

50  
20j

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

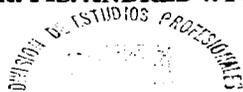


FACULTAD DE CIENCIAS

**ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO  
ELÉCTRICO ENTRE UN SISTEMA DE  
BOMBEO ARMÓNICO Y UN MEDIO  
ACTIVO LASER GASEOSO MEDIANTE  
LÍNEAS DE TRANSMISIÓN**

**T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
F Í S I C O  
P R E S E N T A**

**ULISES VICENTE JOSÉ SCHMILL PERALTA  
DIRECTOR: FIS. ANDRÉS V. PORTA CONTRERAS**



MÉXICO, D.F.

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECRETARÍA ESCOLAR

DICIEMBRE 1997



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE DE CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	<b>3</b>
<b>INDICE DE CONTENIDO</b>	<b>2</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>5</b>
<b>Láseres</b>	<b>5</b>
Láseres Gaseosos	6
Láser de Helio-Neón	7
Láser de Argón	7
Láser de CO <sub>2</sub>	8
Láseres de Estado Sólido	9
Nd:YAG	9
Láseres de Semiconductores	9
Láseres de Colorantes	12
<b>FENÓMENOS DE CONDUCCIÓN EN GASES</b>	<b>17</b>
<b>Introducción</b>	<b>17</b>
<b>Emisión eléctrica</b>	<b>17</b>
<b>Efectos de carga espacial</b>	<b>19</b>
Carga espacial en el alto vacío	19
Carga espacial a presiones altas	20
<b>Plasma</b>	<b>20</b>
<b>Descargas de Townsend</b>	<b>21</b>
<b>Ionización por electrones</b>	<b>22</b>
<b>Ionización acumulativa</b>	<b>24</b>
<b>Ruptura</b>	<b>25</b>
<b>El potencial de ruptura</b>	<b>26</b>
<b>TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DEL LÁSER</b>	<b>28</b>
<b>Cavidades resonantes</b>	<b>28</b>
Introducción: electromagnetismo de Maxwell	28
Campo electromagnético confinado en una caja	28
Radiación de cuerpo negro y densidad de energía	30
Cavidades resonantes	31
Modos en cavidades resonantes	31
La cavidad láser	35

Estabilidad en cavidades resonantes	36
Cavity Q	40
<b>Interacción átomo-radiación</b>	<b>42</b>
Introducción	42
Transiciones resonantes inducidas	42
Ecuaciones de Einstein y radiación de cuerpo negro	46
Fenómenos de decaimiento (solución de Rabi exacta)	47
<b>PRINCIPIO DE OPERACIÓN DEL LÁSER</b>	<b>49</b>
<b>Oscilación láser y amplificación óptica</b>	<b>49</b>
Introducción	49
El concepto de susceptibilidad atómica	51
Técnicas de bombeo	54
Condición de umbral para oscilación	56
Saturación de la ganancia	58
Transición homogénea	58
Transición inhomogénea	59
Dinámica láser	60
<b>Pulsos Láser</b>	<b>61</b>
Láseres pulsados	61
Traspirencia auto-inducida	62
Teoremas del área del pulso	65
Eco fotónico	67
<b>LÍNEAS DE TRANSMISIÓN</b>	<b>69</b>
<b>Introducción</b>	<b>69</b>
<b>Postulados del Análisis de Circuitos</b>	<b>69</b>
<b>Líneas de Transmisión en el Dominio Temporal y de Frecuencias</b>	<b>70</b>
Ecuaciones en el Dominio Temporal	70
Ecuaciones en el Dominio de Frecuencias	71
<b>Soluciones de las Ecuaciones Telegráficas</b>	<b>72</b>
<b>Características de Frecuencia de una Línea de Transmisión</b>	<b>73</b>
<b>Algunas Consideraciones Energéticas</b>	<b>75</b>
<b>REPRESENTACIÓN DEL MEDIO ACTIVO LÁSER COMO LÍNEA DE TRANSMISIÓN</b>	<b>79</b>
<b>Introducción</b>	<b>79</b>
<b>Bombeo Eléctrico Activo</b>	<b>79</b>
<b>Sistemas Eléctricos de Excitación Armónica</b>	<b>82</b>
<b>Características de Impedancia Eléctrica de un Medio Activo Gaseoso Láser</b>	<b>86</b>

	4
<b>Solución exacta de Rabi. revisitada</b>	<b>86</b>
<b>Susceptibilidad atómica. revisitada</b>	<b>87</b>
<b>Pulsación Eléctrica de un Medio Activo Gaseoso Láser</b>	<b>90</b>
<b>Estabilidad</b>	<b>92</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>93</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>100</b>

## INTRODUCCIÓN

La introducción del láser al final de los años 50 y el subsecuente trabajo en la investigación de fuentes ópticas coherentes intensas durante las últimas dos décadas ha estimulado la investigación en óptica y ha impulsado el avance en muchas otras disciplinas científicas, como lo son: la medicina, las comunicaciones, la espectroscopia, la química, la biología, la industria, etc... Un gran número de fuentes ópticas coherentes han demostrado su aplicabilidad en longitudes de onda que cubren el espectro óptico. Láseres de sustancias en diferentes estados de agregación (semiconductores o de estado sólido, gaseosos y líquidos) han sido desarrollados para mejor acoplarse a las diferentes exigencias y necesidades en el ámbito del conocimiento humano. La luz, conocida por el hombre desde tiempos ancestrales, es ahora una de las herramientas de trabajo más poderosas de su medio ambiente.

Debido a la naturaleza discreta de las transiciones láser, sólo se han podido generar fuentes con sintonía limitada, y se han combinado con materiales ópticos no-lineales para producir osciladores ópticos paramétricos con posibilidades de sintonización mucho más amplias. En este sentido se han visto beneficiadas algunas disciplinas como lo son, por dar un ejemplo, la holografía, que espera con gran ansiedad la posibilidad de generar hologramas a color visibles en luz blanca, o la medicina, donde la posibilidad de destruir selectivamente el tejido maligno, dejando intacto el tejido normal, han hecho pensar en la posibilidad de atacar a cromóforos específicos naturales o introducidos premeditadamente en el cuerpo para tales fines.

El propósito de este capítulo es el de ofrecer una introducción y revisión de los diferentes sistemas láser conocidos hasta la fecha, los principios físicos por los que se rigen y sus propiedades.

### Láseres

La base del funcionamiento del láser es el fenómeno de "Amplificación de Luz por Emisión Estimulada de Radiación", de allí la palabra LASER, que resulta del acrónimo en inglés. ¿Qué es la emisión estimulada de radiación?

En todos los láseres que se discutirán, se obtiene ganancia óptica a partir de un material que consta, por lo general, de un grupo de átomos o partículas cada uno caracterizado por su estado energético particular. En equilibrio, la mayor parte de los átomos se encuentran en el mismo estado, al que se le llama "estado base" del sistema. Si a este sistema de átomos se les suministra energía, ésta puede ser absorbida y el sistema pasa a un estado más energético o "excitado". A esto se le llama "absorción" o "bombeo". Al inicio del bombeo, la población en el estado base excede en número a la población en el estado excitado y todas las transiciones son absorbentes. Si se bombea el sistema en una forma particular, es posible que se inviertan las poblaciones en el estado base y en el estado excitado, siempre y cuando la cantidad de energía que se suministra al sistema sea suficiente para detener el decaimiento natural del sistema al estado base mediante emisión espontánea. Si se consigue la inversión de población, entonces el sistema puede decaer "coherentemente" y se tiene una ganancia óptica neta.

Con decaer coherentemente se hace referencia comúnmente al proceso de emisión estimulada de radiación. Este proceso fue descubierto por Albert Einstein en 1917. Einstein demostró que debe haber tres diferentes procesos mediante los cuales la materia interactúa con los campos electromagnéticos, y éstos son: absorción, emisión estimulada y emisión espontánea (Einstein, 1917). La emisión espontánea es el decaimiento natural de todo sistema a su estado energético más bajo y representa un término de "fricción" en las ecuaciones de balance energético. Es la forma mediante la cual todo sistema disipa energía a su alrededor. La emisión estimulada es el proceso inverso a la absorción (y con ésto se tiene conservación de la energía). Es decir, un sistema que se encuentra en un estado excitado, al proporcionarle energía igual a la que tuvo que absorber para llegar a dicho estado, hace que se emita dicha energía sumándosele a la anterior en un proceso de amplificación. Es una especie de "gatillo", que sólo al proporcionarle la energía exacta, dispara. Así, si la energía se inyecta en forma de un fotón ( $E = h\nu = E_2 - E_1$ ), al atravesar el medio excitado, se le unirán al paso otros fotones de la misma frecuencia (y consecuentemente, energía) que son idénticos a él, tanto en fase como en polarización. Así es como el medio actúa como amplificador de radiación.

Un oscilador láser se construye poniendo al medio de ganancia en una cavidad óptica, entre dos espejos. La ganancia óptica regenerativa ocurre para aquellos rayos que viajan paralelos al eje de la cavidad. La longitud  $L$  de la cavidad es típicamente del orden de mil a un millón de veces, o más, la longitud de onda.

En el perfil espectral de ganancia del láser coexisten más de una resonancia de cavidad, siendo amplificadas solamente aquellas, que caen dentro del perfil espectral de la transición láser. La coherencia espacial y temporal del láser surge del carácter regenerativo de la onda con el medio de ganancia y la cavidad óptica.

La coherencia espacial se refiere al grado de congruencia que una onda electromagnética tiene consigo misma en función de la distancia recorrida. Es una medida de homogeneidad espacial de la onda.

Coherencia temporal se refiere al grado de homogeneidad de frecuencia de la onda, es decir, de la angostura del perfil de frecuencia emitidas por el láser.

Además de la coherencia espacial y temporal, la luz producida en un láser es colimada y monocromática.

Por luz colimada se entiende un haz de luz, cuyo diámetro permanece constante a lo largo de un cierto recorrido. La luz monocromática es aquella que consta de solamente un color de luz o longitud de onda.

En la cavidad óptica de un láser debe suceder algo similar. Longitudinalmente, la luz se acopla para que en una ida y vuelta la onda se mueva sobre sí misma y se reproduzca en cada paso. Transversalmente sucede lo mismo, pero lo hace en la forma más sencilla, ocupando el mínimo espacio. A este modo de oscilación se le denomina  $TEM_{00}$  (Transverse Electric and Magnetic 00). Es preferible para muchas de las aplicaciones, que un láser oscile en este modo transversal, ya que la energía luminosa se encuentra concentrada en el área mínima accesible. Modos superiores de oscilación transversal tienen la desventaja principal, que pierden mucha de su energía por efectos de difracción.

### Láseres Gaseosos

Tal vez sean los láseres gaseosos los más difíciles de discutir en comparación con los otros tipos como los de semiconductores, los de estado sólido, etc..., porque poseen las más diversas propiedades. Las longitudes de onda que se producen con ellos abarcan desde las más cortas (Ne IV, 235.8 nm) hasta las más largas (ICN, 774.000 nm). Las potencias luminosas promedio que se pueden alcanzar con ellos van desde los mW (HeNe) y superan los 9 kW (CO<sub>2</sub>P). Utilizan además la más variada gama de métodos de bombeo como lo son, por ejemplo, excitación eléctrica, excitación por RF y corriente directa, descargas de arco, descargas especiales (láser de N<sub>2</sub>), bombeo óptico, excitación química, excitación térmica, excitación por expansión y combinaciones de ellas.

También, las aplicaciones de los láseres gaseosos recaen sobre las más diversas áreas de la actividad humana como, por ejemplo, en la industria pesada, en la medicina, en la metrología, en la construcción, en el diseño, en la investigación, en la comunicación, en los espectáculos, etc.

Tabla 1 Características de láseres gaseosos

	He-Ne	Ar	CO <sub>2</sub>
Edad desde su "descubrimiento"	34.5	32.5	31.5
Longitud de onda ( $\mu$ )	0.6328	0.488	10.6
	1.15 3.39	0.515 (0.45-0.53)	9.6 (9.6-10.8)
Medio	Descarga en mezcla He-Ne	Descarga de arco en Ar.	Descarga en mezcla CO <sub>2</sub> -N <sub>2</sub> -He
Densidad de corriente (A/cm <sup>2</sup> )	0.05-0.5	100-2000	0.01-0.1
Excitación	cd, RF	cd, RF	cd, RF, etc...
Potencia			
laboratorio (Watts)	1	100	9000
comercial (mW)	100	5000	20000
mínima comercial (microW)	100	1	1
Eficiencia (%)	0.001-0.1	0.01-0.2	1-20

En La Tabla 1 se ilustran tres ejemplos de los láseres gaseoso más comúnmente utilizados. Estos son: el láser de He Ne, el láser de CO<sub>2</sub> y el láser de Argón. La tabla lista las características más importantes de estos láseres.

### Láser de Helio-Neón

El láser de HeNe ha alcanzado ya su máximo desarrollo debido a su "edad" y a la naturaleza "bondadosa" de su medio activo: una mezcla de gases nobles operada bajo descarga eléctrica de corriente directa. La longitud de onda de interés principal es 632.8 nm. La longitud de onda comercial es también la de 632.8 nm en el rojo visible a una potencia comercial máxima alrededor de los 100 mW. Potencias mayores son difíciles de lograr por razones puramente prácticas. No obstante, se ha logrado obtener hasta 1 W de potencia (White y Gordon, 1963), pero el tubo medía algo más de 5 m, mientras que con un láser de Argón ésto es posible con tubos de máximo 1 m de longitud. (Kaminov y Siegman, 1973).

Los láseres de He Ne presentan un valor óptimo de salida como función de la corriente de descarga; un subsecuente incremento en la corriente no ofrece un cambio proporcional en la potencia de salida y ésto sucede por razones fundamentalmente sencillas:

El nivel energético superior del Ne se puebla mediante bombeo colisional con átomos de He excitados. Como el estado del He es metestable (e. d., no decae rápidamente por emisión espontánea), éste se crea y se destruye mediante colisiones con electrones o con las paredes del tubo contenedor. De esta forma, cuando se opera el láser, primero aumenta la inversión de población conforme crece la corriente de descarga, pero también con ella crece el número de colisiones con electrones. Si esta corriente excede un cierto límite, la tasa de destrucción de estados excitados crece por encima de la tasa de creación de éstos y, como la potencia es proporcional a la inversión de población, ésta se estanca en un valor máximo. Si se persiste en aumentar la corriente, aumentarán las colisiones desexcitantes y, en consecuencia, decrecerá la potencia. El valor óptimo de esta densidad de corriente es de 0.05 a 0.5 A/cm<sup>2</sup>. Esto permite el uso de tubos de diámetro reducido y el empleo de cátodos de filamento caliente o frío. La tecnología se ha dedicado recientemente a la optimización del sistema, a la prolongación de su vida media y a la reducción de su precio mediante el uso de materiales cada vez más baratos ( Geusic, Bridges and Pankovc, 1970). Los tubos son de vidrio y como no requieren enfriamiento significativo, se colocan dentro de un tubo de PVC y se fijan llenándolo de silicona. Con ésto se evitan desajustes ópticos y se prolonga así la vida en caso de golpes. Tubos con esta tecnología de construcción han superado pruebas de vida de más de 22,000 horas y muestran un tiempo medio estadístico entre fallas de más de 28,000 horas (Geusic, et.al., 1970).

### Láser de Argón

A pesar de la intensa investigación que se ha llevado a cabo en láseres de iones, aún no se logra explotar al máximo las propiedades de éstos, y ésto es debido a varias razones:

el medio es más difícil de manejar que el He-Ne, p. ej., El medio del láser de iones es típicamente un arco capilar de baja presión, pero con densidades de corriente de 100-10,000 A/cm<sup>2</sup>, la potencia entregada aumenta con el aumento de la densidad de corriente y por lo tanto la tecnología aún no ha podido llegar a un punto de saturación (Geusic, et.al., 1970).

Esta última propiedad de los láseres de iones se puede explicar de forma análoga a la del láser de He-Ne (Bridges et al., 1967). En el láser iónico, los niveles superiores para la acción láser se bombean mediante una combinación de colisión directa con electrones y la radiación resultante de la desexcitación de niveles superiores, también por colisiones con electrones libres. Aunque los detalles no sean aún conocidos, se sabe que al menos dos colisiones son necesarias y que la segunda colisión tiene que involucrar la colisión entre un electrón y un ión. Consecuentemente, la población del nivel superior varía como el producto de la densidad electrónica y la densidad iónica, pero como el plasma es eléctricamente neutro, se simplifica diciendo que depende de la densidad electrónica al cuadrado. Además, de entre todos los parámetros del plasma, se sabe que la densidad electrónica es proporcional a la densidad de corriente, entonces, concluyendo, la población en el nivel superior varía como la densidad de corriente al cuadrado. Los niveles inferiores se comportan de la misma manera que los excitados, por lo tanto la inversión de población se comporta también así y consecuentemente también la potencia entregada. Empíricamente es válida la siguiente expresión (Bridges et al., 1967):

$$\frac{P}{V} = 10^{-5} J^2$$

donde  $P = \frac{\text{Potencia}}{\text{Area}}$ ,  $V$  =diferencia de potencial y  $J$  = densidad de corriente

Sin embargo, existen procesos que desfavorecen a este cuadro. Debido al calentamiento del plasma se puede vaciar la región del tubo donde se está llevando a cabo la emisión, y sucede a altas densidades de corriente (mayor a  $1000 \text{ A/cm}^2$ ). También sucede que la desexcitación espontánea de los niveles inferiores producen luz ultravioleta, que a su vez es muy agresiva contra los niveles excitados. Este caso se observa básicamente en los láseres pulsados, porque la duración del pulso es tan corto que casi no hay calentamiento del plasma.

Cuando se introduce un medio adecuado en la cavidad, se puede seleccionar alguna longitud de onda específica en la que el láser oscila, como por ejemplo, seleccionar la línea azul de  $488 \text{ nm}$  o la de  $515 \text{ nm}$  en el verde, que si se descan filtrar, inducen a pérdidas ópticas de un 30 - 40 %. Si además se exige que el láser oscile en el modo TEM<sub>00</sub> se tiene que tomar en cuenta pérdidas de 10-30 % adicionales. Debido a que la radiación en la cavidad tiende a comportarse como una línea homogéneamente ensanchada, especialmente en la operación a altas potencias, casi toda la potencia multimodal se puede obtener en un solo modo longitudinal (Kaminow et al., 1973).

La tecnología de los láseres de iones depende fuertemente de los materiales empleados para el diseño del tubo de plasma. Hasta ahora, los más frecuentemente empleados son nitrato de boro, óxido de aluminio, y óxido de berilio (BeO o berilia) que ha resultado ser el más exitoso, teniendo una vida media superior a los 800 hrs. sin producir un cambio significativo en la presión del gas (Labuda et al., 1965) (Hernqvist, 1967).

### *Láser de CO<sub>2</sub>*

El láser de CO<sub>2</sub> es el más joven de los láseres anteriores. La naturaleza de su medio activo (CO<sub>2</sub>) es similar al del láser de He-Ne (Patel et al., 1964). Una descarga de aproximadamente la misma intensidad alimenta al gas, pero los campos eléctricos en el plasma tienden a ser considerablemente más altos, debido a la presión más alta en el tubo y a las características electronegativas de la mezcla de gases que se emplean.

Varios métodos han sido usados exitosamente en el bombeo del medio activo, entre ellos figuran descargas de cátodo frío y caliente, descargas de RF y de microondas. Sin embargo, el método más usual es el mismo que se emplea en el láser de He-Ne, es decir, la descarga de c.d. de cátodo frío. Para potencias de 1-100 W se emplean normalmente tubos de cuarzo o, simplemente, de vidrio Pyrex, pero siempre se requiere que tengan un sistema de enfriamiento por agua es decir, deberá rodearse el tubo de descarga por lo que se denomina "water jacket". Los diámetros más comunes de los tubos de descarga van de 1 a 2 cm. La óptica debe ser de materiales que no absorban el IR y se hacen comúnmente de NaCl, KCl, GaAs o Ge.

A pesar de las similitudes en construcción entre el HeNe y el CO<sub>2</sub>, sus problemas son completamente diferentes. En láseres de CO<sub>2</sub> de más de 100 W de potencia se emplea una técnica que involucra la circulación del gas activo, porque durante el proceso se alcanzan a disociar las moléculas, y las que no se disocian tienen un tiempo de recuperación tal, que si no se recicla, la potencia del láser se ve afectada conforme aumenta la potencia de bombeo (Tiffany et al., 1969).

La alta eficiencia es principalmente una consecuencia directa de que, tanto el nivel superior como el inferior del proceso están energéticamente cercanos al estado base de la molécula. Además, el láser del CO<sub>2</sub> posee un coeficiente de ganancia volumétrica más elevado que en los láseres que ya hemos discutido y por eso, permite el diseño de tubos de volumen superior a los demás (Tiffany et al., 1969).

En todos los láseres de CO<sub>2</sub> se emplean mezclas de CO<sub>2</sub> con otros gases, aunque también se podrían usar los láseres con CO<sub>2</sub> puro. La inconveniencia es que, durante el proceso, el CO<sub>2</sub> rápidamente se disocia en una mezcla estable de CO<sub>2</sub>, CO y O<sub>2</sub> o (O,O-). El CO puebla entonces el estado superior del CO<sub>2</sub> mediante colisiones resonantes de la misma forma que el He puebla el estado superior del Ne. Un bombeo más eficiente se consigue, si se introduce en esta mezcla un poco de N<sub>2</sub>, porque el nitrógeno molecular, tiene una mejor transferencia de energía desde sus estados vibracionales hacia el estado excitado del CO<sub>2</sub> que el CO. Los átomos de CO y de N<sub>2</sub> a su vez, se excitan mediante colisiones con los electrones libres emitidos del cátodo.

Para valores altos de la densidad de corriente, la tasa de excitación de los niveles de CO<sub>2</sub> continúa creciendo conforme crece la corriente. En los tubos de gas sellados, se demuestra un óptimo en la potencia de salida contra la corriente alimentadora, ya que ésta incrementa la temperatura del gas y consecuentemente puebla térmicamente el nivel inferior de la transición láser. De ésta forma, es más difícil bajar al gas de su estado superior de transición. Para poder disipar el calor sobrante, se incluye en la mezcla una cierta cantidad de He, porque éste tiene excelentes propiedades de arrastre de calor desde el centro hacia las paredes y así mejora las propiedades conductoras de calor del medio activo. Como las paredes del tubo están siendo refrigeradas constantemente por la circulación del agua, esto contribuye a

despoblar el nivel inferior de transición. Existen también, otros aditivos que ayudan a vaciar el nivel inferior de transición mediante colisiones: el vapor de agua ha sido hasta ahora de gran ayuda y un poco de xenón ayuda a prolongar la vida del gas. Aún queda mucho por saber de la química que se produce durante el efecto láser y con el paso del tiempo se descubrirán más y más "recetas de cocina" para los diferentes láseres.

Mezclas de  $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-He-H}_2\text{-O-Xe}$  han probado su efectividad dándole a láseres de este tipo vidas promedio de arriba de 9000 hrs. (Clark and Wada, 1968). Además el tubo se hace de vidrio y se complementa con un espejo interior y una ventana de Brewster de GaAs.

El requerimiento de que la óptica del láser de  $\text{CO}_2$  permita el paso de radiación de longitud de onda de 10,600nm, presenta fuertes exigencias tecnológicas especialmente para flujos de energía altos. Los materiales que ofrecen menores pérdidas son los haluros alcalinotérreos, siendo el NaCl y el KCl los mejores. Sin embargo, estos materiales son higroscópicos, mecánicamente débiles y no sellan bien el vacío. El GaAs tiene mejores propiedades mecánicas, pero introduce mayores pérdidas y sufre desgaste térmico. Su alta eficiencia y su reducido ruido cuántico lo hacen especialmente atractivo como recurso para comunicación en el espacio.

### Láseres de Estado Sólido

Los láseres cristalinos se bombean ópticamente y utilizan iones metálicos de transición ( $\text{Cr}(3+)$ ,  $\text{Ni}(2+)$ , y  $\text{Co}(2+)$ ), iones de tierras raras ( $\text{Nd}(3+)$ ,  $\text{Pr}(3+)$ ,  $\text{Er}(3+)$ ,  $\text{Ho}(3+)$ ,  $\text{Tm}(3+)$ ,  $\text{Yb}(2+)$ ,  $\text{Sm}(2+)$  y  $\text{Dy}(2+)$ ) y iones de actinios ( $\text{U}(3+)$ ) (Johnson, 1966) (Kiss and Pressley, 1966) (Goodwin and Heavens, 1968). En 1962, Johnson y otros (Johnson et al., 1962) reportaron actividad de un láser de estado sólido continuamente bombeado consistente de  $\text{Nd}(3+)$  en  $\text{CaWO}_4$ . Desde entonces se ha verificado actividad láser en onda continua a temperatura ambiente en  $\text{Cr}(3+)$  en rubí (Eytuhov et al., 1965) (Ross, 1965),  $\text{Nd}(3+)$  en vidrio (Young, 1963), en  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$  (YAG) (Geusic et al., 1964), en  $\text{CaMO}$  (Duncan, 1965), en  $\text{Ca}_2(\text{PO}_3)_2\text{F}$  (Ohlmann et al., 1968), en  $\text{YAlO}_3$  (Weber et al., 1969) y en  $\text{La}_2\text{O}_3\text{S}$  (Alves et al., 1970). De éstos el más avanzado es el láser de  $\text{Nd:YAG}$  por su amplia capacidad de aplicaciones y su alta competitividad con los otros láseres gaseosos anteriormente mencionados.

### *Nd:YAG*

Las características favorables del YAG como material anfitrión para el Nd, son su baja constante fotoelástica, sus buenas propiedades mecánicas y térmicas, y que los iones trivalentes de Nd pueden ser incorporados a la red cristalina mediante sustitución. Se pueden obtener con este láser potencias de hasta 750W. Las transiciones principales del Nd:YAG se encuentran en el infrarrojo, siendo la más importante la de 1064 nm. Cuando se introducen cristales no lineales en la cavidad óptica se puede obtener una serie de transiciones láser en el visible a través de la generación del segundo armónico.

El Nd:YAG es un sistema de cuatro niveles (Kushida et al., 1968). A temperatura ambiente la línea principal se encuentra homogéneamente ensanchada por las vibraciones térmicas de la red. Se han utilizado un gran número de cavidades diferentes y de lámparas de bombeo en la operación de éste láser pero la más usada es sin duda la lámpara W-I en un cilindro elíptico. Esta combinación es la más altamente desarrollada. En una prueba operacional con un láser de 1 W, usándose una lámpara de 3000 K, la vida de la lámpara es típicamente de 3000 a 5000 horas: la vida operacional del Nd:YAG está determinada por la vida de la lámpara y del equipo circundante (Liberman and Grassel, 1969). Además del cilindro elíptico, también se emplean con bastante frecuencia cavidades esféricas y elipsoidales.

Lámparas de gas de alta presión de Kr, Xe y Ar, aunque de vida no tan larga, permiten ser empleadas a potencias más altas.

En su modo de operación pulsado, el Nd:YAG es capaz de emitir pulsos de 30-50 ps con frecuencias de repetición de hasta  $5 \times 10^8$  pps (Osternik and Foster, 1968). La vida media relativamente alta del nivel láser superior (230µs.) permite la generación de pulsos de alta potencia mediante conmutación Q (Geusic et al., 1965). El tiempo de elevación finito del campo en el interior de la cavidad impone un límite superior a la tasa de repetición de los pulsos sin dañar la estabilidad de la amplitud entre pulso y pulso.

### Láseres de Semiconductores

Desde que se hicieron las primeras observaciones de emisión estimulada en GaAs en 1962 (Hall et al., 1962) (Nathan et al., 1962) (Quist et al., 1962), los progresos en láseres de semiconductores no han dejado

de darse. Se han probado gran cantidad de materiales y la longitud de onda de la radiación coherente producida por ellos se ha extendido a través del visible hasta el ultravioleta (Nicol, 1966). También se han empleado varios métodos de bombeo: uniones p-n, haces electrónicos, bombeo óptico (Phelan and Rediker, 1965) y ruptura por avalancha de inyección (Weiser and Woods, 1965).

