación a la formación de estructura y al mismo tiempo salvar, los modelos de evolución global del universo.

La teoría cuya lógica incluye precisamente los tres elementos que mencionamos anteriormente: **fluctuaciones** $\delta(\vec{r})$, **velocidades** $\vec{v}(\vec{r})$ y **campo gravitacional** $\Phi(\vec{r})$, es la teoría Newtoniana de fluidos. A continuación se verá parte del formalismo y posteriormente se aplicará a la evolución de las fluctuaciones primordiales que nos atañen.

3.2.1 Mecánica de Fluidos

El formalismo de la mecánica de fluidos se basa en un conjunto de postulados muy sencillos: Se considera un fluido de masa M con una densidad de materia $\rho(\vec{r})$ definida en cada punto y contenido en un volumen V .

La mecánica de fluidos afirma que la cantidad de masa contenida en ese volumen se determina mediante la suma de todos los elementos de volumen multiplicados por la densidad puntual correspondiente:

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (41)$$

y postula además que si el sistema esta aislado, esa propiedad física llamada masa, es un invariante respecto del tiempo, es decir:

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (42)$$

De los dos postulados anteriores se sigue que:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}) dV = 0 \quad (43)$$

la derivada de una integral como ésta, no es de solución trivial ya que en un fluido tanto ρ como V dependen del tiempo, sin embargo, existe un teorema, el **Teorema de Reynolds**, que aísla la dependencia temporal del elemento de volumen, dejando a éste como un invariante temporal. El teorema afirma que:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\vec{r}) dV(t) = \int_{V(t)} \left[\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \right] dV \quad (44)$$

Aplicando el teorema a la ecuación(43), obtenemos que:

$$\int_{V(t)} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) \right] dV = 0 \quad (45)$$

En esta representación, el elemento de volumen dV de tamaño fijo permite muestrear los cambios de densidad en esta región.

Lo que lleva a la famosa ecuación de balance de masa:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0} \quad (46)$$

A esta ecuación también se le conoce como la ecuación de continuidad.

Otra ecuación importante en este formalismo, es la ecuación de movimiento. De la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (47)$$

imponiendo la hipótesis de medio continuo, el momento lineal:

$$\vec{p} = M\vec{v} \quad (48)$$

se convierte en:

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{v} dV \quad (49)$$

por lo tanto la derivada temporal será:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV \quad (50)$$

aplicando nuevamente el teorema de Reynolds y agrupando términos se obtiene:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \left\{ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) \right] \right\} dV \quad (51)$$

Usando la relación (46), sobre el balance de la masa en nuestro volumen de prueba, el último término de la ecuación anterior desaparece y por lo tanto el cambio del momento lineal de un fluido en el tiempo se representa por:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \quad (52)$$

La descripción de las fuerzas en fluidos, no se deduce por completo con la hipótesis de medio continuo. Las fuerzas que actúan en un fluido son de dos tipos, las primeras son el resultado de aplicar directamente el postulado de medio continuo:

$$\vec{F}_{\text{cuerpo}} = \int_V \rho \vec{f} dV \quad (53)$$

A este tipo de fuerzas, \vec{f} , se le conoce como fuerzas de cuerpo y por hipótesis actúan sobre cada elemento de volumen. El segundo tipo de fuerzas son las llamadas fuerzas de tracción, \vec{t} , éstas se deben al desequilibrio de las fuerzas de enlace en la localidad de las fronteras.

$$\vec{F}_{\text{tracción}} = \oint_{\partial V} \vec{t} dS \quad (54)$$

a las fuerzas de tracción se las puede expresar en términos de una matriz y un vector, conocidos como *el tensor de esfuerzos* y *el vector normal a la superficie*:

$$\vec{t} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (55)$$

sustituyendo a éstas en la ecuación (54), y aplicando el teorema de Gauss, la fuerza de tracción total se puede expresar como:

$$\vec{F}_{tracción} = \int_V \text{div} \sigma \, dV \quad (56)$$

sumando los dos tipos de fuerzas, ecuación(53) y ecuación(56) se obtiene que:

$$\vec{F}^i = \vec{F}_{cuerpo} + \vec{F}_{tracción} = \int_V \rho \vec{f} \, dV + \int_V \text{div} \sigma \, dV \quad (57)$$

Reuniendo los resultados del cambio de momento en el tiempo y la representación de las fuerzas de la ecuación anterior, en la segunda ley de Newton, se obtiene que:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div} \sigma \quad (58)$$

A esta ecuación de movimiento, se le conoce como la ecuación de balance de momento o ecuación de Cauchy.

Para la descripción que nos atañe, se hará la suposición de que la materia esta distribuida homogénea e isotrópamente, lo que permitirá expresar al tensor de esfuerzos como:

$$\|\sigma\| = - \left\| \begin{array}{ccc} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right\| \quad (59)$$

es decir que siempre se podrá escoger un sistema de referencia en el cual los esfuerzos cortantes se anulen. La cantidad p es la presión del sistema y la divergencia del tensor de esfuerzos con estas restricciones será:

$$\text{div} \sigma = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left\| \begin{array}{ccc} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right\| \quad (60)$$

es fácil ver que esto se traduce en:

$$\text{div} \sigma = -\nabla p \quad (61)$$

A un fluido con estas características se le conoce con el nombre de **Fluido Perfecto**. Finalmente, si se considera, a este último resultado, en la ecuación de movimiento y se supone que la fuerza de cuerpo a la que cual está sometida el fluido es la fuerza gravitacional, es decir, satisface la ecuación de campo de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

con la fuerza de cuerpo:

$$\rho \vec{f} = -\nabla\Phi$$

el conjunto completo de ecuaciones que describen al fluido son:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0} \quad \text{Ecuación de Movimiento}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p} \quad \text{Ecuación de Euler} \quad (62)$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

Estas ecuaciones describirán la dinámica de un fluido de densidad ρ , presión p , que se encuentra bajo la acción de la gravedad, $\nabla\Phi$ y cuyo flujo se determina por el campo de velocidades \vec{v} .

A ésta representación particular de las ecuaciones de movimiento de un fluido, en términos de derivadas totales del tiempo, se le conoce como **Representación Lagrangiana**. En esta representación, un elemento particular del fluido es seguido y es el comportamiento de sus propiedades, lo que describen las ecuaciones(62). Existe otra representación, conocida como la **Representación Euleriana**, en ésta, las ecuaciones describen el cambio de las propiedades del fluido en un punto fijo del espacio. La conexión entre ambas descripciones se da con la relación entre operadores:

$$\frac{d}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] \quad (63)$$

La representación que adoptaremos en la descripción evolutiva de las fluctuaciones será, la descripción Lagrangiana, es decir, ecuaciones (62), esto implica que seguiremos a un elemento particular del universo en expansión, o bien, que optamos por una descripción comóvil de la dinámica del universo.

En el capítulo anterior se examinó la dinámica de la evolución del universo asumiendo homogeneidad e isotropía global. Esto en el modelo de perturbaciones de un fluido, corresponde a la solución de orden cero. En este caso la evolución de un elemento comóvil estará descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_o}{dt} + \rho_o \operatorname{div}(v'_o) &= 0 \\ \frac{dv'_o}{dt} &= -\nabla\Phi_o - \frac{1}{\rho_o} \nabla p_o \\ \nabla^2\Phi_o &= 4\pi G\rho_o \end{aligned} \quad (64)$$

donde el subíndice o indica no perturbado, las pequeñas irregularidades que se generaron en el periodo de la inflación, se caracterizan añadiendo un elemento perturbado a cada un de los campos:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \vec{v}_o + \Delta\vec{v} \\
 \rho &= \rho_o + \Delta\rho \\
 p &= p_o + \Delta p \\
 \Phi &= \Phi_o + \Delta\Phi
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

sustituyendo las ecuaciones(65) en las ecuaciones sin perturbar, ecuaciones(62) y luego restándoles la ecuaciones que gobiernan el comportamiento del elemento de volumen a orden cero, ecuación(64), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_o} \right) &= - \operatorname{div} (\Delta\vec{v}) \\
 \frac{d(\Delta\vec{v})}{dt} + (\Delta\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}_o &= -\nabla\Delta\Phi - \frac{1}{\rho_o} \nabla\Delta p
 \end{aligned}
 \tag{66}$$

$$\nabla^2\Delta\Phi = 4\pi G\Delta\rho$$

Donde se ha utilizado también, el hecho de que en un universo homogéneo e isótropo:

$$\begin{aligned}
 \nabla p_o &= 0 \\
 \nabla \rho_o &= 0
 \end{aligned}$$

y se a utilizado la aproximación a primer orden de la derivada de la velocidad:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\Delta\vec{v}}{dt} + (\Delta\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}_o$$

La razón de esta fórmula se encuentra después de aplicar el operador:

$$\frac{d}{dt} [-] = \frac{\partial}{\partial t} [-] + [(\vec{v}_o + \Delta\vec{v}) \cdot \nabla] [-]$$

a $\vec{v} = \vec{v}_o + \Delta\vec{v}$, eliminando los términos de ordenes superiores. En estas operaciones, interviene una primera linearización.

Ahora bien, el objeto de esta sección es encontrar la ecuación de evolución de una fluctuación de densidad. Si definimos a esta fluctuación de densidad como:

$$\delta(\vec{r}) \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho_o}$$

y queremos encontrar, una ecuación diferencial (lineal), que describa dicha evolución:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{D(\delta) = 0} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\int} \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{condiciones} \left\{ \begin{array}{l} \text{iniciales} \\ \text{frontera} \end{array} \right\}} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\delta = \delta(t)}
 \end{array}
 \tag{67}$$

donde la $D(\delta)$ representa los operadores diferenciales aplicados sobre la fluctuación de densidad.

Veamos entonces que cuando al hacer referencia a un universo homogéneo e isótropo la separación entre dos partículas en el volumen de prueba estaba dada por:

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{r}_{comovil}$$

que es exactamente la fórmula (1) . La interpretación de las coordenadas comóviles, es como sigue:

- o $r(t)$: es la separación real, de dos partículas que siguen la expansión del universo.
- o $a(t)$: debido a al homogeneidad e isotropía, el factor de expansión es una función universal del tiempo cósmico.
- o $r_{comovil}$: es la Distancia Comóvil entre las dos partículas. En este caso, las partículas mantienen su distancia relativa constante desde el punto de vista del sistema de referencia comóvil.

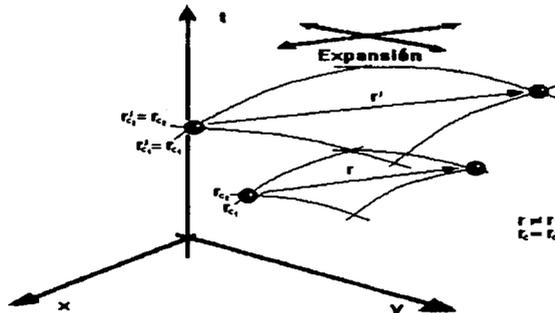


figura: La distancia comóvil no cambia con la expansión de universo, la distancia real sí.

Es importante notar, que tal como se ha construido el modelo, el factor de expansión crece con el tiempo, hasta que al llegar al día de hoy, vale 1, es decir, está normalizado al día de hoy, entonces, la distancia comóvil y la distancia real, se igualan al día de hoy:

$$a(hoy) = 1$$

$$r(hoy) = r_{comovil}$$

Considérese ahora, un caso un poco distinto, supóngase que las dos partículas si tienen un movimiento respecto del sistema de referencia comóvil, cada partícula tendrá una posición dada por una ecuación similar a:

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{r}_{comovil}(t)$$

y la velocidad real de cada partícula quedará descrita por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

que explícitamente se escribirá:

$$\vec{v} = \frac{da}{dt} \vec{r}_{comovil} + a(t) \frac{d\vec{r}_{comovil}}{dt}$$

Al primer término se le conoce como el flujo de Hubble y no es otra cosa que la velocidad de expansión del universo, será la velocidad que trazarían las partículas de la figura anterior.

El segundo término es la velocidad comóvil de la partícula.

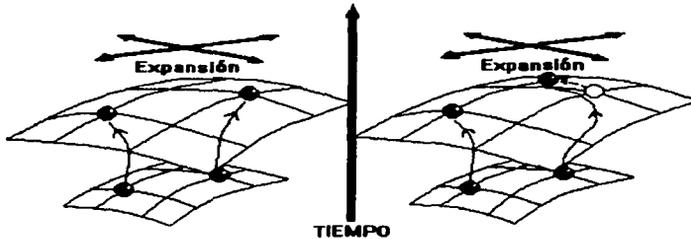


figura: En el dibujo de la izquierda las partículas siguen el flujo de Hubble: están estáticas respecto del sistema comóvil. En el dibujo de la derecha una de las partículas se mueve respecto del flujo de Hubble o sistema comóvil.

El punto importante de este análisis de las componentes de la velocidad, es que si la velocidad comóvil es pequeña respecto del flujo de Hubble, entonces, es factible hacer la siguiente asociación:

$$\Delta \vec{v} = a(t) \frac{d\vec{r}'_o}{dt}$$

o redefiniendo a la derivada de $\vec{r}'_{comovil}$:

$$\Delta \vec{v} = a(t) \vec{u} \quad (68)$$

y la ecuación de movimiento, ecuación(66.b), se convierte en:

$$\frac{d(a\vec{u})}{dt} + (a\vec{u} \cdot \nabla) a\vec{r}'_o = -\nabla \Delta \Phi - \frac{1}{\rho_o} \nabla \Delta p$$

Y ya casi para terminar el análisis de la mecánica de fluidos sobre la evolución de una fluctuación de densidad, se observan los siguientes elementos en la ecuación anterior:

- 1) derivadas temporales totales, lo que indica que se va siguiendo al elemento de fluido,
- 2) velocidades comóviles,
- 3) gradientes referidos a coordenadas reales.

Evidentemente los dos primeros puntos proporcionan una descripción comóvil, mientras que el tercero es más bien una descripción real. En pocas palabras, aún qué, la ecuación anterior es totalmente correcta es conveniente expresarla en términos de puras cantidades comóviles, cambiando al gradiente de coordenadas reales por coordenadas comóviles:

$$\nabla = \frac{1}{a} \nabla_{\text{comóvil}} \equiv \frac{1}{a} \nabla_c$$

y haciendo las talachas apropiadas se llega a que la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}\vec{u} = -\frac{1}{a^2} \nabla_c \Delta \Phi - \frac{1}{\rho_0 a^2} \nabla_c \Delta p \quad (69)$$

Si ahora se consideran las perturbaciones que describe el modelo, se ve que estas se comportan como ondas de sonido, las cuales, idealmente, se propagan en forma adiabática obedeciendo a la siguiente regla:

$$c_s^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho},$$

que no es otra cosa que la ecuación constitutiva para el fluido y que en este caso significa que se está en el período dominado por la:

$$\begin{aligned} \text{RADIACIÓN} &\implies c_s^2 = \frac{c^2}{3} \\ \text{MATERIA} &\implies c_s^2 = 0 \\ \text{VACÍO} &\implies c_s^2 = -c^2 \end{aligned}$$

Aunque en general, esta ecuación constitutiva relacionará a p y a ρ en forma tal, que el tiempo influya, es decir que $c_s^2 = c_s^2(t)$, aquí se asumirán constantes en cada período.

Entonces sustituyendo la ecuación constitutiva en la ecuación de movimiento, aplicándole la divergencia comóvil y sustituyendo la definición del parámetro de Hubble, se obtiene:

$$\nabla_c \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + 2H \nabla_c \cdot \vec{u} = -\frac{1}{a^2} \nabla_c^2 \Delta \Phi - \frac{1}{\rho_0 a^2} \nabla_c^2 \Delta p \quad (70)$$

Si ahora se convierte a las ecuaciones: (66, n, h), a gradientes y divergencias comóviles:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\delta) = -\nabla_c \cdot \vec{u} \quad (71)$$

y se junta a ésta ecuación y a la ecuación de Poisson con la ecuación de movimiento, se encuentra que:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H \frac{d\delta}{dt} = 4\pi G \Delta\rho - \frac{c_s^2}{\rho_0 a^2} \nabla_c^2 \Delta\rho \quad (72)$$

Buscando soluciones del tipo ondas planas para esta ecuación:

$$\delta \sim e^{i(\vec{k}_c \cdot \vec{r}_{\text{comovil}} - \omega t)} \quad (73)$$

se encuentra que el último término de la ecuación(72):

$$-\frac{c_s^2}{\rho_0 a^2} \nabla_c^2 \Delta\rho = \frac{k_c^2 c_s^2}{a^2} = k^2 c_s^2 \quad (74)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de movimiento, se obtiene la expresión que se buscaba:

$$\boxed{\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H \frac{d\delta}{dt} = (4\pi G \rho_0 - k^2 c_s^2) \delta} \quad (75)$$

en notación de operadores diferenciales, ésto se escribe:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2H \frac{d}{dt} - (4\pi G \rho_0 - k^2 c_s^2) \right] \delta = 0 \quad (76)$$

Lo que indica el final del camino, en el esquema (67).

Dos observaciones finales respecto a la ecuación (75):

o Lo primero es notar que en todo el proceso se hicieron un conjunto de simplificaciones para **linearizar** a la ecuación anterior, lo que implica, que los efectos gravitacionales existentes entre fluctuaciones cercanas o una autogravedad demasiado intensa, no puede ser descrita por esta ecuación.

o El segundo punto importante, se puede resaltar introduciendo un nuevo parámetro que llamaremos el **tiempo comóvil**¹ y que sustituiremos por el tiempo cósmico que se ha usado hasta el momento. Como veremos se trata de un tiempo normalizado instante a instante con el factor de escala. La definición de este tiempo comóvil es:

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (77)$$

Con esta definición de tiempo y pensando en un fluido sin una fuente de presión, la ecuación (69) se convierte en:

$$\frac{d\dot{\delta}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = -\nabla \Delta \Phi \quad (78)$$

donde ahora el punto denotará derivación respecto al tiempo comóvil.

En esta notación, la ecuación de evolución de una fluctuación, linearizada se expresa:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = \frac{\nabla^2 p}{\rho} + 4\pi G \rho_0 a^2 \delta, \quad (79)$$

la cual tendrá soluciones de la forma:

$$\delta(\vec{r}, \tau) = A(\vec{r}) \mathfrak{D}_+(\tau) + B(\vec{r}) \mathfrak{D}_-(\tau)$$

donde claramente se entiende que la amplitud de la fluctuación es amplificada por: $\mathfrak{D}_+(\tau)$, o atenuada por: $\mathfrak{D}_-(\tau)$, al transcurrir el tiempo. Un caso es el de una fluctuación en un universo de Einstein-de Sitter, en este se encuentra que la parte amplificadora de la solución va como:

$$\delta \propto \mathfrak{D}(\tau) \propto \tau^2 \propto t^{\frac{2}{3}} \propto a.$$

El punto importante aquí es que la ecuación (78) se puede escribir como:

$$a \frac{d\vec{u}}{d\tau} + \frac{da}{d\tau} \vec{u} = -\nabla \Delta \Phi$$

o bien

$$\frac{d(a\vec{u})}{d\tau} = -\nabla \Delta \Phi \quad (80)$$

usando la ecuación(68) que relaciona a la velocidad comóvil con la pequeña desviación de la fluctuación del flujo de Hubble. Obtenemos que:

$$\Delta \vec{v} = - \int \nabla \Delta \Phi d\tau + \vec{C} \quad (81)$$

Donde \vec{C} es una constante y $\Delta \Phi$ estará escalada por el crecimiento de la fluctuación de densidad y la expansión del universo:

$$\Delta \Phi = \frac{\mathfrak{D}}{a} \Delta \Phi_{inicial}$$

donde

$$\delta(\tau) = \mathfrak{D}(\tau) \delta_{inicial}$$

Por lo tanto la ecuación(81) se convierte en:

$$\Delta \vec{v}' = - \left(\int \frac{\mathfrak{D}}{a} d\tau \right) \cdot \nabla \Delta \Phi_{inicial} + \vec{C} \quad (82)$$

o bien :

$$\Delta \vec{v}' = - \frac{a}{\mathfrak{D}} \left(\int \frac{\mathfrak{D}}{a} d\tau \right) \cdot \nabla \Delta \Phi + \vec{C}$$

y por lo tanto si se define:

$$B(t) = - \frac{1}{\frac{a}{\mathfrak{D}} \left(\int \frac{\mathfrak{D}}{a} d\tau \right)}$$

y sustituyendo en la ecuación(80) encontramos que la ecuación de movimiento para la fluctuación es:

$$\frac{d(\Delta\vec{v})}{d\tau} = -B(t)\Delta\vec{v} + B(t)\vec{C} \quad (83)$$

El punto realmente importante es el que describe la ecuación(83) ya que indica que la velocidad de la fluctuación, es proporcional a su aceleración. Lo cual da una visión clara de la dinámica de las fluctuaciones en un universo en expansión.