Como ya es conocido, la inversión de población entre dos niveles energéticos se consigue, cuando el estado superior tiene mayor probabilidad de estar ocupado por electrones que el estado inferior. En un semiconductor, los estados energéticos se agrupan en bandas, de las cuales la más alta ocupada por electrones es la banda de valencia. La banda superior que le sigue es la banda de conducción, y entre ellas se encuentra un salto energético de estados electrónicos prohibidos,  $E_g$ . Si un fotón de energía  $h\nu > E_g$  penetra el semiconductor, se dará una transición electrónica: absorbiendo y el electrón pasará a la banda de conducción. Si este proceso se repite sistemáticamente, se podrá conseguir la inversión de población en el semiconductor, donde la banda de valencia se habrá vaciado de electrones (o llenado de agujeros) hasta una energía que llamaremos  $F_v$ , y la banda de conducción se habrá llenado de electrones hasta una energía  $F_c$ . Si ahora se alimenta al material con fotones de energía  $E_k < h\nu < (F_c - F_v)$  se produce emisión estimulada.

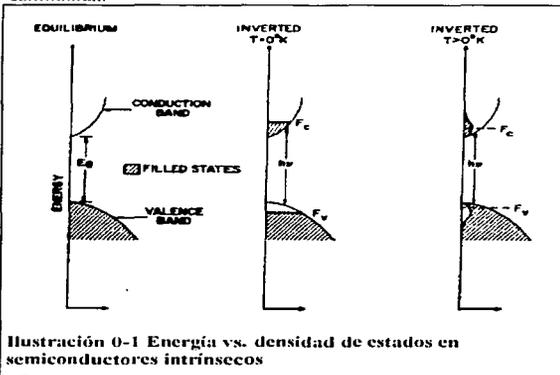


Ilustración 0-1 Energía vs. densidad de estados en semiconductores intrínsecos

respectivas en los estados energéticos de las impurezas (Lasher and Stern, 1964).

Para obtener acción láser, se necesita que además de haber emisión estimulada haya también una cavidad óptica en la que la ganancia supere a las pérdidas, es decir, que la onda atraviese la cavidad sin atenuación. Los agentes disipativos principales en un semiconductor son: penetración de la luz fuera de la zona activa, absorción de la luz por portadores libres.

La acción láser ocurre normalmente a una longitud de onda fija, donde la ganancia es máxima, pero en los semiconductores, conforme la tasa de excitación se incrementa, las funciones de distribución  $f_c$  y  $f_v$  cambian con la energía fotónica y el máximo se corre a energías fotónicas más altas.

Esto se puede explicar mediante un modelo simplificado. Considérese al semiconductor como un sistema de dos niveles, tipo p, donde el nivel superior está representado por la banda de conducción del semiconductor, y el inferior, por un nivel energético discreto, cuya densidad de estados es lo suficientemente alta, que su población se puede considerar aproximadamente independiente de la excitación. Así, conforme la excitación aumenta, aumenta la cantidad de electrones en la banda de conducción y  $F_c$  crece. La ganancia también aumenta y es proporcional a la densidad de electrones en la banda de conducción. Supóngase, además, que la probabilidad de transición es independiente de la energía, entonces la ganancia a una energía fija es independiente de la excitación para energías menores a  $F_c$ , y el máximo ocurre a  $F_c$ . Así pues, el máximo de la ganancia es proporcional a la densidad de electrones.

A 0°K este cuadro se ve como se muestra en la Ilustración 0-1, pero a una temperatura finita, no habrá una distinción aguda entre los estados ocupados y no ocupados, como se muestra en la Ilustración 0-1, sino que la distribución energética de los portadores estará repartida de acuerdo a la estadística de Fermi-Dirac:

$$f_c = \frac{1}{1 + e^{\frac{(E - F_c)}{kT}}}$$

donde  $F_c$  es el nivel "cuasi-Fermi" para electrones en la banda de conducción (es la energía a la cual la probabilidad de ocupación para un estado es igual a un medio). Se aplica una expresión similar para los electrones en la banda de valencia. Si el semiconductor no es intrínseco, es decir, contiene impurezas, es preciso tomar en cuenta los niveles "cuasi Fermi" y las degeneraciones

Conforme se supera  $F_c$ , también el máximo de la ganancia se corre a energías más altas, aumentándose la energía de la radiación (Lasher and Stern, 1964).

La estructura de las bandas de energía de los semiconductores se presentan de dos formas diferentes (Dumke, 1962):

aquellos en los que el mínimo de la banda de conducción y el máximo de la banda de valencia tienen el mismo vector de onda  $k$  en la zona de Brillouin y se denominan, semiconductores directos aquellos en los que los extremos están a diferentes vectores de onda.

Como el vector de onda de la luz es mucho menor que el de los electrones, solamente ocurren transiciones radiativas de primer orden entre los estados con el mismo vector de onda electrónico. Por esto, la ganancia óptica en semiconductores directos es muy alta y resulta fácil sobrellevar las pérdidas obteniéndose fácilmente la acción láser. En semiconductores indirectos, el cambio en vector de onda deberá ser absorbido por algún otro agente, como son las vibraciones de la red cristalina o ser absorbidas por impurezas.

La posibilidad de obtener altos grados de inversión de población en láseres de semiconductores genera también altas ganancias ópticas. De hecho, la ganancia llega a ser tan alta que el diseño de las cavidades ópticas no involucran grandes espacios. Cavidades del orden de algunas centenas de micras, son comunes de encontrar.

En cuanto a las transiciones, mientras que en los láseres gaseosos éstas se llevan a cabo entre estados atómicos bien definidos, en los láseres de semiconductores, las transiciones láser se producen entre bandas de estado. Estas bandas son el resultado de que los átomos activos se encuentren embebidos en una red cristalina y los estados energéticos de la red son una amalgama de aquellos de los átomos que la conforman. En una unión p-n láser típica, la energía óptica y recombinante se encuentran confinadas en una región muy angosta alrededor de la unión. Para hacer esta región más grande, se ha incorporado entre las regiones p y n una zona de alta resistividad (Wilson, 1963) (McIngalis et al., 1964) (Weiser and Stern, 1964) (McIngalis, 1965), misma que sirve para confinar el plasma y para crear diferentes modos de oscilación en la cavidad generada de esta forma. Entre alguna de las ventajas explotadas es el menor grado de difracción que sufre la luz al salir de la cavidad y, por lo tanto, menor grado de divergencia de la salida óptica.

En láseres de semiconductores se obtiene la inversión de población ya sea ópticamente o eléctricamente. La excitación óptica o fotoluminiscencia se obtiene bombardeando al semiconductor con fotones de suficiente energía para producir pares de electrón-agujero a través del salto (Johnson and Holonyak, 1968). Sin embargo, también se pueden utilizar una alta cantidad de fotones de menor energía que deberán ser absorbidos en pares para completar la transición. La ventaja mayor del bombeo óptico es la posibilidad de excitar materiales con los cuales no se pueden generar uniones p-n como por ejemplo, en CdS o CdSe. Otra forma de bombear láseres de semiconductores es mediante un haz electrónico. Esta forma es particularmente útil en el empleo de láseres de salto ancho (wide gap) y en los que no se pueden fabricar uniones p-n. El haz de electrones puede ser fácilmente trasladado, enfocado e inclusive, modulado. Aún así, la forma más práctica de alimentar un láser es mediante la inyección de una corriente eléctrica en la unión p-n. En láseres de inyección, como los llamaremos de ahora en adelante, la energía eléctrica se convierte directamente en radiación coherente haciéndolo altamente eficiente. La inyección se obtiene al polarizar en sentido directo la unión p-n: en este caso la impedancia de entrada del diodo es muy baja, lo que permite que se pueda usar circuitería plana.

Otra forma de excitar láseres semiconductores es por ionización de impacto en pares electrón-agujero, al producirse una avalancha en el material semiconductor (Southgate, 1968). Esta avalancha se produce al aplicar un campo eléctrico a través de un material semiconductor que no comprenda una unión de tipo p-n. La forma de operación de este género de láseres es similar a la de un láser gaseoso, con la diferencia de que se genera un plasma mucho más denso.

SPECTRAL RANGE COVERED BY SEMICONDUCTOR LASERS

	$\lambda$ ( $\mu$ )	AmeV)	Excitation*
ZnS	0.33	3.8	O E
ZnO	0.37	3.4	O E
Zn <sub>1-x</sub> Cd <sub>x</sub> S	0.49-0.32	2.5-3.82	O E
ZnSe	0.46	2.7	O E
ICdS	0.49	2.5	O E
ZnTe	0.53	2.3	O E
GaSe	0.59	2.1	E†
CdSe <sub>1-x</sub> S <sub>x</sub>	0.49-0.68	2.5-1.8	O E†
CdSe <sub>0.95</sub> Se <sub>0.05</sub>	0.675	1.8	O E
CdSe	0.675	1.8	O E
Al <sub>1-x</sub> Ga <sub>x</sub> As	0.63-0.90	2.0-1.4	E I
IGaAs <sub>1-x</sub> P <sub>x</sub>	0.61-0.90	2.0-1.4	E I
CdTe	0.783	1.6	O E
IGaAs	0.83-0.91**	1.50-1.38	O E I A
InP	0.91	1.36	I A
GaAs <sub>1-x</sub> Sb <sub>x</sub>	0.9-1.5	1.4-0.83	I A
CuInP <sub>2</sub>	1.01	1.25	E I
InAs <sub>1-x</sub> P <sub>x</sub>	0.9-3.2	1.4-1.9	I I
InAs <sub>0.98</sub> P <sub>0.02</sub>	0.942	1.32	I I
InAs <sub>0.99</sub> P <sub>0.01</sub>	1.6	0.78	I I
GaSb	1.55	0.80	E I
In <sub>1-x</sub> Ga <sub>x</sub> As	0.85-3.1	1.45-3.1	I I
In <sub>0.95</sub> Ga <sub>0.05</sub> As	1.77	0.70	I I
In <sub>0.95</sub> Ga <sub>0.05</sub> As	2.07	0.60	I I
Cd <sub>1-x</sub> P <sub>x</sub>	2.1	0.58	O E I
InAs	3.1	0.39	O E I
InAs <sub>1-x</sub> Sb <sub>x</sub>	3.1-5.4	0.39-0.23	I I
InAs <sub>0.98</sub> Sb <sub>0.02</sub>	3.19	0.39	I I
Cd <sub>1-x</sub> Hg <sub>x</sub> Te	3-15	0.41-0.08	O E I
Cd <sub>0.99</sub> Hg <sub>0.01</sub> Te	3.8	0.33	O E I
Te	3.72	0.334	O E I
PbS	4.3	0.29	O E I
InSb	5.2	0.236	O E I A
PbTe	6.5	0.19	E I
PbS <sub>1-x</sub> Se <sub>x</sub>	1.9-8.5	0.32-0.146	E I
PbSe	8.5	0.146	E I
Pb <sub>1-x</sub> Sn <sub>x</sub> Te	6-28	0.209-0.045	I I
PbSnSe	8-31.2	0.155-0.040	I I

\*A Avalanche breakdown.

O Optical pumping.

E Electron beam pumping.

I Injection

† Boldface indicates possible mode of excitation.

\*\* Depending on temperature and doping.

‡ Pulsed operation at room temperature.

Tabla 2 Intervalo espectral cubierto por los semiconductores

buenos materiales para el diseño de láseres. En las últimas dos décadas, la producción de radiación luminosa coherente en el intervalo visible del espectro ha generado suficiente experiencia en la tecnología láser, que el hacerla trascender, ha motivado a los investigadores a generar láseres sintonizables de soluciones de colorantes orgánicos fluorescentes. Los dispositivos basados en este fenómeno son llamados "láseres dye".

Como ya se hizo mención, una de las propiedades más llamativas de los láseres de colorantes es su capacidad de ser sintonizados. En contraste con otros medios láser, el espectro de emisión de los colorantes orgánicos es ancho, permitiendo así sintonizar la longitud de onda de emisión dentro de un intervalo razonablemente amplio. Además, el número de colorantes fluorescentes es muy grande, lo que permite seleccionar los compuestos para que emitan en las longitudes de onda visibles deseadas. El láser dye es el primer láser verdaderamente sintonizable.

El láser dye combina muchas de las ventajas de los láseres gaseosos y de los de estado sólido. El que el medio activo de un láser dye sea líquido simplifica el problema de obtener alta calidad óptica y hace el enfriamiento del medio una tarea prácticamente elemental, sobre todo cuando se opera de una forma pulsada a altas tasas de repetición. La ganancia obtenida de un colorante es mucho más alta que la obtenida por un gas y comparable a la de los láseres de estado sólido. No es imperativo usar un medio líquido para

Como se puede observar en la Tabla 2, los láseres de semiconductores cubren una parte del espectro que va desde 0.33 hasta 31  $\mu$ m en longitud de onda. En ciertas aleaciones entre componentes que son miscibles en proporciones controlables, la longitud de onda se sintoniza según la composición de la aleación.

La zona donde ocurre la recombinación radiativa tiene dimensiones del orden de la longitud de difusión de los portadores minoritarios, siempre y cuando no se empleen métodos especiales de confinamiento. Así, la región activa del láser es de 1-2  $\mu$ m de grosor. Estas medidas se pueden incrementar al bombear el láser con radiación que penetre en el material y cubra un volumen mayor al que se genera por métodos convencionales. Esto es el caso con el bombeo mediante haz de electrones, cuya profundidad de penetración depende del voltaje.

Como es de esperarse, en una cavidad cuyas dimensiones son tan reducidas como las que se acaban de discutir, se tienen fuertes pérdidas por la difracción, produciendo un haz coherente divergente. Claro, estas pérdidas se pueden disminuir al proporcionarle a la radiación una apertura más grande o generando un sistema de capas de regiones p-n-p-n... interconectadas de tal forma, que cada unión p-n que esté polarizada directamente sienta el efecto del campo de las demás capas, permitiéndose así un cierto filtrado interferencial.

## Láseres de Colorantes

La eficiente luminosidad demostrada por los colorantes orgánicos los ha convertido en



El cuarto paso y último del proceso termina el proceso láser al darse un decaimiento no-radiativo del estado a al singulete A básico.

La concentración de moléculas en el singulete excitado  $S_1$  debe alcanzar un cierto valor, la inversión crítica, para poderse producir emisión coherente en el colorante. La magnitud de la inversión crítica depende de las pérdidas del sistema láser completo.

El decaimiento radiativo espontáneo entre los estados singuletes de B a a se conoce como fluorescencia y está gobernado por la vida del estado B. Esta vida media se toma como el decaimiento exponencial de la fluorescencia de un gran número de moléculas de colorantes excitadas. Para algunas de estas moléculas orgánicas, su vida media es típicamente de  $5 \times 10^{-10}$  segundos, mientras que en láseres de estado sólido e inorgánicos este tiempo es varios órdenes de magnitud más lento, aprox.  $10^{-7}$  segundos.

La energía fotónica para la cual la absorción óptica de la molécula es un máximo, es mayor que la energía fotónica en el proceso de fluorescencia. La diferencia energética entre los procesos de emisión y absorción se compensa por los procesos no-radiativos b-B y a-A. Dicha separación energética entre fluorescencia y el espectro de absorción por singuletes es importante en el láser dye, ya que el colorante no excitado es entonces transparente respecto a la fluorescencia.

Sin embargo, este cuadro presenta sus bemoles. Las moléculas en el singulete excitado  $S_1$  pueden relajarse mediante un proceso no-radiativo hasta un estado inferior triplete, designado en la Ilustración 0-2 como  $T_1$ , en lugar de decaer al estado básico. Este proceso conocido como "cruzamiento intersistémico" procede a una tasa que está gobernada por la constante de cruzamiento intersistémico  $k_{ST}$  que tiene dimensiones de Hz. El cruzamiento intersistémico se indica en la Ilustración 0-2 por una línea quebrada. Como es de esperarse, el cruzamiento intersistémico compite con la fluorescencia en el decaimiento de  $S_1$  y es contraproducente para la operación del láser.

La vida media de decaimiento del triplete al estado base de la molécula es generalmente mucho más largo que el tiempo de decaimiento por fluorescencia, ya que la transición triplete-singulete está prohibida por espín. El valor actual del tiempo de decaimiento del triplete depende de las condiciones experimentales, en particular de la cantidad de oxígeno presente en la solución de colorante, la cual puede variar desde  $10^{-7}$  segundos o más en una solución cuidadosamente degasificada. El proceso de decaimiento del triplete al estado básico ( $T_1-S_0$ ) puede ser radiativo o no-radiativo. Si es radiativo se le llama fluorescencia. Debido a su vida media relativamente larga, el triplete actúa como una trampa para las moléculas excitadas y vacía el almacén de moléculas disponibles para el proceso láser.

El estado  $T_1$  es el estado más bajo de un conjunto de estados triplete excitados, de los cuales el primero está indicado en la Ilustración 0-2 como  $T_2$ . Las transiciones triplete-triplete están permitidas por el espín y la transición óptica asociada es relativamente fuerte. Desafortunadamente, dicha banda de absorción se traslapa con el espectro de fluorescencia de los singuletes. Consecuentemente, la acumulación de moléculas en los estados triplete produce una considerable pérdida óptica a longitudes de onda para las cuales la emisión láser es más probable. La absorción asociada con procesos triplete-triplete, puede ser lo suficientemente fuerte como para destruir la emisión láser. Para minimizar los efectos nocivos del estado molecular triplete es preciso alcanzar el umbral láser antes de que un número significativo de moléculas se haya acumulado en el estado triplete. Para ello se requiere de una fuente de excitación que tenga una constante de crecimiento en intensidad rápida en el tiempo, de aquí que el uso de láseres de pulso gigante para la excitación de un láser dye sean obvias.

El triplete de muchas moléculas es altamente activo químicamente. Así, bajo condiciones experimentales apropiadas, las moléculas que se encuentren en el estado triplete podrían reaccionar químicamente y destruir el colorante. La importancia de este proceso aún no se puede sobrelevar de forma total.

La existencia de la competencia entre fluorescencia y otros procesos de decaimiento para los singuletes excitados llevan a determinar una "eficiencia cuántica"  $\phi$  para la fluorescencia, que se define como la razón entre el número de fotones fluorescentes emitidos al número de fotones de excitación absorbidos por un número grande de moléculas de colorante. Para la mayor parte de los colorantes láser, el valor de  $\phi$  está entre 0.5 y 1.0. El valor real de  $\phi$  depende del solvente, la temperatura y otras condiciones experimentales. El proceso del láser dye, como ya se ha descrito, viene dado por un esquema de cuatro niveles. El análisis desarrollado para describir láseres de gas de cuatro niveles y de láseres de estado sólido pueden aplicarse asimismo al láser dye con excepción de que se incluyan algunas modificaciones para incluir efectos de estado triplete y de absorción óptica por singuletes.

El análisis se simplifica considerablemente al producirse inversiones críticas en un tiempo corto comparado con el tiempo de decaimiento del cruzamiento intersistémico  $1/k_{ST}$ , ya que en este caso se puede despreciar la acumulación de moléculas en el estado triplete. El primer análisis en considerar la acumulación de moléculas en el triplete fue hecho por Schmidt y Schaefer (1967). La evolución temporal de la ganancia de un colorante orgánico ha sido tratada por Bass, Deutsch y Weber (1968) siguiendo un análisis de láseres de estado sólido con terminación fonónica hecha por McCumber (1964).

McCumber consideró un medio láser de cuatro niveles con espectros de emisión y absorción relativamente anchos y supuso que la dependencia del espectro de emisión es la imagen especular del espectro de absorción, pero corrido hacia energías menores. La característica de ganancia la define McCumber como la diferencia de las probabilidades de absorción y de emisión fonónica. La característica de ganancia refleja la dependencia de la absorción y la fluorescencia con la longitud de onda. La ganancia es proporcional al número de moléculas en el estado excitado, y por lo tanto, será dependiente del tiempo, ya que la concentración de las moléculas excitadas depende de la intensidad de la excitación. Bass y colaboradores suyos obtuvieron la curva de ganancia contra el tiempo, de las ecuaciones de balance asumiendo una forma gaussiana del pulso de excitación, pero sin tomar en cuenta los efectos de cruzamiento intersistémico (Bass et al., 1968). Más adelante Weber y Bass introdujeron exitosamente un término de pérdida por cruzamiento intersistémico en las ecuaciones de balance (Weber, 1969). El desarrollo de un análisis de ganancia considerando emisión estimulada y absorción por tripletes ha sido discutido por Snavely y Peterson (1968).

Finalmente, el láser utilizado en los experimentos de Snavely y Schaefer constaba de una pipeta de flujo, de cuarzo, de 8 cm de longitud con ventanas de Brewster, excitado por una lámpara de Xenón de pulsos de 7.5 cm de longitud en espiral y la cavidad óptica fue hecha con espejos planos dieléctricos. Para producir pulsos relativamente largos y planos, la lámpara fue alimentada por una línea de transmisión de constantes extendidas (lumped constant transmission line).

En la Ilustración 0-3 se presentan datos interesantes de diferentes tipos de colorantes. La mayor parte de los colorantes que han sostenido acción láser pertenecen a una de dos clases: los xanthenos y los coumarinos. En estudios realizados por Schaefer, Schmidt y Volze (1966), Sorokin et al. (1967) y otros autores, se ha observado que la longitud de onda de los láseres dye depende de la concentración de colorante, si se mantienen constantes los demás parámetros. Con la selección correcta de la concentración del colorante se puede seleccionar la longitud de onda de emisión dentro de un intervalo de más de 50 nm.

## STRUCTURE, LASER WAVELENGTH, AND SOLVENTS FOR LASER DYES

Dye	Structure	Solvent	Wavelength	References
Acridine Red		EtOH	Red 600-630 nm	13, 16, 17, 20
Pyronin B		MeOH H2O	Yellow	14
Rhodamine 6G		EtOH MeOH H2O DMSO Polymethyl - methacrylate	Yellow 570-610 nm	13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 44, 45, 47
Rhodamine B		EtOH MeOH Polymethyl - methacrylate	Red 605-635 nm	13, 14, 15, 17, 19, 20, 22, 44, 47
Na-Fluorescein		EtOH H2O	Green 530-560 nm	13, 16, 17, 20, 22, 44
2,7-Dichloro - Fluorescein		EtOH	Green 530-560 nm	16
7-Hydroxycoumarin		H2O (pH~9)	Blue 450-470 nm	19, 20
4-Methylumbelliferone		H2O (pH~9)	Blue 450-470 nm	16, 26, 44
Esculin		H2O (pH~9)	Blue 450-470 nm	16, 26
7-Diethylamino - 4-Methylcoumarin		EtOH	Blue	33
Acetamidopyrene - trisulfonate		MeOH H2O	Green - Yellow	14, 27
Phthalium salt		MeOH	Green	27

Ilustración 0-3 Estructura molecular, longitud de onda láser y solventes para colorantes láser

# FENÓMENOS DE CONDUCCIÓN EN GASES

## Introducción

Un fenómeno íntimamente asociado a las diferentes descargas en gases es la emisión de electrones y, en algunos casos, la emisión de iones positivos por sólidos, como lo son las paredes aislantes y los electrodos metálicos. La emisión de electrones determina si la descarga puede automantenerse, por lo que es de gran interés para el estudio de la conducción eléctrica en gases.

Cuando se estudian los diferentes efectos de la conducción en gases, debe tenerse mucho cuidado con los resultados que se obtengan, porque el fenómeno de emisión electrónica se ve fuertemente influenciado por las condiciones de gas de la superficie emisora. Usualmente, los experimentos de este tipo requieren de degasificar cuidadosamente las superficies a estudiarse y aún así, condiciones de superficies libres de gas son imposibles de obtener, sobre todo si se desean estudiar las descargas eléctricas en gases. Los electrones emitidos pueden provenir de superficies a alta temperatura, llamada emisión termo-iónica; como resultado del bombardeo por electrones o por iones positivos, emisión por átomos metaestables; como resultado de la aplicación de campos eléctricos intensos, efectos químicos o fotoemisión (Koller, 1937).

En este capítulo se pretende dar una introducción a lo que son las descargas eléctricas en gases, desde el punto de vista puramente fenomenológico. En particular son de interés, aquellas descargas que intervienen en el proceso láser y en las bujías. Ambas pueden ser consideradas simultáneamente, ya que ambas son descargas por cátodos fríos, es decir, producidas por la aplicación de campos eléctricos intensos. Para ello tiene que hacerse mención, aunque muy someramente, de las características de un plasma, ya que la región espacial en donde ocurre la descarga es un plasma con características de temperatura, voltaje y corriente particulares.

## Emisión eléctrica

Electrones pueden ser "arrancados" de superficies metálicas mediante la aplicación de un potencial eléctrico muy intenso. Cuando la diferencia de potencial entre un cátodo (termo-iónico) y un ánodo aumenta, la corriente eléctrica hacia el ánodo crece según la ley de Child, es decir, (Child, 1911)

$$j = \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{3/2} \frac{1}{9\pi x^2}$$

donde  $j$  es la corriente eléctrica,  $V$  la diferencia de potencial,  $x$  la distancia entre cátodo y ánodo,  $e$  la carga eléctrica del electrón y  $m$  su masa.

A un cierto valor del voltaje del ánodo, la corriente deja de crecer, ya que todos los electrones emitidos termo-iónicamente están siendo atraídos hacia el ánodo y se habrá alcanzado la corriente de saturación. Dicha corriente de saturación satisface la ecuación para emisión termo-iónica (Richardson, 1921). (Dushman, 1930), (Compton y Langmuir, 1931)

$$j = AT^2 e^{-\frac{b_0}{T}}$$

donde  $b_0$  es una constante de la superficie emisora tal que  $b_0/k = V_0/e$ , siendo  $k$  la constante de Boltzmann y  $V_0$  la función de trabajo termo-iónico.  $V_0$  es el trabajo necesario expresado en Volts para arrancar una carga de una superficie dada.  $A$  es una constante universal, cuyo valor es

$$\frac{emk^2}{h} = 60.2 \frac{A}{cm^2 K^2} \text{ y } h \text{ la constante angular de Planck. En la teoría moderna hay que tomar en}$$

consideración el espín del electrón, duplicándose este valor para caras cristalinas puras.

Si la diferencia de potencial entre los electrodos se incrementa por encima del valor de saturación, se ha comprobado experimentalmente, que la corriente seguirá creciendo. Este efecto fue estudiado por Schottky y frecuentemente se le denomina "efecto Schottky" (Schottky, 1914).

En ausencia de un campo eléctrico externo, un electrón situado justo en la parte externa de la superficie de un metal, debe adquirir suficiente energía para poder escapar de la fuerza ejercida debido a su carga imagen y así poder salir de la influencia de la superficie del metal. El trabajo que realiza dicho electrón en contra de la fuerza de su imagen es

$$e\phi = \int_0^{x_0} eE_i(x) dx$$

donde  $E_i(x)$  es el campo eléctrico imagen del electrón fuera del metal a una distancia  $x$ . Por la ley de Coulomb, el campo imagen es

$$E_i(x) = \frac{e}{4x^2}$$

Un campo eléctrico externo  $E$  se opone al campo imagen, ejerciendo sobre el electrón una fuerza  $eE$  a una distancia dada  $x_0$ ; cuando ambas fuerzas son iguales, cualquier electrón que llegue a  $x_0$ , puede escaparse de la superficie. Por eso, la condición para la emisión en la presencia de un campo eléctrico externo es

$$eE_i(x) = \frac{e^2}{4x_0^2} = eE$$

o sea,

$$x_0 = \frac{\sqrt{eE}}{2}$$

Como el campo eléctrico aplicado ejerce una fuerza sobre el electrón, se modifica el trabajo efectivo sobre éste a un valor  $\phi'$

$$e\phi' = \int_0^{x_0} [eE_i(x) - eE] dx$$

es decir,

$$\phi' = \phi - (eE)^{1/2}$$

Finalmente, si se substituye este valor en la expresión para la corriente termo-iónica, se obtiene la ecuación de Schottky:

$$j = AT^2 e^{-\frac{(\phi - \sqrt{eE})e}{kT}}$$

o

$$j = j_0 e^{\frac{4389\sqrt{E}}{T}}$$

donde  $j_0$  es la emisión termo-iónica en ausencia de campo eléctrico externo en el cátodo.

La ecuación de Schottky no es válida para superficies compuestas, tales como cátodos de óxidos. Como  $E$  es proporcional al voltaje aplicado, el logaritmo de la corriente en el régimen de saturación crece como

$\frac{\sqrt{V}}{T}$  y la intersección de esta recta con la ordenada ( $V=0$ ) da la corriente de emisión termo-iónica.

También se puede arrancar los electrones de superficies frías únicamente por la acción del campo (Millikan y Eyring, 1926). (Eyring, Mackeown y Millikan, 1928). A este efecto se le conoce como "emisión fría" o

"emisión autoelectrónica". Para ello, los campos deben tener una intensidad del orden de  $10^8 \frac{V}{cm}$ . los

cuáles se pueden producir fácilmente en puntas o en pequeñas irregularidades o puntos submicroscópicos en esquinas cristalinas (Dempster, 1934). Un incremento de sólo el 10% en el campo en esos puntos, por encima del campo promedio, tiene como consecuencia que la densidad de corriente se intensifique de forma tal, que casi toda la emisión proceda desde esos puntos. Se ha desarrollado una expresión basada en la teoría de la mecánica ondulatoria para este tipo de emisión y concuerda con el experimento para superficies puras (Fowler y Nordheim, 1928). (Loeb, 1929). La ecuación de Fowler-Nordheim para la densidad de corriente es

$$j = \frac{e}{2\pi h} \frac{n^3 e^{4z}}{(\mu + e\phi)\phi^{1/2}} E^2 e^{-\frac{4Ke^{1/2}\phi^{1/2}}{3E}}$$

donde  $E$  es el campo electrostático externo

$$\mu = \left(\frac{3m}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{8m}$$

y

$$K = \frac{8\pi^2 m}{h^2} e.s.u.$$

Aquí, como es costumbre,  $e$  es la carga eléctrica del electrón,  $h$  la constante de Planck,  $m$  la masa del electrón,  $n$  el número de electrones libres por unidad de volumen en cm, y  $\phi$  la función de trabajo de la superficie. Esta ecuación demuestra que debe ser posible medir corrientes para campos del orden de

$10^7 \frac{V}{cm}$ , y ha sido corroborado experimentalmente en superficies cuidadosamente purificadas. Sin

embargo, Müller (Müller, 1936) encontró que las corrientes producidas por la emisión de campo se representan de mejor forma, si el exponente para  $\phi$  en la ecuación de Fowler-Nordheim se reemplaza por

$\phi^3$ . Corrientes de campo se obtienen fácilmente de superficies sobre las cuales se haya depositado una película de algún material electropositivo, como por ejemplo, tungsteno cubierto con cesio responde con

emisión a  $10^4 \frac{V}{cm}$ . En la práctica, y especialmente en descargas en gases, las superficies no son

absolutamente puras y no se puede degasificarlas, por eso son de esperarse corrientes de emisión de campo a intensidades de campo relativamente bajas. Los experimentos de Beams (Beams, 1933) demuestran que la emisión fría empieza en superficies de Mercurio impuras a valores promedio del campo del orden de

$3.5 \times 10^5 \frac{V}{cm}$  y en mercurio puro a  $1.8 \times 10^6 \frac{V}{cm}$ .

### **Efectos de carga espacial**

Si en una región del espacio se da una concentración de cargas, la geometría del campo electrostático se distorsiona. Esto es cierto para las descargas en gases. En diferentes puntos del espacio, aunque el campo eléctrico sea aparentemente uniforme, la dinámica misma del gas produce que en ciertas regiones del espacio se den concentraciones de carga y, por lo tanto, un campo eléctrico no-uniforme, sobre todo en las cercanías de los electrodos. Inclusive, es posible que el campo sufra una distorsión tal, que, por ejemplo, algún punto entre los electrodos esté a un potencial aún más alto que el ánodo.

Hace algún tiempo ésto causó bastante confusión entre la teoría y el experimento, ya que en teoría se supone que no se puede mantener un arco con una diferencia de potencial menor al potencial mínimo de ionización del gas o del vapor en cuestión. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que aún con voltajes considerablemente por debajo del valor calculado, es posible mantener una descarga. Darrow, en su libro "Electrical Phenomena in Gases", dice:

"Varios físicos notables creían, que estaban aplicando un campo eléctrico uniforme a un gas conductor, pero en realidad no estaban haciendo nada parecido."

### **Carga espacial en el alto vacío**

El efecto de carga espacial se da en condiciones muy variadas. Aquí se estudian las características de este efecto al actual en una región del espacio de alto vacío. En el desarrollo de la ley de Child, se supusieron los electrodos infinitos y plano-paralelos en una zona vacía de cargas o demás partículas materiales. Uno de los electrodos emite termo-iónicamente, y el emisor coincide con una superficie equipotencial. Así se obtiene la ley de Child (Child, 1911)

$$j = \frac{\sqrt{2m} V^{1/2}}{9\pi\epsilon^2}$$

y es válida para cualquier configuración de electrodos en alto vacío (Langmuir y Compton, 1931). Si  $V$  es grande en comparación con la caída de potencial a lo largo del filamento o electrodo, éste se puede considerar como equipotencial.

Cuando la emisión es muy baja, cada electrón emitido llega al ánodo. El potencial para este caso se aproxima al potencial uniforme, representado por una recta. Cuando la emisión aumenta, solamente se emiten tantos electrones como puedan llegar al ánodo, partiendo con velocidad inicial cero, el campo en el cátodo es cero y el potencial queda descrito por la ley de Child. Sin embargo, si se emite un exceso de electrones, solamente aquellos que poseen una energía por encima de un valor mínimo, alcanzan a llegar al ánodo. Es un efecto como de "embotellamiento" de electrones a una cierta distancia por fuera del emisor, produciendo un apantallamiento del potencial del ánodo. En este caso se produce un mínimo de potencial entre los electrodos o, como se dice también, un "cátodo virtual". Aquí el campo es cero y es de donde se supone que se emiten los electrones. Conforme el voltaje entre los electrodos aumenta, la posición del cátodo virtual se aproxima cada vez más al cátodo real.

Esta relación es también válida para los iones pesados, haciendo los cambios propios.

### Carga espacial a presiones altas

Bajo condiciones de alta presión, el cuadro anterior cambia en que los electrones emitidos pierden a lo largo de su trayectoria energía por colisiones y alcanzan una velocidad terminal determinada por su movilidad y por la intensidad del campo. En este caso, la densidad de corriente viene dada por

$$j = nev = -\rho K \frac{dV}{dx}$$

o

$$\rho = -\frac{j}{K} \frac{dx}{dV}$$

Según la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{4\pi j}{K(dV/dx)}$$

Integrando dos veces,

$$V = \frac{2}{3} \left( \frac{8\pi j}{K} \right)^{1/2} x^{3/2} + C$$

si el cátodo se escoge como el cero de potencial,  $C=0$ . Despejando  $j$ , se obtiene

$$j = \left( \frac{9}{4} \right) \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^3}$$

En esta derivación se supone que no existe ionización (Dillon, 1958). No se toma en cuenta que hay difusión de iones de puntos de alta concentración a los de menor concentración. Esta relación de carga espacial se aplica a cualquier región de descarga en gases, en la cual la corriente se genera enteramente por iones del mismo signo.

### Plasma

En muchas descargas gaseosas, existen regiones ionizadas, llamadas "plasma", en las cuáles las concentraciones de cargas positivas son iguales a las concentraciones de cargas negativas y son relativamente altas. Ejemplos de plasma son las columnas positivas de descargas de arco o de resplandor. Una región de este tipo es altamente conductor por lo tanto, se presentan gradientes de potencial relativamente bajos a lo largo de la cavidad. En general, los portadores negativos de la corriente de un plasma son los electrones, ya que los iones negativos rápidamente se recombinan con los iones positivos. Los iones positivos, los electrones y los átomos del gas neutro pueden o no estar en equilibrio térmico. Como un plasma usualmente se genera con la aplicación de un campo eléctrico, la temperatura de los iones

positivos es mayor a la temperatura del gas. La temperatura de los electrones puede alcanzar valores muy altos. Se supone que los iones y los electrones tienen una distribución maxwelliana de velocidades, aunque también ocurren desviaciones observables de este tipo de distribución (Compton y Langmuir, 1930). Cuando se aplica un campo eléctrico a un plasma, la densidad de corriente de deriva es usualmente mucho más pequeña que la densidad de corriente estocástica de los iones y electrones de forma tal, que el campo aplicado no necesariamente produce la desviación de velocidades de la distribución maxwelliana, sino más bien incrementa la temperatura iónica y electrónica. Este aumento de la temperatura de las partículas cargadas se debe a la dispersión de la energía del campo y es mayor para los electrones que para los iones debido a su movilidad mayor. Por su pequeña masa, los electrones ceden poca energía a las partículas neutras, pero por otra parte, los iones interactúan fuertemente con el gas e incrementan su temperatura. Aunque un plasma sea esencialmente neutro en un volumen suficientemente grande, existen intensidades de campo muy altas en diferentes puntos del volumen. En todo punto el campo varía ampliamente con el tiempo, dependiendo de configuraciones instantáneas fortuitas de las partículas cargadas en torno a ese punto. La ionización de un plasma se mantiene principalmente por colisiones con electrones, y en menor grado, por fotoionización. Es posible, que los electrones adquieran cantidades considerables de energía al pasar a través de una serie de campos acelerantes. Se puede hacer una estimación del valor promedio del campo alrededor de las partículas cargadas de la forma siguiente:

Supóngase que las concentraciones promedio de electrones e iones positivos son iguales y cada uno tiene una magnitud de  $n$  partículas por centímetro cúbico. El volumen promedio ocupado por una sola partícula

cargada es entonces  $\frac{1}{2n} \text{ cm}^3$ . Si se supone esférico el volumen, su radio viene dado por

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{2n}$$

o sea,

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\pi n} \right)^{1/3}$$

Si el campo eléctrico en todo punto del volumen es  $E$ , el "microcampo" promedio es

$$\bar{E} = \frac{\int_V E dv}{\int_V dv} = \frac{3}{4\pi R^3} \int_V E dv$$

Como el campo  $E$  debido a un ion en el volumen obedece la ley de Coulomb, es decir,  $\frac{e}{r^2}$ , realizando la integral y reemplazando el elemento de volumen con una cáscara esférica  $dv = 4\pi r^2 dr$  se obtiene para el campo promedio

$$\bar{E} = \frac{3e}{R^3} \int_0^R dr = \frac{3e}{R^2}$$

Substituyendo  $R$  en términos de la concentración iónica  $n$ , se obtiene

$$\bar{E} = 12 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{2/3} e n^{2/3}$$

Esta deducción no toma en consideración los efectos de cargas situadas fuera de la esfera de radio  $R$  en torno a la partícula cargada, pero el error es pequeño. Por ejemplo, si  $n = 10^{10}$ , entonces  $E_p = 8 \frac{V}{\text{cm}}$ ,

mientras que una intensidad de campo promedio de  $1 \frac{V}{\text{cm}}$  es suficiente para mantener un plasma.

### Descargas de Townsend

En el estudio de descargas gaseosas es costumbre dividir las en dos clases:

descargas automantenidas.  
descargas no-automantenidas.

El mecanismo de ruptura en un gas, llamada descarga o chispa, es la transición de una descarga no-automantenida, es decir, una descarga oscura, a una de los diferentes tipos de descargas automantenidas, que usualmente ocurren de manera explosiva.

Como ejemplo de una descarga que no está automantenida, considérese un gas en medio de dos electrodos, de los cuales uno se encuentra emitiendo electrones fotoeléctricamente, debido a que está siendo irradiado. Cuando se aplica una diferencia de potencial entre ellos, la corriente al ánodo se incrementa lentamente conforme los electrones atraviesan el gas con una velocidad que viene determinada por su movilidad y por la intensidad de campo. Conforme se va incrementando el voltaje, se presenta el fenómeno de saturación; todos los electrones emitidos por el cátodo, son atraídos por el ánodo. Si se supone que no hay producción de electrones que no provengan del cátodo, no debe crecer la corriente con el voltaje, pero los experimentos demuestran que la corriente vuelve a incrementarse, primero lentamente y después a una tasa muy alta.

Estas dos fases de descarga, que ahora se denotan  $T_1$  y  $T_2$ , se denominan descargas de Townsend según J.S. Townsend, quien realizó tempranas y extensas investigaciones en este campo. El propuso por vez primera una teoría satisfactoria de este fenómeno basándose en la suposición de que el incremento en la corriente durante la fase  $T_1$  ocurre cuando los electrones emitidos por el cátodo han ganado suficiente energía para ionizar por colisión a otros átomos del gas, y que el rápido incremento en la fase  $T_2$ , ocurre cuando los iones positivos producidos por dichas colisiones ganan suficiente energía para producir ionización adicional. La corriente en las regiones de las descargas de Townsend se anula tan pronto como la fuente ionizante externa es removida y por lo tanto se dice, que es una descarga no-automantenida. Cuando el voltaje alcanza un cierto valor crítico,  $V_s$ , la corriente se incrementa muy rápidamente y se genera una chispa como resultado del establecimiento de una descarga automantenida tal como un arco. La naturaleza de la descarga sostenida depende de la trayectoria de la descarga y de la naturaleza del circuito eléctrico.

### Ionización por electrones

La energía que un electrón recibe de un campo eléctrico depende de la intensidad del campo E y de la distancia en la cual éste es acelerado por el campo entre colisiones. El número de iones nuevos producidos por centímetro de recorrido del electrón acelerado es inversamente proporcional al recorrido libre medio (r.l.m.), L, del electrón. Si  $\alpha$  designa el número de colisiones ionizantes de este tipo

$$\alpha = \frac{f(EL)}{L}$$

A esta cantidad se le denomina el "primer coeficiente de Townsend" o "alfa de Townsend". Si se desprecia el efecto de difusión de iones, se obtiene la expresión para la producción de iones

$$n = q_0 e^{\alpha d}$$

donde  $q_0$  es el número de electrones emitidos por el cátodo, ya sea por emisión termo-iónica o fotoeléctrica y d la distancia recorrida por los electrones en centímetros. Para la corriente se tiene una expresión similar

$$j = j_0 e^{\alpha d}$$

donde  $j_0$  es la corriente de saturación ya sea fotoeléctrica o termo-iónica. A esto se le suele llamar a veces "avalancha" de electrones y es una expresión estacionaria debido a su dependencia de la corriente de saturación. Dicha corriente puede ser amplificada por el efecto ionizante del campo al proporcionarle energía suficiente a los electrones, de allí la expresión "field-intensified ionization". Esta ecuación es válida siempre y cuando la corriente sea relativamente pequeña de forma tal, que la distorsión de carga espacial producida por los iones positivos sea pequeña. Esta fórmula encuentra sus aplicaciones sobre todo en la amplificación de señales de celdas foto-eléctricas de gas por ionización.

Si ahora se le añade a este cuadro la presencia de radiación ionizante a una tasa de q pares por centímetro cúbico por segundo, el cambio de concentración de iones en un pequeño volumen de grosor dx, viene dado por

$$dn = \alpha n dx + q dx$$

y la corriente

$$j = \frac{j_0(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha l}$$

Ecuación 1.

Como el r.l.m. de los electrones a través del gas es inversamente proporcional a la presión del gas,  $\alpha$  se puede igualmente dar como una relación del tipo

$$\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{E}{p}\right)$$

Townsend descubrió, que si se grafica la razón de ionización a presión contra  $E/p$  para diferentes valores de  $p$  y  $E$ , la curva resultante es suave y continua.

Sea la energía necesaria para ionizar una molécula  $eV_0$ , donde  $V_0$  es un potencial efectivo de ionización característico de la molécula, es decir, un electrón puede ionizar a esta molécula sólo si la energía que recibió del campo en el recorrido  $x$ ,  $eV_0$  es mayor que  $eV_0$ . Si el campo es uniforme, ocurre una colisión

ionizante, si  $x = \frac{V_0}{E}$ . Sin embargo, es importante recordar, que la probabilidad de que ocurra una

ionización no es 1 aunque la energía crítica se supere. Se sabe, que la probabilidad de que un electrón tenga un r.l.m. de longitud  $x$  viene dada por

$$\frac{n_x}{n} = e^{-\frac{x}{L}}$$

y substituyendo el valor crítico de  $x$

$$\frac{n_x}{n} = e^{-\frac{V_0}{EL}}$$

El número promedio de r.l.m. en un centímetro es  $1/L$ . Si este número se multiplica por la probabilidad de que sea del tamaño necesario para causar ionización, el número probable de ionizaciones por centímetro de recorrido es

$$\alpha = \frac{1}{L} e^{-\frac{V_0}{EL}}$$

y como  $\frac{1}{L} = Ap$ . A una constante

$$\frac{\alpha}{p} = Ae^{-\frac{B}{E/p}}$$

donde  $B = AV_0$ .

Conociendo los valores de  $A$  y  $B$  para diferentes gases, se puede estimar la razón  $E/p$  óptima. La ecuación demuestra que valores de  $\alpha$  a presiones bajas se puede generalizar para presiones altas, donde es difícil hacer mediciones. Los experimentos demuestran que la probabilidad de ionización alcanza su máximo menor a 1, para energías electrónicas considerablemente superiores al potencial de ionización mínimo.

Además, no se toma en consideración el hecho, de que los electrones puedan excitar átomos, lo que justifica la existencia de colisiones inelásticas. Para energías por debajo del potencial de excitación, las colisiones son elásticas y los electrones podrán seguir adquiriendo energía a lo largo de varios r.l.m., suficiente para superar el potencial de ionización, inclusive con campos eléctricos menores al valor crítico. El hecho de que esta teoría tan simple sea satisfactoria, se debe a los efectos compensatorios de las suposiciones hechas. Por eso debe tenerse en mente, que la ionización por colisiones está presente para todas las intensidades de campo eléctrico y que no empieza de pronto al alcanzarse los 30,000 Volts/cm, como en varias ocasiones se suele pensar.

Finalmente cabe mencionar, que uno de los grandes éxitos de la teoría de Townsend se encuentra en la deducción de la fórmula para la presión óptima de ionización por electrones. Stoletow (Stoletow, 1890)

encontró, que si se varía la presión dentro de un tubo fotoeléctrico, se da una presión para la cual la corriente es un máximo. De sus experimentos concluyó, que

$$p_m = \frac{E}{372}$$

Mientras que la teoría predice un valor de

$$p_m = \frac{E}{B}$$

Valores típicos de A y B se pueden ver en la tabla 1, y para aire B=365.

### **Ionización acumulativa**

La relación exponencial para la corriente en el régimen de saturación es válida para la región  $T_1$  en el diagrama de Townsend. Sin embargo, si esta relación se extiende a voltajes más altos hasta llegar a la región  $T_2$ , se marca una diferencia muy fuerte respecto a la realidad experimental. Esta divergencia es causada debido a que algún otro proceso diferente a la simple ionización por electrones debe estar teniendo lugar para estos valores de voltaje. Townsend supuso que en la región  $T_2$  los iones positivos que se forman por colisiones con electrones comienzan a ganar suficiente energía del campo para ionizar otras partículas del gas. Esto lo llevó al concepto del coeficiente para iones positivos,  $\beta$ , también llamado el "segundo coeficiente de Townsend". La cantidad  $\beta$  tiene, como se espera, la misma forma que la función para el primer coeficiente de Townsend.

$$\frac{\beta}{p} = g\left(\frac{E}{p}\right)$$

El análisis de la acción combinada de electrones e iones positivos en el gas dan como resultado la siguiente ecuación (Townsend, Electricity in Gases; Slepian, Conduction of Electricity in Gases; Thomson & Thomson, Conduction of Electricity through Gases) para la corriente estacionaria

$$j = \frac{j_0(\alpha - \beta)e^{(\alpha - \beta)x}}{\alpha - \beta e^{(\alpha - \beta)x}} \quad \text{Ecuación 2.}$$

Dentro de los límites del error experimental esta ecuación concuerda con los resultados de pruebas hechas sobre un intervalo considerable de  $E/p$ . Para valores pequeños de  $E/p$ , es decir, para  $\beta$  igual a cero, la ecuación anterior se reduce a la ecuación original para la región  $T_1$  de la corriente. La ecuación para la corriente de ionización acumulativa contiene una condición

$$\alpha - \beta e^{(\alpha - \beta)x} = 0$$

que es la condición de ruptura y la corriente es infinita. Townsend interpretó esta condición como el precedente de ruptura en la bujía (gap) y con ella pudo checar el voltaje de ruptura bajo diversas condiciones. En realidad, la ecuación se aplica solamente a estados estacionarios. Ahora se sabe, que los iones positivos se convierten en ionizadores efectivos solamente después de haber adquirido una energía comparable a miles de voltios. Bajo las condiciones bajo las cuáles se aplica la ecuación anterior, la probabilidad de que un ion positivo tenga un r.l.m. lo suficientemente largo como para adquirir la energía necesaria para generar ionización colisional, es extremadamente pequeña (Loeb, Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases). Como se verá más adelante, es posible que en sus experimentos haya estado midiendo otros factores ionizantes en lugar del efecto de los iones positivos en el gas. Estos otros procesos más probables que la ionización colisional por iones positivos da como resultado una ecuación similar a la que anteriormente se presentó.

La emisión de electrones por el cátodo debido al bombardeo de los iones positivos es un proceso probable involucrado en la intensificación de corriente de descarga (Loeb). Considérese una vez más los electrodos planos-paralelos, separados por una distancia  $d$  con un campo eléctrico  $E$  actuando a través de un gas a presión  $p$ , entonces, con  $E/p$  suficientemente grande como para causar ionización por electrones considerable, supóngase que un número  $\gamma$  de electrones nuevos están siendo emitidos del cátodo por cada

ión positivo que los bombardea. Supóngase además que  $n$  electrones por centímetro cuadrado alcanza el ánodo por unidad de tiempo, que  $n_0$  electrones por segundo por centímetro cuadrado están siendo emitidos por el cátodo debido a la radiación incidente, y que  $n_c$  electrones por centímetro cuadrado por segundo están siendo emitidos por el cátodo debido a todos éstos efectos combinados. El número de iones positivos que se forman en el gas es entonces igual a  $n - n_c$ , del número de electrones que arriban al ánodo y del número de electrones que abandonan el cátodo en condiciones estacionarias. El número de electrones que salen del cátodo se puede expresar como

$$n_c = n_0 + \gamma(n - n_c)$$

o

$$n_c = \frac{n_0 + \gamma n}{1 + \gamma}$$

Con este número de electrones emitidos por el cátodo y amplificando la corriente de acuerdo con la ecuación para la región  $T_1$ , el número de electrones que alcanzan el ánodo es

$$n = \frac{n_0 + \gamma n}{1 + \gamma} e^{\alpha d}$$

es decir,

$$n = \frac{n_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}$$

y multiplicando por la carga del electrón se obtiene la densidad de corriente en el ánodo,

$$j = \frac{j_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}$$

ignorando el 1 respecto respecto a la exponencial, se obtiene

$$j = \frac{j_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma e^{\alpha d}}$$

**Ecuación 3.**

Loeb señala que si a  $\gamma$  se le atribuye el valor  $\frac{\beta'}{\alpha - \beta}$ , donde  $\beta'$  es una constante adecuada, se obtiene para la corriente

$$j = \frac{j_0 (\alpha - \beta') e^{\alpha d}}{\alpha - \beta' e^{\alpha d}}$$

Si  $\beta$  es pequeña comparada con  $\alpha$ , se puede igualar  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$  y ambas soluciones, una considerando

ionización por colisiones con iones positivos y la otra solamente la emisión de electrones por el cátodo, son prácticamente indistinguibles bajo condiciones experimentales.

Por último, existen otros procesos de emisión que están activos durante la descarga. Uno, muy importante, es la fotoemisión de electrones y que a su vez son producidos en el gas como resultado de la ionización colisional por electrones. Estos fotones no son afectados por el campo, y por lo tanto, solamente una cierta porción de ellos alcanzan a llegar al cátodo, su número dependiendo del área del cátodo y de la configuración general. Se puede mostrar que este proceso particular queda descrito por la siguiente ecuación (Loeb, "Fundamental Processes in Electrical Discharge in Gases")

$$j = \frac{j_0 \alpha e^{\alpha d}}{\alpha - \beta \eta g e^{(\alpha - \mu) d}}$$

donde  $\mathcal{P}$  es el número de fotones producido por un electrón en un centímetro de recorrido en la dirección del campo.  $\mu$  es el valor promedio del coeficiente de absorción de fotones en el gas,  $g$  es un valor geométrico que representa la proporción de fotones que llegan al cátodo y  $\varepsilon$  es la fracción de fotones que producen electrones en el cátodo capaces de abandonar su superficie.

### Ruptura

Conforme aumenta el campo eléctrico en una bujía, la corriente crece de acuerdo con la relación de corriente de la ecuación de Townsend, y al alcanzarse un punto dado se da una transición repentina de la descarga oscura a alguna de las varias formas de descargas automantenidas. Esta transición, o arco, consiste en un cambio rápido del valor de la corriente a través de la bujía. El tipo de descarga que resulta cuando el denominador de la ecuación es cero, depende de la forma de los electrodos, de la distancia entre ellos, de la presión del gas y de la naturaleza del circuito eléctrico. Para electrodos planos, el resultado es una chispa que inicia la descarga en arco, para electrodos curvos, se presenta una "corona" o "descarga ramificada". Bajo ciertas condiciones, este cambio en corriente puede ser pequeño. En el sentido técnico de la palabra, la ruptura ocurre cuando la bujía entera está puentada por descargas en arco.

Las ecuaciones para la corriente en la zona  $I_2$  son capaces de indicar la región inestable de transición.

Dicha transición se puede suponer que ocurre cuando uno de los denominadores de alguna de las ecuaciones anteriores se hace cero, es decir,

$$\frac{\alpha}{\beta} = e^{(\alpha - \beta)d} \approx e^{\alpha d}$$

$$\frac{1}{\gamma} = e^{\alpha d}$$

$$\frac{\alpha}{\eta \mathcal{P} g} = e^{(\alpha - \mu)d} \approx e^{\alpha d}$$

Así, la ruptura se puede iniciar ya sea manteniendo el voltaje constante y variando la separación entre electrodos, o viceversa. Una descarga sostenida se establece sólo cuando las condiciones de campo, presión y separación entre electrodos son tales, que cada electrón que abandona el cátodo genera procesos secundarios a través de los cuales éste es reemplazado por un electrón nuevo que abandona el cátodo. Cuando están involucrados campos inhomogéneos, la determinación de la condición crítica para ruptura es menos simple, porque el campo varía de punto a punto y por lo tanto, también  $\alpha$ . Un campo inhomogéneo da lugar a efectos de polaridad, porque la magnitud de las emisiones secundarias en el cátodo depende de la energía de los iones positivos que lo golpean. De esta forma, la emisión del cátodo en un campo relativamente débil es menor que la emisión en un campo fuerte. Este efecto de polaridad se observa en la práctica.

### El potencial de ruptura

Se puede dar una expresión analítica para el potencial de ruptura en un campo homogéneo, si se supone que la descarga viene dada por la emisión secundaria de emisiones por el cátodo.  $\gamma$  se supone independiente de la  $E/p$ . Tomando el logaritmo natural de la segunda ecuación anterior, se obtiene

$$\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \alpha d$$

Como el campo electrostático es homogéneo  $E = \frac{V_r}{d}$ , donde  $V_r$  es el voltaje de ruptura y  $d$  la distancia entre electrodos, obteniéndose para  $\alpha$  la siguiente expresión

$$\alpha = A p e^{-\frac{B p}{E}}$$

Sustituyendo este valor de  $\alpha$  en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{1}{A \rho d} \ln \frac{1}{\gamma} = e^{-\frac{B \rho d}{V_s}}$$

Tomando de nuevo el logaritmo natural en ambos lados y despejando para  $V_s^-$ , se tiene la expresión para el voltaje de ruptura como función de  $\rho d$ :

$$V_s^- = \frac{B \rho d}{\ln \left( \frac{A \rho d}{\ln(1/\gamma)} \right)} \quad \text{Ecuación 4.}$$

Paschen (Paschen, 1889) descubrió experimentalmente, que el potencial de ruptura es una función de la presión y de la separación entre electrodos, únicamente. Esta función no tiene que ser necesariamente lineal, aunque en algunas regiones sea cierto. Esto tiene como resultado, que los experimentos se puedan modificar en escala, siempre y cuando se modifiquen adecuadamente todas las variables. Así, si se hace un modelo en escala, la presión del gas deberá aumentarse en proporción inversa al factor de escala para conservar todas las condiciones. Con esto se garantiza que el voltaje de ruptura sea idéntico al del original a escala completa.

## TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DEL LÁSER

### Cavidades resonantes

#### Introducción: electromagnetismo de Maxwell

El estado de excitación espacial producido por la presencia de cargas eléctricas en el espacio constituye un campo electromagnético. El campo queda descrito por dos vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . llamados vector eléctrico e inducción magnética, respectivamente.

Para describir los efectos producidos por el campo electromagnético en objetos materiales es necesario introducir otros vectores, es decir, el vector de densidad de corriente  $\vec{j}$ , el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  y el vector magnético  $\vec{H}$ .

Las dependencias espacio-temporales de los cinco vectores arriba mencionados, quedan descritas por las ecuaciones de Maxwell. Estas son válidas para todo punto del espacio en cuya vecindad las propiedades físicas del medio son continuas:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Este conjunto de ecuaciones pueden describir hasta los fenómenos electromagnéticos más complejos, claro está, haciendo las modificaciones necesarias para describir las características del sistema en consideración. En este capítulo se revisan las bases electromagnéticas de la teoría del láser, en especial las aplicables a las cavidades láser.