Para resalta la importancia de este resultado vemos la similitud que existe con la ecuación de movimiento para un objeto que cae hacia la tierra sintiendo la resistencia del aire (caída libre real):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{A}{m}v + C \quad (84)$$

donde A es el coeficiente de fricción-viscosidad y m es la masa del objeto, en C está la información sobre la intensidad del campo gravitacional. Como podemos apreciar las dos ecuaciones anteriores son muy similares, el comportamiento de la segunda es bien conocido, la velocidad cambia de:

$$v_{caida\ libre} = gt + C \implies t$$

transformándose en:

$$v_{caida\ real} = \frac{1}{e^{\frac{A}{m}t}} + C \implies C$$

Claramente el efecto de un medio viscoso, caracterizado por A , tiende a estancar el valor de la velocidad. Esto mismo ocurre con las fluctuaciones en un medio en expansión, la viscosidad aquí es ejercida por la expansión del universo: $a(\tau)$ vía $B(\tau)$ y el efecto neto es que la expansión del universo más que fomentar el movimiento de las fluctuaciones, tiende a encarrillarlas al flujo de Hubble, en un decaimiento que va como a^{-1} .

A continuación un poco sobre la estabilidad de las fluctuaciones.

3.3 Análisis de Jeans

3.3.1 Inestabilidades en un Fluido sin Expansión

En la sección anterior se encontraron las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido en un medio en expansión, sin embargo es conveniente hacer un análisis de lo que ocurre si la expansión no es preponderante. En este caso, según un observador en la fluctuación, el medio en el cual se encuentra es estático, es decir: $\dot{a} = 0$ y la ecuación (75), se transforma en:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = (4\pi G\rho_0 - k^2c_s^2)\delta \quad (85)$$

soluciones a esta ecuación mediante ondas de la forma :

$$\delta = \delta_0 \exp i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (86)$$

implican que ω y \vec{k} deben satisfacer la relación de dispersión:

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (87)$$

Ésta relación de dispersión describe inestabilidades u oscilaciones, dependiendo del signo del miembro derecho de la ecuación anterior. Para mayor claridad nótese que la v_s^2 en cierta forma representa un efecto colectivo, de las velocidades típicas de las componentes internas de la galaxia o fluctuación, es decir, representa una especie de energía térmica ($T = \frac{1}{2} V \rho_0 v_s^2$).

Por otro lado $G \rho_0 \frac{1}{k^2} = G \frac{(\rho_0 R^2)}{R} = G \rho_0 R^2$ representa la energía potencial gravitacional de una partícula dentro de la fluctuación de radio R . A continuación, ambos casos:

I) Si $v_s^2 > 4\pi G \rho_0 R^2$ el miembro derecho de la ecuación (87) será positivo y por lo tanto ω será real y la perturbación según la ecuación (86) simplemente **oscilará** como una onda de sonido. Este es el caso en el que las galaxias tienen velocidades aleatorias, suficientes para generar un **gradiente de presión** que de soporte a la región de su propio jalón gravitacional.

II) Si $v_s^2 < 4\pi G \rho_0 R^2$ el miembro de la derecha es negativo y por lo tanto la frecuencia imaginaria $i\omega$ esto sustituido en la ecuación (86), elimina el comportamiento periódico en el tiempo, dando como resultado un crecimiento o decrecimiento exponencial. A este tipo de comportamiento se le conoce como de **inestabilidad**. El gradiente de presión no es suficiente para contrarrestar el **jalón gravitacional** haciendo a la densidad **crecer exponencialmente**.

Entonces, la inestabilidad de una cierta región, estará dada por su autogravedad y por el gradiente de presión que sostiene al fluido. Esto lo podemos escribir como:

$$\frac{dp}{dR} = - \frac{G \rho M (< R)}{R^2} \quad (88)$$

En ordenes de magnitud y cambiando $R \rightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\lambda} &\approx - \frac{p}{\lambda} \\ M &\approx \rho \lambda^3 \\ v_s &\approx \frac{p}{\rho} \end{aligned} \quad (89)$$

por lo que, la escala crítica en la cual se estabilizan autogravedad y gradiente de presión es:

$$\lambda_J \approx \frac{v_s}{\sqrt{G \rho}} \quad (90)$$

a ésta se le llama **Longitud de Jeans**. Se puede reescribir como:

$$t_{\text{presión}} \approx \frac{\text{longitud de onda}}{\text{vel. de dispersión}} = \frac{\lambda}{v} < \frac{1}{\sqrt{G \rho}} = \text{caída libre} \approx t_{\text{gravidad}} \quad (91)$$

es decir, la fluctuación no crecerá, a menos que el tiempo de reajuste de las distribuciones de presión, $t_{\text{presión}}$, sea mayor que el tiempo propio de colapso de la fluctuación.

Otra forma útil de describir estas escalas es mediante la **Masa de Jeans**, ésta se define como:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \lambda_J^3 \rho_X$$

donde la ρ_X es la masa de partículas tipo X por unidad de volumen de Jeans λ_J^3 .

3.3.2 Inestabilidades en un Fluido en Expansión

Regresemos ahora a las inestabilidades que se producen en un medio en plena expansión, es decir, a la descripción de un objeto cuya auto gravedad no es lo suficientemente intensa para contrarrestar al jalón expansivo del universo.

Para esto volvemos a la ecuación (75):

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{d\delta}{dt} = \delta (4\pi G\rho - k^2 c_s^2) \quad (92)$$

el segundo término será quien marque la diferencia con el medio sin expansión. Tal como vimos hace dos subsecciones, este es el elemento de fricción, que encarrila a las fluctuaciones a seguir el flujo de Hubble. Tratamos ahora, las inestabilidades en el caso en que los efectos de la presión son despreciables, es decir cuando la longitud de onda de Jeans es menor que la escala de la fluctuación:

$$\lambda \gg \lambda_J \quad (93)$$

en estos casos se puede despreciar el término de presión:

$$c_s^2 k^2 \approx 0 \quad (94)$$

y el problema se simplifica a encontrar alguna solución a la ecuación:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \frac{d\delta}{dt} = 4\pi G\rho\delta \quad (95)$$

Ahora bien, esta ecuación es lo suficientemente complicada como para una resolución analítica, así que consideraremos dos soluciones particulares. De la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (96)$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Omega = 1 &\Rightarrow a = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} H_0 \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{Materia} \\ \sim t^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Radiación} \end{array} \right\} \\ \Omega = 0 &\Rightarrow a = H_0 t \end{aligned} \quad (97)$$

derivando el factor de escala y dividiéndolo por el mismo, se obtiene que:

$$\Omega = 1 \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3t} \rightarrow \text{Materia} \\ \rightarrow \text{Radiación} \end{array} \right\} \quad (98)$$

$$\Omega = 0 \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t}$$

sustituyendo nuevamente estos resultados en la ecuación de Friedmann encontramos que:

$$\Omega = 1 \Rightarrow 4\pi G\rho = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3t^2} \rightarrow \rho \sim \rho_0 \frac{1}{a^3} \text{ Materia} \\ \frac{3}{16t^2} \rightarrow \rho \sim \rho_0 \frac{1}{a^4} \text{ Radiación} \end{array} \right\} \quad (99)$$

$$\Omega = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

con estos simples resultados de la cosmología estandar, las ecuaciones de evolución de las fluctuaciones en cada modelo son:

Caso 1. $\Omega = 1$. I) Dominio de la Materia

En este caso, la ecuación de evolución queda como:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{4}{3t} \frac{d\delta}{dt} - \frac{2\delta}{3t^2} = 0 \quad (100)$$

La solución a este tipo de ecuación diferencial es de la forma:

$$\delta = At^n \quad (101)$$

la cual, al ser sustituida en la ecuación(100), se encuentra una relación algebraica de n 's, la cual tiene solución para:

$$\begin{array}{l} n = \frac{2}{3} \\ n = -1 \end{array} \quad (102)$$

de aquí se obtienen varias relaciones importantes. Por ejemplo para el modo creciente:

$$\delta \propto t^{\frac{2}{3}} \propto \frac{1}{1+z} \quad (103)$$

o bien:

$$\boxed{\delta \propto a} \rightarrow t > t_{\text{igualdad}} \quad (104)$$

Dominio de la Materia

Lo cual indica que el crecimiento de las fluctuaciones en un universo plano, es algebraico con el tiempo, nuevamente vemos aquí el resultado de Zeldovich, la expansión del universo tiene un efecto disipativo en el crecimiento de la galaxia.

Caso 1. $\Omega = 1$. II) Dominio de la Radiación

En este caso la ecuación de evolución de la fluctuación será:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\delta}{dt} - \frac{3}{16t^2} = 0$$

en forma similar al caso anterior, se propone una solución del tipo:

$$\delta = At^n$$

esta sustitución da una ecuación algebraica en n , que se cumple para:

$$n = +1$$

$$n = -1$$

Es decir, que el modo creciente se comporta según:

$$\delta \sim t$$

o bien:

$$\boxed{\delta \sim a^2} \rightarrow t < t_{\text{igualdad}}$$

Dominio de la Radiación

Por último, el caso en el que el universo es abierto.

Caso 2. $\Omega = 0$.

Este caso es mucho más sencillo, usando las ecuaciones(99), la ecuación de movimiento queda:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\delta}{dt} = 0 \quad (105)$$

nuevamente buscando soluciones del tipo algebraico $\delta = At^n$ se encuentra que las n 's posibles son:

$$\begin{aligned} n &= 0 \\ n &= -1 \end{aligned} \quad (106)$$

recordamos que $\Omega = 0$ representa un tipo muy especial de los universos hiperbólicos; en este caso la fricción de la expansión sería tal que al modo creciente, lo mantendría a un contraste de densidad constante.

De esta manera, se observa una vez más que la fluctuación de densidad es disminuida en su crecimiento debido al proceso disipativo que impera en un universo en expansión.

Existen otros procesos importantes en el desarrollo de una galaxia, las causas de éstos van más allá de la descripción del fluido perfecto e implican procesos disipativos. Los principales son, el **Amortiguamiento de Silk** y el **Amortiguamiento de Landau**.

El primero se debe a lo que se conoce como **viscosidad fotónica**, este fenómeno hace que la fluctuación evanesca durante en el período de la igualdad entre materia y radiación. Básicamente se

debe, a las fuerzas de arrastre existentes en la colisión de electrones con fotones de alta energía, un fotón colisionará varias veces, en un proceso tipo caminata aleatoria, antes de salir de la fluctuación. De esta manera, se disuelve la fluctuación. Silk fue el primero en estudiar este proceso, y encontró que la fluctuación más pequeña que puede sobrevivir al amortiguamiento va como:

$$\lambda_{Silk} = \left[\frac{3}{5} t_{desacopla} \cdot l_{desacopla} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $l_{desacopla} \simeq (n_x \sigma)^{-1}$ es el camino medio de los fotones al tiempo del desacoplamiento. Esta fórmula da longitudes extrapoladas al día de hoy para así poder compararlas con las observaciones. El amortiguamiento de Silk evoluciona proporcional a:

$$\lambda_{Silk} \sim \left\{ \begin{array}{ll} a^{\frac{3}{2}} & t < t_{igualdad} \\ a^{\frac{1}{2}} & t > t_{igualdad} \end{array} \right\}$$

Usando la definición de masa de Jeans:

$$M_{Silk} \sim \left\{ \begin{array}{ll} a^{\frac{3}{2}} & t < t_{igualdad} \\ a^{\frac{13}{2}} & t > t_{igualdad} \end{array} \right\}$$

si se supone que electrones y fotones se encontraban fuertemente ligados antes del desacoplamiento las escalas amortiguadas por este proceso serán las equivalentes a:

$$M_{Silk} \cong 6.2 \times 10^{12} \left[\left(\frac{\Omega}{\Omega_{Bariónica}} \right)^{\frac{3}{2}} (\Omega h^2)^{-\frac{3}{2}} \right] M_{\odot}$$

El amortiguamiento de Landau es un proceso disipativo, producido por partículas poco interactuantes con la radiación o la materia, es decir, las colisiones son prácticamente ignorables, ejemplos de este tipo de materia son, los neutrinos y todas las materia oscura exótica. La materia oscura es por hipótesis débilmente interactuante, por lo que sus partículas, siguen las líneas geodésicas del espacio-tiempo. cuando una partícula de materia oscura se encuentra una fluctuación, dependiendo de la escala de ésta, se desviará más o menos dependiendo de que tanto deforme la fluctuación al espacio-tiempo. El reajuste de órbitas que sufren las partículas de materia oscura, constituyen el soporte de presión de la fluctuación de materia oscura. Si la presión es proporcional a velocidades relativistas, en la ecuación (91) se ve que solo fluctuaciones de materia oscura de baja velocidad pueden sobrevivir, las de alta velocidad tienen tiempo suficiente para salir de la fluctuación y no ser atrapadas por la curvatura del espacio tiempo generada por la fluctuación misma. Este fenómeno también se le conoce como *amortiguamiento por flujo libre*. Comparando la distancia propia que atraviesa una partícula en el espacio tiempo en un tiempo t , con la longitud característica de una fluctuación al tiempo t . Landau encontró que la escala superior a la cual las fluctuaciones se amortiguan, depende de la energía (o masa) de las partículas:

$$\lambda_{Landau} = 40 Mpc (\Omega_{DM} h^2)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{m}{1 keV} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

Esta fórmula da la escala extrapolada al día de hoy. Por lo tanto podemos comparar directamente con la observación, el coeficiente de densidad es:

$$\Omega_{DM} = 30 \left(\frac{m}{1keV} \right) \left(\frac{n_{DM}}{n_\gamma} \right) h^{-2}$$

con $\frac{n_{DM}}{n_\gamma}$ definido como, la razón entre el número de partículas de materia oscura y el número de fotones:

Dos ejemplos, de límites establecidos por el amortiguamiento de materia débilmente interactuante son:

a) Los neutrinos. Estos tienen una masa de aproximada de $m_\nu \sim 30eV$, $\Omega_{DM} = \left(\frac{m_\nu}{30keV} \right)$ y por lo tanto:

$$\lambda_J \simeq 28 Mpc$$

$$M_J \simeq 4 \times 10^{15} M_\odot$$

b) Partículas de materia oscura. Por ejemplo que: $m \sim 1keV$, $\Omega_{DM} \sim 1$, entonces:

$$\lambda_J \simeq 0.5 Mpc$$

$$M_J \simeq 6 \times 10^9 M_\odot$$

Lo que indica que los mejores candidatos para materia oscura deben ser bastante más masivos que el neutrino, de otra manera, fluctuaciones de escala galáctica habrían sido amortiguadas y no estaríamos aquí para contarlos.

3.4 Evolución no Lineal y Linearización.

3.4.1 Introducción

La evolución de las fluctuaciones en el universo se divide básicamente en tres etapas, en la primera, la fluctuación de densidad crece en tamaño conforme el universo se expande, se puede decir que en esta primera etapa, la fluctuación de densidad "sigue" al crecimiento del universo, se dice que la fluctuación está en un régimen de crecimiento lineal. En la segunda etapa, la fluctuación de densidad se separa del crecimiento global del universo y empieza a disminuir su razón de crecimiento hasta que, después de un cierto tiempo, se detiene y entra a un régimen de contracción. La tercera etapa es cuando la fluctuación en pleno colapso, se ve sometida a procesos muy violentos de compensación de esfuerzos, en esta etapa, la fluctuación de densidad por decirlo de alguna forma cae sobre sí misma mientras las velocidades aleatorias de sus partículas y su autogravedad, compiten por dominar la estructura de la fluctuación, entrando así en un estado de oscilación que después de cierto tiempo, logra que la fluctuación de densidad llegue a un estado estacionario, conocido como estado virializado.

Por convención llamaremos objetos colapsados a aquellos objetos que han evolucionado más allá del régimen lineal y han entrado a un régimen de virialización.

Los estados por los que atraviesa una fluctuación de densidad se visualizan mejor si analizamos la evolución de una fluctuación de densidad sobreponiendo dos regiones de densidades distintas, y analizamos su evolución.

3.4.2 El colapso esférico

El colapso de una estructura una vez que ésta a dejado el flujo de expansión global del universo, es algo extraordinariamente complejo, una cantidad enorme de parámetros influyen en la estructura final de cualquier galaxia.

La característica principal del colapso gravitacional es, el cambio de densidad en una región dada. A continuación una gráfica esquemática de lo que ocurre:

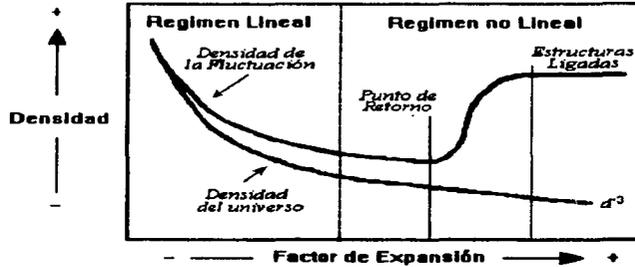


Figura: Fluctuación que evoluciona hasta convertirse en un objeto ligado

En esta subsección estudiaremos el proceso de colapso más sencillo que se puede dar en la naturaleza, el colapso esférico.

El proceso por el cual una fluctuación de densidad esférica se desprende de la evolución global del universo para finalmente colapsar y virializar, se puede simular, mediante la ecuación de Friedmann para un universo cerrado, ésta haría las veces de la región sobre densa esférica (de radio: $\lambda > a_H$):

$$H_1^2 - \frac{8\pi G\rho_1}{3}a^2 = -1 \quad (107)$$

y se escoge la ecuación de un universo plano para como escenario de fondo:

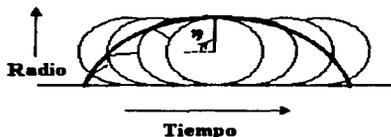
$$H_0^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3}a^2 = 0 \quad (108)$$

El modelo consiste en comparar la evolución de ambos sistemas. La solución, paramétrica, de la primera ecuación es:

$$\frac{a}{a_m} = \frac{1}{2}(1 - \cos \eta) \quad (109)$$

$$\frac{t}{t_m} = \frac{1}{\pi} (\eta - \sin \eta) \quad (110)$$

En la siguiente figura se grafican estas dos soluciones:



donde el subíndice m denota *máximo*, la descomposición en serie para η pequeñas en la solución paramétrica es:

$$\frac{a}{a_m} = \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^4}{48} + \dots \quad (111)$$

$$\frac{t}{t_m} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\eta^3}{6} + \frac{\eta^5}{120} + \dots \right) \quad (112)$$

tomando la solución del tiempo hasta orden η^3 , despejando η^2 de esta misma ecuación, y sustituyendo el resultado en la ecuación de las a 's, se obtiene que:

$$\frac{a}{a_m} = \frac{1}{4} \left(6\pi \frac{t}{t_m} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{20} \left(6\pi \frac{t}{t_m} \right)^{\frac{2}{3}} + \dots \right) \quad (113)$$

Comparando la sobre densidad de la fluctuación respecto del universo plano:

$$\bar{\delta} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \quad (114)$$

y suponiendo que en un principio la evolución de ambas regiones es similar, $H_0 = H_1$, se obtiene que:

$$\bar{\delta} = \frac{3}{8\pi G \rho_0 a^2} \quad (115)$$

y como estamos tratando la evolución de la materia:

$$\rho_0 \sim \frac{1}{a^3}, \quad a \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (116)$$

finalmente llegamos a la expresión:

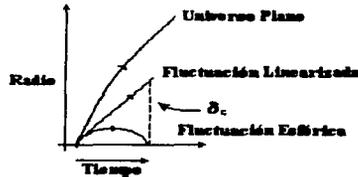
$$\bar{\delta} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\pi t}{t_m} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (117)$$

Si la fluctuación hubiese crecido respecto de la expansión global del universo en forma lineal, la ecuación anterior, indica que densidad tendría al tiempo t . Una de las consecuencias evidentes de esta aproximación lineal, es que la fluctuación así analizada, así jamás llegará a colapsar, sin embargo podemos extrapolar el valor temporal al cual la esfera colapsa, sobre la representación lineal. Como veremos en el siguiente capítulo este concepto generará todo un aparato teórico, para la descripción de procesos no lineales tales como, la evolución de una galaxia.

Por lo tanto si se quiere saber, en que momento, la esfera se separa de la expansión del universo, lo único que tenemos que notar es que cuando $a = 0$ entonces el tiempo transcurrido es $t = t_m$.

Sustituyendo este valor en la fórmula anterior:

$$\delta_{colapso} = \frac{3}{20} \left(\frac{12\pi t_m}{t_m} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.686. \quad (118)$$



entonces cuando en el modelo lineal la fluctuación alcanza este valor, en el modelo no lineal, la fluctuación está llegando al máximo de su colapso.