#### Campo electromagnético confinado en una caja

Se consideran las ecuaciones de Maxwell para una región del espacio libre de cargas, en la cual se encuentra confinado un campo electromagnético entre  $(0,0,0)$  y  $(x_0,y_0,z_0)$ . Se supone además que las fronteras de dicha región espacial son perfectamente reflejantes, como si las paredes de la caja estuvieran hechas con un conductor perfecto. Se tiene entonces que las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

sujetas a las condiciones a la frontera siguientes:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

Como se puede observar, estas ecuaciones pueden desacoplarse dando como resultado una ecuación diferencial parcial de segundo orden en  $x$  y  $t$  para  $\vec{E}$  y otra para  $\vec{H}$ . Aunque ambas ecuaciones diferenciales tienen la misma geometría, sus soluciones son diferentes, ya que como se ha visto, las condiciones a la frontera de cada una son diferentes:

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Cada una de estas ecuaciones, con sus condiciones a la frontera respectivas, da como resultado una función periódica en el espacio y en el tiempo de la forma general siguiente:

$$\vec{E} = E e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{H} = H e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

donde  $r = (x, y, z)$ ,  $c = \omega/k$  y  $E$  y  $H$  son las amplitudes de las ondas electromagnéticas.  $k$  es el vector de onda y de las ecuaciones de Maxwell, de donde se puede deducir la siguiente relación entre  $E$  y  $H$ :

$$\vec{H} = \vec{k} \times \vec{E}$$

que indica que los vectores  $H$  y  $E$  son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. La cantidad de energía transportada por una onda electromagnética por unidad de área y tiempo está dada por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

y se le llama comúnmente flujo luminoso por su semejanza con la expresión para un fluido. La densidad de energía por unidad de volumen transportada por la onda electromagnética es

$$\rho = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$$

y es fácil demostrar que  $S$  y  $\rho$  satisfacen la siguiente relación:

$$\vec{S} = \rho \vec{c}$$

Hasta ahora no se han tomado en cuenta las condiciones a la frontera para cada una de las ecuaciones diferenciales, es decir, se ha considerado solamente las condiciones espacio-temporales que son resultado de las ecuaciones de Maxwell. Si la geometría del espacio está dado por una caja de  $(x_0, y_0, z_0)$  y se considera nada más el campo eléctrico, se observa que la solución se puede separa en las diferentes variables

$$E(x, y, z) = E(x)E(y)E(z)$$

cumpliendo cada una de estas funciones las condiciones a la frontera respectivas. Vale la pena mencionar que debido a la separación de variables el vector de onda total se conforma de los vectores de onda parciales en cada una de las direcciones  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$ .

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Como las paredes de la caja son perfectamente reflejantes, la onda solamente cambia de dirección sin pérdida alguna al llegar al punto del espacio en donde se encuentra situada la pared, es decir,

$$E(0, 0, 0) = E(x_0, y_0, z_0) = E$$

y la solución general a las ecuaciones de Maxwell es de la forma

$$E(\vec{r}) = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + B e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

que consta de la superposición de ondas que viajan en direcciones opuestas y que sujetas a las condiciones a la frontera anteriores, dan como resultado

$$E_x = E_1 \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) \text{sen}(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$E_y = E_2 \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \text{sen}(k_z z) e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_3 \text{sen}(k_x x) \text{sen}(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t}$$

donde  $k_x = \frac{m\pi}{x_0}$ ,  $k_y = \frac{n\pi}{y_0}$  y  $k_z = \frac{q\pi}{z_0}$ , m, n, q enteros. Así pues, las frecuencias de oscilación permitidas en la caja son aquellas que satisfacen

$$\left(\frac{c\omega}{c}\right)^2 = k^2 = \pi^2 \left[ \left(\frac{m}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{n}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{q}{z_0}\right)^2 \right]$$

Suponiendo que la caja es cúbica con lados de longitud L, así  $k_x = k_y = k_z = \frac{m\pi}{L}$ . Si se toma  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  como ejes de un espacio tridimensional nuevo, se tiene que el elemento de volumen generado es

$$K = \frac{\pi^3}{L^3} = \frac{\pi^3}{L^3}$$

donde V es el elemento de volumen espacial. Se trata entonces de un espacio discreto poblado por las separaciones frecuenciales permitidas dentro de la cavidad. Como lo que interesa es el número de modos en la cavidad entre  $\omega$  y  $d\omega$ , se toma una cáscara esférica de espesor  $dk$  cuyo volumen viene dado por

$$V_k = 4\pi k^2 dk$$

o

$$V_k = \frac{4\pi\omega^2}{c^3} d\omega$$

Entonces, el número de modos posibles entre  $\omega$  y  $d\omega$  es igual al volumen de la cáscara de espesor  $d\omega$  dividido entre el volumen unitario en el espacio-k, dividido entre 8, ya que se considera solamente el primer cuadrante y multiplicado por 2, ya que se considera ambas polarizaciones. Así,

$$N(\omega)d\omega = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Este resultado es importante para calcular la densidad de energía dentro de una cavidad.

### Radiación de cuerpo negro y densidad de energía

Se supone que dentro de una cavidad (o caja) se tiene confinada una cierta cantidad de luz o de radiación electromagnética de la misma forma que se describió en la sección anterior. Dentro de la cavidad se tiene ahora entonces una cierta densidad de energía,  $\rho(\omega)$ , que se encuentra en equilibrio termodinámico a una temperatura T con las paredes de la caja.

La densidad de energía en el intervalo de frecuencias angulares  $\omega + d\omega$  es igual a la energía media por modo  $E_\omega$  multiplicada por el número de modos  $N(\omega)d\omega$ . Esto es

$$\rho(\omega)d\omega = E_\omega N(\omega)d\omega$$

Para calcular la energía media por modo, Planck propuso que la energía por modo estuviera cuantizada de acuerdo con

$$E_n = nh\omega$$

donde n es un entero positivo y  $h$  es la constante de Planck. Ahora supondremos que los modos se encuentran repartidos de acuerdo con la distribución de Boltzman, para la cuál la probabilidad  $P_n$  de que la energía de un modo de la cavidad tome un valor  $E_n$  es,

$$P_n = e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

donde k es la constante de Boltzman. Se calcula, entonces, la energía media de la forma siguiente:

$$E_{\omega} = \frac{\sum E_n e^{\frac{E_n}{kT}}}{\sum e^{\frac{E_n}{kT}}} = \hbar\omega \frac{\sum n e^{\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum e^{\frac{n\hbar\omega}{kT}}}$$

El denominador de la expresión es una serie geométrica, cuyo valor converge para  $n \rightarrow \infty$  y es igual a

$$\sum_n e^{\frac{n\hbar\omega}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}$$

mientras que el numerador es la derivada respecto de  $\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$  del denominador, es decir,

$$\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}$$

por lo tanto, la energía por modo es igual a

$$E_{\omega} = \frac{\hbar\omega}{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

y multiplicando por  $N(\omega)d\omega$ , el número de modos entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$ , obtenemos la densidad de energía

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

que se denomina la distribución de Planck.

Para bajas frecuencias,  $\hbar\omega$  es mucho menor que  $kT$  y la exponencial en la expresión anterior se puede aproximar a primer orden por  $1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$ , obteniendo así la ley de Rayleigh-Jeans

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi c^3}$$

Estas expresiones son de gran utilidad para hacer un balance energético respecto a la cantidad de energía luminosa que se debe tener almacenada en una cavidad láser, con el fin de que la densidad de energía no caiga por debajo de cierto valor crítico y, por consiguiente y como más adelante veremos, se mantenga la inversión de población con un mínimo de energía inyectada. Dicho de otra forma, la densidad de energía es determinante en la eficiencia energética de un láser.

## Cavidades resonantes

Una de las partes más importantes de un láser, si no es que la más importante, es el sistema de retroalimentación, que en el caso más sencillo para un láser, consta de dos espejos con el medio activo situado entre ellos. Es de esperarse, que la luz o radiación que se produzca entre dichos espejos adquiera un patrón de onda estacionaria con un cierto perfil modal en las tres direcciones espaciales. Para conocerlo es preciso obtener una descripción ondulatoria más detallada de los rayos producidos en un láser. Esto se logra con la ecuación de onda que se dedujo en la primera parte de este capítulo. No obstante, es conveniente recalcar, que en la práctica, y en el experimento, los modos que se generan en la cavidad son aquellos, que mejor se acoplan a las superficies de los espejos. Por lo tanto, no debe sorprender, que se obtenga un perfil modal completamente inesperado, si no puso suficiente énfasis en la calidad óptica de la cavidad resonante.

El nombre de cavidad resonante sirve solamente para denotar aquella configuración óptica de espejos contrapuestos, en la cual los rayos de luz producidos en su interior y que viajan paralelos al eje óptico de la cavidad, son obligados a viajar por la misma trayectoria mientras se encuentran en el interior de ésta, dándose así una superposición coherente de ondas electromagnéticas.

### Modos en cavidades resonantes

La mayor parte de las ondas electromagnéticas que se propagan en el espacio vacío son puramente del tipo TEM (Transverse Electric and Magnetic), ésto es, el vector eléctrico y magnético que componen la onda están siempre contenidos en el plano perpendicular a la dirección de propagación. De las ecuaciones de Maxwell tenemos que para el espacio vacío

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

El operador de divergencia se puede descomponer en dos partes: las componentes transversales y la derivada longitudinal de la componente  $z$  del campo, suponiendo que ésta es la dirección de propagación del rayo.

La onda se propaga con una velocidad igual a  $c$ ; así, la mayor variación del campo va con la dirección  $z$  y forma un término del tipo  $e^{-ikz}$ , donde  $k$  es el vector de onda y de magnitud muy grande. La derivada de la componente  $z$  del campo es también una cantidad grande que es del orden de  $ikE_z$ , donde  $E_z$  es la componente  $z$  del campo eléctrico.

Esto significa que la descripción completa de los campos debe involucrar funciones que varían muy rápidamente con  $z$ . Por eso, para eliminar esta rápida variación de la ecuación, se propone que la ecuación de onda del campo tenga soluciones del tipo

$$E(x, y, z) = E_0 \psi(x, y, z) e^{-ikz}$$

donde  $E_0$  es el factor de amplitud que expresa la intensidad de la onda, el factor exponencial expresa la condición que la onda sea plana y uniforme y el factor de  $\psi$  representa la información de cómo se desvía nuestro rayo de una onda plana y uniforme.

Substituyendo la función anterior en la ecuación de onda independiente del tiempo, obtenemos otra ecuación que involucra únicamente a  $\psi$ , y eliminamos  $E_0$  al igualarlo con 1:

$$\nabla_{\text{trans}}^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

donde

$$\nabla_{\text{trans}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Esta ecuación es exacta; es nada más una representación diferente de la ecuación de onda. Hacemos ahora nuestra primera aproximación al eliminar el término de la segunda derivada en  $z$  con la justificación de que el término de la primera derivada en  $z$  está multiplicado por  $k$ , que como se vio es un número muy grande y domina el comportamiento en  $z$ . Así, pues, la ecuación en  $z$  resulta ser

$$\nabla_{\text{trans}}^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

que es la ecuación central para el estudio de haces gaussianos. Nótese la similitud con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Ahora debe encontrarse una solución para la ecuación de onda anterior, sin olvidar que el argumento representa qué tanto se desvía la onda en una cavidad de la onda ideal. La solución tiene necesariamente una geometría impuesta por la geometría de los espejos. La geometría más conveniente y que más se adecua al caso real del experimento, es la geometría cilíndrica, donde la cavidad óptica tiene muchas veces más amplitud en la coordenada longitudinal, que en direcciones transversales. El cambio de coordenadas transforma la ecuación de la cavidad como sigue:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

En resultados experimentales se ha observado una dependencia de la intensidad con la posición en el plano transversal, la cual define la distribución de intensidad del campo gaussiano. Se propone ahora una norma semiempírica y se fuerza a que los parámetros desconocidos tomen la forma que mejor satisfaga la ecuación diferencial y sus condiciones a la frontera:

$$\psi_{00} = e^{-P(r,z) - \frac{kr^2}{2q(z)}}$$

donde  $\psi_{00}$  denota el modo fundamental de oscilación (TEM<sub>00</sub>). Si se hace la sustitución en la ecuación de onda, se reduce lo que originalmente era una ecuación diferencial parcial, a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones  $P(z)$  y  $q(z)$ . Agrupando los términos en potencias iguales de  $r$ , se obtiene:

$$\left\{ \left[ \frac{kz}{q^2(z)} (q'(z) - 1) \right] r^2 - 2k \left[ P'(z) + \frac{i}{q(z)} \right] r^0 \right\} \psi_{00} = 0$$

Como cada factor de  $r$  debe ser idéntico a 0, se llega a las ecuaciones que siguen:

$$q'(z) = 1$$

$$P'(z) = -\frac{i}{q(z)}$$

La solución de la primera es trivial:

$$q(z) = q_0 + z$$

donde  $q_0$  denota el valor de  $q$  en  $z = 0$ . Con el fin de evitar que la solución diverja de la realidad experimental y que se pierda el punto de contacto con la óptica física, se propone que  $q(z)$  sea imaginaria, ya que si fuera puramente real, la exponencial representaría una onda de amplitud constante propagándose en la dirección radial con una diferencia de fase cada vez mayor, conforme se aleja del origen. Así, pues,  $q(z)$  es imaginario

$$q(z) = z + iz_0$$

En  $z = 0$  obtenemos un cuadro satisfactorio de la función  $\psi_{00}$ , ya que  $q(0) = iz_0$  y

$$\psi_{00}(z=0) = e^{-\frac{kr^2}{2z_0} e^{-P(z=0)}}$$

Nótese que ahora el término exponencial es real y decae rápidamente con  $r$ , que es un hecho experimental.

En  $r = \sqrt{\frac{2z_0}{k}}$ , la amplitud decae a un valor de  $1/e$  y merece un nombre particular: "cintura" (waist), que es el valor mínimo de la mancha luminosa (spot size).

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k} = \frac{\lambda z_0}{\pi}$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

**Ecuación 5**

La región dentro de la cavidad donde se encuentra la cintura del haz equivale a  $z=0$ . Ahora, conforme se aleja del eje, la fase de la onda cambia más rápidamente con  $r$ , y la amplitud decrece rápidamente, por lo que el tamaño de la mancha es una función de la posición sobre el eje

$$w^2(z) = \frac{2}{kz_0} (z_0^2 + z^2) = \frac{2z_0}{k} \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

y utilizando la conocida expresión para la cintura, obtenemos

$$w^2(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right].$$

El segundo factor en la exponencial se puede abreviar definiendo otra función, cuyo significado se discute adelante:

$$R(z) = \frac{1}{z} \left( z_0^2 + z^2 \right) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad \text{Ecuación 6.}$$

Por último, falta ocuparse de la última de las ecuaciones diferenciales que determinan el campo electromagnético dentro de la cavidad y es

$$P'(z) = -\frac{i}{q(z)} = -\frac{i}{z + iz_0}$$

Integrando respecto a  $z$  y posteriormente multiplicando por  $i$ , se obtiene:

$$iP(z) = \ln \left[ 1 - \left( \frac{z}{z_0} \right) \right]$$

Notando que

$$1 - i \left( \frac{z}{z_0} \right) = \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} e^{-i \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right)}$$

se encuentra que la parte real e imaginaria de  $iP(z)$  es

$$iP(z) = \ln \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} - i \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad \text{Ecuación 7.}$$

Entonces, la fase de la onda es  $e^{-iP(z)}$

$$e^{-iP(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}} e^{i \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right)}$$

Recapitulando, la expresión completa del campo electromagnético dentro de la cavidad, de acuerdo con el modelo analizado y tomando el modo fundamental de oscilación, es:

$$E(x, y, z) = E_0 \left\{ \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{\pi r^2}{w^2(z)}} \right\} e^{-i \left[ k z - \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) \right]} e^{-\frac{k r^2}{2R(z)}}$$

donde las funciones  $w(z)$ ,  $R(z)$  y los coeficientes  $z_0$  y  $w_0$  son los definidos anteriormente. En cuanto a la interpretación física de lo arriba mencionado tenemos lo siguiente:

El primer término en la ecuación de campo describe la amplitud del campo eléctrico como función de la posición radial, y cómo cambia ésta conforme se avanza sobre el eje óptico  $z$ . A la distancia igual a  $2z_0$ , se le conoce también como "parámetro confocal", ya que ésta es la distancia necesaria para generar un sistema confocal de espejos. Conforme crece  $z$ , también crece  $w$  y su tasa de cambio es:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{\mathcal{G}}{2} \rightarrow \mathcal{G} = \frac{2\lambda}{\pi w_0^2}$$

Se puede notar que para  $z$  mucho mayor que  $z_0$ ,  $\frac{d\psi}{dz}$  es un valor constante al cual se le ha bautizado como "ángulo de dispersión", ya que representa el semiángulo respecto al eje de la cavidad que el lápiz de luz láser tensa a modo de un cono conforme se aleja de la cintura. El segundo factor en la ecuación de campo expresa el cambio en fase de la onda en la dirección de propagación.

$$\psi = kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

donde  $k$  es el número de onda de una onda electromagnética ideal. Así, la velocidad de fase de la onda gaussiana es

$$v_p = \left(\frac{\psi}{\omega z}\right)^{-1} = \frac{c}{n \left(1 - \frac{\lambda_0}{2\pi z} \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)}$$

que es ligeramente mayor que la velocidad de la luz  $c$ . Claro está, en un medio uniforme con índice de refracción  $n$ , la velocidad de propagación de la onda es del orden de  $\frac{c}{n}$ .

El último factor en la ecuación de campo representa el factor radial de fase

$$\psi_r = e^{-i\frac{kr^2}{2R(z)}}$$

Este factor indica, que el plano perpendicular al eje óptico no es una superficie de fase constante. Si se supone una onda esférica con origen en  $z=0$ , de acuerdo con Huyghens el frente de onda queda descrito por

$$E \propto \frac{1}{R} e^{-ikR}$$

donde  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Lejos del origen, es decir, para  $R$  del orden de  $z$  obtenemos

$$R = z \left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right)^{1/2} \cong z + \frac{1}{2} \frac{r^2}{z} \cong z + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R}$$

usando el teorema del binomio. Regresando a la onda esférica y substituyendo la expresión anterior

$$E \propto \frac{1}{R} e^{-ikz} e^{-i\frac{kr^2}{2R}}$$

notamos que el segundo término tiene la misma forma funcional que el término de fase radial de la ecuación de campo de la cavidad.  $R$  representa, entonces, el radio de curvatura de la onda, pero en el caso de la emisión de un láser, éste no es constante, sino una función de  $z$ . Sólo cuando  $z$  es mucho mayor que  $z_0$ , la onda parece originarse en una fuente puntual situada en  $z=0$ . Conforme se aproxima al origen, éste parece alejarse hasta encontrarse en  $\infty$  cuando  $z=0$  y, consecuentemente, el frente de onda aparece plano. Bajo este esquema,  $z=0$  es aquella región en la que el frente de onda es plano.

Con esto se ha obtenido una descripción física de la radiación proveniente de una cavidad láser idealizada, es decir, sin tomar en cuenta pérdidas ni variaciones en el índice de refracción a lo largo de su eje y en torno a él.

### La cavidad láser

Dependiendo de las dimensiones de la cavidad láser en cuestión, los materiales involucrados en su fabricación y la longitud de onda de la radiación emitida, el láser oscilará en un orden fundamental o no. En esta sección se discute la forma más general de oscilación de una cavidad resonante. Por simplicidad, se desprecian efectos de difracción debidas a las dimensiones finitas de los componentes ópticos que la conforman.

En la sección anterior, se consideró un haz luminoso con la condición de que su perfil radial de intensidad estuviera incluido en la misma función como una gaussiana. La anchura de la distribución gaussiana cambia conforme el haz se propaga a lo largo del eje de la cavidad. No obstante, existen otras soluciones con propiedades similares y que a continuación se discuten. Dichas soluciones forman un conjunto completo y ortogonal de funciones llamadas "modos de propagación" o "modos de oscilación". Toda distribución de luz monocromática puede ser expandida en términos de estos modos de oscilación. Si se considera un sistema con coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , se puede usar una solución tentativa del tipo

$$\psi = g\left(\frac{x}{w}\right)h\left(\frac{y}{w}\right)e^{-i p \cdot \frac{k}{2q}(x^2 + y^2)} \quad \text{Ecuación 8.}$$

donde  $g$  es una función de  $x$  y  $z$ , y  $h$  es una función de  $y$  y  $z$ . Si se sustituye esta solución en la ecuación de onda para  $\psi$ , se llega a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0$$

Esta es la ecuación diferencial para los polinomios de Hermite de orden  $m$ . Esta sustitución es válida sólo si

$$g \cdot h = H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w}\right)$$

donde  $m$  y  $n$  son los números de modo transversal. Nótese que el mismo parámetro dimensional  $w(z)$  se aplica a los modos de cualquier orden.

Ahora, en lugar de la expresión anterior para la amplitud del campo en la ecuación de campo, se sustituye la expresión polinomial, con lo que queda solucionada la tarea de definir los modos de oscilación de orden superior. El patrón de intensidad en una sección transversal del haz láser queda descrito entonces por el producto de funciones de Hermite y de Gauss.

El parámetro  $R(z)$  es el mismo para todos los modos, lo cual implica que la curvatura del frente de onda es la misma que antes y varía de la misma forma para todos los modos. Sin embargo, el corrimiento de fase es ahora una función de los números modales  $n$  y  $m$ , es decir,

$$\psi(m, n, z) = (m + n + 1) \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$$

Esto significa, que la velocidad de fase aumenta conforme aumenta el número modal, lo cual lleva diferencias en frecuencias de resonancia para los diferentes modos de oscilación.

Para un sistema de geometría cilíndrica  $(r, \varphi, z)$ , se emplea una solución tentativa del tipo

$$\psi = g\left(\frac{r}{w}\right)e^{-i\left[p \cdot \frac{k}{2q} r^2 + l\varphi\right]}$$

Haciendo lo propio, se encuentra la siguiente ecuación diferencial

$$g = \left(\sqrt{2} \frac{r}{w}\right)^l L_p\left(2 \frac{r^2}{w^2}\right) = 0$$

que no es más que la ecuación de Laguerre

$$x \frac{d^2 L_p^l}{dx^2} + (l + 1 - x) \frac{dL_p^l}{dx} + pL_p^l = 0$$

cuya solución son los polinomios generalizados de Laguerre, donde  $p$  y  $l$  son los números modales radial y angular, respectivamente.

Al igual que en el caso de haces con geometría rectangular, los parámetros  $w(z)$  y  $R(z)$  siguen siendo los mismos para todos los modos de oscilación cilíndricos. Ahora, en cambio, el corrimiento de fase  $\varphi$  depende de los números modales  $p$  y  $l$ :

$$\varphi(\rho, l, z) = (2\rho + l + 1) \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)$$

### Estabilidad en cavidades resonantes

Históricamente, el tema de resonadores láser y su origen han sido estudiados por Dicke, Pokhrov y Schawlow y Townes, quienes propusieron una cavidad tipo Fabry-Perot como resonador interferométrico para un láser. Los modos de oscilación longitudinales y transversales fueron calculados por vez primera por Fox y Li, sin embargo, Boyd y Gordon y Boyd y Kogelnik desarrollaron la teoría para resonadores con geometría esférica.

El estudio de la forma como se propagan rayos luminosos en resonadores y sistemas similares puede revelar propiedades importantes de éstos. Una de estas propiedades se refiere a su geometría y le permite definir el concepto de estabilidad. La propagación de rayos paraxiales a través de un arreglo de elementos ópticos como lentes y espejos, se describe convenientemente mediante matrices de transferencia. El conocimiento de estas matrices describe también la propagación de haces gaussianos en sistemas ópticos como los ya mencionados. El formalismo matemático se basa en la teoría de óptica paraxial, donde la información se transporta en regiones cercanas al eje óptico del sistema. La palabra "cercano" se utiliza de forma relativa, ya que estamos tratando con rayos cuya distancia perpendicular al eje óptico es pequeña comparada con la distancia viajada y cuyo ángulo respecto del mismo es moderada. La distancia viajada en un resonador óptico de un láser es mínimamente 10 veces el diámetro de la cavidad.

Un rayo paraxial en una sección dada de un sistema óptico se caracteriza formalmente por su distancia  $x$  y su pendiente  $x'$  respecto del eje óptico. La trayectoria que sigue el rayo depende de las propiedades ópticas del espacio que atraviesa o del sistema óptico que se desea estudiar. Se hace necesario, entonces, definir las características ópticas del sistema a su entrada ( $x_1, x_1'$ ) y las cantidades correspondientes a la salida del sistema ( $x_2, x_2'$ ). Las cantidades anteriores están relacionadas linealmente entre sí mediante la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}$$

La matriz ABCD lleva el nombre de matriz de transferencia, como se había puntualizado brevemente y es unitaria:

$$AD - BC = 1$$

## RAY TRANSFER MATRICES OF SIX ELEMENTARY OPTICAL STRUCTURES

NO	OPTICAL SYSTEM	RAY TRANSFER MATRIX
1		$\begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
2		$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{vmatrix}$
3		$\begin{vmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{d}{F} \end{vmatrix}$
4		$\begin{vmatrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_1} \frac{d_2}{f_2} - \frac{d_1}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{vmatrix}$
5		$\begin{vmatrix} \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{vmatrix}$
6		$\begin{vmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Huistración 0-1 Seis sistemas ópticos elementales con matriz de transferencia

En la tabla 1 se pueden ver las matrices de transferencia de las configuraciones ópticas más comúnmente usadas. Los elementos de matriz están relacionados con la distancia focal del sistema y la ubicación de los planos principales, mediante

$$f = -\frac{1}{C}$$

$$h_1 = \frac{D-1}{C}$$

$$h_2 = \frac{A-1}{C}$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  son las distancias de los planos principales a los de entrada y salida, respectivamente. La matriz 1.- describe la propagación rectilínea a lo largo de una trayectoria libre de longitud  $d$ . La matriz 2.- corresponde a una lente de distancia focal  $F$ , mientras que el número 3.- es la combinación (multiplicación) de las dos anteriores. La 4.- representa un arreglo más complicado entre lentes y espacios. La matriz 5.- es una matriz de utilidad en el estudio de transmisión por fibras ópticas, donde se supone que el índice de refracción del medio tiene una dependencia radial del tipo

$$n = n_0 - \frac{1}{2} n_2 r^2$$

Este tipo de dependencia sucede también en cristales láser y en lentes térmicas en gases. La última matriz se refiere a la propagación a través de un medio uniforme y homogéneo con índice de refracción  $n$ . La descripción matricial concuerda con la ley de Snell y muestra que para rayos paraxiales, la distancia efectiva se recorta en el medio más denso, mientras que el recorrido óptico se alarga.

En el caso de tener una cavidad óptica láser, se tiene que es equivalente a un arreglo periódico de lentes con distancias focales

$$f_1 = -\frac{2}{R_1}$$

$$f_2 = -\frac{2}{R_2}$$

que se repiten en intervalos iguales a la longitud de la cavidad.

La solución para la propagación en un medio periódico la encontramos definiendo la celda unitaria. Se elimina la pendiente mediante

$$r_{s+1} = Ar_s + Br'_s \rightarrow r'_s = \frac{1}{B}(r_{s+1} - Ar_s)$$

entonces,

$$r'_{s+1} = \frac{1}{B}(r_{s+2} - Ar_{s+1}) = Cr_s + Dr'_s$$

Substituyendo la expresión anterior para la pendiente,

$$\frac{1}{B}(r_{s+2} - Ar_{s+1}) = Cr_s + \frac{D}{B}(r_{s+1} - Ar_s)$$

y recordando que la matriz debe ser unitaria, se llega a

$$r_{s+2} - 2\left(\frac{A+D}{2}\right)r_{s+1} + r_s = 0$$

Se pretende encontrar una solución periódica del tipo

$$r_s = r_0(e^{i\vartheta})^s$$

donde  $r_0$  está definida por las condiciones iniciales, que substituyéndola en la ecuación,

$$r_0 e^{i\vartheta} \left[ e^{i2\vartheta} - 2\left(\frac{A+D}{2}\right)e^{i\vartheta} + 1 \right] = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en  $e^{i\vartheta}$ , con lo que las raíces del binomio se pueden calcular mediante

$$e^{i\vartheta} = \frac{A+D}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}$$

Como ambas expresiones son complejas y conjugadas entre sí, se tiene la solución general

$$r_s = r_0 e^{is\vartheta} + r_0^* e^{-is\vartheta}$$

o

$$r_s = r_{\max} \text{sen}(s\vartheta + \alpha)$$

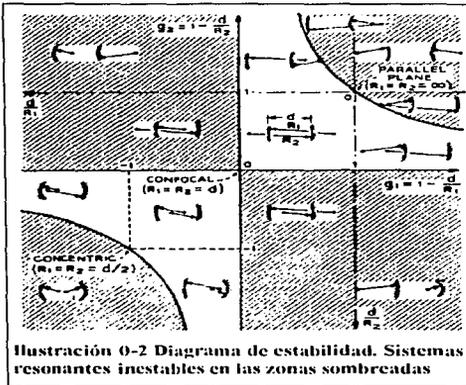
De esta forma se tienen cantidades reales de nueva cuenta.

Para poder establecer un criterio de estabilidad en una cavidad óptica como la de un láser, se deben imponer ciertas condiciones sobre la traza de la matriz de transferencia, es decir, que

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1$$

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

Ecuación 9'



Una forma sencilla de visualizar la condición de estabilidad anterior es mediante la gráfica de  $g_1$  contra  $g_2$ , donde cada configuración óptica de resonador queda representada por un punto en el plano. La gráfica clasifica los resonadores en tres tipos de estabilidad:

estabilidad condicional  
estabilidad incondicional  
inestabilidad.

La configuración con estabilidad condicional queda esquematizada mediante las hipérbolas  $g_1 g_2 = 1$  y el origen. Aquí la alineación del sistema es crítica y la condición necesaria para la estabilidad.

La configuración con estabilidad incondicional está representada por el área debajo de las curvas y la alineación no es tan crítica, dependiendo de los radios de curvatura de los espejos.

La condición de inestabilidad se encuentra en el complemento del área debajo de las hipérbolas y en los cuadrantes segundo y cuarto. Todas esas configuraciones ópticas hacen que las trayectorias se alejen del eje óptico de la cavidad, es decir, que

### Cavity Q

Se analiza en seguida una cavidad óptica tipo Fabry-Perot, la cual se alimenta con una fuente de luz coherente externa. El campo eléctrico dentro de la cavidad "rebota" varias veces en los espejos antes de salir de nuevo al exterior, debido a las reflectancias  $r_1$  y  $r_2$  de los espejos que la componen. Así, el campo eléctrico que viaja en la dirección positiva de  $z$  sufre una serie de cambios de fase a lo largo de su recorrido, que equivale a la superposición de ondas reflejadas dentro de la cavidad. Multiplicadas por un factor de fase, es cuál se imprime a la onda con cada rebote. Se tiene, entonces,

$$E_{T^+}(\varphi, z_1) = E_0 \left( 1 + r_1 r_2 e^{-i\varphi} + (r_1 r_2)^2 e^{-2i\varphi} + \dots + (r_1 r_2)^n e^{-in\varphi} + \dots \right)$$

que se puede aproximar a

$$E_{T^+}(\varphi, z_1) = \frac{E_0}{1 - r_1 r_2 e^{-i\varphi}} = \frac{E_0(z_1)}{1 - r_1 r_2 e^{-i(\omega_c)2d}}$$

$$\varphi = \frac{\omega}{c} 2d$$

donde  $E_0$  es la amplitud del campo a la entrada de la cavidad. El campo eléctrico viajando en la dirección opuesta puede evaluarse mediante un razonamiento paralelo y se relaciona con el anterior mediante

$$E_{T^-}(\omega, z_1) = r_2 E_{T^+}(\omega, z_1) e^{-i(\omega_c)2(d-z_1)}$$

Así, se obtiene un campo total

$$E_T(\omega, z_1) = E_0 \frac{1 + r_2 e^{-i(\omega_c)2(d-z_1)}}{1 - r_1 r_2 e^{-i(\omega_c)2d}}$$

que corresponde al campo eléctrico evaluado en algún punto dentro de la cavidad láser.

Para determinar  $E_0$  basta conocer la transmitancia del espejo de entrada, la cuál designaremos por  $T_1$ , así,

$$\begin{bmatrix} E_r^+ \\ E_r^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & -it_1 \\ it_1 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ E_r \end{bmatrix}$$

donde para un espejo totalmente reflejante se tiene

$$r^2 + t^2 = 1$$

La reflectancia neta del sistema de espejos queda determinada por

$$r_{\text{neto}} = \frac{E_r^-}{E_i} = \frac{r_1 - r_2 e^{-i(\omega/c)2d}}{1 - r_1 r_2 e^{-i(\omega/c)2d}}$$

Se puede evaluar la transmisividad total del sistema de espejos mediante

$$T = 1 - r_{\text{neto}} r_{\text{neto}}^* = 1 - \frac{r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\vartheta + r_2^2}{1 - 2r_1 r_2 \cos 2\vartheta + r_1^2 r_2^2}$$

donde

$$\vartheta = \frac{\omega}{c} d$$

y substituyendo el cuadrado de la reflectancia por la reflectividad, obtenemos

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}\right]^2 + r \sqrt{R_1 R_2} \text{sen}^2 \vartheta}$$

donde se hizo uso de la relación trigonométrica

$$\cos 2\vartheta = 1 - 2\text{sen}^2 \vartheta$$

Nótese, que la función anterior para T tiene máximos igualmente espaciados (cada  $\vartheta = n\pi$ ). Fuera de resonancia, la función de T observa mínimos dados por

$$T_{\text{min}} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 + \sqrt{R_1 R_2}\right]^2}, T_{\text{max}} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - \sqrt{R_1 R_2}\right]^2}$$

También se verifica, que en torno al máximo se tiene una distribución de frecuencias, para las cuáles el campo eléctrico en la cavidad es considerable. Una medida para la calidad óptica de la cavidad se puede establecer comparando la frecuencia central con el ancho de la distribución, es decir.

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta \nu_{1/2}}$$

donde  $\Delta \nu_{1/2}$  es el ancho a media altura del máximo (FWHM, "Full Width at Half Maximum) y  $\nu_0$  es la frecuencia de resonancia. Aplica en la función para la transmisividad de la cavidad una aproximación para desviaciones pequeñas en ángulos

$$\text{sen}(n\pi + \Delta\vartheta) \cong \Delta\vartheta$$

$$4\sqrt{R_1 R_2} \text{sen}^2 \vartheta = \left[1 - \sqrt{R_1 R_2}\right]^2$$

$$\nu_z = n \frac{c}{2d} \pm \frac{c}{2d} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{2\pi \sqrt{R_1 R_2}}$$

de tal forma, que la Q de la cavidad es

$$Q = \frac{n \frac{c}{2d}}{\Delta \nu_{1/2}} = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{2\pi \sqrt{R_1 R_2}}$$

Ecuación 10.

y

$$\Delta \nu_{12} = \nu_1 - \nu_2$$

Como ejemplo se puede mencionar lo que sucede en una cavidad típica de un láser HeNe. Si  $d=0.2\text{m}$ .

$R_1=1$ ,  $R_2=0.95$  y  $\lambda=632.8\text{nm}$ , el valor calculado es  $Q=7.7429 \times 10^7$ , que es una cifra astronómicamente grande.

Para evitar números tan grandes, se define una cantidad relacionada, llamada "lineza"  $F$ . Esta se define como la razón entre el rango espectral libre y la anchura FWHM. En el ejemplo,  $F=122.2$ .

## Interacción átomo-radiación

### Introducción

En 1917, Albert Einstein, empujado por la sorprendente similitud entre la curva de distribución cromática de la radiación de cuerpo negro y la de distribución de velocidades de Maxwell, publicó su artículo sobre la teoría cuántica de la radiación, que clarifica la forma mediante la cual el campo electromagnético interactúa con el cuántico, hasta entonces un tanto oscura.

"If the assumptions about the interaction between radiation and matter which we have introduced are essentially correct, they must, however, yield more than the correct statistical distribution of the internal energy of molecules. In fact, in absorption and emission of radiation, momentum is transferred to the molecules; this entails that merely through the interaction of radiation and molecules the velocities of the molecules will acquire a certain distribution. This must clearly be the same velocity distribution as the one which the molecules attain through the action of their mutual collisions alone, that is, it must be the same as the Maxwell distribution..." (Einstein, 1917).

Hoy en día este hecho es bien conocido y es parte de nuestro paradigma científico. Así como en la interacción átomo-radiación se produce una distribución maxwelliana en el sistema, en los sistemas que poseen una distribución maxwelliana, se dan interacciones átomo-radiación, es decir, aún en procesos "mecánicos" como lo son los procesos colisionales entre las moléculas de un gas, se produce un intercambio radiativo o fotónico a la par con un intercambio de momento. Es importante notar que Einstein de una forma indirecta expresa la bidireccionalidad de esta relación causal. Es un "sí, sólo sí" lógico: Sí, y sólo sí, se tiene una distribución maxwelliana de una cantidad física, entonces se tiene un proceso de interacción entre campos cuántico y electromagnético.

"However, for the theoretical discussion, these small actions must be considered to be completely as important as the obvious actions of the energy-exchange through radiation, as energy and momentum are closely connected; one can, therefore, consider a theory justified only when it is shown that according to it the momenta transferred by the radiation to the matter lead to such motion as is required by the theory of heat" (Einstein, 1917).

### Transiciones resonantes inducidas

Si el hamiltoniano atómico contiene un término perturbativo  $V$

$$H = H_0 + V$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano del sistema atómico sin perturbar cuyas eigenfunciones  $u_k(\vec{r})$  sean conocidas, entonces la función de onda total se puede expresar como una superposición de las eigenfunciones

$$\psi = \sum_k C_k u_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t}$$

donde las  $C_k$  son las amplitudes de probabilidad de que el sistema se encuentre en el  $k$ -ésimo estado. Así, el término perturbativo se asocia principalmente con mecanismos que causan transiciones entre los diferentes estados del sistema. Como tanto la función  $\psi$  como las eigenfunciones del sistema se encuentran normalizadas, los coeficientes de expansión satisfacen la condición de normalidad

$$\sum_k |C_k|^2 = 1$$

Como tales, las cantidades  $|\dot{C}_k|^2$  tienen la interpretación física de la probabilidad de que el sistema se encuentre en el  $k$ -ésimo estado.

Nótese que la superposición de estados lleva a una interferencia mecánico-cuántica entre las amplitudes de probabilidad de una forma semejante (matemática) como se da en los experimentos con luz en el interferómetro de Michelson y Young. Si además consideramos que la perturbación tiene una dependencia temporal explícita, entonces requerimos que los coeficientes de expansión sean también funciones del tiempo  $C_k(t)$ . Ahora se substituye la función de onda en la ecuación de Schrödinger y se obtiene la evolución del sistema con el tiempo.

$$H|\psi\rangle = i\hbar|\dot{\psi}\rangle$$

$$i\hbar \sum (\dot{C}_k - i\omega_k C_k) e^{-i\omega_k t} u_k(\vec{r}) = \sum (\hbar\omega_k - I^*) e^{-i\omega_k t} u_k(\vec{r}) C_k$$

Si se multiplica ambos lados de la ecuación por  $u_n(k)^*$  y se integra sobre las coordenadas espaciales, se encuentra

$$\dot{C}_k = -\frac{i}{\hbar} \sum C_k \langle u_n | V^* | u_k \rangle e^{i(\omega_n - \omega_k)t}$$

donde se ha usado la condición de ortonormalidad de las  $u_k$

$$\langle u_n | u_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(\vec{r}) u_m(\vec{r}) d^3\vec{r} = \delta_{nm}$$

y donde el elemento de matriz del hamiltoniano de perturbación es

$$V_{nk} = \langle u_n | V^* | u_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(\vec{r}) V u_m(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Como es de suponerse, la ecuación 3) es equivalente a la ecuación de Schrödinger. Para cualquier tiempo,  $C_k(t)$  es la amplitud de probabilidad de que el sistema esté descrito por la eigenfunción  $u_k(\vec{r})$  del hamiltoniano "puro", o sin perturbar.

En particular, se considera la perturbación dipolar debida a la aplicación de un campo eléctrico (armónico)

$$V^* = -e\vec{E}(\vec{R}, t) \cdot \vec{r}$$

donde  $\vec{E}$  es el vector de campo eléctrico evaluado en  $\vec{R}$ , que es la posición del núcleo atómico en un sistema de coordenadas de laboratorio. Ahora se aplica lo que comúnmente es llamado la "aproximación secular", que expresa que la longitud de onda de la radiación electromagnética debe ser grande comparada con las dimensiones del átomo. Este tipo de interacción es compatible con la ecuación de Schrödinger para un electrón sujeto a un potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{R}, t)$  (en la aproximación dipolar).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2m} [\vec{p} - e\vec{A}(\vec{R}, t)]^2 + I^*(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t)$$

De hecho, si se substituye

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i\frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}, t) \cdot \vec{r}} \phi(\vec{r}, t)$$

y notando que

$$[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{R}, t)] \psi(\vec{r}, t) = e^{i\frac{e}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r}} \vec{p} \phi(\vec{r}, t)$$

se encuentra que

$$i\hbar \left[ \frac{i\vec{e}}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r} \phi + \dot{\phi} \right] e^{i\frac{e}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r}} = e^{i\frac{e}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r}} \left[ \frac{p^2}{2m} + I^*(\vec{r}) \right] \phi$$

Como  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ , se tiene la ecuación de Schrödinger de la que se partió inicialmente.

$$i\hbar \dot{\phi}(\vec{r}, t) = [H_0 + e\vec{E} \cdot \vec{r}] \phi(\vec{r}, t)$$

La nueva función de onda  $\phi$  puede usarse en lugar de  $\psi$  para calcularse los valores esperados de cualquier operador invariante de norma. Ahora, se reescribe el elemento de matriz del hamiltoniano de perturbación

$$V_{m\alpha} = -e\vec{E} \cdot \int u_m^*(\vec{r}) \vec{r} u_\alpha(\vec{r}) d^3\vec{r} = -e\vec{E} \cdot \vec{r}_{\alpha m}$$

Considérese, entonces, un átomo hidrogenoide, el cual se encuentra inicialmente en su estado base  $u_{100}$ . En  $t=0$  se enciende un campo eléctrico armónico del tipo

$$\vec{E}(t) = \hat{x} E_0 \cos \nu t$$

con la característica esencial que

$$\nu \approx \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

es decir, el campo oscila a una frecuencia cercana a la frecuencia de resonancia entre la transición para aquellos estados con  $n=1$  y  $n=2$ . Como es conocido, se tienen reglas de selección entre estados que permiten una transición y cumplen con

$$l = \pm 1, m = \{1, 0, -1\}$$

De esta manera nada más en dos estados cercanos es posible la transición, es decir,  $u_{100}$  y  $u_{210}$ , a los que por simplicidad se denotarán por 1 y 2, respectivamente. Se tiene, entonces, un sistema de dos niveles cuya función de onda solución  $\psi$  tiene la forma

$$\psi(\vec{r}, t) = C_2 u_2(\vec{r}) e^{-i\omega_2 t} + C_1 u_1(\vec{r}) e^{-i\omega_1 t}$$

donde  $C_2$  y  $C_1$  son funciones del tiempo. Los coeficientes de expansión satisfacen una vez más

$$|C_2|^2 + |C_1|^2 = 1$$

lo que implica que la probabilidad de encontrar al sistema en otro estado diferente a 2 o 1 es cero. No obstante, debe tenerse en mente que este análisis es válido para cualquier sistema de dos niveles, para el cual existe un elemento de matriz dipolar diferente de cero.

El elemento de matriz correspondiente a la correlación entre a y b es entonces

$$V_{21} = -\langle 2 | F_{21} | 1 \rangle \cos \nu t = -\frac{\langle 2 | F_{21} | 1 \rangle}{2} (e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})$$

donde  $\nu$  es una cantidad real que representa la magnitud de la interacción dipolar. Sustituyendo lo anterior en la ecuación de movimiento, se obtiene

$$\dot{C}_1 = \frac{i\langle 2 | F_{21} | 1 \rangle}{2\hbar} [e^{i(\omega_2 - \nu)t} + e^{i(\omega_1 + \nu)t}] C_2$$

$$\dot{C}_2 = \frac{i\langle 1 | F_{21} | 2 \rangle}{2\hbar} [e^{i(\omega_1 - \nu)t} + e^{i(\omega_2 + \nu)t}] C_1$$

donde  $\omega = \omega_2 - \omega_1$  es la diferencia de frecuencias angulares. Tómese el caso en el que el sistema se encuentra inicialmente en  $t=0$  en el estado base a, es decir,  $C_1(0) = 1$  y  $C_2(0) = 0$ , entonces las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\dot{C}_1 \approx 0$$

$$\dot{C}_2 \approx \frac{i\langle 2 | F_{21} | 1 \rangle}{2\hbar} [e^{i(\omega - \nu)t} + e^{i(\omega + \nu)t}]$$

Esto arroja como resultado

$$C_1^{-1}(t) = 0$$

$$C_2^{-1}(t) = \frac{i\psi E_{0n}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega - \nu)t}}{\omega - \nu} + \frac{e^{i(\omega + \nu)t}}{\omega + \nu} \right]$$

Para el caso de frecuencias ópticas, el denominador que contiene la suma de las frecuencias es muy grande y por consiguiente ese término es despreciable en comparación del término que contiene la diferencia de frecuencia, el cual tiende a cero conforme la frecuencia de la radiación se aproxima a la frecuencia de resonancia entre estados. A esto se le denomina la "aproximación de onda rotatoria" (rotating wave approximation) (Lamb, 1950), ya que solamente se retiene el término en el que las ondas atómica y del campo rotan juntas. En esta aproximación, el elemento de matriz perturbativo viene dado por

$$V_{21} = \frac{\psi E_{0n}}{2} e^{-i\nu t} = V_{12}^*$$

y las ecuaciones de movimiento anteriores se reducen a

$$C_2^* = \frac{i\psi E_{0n}}{2\hbar} e^{i(\omega - \nu)t} C_1$$

$$C_1^* = \frac{i\psi E_{0n}}{2\hbar} e^{-i(\omega - \nu)t} C_2$$

De esta manera, el comportamiento de  $C_2^*$  es

$$C_2^* \dot{=} \frac{\psi E_{0n}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega - \nu)t} - 1}{\omega - \nu} \right]$$

Si se hace la simplificación

$$e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}} \left[ e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right] = 2ie^{\frac{ix}{2}} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

se encuentra que

$$C_2^* \dot{\approx} C_2^* \dot{=} \frac{i\psi E_{0n}}{2\hbar} e^{i(\omega - \nu)t} \frac{\operatorname{sen}(\omega - \nu)t}{(\omega - \nu) \frac{t}{2}}$$

y la probabilidad de encontrarse en el estado superior es

$$|C_2^*(t)|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\psi E_{0n}}{\hbar} \right) \frac{\operatorname{sen}^2(\omega - \nu)t}{\left[ \frac{(\omega - \nu)t}{2} \right]^2}$$

En la medida en la que el átomo gana energía, el campo electromagnético debe perder la misma cantidad de tal forma, que a  $|C_2^*(t)|^2$  se le llama la probabilidad de absorción de radiación. En resonancia ( $\nu = \omega$ ) se tiene que la expresión anterior se reduce a

$$\lim_{\nu \rightarrow \omega} |C_2^*(t)|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\psi E_{0n}}{\hbar} \right)^2 t^2 \quad \text{Ecuación 11}$$

Esto contiene, que la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado una vez que se ha "encendido" el campo eléctrico, aumenta como  $t^2$ . Esto arroja un área bajo la curva que es proporcional a  $t$ . Enrico Fermi le llamó a esto "la regla de oro" de la mecánica cuántica y está basada en la suposición de

que la desintonización  $\omega - \nu$  observa un rango de valores debido a un campo con un espectro continuo, como en la radiación de cuerpo negro, o a un ensanchamiento de las líneas de absorción (y emisión) del átomo, como lo que sucede en los detectores que funcionan por foto-ionización de los átomos.

Si se considera un espectro de radiación continuo, se reemplaza a  $E_{\omega}^2$  por  $\frac{1}{\epsilon_0} U(\nu) d\nu$  y se integra sobre todas las frecuencias, se obtiene la expresión para la probabilidad de transición

$$P_2 = \frac{1}{4} \frac{\varphi^2}{\hbar^2 \epsilon_0} \int U(\nu) \frac{\text{sen}^2(\omega - \nu) \frac{t}{2}}{\left[ \frac{(\omega - \nu)}{2} \right]^2} d\nu$$

Suponiendo además que  $U(\nu)$  cambia lentamente a comparación del segundo término en la integral, y tomando en cuenta que

$$\int \frac{\text{sen}^2(\omega - \nu) \frac{t}{2}}{\left[ \frac{(\omega - \nu)}{2} \right]^2} d\nu \rightarrow \delta(\omega - \nu) 2\pi t$$

arroja la expresión para la probabilidad de transición

$$P_2 = \frac{\pi \varphi^2}{2\hbar^2 \epsilon_0} U(\omega) t$$

la cual es proporcional a  $t$ , como es deseable. La tasa de transición es, pues,

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{\pi \varphi^2}{2\hbar^2 \epsilon_0} U(\omega) = B' U(\omega)$$

Como la radiación de cuerpo negro no tiene una polarización definida y es isotrópica, se puede generalizar la expresión para la densidad de energía de tal forma, que el campo unidireccional obedezca

$$U(\omega) \rightarrow \frac{U(\omega)}{3}$$

(Bonifacio et al., 1976). La tasa de transición es, entonces,

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{\pi \varphi^2}{6\hbar^2 \epsilon_0} U(\omega) = B U(\omega)$$

donde ahora  $B$  es el coeficiente  $B$  de Einstein.

Se puede ver que la expresión para la emisión estimulada de radiación es igual que para la absorción. Se puede decir que son procesos inversos, mientras que la emisión espontánea es un término de fricción en las ecuaciones de balance energético, el mecanismo mediante el cual un sistema atómico disipa energía a su alrededor. Obsérvese que la derivación es idéntica a la que se ejemplificó en la presente sección con la diferencia que se supuso al sistema inicialmente en el estado superior, que es precisamente lo que ocurre cuando se tiene la inversión de población en un láser.

### Ecuaciones de Einstein y radiación de cuerpo negro

La distribución espectral de la radiación proveniente de un cuerpo negro queda descrita de forma precisa por la fórmula descubierta por Planck y que lleva su nombre

$$U(\omega) = \frac{\frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la radiación en cuestión,  $T$  la temperatura absoluta e la velocidad de la luz en el vacío y  $k$  la constante de Boltzmann. Como ya se mencionó, Einstein descubrió en 1917, que esta fórmula puede explicarse en términos de ensambles de átomos, que poseen niveles discretos de energía y que éstos están distribuidos en los diferentes estados accesibles según la distribución canónica de la mecánica estadística

$$W_n = p_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

En esta ecuación  $p_n$  es el peso estadístico del estado  $n$ -ésimo, independiente de  $T$ , y  $E_n$  es la energía del estado. Esta ecuación es la máxima generalización de la ley de distribución de velocidades de Maxwell. Supóngase que las poblaciones (es decir, el número de átomos)  $n_2$  y  $n_1$  los niveles superior e inferior respectivamente, obedecen las ecuaciones

$$\dot{n}_2 = -An_2 - BU(\omega)(n_2 - n_1)$$

$$\dot{n}_1 = +An_2 + BU(\omega)(n_2 - n_1)$$

donde  $An_2$  es la tasa de despoblación del nivel superior por emisión espontánea y  $BU(\omega)(n_2 - n_1)$  es el término correspondiente para procesos estimulados por radiación, es decir, absorción y emisión estimulada.

En equilibrio, las poblaciones se mantienen constantes y por lo tanto, sus derivadas respecto al tiempo se anulan, pudiendo igualar ambas relaciones con

$$[A + BU(\omega)]n_2 = BU(\omega)n_1$$

que despejando  $U(\omega)$

$$U(\omega) = \frac{A}{B} \frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{A}{B} \frac{1}{\frac{n_1}{n_2} - 1}$$

Además, en equilibrio térmico, las poblaciones están relacionadas por la distribución de Boltzmann, y sustituyéndola en la expresión anterior, se obtiene

$$U(\omega) = \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\frac{(E_2 - E_1)}{kT}} - 1}, E_2 - E_1 = \hbar\omega$$

Esta expresión es idéntica a la fórmula de Planck

$$U(\omega, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

siempre y cuando los coeficiente de emisión estimulada y espontánea observen la siguiente relación:

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

Esto es a su vez la energía por fotón multiplicada por la densidad de modos por unidad de volumen en el intervalo de frecuencias  $\omega$  y  $\omega + d\omega$ , que ya había sido calculada en el capítulo anterior. Recordando la sección anterior, de la expresión para  $B$  se obtiene el valor analítico de  $A$

$$A = \frac{1}{6} \frac{\hbar\omega^3}{\pi\hbar^2 c^3} \epsilon_0$$

La dependencia con el cubo de la frecuencia del coeficiente de emisión espontánea indica que dicha emisión es considerablemente más importante a frecuencias ópticas que en frecuencias de radio.

### Fenómenos de decaimiento (solución exacta de Rabi)

Hasta ahora se ha visto cómo decaen los átomos excitados por emisión espontánea, sin tomar en cuenta otros modos de decaimiento como colisiones y demás fenómenos. En la mayor parte de los medios láser, estos efectos no pueden despreciarse, ya que todo el sistema atómico posee determinadas vidas medias para

cada nivel energético. Puede describirse el efecto de las vidas medias de cada nivel dentro del formalismo matemático que describe la interacción átomo-radiación con solamente aumentar en las ecuaciones de cambio unos coeficientes fenomenológicos, cuya función es la de disminuir las poblaciones en cada uno de los estados

$$\begin{aligned} \dot{C}_2 &= -\frac{\gamma_2}{2} C_2 + \frac{i\mathcal{E}E_0}{2\hbar} e^{i(\omega - \nu)t} C_1 \\ \dot{C}_1 &= -\frac{\gamma_1}{2} C_1 + \frac{i\mathcal{E}E_0}{2\hbar} e^{-i(\omega - \nu)t} C_2 \end{aligned}$$

Los factores  $\frac{1}{2}$  se incluyen para que el cuadro de las amplitudes  $C_2$  y  $C_1$  decaigan como  $-\gamma_{2,1}t$  en ausencia del campo perturbativo  $E_0$ . A los coeficientes gamma se les denomina las vidas medias de los estados y se definen como el tiempo en el cual las probabilidades han decaído a un valor igual a  $1/e$ . Estos tiempos están dados por los recíprocos de los coeficientes de decaimiento gamma. Nótese que si los coeficientes son iguales, volvemos a la representación elástica, es decir, sin pérdidas, ya que los términos de amortiguamiento se pueden sacar de las ecuaciones de cambio como un factor constante. Para resolver esta serie de ecuaciones acopladas, se asume una solución del tipo

$$C_1 = e^{\mu t}$$

para  $C_1(t)$ , donde  $\mu$  es desconocida. Omitiendo el trabajo algebraico, se obtiene la solución exacta para la amplitud de probabilidad del átomo en el estado excitado (Rabi, 1936), igual a

$$C_2(t) = Ae^{\mu_1 t} + Be^{\mu_2 t}$$

donde  $\mu$  tiene la expresión analítica

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2}(\omega - \nu - i\gamma_{12}) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[ \omega - \nu - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \right]^2 + \left( \frac{\mathcal{E}E_0}{\hbar} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \eta \pm \mu \quad \text{Ecuación 12}$$

y se le denomina la "frecuencia de conmutación de Rabi" (Rabi flopping frequency).

Se puede encontrar la distribución espectral de la emisión estimulada, empezando en el nivel energético superior y calculando la probabilidad total de que el átomo decaiga por emisión espontánea del nivel inferior, es decir,

$$P_s = \gamma_1 \int_0^{\infty} |C_1(t)|^2 dt$$

ya que  $\gamma_1 |C_1|^2$  es la probabilidad por unidad de tiempo de que el átomo decaiga al nivel inferior y  $|C_1|^2$  es la probabilidad de que el átomo se encuentre en el nivel 1 por emisión estimulada. Si se sustituye las ecuaciones de movimiento amortiguadas que se acaban de encontrar se obtiene

$$P_s = \frac{\gamma_{21}^2 I_0 \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_{21}} \right)}{(\omega - \nu)^2 + \gamma_{21} (1 + 2I_0)}$$

donde la constante promedio de decaimiento viene dada por

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$$

y la intensidad (adimensional) es

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{(\mathcal{E}E_0)^2}{\hbar^2 \gamma_2 \gamma_1}$$

Nótese que la respuesta en frecuencia del átomo a un campo aplicado repercute en el ancho espectral de la radiación. Este ensanchamiento tiene dos orígenes (Rabi, 1937): ensanchamiento por la vida media de los niveles atómicos y, por consiguiente, el ancho continuo, pero finito de los niveles energéticos mismos, y

ensanchamiento provocado por la saturación del medio atómico. A esto se le llama también "ensanchamiento dinámico" o "power broadening".