Otros resultados se pueden obtener de este modelo. Tomando nuevamente las ecuaciones (107) y (108) se encuentra que si la fluctuación crecerá según la ecuación (115):

$$\bar{\delta} = \frac{3}{8\pi G\rho_o a^2} \quad (119)$$

si se sustituyen los valores de ρ_o correspondientes a cada época evolutiva del universo, entonces $\bar{\delta}$ tendrá un régimen de crecimiento característico en cada una de estas épocas.

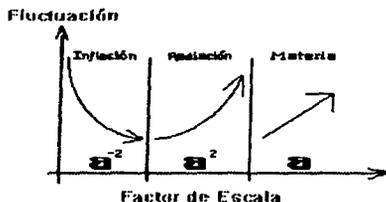
Entonces si se quiere saber cuales son los periodos del: dominio de la inflación, dominio de la radiación y dominio de la materia:

$$\begin{aligned} \text{Inflación} &\rightarrow \rho_o = \varepsilon = \text{const.} \\ \text{Radiación} &\rightarrow \rho_o = \frac{\varepsilon}{a^4} \\ \text{Materia} &\rightarrow \rho_o = \frac{\varepsilon}{a^3} \end{aligned} \quad (120)$$

el comportamiento de la fluctuación será en cada periodo irá como:

$$\begin{aligned}
 \text{Inflación} &\rightarrow \delta = \frac{3}{8\pi G\epsilon} \frac{1}{a^2} \\
 \text{Radiación} &\rightarrow \delta = \frac{3}{8\pi G\epsilon} a^2 \\
 \text{Materia} &\rightarrow \delta = \frac{3}{8\pi G\epsilon} a
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

Con este sencillo cálculo se recuperan los resultados de la sección anterior. En principio ya sabemos como se comporta cada fluctuación en los distintos periodos evolutivos del universo:



Con esto se tiene el comportamiento global de las fluctuaciones.

El siguiente paso es averiguar que ocurre con las fluctuaciones cuando estas salen del horizonte, es decir cuando la presión queda inhibida.

3.5 Fluctuaciones Adiabáticas y Materia Oscura

Una de las consecuencias más asombrosas a las que ha llegado la cosmología moderna es, sin duda alguna, la predicción de un nuevo tipo de materia, la llamada **Materia Oscura** o materia no bariónica.

En este contexto se entiende por no bariónica, a las partículas débilmente interactuantes con la radiación y la materia ordinaria (fotones y electrones, protones, neutrones, etcétera.). Sin embargo por su cantidad, se trata de partículas que dominan los procesos gravitacionales a gran escala.

Uno de los argumentos, que plantea la necesidad de postular la existencia de la materia oscura (o materia no bariónica), es el siguiente: el universo que nos rodea, se observa bastante plano, lo que en términos de la ecuación de Friedmann implicar un parámetro de densidad con valor $\Omega = 1$. Sin embargo el conteo de galaxias y la estimación de materia opaca (planetas, polvo, etc.), indican que el contenido de materia ordinaria en el universo se encuentra en el rango: $0.005 \leq \Omega \leq 0.02$, lo que sugiere un universo más bien hiperbólico. Es aquí que la existencia de la materia oscura se postula.

Como se puede apreciar se trata de una hipótesis fuerte ya que las características que debe tener esta materia son: I) debe ser la mayor parte de la materia en el universo y II) su constitución debe ser extraña, de tal forma que no pueda ser detectada por aparatos convencionales.

El segundo argumento que se toca aquí es el del amortiguamiento de Silk, el cual impone una cota inferior a las fluctuaciones que pueden pasar la época de la igualdad. Como se vio esta cota es extremadamente alta, indicando así que la única manera, de producir galaxias del tamaño observado, es mediante la existencia de materia oscura.

El tercer argumento en favor de la materia oscura se basa en las curvas de rotación planas observadas en la mayoría de las galaxias. Este es el argumento que aquí, se sostendrá y utilizará en la descripción de los modelos de formación galáctica.

Los mejores candidatos para ser esta materia oscura son algunas de las partículas descritas en la teoría de partículas elementales. A continuación mencionamos tres de los candidatos más aceptados:

1) Los Axiones. Éstas son las partículas más ligeras que se consideran, su masa-energía en reposo se encuentra en un rango que va de los $10^{-2}eV$ a los $10^{-5}eV$.

2) Los Neutrinos comunes. Éstos, si tienen una masa en reposo, se espera que esté comprendida en el rango $[10eV - 30eV]$.

3) Los compañeros supersimétricos del fotón y el gravitón, el fotino y el gravitino. Este es el tipo de partícula más pesado considerado al momento, son ultra débilmente interactuantes y su masa en reposo esta comprendida en el rango $[0.1 \text{ a } 10] GeV$.

Y con esto damos por concluido la revisión de las propiedades principales de las pequeñas fluctuaciones primordiales de densidad del universo.

Capítulo 4

El Campo de Fluctuaciones Primigenias

4.1 Introducción

En éste capítulo, se tratará de probar que algunas propiedades estructurales de las galaxias, pueden ser explicadas como consecuencia de un universo primitivo, cuyo campo de densidad, se encuentra cubierto con fluctuaciones infinitesimales, que al paso del tiempo, se amplifican hasta convertirse en galaxias, cúmulos de galaxias, etcétera.

Aun que, este problema es demasiado complejo para resolverse analíticamente, en los últimos años, se ha propuesto un esquema semi-analítico, que modela la formación de galaxias usando, básicamente dos ingredientes principales: un modelo linearizado del desarrollo evolutivo de una fluctuación y un modelo estadístico que gobierna el comportamiento de la agregación de fluctuaciones primordiales del universo. Esta amalgama de ingredientes es un aparato teórico extraordinario que prácticamente permite "ver" la evolución de una galaxia desde su niñez hasta su edad madura. Esto es en realidad un gran logro ya que en otros modelos, por ejemplo los modelos computacionales de N-cuerpos no es posible inmiscuirse en los procesos íntimos de la formación galáctica.

Sin embargo, aun que este enfoque teórico ha dado resultados muy alentadores, en el camino se han cometido algunos errores de concepto. Cuando los creadores de estas teorías estadísticas, se enfrentaron por primera vez al problema de describir un sistema tan complejo como lo es una galaxia, realizaron algunas simplificaciones de tipo matemático en pro de la claridad. En particular una de estas simplificaciones fue la de postular una estadística Gaussiana como método de trabajo. El error fue, que muchos elevaron a la calidad de principio físico, de paradigma, aquello que originalmente era una, simple e inteligente, herramienta de trabajo.

Esta confusión, no represento un problema práctico en la obtención de resultados. Sin embargo, ha llegado el momento en que, **pueden encontrarse respuestas a la naturaleza de algunas observaciones, si se abate el paradigma de la Gaussianidad del campo primordial de fluctuaciones.**

En particular, se explorará la evolución de una protogalaxia que acreta materia, bajo un régimen estadístico no-Gaussiano y la relación entre ésta "nueva" estadística y la estructura del núcleo galáctico.

4.2 El campo de Fluctuaciones Primordiales

4.2.1 Introducción

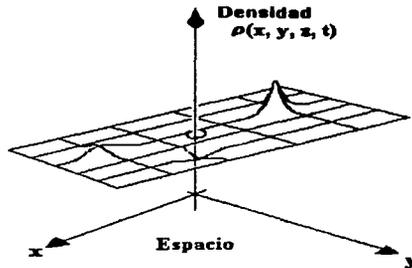
En el capítulo anterior vimos como modelando con un fluido podemos analizar la evolución de las pequeñas fluctuaciones, como estas pueden crecer, decrecer u oscilar en función de su tamaño.

Como ya mencionamos, el punto de partida es que cada una de las inhomogeneidades que conforman al fluido perturbado evoluciona hasta convertirse en alguna galaxia, cúmulo de galaxia, etcétera.

Ahora bien, en el universo tenemos una variedad enorme de estructuras de distintos tamaños, formas y colores; a cada estructura la podemos interpretar como la superposición de un conjunto de fluctuaciones de distintos tamaños y de esta manera cada estructura estará compuesta por un conjunto distinto de fluctuaciones fundamentales.

Entonces, si se quiere estudiar, a partir de un conjunto de elementos fundamentales, la generación de estructuras complejas como lo son las galaxias, se tiene que utilizar una herramienta adecuada que modele la diversidad de galaxias posibles. Esta herramienta matemática es la estadística de campos aleatorios.

Imagínese a este campo de fluctuaciones de densidad, como pequeños chipotes, por arriba y por abajo, en una enorme sabana que excepto por los chipotes, es casi plana. En ésta imagen (ver siguiente figura), el plano en el que subyace la sabana, representa el espacio y los chipotes son la dimensión que indica que tan densa es esa región del espacio.



Chipotes del Campo de Densidad = Campo de Fluctuaciones

Para describir adecuadamente a este campo de fluctuaciones, nótese que solo se requiere de una cantidad escalar para describir a cada fluctuación, es decir, solo se requiere dar el valor de ρ (que es un simple número) en función de las coordenadas comóviles a un tiempo dado t . Matemáticamente:

$$\rho = \rho(x, y, z; t)$$

Una propiedad importante de las cantidades escalares, es que son invariantes ante transformaciones de coordenadas, lo que significa, que todos los observadores medirán exactamente el mismo valor numérico de la densidad en cierto punto del espacio.

Un campo de densidad aleatorio satisface las dos propiedades siguientes:

- 1) Es un campo escalar: $\rho = \rho(x, y, z; t)$
- 2) Su valor numérico es un número aleatorio para cada punto del espacio $(x, y, z; t)$

Por completes se da la definición formal de un campo aleatorio, que puede ser escalar vectorial, etc.:

Decimos que un campo $F(\vec{x})$ es un campo aleatorio, si para cada punto \vec{x} en el espacio tridimensional comóvil, tenemos definido un conjunto de variables aleatorias.

Analicemos ahora, las propiedades estadística resultantes de asumir al campo de fluctuaciones primigenias de densidad como un campo aleatorio Gaussiano:

4.2.2 El Campo de Fluctuaciones

4.2.2.1 Introducción

Como ya habíamos mencionado, consideraremos que una estructura cualquiera del universo proviene de una cierta fluctuación, que puede ser descompuesta de una superposición de fluctuaciones de distintos tamaños.

Formalmente, de ésta hipótesis, se desprenderá que la evolución de una fluctuación la podemos analizar en términos de su composición espectral. Debido a que en principio cada una de las fluctuaciones tiene una existencia al azar, se introducirán algunas propiedades estadísticas importantes en la descripción: el espectro de potencias, la variancia, la distribución de probabilidad y la función de correlación. Éstas serán útiles en la descripción evolutiva de las fluctuaciones de densidad.

Explícitamente, analizaremos algunas de las propiedades estadísticas del campo de fluctuaciones durante el régimen lineal. Consideraremos que el campo de fluctuaciones es aleatorio y por simplicidad supondremos que es Gaussiano, ya que así, todas sus propiedades estadísticas quedan determinadas tan solo, por el espectro de potencias.

4.2.2.2 Campos de Densidad Aleatorio Gaussiano

Como veremos la formación de estructuras a partir de un campo inicial de perturbaciones Gaussianas, implica básicamente tres aspectos, el primero que la distribución espacial de las fluctuaciones obedece a una estadística Gaussiana, segundo, que las fases de los diferentes modos que constituyen a una fluctuación son mutuamente independientes y tercero, que el espectro de potencia del campo de fluctuaciones sea una ley de potencias.

Para hacer más sencillo el análisis de la distribución y evolución del universo, primero imaginemos que dividimos a todo el espacio tridimensional en N celdas de volumen V , cuyo contenido (en sus primeras etapas), evoluciona independiente del resto de las celdas que forman su entorno.

En cada celda tenemos asociado un sistema de referencia idéntico de forma tal que cada celda tiene su origen de coordenadas fijado en el mismo lugar. Denotamos por $\rho_0 \equiv \langle \rho \rangle$ a la densidad promedio en el volumen V y con $\rho(\vec{x})$ a la densidad en el punto especificado por el vector de posición \vec{x} de ese volumen.

Por sencillez se define una nueva cantidad llamada **el campo de fluctuaciones** (o de exceso de densidad):

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \rho_0}{\rho_0} \quad (122)$$

Por cuestión de construcción se impondrán condiciones de continuidad periódicas en cada cara de las celdas. Si cada lado de la celda mide L , se cumplirá que:

$$\delta(L, y, z) = \delta(0, y, z). \quad (123)$$

De esta manera, se ha asociado una retícula de muestreo al universo que permitirá el manejo estadístico, de la formación galáctica.

4.2.2.3 Descomposición de Fourier de las Fluctuaciones de densidad

Es de suponer que muy rápidamente, es decir, aun dentro del régimen de evolución gravitacional lineal, la independencia entre celda y celda dejara de sostenerse y las interacciones gravitacionales entre ellas serán importantes.

Es por esto último, es conveniente cambiar, del campo escalar definido en el espacio tridimensional, a su representación conjugada de ondas planas en el espacio de vectores de onda \vec{k} , donde, cada fluctuación, quedará desglosada en una superposición de ondas planas. Con ésta representación, las componentes de una fluctuación se mantendrán independientes mientras ésta siga su régimen de evolución gravitacional lineal.

La descomposición de las fluctuaciones en términos de sus modos, la expresamos mediante su transformada de Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k}, \quad (124)$$

o mediante su serie de Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (125)$$

donde el vector de onda \vec{k} debido a las condiciones de frontera dadas en la ecuación (123), tiene componentes:

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L} \quad (126)$$

con n_x, n_y, n_z números enteros y donde los coeficientes de Fourier $\delta_{\vec{k}}$ son cantidades complejas dadas por la transformada de Fourier:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) dV. \quad (127)$$

Por la conservación de la masa en el volumen V se tiene que $\delta_{\vec{k}=\vec{0}} = 0$ y porque $\delta(\vec{x})$ es una cantidad real se tiene que:

$$(\delta_{\bar{k}})^* = \delta_{-k} \quad (128)$$

donde * denota conjugación compleja.

Ya que $\delta_{\bar{k}}$ es una cantidad compleja, la podemos descomponer como:

$$\delta_{\bar{k}} = a_k + ib_{\bar{k}} \quad (129)$$

o también como:

$$\delta_{\bar{k}} = |\delta_{\bar{k}}| e^{i\phi_{\bar{k}}} \quad (130)$$

Esta última expresión, será de gran utilidad en la obtención de una estadística Gaussiana, tal como se verá en la siguiente subsección.

4.2.2.4 Condición Inicial Probabilística: Campo Gaussiano

Las propiedades estadísticas de la evolución de la estructura del universo, se pueden determinar mediante la imposición de una condición probabilística inicial. Esta condición consiste en dar la probabilidad de que ocurra una realización de $\delta(\vec{x})$ a un tiempo t :

$$P[\delta(\vec{x}); t]. \quad (131)$$

Esta probabilidad contiene toda la información sobre las propiedades estadísticas de la distribución de masa. Debido a la definición de $\delta(\vec{x})$ en la ecuación (122), se observa que ésta variable aleatoria, tiene valor medio igual a cero.

En la división del universo en N celdas la probabilidad (131), es equivalente a la probabilidad de que $[\delta(\vec{x})_1, \delta(\vec{x})_2, \dots, \delta(\vec{x})_N]$, ocurra al tiempo t .

Podemos traducir esto al espacio de vectores de onda y tendremos ahora el mismo número de variables aleatorias, solo que ahora, las variables aleatorias estarán constituidas por los diferentes modos de la descomposición de Fourier.

$$P[\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \dots, \delta_{k_N}; t] \quad (132)$$

donde $1, 2, \dots, N$ determinan un cierto número de onda y cada arreglo $[\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \dots, \delta_{k_N}; t]$ determina una cierta $\delta(\vec{x})$ global.

A este punto, se hará una hipótesis extra. Supondremos que la probabilidad global de obtener una realización $[\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \dots, \delta_{k_N}; t]$ se puede descomponer en N distribuciones de probabilidad independientes:

$$P[\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \dots, \delta_{k_N}; t] = \prod_{i=1}^N P_i(\delta_{k_i}; t) \quad (133)$$

Esto simplifica el problema de proponer una probabilidad $P[\delta_{\bar{k}}; t]$ al de proponer una distribución de probabilidad $P_i(\delta_{k_i}; t)$. Se puede hacer una simplificación más, si se hace uso de la evolución

de las fluctuaciones en el régimen lineal y se fija un tiempo $t_{inicial}$, de tal manera, que se defina perfectamente la evolución lineal de las distribuciones de probabilidad :

$$P_i (\delta_{\bar{k}_i} ; t_{ini}) \xrightarrow{\text{Evolucion Lineal}} P_i (\delta_{\bar{k}_i} ; t). \quad (134)$$

De esta manera, lo único que se necesita fijar es la distribución de probabilidad a un tiempo dado t_{ini} e inmediatamente queda definida para tiempos posteriores. Por lo tanto se omite la dependencia temporal:

$$P_i (\delta_{\bar{k}_i}) \equiv P_i (\delta_{\bar{k}_i} ; t_{ini}).$$

Ahora, la i -ésima distribución de probabilidad se puede escribir como:

$$P_i (\delta_{\bar{k}_i}) = \int p_i (\delta_{\bar{k}_i}) d(\delta_{\bar{k}_i}) \quad (135)$$

donde $p_i (\delta_{\bar{k}_i})$ es la densidad de probabilidad de la i -ésima distribución probabilística al tiempo t_{ini} .

Hasta aquí, los elementos probabilísticos fundamentales para definir alguna estadística que gobierne la evolución de estructura en el universo.

El siguiente paso es imponer la condición inicial, que determine dichas propiedades estadísticas. La elección más sencilla es suponer una distribución Gaussiana para cada realización $\delta_{\bar{k}_i}$ al tiempo t_{ini} .

Un **Campo Aleatorio Gaussiano** es aquel para el cual la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias (y_1, \dots, y_m) está dada por:

$$p(y_1, \dots, y_m) dy_1, \dots, dy_m = \frac{\exp(-\mathbf{Q})}{[(2\pi)^m \det(\mathbf{M})]^{\frac{1}{2}}} dy_1, \dots, dy_m, \quad (136)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Delta y_i (\mathbf{M}^{-1})_{ij} \Delta y_j, \\ \mathbf{M}_{ij} &\equiv \langle \Delta y_i \Delta y_j \rangle, \\ \Delta y_i &\equiv y_i - \langle y_i \rangle. \end{aligned} \quad (137)$$

Por la definición (129) y la definición anterior, la distribución Gaussiana del modo $\delta_{\bar{k}_i}$ al tiempo t_{ini} , será:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{\bar{k}} & , & & y_2 &= b_{\bar{k}}, \\ \Delta y_1 &= \Delta a = a_{\bar{k}} - \langle a_{\bar{k}} \rangle & , & & \Delta y_2 &= \Delta b = b_{\bar{k}} - \langle b_{\bar{k}} \rangle, \\ \mathbf{M} &= \left\| \begin{array}{cc} \sigma_a^2 & \xi = 0 \\ \xi = 0 & \sigma_b^2 \end{array} \right\|, & & & & \\ \mathbf{Q} &= \frac{a_{\bar{k}}^2 + b_{\bar{k}}^2}{2\alpha_{\bar{k}_i}^2}, \end{aligned} \quad (138)$$

donde \mathbf{M} se conoce como la matriz de covariancia. Se ha supuesto que la distribución es estadísticamente hablando, homogénea e isótropa (esto de acuerdo con el principio cosmológico), es

decir, matemáticamente cumple con: $\xi = 0$. Se concluye que, tanto la parte real como la imaginaria del modo $\delta_{\vec{k}}$ tienen distribuciones Gaussianas, además se concluye que son variables independientes. Esto lleva a la ecuación:

$$p_i(\delta_{\vec{k}_i}) da_{\vec{k}_i} db_{\vec{k}_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_{\vec{k}_i}^2}} \exp\left(-\frac{a_{\vec{k}_i}^2 + b_{\vec{k}_i}^2}{2\alpha_{\vec{k}_i}^2}\right) da_{\vec{k}_i} db_{\vec{k}_i} \quad (139)$$

Otra forma de expresar la independencia entre $a_{\vec{k}}$ y $b_{\vec{k}}$ es suponer que las fases $\phi_{\vec{k}}$ en la ecuación (130), son mutuamente independientes y aleatorias con distribución uniforme, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Por lo tanto bajo la suposición de que el universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico, la cantidad $\delta_{\vec{k}}$ dependerá única y exclusivamente del módulo del vector de onda \vec{k} , denotado por k , y no por su dirección. Bajo las mismas restricciones, $\alpha_{\vec{k}}(t) = \alpha(|\vec{k}|, t) = \alpha_k(t)$ solo dependerá de la modulo de \vec{k} .