## PRINCIPIO DE OPERACIÓN DEL LÁSER

### Oscilación láser y amplificación óptica

#### Introducción

Como ya se ha visto, para que se presente el efecto láser a partir de un medio activo, es preciso preparar al sistema atómico de tal forma, que la probabilidad de que se presente un decaimiento atómico por emisión estimulada de radiación sea un máximo. Dependiendo de la naturaleza del medio y de la forma de estimular al conjunto de átomos se obtendrá un máximo en ganancia óptica y en energía.

En el estudio teórico del capítulo anterior, se consideró al sistema atómico como un conjunto estadístico de átomos idénticos que no interactúan entre sí. Esta idealización del proceso de absorción y emisión estimulada no permite la cuantificación de los parámetros empíricos para obtener el efecto láser. Para ello es preciso echar mano de otras herramientas matemáticas, cuya principal finalidad es la de eliminar esa miopía ocasionada por el aislamiento de efectos colaterales dentro del proceso físico real.

La probabilidad de una transición y el valor del momento dipolar inducido en un átomo debido a la presencia de un campo electromagnético, invariablemente tiene que ser expresado en términos de una combinación bilineal de las amplitudes de probabilidad que resultan de resolver la ecuación de Schrödinger para un sistema atómico particular. De hecho, el valor de expectación de cualquier observable del sistema involucra combinaciones bilineales como

$$C_2 C_1^*$$

Por eso, cuando la función de onda de un ensamble de átomos se desconoce, pero se conocen las probabilidades de que existan varias funciones de onda, dicho ensamble puede describirse mediante una suma ponderada de matrices de densidad individuales. En particular, las amplitudes no pueden por sí mismas describir de manera sencilla los fenómenos estadísticos comunes tales como los efectos debidos a colisiones elásticas o los momentos dipolares inducidos entre átomos.

En este caso se tiene un ensamble de átomos, cuya función de onda y, por lo tanto, su matriz de densidad se conocen. A un sistema de este tipo se le denomina un "caso puro". Se tiene entonces, un sistema atómico de dos niveles con amplitudes de probabilidad en la representación de Schrödinger, definidas por las ecuaciones del capítulo anterior. Se tiene también, que la función de onda total queda descrita por

$$\psi(\vec{r}, t) = C_1(t)u_1(\vec{r}) + C_2(t)u_2(\vec{r})$$

y las ecuaciones de movimiento para los coeficientes temporales son

$$\dot{C}_1 = -i\omega_1 C_1 - \frac{i}{\hbar} V_{12} C_2$$

$$\dot{C}_2 = -i\omega_2 C_2 - \frac{i}{\hbar} V_{21} C_1$$

La matriz de densidad correspondiente a esta función de onda se define entonces como

$$\rho_{11} = C_1 C_1^*$$

$$\rho_{22} = C_2 C_2^*$$

$$\rho_{21} = C_2 C_1^*$$

$$\rho_{12} = C_1 C_2^*$$

o en su representación matricial

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$

Con lo que ya se ha visto se tienen las herramientas suficientes para derivar las ecuaciones de movimiento de los elementos de la matriz de densidad

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{22} &= \dot{C}_2 C_2^* + C_2 \dot{C}_2^* = \\ &= \left( -i\omega_2 C_2 - \frac{i}{\hbar} V_{21}^* C_1 \right) C_2^* + C_2 \left( i\omega_2 C_2 + \frac{i}{\hbar} V_{21}^* C_1 \right) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} V_{21}^* \rho_{12} + c.c.\end{aligned}$$

No deberí sorprender el hecho de encontrar el complejo conjugado de esta expresión, ya que se debe obtener números reales que denoten las probabilidades. De forma similar, se tiene

$$\dot{\rho}_{11} = \frac{i}{\hbar} V_{21}^* \rho_{12} + c.c.$$

Este valor es igual en magnitud al anterior pero de signo opuesto, cosa que ya está reflejando una realidad física. Cuando un sistema pierde probabilidad de encontrarse en el nivel superior, gana probabilidad de estar en el nivel inferior. Matemáticamente, esto se refleja en la conservación de probabilidad, dado que las funciones de onda están debidamente normalizadas

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1$$

El elemento no diagonal de la matriz de densidad obedece a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega \rho_{21} + \frac{i}{\hbar} V_{21} (\rho_{22} - \rho_{11})$$

$$\rho_{12} = \rho_{21}^*$$

donde  $\omega$  es la diferencia de frecuencias  $\omega_2 - \omega_1$ . El término  $-i\omega \rho_{21}$  resulta de los términos frecuenciales similares de las ecuaciones para los coeficientes de Schrödinger e inducen una rápida variación de los mismos para frecuencias ópticas.

A frecuencias ópticas, sin embargo, la emisión espontánea, las colisiones inelásticas (medios gaseosos) y otros mecanismos fuerzan a los átomos excitados a decaer más rápidamente y modifican así la respuesta atómica a la radiación de forma importante. De hecho, la mayor parte de los láseres dependen del tiempo de decaimiento de los niveles inferiores para prevenir que los átomos que ya emitieron reabsorban la energía que los últimos están en ese momento emitiendo. En seguida se modificarán las ecuaciones de movimiento para los elementos de la matriz de densidad de tal forma, que se incluyan los efectos del decaimiento por emisión espontánea. Para ello se parte de las ecuaciones de la sección anterior y se procede de forma conocida

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{22} &= -\gamma_2 \rho_{22} - \frac{i}{\hbar} [V_{21} \rho_{12} + c.c.] \\ \dot{\rho}_{11} &= -\gamma_1 \rho_{11} + \frac{i}{\hbar} [V_{21} \rho_{12} + c.c.] \\ \dot{\rho}_{21} &= -(i\omega + \gamma_{21}) \rho_{21} - \frac{i}{\hbar} V_{21} (\rho_{22} - \rho_{11})\end{aligned}$$

donde  $\gamma_{21}$  es

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_1)$$

Reescribiendo estas ecuaciones en una forma más general, se tiene que

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2}(\Gamma \rho + \rho \Gamma) - \frac{i}{\hbar} [H, \rho]$$

donde el operador general de decaimiento tiene una representación matricial

$$\Gamma_{ij} = \gamma_i \delta_{ij}$$

Colisiones elásticas entre átomos de un gas o entre fonones y átomos en un sólido pueden causar que  $\rho_{21}$  decaiga de manera independiente de los tiempos de decaimiento de los niveles, como se puede observar en la ecuación de movimiento para este elemento de matriz, ya que aparece el coeficiente  $\gamma_{21}$ , el cual denota

la vida de coherencia entre los estados superior e inferior. Específicamente, si durante una interacción los niveles energéticos simplemente se ven recorridos sin que se dé un cambio en estado (por ejemplo, interacción Van der Waals a distancia), el tiempo de decaimiento de  $\rho_{21}$  se incrementa sin que haya una modificación esencial en los tiempos de decaimiento  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Esto es una consecuencia de que el dipolo atómico radiante se desfasa momentáneamente de manera aleatoria y la contribución de un conjunto de dipolos de este tipo se promedia a cero. Existe un análisis elegante de este proceso hecho por Berman (Berman, 1972), el cual ilustra el efecto de interacciones fonónicas sobre el tiempo de decaimiento de  $\rho_{21}$  en el átomo de rubí.

### El concepto de susceptibilidad atómica

Considérese una onda electromagnética, armónica en el tiempo y linealmente polarizada (como la del capítulo anterior) que incide sobre un sistema atómico, ya sea un sólido, un líquido o un gas. Cada uno de éstos constituye un ensamble estadístico de átomos, el cual interactúa con la onda incidente y modifica su amplitud, fase, polarización e, inclusive, frecuencia, esto en el caso de cristales no-lineales. El estado final de la onda después de atravesar dicho medio atómico, depende de la respuesta acumulada de cada tipo de átomo y ésta, a su vez, depende de los niveles energéticos disponibles al átomo sin violar ninguna de las reglas vigentes en su medio.

Ahora se aplicará el formalismo de la matriz de densidad para investigar con más detalle la respuesta del sistema atómico en interacción con un campo electromagnético, armónico en el tiempo. Como hasta ahora, se trata de un sistema de dos niveles, de energía  $E_1$  y  $E_2$ , cuya diferencia de energía es compatible con la del campo electromagnético incidente. Además, se conoce la forma explícita del hamiltoniano de interacción, el cual es de tipo dipolar

$$H' = -e\vec{E} \cdot \vec{r} = -\mu \vec{E}(t)$$

donde  $\mu$  es la componente del operador dipolar en la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}(t)$ . Como ya se ha visto, las componentes de  $\mu$ , en forma matricial, son

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese, que los elementos diagonales de  $\mu$  son cero, en concordancia con los resultados de la correlación entre estados bajo la perturbación dipolar. Sin perder generalidad, se pueden tomar las fases de  $\mu_{12}$  y  $\mu_{21}$  de forma tal que

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$$

Por las propiedades de la matriz de densidad, se sabe que el valor promedio del momento dipolar inducido en el ensamble está dado por

$$\langle \mu \rangle = \mu(\rho_{12} + \rho_{21})$$

y la evolución de la matriz de densidad bajo el hamiltoniano compuesto es

$$H = H_0 + H'$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]_{21} = -\frac{i}{\hbar} [H\rho - \rho H]_{21} = -i\omega\rho_{21} + i\frac{\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{11} - \rho_{22})$$

Se define una variable útil en lo que sigue:

$$\Delta = \rho_{11} - \rho_{22}$$

cuya evolución viene dada por:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{2i\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*)$$

Como se ha mencionado previamente, la matriz de densidad proporciona información sobre valores de expectación de variables físicas en ensambles. Si se tiene el conjunto interactuando con el campo electromagnético en la forma que se calcula en la sección anterior, es de esperarse que si de repente se

"apaga" la perturbación, alguna de las variables se modifican con el tiempo y el sistema vuelve a su estado base. Estas variables son  $\rho_{21}$  y  $\rho_{11} - \rho_{22}$ .

Cuando se apaga el campo electromagnético,  $\rho_{21}$  decrece y se aproxima a cero conforme se destruye la coherencia entre las  $N$  eigenfunciones que caracterizan al ensamble, via colisiones. Estas colisiones (elásticas) se caracterizan por el hecho de que conservan la energía promedio (u ocupación de niveles), pero causan una pérdida de información respecto a las fases relativas entre las eigenfunciones del ensamble, introduciendo cambios aleatorios de fase a intervalos aleatorios. Esta pérdida de información ocurre a una tasa fija llamada "tiempo de relajamiento espin-espín",  $T_2$ , en analogía con resonancia magnética. Incorporando, entonces, esta idea en las ecuaciones de evolución de la matriz de densidad, se obtiene para el elemento fuera de la diagonal  $\rho_{21}$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega\rho_{21} + \frac{i\mu}{\hbar} E(t)\Delta - \frac{\rho_{21}}{T_2}$$

Se sabe también, que  $\rho_{ii}$  está relacionada con la probabilidad de encontrar al átomo en el estado  $i$ -ésimo. Si  $N$  es la densidad de átomos, entonces  $N(\rho_{11} - \rho_{22})$  es el valor promedio de la diferencia de población entre el estado 1 y el estado 2 del átomo. En equilibrio termodinámico sin perturbación, la diferencia de poblaciones es positiva, excediendo la población del estado base al del estado excitado y la denotaremos por  $(\rho_{11} - \rho_{22})_0$ . De igual manera que  $\rho_{21}$ , cuando se apaga el campo perturbativo, la diferencia de poblaciones se relaja hasta volver a alcanzar su valor inicial después de un tiempo dado  $\tau$ . Consecuentemente, se añade a las ecuaciones de evolución de la matriz de densidad

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{2i\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - \frac{\Delta - \Delta_0}{\tau}, \Delta_0 = (\rho_{11} - \rho_{22})_0$$

Se hace ahora un cambio de variables para olvidarse de las rápidas variaciones temporales que induce el campo electromagnético en la matriz de densidad

$$\rho_{21}(t) = \sigma_{21}(t)e^{-i\omega t}$$

$$\rho_{12}(t) = \sigma_{12}(t)e^{i\omega t} = \sigma_{21}^*$$

quedando así, las variables "lentas". Al sistema de ecuaciones transformadas se le denomina "representación de interacción" (interaction picture), ya que es como un cambio de sistema inercial

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i(\nu - \omega)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar} \Delta - \frac{\sigma_{21}}{T_2}$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{i\mu E_0}{\hbar} (\sigma_{21} - \sigma_{21}^*) - \frac{\Delta - \Delta_0}{\tau}$$

En esta última ecuación se desprecian términos con frecuencias  $\pm 2\nu$ , lo que se justifica físicamente con el hecho de que su contribución promediada es cero en comparación en tiempos más largos que  $\frac{2\pi}{\nu}$ .

Las ecuaciones anteriores son formalmente análogas a las ecuaciones de Bloch (Bloch, 1954) para resonancia magnética.

Ahora, calculando el valor de expectación del momento dipolar en función de las nuevas variables se obtiene

$$\langle \mu \rangle = \mu(\sigma_{12}e^{i\omega t} + \sigma_{21}e^{-i\omega t})$$

y como al igual que  $\rho$ ,  $\sigma_{21} = \sigma_{12}^*$ , se obtiene

$$\langle \mu(t) \rangle = 2\mu[\text{Re}\sigma_{21}(t)\cos \nu t + \text{Im}\sigma_{21}(t)\text{sen} \nu t]$$

En estado estacionario, las derivadas respecto al tiempo se anulan y se puede calcular las soluciones a las ecuaciones anteriores, si se tiene en mente, que en realidad se está tratando con tres ecuaciones homogéneas de tres variables:  $\text{Re}(\sigma_{21})$ ,  $\text{Im}(\sigma_{21})$  y  $(\rho_{11} - \rho_{22})$ . Sumando y restando a la primera ecuación su complejo conjugado, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$(\omega - \nu) \operatorname{Im} \sigma_{21} + \frac{\operatorname{Re} \sigma_{21}}{T_2} = 0$$

$$(\omega - \nu) \operatorname{Re} \sigma_{21} + \Omega \Delta - \frac{\operatorname{Im} \sigma_{21}}{T_2} = 0$$

$$4\Omega \operatorname{Im} \sigma_{21} + \frac{\Delta - \Delta_0}{\tau} = 0$$

cuyas soluciones son

$$\operatorname{Im} \sigma_{21} = \frac{\Omega T_2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \Delta_0$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{21} = \frac{(\omega - \nu) \Omega T_2^2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \Delta_0$$

$$\Delta = \frac{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \Delta_0$$

donde la frecuencia de precesión  $\Omega$  es  $\frac{\mu E_0}{2\hbar}$ . Ahora se puede escribir la expresión completa para la polarización macroscópica del medio

$$P = N \langle \mu \rangle = \frac{\mu^2 N \Delta_0 T_2}{\hbar} E_0 \left[ \frac{\operatorname{sen} \nu \tau + (\omega - \nu) T_2 \cos \nu \tau}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \Delta_0 \right]$$

mientras que la diferencia de población por unidad de volumen es

$$N\Delta = \frac{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} N\Delta_0$$

donde  $N\Delta_0 = N(\rho_{11} - \rho_{22})_0$ , es la diferencia de población sin perturbación.

De la teoría electromagnética de Maxwell se sabe que el transporte de energía radiante de un medio atómico se lleva a cabo, además de a través de las cargas libres que se encuentran en el medio, excitando los dipolos que resulten de la presencia del campo electromagnético. Dicho de otra forma, el campo electromagnético pierde energía a expensas de los dipolos eléctricos, la cual se convierte en energía potencial almacenada en los dipolos y justifica la disipación resultante del cambio que ocurre en el vector de polarización. Para ello se define la susceptibilidad atómica  $\chi$

$$\chi = \chi' - i\chi''$$

entonces

$$P(t) = \operatorname{Re}(\epsilon_0 \chi E_0 e^{i\nu t}) = \epsilon_0 E_0 (\chi' \cos \nu t + \chi'' \operatorname{sen} \nu t)$$

y de la expresión para la polarización macroscópica, se obtiene

$$\chi'( \nu ) = \frac{\mu^2 T_2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{(\omega - \nu) T_2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} N\Delta_0 = \frac{\mu^2 (\omega - \nu) T_2}{2\epsilon_0 \hbar} g(f) N\Delta_0$$

$$\chi''(\nu) = \frac{\mu^2 T_2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} N\Delta_0 = \frac{\mu^2}{2\epsilon_0 \hbar} g(f) N\Delta_0$$

Ecuación 13

donde la función de "perfil espectral" (line shape function)  $g(f)$  normalizada es

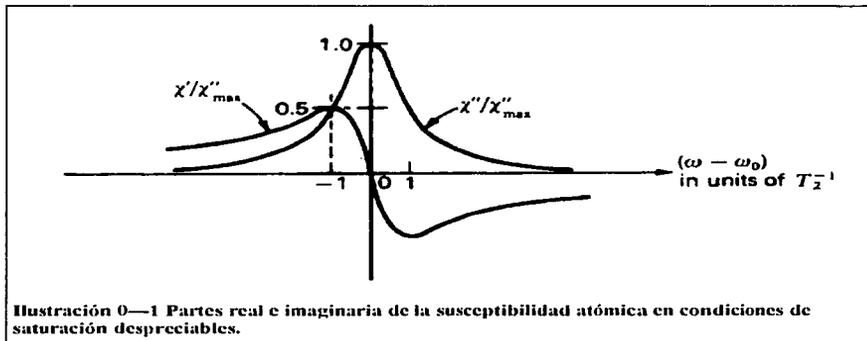
$$\chi(f) = \frac{2T_2}{1 + 4\pi^2(f - f_0)^2 T_2^2} = \frac{\left(\frac{\Delta f}{2\pi}\right)}{(f - f_0)^2 + \left(\frac{\Delta f}{2\pi}\right)^2}$$

$$f = \frac{\nu}{2\pi}, f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$$

con un ancho a medio máximo FWHM igual a

$$\Delta f = \frac{1}{\pi T_2}$$

De esta forma, se ha demostrado que, de acuerdo a las ecuaciones anteriores,  $\chi''$  es proporcional a la absorción o ganancia del medio para radiación de frecuencia  $\nu$ , y  $\chi'$  es la respuesta de frecuencias del medio atómico a la radiación incidente. Nótese que ambas dependen de  $N\Delta$ , que es la inversión de población en presencia del campo óptico. La forma de cada una de ellas se puede ver en la Ilustración 0—1.



**Ilustración 0—1** Partes real e imaginaria de la susceptibilidad atómica en condiciones de saturación despreciables.

Con ésto se ha arribado a una de las expresiones más importantes en la física del efecto láser: la respuesta macroscópica del medio atómico a una perturbación electromagnética, armónica, óptica.

### Técnicas de bombeo

De acuerdo con la teoría electromagnética de Maxwell, el vector de desplazamiento eléctrico está definido por la expresión

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Aquí, la polarización se separa en una componente resonante, ocasionada por la transición atómica, y otra no resonante, la cual contiene todas las demás contribuciones a la polarización macroscópica. Reescribiendo la expresión anterior, obtenimos

$$\vec{D} = \epsilon \left[ 1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \chi(\nu) \right] \vec{E} = \epsilon'(\nu) \vec{E}$$

de donde extraemos la constante dieléctrica compleja

$$\epsilon''(\nu) = \epsilon' \left[ 1 + \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon'} \chi(\nu) \right]$$

Así, tomando en cuenta la transición atómica basta con cambiar la constante dieléctrica del medio por la expresión de arriba. Al tener el valor de  $\chi$  calculado, se puede olvidar el origen físico de ésta y proceder a hacer el análisis de la propagación de una onda electromagnética en un medio material con una constante dieléctrica igual a la que se acaba de mencionar, esto usando las "viejas" ecuaciones de Maxwell. Como ejemplo de lo anterior, considérese la propagación de una onda electromagnética plana en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon'$ . La onda tiene la forma

$$E(z, t) = \text{Re} \left[ E e^{i(\nu t - k'z)} \right]$$

donde

$$k' = \nu \sqrt{\mu \epsilon'} \cong k \left( 1 + \frac{\epsilon_{11}}{2\epsilon'} \chi \right)$$

para  $\chi$  mucho menor que 1 y siendo  $k$  el vector de onda. Substituyendo la expresión formal de la susceptibilidad atómica se encuentra

$$k' \cong k \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2} \right] - i \frac{k\chi''(\nu)}{2n^2}$$

donde  $n = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}}$  es el índice de refracción del medio lejos de la resonancia. Substituyendo el valor de  $k$  en la ecuación de onda, se obtiene

$$E(z, t) = \text{Re} \left[ E e^{i\nu t - (k + \Delta k)z - \frac{\gamma}{2}z} \right]$$

La potencia absorbida del campo electromagnético por unidad de volumen es entonces

$$E(t) \frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ E(i\nu P)^* \right] = \frac{\nu \epsilon_0}{2} \chi'' |E_0|^2$$

Esta absorción de energía causa que la intensidad de la onda decaiga según

$$I(z) = I_0 e^{\gamma(\nu)z}$$

donde

$$\gamma(\nu) = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$$

Conservación de la energía implica forzosamente que

$$\frac{dI}{dz} = - \frac{\nu \epsilon_0 \chi''(\nu)}{2} |E_0|^2$$

y así se tiene el coeficiente de absorción

$$\gamma(\nu) = - \frac{k\chi''(\nu)}{n^2}$$

donde

$$I = \frac{c\epsilon'}{2n} |E_0|^2$$

Nótese, que el coeficiente de absorción es negativo cuando  $N\Delta$  es positivo, es decir, cuando la densidad de población en el estado inferior del sistema excede a la superior. De la sección anterior se vio, cómo en ausencia de campo electromagnético o en ausencia de perturbación, la diferencia de poblaciones en equilibrio termodinámico es positiva y se le denominó  $N\Delta_0$ .

Cuando se "enciende" el campo perturbativo y conforme se aproxima a la condición de resonancia, se consigue que en el medio atómico se dé una "inversión de población", o dicho de otra forma, que la densidad de átomos en el estado superior exceda a la del inferior, pudiéndose así dar el fenómeno de decaimientos espontáneo y estimulado. En cuanto se invierte la población, se da un cambio de signo en el coeficiente de absorción del medio, el cual, en lugar de atenuar la radiación en su paso la amplifica en un proceso acumulativo exponencial. A este fenómeno se le conoce como amplificación de luz (Lamb, 1964). Si se sigue el proceso de amplificación desde que se enciende el campo perturbativo, se nota, como ya se dijo, que el coeficiente de absorción parte inicialmente de un valor negativo y que éste se va incrementando hasta alcanzar el valor cero. Este punto tiene un significado físico concreto y es que en ese instante el medio se convierte ópticamente transparente para esa frecuencia de radiación en particular. Es un proceso de transparencia inducida y es la base para explicar la propagación de pulsos en medios atómicos especialmente preparados. Este caso se estudiará con más detalle. Por ahora, se tratará de entender el proceso físico mediante el cual se consigue la inversión de población, tan importante para que se manifieste el efecto láser. Debido a que el efecto láser depende mayoritariamente de la condición de inversión de población en el medio, es preciso conocer las técnicas experimentales con las que se prepara al sistema atómico para que entregue su energía en forma de luz coherente. A esas técnicas se las denomina en el lenguaje de la electrónica cuántica como "técnicas de bombeo". Mientras más eficiente es el bombeo, más disponibilidad habrá por parte del medio para amplificar la luz por emisión estimulada de radiación. Para conseguir la inversión de población habrá que suministrar energía suficiente al sistema de átomos hasta que se hagan suficientes transiciones absorbentes al nivel atómico excitado. Existen muchas formas de lograr ésto, algunas de las cuales fueron mencionadas al inicio de este trabajo, y son:

	He-Ne	CO <sub>2</sub>	Argón	Nd:YAG	GaAs	Dye	HF	CuCl	FEL
c.d.	X	X	X					X	
RF	X	X							
TEA		X	X						
Óptica				X	X	X			
Flama		X							
Térmico								X	
Químico							X		
Haz electrónico					X				X
Avanlancha					X				
Wigglers									X
Gas dinámico		X							

Como se aprecia, existen muchas formas de provocar transiciones absorbentes en medios atómicos y que son capaces de mantener la inversión de población durante el efecto láser. Cabe en este punto recordar, que el medio activo se encuentra en una cavidad óptica que satisface las condiciones para las ecuaciones de Maxwell tal como se vieron en el capítulo 2. De esta forma, la radiación que se genera a lo largo de una dirección seleccionada en el laboratorio tiene mayor probabilidad de ser amplificada que cualquier otra. Esta dirección coincide con el eje óptico de la cavidad.

Es preciso recalcar el papel que juega el bombeo sobre el desempeño de un láser. La susceptibilidad atómica es función de la inversión de población, pero la inversión de población a su vez puede ser una función temporal. La dependencia temporal de  $N\Delta$  la hereda directamente de la tasa de bombeo que se tenga, o dicho de otra forma, del comportamiento temporal del sistema impulsor (driving system) que se construya. Como se verá más adelante, un láser pulsado se puede generar al suministrar al sistema atómico un pulso excitatorio, el cual se propaga a través del medio atómico o modificando instantáneamente el cavity Q para un estímulo excitatorio constante.

### Condición de umbral para oscilación

En un láser, como en todo sistema físico real, la ganancia va siempre acompañada de un término de pérdidas, o de fricción en las ecuaciones de balance energético, mediante el cual dicho sistema disipa energía a su alrededor y le "notifica" así su presencia.

Se define la tasa de transición del sistema atómico del estado inicial 2, con  $n$  cuantos, al estado final 1, con  $n+1$  cuantos, como

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\bar{r}_{21}|^2 \delta(E_{i, \text{inicial}} - E_{f, \text{final}}) = \frac{\pi \omega^2 \omega_k}{V \epsilon} \left| \langle 1 | \hat{\mathbf{e}}_{k,\lambda} \cdot \bar{\mathbf{r}} | 2 \rangle \right|^2 (n_k + 1) \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_k)$$

que a su vez, es la suma de la tasa de decaimiento por emisión espontánea más la emisión estimulada. Se sabe, que la tasa de emisión estimulada, al igual que la absorción, dependen de la intensidad del campo perturbador (o densidad fotónica) mientras que la otra es independiente, de allí que se pueda separar la expresión anterior en dos partes. Si se reconoce, que la función de probabilidad de transición que se derivó en el capítulo anterior tiende a una función delta de muestreo, siempre que su anchura sea pequeña comparada con la densidad de estados finales en unidades de frecuencia angular de los mismos. Así,

$$W_{\text{inducida}} = \frac{\pi \omega^2 \omega_k}{V \epsilon} \hat{\mathbf{e}}_{k,\lambda} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{12} \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_k) n_k = \frac{1}{t_{\text{inducida}}}$$

$$W_{\text{espontánea}} = \frac{\pi \omega^2 \omega_k}{V \epsilon} \hat{\mathbf{e}}_{k,\lambda} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{12} \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_k) = \frac{1}{t_{\text{espontánea}}}$$

lo que corrobora lo anterior y establece que la razón de tasas de decaimiento estimulada entre espontánea es igual al número de cuantos que se encuentran en ese modo. Además, demuestra algo intuitivamente obvio, que es el que sea imposible para un sistema atómico hacer una transición absorbente de forma espontánea y que su tasa de transición sea la misma que la de emisión estimulada.

Valga la pena dejar en firme, que las expresiones anteriores vale para la interacción del átomo con un único modo electromagnético (single mode interaction). No obstante, este resultado puede fácilmente generalizarse para obtener la tasa de transición debida a una onda monocromática de frecuencia  $\nu$ . De hecho, la ecuación se aplica al caso particular, donde la energía de transición es exactamente  $E_2 - E_1$ , pero, en general, ésta no se conoce precisamente. Se tiene, entonces, que hablar de probabilidades de encontrar el valor de la diferencia  $E_2 - E_1$  entre  $E + dE$  y se define como

$$g(E) dE = \frac{1}{h} g(\nu) dE$$

donde  $g(\nu)$  es la función de perfil espectral normalizada para una transición de  $2 \rightarrow 1$ . Multiplicando la ecuación para la tasa inducida por la expresión anterior e integrando sobre todas las energías, se encuentra

$$(W_{21})_{\text{ind}} = \frac{\pi \omega^2 y_{12}^2 \omega_1 n_1}{\hbar V \epsilon} \frac{g_1}{g_2} g(\nu_1)$$

donde los estados 1 y 2 poseen degeneración  $g_1$  y  $g_2$ , respectivamente, y además se ha promediado el seno cuadrado del l-ésimo modo por un medio la densidad de energía de ese modo.

Finalmente, se relaciona el número modal de excitación  $n_1$  con la intensidad  $I_{\nu_1}$  de la onda mediante

$$I_{\nu_1} = \frac{c n_1 \hbar \nu_1}{V}$$

y se elimina la polarización mediante la expresión anterior para la tasa espontánea, lo cual conduce a

$$(W_{21})_{\text{ind}} = \frac{\lambda^2 I_{\nu_1}}{8 \pi \hbar \nu_1 n^2 t_{\text{espont}}} g(\nu)$$

La relación anterior da la dependencia de la tasa de transición inducida con la intensidad y el perfil espectral de la onda excitadora, de tal forma que sólo aquellas frecuencias que caen dentro del perfil espectral de la transición correspondiente, tienen la posibilidad de inducir una transición, ya sea absorbente o radiante.

Si además se utiliza el hecho que la inversión de población está dada por

$$\Delta N_i \equiv N_2 - \frac{g_1}{g_2} N_1$$

y, consecuentemente, la densidad volumétrica de potencia

$$\frac{P}{V} = [N_2(H_{12}), -N_1(H_{12}), ]h\nu = \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) \frac{\lambda^2 g(\nu) I_\nu}{8\pi I_{\text{espont}}} = \gamma(\nu) I_\nu(z)$$

que debe ser igual a  $\frac{dI_\nu}{dz}$ , con lo que se encuentra que el coeficiente  $\gamma$  está descrito por

$$\gamma(\nu) = \frac{\lambda^2 \eta}{8\pi I_{\text{espont}}} \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) g(\nu), \eta \equiv \frac{3N_1 z^2}{|\bar{r}_{12}|^2}$$

Si se usa una variable para designar todas las pérdidas que ocurren durante el efecto láser, podemos reescribir de forma más general la constante de propagación compleja de la onda electromagnética en el medio activo como

$$k' = k \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2\mu^2} \right] - ik \frac{\chi''(\nu)}{2\mu^2} - i \frac{\alpha}{2}$$

Si la cavidad óptica del láser está conformada por dos espejos con reflectividades  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, para que se obtenga oscilación dentro de la cavidad óptica, la onda debe hacer un viaje redondo por la cavidad sin atenuación alguna, es decir,

$$|r_1 r_2 e^{-2k'l}| = 1$$

Así, se puede calcular el coeficiente  $\gamma$ , que da la condición de umbral para oscilación

$$r_1 r_2 e^{2l\gamma - \alpha l} = 1 \rightarrow \gamma_l = \alpha - \frac{1}{2l} \ln r_1 r_2$$

Substituyendo la última expresión en  $\gamma$

$$\Delta N_l = \frac{8\pi I_{\text{espont}}}{\eta g(\nu_0) \lambda^2} \left( \alpha - \frac{1}{2l} \ln r_1 r_2 \right)$$

que es precisamente la inversión de umbral para que se presente ganancia en el medio atómico. En un láser de HeNe (Laurens, 1964), por ejemplo, se tiene que la inversión umbral es del orden de  $10^9/cm^3$  y en láseres de estado sólido (Maiman, 1960), ésta es mayor debido a la anchura del perfil espectral.

### Saturación de la ganancia

Una vez que se establece la oscilación láser en la cavidad óptica, el medio alcanza un estado estacionario que va a depender fuertemente de la intensidad del campo en el medio atómico. La diferencia más importante entre sistemas atómicos, en los que se llevan a cabo transiciones homogéneas e inhomogéneas se manifiesta en el modo de saturación de ganancia. En particular, conforme aumenta la intensidad de campo, decrece la ganancia óptica neta y se modifica el perfil espectral en cada caso.

### Transición homogénea

La ganancia del medio atómico viene dada por la expresión

$$\gamma(\nu) = N\Delta \frac{\lambda^2 \eta}{8\pi I_{\text{espont}}} g(\nu)$$

donde  $g(\nu)$  es la función de perfil espectral y  $N\Delta$  es la densidad de inversión. Substituyendo, se obtiene la expresión para la ganancia en saturación

$$\gamma(\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \frac{I_\nu}{I_s(\nu)}}$$

donde  $\gamma_{\omega}$  es la ganancia no saturada,  $I_{\nu}$  la intensidad dada por

$$I_{\nu}(\nu) = \frac{c n E_{\omega} I_{\omega}^2}{2}$$

e  $I_s(\nu)$ , la intensidad para la cual la ganancia a la frecuencia  $\nu$  se reduce a la mitad, también llamada la "intensidad de saturación", y viene dada por

$$I_s(\nu) = \frac{c n E_{\omega} \hbar^2}{\mu^2 \chi(\nu) \eta}$$

Nótese, que la intensidad de saturación es inversamente proporcional al perfil espectral de tal forma, que la saturación aumenta conforme uno se aleja de la frecuencia central. Es decir, el hecho de que un láser emita luz prácticamente monocromática es resultado directo de la suposición de que está funcionando como un medio atómico homogéneamente ensanchado.

### Transición inhomogénea

Considérese ahora que los átomos son distinguibles entre sí a través de su energía de transición, cada uno teniendo un valor diferente debido a sus velocidades cinéticas particulares, resultado de la interacción con la radiación en la cavidad.

Al absorberse o emitir un fotón, el campo electromagnético le imparte momentum en el caso de emisión espontánea en una dirección aleatoria, mientras que en la absorción o emisión estimulada tienen direcciones definidas. En una cavidad láser, dicha dirección viene dada por el eje óptico. Así se produce un movimiento de los átomos dentro de la cavidad paralelo al eje óptico.

La velocidad de los átomos en movimiento puede tener un valor suficiente para que un observador verifique un cambio en la frecuencia de emisión de una clase de átomos, debido a un efecto Doppler en el proceso de emisión. Para un átomo que viaje con velocidad paralela al eje óptico, la frecuencia se verá recorrida en una cantidad del valor central de emisión. Entonces, el corrimiento de frecuencia es

$$\nu = \nu_0 + \frac{v_z}{c} \nu_0$$

donde  $v_z$  es la velocidad en dirección del observador y  $c$  la velocidad de la luz en el medio. Además, los átomos tienen una distribución maxwelliana de velocidades, de donde se obtiene que el perfil espectral Doppler se ve ensanchado de acuerdo con

$$g(\nu) = \frac{c}{\nu_0} \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\left( \frac{M}{2kT} \right) \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 (\nu - \nu_0)^2}$$

y donde el ancho FWHM está dado por

$$\Delta \nu_D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2}$$

En el caso de una transición inhomogénea el perfil espectral se ve ensanchado por una cantidad que se rige de acuerdo con la estadística que lo produce, que en un láser gaseoso se trata de un corrimiento Doppler. En general, se tiene que el nuevo perfil espectral en una transición inhomogénea está dado por

$$g(\nu) d\nu = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(\nu_z) g^s(\nu) d\nu_z \right] d\nu$$

donde  $p(\nu_z) d\nu_z$  es la función de probabilidad de que un átomo tenga su frecuencia central entre  $\nu_z$  y

$\nu_z + d\nu_z$ . Así, cada átomo teniendo su propio perfil, la probabilidad de que se emita un fotón con una frecuencia entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  está dada por la expresión anterior y es lo mismo que decir, que la probabilidad de emitir un fotón entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es igual a la probabilidad de que se emita en el perfil de un átomo de una clase particular  $\xi$ , sumada sobre todas las clases de átomos que conforman la transición inhomogénea.

La aportación de átomos que emiten en un rango  $d\nu_z$  a la inversión es  $N\Delta\rho(\nu_z)d\nu_z$  y la contribución de nada más esta clase a la ganancia es entonces

$$\gamma_z(\nu) = -\frac{N\Delta\lambda^2\eta}{8\pi n^2 I_{\text{espont}}} \left[ \frac{\rho(\nu_z)k\nu_z}{\frac{1}{g_z(\nu)} + \frac{I_s\phi\lambda^2}{4\pi n^2 h\nu}} \right]$$

Integrando se obtiene la expresión para la ganancia inhomogénea

$$\gamma(\nu) = \frac{\gamma_u(\nu)}{\sqrt{1 + \frac{I_s}{I_s}}}, I_s = \frac{2\pi^2 n^2 h\nu\Delta\nu}{\phi\lambda^2\eta}$$

donde  $I_s$  es la intensidad de saturación de la línea inhomogénea. Como se puede apreciar, el sistema inhomogéneo se satura más lentamente debido al término de raíz inversa.

Por otro lado, la intensidad de saturación no depende de la posición del perfil espectral, ya que ésta no depende del perfil como sucede en el caso homogéneo.

La transición inhomogénea tiene otros efectos sobre el perfil espectral de emisión de un láser y se le conoce comúnmente como "hole burning" (Boyd, 1984), donde, debido a la intensidad de emisión de un grupo de átomos con frecuencias corridas, se inhibe la inversión de población para esa frecuencia, generándose así un agujero de emisión en el perfil espectral del láser. En muchas ocasiones, los agujeros de emisión se presentan de forma simétrica en torno a la frecuencia central de emisión. Esto sucede, porque en el resonador óptico se tienen ondas electromagnéticas que viajan en ambas direcciones sobre el eje óptico de la cavidad, dándose también el efecto opuesto (Portis, 1953).

## Dinámica láser

En la teoría semiclásica del láser de dos niveles tal como se ha visto, comprende muchos fenómenos observables dentro de lo que es el comportamiento idealizado de un conjunto de átomos, cuya única interacción es con el campo electromagnético que se produce dentro de la cavidad. Sin embargo, fenómenos tales como turbulencia en el medio, especialmente si es gaseoso, es un fenómeno recientemente reconocido, más que un fenómeno nuevo. Pero lo más interesante de fenómenos como éste, es que se pueden construir experimentos suficientemente simples y cercanos a los modelos teóricos, que se ha dado una buena pauta para estudiar los efectos del caos determinista en láser y resonadores ópticos.

En la presente sección se darán los fundamentos para el estudio de inestabilidades en láseres, pero no se pretende hacer una discusión completa del tema para lo cual se dan algunas referencias extras. Como ya se sabe de la sección primera, el efecto láser se genera gracias a la preparación adecuada del sistema atómico, consiguiéndose la inversión de población gracias a un mecanismo de laboratorio seleccionado que los permita. Si se incluye en el cuadro general de las ecuaciones de movimiento los efectos del bombeo, se obtiene para los niveles láser la siguiente expresión

$$\dot{\rho}_{ii} = P_i - \gamma_i \rho_{ii} + \frac{i}{\hbar} [H', \rho]_{ii}$$

donde  $P_i$  designa el proceso incoherente de bombeo al  $i$ -ésimo nivel y  $\gamma_i$  los fenómenos de decaimiento conocidos, los elementos fuera de la diagonal de la matriz de densidad, que describen la coherencia entre los niveles 1 y 2 del proceso láser quedan, entonces, descritos de forma conocida

$$\dot{\rho}_{21} = i\omega_{21}\rho_{21} + \frac{i}{\hbar} [H', \rho]_{21} - \gamma_{21}\rho_{21}$$

donde  $\gamma_{21}$  incluye todos los fenómenos que destruyen dicha correlación entre estados, tales como corrimientos de fase inducidos por colisiones clásicas, en las cuales las fuerzas interatómicas causan un cambio temporal en  $\omega_{21}$  sin inducirse una transición, propiamente.

Continuando, se tiene que la polarización del medio quedaba descrito por

$$\langle \vec{P} \rangle = \text{Tr}(\vec{\mu}\rho) = \mu_{12}\rho_{21} + \mu_{21}\rho_{12} = 2 \text{Re}(\mu_{12}\rho_{21})$$

y que además esta polarización es a su vez una fuente en las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético

$$\ddot{\vec{P}} = \Delta^2 \vec{E}$$

Así se obtiene, dentro de ciertas aproximaciones, un conjunto completo de ecuaciones para la evolución del sistema átomo-radiación sujetas a las condiciones iniciales apropiadas. Además, echando mano de la aproximación que nos permite reducir las ecuaciones de Maxwell a primer orden, ya que la variación de la amplitud del sistema atómico es lenta a comparación de la frecuencia óptica de excitación, permitiendo ésto hacer un cambio a la representación de interacción con el cambio de variables de  $\rho_{21}$  a  $r_{21}$  con una variación temporal igual a la del campo electromagnético del tipo

$$\rho_{21} = r_{21} e^{-i\omega t}$$

Todo ésto lleva a las ecuaciones de Bloch (Bloch, 1954), las cuales son la base para el estudio del fenómeno de estabilidad:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega e^{i\omega t} = G \langle r_{21}(v) \rangle$$

$$\dot{\rho}_{22} = P_2 - \gamma_2 \rho_{22} - \frac{1}{2} \text{Im}(\Omega r_{21})$$

$$\dot{\rho}_{11} = P_1 - \gamma_1 \rho_{11} + \frac{1}{2} \text{Im}(\Omega r_{21})$$

$$\dot{r}_{21} = i(\Delta - \dot{\phi} - kv)r_{21} - \gamma_{21}\rho_{21} + (\rho_{11} - \rho_{22})\Omega e^{i\omega t}$$

donde se han incluido algunos cambios que son los siguientes: la frecuencia de Rabi se escribe explícitamente en forma polar, G es una constante de acoplamiento del campo electromagnético con el sistema atómico, los  $\langle \rangle$  permiten un promedio sobre la distribución maxwelliana de velocidades de los

átomos del gas,  $\Delta$  es  $\nu - \omega_0$ ,  $\dot{\phi}$  incluye el suponer que un cambio en la fase del campo es equivalente a un cambio en frecuencia y kv da el corrimiento Doppler al sistema de referencia atómico. Como se puede apreciar, la presencia del parámetro continuo v y la derivada espacial respecto a z le otorga a las ecuaciones de Bloch un espacio fase lo suficientemente amplio para que se presente un comportamiento caótico del sistema.

## Pulsos Láser

### Láseres pulsados

En una gran variedad de aplicaciones, los láseres utilizados deben poder generar pulsos de muy corta duración. Tal es el caso en oftalmología, donde la posibilidad de generar dichos pulsos láser ha permitido un gran avance en técnicas quirúrgicas que operan en escalas del orden de micras.

El láser empleado para este tipo de técnicas es un láser Nd:YAG de tan solo 10 cm. de longitud y que produce pulsos de 7 mseg. de duración, pero con potencia pico de varios MW. Enfocando el haz en una mancha del orden de micras, se obtienen efectos electromecánicos en volúmenes no mayores a un par de micras cúbicas, produciéndose lo que comúnmente se conoce como ruptura óptica. En la zona de ruptura se genera un pequeño volumen ionizado del medio de impacto.

En aplicaciones oftalmológicas, la energía máxima alcanzada por el láser es de 10 mJ, produciéndose micro-explosiones que a su vez son aprovechadas para poder llevar a cabo extracciones de cápsulas del cristalino que están afectadas por cataratas. En urología, en cambio, el mismo tipo de láser debe ser capaz de generar pulsos con energías 10 veces mayores, ya que su aplicación recae principalmente en el destrucción de cálculos, denominada "litotripsia". En este caso, el haz se enfoca en el cálculo, generando una onda de choque acústica de muy alta energía y, consecuentemente, demoliendo el cálculo.

En holografía es posible generar hologramas de objetos en movimiento, pareciendo éstos completamente estáticos. Así, procesos naturales que requieren de un tipo de exposición fotográfica muy corta y

suficientemente energética para marcar una placa fotográfica, ahora son posibles de registrar mediante pulsos láser.

Prácticamente e históricamente, es más fácil generar un pulso láser que emisión continua, ya que para obtener la última hay que bombardear al medio atómico de forma más precisa y sostener la inversión de población por tiempos suficientemente largos. Un pulso láser es más fácil de obtener de forma experimental. Es la meta de la presente sección revisar la teoría detrás de este efecto de una manera rápida, pero ilustrativa y precisa.

### Transparencia auto-inducida

En un medio normalmente absorbente se pueden generar pulsos resonantes de poca duración, siempre que se rebase una intensidad umbral bien definida. Estos pulsos se propagan a través del medio con una atenuación anormalmente baja debido a que la duración de dicho pulso es menor a los diferentes tiempos de relajamiento propios del medio que se utilice. Como se vio en el capítulo anterior, estos tiempos se definen como la vida media de los estados involucrados en la transición láser y el tiempo de relajamiento espín-espín. Además debe cumplirse que el centro del pulso sea resonante con la frecuencia entre dos niveles normalmente absorbentes. Así, el pulso adquiere un comportamiento estable, en el cual se mantienen constantes su anchura, energía y forma (Dicke, 1954) (Yariv, 1960) (McCall and Hahn, 1967). A pesar de ser una onda electromagnética, su velocidad de propagación en el medio atómico se ve fuertemente reducida y puede llegar a ser de algunos órdenes de magnitud por debajo de la velocidad de la luz en el vacío.

Se empieza por definir el campo eléctrico del pulso y la polarización del medio

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}(z, t) e^{i[k_0 z - \omega_0 t + \phi(z, t)]} + c.c. \right\}$$

$$P_x(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ [U(z, t) + iV(z, t)] e^{i[k_0 z - \omega_0 t + \phi(z, t)]} + c.c. \right\}$$

donde ahora  $\phi(z, t)$  es una fase compleja.  $\mathcal{E}$ ,  $U$  y  $V$  son funciones reales.  $U$  y  $V$  son la dispersión y la absorción de la polarización, respectivamente.

Si se sustituyen las expresiones anteriores en la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

se obtiene a primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} V$$

$$\mathcal{E} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} U$$

Ahora se necesita relacionar la polarización del medio con el campo eléctrico. Hay que recordar las expresiones para la evolución temporal de los elementos de matriz de densidad  $\rho_{21}$  y  $\Delta$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2i\mu E}{\hbar} (\rho_{21} - \rho_{12})$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\omega \rho_{21} + i \frac{\mu E}{\hbar} \Delta$$

Ahora, tanto  $\rho_{21}$  como  $\Delta$  son funciones de  $z$ ,  $t$  y  $\Delta\omega$  donde  $\Delta\omega$  es  $\omega - \nu$ . Como siempre,  $\omega$  es la frecuencia de resonancia de los átomos y  $\nu$  la frecuencia del campo eléctrico. Si además, se supone que los átomos emiten en un rango de frecuencias  $\omega = \nu + \Delta\omega$ , se puede escribir para  $U$  y  $\Delta$

$$U(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

$$V(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

donde  $g(\Delta\omega)$  es la función de perfil espectral (normalizada) de una transición inhomogénea. También se tiene, si se recuerda la expresión para la polarización macroscópica del medio del capítulo anterior, que

$$P(\Delta\omega, z, t) = N\mu[\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \rho_{12}(\Delta\omega, z, t)]$$

$$P(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

e igualando, se obtiene para  $\rho_{21}$

$$\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) = \frac{1}{2N\mu} [u(\Delta\omega, z, t) + iv(\Delta\omega, z, t)] e^{i(kz - \omega_0 t + \phi)}$$

Substituyendo en la ecuación de evolución temporal y separando partes real e imaginaria, se tiene el conjunto de ecuaciones acopladas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu \varepsilon(z, t)}{\hbar} v$$

donde ahora

$$w(\Delta\omega, z, t) \equiv N\mu[\rho_{11}(\Delta\omega, z, t) - \rho_{22}(\Delta\omega, z, t)]$$

es la diferencia de poblaciones (multiplicada por  $\mu$ ) por unidad de volumen por unidad de  $\Delta\omega$ . la evolución de  $w$  se obtiene de sustituir la expresión nueva para el campo eléctrico y  $\rho_{21}$  en la ecuación de evolución temporal para la diferencia de poblaciones, da

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon(z, t) w$$

Recolectando las ecuaciones que hasta ahora se han obtenido, se tiene que el sistema consta de cinco ecuaciones acopladas y son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu \varepsilon(z, t)}{\hbar} v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon(z, t) w$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

Si se desean incorporar las vidas medias de los estados y el tiempo de relajamiento espín-espín (Bloemberg and Pound, 1954) (Fehér et al., 1958), se puede hacer de la forma siguiente

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \left( \Delta \omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{u}{T_2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \Delta \omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu \varepsilon(z, t)}{h} w - \frac{v}{T_2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{h} \varepsilon(z, t) v - \frac{w - w_0}{\tau}$$

Suponiendo además, que  $\phi$  es una función par y que la duración del pulso es corta a comparación de  $\tau$  y  $T_2$ , con lo que se simplifican las ecuaciones

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta \omega v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta \omega u + \frac{\mu \varepsilon}{h} w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu \varepsilon}{h} v$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{u}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_0 c}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta \omega, z, t) g(\Delta \omega) d(\Delta \omega)$$

que se pueden expresar también de forma vectorial (Feynman et al., 1957)

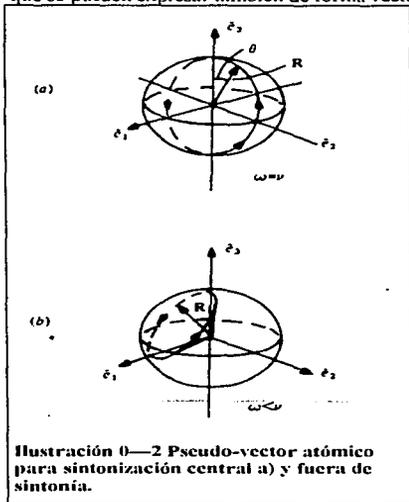


Ilustración 0—2 Pseudo-vector atómico para sintonización central a) y fuera de sintonía.

si

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{T} \times \vec{r}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{N\mu} (\mu \hat{u} + v \hat{v} + w \hat{w})$$

$$\vec{T} = -\left(\frac{\mu \varepsilon}{h}\right) \hat{u} - (\Delta \omega) \hat{w}$$

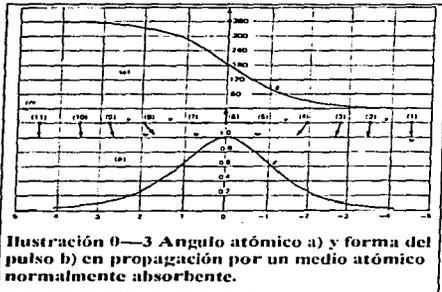
emulando la precesión de un pseudovector  $\vec{r}$  en torno a otro llamado  $\vec{T}$  como en la Ilustración 0—1. Las soluciones de las ecuaciones de movimiento son, entonces,

$$u(\Delta\omega, z, t) = 2N\mu \frac{(\Delta\omega)\tau_n}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau_n^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_n} \right)$$

$$v(\Delta\omega, z, t) = -2N\mu \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau_n^2} \tanh \left( \frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_n} \right) \operatorname{sech} \left( \frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_n} \right)$$

$$w(\Delta\omega, z, t) = N\mu - 2N\mu \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau_n^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_n} \right)$$

$$e(\Delta\omega, z, t) = \frac{2\hbar}{\mu\tau_n} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t - \frac{z}{v}}{\tau_n} \right)$$



donde ahora  $\tau_n$  es el ancho del pulso y es arbitrario, pero menor que la vida media de los estados y que el tiempo de relajamiento espín-espín (Ilustración 0—3).

### Teoremas del área del pulso

Se retoma ahora una expresión que se estudió en el capítulo 3 en relación con la interacción de un sistema atómico con radiación electromagnética. Se tiene que la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado superior debido a una transición absorbente es

$$|C_2(t)|^2 = 1 - \left( \frac{\varphi E_0}{2\hbar} \right)^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}^2 \left( \frac{\mu t}{2} \right)}{\frac{\mu}{2}} \right]$$

donde  $\mu$  es la frecuencia de oscilación de Rabi que

se calculó. Si se hacen las suposiciones físicas relevantes, es decir,  $\gamma_a$  y  $\gamma_b$  iguales a cero y  $\omega = \nu$  (resonancia), se tiene que la probabilidad queda descrita por

$$|C_2(t)|^2 = \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi E_0 t}{2\hbar} \right)$$

Si se desea que esta probabilidad sea igual a uno, se puede poner el argumento del seno igual a  $\frac{\pi}{2}$ , lo que arroja un valor para  $t$  igual a

$$\frac{\varphi E_0 t}{2\hbar} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi\hbar}{\varphi E_0} \equiv \tau_\pi$$

En este momento se puede definir un pulso- $\pi$  como aquella función temporal del campo eléctrico, cuya anchura es menor o igual a  $t$  y cuyo valor de  $\varphi E_0$ , multiplicados entre sí, arrojan un valor igual a  $\pi$ . Dicho de otra forma, se trata de un pulso que lleva a un sistema atómico de dos niveles, de un nivel al otro.

En la representación vectorial, un pulso así rota el vector  $\vec{F}$   $180^\circ$  de su posición inicial. Para tratar pulsos más complejos y ángulos de rotación en general, se define una cantidad que de aquí en adelante se denominará "área del pulso"

$$\mathcal{Q}(z) = \frac{\omega}{h} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) dt$$

Para un pulso cuadrado de duración  $\tau_p$  y amplitud  $E_0$ , la expresión anterior se reduce al ya conocido

$$\text{valor } \frac{\omega E_0 \tau_p}{h}$$

Ahora se analiza el área para pulsos propagándose en medios cuyas vidas medias atómicas exceden por mucho la duración del pulso. En contraste con la situación encontrada en óptica clásica, el área del pulso se desarrolla según un teorema propuesto por McCall y Hahn (1970), que predice que algunos pulsos se propagan a través de medios absorbentes a velocidades reducidas sin cambiar de forma. Dicho teorema es consecuencia de la coherencia entre estados atómicos. En óptica clásica lineal, el área obedece la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Q}(z) = -\frac{1}{2} |\alpha| \mathcal{Q}(z)$$

donde el coeficiente de ganancia  $\alpha$  es negativo, porque el medio es absorbente. Esta expresión es análoga a la ley de Beer, conocida para los astrónomos, que expresa el hecho de que una onda luminosa que atraviesa un medio absorbente, observa un decaimiento exponencial con la distancia

$$\mathcal{Q}(z) \approx e^{-|\alpha|z}$$

McCall y Hahn descubrieron que para pulsos muy energéticos que inciden en un sistema atómico de dos niveles, pueden llevar a éste a oscilar en regímenes no lineales, adquiriendo el área la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Q}(z) = \frac{1}{2} \alpha \text{sen}[\mathcal{Q}(z)]$$

para  $\mathcal{Q}$  pequeña y  $\alpha$  negativa, esta expresión se reduce a la clásica. Si se reescribe la ecuación anterior como

$$\frac{d\mathcal{Q}(z)}{\text{sen} \mathcal{Q}(z)} = \frac{1}{2} \alpha dz$$

se puede integrar de 0 a  $z$  y de  $\theta_0$  a  $\theta$ , obteniendo así

$$\frac{1}{2} \alpha z = \ln \left[ \frac{\tan\left(\frac{\mathcal{Q}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\mathcal{Q}_0}{2}\right)} \right]$$

Así se nota, que el pulso tiene impuestos ciertos límites

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(z) = \begin{cases} 2n\pi \\ (2n+1)\pi \end{cases}$$

McCall y Hahn modelaron este efecto mediante un arreglo de péndulos y una pelota. Si la pelota se lanza a dicho arreglo con una velocidad lo suficientemente baja para deflectar únicamente los péndulos, ésta perdería energía conforme avanzara a través de éstos. Sin embargo, si se lanza la pelota con suficiente energía para hacer girar el primer péndulo  $360^\circ$ , éste le devuelve a la pelota el ímpetu que le impartió, provocando solamente un retraso en su avance. Así, cada péndulo absorbe una parte del impulso de la pelota, pero lo devuelve una vez finalizado su giro. De esta forma, el área del pulso se mantiene  $2\pi$  conforme se propaga. Este fenómeno se denomina "transparencia autoinducida", un excelente ejemplo de una interacción coherente, no lineal, entre un sistema atómico y el campo electromagnético.

Ahora la pregunta es: ¿cómo ven otros átomos, no resonantes, la generación de dicho pulso? McCall y Hahn demostraron, que la forma de pulso para cualquier velocidad retardada puede inducir transparencia para todas las frecuencias, mientras satisface al mismo tiempo las ecuaciones de Maxwell. De hecho, la diferencia de poblaciones (componente  $r_3$  de  $\vec{r}$ ) observa una dependencia temporal del tipo

$$w \equiv r_3(t) = -1 + \left( \frac{2}{1 + (\omega - \nu)^2 \tau_x^2} \right) \sec \theta^2 \left( \frac{t}{\tau_x} \right)$$

Si se gráfica esta función para distintos valores de la desintonización  $\omega - \nu$ , se puede observar que los átomos regresan a su estado básico, no importando el valor de la desintonización.