Por lo tanto si expresamos a ésta probabilidad en términos de coordenadas polares, usando la definición (130) obtendremos:

$$p_i(\delta_{\vec{k}_i}) d|\delta_{\vec{k}_i}| d\phi_{\vec{k}_i} = \frac{|\delta_{\vec{k}_i}|}{\sqrt{2\pi\sigma_{\vec{k}_i}^2}} \exp\left(-\frac{|\delta_{\vec{k}_i}|^2}{\sigma_{\vec{k}_i}^2}\right) d|\delta_{\vec{k}_i}| d\phi_{\vec{k}_i}, \quad (140)$$

lo que efectivamente muestra que, $\phi_{\vec{k}}$, se distribuye uniformemente en el rango $(0, 2\pi)$ mientras que $|\delta_{\vec{k}}|$ obedece una distribución Gaussiana con $\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \sigma_{\vec{k}}^2$. A la mezcla de estos dos tipos de distribuciones se le conoce como *distribución de Rayleigh*.

4.2.2.5 Conclusión

En esta sección, se han hecho un conjunto de hipótesis estadísticas sobre la naturaleza de las fluctuaciones primordiales en el universo; hemos supuesto que éstas se distribuyen aleatoriamente en el espacio, que satisfacen, sin embargo, las propiedades observadas de homogeneidad e isotropía y por último hemos supuesto que estas fluctuaciones obedecen a un perfil de distribución Gaussiana. Esta hipótesis tiene sus flaquezas así que se retomará en la última sección de la tesis.

4.3 El Espectro de Potencias

4.3.1 La Función de correlación para Galaxias

La mejor manera de comparar los modelos estadísticos que aquí se estudiarán con la distribución de galaxias observadas es mediante las **funciones de correlación**. Como se verá éstas, pueden relacionarse directamente con el espectro de potencias. En la siguiente sección estudiaremos el vínculo entre la correlación observada y la teórica.

De la observación de galaxias se pueden inferir algunas propiedades empíricas, que determinan la probabilidad mixta de encontrar a dos galaxias a una separación r una de otra:

$$dP_{12} = \rho_0^2 [1 + \xi(\bar{r})] dV_1 dV_2.$$

Esta ecuación se explica como sigue: la probabilidad de encontrar a una galaxia en \vec{x} , caracterizada por su densidad ρ en un cierto elemento de volumen dV_1 es:

$$dP_1 = \rho(\vec{x}) dV_1.$$

La probabilidad de encontrar a una galaxia en $\vec{x} + \vec{r}$, caracterizada por su densidad ρ en un cierto elemento de volumen dV_2 es:

$$dP_2 = \rho(\vec{x} + \vec{r}) dV_2.$$

Por lo tanto la probabilidad de encontrar a ambas galaxias en esas posiciones será:

$$dP_{12} = \rho(\vec{x}) dV_1 \rho(\vec{x} + \vec{r}) dV_2,$$

Tomando en cuenta que:

$$\rho = \rho_o (1 + \delta),$$

sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene que:

$$dP_{12} = \rho_o^2 [1 + \delta(\vec{x})] [1 + \delta(\vec{x} + \vec{r})] dV_1 dV_2.$$

Desarrollando:

$$dP_{12} = \rho_o^2 [1 + \delta(\vec{x}) + \delta(\vec{x} + \vec{r}) + \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r})] dV_1 dV_2.$$

Si ahora se toman promedios sobre grandes volúmenes alrededor de las fluctuaciones:

$$\langle \delta(\vec{x}) \rangle_V = \langle \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle_V = 0,$$

por definición de fluctuación, solo las variancias serán distintas de cero. por lo tanto:

$$dP_{12} = \rho_o^2 [1 + \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle] dV_1 dV_2$$

A la cantidad que se encuentra entre brackets se le llama la **función de correlación de dos puntos**:

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle.$$

La forma funcional, de ésta función de correlación de dos puntos para galaxias, se ha encontrado (por la observación), que satisface una ley de potencias:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_o} \right)^{-\gamma},$$

donde $r_o = 5h^{-1} Mpc$ y el exponente $\gamma = 1.8$. Esta ley empírica es válida para un rango de escalas físicas que van de los 200 kpc a los 20 Mpc .

Con esta breve descripción de las funciones de correlación entre galaxias se procede a encontrar la relación que guarda ésta cantidad con el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales del universo.

4.3.2 Caracterización del Campo de Fluctuaciones vía el Espectro de Potencias

En las secciones anteriores se analizó, muy detalladamente, el comportamiento temporal de una fluctuación $\delta(x)$, después, también con mucho detalle, se vio la descomposición de ésta función en sus armónicos; se mostró como desglosar a cada fluctuación en un conjunto de ondas puras de número de onda \vec{k} , vía el análisis de Fourier.

Como se verá a continuación, la razón principal para hacer ésta descomposición, es encontrar la relación entre las propiedades estadísticas de la distribución Gaussiana y la función de correlación de las galaxias se vuelve muy simple.

Recordamos que el par de transformadas de Fourier para $\delta(x)$ son:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k} \quad (141)$$

y su inversa:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) dV \quad (142)$$

Para relacionar las propiedades estadísticas de estas cantidades, se tiene que recurrir al **teorema de Parseval**, el cual da una relación entre el cuadrado de $\delta(\vec{x})$ y el cuadrado de su transformada de Fourier $\delta_{\vec{k}}$:

$$\frac{1}{V} \int \delta^2(x) d^3x = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_{\vec{k}}|^2 d^3k$$

El término de la izquierda, no es otra cosa que el promedio, en el volumen V , del cuadrado de $\delta(x)$:

$$\langle \delta^2(x) \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_{\vec{k}}|^2 d^3k$$

El interés final, es el de encontrar una relación entre la función de correlación y el espectro de potencias $|\delta_{\vec{k}}|^2$. Con la expresión anterior y el hecho de que:

$$\delta = \langle \delta^2 \rangle^{\frac{1}{2}},$$

es posible caracterizar a las distintas estructuras, vía de su espectro de potencias primordial.

Entonces, usando el hecho de que, los módulos de los modos $\delta_{\vec{k}}$ obedecen una distribución Gaussiana mientras que sus fases son completamente aleatorias en el intervalo $(0, 2\pi)$, se puede caracterizar a dicha distribución Gaussiana en una forma muy conveniente. Considérese el siguiente promedio:

$$\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{p}}^* \rangle = \int \frac{d\phi_{\vec{k}} d\phi_{\vec{p}}}{4\pi^2} e^{i(\phi_{\vec{k}} - \phi_{\vec{p}})} \times \int \frac{(|\delta_{\vec{k}}|^2 d(|\delta_{\vec{k}}|)) (|\delta_{\vec{p}}|^2 d(|\delta_{\vec{p}}|))}{\sigma_{\vec{k}}^2 \sigma_{\vec{p}}^2} e \left[- \left(\frac{|\delta_{\vec{k}}|}{\sigma_{\vec{k}}} + \frac{|\delta_{\vec{p}}|}{\sigma_{\vec{p}}} \right) \right]$$

donde la primera integral da como resultado una delta de Kronecker δ_{kp} , mientras que la segunda, es el promedio de $|\delta_{\vec{k}}|^2$; por lo tanto se obtiene que:

$$\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{p}}^* \rangle = \delta_{kp} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \delta_{kp} \sigma_k^2$$

Entonces, la distribución de probabilidad Gaussiana que se ha considerado queda completamente determinada por sus dos momentos:

$$\left. \begin{aligned} \langle \delta_{\vec{k}} \rangle &= 0 \\ \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{p}}^* \rangle &= \delta_{kp} \sigma_k^2 \end{aligned} \right\}$$

A la cantidad σ_k^2 se le conoce como el **Espectro de potencias de las fluctuaciones**, éste contiene toda la información sobre el campo aleatorio de fluctuaciones que se planteo desde un principio. Claramente de la ecuación (140), y el par de ecuaciones anteriores determinan los parámetros libres de la distribución, la media vale cero y la variancia estará determinada, únicamente por el espectro de potencias.

Ya que el espectro de potencias tiene que ver directamente con la desviación estándar de la distribución Gaussiana, esta variable se tiene a disposición para ajustar el modelo estadístico con las observaciones.

Como el promedio estadístico de la fluctuación cuadrática es:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2(\vec{x}) \rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{p}} \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{p}}^* \rangle e^{i(\vec{k}-\vec{p}) \cdot \vec{x}} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sigma_k^2$$

o en forma integral:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \sigma_k^2 k^2 dk$$

entonces el promedio estadístico de $\delta^2(\vec{x})$, es independiente del punto \vec{x} . Además queda claro que cualquier propiedad particular que contenga el campo de fluctuaciones, tendrá que ver con la estructura funcional del espectro de potencias, que a su vez, tendrá que ver directamente con las observaciones.

4.3.3 La Función de correlación y El Espectro de Potencias

El siguiente punto a aclarar, es la relación entre la variancia (el espectro de potencias) que obtuvimos en secciones anteriores y las observaciones sobre la distribución de galaxias. Esto se logra mediante la llamada función de correlación de dos puntos.

los cúmulos de galaxias, galaxias, etcétera, se describen usualmente en términos de funciones de correlación. Como se vio en la sección anterior, la función de **correlación de dos puntos** $\xi(r)$ se define así: fijada una galaxia en el espacio, el exceso de probabilidad de encontrar a otra galaxia separada r de la primera, es la cantidad $\xi(r)$. Esto es:

$$dP = \rho_0^2 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 dV_2 \tag{143}$$

donde dV_1 y dV_2 son dos elementos de volumen apartados uno de otro una distancia r . Esta definición es equivalente a la definición de la **autocorrelación del campo de densidad** (también conocida como la autocorrelación de masa):

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (144)$$

donde los brackets angulados indican promedio sobre el volumen de normalización V . Si expresamos a los δ 's como la suma de componentes de Fourier y utilizamos la propiedad (128), en una de ellas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \xi(\vec{r}) &= \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'} e^{i((\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x})} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'} \rangle e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \text{ ya que : } \langle |\delta_{\vec{k}}| |\delta_{\vec{k}'}| \rangle = 0 \text{ para } \vec{k}' \neq \vec{k} \end{aligned} \quad (145)$$

Por lo tanto se concluye que la función de correlación se relaciona con el espectro de potencias según:

$$\xi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \sigma_{\vec{k}}^2 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (146)$$

y que en el caso de distribución de masa continua se expresa como:

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \sigma_{\vec{k}}^2 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \quad (147)$$

Claramente se observa que la función de correlación $\xi(r)$ es la transformada de Fourier del espectro de Potencias $\sigma_{\vec{k}}^2$ por lo que, contiene la misma información.

Ahora en un universo isotrópico, el espectro de potencias de las perturbaciones de densidad no debe tener ninguna dirección privilegiada (por definición), por lo tanto, se debe tener un **espectro de potencias isotrópico**:

$$|\delta_{\vec{k}}|^2(\vec{k}) = |\delta_k|^2(k) \quad (148)$$

de esta manera, se podrá introducir en la ecuación (147) coordenadas polares con el eje polar a lo largo de \vec{k} , usar la condición de que ξ es una cantidad real y entonces realizar la integración angular.

La integración se hace sobre la parte real de $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})$, es decir, el $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) = \cos(kr \cos \theta)$. Como se tiene que integrar sobre una distribución isotrópica de ángulos, es decir, sobre $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$, el resultado final es:

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \sigma_{\vec{k}}^2 \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk$$

Ésta, es la relación que se buscaba entre la función de correlación $\xi(\vec{r})$ y el espectro de potencias $\sigma_{\vec{k}}^2$.

4.4 La Función de Masa de Press-Schechter¹ y Jedamzik¹

4.4.1 Introducción

En los modelos cosmológicos estandar, se asume que las pequeñas fluctuaciones primordiales en el campo de las densidades, son las semillas de las estructuras cósmicas que observamos hoy en día, galaxias, cúmulos de galaxias, etcétera., Cuando se dice primordiales, se está pensando en fluctuaciones que se generan a un corrimiento al rojo $z \sim 1000$, que corresponde, más o menos, a la época de la igualdad entre materia y radiación.

Press-Schechter y Jedamzik generan un modelo estadístico que indica el número (comóvil) de objetos colapsados con masas que se encuentran en el rango $(M, M + dM)$, a una cierta época dada z .

La formulación se basa en un conjunto de simplificaciones físicas. Primero que nada Press-Schechter y Jedamzik (PSJ), suponen un universo con $\Omega = 1$, es decir plano, lo cual asegura que las fluctuaciones de densidad crecerán linealmente con el factor de expansión. En segundo lugar suponen que el espectro de potencia obedece a una ley de potencias en el número de onda: $|\delta_k|^2 \sim k^2$.

Por otro lado, se postulan un conjunto de hipótesis bastante restrictivas en el modelo, con el objeto de librar las dificultades que trae consigo un sistema, cuyo comportamiento es profundamente no lineal. Para esto se hace uso de los siguientes artificios teóricos:

Primero se afirma que, la evolución de las fluctuaciones se describe correctamente con la teoría lineal hasta que ésta, se separa de la expansión global del universo para después colapsarse en si misma.

Segundo, se afirma que una vez que la fluctuación llega a este punto, el colapso de la fluctuación es totalmente independiente de sus alrededores, de manera que, se convierte en un objeto aislado, cuyos procesos internos obedecerán a su autogravedad, a su presión térmica, así como a procesos disipativos de los cuales no nos ocuparemos en este análisis. En conclusión, después de que ha llegado a este punto de colapso, la región del universo que ocupa, se comportará como si se tratase de un cuerpo aislado de cierta masa fija. Por simplicidad se asume el colapso de una región esférica.

Tercero se asume que el campo de fluctuaciones de densidad, en su régimen lineal, se distribuye gaussianamente.

Entonces, básicamente, el modelo que presentan PSJ, se basa en la combinación de estos tres elementos: **evolución lineal, colapso gravitacional esférico y un campo de densidad cuya distribución es aleatoria Gaussiana**. Los tres elementos juntos dan una teoría cuasi-lineal y cuasi-analítica de la formación galáctica.

4.4.2 Formalismo de Press-Schechter

Como mencionamos antes, este formalismo asume que la generación de estructuras cósmicas se debe a las pequeñas fluctuaciones en el campo de densidad primordial y que este campo de fluctuaciones obedece a una distribución aleatoria Gaussiana. Ésto se expresa mediante:

$$p(\delta_{\vec{k}}) d|\delta_{\vec{k}}| d\phi_{\vec{k}} = \frac{|\delta_{\vec{k}}|}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{\sigma_k^2}\right) d|\delta_{\vec{k}}| d\phi_{\vec{k}} \quad (149)$$

donde $\phi_{\vec{k}}$ es la fase del modo de Fourier del campo de contraste de densidad $\delta_{\vec{k}}$, esta fase obedece a

una distribución aleatoria uniforme y donde σ_k^2 es el espectro de potencias.

En esta aproximación cuasi-lineal, se busca una función que exprese la manera en que se distribuyen las estructuras de distintas escalas. Así que, será esencial, el uso de un campo de fluctuaciones (excesos de densidad o contrastes de densidad) filtrado a un tamaño dado M que represente la masa contenida en una región cuyo volumen sea V y cuya densidad sea la densidad promedio en ese volumen: $\bar{\rho}$:

$$\delta_M = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \delta_k e^{ik \cdot x} W[k, V(M)] d^3k. \quad (150)$$

Como dijimos, la relación entre V y M estará dada por:

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} V. \quad (151)$$

Por lo tanto, si definimos:

$$V_W = \int W(\bar{x}) d^3x \quad (152)$$

y

$$M_W = \bar{\rho} \int W(\bar{x}) d^3x \quad (153)$$

y adicionalmente, la ventana encargada del filtraje, W , se escoje tal que:

$$W[k, V(M_W)] = \begin{cases} 1, & k \leq k_c \\ 0, & k > k_c \end{cases} \quad (154)$$

con:

$$k_c(M_W) = \frac{2\pi}{(V(M_W))^{1/3}} \quad (155)$$

obtenemos lo que se conoce como la representación cortada de las fluctuaciones.

En todo este problema la elección de la ventana es totalmente arbitraria: cambio en la forma de la ventana, trae como consecuencia una modificación de la región de muestreo y por lo tanto un cambio cuantitativo en el resultado. Claro que si la región es lo suficientemente grande, en comparación con la evanescencia de los bordes de la ventana de filtraje, estos cambios serán despreciables. A partir de ahora omitiremos el subíndice W , sobre entendiendo que la masa M es en realidad una ventana multiplicada por una cantidad de masa.

La relación que guarda esta masa de escala k , con su espectro de potencias $\sigma(M)$, es:

$$\sigma^2(M) = \frac{V}{(2\pi)^2} \int_0^{k_c(M)} \sigma_k^2 k^2 dk.$$

Escogiendo un espectro de potencias en k que vaya como ley de potencias el resultado es:

$$\sigma^2(M) = \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{(n+3)}{3}}$$

donde M_\odot es tal que $\sigma^2(M_\odot) = 1$.

Ahora bien, la fluctuación de exceso de densidad δ_M irá creciendo aproximadamente en forma lineal hasta que después de llegar a su valor crítico, (que en el caso de una fluctuación esférica vimos que es $\delta_c = 1.69$), la fluctuación literalmente se hace pelotas y se afirma que: esa fluctuación ha colapsado y a virializado, eso es todo.

El asunto es, ya que se tiene el comportamiento de una masa en particular, como se podría generar una función que describiera la probabilidad de que al observar por el telescopio, contamos todas las galaxias que hay hoy en día y luego las clasificamos por tamaños, se encuentra que nos rodean por ejemplo, 50 galaxias grandes.

Pero no solo eso sino que si además hace 10 años hubiera hecho el mismo experimento, cual sería la probabilidad de encontrar: 3 galaxias chicas. Es decir queremos saber cual es la probabilidad de encontrar una cierta cantidad de galaxias de tamaño dado, pero además queremos saber como cambia esta probabilidad con el tiempo.

Press-Schechter se propusieron pues el encontrar una función de probabilidad tal, pero con la propiedad que esta se pudiera encontrar tan solo proporcionando la expresión funcional del espectro de potencias primigenio, es decir el espectro que corresponde al campo de fluctuaciones inicial, del que tanto se ha hablado aquí. La descripción es como sigue:

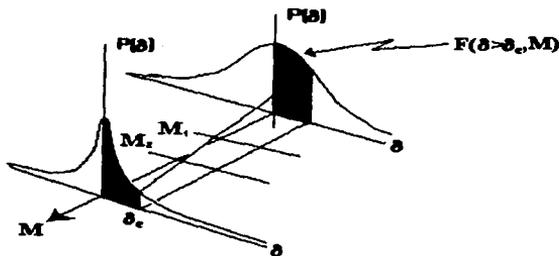
La probabilidad de encontrar una región con una masa M en la que el exceso de densidad de ésta región por lo menos ya tiene un exceso de densidad de colapso δ_c estará dada por:

$$F(> \delta_c, M) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right] d\delta \quad (156)$$

Distinguiamos dos aspectos importantes en la formulación, primero, que se usa una distribución de probabilidad Gaussiana, esta es una hipótesis perfectamente sensata, tomando en cuenta que se esta explotando por primera vez esta aproximación al problema. Después se regresará a este punto, por lo pronto lo tomamos como lo que es, una primera hipótesis sensata.

El segundo aspecto interesante es como P&S asocian la probabilidad de encontrar una región de escala M cuyo contraste de densidad δ_M es ya un exceso de densidad mayor que δ_c mediante la cola de la distribución (un detalle técnico: es interesante ver que mientras uno no se preocupe por el complemento de esta probabilidad, el formalismo garantiza obtener probabilidades asociadas a contrastes de densidad positivas en caso contrario hay problemas). Entonces esta fórmula indica que dada la masa M , tendremos una potencia asociada $\sigma(M)$, la cual definirá una anchura de la campana de Gauss y por lo tanto estaríamos asociados a decir que si observamos por el telescopio siempre ocurrirán dos cosas:

- 1) Encontraremos muy poquitos objetos de masas M 's que tengan $\delta_M = \infty$
- 2) Si aproximadamente $\sigma \sim 1/M$ y ésta determina la anchura de la campana, entonces mientras más pequeños sean los objetos más probabilidad tendremos de encontrarlos con sobre densidades del orden de δ_c . Ver figura:



La segunda afirmación tiene sus problemas y es que el objeto observado M puede, en realidad tener una enorme variedad de tamaños, en la siguiente figura se aprecia por lo menos cuatro casos de los cuales solo uno es el que serviría para hacer la inferencia 2).

Esto da una idea de la ilusión que genera el uso de filtros, en cierta forma es paradójico que con el afán de contar objetos aislados se haya escogido un detector que lo único que no hace es: ¡¡ distinguir objetos aislados !!

Sin embargo estos eran los primeros pasos en el intento de encontrar la fracción de objetos con tamaños dados entre M y dM cuyo exceso de densidad δ_M sea mayor que el exceso de densidad de colapso δ_c y lo que se especuló fue que esta fracción de objetos estaría determinada por :

$$f(M) dM = -2 \frac{\partial F}{\partial M} dM \quad (157)$$

o bien:

$$f(M) dM = -2 \frac{dF}{dM} dM \quad (158)$$

donde la relación con el número de objetos con masa M y $M + dM$ es:

$$n(M) = \left(\frac{M}{\bar{\rho}} \right) f(M) \quad (159)$$

entonces según Press & Schechter:

$$n(M) = -2 \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{dF}{dM} \equiv n_{ps} \quad (160)$$

El razonamiento para obtener esta fórmula fue como sigue: cambiando $\delta_M \rightarrow \delta_V$, entonces la ecuación(156), da la probabilidad de encontrar objetos medidos a escala V con contrastes de densidad mayores al de colapso δ_c :

$$F(\delta_V > \delta_c, V) = \mathcal{P}(V)$$

$$F(\delta_V < \delta_c, V) = \mathcal{P}(\bar{V})$$

ésta denotaría la probabilidad de encontrar objetos medidos al tamaño V tales que no alcanzan el exceso de densidad de colapso, es decir el complemento de los objetos denotados por V .

Lo que se busca son aquellos **objetos** con escala V que ya **no colapsan** a una escala mayor $V + dV$. La probabilidad de obtener esos objetos es:

$$f(V) dV = \mathcal{P}(V) \mathcal{P}(\overline{V+dV} | V)$$

el primer factor del miembro derecho, es exactamente la F , es decir la probabilidad de obtener objetos medidos con escala V tales que su contraste de densidad sea mayor que el de colapso δ_c . El segundo factor es una probabilidad condicional, y da, teniendo la probabilidad de que, medidos con una escala mayor $V + dV$, ya no alcancen el exceso de densidad de colapso δ_c .

Usando la definición de complemento de un conjunto, la ecuación anterior se escribe como:

$$f(V) dV = \mathcal{P}(V) [1 - \mathcal{P}(V + dV | V)]$$

usando el teorema de Bayes, el último término se puede escribir en términos de la probabilidad mixta:

$$f(V) dV = \mathcal{P}(V) \left[1 - \frac{\mathcal{P}(V + dV, V)}{\mathcal{P}(V)} \right]$$

es decir:

$$f(V) dV = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(V + dV, V)$$

Ahora bien, Press&Schechter afirman que: si un objeto a la escala $V + dV$ tiene el exceso de densidad de colapso, entonces a una escala menor, **siempre** tendrá un exceso de densidad mayor que el exceso de densidad de colapso. Por lo tanto si: $\mathcal{P}(V + dV, V) = \mathcal{P}[(V + dV) \cap V]$ y $V \subset (V + dV)$ necesariamente se cumple que:

$$\mathcal{P}(V + dV, V) = \mathcal{P}(V + dV)$$

Es decir:

$$f(V) dV = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(V + dV) = -\frac{\partial \mathcal{P}(V)}{\partial V} dV$$

el siguiente paso es regresar a la función F y obtenemos casi la ecuación(157):

$$f(M) dM = -\frac{\partial F}{\partial M} dM$$

Excepto por el 2, la fórmula es igual, este dos causó muchos problemas ya que es necesario tenerlo si queremos que al sumar todas las fracciones posibles, estas den la unidad. Lo que se encuentra es que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(M) dM &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial M} dM = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial M} \left[\int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right] d\delta \right] dM = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de aquí que ad hoc se imponga el factor 2 en la ecuación (157). Aquí dejamos el análisis de Press&Schechter y pasamos a una nueva formulación para encontrar la distribución del número objetos según su masa y tiempo.

4.4.3 Formalismo de Jedamzik²

Nos podemos dar cuenta de que la manera de contar los objetos según el método de PS no es del todo cierta pues una de las afirmaciones clave en su formulación es la que afirma que:

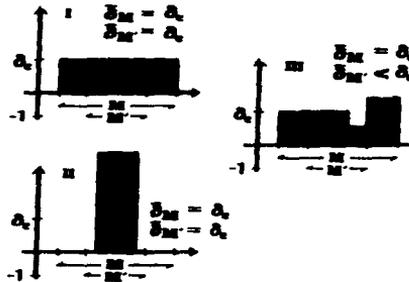
$$\mathcal{P}(V + dV, V) = \mathcal{P}(V + dV) \quad (161)$$

Pero no olvidemos que en este contexto V representa más que un simple volumen, representa a una región del espacio de volumen V que además tiene una sobre densidad igual o mayor que δ_c .

Entonces, como podemos ver en la siguiente figura la ecuación anterior no es siempre cierta, no siempre un objeto muestreado en la escala $V + dV$ con exceso de densidad δ_c satisface que muestreando a una escala V siga teniendo el exceso de densidad δ_c y por lo tanto **en general**:

$$V \not\subseteq (V + dV) \quad (162)$$

Esto por supuesto destruye por completo el esquema anterior.



En la figura anterior, solo en el diagrama I y II el exceso de densidad sigue siendo el mismo para M y M' (donde $M \rightarrow V + dV$ y $M' \rightarrow V$) el diagrama III se opone a ésta suposición. Evidentemente no tomar en cuenta este tipo de situaciones trae como consecuencia un problema en el conteo final.

En 1995 Jedamzik propone una formulación alternativa, en la que el problema de conteo se resuelve introduciendo el concepto de **Regiones Aisladas**, esencialmente consiste en fabricar una estadística sobre los objetos de distintos tamaños, usando como herramienta fundamental a la región M^* la cual por hipótesis es tal que:

I) cualquier $M < M^*$ solo debe tener un exceso de densidad $\bar{\delta} = \bar{\delta}^* \geq \delta_c$. Dos ejemplos de regiones aisladas donde se ilustra esto es en la siguiente figura:



II) En particular cualquier $M < M^*$ que tenga una exceso de densidad **menor** que el exceso de densidad de colapso será contada como un objeto que eventualmente virializará y colapsará

III) Y cualquier $M > M^*$ que tenga un contraste de densidad mayor que el de M^* se contara como un objeto que eventualmente colapsará en un objeto de mayor tamaño.

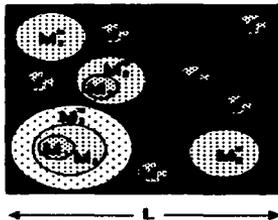
Con estas restricciones al concepto de región, se puede hacer un conteo correcto. El formalismo es como sigue:

Ordenamos al conjunto de escalas M^* por tamaño: ($M_1^* < M_2^* < M_3^* < \dots$) y consideramos al volumen L^3 de escala $M \gg M_2^*$. La fracción del volumen con exceso de densidad δ_c , debido a las regiones aisladas de menor tamaño M_1^* , estará dada por:

$$F(\delta_c, M_1) L^3 = n(M_1^*) V_1 L^3 + \dots \quad (163)$$

donde V_1 el volumen asociado a la escala M_1^* vía: $V_1 \bar{\rho} = M_1^*$ y $F(\delta_c, M_1)$ es la probabilidad de que una región de tamaño M_1 tenga un contraste de densidad promedio igual o mayor a δ_c .

Lo que se tiene que añadir, es la fracción de regiones M de tamaño M_1^* que estén incluidas en las regiones aisladas más grandes ($M_2^* < M_3^* < M_4^* \dots$) que se encuentran en el volumen grande L^3 :



Para introducir estas regiones en el conteo usamos la probabilidad condicional, $P(M_1 | M_2^*)$, de que, dado que ya se encontró una región aislada de tamaño M_2^* , adentro encontremos una región de tamaño M_1 . Aun que ésta región no es aislada (por estar dentro de una región aislada), tendrá un contraste de densidad mayor o igual a δ_c :

$$F(\bar{\delta}_{M_1} \geq \delta_c, M_1) L^3 = n_1(M_1^*) V_1 L^3 + n(M_2^*) V_2 L^3 P(M_1 | M_2^*) + \dots \quad (164)$$

Los términos faltantes serán similares. El resultado final es que la fracción de objetos virializados correspondientes a la escala M_1 con $\bar{\delta}_{M_1} \geq \delta_c$ en el volumen L^3 serán:

$$F(\bar{\delta}_{M_1} \geq \delta_c, M_1) = \frac{1}{\bar{\rho}} \sum_{i=1}^{\infty} M_i^* n(M_i^*) P(M_1 | M_i^*) \quad (165)$$

o en forma integral:

$$F(\bar{\delta}_{M_1} \geq \delta_c, M_1) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{M_1^*}^{\infty} M' n(M') P(M_1 | M') dM' \quad (166)$$

donde $n(M^*)$ es la llamada función de masa o bien el número de densidad de objetos aislados de escala M^* . Para poder extraerla de la sumatoria (o de la integral) calculamos la ecuación anterior para toda M_i^* obtendremos una expresión matricial del tipo:

$$\begin{bmatrix} F(M_1) \\ F(M_2) \\ \vdots \\ F(M_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(M_1^*) M_1^* \\ n(M_2^*) M_2^* \\ \vdots \\ n(M_n^*) M_n^* \end{bmatrix} \quad (167)$$

donde $P_{ij} \equiv P(M_i | M_j^*)$ donde evidentemente $P(M_i | M_j^*) = 0$ para $M_i > M_j^*$ y $P(M_i | M_i^*) = 1$ por lo que la ecuación matricial siempre tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} F(M_1) \\ F(M_2) \\ \vdots \\ F(M_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(M_1^*) M_1^* \\ n(M_2^*) M_2^* \\ \vdots \\ n(M_n^*) M_n^* \end{bmatrix} \quad (168)$$

ya la obtención de la función de masa se reduce a invertir esta ecuación matricial. La diferencia entre el resultado de Jedamzik y Press&Schechter es que, por ejemplo, para Press&Schechter la probabilidad de encontrar una región M_1 en M_j^* con las mismas características de M_1^* es la **unidad** lo cual no necesariamente es cierto, ya que como hemos estado repitiendo M^* involucra un tamaño y una sobre densidad, entonces, reescribiendo la segunda fórmula de esta sección, la ecuación(162), para $i < j$, obtenemos que en general:

$$M_i \not\subseteq M_j^* \quad (169)$$

por lo que en general:

$$P(M_i | M_j^*) \neq 1 \quad (170)$$

Para apreciar en todo su esplendor la diferencia entre la fórmula de PS y Jedamzik, derivamos la ecuación(166) respecto de la masa:

$$f(M) = \frac{dF(\delta_c, M)}{dM} = -\frac{1}{\bar{\rho}} M n(M) + \frac{1}{\bar{\rho}} \int_M^\infty M' n(M') \frac{dP(M | M')}{dM'} dM' \quad (171)$$

acomodando los términos:

$$n(M) = \left(\frac{\bar{\rho}}{M} \right) \left[-\frac{dF(\delta_c, M)}{dM} + \frac{1}{\bar{\rho}} \int_M^\infty M' n(M') \frac{dP(M | M')}{dM'} dM' \right] \equiv n_J \quad (172)$$

Lo cual muestra una clara diferencia con respecto a la ecuación de PS. Solo suponiendo que la derivada de la probabilidad condicional sea una delta de Dirac:

$$\frac{dP(M | M')}{dM'} = \delta(M - M') \quad (173)$$

y tomando el límite cuando $M \rightarrow 0$ en la ecuación(172), recuperaríamos la fórmula de PS:

$$n(M) = -2 \left(\frac{\bar{p}}{M} \right) f(M) \quad (174)$$

ecuación(159). Con esto damos por terminado el análisis de la función de masa.

4.5 Historias de Formación Galáctica

4.5.1 Introducción

En esta sección aterrizaremos los resultados anteriores y partiendo de los resultados de Press&Schechter-Jedamzik y de una hipótesis probabilística de la agregación de materia, podemos obtener las posibles historias de formación galáctica. Después plantearemos algunas de las dificultades que se encuentra el modelo ortodoxo de campos de fluctuaciones de distribución Gaussiana y propondremos una formulación alternativa a este modelo, basándonos en un modelo de campos de distribución Lognormal. Este corrige, principalmente, el uso sistemático de densidades más negativas que -1. Además de eso este modelo no intenta ser más que un modelo de exploración en el manejo de estadísticas no-Gaussianas.

4.5.2 Formalismo Gaussiano de Bower³

El estudio de las galaxias se puede realizar desde dos perspectivas totalmente distintas. La primera se aboca a describir la evolución de una galaxia a partir de los ingredientes internos que la componen, sin tomar en cuenta el proceso evolutivo que sufre el entorno. La otra perspectiva intenta explicar la evolución de una galaxia desde el punto de vista cosmológico. Es decir se plantea la pregunta: ¿Cuáles son los parámetros que permiten vincular la evolución de una galaxia, con la evolución global del universo?

La propuesta de Bower para contestar a esta pregunta es extraordinaria. Bower primero que nada plantea que:

I) el parámetro que contiene la información cosmológica inicial del campo de fluctuaciones es el espectro de potencias. Aquí está la información sobre el escenario de materia oscura y bariónica en el que se desarrollara la galaxia.

II) la función de masa es la estructura teórica más adecuada para representar las solución al problema ya se trata de un aparato estadístico que trata precisamente con la distribución de estructura en el universo.

III) una hipótesis estadística Gaussiana, la cual, por ser biparamétrica permitirá hacer predicciones de las fluctuaciones del campo, usando como regulador al espectro de potencias.

La construcción teórica del formalismo, se basa en un conjunto de definiciones e hipótesis físicas, estas permitirán al final tener un modelo predictivo sobre la evolución galáctica.

I) DEFINICIONES:

1) llamamos exceso de densidad promedio al valor promedio de la densidad en un volumen V dado, es decir la cantidad:

$$\delta_V \equiv \frac{\int_V \delta(\vec{r}) dV}{\int_V dV} \quad (175)$$

2) llamamos densidad crítica a la densidad que se obtiene extrapolando el valor de colapso y virialización. de una región esférica, al régimen lineal. Su forma funcional respecto del tiempo es:

$$\delta_c = 1.69 (1 + z) \quad (176)$$

3) Denotamos por V' al volumen que ocupa una galaxia de masa M' . al día de hoy. La galaxia tiene la propiedad de estar completamente virializada hoy en día.

4) Denotamos por σ_V a la variancia de δ_V .

II) HIPÓTESIS. Las hipótesis teóricas son de diferentes caracteres:

1) Se asume la evolución lineal de las fluctuaciones como esquema fundamental.

2) Asumimos que el promedio de los contrastes de densidad promedio de los subvolúmenes de V' coinciden con el contraste de densidad promedio de V' .

3) Asumimos también que el campo de fluctuaciones promedio, obedece a una estadística de campo aleatorio Gaussiano. y por último asumimos que:

4) la única cantidad que interviene en el proceso evolutivo de la galaxia (desde el punto de vista cosmológico) es el espectro de potencias.

III) FORMALISMO:

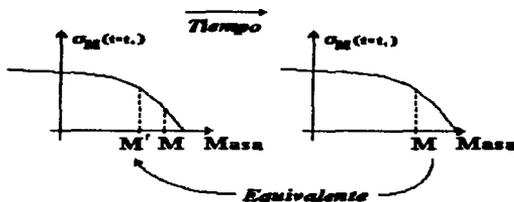
En los tiempos en los que el universo desciende su temperatura al punto en que la materia y la radiación se desacoplan, la materia se encuentra distribuida a grandes escalas homogénea e isotrópamente, sin embargo a pequeñas escalas, el universo está plagado de pequeñísimas fluctuaciones de densidad, estas fluctuaciones, son la semillas de lo que se vemos hoy en día como galaxias, cúmulos de galaxias etc.

Considérese a la distribución de probabilidad del exceso de densidad promedio δ_V en algún volumen V escogido aleatoriamente y proponemos que esta probabilidad obedece a una distribución Gaussiana:

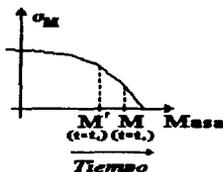
$$P(\delta_V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V^2}} \exp\left(-\frac{\delta_V^2}{2\sigma_V^2}\right) \quad (177)$$

Y ya que usaremos esta expresión para describir la evolución de una galaxia, es importante notar que en este formalismo la ecuación anterior define la estructura estadística de nuestra descripción, es decir, se asume que no cambia en el tiempo. Así toda la información temporal queda incluida en el espectro de potencias definido por σ_V como vimos secciones anteriores, el espectro de potencias es el resultado de analizar el comportamiento de las fluctuaciones de distintas escalas al ser procesadas por los distintos estadios del universo. Ahora bien, por la forma en la que evoluciona el espectro de potencias se puede ver de dos maneras distintas. Por un lado podemos fijar el tiempo $t = t_0$ en una estructura de escala bien determinada, por ejemplo $M = 10^7 M_\odot$, e ir obteniendo un valor del

espectro de potencias σ_V conforme el tiempo transcurre. El resultado de este procedimiento es que la masa M al tiempo $t = t_1$ tendrá un valor del espectro de potencias equivalente al de una masa menor M' al tiempo $t = t_0$.



Debido a este comportamiento es totalmente equivalente mantener al espectro de potencias fijo en el tiempo y suponer que conforme el tiempo transcurre, la estructura en consideración, creció desde una escala M' hasta convertirse en una estructura de masa M .



En conclusión tenemos las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} (t_1 \rightarrow t_0) &\implies (M' \rightarrow M) \\ (M' \rightarrow M) &\implies (\sigma_{V'} \rightarrow \sigma_V) \end{aligned} \quad (178)$$

y afirmamos que toda la información evolutiva se encuentra en el espectro de potencias.

Entonces un conjunto de distribuciones Gaussianas con $\sigma_{V_0}, \sigma_{V_1}, \dots, \sigma_{V_n}$, ordenadas de tal manera que $\sigma_{V_0} < \sigma_{V_1} < \dots < \sigma_{V_n}$, implica (para espectros de potencias como los de las figuras anteriores) que la masa más grande corresponde a σ_{V_0} y por lo tanto se trata de la estructura más reciente del conjunto. Notamos también que este tipo de estructuras serán pocas ya que σ_{V_0} pequeñas implica una campana de Gauss muy picuda y por lo tanto, serán muy pocas las estructuras que alcancen el exceso de densidad de colapso δ_c . Por otro lado las estructuras con grandes σ_{V_n} (masas pequeñas)

tendrán una campana de Gauss muy extendida y por lo tanto serán muchas las estructuras de estas escalas las que alcancen su exceso de densidad de colapso.

Todas estas características llevan directamente a lo que se conoce como un **proceso de evolución jerárquico**, e implica un esquema de evolución en el que las estructuras primitivas más favorecidas son las de escala pequeña, luego estas crecen y se funden entre si para formar estructuras de mayor envergadura.

En este contexto, un objeto puede ser de tres tipos, puede tratarse de una masa de ese tamaño ya colapsada y virializada, puede tratarse de polvo que ocupa esa región o una combinación de ambas.

El proceso de fusión entre grandes objetos virializados se conoce como **Proceso de Agregación** y al proceso de incorporación de gas y polvo a un objeto de mayor tamaño se le conoce como **Proceso de Acreción**. Dependiendo del contexto en el que se este haciendo el análisis, se usara el primero, el segundo o una combinación de ambos.

Con las consideraciones anteriores y algunas restricciones física adicionales finalmente podremos construir un modelo consistente con la evolución galáctica.

Imaginemos que ubicamos una región del espacio de volumen V la cual ya ha colapsado hoy en día, y tiene una sobre densidad δ , podemos imaginar que esta región en un tiempo anterior habrá estado formada de un subvolumen V' cuya sobre densidad es la de colapso y un subvolumen que aun estaba con una sobre densidad por debajo de la de colapso.

Entonces el proceso evolutivo de una galaxia decimos que se simula estadísticamente por un proceso que cumple con la siguiente ley de agregación o acreción:

$$P(V', \delta_{V'} \geq \delta_c | V, \delta_V) \quad (179)$$

Es decir que dado un objeto virializado V , cual es la probabilidad de que una cierta fracción de este V' haya virializado en un tiempo anterior. Iterando esta fórmula, podremos encontrar la probabilidad de que la subregión V' virializada, en un tiempo anterior haya estado formada por una fracción virializada V'' :

$$P(V'', \delta_{V''} | V', \delta_{V'}) \quad (180)$$

y así sucesivamente. Nuestra meta entonces, es encontrar la fórmula explícita en términos de una distribución Gaussiana.

La manera de encontrar esta expresión es primero desglosar a la probabilidad en probabilidades mas sencillas de calcular, para esto usamos la fórmula de Bayes:

$$P(\delta_{V'} | \delta_V) = \frac{P(\delta_{V'}, \delta_V)}{P(\delta_V)} \quad (181)$$

Donde por comodidad hemos omitido las V 's.

Es decir necesitamos la distribución de **probabilidad mixta** de encontrar los volúmenes V y V' y además la distribución de probabilidad de encontrar una región con volumen V , que tenemos en la ecuación(177). La probabilidad mixta la podemos encontrar a partir de la ecuación(136), para distribuciones Gaussianas multivariadas. En general para una distribución bivariada la probabilidad mixta sería:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi |M_{ij}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) M_{ij}^{-1} (\Delta x, \Delta y)^T \right] \quad (182)$$

donde $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta y = y - \bar{y}$, y como habíamos definido antes M_{ij} es la matriz de covariancia, que en este caso tendrá los valores:

$$\|M_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cc} \sigma_x^2 & \xi \\ \xi & \sigma_y^2 \end{array} \right\| \quad (183)$$

dividiendo la ecuación(182) entre la ecuación(177) obtenemos la probabilidad condicionada que buscamos. Desarrollando explícitamente en términos de la matriz de covariancia:

$$P(x | y) = \frac{1}{\left[2\pi \left(\sigma_x^2 - \frac{\xi^2}{\sigma_y^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{\left(\Delta x - \frac{\xi \Delta y}{\sigma_y^2} \right)^2}{2 \left(\sigma_x^2 - \frac{\xi^2}{\sigma_y^2} \right)} \right] \quad (184)$$

Lo que indica que se trata también de una distribución Gaussiana.

Ahora bien, asociando:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} x \\ \sigma_x \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \delta_{V'} \\ \sigma_{V'} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} y \\ \sigma_y \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \delta_V \\ \sigma_V \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (185)$$

Obtenemos la probabilidad deseada entre ambas regiones:

$$P(\delta_{V'} | \delta_V) = \frac{1}{\left[2\pi \left(\sigma_{V'}^2 - \frac{\xi^2}{\sigma_V^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{\left(\delta_{V'} - \frac{\xi \delta_V}{\sigma_V^2} \right)^2}{2 \left(\sigma_{V'}^2 - \frac{\xi^2}{\sigma_V^2} \right)} \right] \quad (186)$$

Como se puede observar hay todavía un elemento libre la ξ , éste coeficiente se le llama **Parámetro de Correlación** y su función es la de dar cualquier vínculo existente entre ambas distribuciones. Por ejemplo si en nuestro caso la distribución de probabilidad de encontrar (V, δ_V) , no influyera en nada con la probabilidad de encontrar $(V', \delta_{V'})$, entonces se dice que las distribuciones son **independientes** entre sí y por lo tanto:

$$\xi = 0 \quad (187)$$

A continuación veremos que en realidad existe una dependencia entre la distribuciones y por lo tanto el valor del parámetro de correlación será distinto de cero.

La dependencia entre ambas distribuciones se debe a una condición física. Imaginemos que tenemos a la región V y ésta a su vez contiene a su subregión V' . La contención va a significar dos cosas, la obvia, es que el subvolumen estará adentro del volumen y la segunda es que el promedio de los excesos de densidad de los subvolúmenes en V tendrá que ser igual al exceso de densidad del volumen V :

$$\langle \delta_V \rangle_{V'} = \delta_{V'} \quad (188)$$

por lo tanto si las definiciones de los elementos de la matriz de covariancia son:

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \langle \delta_V, \delta_V \rangle \\ \sigma_{V'} &= \langle \delta_{V'}, \delta_{V'} \rangle \\ \xi &= \langle \delta_V, \delta_{V'} \rangle \end{aligned} \quad (189)$$

usando la ecuación(188) en la ecuación(189, c) vemos que el resultado es:

$$\xi = \langle \delta_V, \langle \delta_V \rangle_{V'} \rangle \quad (190)$$

Que en el caso límite en que el subvolumen V' sea igual al volumen V tendremos:

$$\xi = \langle \delta_V, \delta_V \rangle = \sigma_V^2 \quad (191)$$

Este resultado cambia la ecuación(186), a una expresión mucho más sencilla:

$$P(\delta_{V'} | \delta_V) = \frac{1}{[2\pi(\sigma_{V'}^2 - \sigma_V^2)]^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{(\delta_{V'} - \delta_V)^2}{2(\sigma_{V'}^2 - \sigma_V^2)} \right] \quad (192)$$

En esta expresión podemos apreciar como en el caso límite en que $V \gg V'$, entonces $\sigma_V \ll \sigma_{V'}$ y lo que obtendremos es que la probabilidad de encontrar una región de volumen V' y sobre densidad $\delta_{V'}$ obedecerá a una distribución Gaussiana centrada en δ_V lo que significaría que la sobre densidad se encuentra sobre una plataforma de densidad mayor a la densidad promedio del universo.

Siguiendo con el procedimiento de Press&Schechter y Jedamzik, calculamos ahora la función de masa, para así determinar el número de objetos de cierto tamaño, virializados y que se encuentran contenidos en una región restringida al volumen V de masa M

Es decir tratamos de encontrar la función:

$$\bar{f}(M', \delta_c | M, \delta) \quad (193)$$

la cual la calcularemos con el ansatz de Press&Schechter o su equivalente, la versión de Jedamzik en un espacio con materia distribuida tal que: $\frac{dP(M|M')}{dM} = \delta(M - M')$:

$$\bar{f}(M', \delta_c | M, \delta) dM' = -2 \frac{\partial F(M', \delta_c | M, \delta)}{\partial M'} dM' \quad (194)$$

Evidentemente esta es una aproximación, pero al parecer la mezcla del ansatz y la distribución Gaussiana y resolver la matriz de Jedamzik ecuación(168) con una distribución Gaussiana dan el mismo resultado estadístico.

En semejanza a la ecuación(156), la probabilidad de encontrar una fracción de masas M' con sobre densidad igual o mayor que δ_c , contenidas en una región de tamaño mayor M y sobre densidad δ estará dada por la ecuación:

$$\bar{F}(M', \delta_c | M, \delta) = \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta_{V'} = \delta' | \delta_V = \delta) d\delta' \quad (195)$$

sustituyendo la fórmula de la probabilidad condicional, ecuación(192):

$$\bar{F}(M', \delta_c | M, \delta) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{[2\pi(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)]^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(\delta' - \delta)^2}{2(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)} \right] d\delta' \quad (196)$$

o bien:

$$\bar{F}(M', \delta_c | M, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(\delta_c - \delta)}{\sqrt{2(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)}}}^{\infty} e^{-y} dy \quad (197)$$

Ahora si usando el ansatz de la ecuación(194) podemos dar una expresión para la probabilidad de encontrar una fracción de la masa total M , que está contenida en grupos colapsados con masas entre M' y dM' , a un tiempo anterior. Como la ecuación anterior está expresada en términos de la variable muda y , la diferenciación parcial se puede realizar explícitamente dando como resultado final:

$$\bar{f}(M', \delta_c(t) | M, \delta) dM' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_{M'}}{(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)^{\frac{3}{2}}} (\delta_c - \delta) \exp[\beta] \frac{d\sigma_{M'}}{dM'} dM' \quad (198)$$

con:

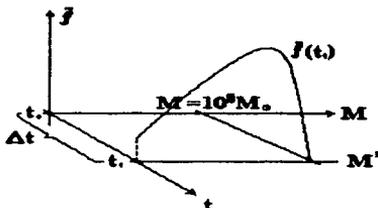
$$\beta = -\frac{(\delta_c - \delta)^2}{2(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)} \quad (199)$$

Entonces la manera de usar esta formula es como sigue:

Primero, decidimos si queremos estudiar una galaxia de campo o un cúmulo de galaxias, en el primer caso ésta formulación representará un proceso de agregación, en el segundo caso representará un proceso de acreción. La razón fundamental para no explicar con este formalismo la evolución de galaxias de cúmulo, es que en realidad éstos no son objetos aislados, sus halos de materia oscura se funden entre sí, de esta manera lo que nosotros observamos es la aglutinación de materia bariónica que cae en los vasos de potencial más pronunciados del cúmulo. Por este motivo continuamos con el estudio de las galaxias de campo.

Segundo, seleccionamos la masa M , que corresponde a la galaxia que queremos estudiar. Esta masa, dará inmediatamente algún valor del espectro de potencias σ_M , afirmamos que ésta galaxia ya ha colapsado y virializado: $\delta \geq \delta_c$, hoy en día: t_o .

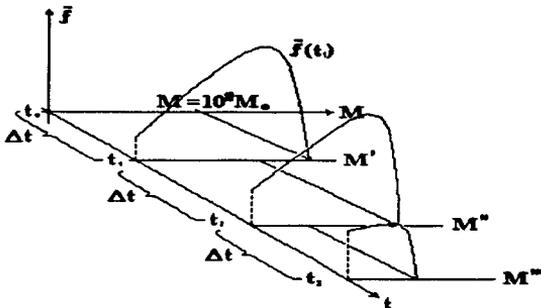
Tercero, se escoge un tiempo $t_o - \Delta t$ anterior. A éste tiempo le corresponderá una distribución de probabilidad $\bar{f}[t_1]$ determinada por la masa M y la σ_M , según la ecuación (198).



Cuarto, se elige un número al azar entre 0 y 1, y se iguala a $\bar{f}(M', \delta_c(t_1) | M, \delta)$. De esta manera, el único parámetro sin fijar es el valor de M' . Se despeja a M' de la ecuación (198) y de esta manera se ha encontrado en forma estadística la masa de la subregión contenida en el volumen original, que al tiempo $t_c - \Delta t$ ya se encuentra colapsado.

Quinto, se encuentra en el espectro de potencias. El valor de σ correspondiente a M' será $\sigma_{M'}$.

Sexto, se realiza el mismo procedimiento solo que ahora usando la distribución de probabilidad: $\bar{f}(M'', \delta_c(t_2) | M', \delta')$, tal como se muestra en la siguiente figura:



El resultado final se puede apreciar en la gráfica 1 en el capítulo siguiente, en la gráfica 2 se destaca únicamente la trayectoria promedio de todas las historias de acreción.

Así, se ha obtenido una descripción de la evolución de una galaxia en términos de un parámetro cosmológico fundamental, el espectro de potencias: σ_M . La información obtenida en este proceso es el conjunto de todas las posibles historias de acreción de una galaxia.

Como se puede apreciar en la gráfica 3, la curva de rotación asociada a ésta, es una curva de rotación plana, exactamente como se observa en la generalidad de las galaxias.

Sin embargo, la parte de la curva que representa al núcleo de la galaxia no corresponde a los núcleos de densidad constante observados.

4.5.3 Historias de Formación: Estadística no Gaussiana

4.5.3.1 Motivaciones

Hasta el momento se ha desarrollado el análisis estadístico de la evolución de las fluctuaciones primigenias del universo, alrededor de la siguiente hipótesis: las leyes estadísticas que obedecen los procesos jerárquicos, de formación de estructura en el universo, son siempre Gaussianas. Sin embargo esta hipótesis no es definitiva ni mucho menos, el objetivo principal de esta tesis será precisamente abordar una estadística no Gaussiana.

En el resto de la tesis se investigará la sensibilidad de un cambio de estadística a una predicciones erróneas e irreparables del formalismo Gaussiano, a saber, la **predicción de halos con núcleo singularmente denso**. Además se tratará (al menos en forma cualitativa) de vincular este hecho con el defecto de la estadística Gaussiana de considerar **densidades negativas**.

Quizás la principal razón por la cual no se han investigado modelos no Gaussianos es la complicación de sus cálculos. La gran mayoría de las estadísticas no Gaussianas no son tratables analíticamente. Por esa misma razón aquí se explorará una estadística no Gaussiana, la **estadística Lognormal**, esta estadística tiene dos puntos a favor y uno en contra, los puntos a favor son: 1. Es tratable analíticamente, 2. no incluye densidades negativas. El punto en contra es básicamente que la estadística Lognormal no se propone (al igual que la Gaussiana), por algún elemento físico.

4.5.3.2 Propiedades Estadísticas de la distribución Lognormal

La función de distribución de probabilidad N-dimensional para un campo aleatorio Lognormal puede ser obtenida a partir de una función de distribución de probabilidad N-dimensional para un campo aleatorio Gaussiano. Todos los detalles sobre las ecuaciones que siguen se encuentran en el Apéndice.

La función de distribución N-dimensional del campo Lognormal es:

$$P_{LN}(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \mathbf{M})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^N y_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{ij}^{-1} (\ln y_i - \mu_{y_i}) (\ln y_j - \mu_{y_j}) \right] \quad (200)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de covariancia y donde cada y_i corresponde a la i -ésima componente del campo aleatorio $\vec{y} = \vec{y}(z)$.

De la ecuación (200) se desprende que la función de distribución unidimensional del campo Lognormal será:

$$P_{LN}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (201)$$

donde claramente la probabilidad de encontrar a y entre $(-\infty, 0)$ es nula y entre $[0, \infty)$ estará dada por la ecuación anterior.

La propiedad estadística más importante de las distribuciones son sus momentos. El momento n -ésimo de la Lognormal es:

$$\langle y^n \rangle = \exp \left[n\mu_y + \frac{1}{2} (n\sigma_y)^2 \right] \quad (202)$$

Usamos este resultado para calcular la Media y la Variancia del campo. La Media se define como $\langle y^1 \rangle$ por lo tanto:

$$\langle y \rangle = \exp \left[\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right] \quad (203)$$

La Variancia se define como:

$$\Sigma^2 \equiv \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle \quad (204)$$

sustituyendo las ecuación (202) con $n = 1$ y $n = 2$ en la ecuación anterior, obtenemos que la variancia es:

$$\Sigma^2 = \exp \left[2 \left(\mu_y + \sigma_y^2 \right) \right] - \exp \left[2\mu_y + \sigma_y^2 \right] \quad (205)$$

A continuación los resultados más importantes de la estadística condicional.

4.5.3.3 Análisis de la Probabilidad Condicional Lognormal

Sean las Distribuciones Marginales de la Variable aleatoria (x, y) :

$$P_{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (206)$$

$$P_{LN}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (207)$$

Entonces si la probabilidad condicionada de que ocurra x dado que ya ocurrió y esta determinado por la fórmula de Bayes:

$$P_{LN}(x | y) = \frac{P_{LN}(x, y)}{P_{LN}(y)} \quad (208)$$

y por definición la Distribución de probabilidad Mixta bidimensional (x, y) es:

$$P_{LN}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2}} \frac{1}{xy} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\beta_0}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2} \right] \quad (209)$$

donde:

$$\beta_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_y^2 (\ln x - \mu_x)^2 - 2\zeta (\ln x - \mu_x) (\ln y - \mu_y) \\ + \sigma_x^2 (\ln y - \mu_y)^2 \end{array} \right\}$$

Obtenemos que la probabilidad condicional es:

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$P_{LN}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2} \left\{ (\ln x - \mu_x) - \zeta \frac{(\ln y - \mu_y)}{\sigma_y^2} \right\}^2 \right] \quad (210)$$

Otra cantidad que será de utilidad es el valor promedio de encontrar a x , dado que ya ha ocurrido y , se encuentra que es:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \exp \left(\mu_x + \zeta \frac{(\ln y - \mu_y)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2}{2\sigma_y^2} \right) \quad (211)$$

Con esto finalizamos el resumen de las propiedades estadísticas asociadas a la distribución de probabilidad de un campo Lognormal bivariado.

4.5.4 Evolución Galáctica: Estadística Lognormal

4.5.4.1 Campos de Densidad que obedecen a una estadística Lognormal

El planteamiento físico del problema es el siguiente: dado un objeto virializado de masa M ¿Cuáles son sus posibles historias de acreción de materia a partir de un campo de densidades inicial?

El formalismo matemático requerido consta de las definiciones y propiedades de la estadística del campo Lognormal y del vínculo con las cantidades físicas que nos conciernen. La ventaja matemática que ofrece este campo para la modelación de nuestro sistema físico es su distribución de probabilidad siempre positiva, aprovechando esta característica vinculamos nuestro modelo físico y la estructura matemática por medio de la relación:

$$x = \Upsilon_V, \quad (212)$$

$$y = \Upsilon_{V'}$$

donde x y y son los campos matemáticos de la distribución Lognormal de las ecuaciones (206 y 207) y las cantidades físicas Υ_V y $\Upsilon_{V'}$ representan el valor promedio de la densidad en los volúmenes V y V' respectivamente, normalizados al valor promedio de la densidad del universo.

Al igual que en el formalismo de Bower se requiere un conjunto de definiciones e hipótesis físicas pero ahora referidas a las densidades en vez de a los contrastes de densidad.

1) DEFINICIONES:

1) llamamos densidad-volumétrica al valor promedio de la densidad en un volumen V dado, es decir la cantidad:

$$\rho_V \equiv \frac{\int_V \rho(\vec{r}) dV}{\int_V dV} \quad (213)$$

2) llamamos densidad-volumétrica-normalizada que de ahora en adelante llamaremos por simplicidad **densidad** a la densidad-volumétrica por unidad de densidad promedio del universo:

$$\Upsilon_V \equiv \frac{\rho_V}{\rho_0} \quad (214)$$

3) Llamamos densidad crítica a la densidad que se obtiene extrapolando el valor crítico (de colapso y virialización) del colapso esférico al régimen lineal. Su forma funcional respecto del tiempo sería:

$$\Upsilon_c = 1.69 (1 + z) + 1 \quad (215)$$

4) Decimos que un objeto está virializado en el momento en que su densidad alcanza su densidad crítica.

5) Denotamos por V al volumen que ocupa el objeto de masa M que queremos estudiar, este objeto tiene la propiedad de estar completamente virializado al día de hoy.

6) Denotamos por V' a un subvolumen de V y así mismo denotamos por V^* al complemento de V' .

II) HIPÓTESIS. Las hipótesis físicas son de diferentes caracteres:

- 1) Se asume la evolución lineal de las fluctuaciones como esquema fundamental.
- 2) Asumimos que el promedio de las densidades de los distintos subvolúmenes de V coinciden con la densidad del mismo V .
- 3) Asumimos que el campo de densidades obedece a una estadística de campo aleatorio Lognormal.
- 4) Asumimos como válido el espectro de potencias.

III) FORMALISMO:

Partiendo de la definición de densidad-volumétrica-normalizada y de la distribución marginal Lognormal que vimos en la sección anterior:

$$P_{LN}(\Upsilon_V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V}} \frac{1}{\Upsilon_V} \exp \left[-\frac{(\ln \Upsilon_V - \mu_V)^2}{2\sigma_V^2} \right] \quad (216)$$

así como de la definición de distribución de probabilidad Lognormal mixta bivariada:

$$P_{LN}(\Upsilon_V, \Upsilon_{V'}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_V^2\sigma_{V'}^2 - \zeta^2}} \frac{1}{\Upsilon_V\Upsilon_{V'}} \exp B_1 \quad (217)$$

donde :

$$B_1 = \left[-\frac{\left\{ \sigma_{V'}^2 (\ln \Upsilon_V - \mu_V)^2 - 2\zeta (\ln \Upsilon_V - \mu_V) (\ln \Upsilon_{V'} - \mu_{V'}) + \sigma_V^2 (\ln \Upsilon_{V'} - \mu_{V'})^2 \right\}}{2(\sigma_V^2\sigma_{V'}^2 - \zeta^2)} \right]$$

tenemos todos los elementos requeridos para calcular la distribución de probabilidad de que dado un volumen V cuya densidad sea Υ_V , encontremos en otro volumen V' , completamente arbitrario, una $\Upsilon_{V'}$:

$$P_{LN}(\Upsilon_{V'} | \Upsilon_V) = \frac{P_{LN}(\Upsilon_{V'}, \Upsilon_V)}{P_{LN}(\Upsilon_V)} \quad (218)$$

Sustituyendo las expresiones (216) y (217) en la ecuación anterior obtenemos que la distribución de probabilidad condicional Lognormal de las variables Υ_V y $\Upsilon_{V'}$ es la siguiente distribución:

$$P_{LN}(\Upsilon_{V'} | \Upsilon_V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma_V^2}{\sigma_V^2 \sigma_{V'}^2 - \zeta^2}} \frac{1}{\Upsilon_{V'}} \exp \beta_2 \quad (219)$$

donde:

$$\beta_2 = \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_V^2 \left\{ (\ln \Upsilon_{V'} - \mu_{V'}) - \zeta \frac{\ln \Upsilon_V - \mu_V}{\sigma_V^2} \right\}^2}{\sigma_V^2 \sigma_{V'}^2 - \zeta^2} \right]$$

Ahora bien, ésta probabilidad condicional tiene tres parámetros que debemos identificar con alguna cantidad física. A continuación, haciendo uso de algunas relaciones de la subsección anterior, relacionaremos al espectro de potencias, que aquí denotaremos por Σ_M , con los parámetros σ_V y μ_V de la estadística Lognormal.

Como hemos visto en secciones anteriores el espectro de potencias se define como:

$$\Sigma_M^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{M_V - \bar{M}}{M} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\rho_V - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 \right\rangle \quad (220)$$

Ahora bien, según nuestra redefinición de densidad, el espectro de potencia será:

$$\Sigma_M^2 = \langle (\Upsilon_M - \langle \Upsilon_M \rangle)^2 \rangle = \langle \Upsilon_M^2 \rangle - \langle \Upsilon_M \rangle^2 \quad (221)$$

usando las fórmulas explícitas para el primer y segundo momento señaladas en la subsección anterior, ecuaciones(203 y 205), vemos que:

$$\langle \Upsilon_M \rangle = \exp \left(\mu_V + \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) \quad (222)$$

donde por definición de densidad-volumétrica-normalizada, debe cumplir la siguiente condición física su promedio debe valer la unidad:

$$\langle \Upsilon_M \rangle = 1 \quad (223)$$

por lo tanto la ecuación(222) nos proporciona la relación entre σ_M y μ_M :

$$\mu_M = -\frac{1}{2} \sigma_M^2 \quad (224)$$

sustituyendo este resultado y el segundo momento en la ecuación en la fórmula(221):

$$\Sigma_M^2 = \exp \left[2 \left(\mu_M + \sigma_M^2 \right) \right] - 1 \quad (225)$$

y por lo tanto:

$$\Sigma_M^2 = e^{\sigma_M^2} - 1 \quad (226)$$

De esta manera encontramos que el espectro de potencias entra en la probabilidad condicional, vía las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 &= \ln(\Sigma_M^2 + 1) \\ \mu_M &= -\frac{1}{2} \ln(\Sigma_M^2 + 1) \end{aligned} \quad (227)$$

Sin embargo hasta aquí no hemos impuesto condición alguna sobre la correlación entre las densidades, esta condición será una restricción de tipo física, imponemos que el promedio condicional de las densidades de los volúmenes internos sea exactamente igual al valor de la densidad del volumen original, es decir que:

$$\Upsilon_V = \langle \Upsilon_{V'} \rangle_{LN_{cond}} \quad (228)$$

De la ecuación (222) sobre el valor promedio de una variable aleatoria dado que otra variable aleatoria ya se ha fijado, obtenemos que:

$$\Upsilon_V = \exp \left(\mu_{V'} + \zeta \frac{(\ln \Upsilon_V - \mu_V)}{\sigma_V^2} + \frac{\sigma_V^2 \sigma_{V'}^2 - \zeta^2}{2\sigma_V^2} \right) \quad (229)$$

ocupando el resultado de la ecuación(224), la ecuación anterior se traduce en:

$$\Upsilon_V = \exp \left(\frac{1}{2} \sigma_{V'}^2 + \zeta \frac{(\ln \Upsilon_V + \frac{1}{2} \sigma_V^2)}{\sigma_V^2} + \frac{\sigma_V^2 \sigma_{V'}^2 - \zeta^2}{2\sigma_V^2} \right) \quad (230)$$

La ecuación anterior solo está definida cuando la correlación ζ es igual a σ_V , de esta manera fijamos, mediante un elemento físico, el valor de la correlación:

$$\zeta = \sigma_V^2 \quad (231)$$

Y con este último resultado se tienen completamente definidos todos los parámetros de la estadística en términos del espectro de potencias, vía las ecuaciones(227), sustituyendo la ecuación(231), la distribución de probabilidad condicional, ecuación(219) adquiere la forma:

$$P_{LN}(\Upsilon_{V'} | \Upsilon_V) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{V'}^2 - \sigma_V^2}} \exp \left[\frac{\{(\ln \Upsilon_{V'} - \mu_{V'}) - (\ln \Upsilon_V - \mu_V)\}^2}{2(\sigma_{V'}^2 - \sigma_V^2)} \right] \quad (232)$$

Regresando de nuevo a la representación de masas:

$$M \approx \bar{\rho} V, \quad (233)$$

y según la ecuación(195), la probabilidad de encontrar una fracción de masas M' con densidad igual o mayor que Υ_c , contenidas en una región de tamaño mayor M y densidad Υ , está dada por la ecuación:

$$\bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \int_{\Upsilon_c}^{\infty} P_{LN}(\Upsilon_{V'} = \Upsilon' | \Upsilon_V = \Upsilon) d\Upsilon', \quad (234)$$

la cual explícitamente se escribirá:

$$\bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Upsilon_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2}} \exp[-\beta_3] \frac{d\Upsilon'}{\Upsilon'} \quad (235)$$

donde:

$$\beta_3 = \frac{\{(\ln \Upsilon' - \mu_{M'}) - (\ln \Upsilon - \mu_M)\}^2}{2(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)}.$$

Es posible reducir esta expresión a otra más compacta. En forma similar a la ecuación (197), toda la información de la probabilidad se encuentra en el límite inferior de integración. (ver Apéndice):

$$\bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy \quad (236)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon}}{\sqrt{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}} + \frac{1}{2} \sqrt{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)} \right]$$

de esta forma se ve, que el cambio de estadística afecta radicalmente a la estructura de las distribuciones. El paso final es, como en el caso Gaussiano, dar una expresión para la probabilidad de encontrar una fracción de la masa total M , que está contenida en grupos colapsados con masas entre M' y dM' , a un tiempo anterior. Como la ecuación anterior esta expresada en términos de la variable muda y , la diferenciación parcial se puede realizar explícitamente dando como resultado final (ver Apéndice):

$$\bar{f}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) dM' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma_{M'}}{\Sigma_{M'}^2 + 1} [\beta_4 \exp[\beta_5] \frac{d\Sigma_{M'}}{dM'} dM' \quad (237)$$

donde:

$$\beta_4 = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon}}{\left[\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}$$

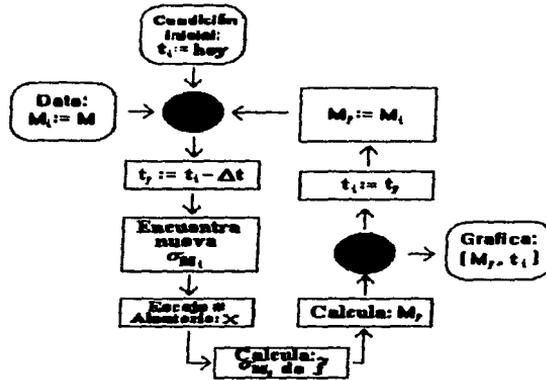
y

$$\beta_5 = -\frac{1}{2} \frac{\left[\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^2}{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}$$

donde hemos extendido el ansatz de Press-Schechter a este formalismo:

$$\bar{f}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) dM' = -\frac{\partial \bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon)}{\partial M'} dM' \quad (238)$$

Nuevamente realizamos los pasos descritos en la sección correspondiente a la descripción Gaussiana, encontrando así las diferentes historias de formación de galaxias que obedecen una ley estadística Lognormal.



Como se puede observar en la gráficas 2 y 3, es extraordinaria la diferencia entre una estadística y otra en la parte externa de las galaxia, mientras que en la parte interna, se tiene un comportamiento muy similar. Como se puede apreciar en la gráfica 3, el perfil de densidad a la Lognormal o a la Gaussiana, no repercute demasiado en la predicción de galaxias con curvas de rotación planas. Sin embargo, como se puede apreciar en la gráfica 2, hay una diferecia enorme en la región nuclear de la galaxia. Mientras que la densidad debida a la distribución Gaussiana se singulariza a razón de $\frac{1}{r}$, la densidad debida a la distribución Lognormal se singulariza a razón de $\frac{1}{r^2}$. Esto implica que la distribución Gaussiana sigue siendo mejor aproximación a la observación, sin embargo el punto importante aquí es que, efectivamente, la estructura del núcleo está fuertemente vinculada a la elección de la estadística. Con esto finaliza el análisis teórico de la evolución estadística de una galaxia. En el siguiente capítulo se interpretaran los resultados.

4.5.5 Fórmula de Jedamzik-Firmani

Se puede hacer una extensión de la formulación de Jedamzik, para calcular la probabilidad $\tilde{f}(M', T_c | M)$, esta extensión es en realidad, la forma correcta de hacer el cálculo, ya que lleva en sí todo el argumento de **objeto aislado**.

La extensión es como sigue: Se propone la función de masa de Jedamzik ecuación (166):

$$\tilde{F}(\delta_{M_1} \geq \delta_c, M_1) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{M_1^*}^{\infty} M' n(M') P(M_1 | M') dM'$$

Requerimos ahora que ésta probabilidad, esté condicionada a la elección de una masa mayor: M . Para lograrlo, se requiere cambiar tanto a $\tilde{F}(\delta_{M_1} \geq \delta_c, M_1)$, como a $n(M')$ por sus correspondientes cantidades condicionadas a la masa M y por supuesto, se requiere cambiar también el límite superior de integración $L^3 \bar{\rho} = \infty$, por: $L^3 \bar{\rho} = M$.

$$\tilde{F}(\delta_{M_1} \geq \delta_c, M_1 | \delta_M \geq \delta_c, M) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{M_1^*}^M M' n(M' | M) P(M_1 | M') dM'.$$

Nótese que $\tilde{F}(M_1 | M)$ y $P(M_1 | M)$, ahora tienen el mismo significado probabilístico y conceptual, ambas representan la probabilidad de encontrar una masa M_1 con densidad mayor o igual a la de colapso, dado que ésta se encuentra en una región más grande de masa M . Por lo tanto podemos generalizar la ecuación de Jedamzik con la fórmula:

$$\tilde{F}(M_1 | M) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{M_1^*}^M M' n(M' | M) \tilde{F}(M_1 | M') dM',$$

o bien usando la definición de \tilde{f} :

$$\tilde{F}(M_1 | M) = \int_{M_1^*}^M \tilde{f}(M' | M) \tilde{F}(M_1 | M') dM'.$$

Lo cual indica que la obtención de \tilde{f} no es completa según el ansatz de Press-Schechter, de hecho el proceso por el cual se obtiene a \tilde{f} es mucho más laborioso y requiere de técnicas de análisis numérico.

En la gráfica 4 se puede apreciar como las historias de acreción cambian, sensiblemente según el proceso de cálculo al que se someta la \tilde{f} . Mientras que con el ansatz se obtienen historias de agregación extremadamente extendidas en en el tiempo, sin el ansatz, se obtienen historias de acreción con acreciones más pronunciadas en el tiempo.

Estos resultados son sumamente importantes ya que revelan, sin lugar a dudas, la inaplicabilidad de la hipótesis de Press-Schechter en un caso que no sea el Gaussiano.

Conclusiones

Como se mencionó en la introducción de la tesis, el objetivo del texto es repasar los elementos esenciales que determinan el surgimiento de una galaxia, a partir de: I) la evolución de las fluctuaciones primigenias de densidad en el universo y II) un estudio detallado de algunas de las propiedades estadísticas más importantes, del campo de fluctuaciones del universo primigenio,

En los dos capítulos posteriores al capítulo introductorio, se repasaron los procesos más importantes que determinan el origen y crecimiento de una fluctuación. En el capítulo dos, se propuso al proceso inflacionario como el originario de las fluctuaciones primordiales del universo. En el capítulo tres se puso énfasis en las inestabilidades de Jeans y los procesos de amortiguamiento de Silk y Landau, como guías principales, en la evolución de una fluctuación de densidad.

La parte central de la tesis, fue el capítulo cuatro, en él, se repasaron algunos de los aspectos estadísticos más importantes como son: el espectro de potencias, la función de correlación de dos puntos y dos hipótesis estadísticas para el campo de fluctuaciones de densidad primordial.

Además se analizaron los formalismos de Press-Schechter² y Jedamzik², como formalismos alternativos a los métodos numéricos, para la obtención de la función de masa. En esta parte se enfatizó que el número de objetos virializados, contabilizados por el formalismo de Press-Schechter a partir de la estadística de las fluctuaciones primigenias de densidad, no es completa y que es posible corregir este error, introduciendo el concepto (de Jedamzik), de objeto aislado. Estos formalismos se utilizaron posteriormente como *materia prima* en el esquema evolutivo-estadístico de las galaxias. La diferencia de resultados entre el formalismo de Press-Schechter y Jedamzik se aprecia, más adelante, en las historias de acreción, bajo la hipótesis estadística Lognormal. Aquí el tiempo de formación, t_{inicial} promedio para una galaxia de $10^{10} M_{\odot}$ puede variar de $(1+z)^{100}$ con Jedamzik, a $(1+z)^{10}$ con Press-Schechter.

Después de estas consideraciones, se demostró cual es el efecto de simular al campo de fluctuaciones primordiales a través de un campo de fluctuaciones Gaussianas, en particular se destacó que debido a que ésta distribución está definida en el rango ∞ y $-\infty$, no es propicia para la descripción de un campo de fluctuaciones, cuyo rango de definición se encuentra entre ∞ y -1 . Este hecho motiva el estudio de alguna otra estadística, como la Lognormal, cuyos rangos de definición concuerdan con los de las magnitudes físicas que se estudian.

Otro punto importante que se abordó en la tesis fue precisamente el mecanismo estadístico, por el cual una galaxia de campo, acreta la materia que la constituye. El formalismo lo propone Bower³. En este formalismo, a partir de una versión linealizada de la evolución de las fluctuaciones y de una

estadística de las regiones virializadas de un objeto, se puede encontrar los diferentes regímenes de acreción de materia de una galaxia dada.

Se puede apreciar en la sección de gráficas, como utilizando el formalismo de Bower podemos encontrar las múltiples historias de formación de una galaxia típica de masa $10^{11} M_{\odot}$ cada traza representa la razón de acreción de la galaxia a lo largo del tiempo. En la gráfica 2 y 3, vemos la traza promedio de este régimen de acreción en una estadística Gaussiana y Lognormal, respectivamente. Este resultado de acreción en el tiempo tendrá una consecuencia directa en la formación de las curvas de rotación de una galaxia, como es bien sabido la velocidad tangencial v de una gas alrededor de un cuerpo de masa M y que se encuentra a una distancia r de dicha masa, esta dado por la fórmula de Newton.

En nuestro ejemplo, consideramos la acreción de material, considerando una simetría discoidal, así la materia acretada se aglutinará en anillos de distinta densidad según la razón de acreción a que se haya sometido el objeto en consideración. La relación que vincula a la historia de acreción $M(t)$ con la distribución de materia $M(r)$ se desprende un proceso en general complicado. Sin embargo existen algunas modelos semianalíticos como el del colapso esférico extendido, en el cual se relaciona directamente, la pendiente $\gamma(t) = \frac{\log M}{\log(t^{-3})}$, de una traza de acreción, con la la curva de rotación de una galaxia. La relación entre $\gamma(t)$ y $v(r)$ en un modelo de colapso esférico, en el cual se asume que todos sus capas, al llegar al máximo de expansión, colapsan su densidad por un mismo factor es:

$$v(r) \sim r \left(\frac{\gamma(t) - 1}{2 + \gamma(t)} \right),$$

mientras que el perfil de densidad sería:

$$\rho(r) \sim r \left(-\frac{6}{2 + \gamma(t)} \right).$$

Entonces, del formalismo de Bower, se obtienen dos predicciones que son comparables directamente con las observaciones:

La primera predicción es acerca de las curvas de rotación de las galaxias en su parte externa, o lo que es lo mismo, el régimen de acreción de las galaxias, en sus épocas más recientes. Un régimen de acreción violento en la última etapa, implicaría que las capas externas de las galaxias se ligarían fuertemente al núcleo y la curva de rotación externa, decaería rápidamente. Por otro lado un régimen de acreción paulatino en la última fase de la formación de la galaxia, induce a que las capas externas de la galaxia tengan suficiente sustento para mantenerse en la periferia del núcleo galáctico. Éste último resultado es el que predice el modelo, tanto en una galaxia que obedece a la "acreción Gaussiana" como en una galaxia que obedece a la "acreción Lognormal".

En cuanto a esta predicción, las observaciones confirman que efectivamente las curvas de rotación son planas, lo que significa que el régimen de acreción en la última etapa de formación fue paulatina. Es interesante notar que en este resultado se manifestó cierta invariancia ante el cambio de estadística. Esto podría significar que la curva de rotación plana es consecuencia directa del espectro de potencias, ya que éste no cambio de estadística Gaussiana a estadística Lognormal.

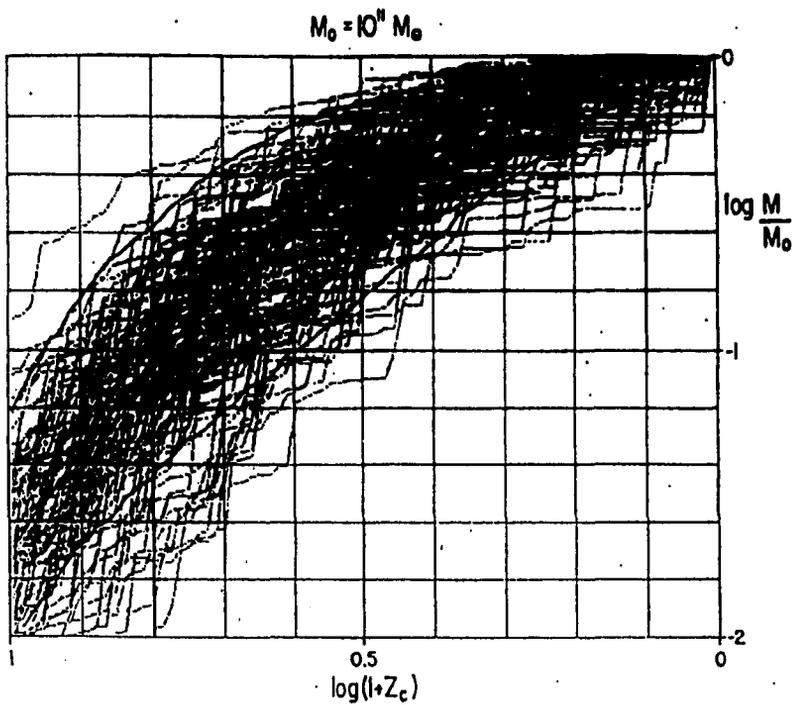
La segunda predicción importante de la teoría, es acerca de la estructura del núcleo de la galaxia. Esta parte de la galaxia adquiere su estructura básicamente de las primeras etapas de acreción. Las observaciones muestran que el núcleo de las galaxias es en promedio, de densidad constante.

En este sentido la estadística Gaussiana se aleja de este resultado prediciendo un núcleo cuya densidad aumenta singularmente al centro de la galaxia. Por otro lado podemos apreciar en las gráficas que la imposición de una estadística Lognormal induce curvas de rotación sumamente singulares en el núcleo de la galaxia. Este resultado aunque negativo con respecto a la elección de la estadística nos muestra claramente que es innegable que un cambio en la estadística influye directamente en la estructura del núcleo galáctico.

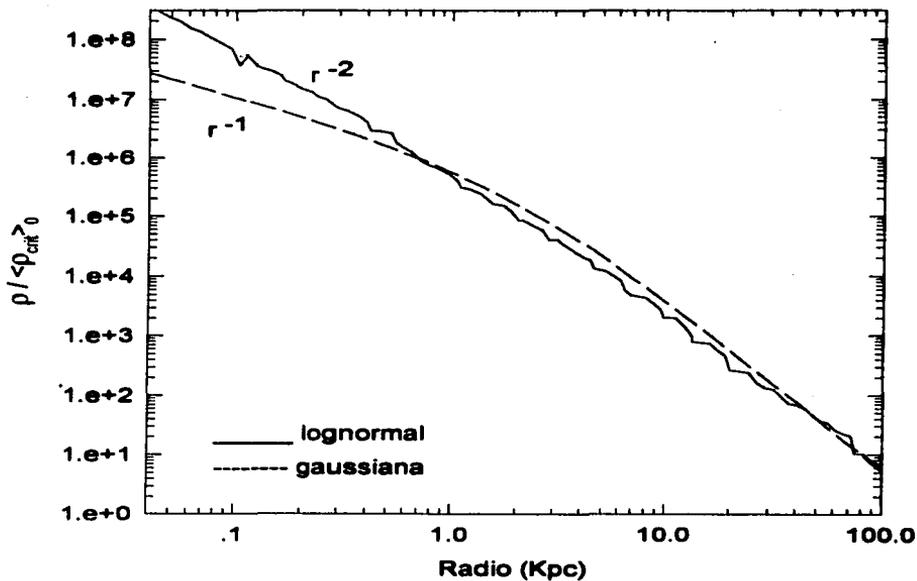
Para corregir este problema se ha hecho el intento de modificar el espectro de potencias, es decir, cambiar el escenario de fondo, sin embargo las correcciones que así se obtienen son mínimas y nunca llegan a lograr el efecto de densidad constante en el núcleo.

Como último comentario, es importante hacer notar que, el hecho de que la estadística Lognormal sea correcta para el rango en el que se define el campo de densidades, esto no mejora el resultado en cuanto a la estructura del núcleo. Lo que indica que es muy importante la forma de la distribución estadística, en la vecindad del cero.

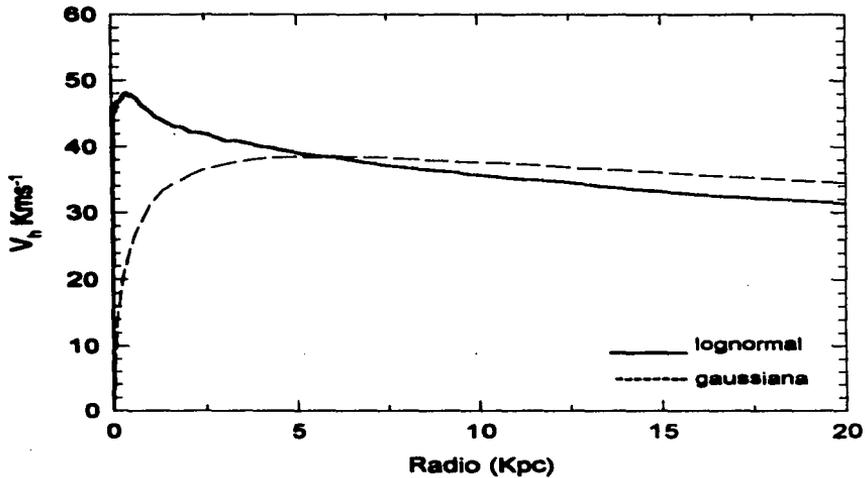
Gráficas



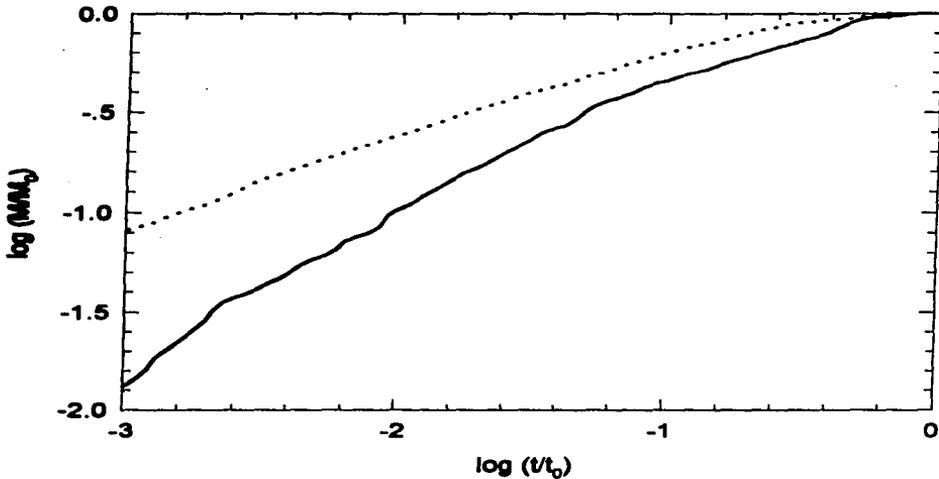
Gráfica 1



2. Gráfica: Perfiles de densidad de halos galácticos de $10^{10} M_{\odot}$ correspondientes a las historias de agregación de masa promedio y calculadas en las estadísticas lognormal (línea sólida) y gaussiana (línea segmentada) sin anstatz.



3. Gráfica : Curvas de rotación de halos galácticos de $10^{10}M_{\odot}$ correspondientes a una historia de agregación de masa promedio calculada en una en las estadísticas lognormal (línea sólida) y gaussiana (línea segmentada) sin el ansatz.



4. Gráfica: Historias de agregación de masa para un objeto que a t_0 tiene $10^{10}M_{\odot}$. Ambas historias fueron calculadas con la estadística lognormal, en un caso utilizando el ansatz (línea sólida) y en otro sin el ansatz (línea punteada).

Apéndice

7.1 Propiedades Estadística de la distribución Lognormal, cálculos completos.

La función de distribución de probabilidad N-dimensional para un campo aleatorio Lognormal puede ser obtenido a partir de una función de distribución de probabilidad N-dimensional para un campo aleatorio Gaussiano, esta transformación entre campo Gaussiano y campo Lognormal tiene un objetivo puramente práctico: las propiedades estadística de la distribución Lognormal se pueden calcular a partir de la distribución Gaussiana subyacente.

Entonces la distribución N-dimensional de un campo Gaussiano $\vec{X}(\vec{r})$ se expresa como:

$$P(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \mathbf{M})^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{ij}^{-1} (x_i - \mu_{x_i}) (x_j - \mu_{x_j}) \right] \quad (239)$$

donde cada x_i corresponde a la i -ésima componente del campo aleatorio $\vec{x} = \vec{x}(\vec{r})$, y donde la matriz \mathbf{M} se llama la matriz de covariancia y cuyos elementos se definen como:

$$\mathbf{M}_{ij} = \langle (X_i - \mu_i) (X_j - \mu_j) \rangle \quad (240)$$

cuando las μ_i son distintas decimos que el campo es estadísticamente inhomogéneo. Notemos que $\mathbf{M}_{ii} = \sigma_i$.

Podemos encontrar la función de distribución probabilística del campo Lognormal transformando el campo Gaussiano mediante:

$$\vec{Y}(\vec{r}) = \exp [\vec{X}(\vec{r})] \quad (241)$$

de tal manera que la función de distribución N-dimensional del campo Lognormal sera:

$$P_{LN}(y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\det \mathbf{M})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^N y_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{ij}^{-1} (\ln y_i - \mu_{y_i}) (\ln y_j - \mu_{y_j}) \right] \quad (242)$$

A esta expresión se llega fácilmente tomando en cuenta que la relación entre $P(x_1, \dots, x_N)$ y $P_{LN}(y_1, \dots, y_N)$ debe satisfacer:

$$P_{LN}(y_1, \dots, y_N) dy = P(x_1, \dots, x_N) \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| dy \quad (243)$$

De la ecuación (242) se desprende que la función de distribución unidimensional del campo Log-normal sera:

$$P_{LN}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (244)$$

Donde claramente la probabilidad de encontrar a y entre $(-\infty, 0)$ es nula y entre $[0, \infty)$ estará dada por la ecuación anterior. A continuación calcularemos algunas propiedades estadísticas de esta distribución. Primero comprobaremos que la μ_y y la σ_y que son la media y la variancia de la distribución Gaussiana, corresponden a la media y la variancia de la variable $\ln y$ en la distribución Lognormal. Entonces:

$$\langle \ln y \rangle = \int_0^{\infty} \ln y P_{LN}(y) dy \quad (245)$$

sustituyendo la ec(244)obtenemos:

$$\langle \ln y \rangle = \int_0^{\infty} \ln y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] dy \quad (246)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln y}{\sigma_y} \exp \left[-\left(\frac{\ln y - \mu_y}{\sqrt{2}\sigma_y} \right)^2 \right] d \ln y \quad (247)$$

hacemos el cambio de variable:

$$\alpha = \frac{\ln y - \mu_y}{\sigma_y} \quad (248)$$

$$\langle \ln y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_y \alpha + \mu_y) \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \quad (249)$$

el primer término se integra de inmediato, y el segundo vale $\sqrt{2\pi}$:

$$\langle \ln y \rangle = \frac{\sigma_y}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp \left(\frac{-\alpha^2}{2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sqrt{2\pi}\mu_y}{\sqrt{2\pi}} \quad (250)$$

Por lo tanto

$$\langle \ln y \rangle = \mu_y \quad (251)$$

continuamos ahora con la σ_y , en este caso:

$$\langle (\ln y - \mu_y)^2 \rangle = \int_0^{\infty} (\ln y - \mu_y)^2 P_{LN}(y) dy \quad (252)$$

sustituyendo la ec(244)obtenemos:

$$\langle (\ln y - \mu_y)^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_0^{\infty} (\ln y - \mu_y)^2 \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] dy \quad (253)$$

mediante el cambio de variable de la ec(248) obtenemos:

$$\langle (\ln y - \mu_y)^2 \rangle = \frac{\sigma_y^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \quad (254)$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \alpha \\ dv &= \alpha \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (255)$$

obtenemos que :

$$\langle (\ln y - \mu_y)^2 \rangle = \frac{\sigma_y^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-\alpha \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} \right) d\alpha \right\} \quad (256)$$

Que finalmente nos lleva a que el promedio de $(\ln y - \mu_y)^2$ es precisamente la variancia de la distribución Gaussiana subyacente:

$$\langle (\ln y - \mu_y)^2 \rangle = \sigma_y^2 \quad (257)$$

El siguiente paso es calcular los momentos de la variable Lognormal, estos los podemos calcular todos de una vez de la siguiente manera. El momento n-ésimo se define como:

$$\langle y^n \rangle = \int_0^{\infty} y^n P_{LN}(y) dy \quad (258)$$

sustituyendo la función de distribución, factorizando el $\ln y$ y haciendo el cambio de limites de integración respectivo se obtiene:

$$\langle y^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} y^n \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] d \ln y \quad (259)$$

para integrar esta ecuación, requeriremos de varios cambios de variable que nos lleven finalmente a una integral Gaussiana, el primer cambio de variable nos permite agrupar la μ_y con el $\ln y$:

$$\alpha = \frac{y}{e^{\mu_y}} \quad (260)$$

$$d \ln \alpha = d \ln y$$

con el cual se preservan los límites de integración y obtenemos:

$$\langle y^n \rangle = \frac{(\exp \mu_y)^n}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n \exp \left[-\frac{(\ln \alpha)^2}{2\sigma_y^2} \right] d \ln \alpha \quad (261)$$

el siguiente cambio de variable sería trivial:

$$\beta = \frac{\ln \alpha}{\sigma_y} \quad (262)$$

$$\langle y^n \rangle = \frac{\exp(n\mu_y) \sigma_y}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\beta n \sigma_y) \exp \left[-\frac{\beta^2}{2} \right] d\beta \quad (263)$$

Factorizando las exponenciales y completando el trinomio cuadrado perfecto obtenemos:

$$\langle y^n \rangle = \frac{\exp(n\mu_y)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\beta^2 - 2\beta n \sigma_y + (n\sigma_y)^2}{2} + \frac{(n\sigma_y)^2}{2} \right] d\beta \quad (264)$$

Evidentemente el último término de la exponencial no depende de la variable de integración así que añadimos a los términos constantes:

$$\langle y^n \rangle = \frac{\exp \left[n\mu_y + \frac{1}{2} (n\sigma_y)^2 \right]}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\beta - n\sigma_y)^2}{2} \right] d\beta \quad (265)$$

El último término es la integral de la distribución Gaussiana con valor $\sqrt{2\pi}$, por lo tanto la expresión final para el momento n -ésimo de la distribución Lognormal será:

$$\langle y^n \rangle = \exp \left[n\mu_y + \frac{1}{2} (n\sigma_y)^2 \right] \quad (266)$$

Por último usemos este último resultado para calcular la Media y la Variancia del campo. La Media se define como $\langle y^1 \rangle$ por lo tanto:

$$\langle y \rangle = \exp \left[\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right] \quad (267)$$

La variancia se define como:

$$\Sigma^2 \equiv \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle \quad (268)$$

Desarrollando el binomio cuadrado, obtenemos finalmente que:

$$\Sigma^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \quad (269)$$

Ahora notamos que según la ec(266) el segundo momento vale:

$$\langle y^2 \rangle = \exp [2 (\mu_y + \sigma_y^2)] \quad (270)$$

sustituyendo el valor de la ec(267) y la ec(270) para calcular el valor de la variancia ec(268) en términos de la μ_y y de la σ_y obtenemos que:

$$\Sigma^2 = \exp [2 (\mu_y + \sigma_y^2)] - \exp [2\mu_y + \sigma_y^2] \quad (271)$$

y con esto terminamos el análisis matemático de las propiedades estadísticas de la función de distribución Lognormal.

7.2 Análisis de la Probabilidad Condicional Lognormal

Sean las Distribuciones Marginales de la Variable aleatoria (x, y) :

$$P_{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (272)$$

$$P_{LN}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \frac{1}{y} \exp \left[-\frac{(\ln y - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (273)$$

por definición estas pertenecen a la Distribución de probabilidad Mixta bidimensional (x, y) :

$$P_{LN}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N-2}{2}} (\det \mathbf{M})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{N-2} z_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \mathbf{M}_{ij}^{-1} (\ln z_i - \mu_{xi}) (\ln z_j - \mu_{xj}) \right] \quad (274)$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} = \left\| \begin{array}{cc} \sigma_x & \zeta \\ \zeta & \sigma_y \end{array} \right\| \\ \det \mathbf{M} = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2 \\ \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \left\| \begin{array}{cc} \sigma_y^2 & -\zeta \\ -\zeta & \sigma_x^2 \end{array} \right\| \end{array} \right. \quad (275)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x \\ z_2 = y \\ \mu_{x_1} = \mu_x \\ \mu_{x_2} = \mu_y \end{array} \right. \quad (276)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones(275) y ecuaciones(276) nos da:

$$P_{LN}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2}} \frac{1}{xy} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2} \left\{ \frac{\sigma_y^2 (\ln x - \mu_x)^2 - 2\zeta (\ln x - \mu_x) (\ln y - \mu_y)}{+\sigma_x^2 (\ln y - \mu_y)^2} \right\} \right] \quad (277)$$

Entonces la Probabilidad Condicional de que ocurra x dado que ya ocurrió y esta determinado por la formula de Bayes:

$$P_{LN}(x | y) = \frac{P_{LN}(x, y)}{P_{LN}(y)} \quad (278)$$

dividiendo la ecuación(77) por la ecuación(273), obtenemos dicha probabilidad:

$$P_{LN}(x | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y^2 (\ln x - \mu_x)^2 - \\ -2\zeta (\ln x - \mu_x) \cdot \\ \cdot (\ln y - \mu_y) + \\ +\sigma_x^2 (\ln y - \mu_y)^2 \end{array} \right\}}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2} + \frac{(\ln y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right] \quad (279)$$

factorizando los dos últimos términos del exponente:

$$\frac{\sigma_x^2 (\ln y - \mu_y)^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2} + \frac{(\ln y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} = \frac{\zeta}{\sigma_y^2} (\ln y - \mu_y)^2 \quad (280)$$

todo el exponente de la exponencial se reduce directamente a un binomio cuadrado perfecto y finalmente obtenemos:

$$P_{LN}(x | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2}} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \zeta^2} \left\{ (\ln x - \mu_x) - \zeta \frac{(\ln y - \mu_y)}{\sigma_y^2} \right\}^2 \right] \quad (281)$$

Una cantidad que nos sera de utilidad es el valor promedio de encontrar a x dado que ya a ocurrido y , es decir:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}}{x} \exp \left[-\frac{\alpha}{2} [(\ln x - \mu_x) - \beta]^2 \right] \right\} dx \quad (282)$$

donde hemos renombrado:

$$\alpha = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2}$$

$$\beta = \zeta \frac{(\ln y - \mu_y)}{\sigma_y^2}$$
(283)

con un cambio de variable:

$$\gamma = \frac{x}{e^{\mu_x + \beta}}$$
(284)

obtenemos que:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp(\mu_x + \beta) \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\alpha (\ln \gamma)^2}{2} \right] d\gamma$$
(285)

Realizando un nuevo cambio de variable :

$$\delta = \sqrt{\alpha} \ln \gamma$$

$$d\delta = \sqrt{\alpha} \frac{d\gamma}{\gamma}$$
(286)

con el cual obtenemos:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(\mu_x + \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \right) \exp \left[-\frac{\delta^2}{2} \right] d\delta$$
(287)

Factorizando los exponentes de las exponenciales y completando el trinomio cuadrado perfecto del exponente:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(\mu_x + \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\delta^2 - \frac{2\delta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \right] \right] d\delta$$
(288)

lo que nos da que:

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(\mu_x + \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\delta - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \right] \right] d\delta$$
(289)

El último término del exponente no depende de la variable de integración por lo tanto la agrupamos al factor anterior a la integral

$$\langle x \rangle_{LNcond} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp \left(\mu_x + \beta + \frac{1}{2\alpha} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\left(\delta - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 \right] \right] d\delta$$
(290)

haciendo un último cambio de variable obtenemos:

$$\langle x \rangle_{LN\text{cond}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp\left(\mu_x + \beta + \frac{1}{2\alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\epsilon^2}{2}\right] d\epsilon \quad (291)$$

donde:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \delta - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \\ d\epsilon &= d\delta \end{aligned} \quad (292)$$

La integral es una Gaussiana así que vale $\sqrt{2\pi}$ por lo que finalmente llegamos a la expresión:

$$\langle x \rangle_{LN\text{cond}} = \exp\left(\mu_x + \beta + \frac{1}{2\alpha}\right) \quad (293)$$

sustituyendo los valores de β y α en la ec(283), concluimos que el valor promedio de x dado y es:

$$\langle x \rangle_{LN\text{cond}} = \exp\left(\mu_x + \zeta \frac{(\ln y - \mu_y)}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \zeta^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (294)$$

Con esto finalizamos el análisis de la distribución de probabilidad condicional de un campo Log-normal bivariado.

7.3 Cálculo de la Función \tilde{F}

Dada:

$$\tilde{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Upsilon_c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2}} \exp[-\beta_3] \frac{d\Upsilon'}{\Upsilon'} \quad (295)$$

donde:

$$\beta_3 = \frac{\{(\ln \Upsilon' - \mu_{M'}) - (\ln \Upsilon - \mu_M)\}^2}{2(\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2)}$$

realizamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\ln \Upsilon' - \mu_{M'}) - (\ln \Upsilon - \mu_M)}{\sqrt{\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2}} \\ dy &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2}} \frac{d\Upsilon'}{\Upsilon'} \end{aligned} \quad (296)$$

sustituyéndolos en la ecuación(295) :

$$\bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \quad (297)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\ln \Upsilon_c - \mu_{M'}) - (\ln \Upsilon - \mu_M)}{\sqrt{\sigma_{M'}^2 - \sigma_M^2}}$$

sustituyendo las ecuaciones(??) y factorizando los logaritmos obtenemos:

$$\bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \quad (298)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}{\sqrt{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}} \right]$$

7.4 Cálculo de la Función \bar{f}

Partimos del ansatz de Press-Schechter:

$$\bar{f}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) dM' = - \frac{\partial \bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon)}{\partial M'} dM' \quad (299)$$

que dada la ecuación(??), nos conviene expresarla en función del espectro de potencias $\Sigma_{M'}$:

$$\bar{f}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) dM' = - \frac{\partial \bar{F}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon)}{\partial \Sigma_{M'}} \frac{d\Sigma_{M'}}{dM'} dM' \quad (300)$$

como es bien sabido la derivada de la ecuación(??), es trivial, usando la regla de cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^a g(x) dx = - \frac{du(x)}{dx} g(u(x)) \quad (301)$$

entonces derivando el primer término del límite inferior de la ecuación(??) :

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_{M'}} \left[\frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon}}{\sqrt{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}} \right] = - \frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon} \cdot \frac{\Sigma_{M'}}{\Sigma_{M'}^2 + 1}}{\left[\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (302)$$

derivando el segundo término:

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma_M} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\ln \left(\frac{\Sigma_M^2 + 1}{\Sigma_{M'}^2 + 1} \right)} \right] = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\Sigma_M^2 + 1}{\Sigma_{M'}^2 + 1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Sigma_M}{\Sigma_M^2 + 1} \quad (303)$$

y así se llega al resultado del capítulo cuatro:

$$\bar{f}(M', \Upsilon_c | M, \Upsilon) dM' = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Sigma_{M'}^2 + 1} \frac{\Sigma_{M'}}{dM'} [\beta_4 \exp[\beta_5]] \frac{d\Sigma_{M'}}{dM'} dM' \quad (304)$$

donde:

$$\beta_4 = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon}}{\left[\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

y

$$\beta_5 = -\frac{1}{2} \frac{\left[\ln \frac{\Upsilon_c}{\Upsilon} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right) \right]^2}{\ln \left(\frac{\Sigma_{M'}^2 + 1}{\Sigma_M^2 + 1} \right)}$$

Bibliografía

8.1 Libros

- J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley.
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, Pergamon Press.
- Wheeler, J.A., *Gravitation*, Freeman.
- Longair, Malcom S., *Galaxy Formation*, Springer-Verlag.
- Kolb, E.W. & Turner, M.S., *The Early Universe*, Addison-Wesley.
- Novikov, I.D., *Evolution of The Universe*, Cambridge Univ. Press.
- Padmanabhan, T., *Structure Formation in the Universe*, Cambridge Press.
- Peebles, P.J.E., *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton Press.
- Peebles, P.J.E., *The principles of Physical Cosmology*, Princeton Press.
- Papoulis, A., *Probability, Random Variables & Stochastic Processes*, McGraw-Hill.

8.2 Artículos

- [1]- White, S.D.M., MPA 631, 1994.
- [2]- Jedamzik, K., 1995, ApJ, 448, 1.
- [3]- Bower, R.G., 1991, Mon. Not. R. astr. Soc. 248, 332-352.

8.3 Notas de Cursos:

- Claudio Firmani C., *Relatividad General y Cosmología*.
- Vladimir Ávila R., *Aspectos sobre la Evolución de Las Fluctuaciones*.
- Fermín Viniegra Heberlein, *Mecánica de Fluidos*.