### Eco fotónico

Un fenómeno experimental relacionado con la generación de pulsos en medios normalmente absorbentes es el "eco fotónico". Se escogió bautizarlo de esa forma debido a su naturaleza espontánea, tal como la de un eco acústico (Hahn, 1950) (Kurnit et al., 1964) (Brewer and Shoemaker, 1971).

Para generar un pulso coherente, es preciso que el pseudo-vector atómico realice una precesión completa de  $2\pi$  alrededor del pseudo-vector  $T$ , que representa las características del campo electromagnético.

Supóngase que se suministra inicialmente un pulso que hace girar al vector atómico, en vez de  $\pi$ , tan sólo

$\frac{\pi}{2}$ . Con ésto se establece un estado de coherencia entre los dos niveles atómicos, pero además se establece una dirección de precesión del pseudo-vector atómico

$$\psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle e^{i\omega_1 \tau_x} + |2\rangle e^{i\omega_2 \tau_x})$$

Si, antes de que decaiga la coherencia entre estados, se inyecta un pulso  $\pi$  con un intervalo después del primero, denominado  $\tau_x$ , éste es absorbido por el sistema atómico, pero se intercambian las probabilidades atómicas de encontrarse en el estado superior e inferior

$$\psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle e^{i\omega_2 \tau_x} + |2\rangle e^{i\omega_1 \tau_x})$$

Si se deja al sistema atómico en este estado de excitación, después de un periodo de espera igual a la separación entre los dos pulsos excitadores  $\tau'$ , el sistema atómico adquiere un valor de polarización

$$\langle er \rangle = \int d\omega W(\omega) \int d^3r |\psi(r, \tau_x + \tau')|^2 er = \frac{1}{2} \int d\omega W(\omega) e^{-i\omega(\tau' - \tau_x)} + c. c.$$

donde  $W(\omega)$  representa la distribución inhomogénea de frecuencias en el medio. Si, por sencillez, se escoge una distribución gaussiana y se integra

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}}$$

se obtiene para la polarización la expresión

$$\langle er \rangle = \zeta e^{-(\tau' - \tau_x)^2 (\Delta\omega)^2} \cos \omega_0 t$$

Esto demuestra, que la polarización del medio evoluciona dando lugar a la formación de una polarización neta en un intervalo igual a la separación entre los pulsos excitadores. Además, el segundo pulso resta (en las exponenciales) la evolución temporal entre  $t=0$  y  $\tau_x$  con el resultado de que los átomos vuelven a su estado inicial.

Tratando de visualizar este proceso mediante el formalismo vectorial que se acaba de introducir en este capítulo, antes de la primera perturbación mediante el primer pulso,  $\vec{r}$  apunta en dirección  $-\hat{r}_3$ . Después

del pulso  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{r}$  apunta en dirección de  $\hat{r}_2$ . Es decir, completó un giro de  $90^\circ$ , encontrándose ahora en

el plano tensado por  $\hat{r}_1$  y  $\hat{r}_2$ . Ahora se deja evolucionar el sistema en este plano por un tiempo que ya

hemos denominado  $\tau_x$ . En este tiempo, y debido a que tenemos un medio inhomogéneamente ensanchado, el vector  $\vec{P}$  se despliega debido a sus diferentes frecuencias de oscilación de Rabi, precesando unos más rápido que otros y abriéndose como abanico. En  $t = \tau_x$  entra el pulso de  $180^\circ$ , el cual produce una rotación del plano  $\nu_1 - \nu_2$  en torno a  $\nu_1$ , mientras los vectores siguen girando, pero ahora en sentido opuesto hasta que se vuelvan a encontrar en  $\nu_2$ , que es precisamente de donde partieron, y ésto en el mismo tiempo que se dejó evolucionar el sistema hasta que llegó el segundo pulso. Así, en el tiempo  $t = 2\tau_x$ , todos los vectores  $\vec{P}$  coinciden simultáneamente en el mismo punto, donde interfieren coherentemente produciendo el eco fotónico.

## LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

### Introducción

La discusión de líneas de transmisión en la teoría del láser es de fundamental importancia, sobre todo al discutir problemas de tipo tecnológico en láseres pulsados.

Si se desea obtener un pulso coherente en un medio gaseoso, es preciso bombear al sistema de átomos de forma eficiente. Normalmente, el bombeo del gas se realiza por medio de un par de electrodos, los cuales forman parte de un circuito eléctrico pulsante. Una forma de generar un pulso eléctrico en un circuito se mostrará más adelante en el capítulo 5, en donde se discute el circuito llamado "Blumlein", bautizado según su inventor.

Para que el pulso producido se transmita de forma óptima desde la fuente hasta los electrodos en el tubo del láser es preciso hacer una guía para dicho pulso: una línea de transmisión. De hecho, el circuito eléctrico de alimentación para un láser se comportan de forma imprevista para producir la descarga, si se quiere emplear para generar un pulso, por ejemplo, al introducir una bujía en el circuito. Este circuito tendrá una cierta respuesta a las diferentes frecuencias que conforman el pulso de descarga, que son por lo general no pocas.

En el presente capítulo se repasan las bases de la teoría de líneas de transmisión y se hace una revisión de las consideraciones prácticas para el diseño de una línea de transmisión en el espacio frecuencial.

### Postulados del Análisis de Circuitos

El análisis de circuitos de líneas de transmisión uniformes comenzó con William Thomson (Lord Kelvin) en 1855 y fue completado por Oliver Heaviside hasta 1885. A continuación se listan los postulados básicos que definen el tipo de sistema a considerarse:

El sistema uniforme (o línea uniforme) consta de dos conductores rectos y paralelos.

El adjetivo "uniforme" significa que las características eléctricas, dimensiones y geometría de la línea y del medio que la rodea permanecen constantes a lo largo de la extensión de la línea. En general, torsiones, dobladuras, etc., violan el postulado. Los efectos de estas deformaciones pueden ser despreciables, si una torsión o un doblez no exceden alrededor de un grado en una longitud de línea comparado con la separación entre conductores.

Las corrientes en la línea fluyen solamente a lo largo de la línea. Esto significa que la teoría de líneas de transmisión no reconoce la existencia de modos de guías de onda, ya que en ellas la corriente eléctrica fluye alrededor de los tubos, confinando así los campos electromagnéticos en su interior.

En cualquier punto de intersección de la línea con un plano imaginario, se tiene un valor único para la diferencia de potencial entre los conductores en un instante dado, y es igual a la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de todas las trayectorias en el plano intersección.

El comportamiento eléctrico de la línea queda totalmente descrito por cuatro coeficientes eléctricos distribuidos en el circuito, cuyos valores por unidad de longitud son constantes en todo punto de la línea.

Estos coeficientes eléctricos de la línea son: resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia (pérdidas) entre los conductores (R, L, C, G).

Es una parte esencial del último postulado, que los valores de los coeficientes distribuidos del circuito estén determinados unívocamente a una frecuencia dada, solamente por los tipos de materiales y dimensiones de los conductores y del medio que lo rodea. No deberán variar ni con el voltaje o la corriente. Así, la línea se comporta como una red pasiva.

Es posible hacer un análisis de las líneas de transmisión usando nada más las ecuaciones de Maxwell y buscando una solución de ellas sujetas a las condiciones de frontera impuestas por los conductores de la línea como una guía de ondas, mencionada en los postulados 2 y 4. Cualquier modo TM (transversal magnético) o TE (transversal eléctrico) puede propagarse por una línea de transmisión, si y sólo si la frecuencia de la onda está por encima de cierta frecuencia impuesta por las características de la línea (frecuencia de corte). Para líneas de transmisión cuyas separaciones entre conductores no exceden algunos centímetros, esta frecuencia de corte cae en el rango de miles hasta decenas de miles de megahertz. Comúnmente, a frecuencias desde d-c hasta uhf, es imposible que se propaguen modos TM o TE, sin embargo, cuando éstas se usan en frecuencias como microondas u ondas milimétricas, es posible que la línea se comporte como guía de ondas produciendo efectos indeseables y pérdidas excesivas en la línea.

No obstante, el análisis de líneas de transmisión por métodos de circuitos de coeficientes distribuidos no es independiente del análisis por métodos de campos, ya que el cálculo de los coeficientes del circuito se puede hacer con suficiente conocimiento de los campos electromagnéticos asociados con los voltajes y corrientes en los conductores de la línea. Sin embargo, el empleo del lenguaje de teoría de circuitos o de redes a la transmisión de señales electromagnéticas ahorra tediosos cálculos y reduce lo que podría ser un problema en tres dimensiones a uno de dos (1.V).

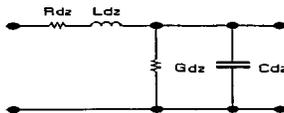
### **Líneas de Transmisión en el Dominio Temporal y de Frecuencias**

Ambas representaciones tienen como finalidad describir el voltaje y la corriente en la línea de transmisión en un instante y en un punto de la línea dado. Si se desea obtener la solución estacionaria de c.a. a una frecuencia dada, la representación de frecuencias es la forma conveniente de conseguirlo, pero en casos prácticos aparecen dificultades adicionales.

Estas complicaciones resultan del hecho de que la mayor parte de los fenómenos en líneas de transmisión poseen una banda de frecuencias finita y las impedancias características de la línea para cada frecuencia son diferentes. Esto produce que la señal se distorsione durante la transmisión. La naturaleza de la distorsión para este tipo de señal multi-frecuencial es tal que, las relaciones de fase y amplitud para cada una de las componentes de frecuencias de la señal varían entre la salida de la línea de transmisión y la señal original a la entrada.

### **Ecuaciones en el Dominio Temporal**

Las ecuaciones diferenciales para el dominio temporal para una línea de transmisión uniforme se obtienen enfocando la atención en un segmento infinitesimal  $\Delta z$  de la línea, localizado en la coordenada  $z$ , lejos de las terminaciones.



**Ilustración 0-1 Circuito equivalente de una LT**

En  $\Delta z$  se encuentran distribuidas las constantes eléctricas de los conductores que lo conforman, es decir, una resistencia en serie de magnitud  $R\Delta z$ , una inductancia en serie  $L\Delta z$ , una cierta capacitancia en paralelo entre ambos conductores  $C\Delta z$ , y una conductancia de pérdidas entre los conductores  $G\Delta z$ . El diagrama eléctrico es como el que se presenta en la Ilustración 0-1.

Del diagrama se concluye que el voltaje y la corriente de salida difieren del voltaje y corriente de entrada debido a los voltajes en serie a través de la resistencia y la inductancia de fuga, respectivamente. Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito se obtiene

$$v(z + \Delta z, t) - v(z) = \Delta v(z, t) = -R\Delta z i(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

$$i(z + \Delta z, t) - i(z) = \Delta i(z, t) = -G\Delta z v(z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Dividiendo entre  $\Delta z$  y permitiendo aproximar a cero, se tienen las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -Ri(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -Gv(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Estas ecuaciones son dos ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden con coeficientes constantes en las variables dependientes del voltaje y la corriente y las variables independientes  $z$  y  $t$ . La solución completa de estas ecuaciones es una expresión para el voltaje y la corriente como funciones de  $z$  y  $t$ , sujetas a las condiciones de frontera determinadas por la naturaleza de los dispositivos conectados a ambos lados de la línea, es decir, el generador de señal en  $z=0$  y la carga terminal en  $z=l$ . La forma usual de resolver este tipo de ecuaciones simultáneas es eliminando una de las variables y ésto se consigue tomando la derivada parcial de una de las variables con respecto a  $z$  y como las derivadas cruzadas pueden ser intercambiadas, obtenemos la ecuación diferencial parcial de segundo orden para una de las variables dependientes:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} - L \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \right)$$

Si se realiza en mismo procedimiento en la otra variable dependiente se obtiene una ecuación idéntica, es decir:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = -G \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} - C \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \right)$$

El hecho de que observen la misma ecuación diferencial, no significa que sean funciones idénticas en  $z$  y  $t$  para fines prácticos, ya que generalmente las condiciones de frontera no son las mismas para ambas variables.

La deducción de las ecuaciones anteriores no comprende ninguna suposición adicional o aproximaciones más allá de las indicadas por los postulados y son por eso descripciones completas de las relaciones entre voltaje y corriente y sus derivadas a lo largo de una línea de transmisión. No obstante, existen simplificaciones dependiendo del sistema que se esté considerando. Por ejemplo, el caso donde  $L=G=0$  representa una descripción adecuada para un cable de telégrafo submarino usado a bajas frecuencias para las así llamadas transmisiones telegráficas de corriente directa. Los coeficientes distribuidos de circuito  $R$  y  $C$  para este tipo de cable son con bastante precisión constantes en todos los aspectos que conciernen a las señales que transportan. El caso  $R=G=0$  describe una línea sin pérdidas. Todas las líneas tienen pérdidas, sin embargo, la ecuación así simplificada arroja información útil sobre las propiedades de líneas de transmisión de alta frecuencia a través de distancias cortas, tales como las que se usan para transmitir señales de televisión entre el transmisor y la antena o, el circuito láser que más adelante mostraremos.

### Ecuaciones en el Dominio de Frecuencias

Para encontrar las ecuaciones diferenciales en el comportamiento espectral de la línea de transmisión, se supone que tanto el voltaje como la corriente son funciones armónicas del tiempo con frecuencia  $\omega$ .

Substituyendo ésto en las relaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones de fasores:

$$V(z + \Delta z, t) - V(z) = \Delta V(z, t) = -R\Delta z I(z, t) - i\omega L\Delta z I(z, t)$$

$$I(z + \Delta z, t) - I(z) = \Delta I(z, t) = -G\Delta z V(z, t) - i\omega C\Delta z V(z, t)$$

Cada término de estas ecuaciones es un número complejo. El ángulo de fase de referencia cero para los números complejos es arbitrario cuando se expresan en forma polar. Una selección conveniente para esta referencia puede ser el fasor de la fuente de voltaje, o el fasor de voltaje en los extremos de la línea.

Dividiendo ambas ecuaciones entre  $\Delta z$  y permitiendo que se aproxime a cero se obtienen las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{dI'(z)}{dz} = -(R + i\omega L)I'(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + i\omega C')I'(z)$$

Estas no son ahora ecuaciones diferenciales parciales, porque  $V$  e  $I$  son funciones explícitas de la variable única  $z$ . La primera de las ecuaciones expresa que la tasa de cambio del factor de voltaje con la distancia es igual a la impedancia en serie de la línea por unidad de longitud multiplicada por el factor de corriente en el punto en consideración. La siguiente ecuación expresa que la tasa de cambio del factor de corriente con la distancia sobre la línea es igual a la admitancia por unidad de longitud de la línea multiplicada por el factor de voltaje en el punto de consideración. Como se está tratando con números complejos, cada uno lleva información sobre variaciones en magnitud y en fase. Desacoplándolas, al derivar una vez más con respecto a  $z$  se obtiene:

$$\frac{d^2 I'}{dz^2} - (R + i\omega L)(G + i\omega C')I' = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} - (R + i\omega L)(G + i\omega C')I = 0$$

Estas ecuaciones son de una forma mucho más elemental que las que se derivaron para el dominio temporal y se les conoce comúnmente como "ecuaciones telegráficas".

### **Soluciones de las Ecuaciones Telegráficas**

Las soluciones a las ecuaciones telegráficas antes expuestas constan de funciones armónicas en  $z$  y  $t$ , cuyos períodos y fases dependen de las condiciones a la frontera y de los parámetros de las ecuaciones diferenciales. La técnica matemática de la transformada de Fourier es una herramienta muy utilizada en la solución de ecuaciones de este tipo<sup>1</sup>.

En las ecuaciones telegráficas, tenemos que la solución a las ecuaciones que gobiernan las distribuciones de voltaje y corriente a lo largo de la línea son del tipo

<sup>1</sup> El mundo se enteró por primera vez de la existencia de esta técnica a través del matemático francés a quien debe su nombre, el barón Jean Baptiste Joseph Fourier. El interés del barón por entender los fenómenos de conducción del calor fue lo que lo llevó a descubrir la solución por transformadas armónicas. Se dice que su casa en Grenoble la mantenía calentada en su interior a una temperatura tan alta, que resultaba molesto y sus visitantes se quejaban a menudo. En 1798, Fourier se enlistó en la expedición que acompañó a Napoleón a Egipto.

Mientras Napoleón peleaba contra los sirios en Palestina, repelía a los turcos de Egipto y cazaba al jefe de los mamelucos, Murad Bey, los científicos franceses llevaban a cabo un ambicioso plan de investigación en campos como la geografía, la arqueología, la medicina, la agricultura e historia natural. Fourier fue entonces nombrado secretario de una corporación científica que llevaba el nombre de "El Instituto de Egipto". Desempeñó sus cargos administrativos con tal destreza, que mereció ser distinguido en varias ocasiones con tareas diplomáticas. Aún así, sus labores de investigación seguían en marcha. Poco antes de que los franceses fueran derrotados en Egipto en 1801, Fourier y otros colegas suyos zarparon rumbo a Francia, cuando en su trayecto su barco fue tomado por el almirante británico Sir Sidney Smith, quien decomisó la nave y todo su cargamento de reliquias y documentos egipcios antiguos. A los científicos, Smith los puso a salvo en tierra firme en Alejandría. Más adelante el comandante inglés viajó a París para devolver el material confiscado, exceptuando la piedra Rosetta, llave para descifrar los jeroglíficos egipcios, trabajo realizado por Champoléon, y que ahora está en el British Museum en Londres. De vuelta en Francia, Fourier continuó con sus investigaciones científicas y como profesor de análisis matemático en la escuela politécnica en París, pero en 1802 volvió a entrar en servicio con Napoleón como prefecto del departamento de Isère. Tratando de restaurar los daños sufridos durante la revolución de 1789, construyó la sección francesa del camino a Turín y drenó 80,000 kilómetros cuadrados de pantanos. Durante esta época derivó una ecuación que describía la conducción de calor en sólidos. Para 807, Fourier ya había inventado un método para resolver la ecuación: la transformada de Fourier.

$$V(z) = I_1' e^{-\gamma z} + I_2' e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = I_1 e^{-\gamma z} + I_2 e^{+\gamma z}$$

Aquí  $V(z)$  e  $I(z)$  son el fasor de voltaje y de corriente en cualquier punto  $z$  de la línea respectivamente.  $I_1', I_2' \in I_1, I_2$  son números complejos.  $\gamma$  queda entonces definida como

$$\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$$

Definiendo la parte real e imaginaria de  $\gamma$ , se reescribe ésta como

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

entonces los voltajes instantáneos vienen dados por:

$$v(z, t) = |I_1'| e^{-i\omega t} \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t - \beta z + \xi_1)}\} + |I_2'| e^{-i\omega t} \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t - \beta z + \xi_2)}\}$$

donde  $|I_1'|$  y  $|I_2'|$  son las amplitudes pico de los coeficientes  $I_1'$  y  $I_2'$ ,  $\beta$  el número de onda,  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son las fases de  $I_1'$  y  $I_2'$ , respectivamente.

El significado físico de las ecuaciones anteriores gira en torno al concepto de propagación de ondas. Si se analiza el fasor de  $V_1'$  en la solución  $v(z, t)$ , se tiene que el voltaje pico en  $z=0$  varía con frecuencia  $\frac{\omega}{2\pi}$  y que el valor instantáneo máximo ocurre cuando  $(\omega t + \xi_1) = n\pi$ , con  $n=0, 1, 2, \dots$ . Se tiene también que la amplitud decae conforme se avanza en dirección  $+z$  con una tasa de decaimiento  $\alpha$ . Las ondas de voltaje viajan a través de la línea formando patrones espaciales ordenados a lo largo de su longitud. Esto queda descrito por el número de onda  $\beta$  y la velocidad de propagación de los frentes de onda es  $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ .

### Características de Frecuencia de una Línea de Transmisión

Una LT es un sistema eléctrico cuyas características eléctricas se representan mediante el circuito equivalente que se muestra en la Ilustración 0-1, donde  $R$  es la resistencia neta del conductor eléctrico,  $L$ , su inductancia,  $C$ , la capacitancia en paralelo y  $G$ , la conductancia de fuga entre los conductores que conforman a la LT. Un circuito de este tipo se conoce como un circuito resonante y la corriente y el voltaje se comportan, según las leyes de Kirchoff, como

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GV - C \frac{\partial V}{\partial t}$$

donde tanto la corriente como el voltaje son funciones de la posición sobre la LT y del tiempo. Se representa el comportamiento temporal de dichas variables haciendo el cambio de variables a variables complejas del parámetro  $s$ , el cual va a contener toda la información temporal del sistema, y obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(R + sL)I$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(G + sC)V$$

Eliminando  $I(z)$  o  $V(z)$  de las ecuaciones anteriores diferenciando de forma cruzada respecto a  $z$  y substituyendo, se obtiene

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + (R + sL)(G + sC)V = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + (R + sL)(G + sC)I = 0$$

ecuación diferencial de segundo orden en  $z$ , conocidas también como "ecuaciones telegráficas". Particularmente, se tiene en este caso la transformada de Laplace de la ecuación en el tiempo. Las soluciones a dicha ecuación vienen dadas por funciones periódicas del tipo

$$I'(z) = V_0' e^{-\gamma z} + I_0' e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = Y_0 (I_0' e^{-\gamma z} + I_0' e^{+\gamma z})$$

donde

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R + sL)(G + sC)}$$

$$Y_0 = \frac{\bar{\gamma}}{R + sL} = \sqrt{\frac{G + sC}{R + sL}}$$

Las igualdades anteriores representan las frecuencias complejas y la admitancia, también compleja, del sistema. La impedancia compleja del sistema queda descrita por

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0}$$

Se supone que en  $z=0$  el voltaje debe permanecer  $=0$  para todo tiempo, se tiene que las condiciones a la frontera se reducen a

$$V(0) = 0 \rightarrow V_0' = V_0''$$

y por lo tanto las soluciones adquieren las expresiones

$$V(z) = -2V_0' \sinh \bar{\gamma} z$$

$$I(z) = 2V_0' Y_0 \sinh \bar{\gamma} z$$

En el extremo opuesto de la línea,  $z=l$ , se requiere que la relación entre corriente y voltaje obedezca

$$V(l) = Z_R I(l)$$

con lo que se determinan las características de acoplamiento

$$Z_R = -Z_0 \tanh \bar{\gamma} l$$

$$Y_R = -Y_0 \coth \bar{\gamma} l$$

Supóngase, entonces, que los extremos de la LT se encuentran corto-circuitados, con lo que la condición para oscilaciones libres debe adquirir la forma

$$Z_0 \tanh \bar{\gamma} l = 0$$

Esta ecuación tiene una infinidad de soluciones, pero pueden expresarse mediante dos igualdades:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}}$$

Esto es, se tiene una oscilación fundamental dada por

$$s_0 = \frac{R}{L}$$

y un conjunto de oscilaciones superiores, dadas por

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R + sL)(G + sC)} = +i \frac{m\pi}{l}$$

frecuencias que resultan de resolver el binomio característico

$$s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)s + \left[\frac{RG}{LC} + \left(\frac{m\pi}{l\sqrt{LC}}\right)^2\right] = 0$$

Se observa, entonces, que las soluciones a las ecuaciones telegráficas adquieren la forma

$$s_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)\right]^2 - \left(\frac{m\pi}{l\sqrt{LC}}\right)^2}$$

y representan una corriente circulante, independiente de la posición, y que decae exponencialmente con el tiempo. El decaimiento exponencial varía en magnitud y se debe a que el radical no siempre es positivo, con lo que algunas de las oscilaciones se ven reforzadas. Dependiendo, entonces, del valor del radical, las frecuencias naturales de LT se subdividen en las siguientes tres clases:

$$m \leq \frac{T}{2\pi} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)$$

$$m \geq \frac{T}{2\pi} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$$

$$s_m = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm i \frac{m\pi}{T}$$

donde

$$T = \sqrt{LC}$$

Con esto se tiene que la LT es un sistema *selectivo*, hecho que se deriva de analizar los tiempos de decaimiento de una señal eléctrica con las condiciones a la frontera correspondientes. Dicha selectividad permite el acoplamiento óptimo entre un emisor y un receptor, siempre y cuando exista *acoplamiento* a través de la LT. Este acoplamiento no es más que un término que se refiere al grado de acoplamiento entre dos elementos vía una LT.

### Algunas Consideraciones Energéticas

En particular, interesa definir de forma positiva el acoplamiento que se genera entre dos elementos que se encuentran conectados mediante una LT y que intercambian información a través de ella. El intercambio de información se realiza mediante corrientes y voltajes transformados y generados en los elementos extremos de la LT. Supóngase, entonces, que en un extremo de la LT se tiene un "emisor" de ondas, cualquiera que sea su naturaleza, el cuál tiene una impedancia característica  $Z_e$ . En la dirección de la LT, que en adelante se considera paralela al eje de las  $z$ , se propaga la onda de corriente y voltaje hasta llegar al extremo opuesto de la LT, en donde se encuentra conectado un sistema "receptor" con impedancia característica  $Z_r$ . Es de interés ahora analizar este sistema, para lo cuál se procede por partes.

En la primera etapa se analiza cuáles frecuencias son las que se van a propagar preferencialmente por la LT, es decir, el ancho de banda de las frecuencias del emisor que van a ser admitidas o amortiguadas en la LT. Para ello considérese el circuito equivalente siguiente:

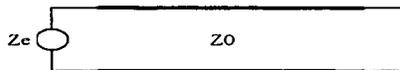


Ilustración 0-2 LT en cortocircuito

Como se puede apreciar, se considera un emisor con impedancia característica  $Z_e$ , acoplado a una LT ideal, cuyo extremo opuesto en  $z=L$  está en corto circuito o abierto, según si el tratamiento se hace en corriente o en voltaje. Haciendo lo propio, se encuentra que la respuesta de frecuencias tiene la expresión funcional

$$I = \frac{E_0}{Z'_e + Z_0}$$

donde,

$$Z'_e = \sqrt{\frac{L_e}{C_e}}$$

es la impedancia del emisor, y que para una línea de transmisión no ideal, se puede generalizar a

$$Z_e = Z'_e + Z_{11}$$

Ahora, teniendo la expresión anterior, es fácil encontrar la relación existente entre la LT y el receptor, si suponemos que el emisor es parte de la LT al incluir  $Z_e$  a la impedancia total de la línea:

$$Z_T = Z_e + Z_r$$

Como se puede ver, ambas expresiones presentan comportamientos similares, como era de esperarse, pero sus frecuencias naturales varían según el valor particular de la impedancia. De hecho, el tratamiento anterior es idéntico al que se hizo para describir las oscilaciones naturales de la LT, pero en el caso presente se tiene una impedancia total del sistema compuesta por la de la LT más la del sistema emisor o receptor. Se puede extender la formulación anterior en términos de energía en  $Z$  para los valores complejos de  $s$ . Ahora, en cambio, el análisis se hará en términos de campos, en lugar de circuitos, a la manera del teorema de Poynting.

De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell para una región espacial libre de fuentes, se tiene

$$\nabla \times \vec{E} = -s\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + s\varepsilon)\vec{E}$$

Tómese ahora la expresión

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) &= \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}^* - \vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} = \\ &= \sigma \|\vec{E}\|^2 + \Omega (\mu \|\vec{H}\|^2 + \varepsilon \|\vec{E}\|^2) + i\omega (\mu \|\vec{H}\|^2 - \varepsilon \|\vec{E}\|^2) \end{aligned}$$

c integrando sobre un volumen simple conexo  $V$ , limitado por la superficie  $S$  con vector normal  $\hat{n}$ , se obtiene la relación

$$-\int_S \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\alpha = F_0 + sT_0 + s^*V_0$$

y haciendo el cambio de variable

$$V_0'(s) = ss^*V_0(s) \geq 0$$

se reescribe la ecuación anterior como

$$-\int_S \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\alpha = F_0 + sT_0 + \frac{V_0'}{s}$$

donde

$$F_0 = \int_V \sigma \|\vec{E}\|^2 dv \geq 0$$

$$T_0 = \int_V \mu \|\vec{H}\|^2 dv \geq 0$$

$$V_0 = \int_V \varepsilon \|\vec{E}\|^2 dv \geq 0$$

$$s = \Omega + i\omega$$

Cuando  $s = i\omega$ , las funciones  $F_0, T_0, V_0$  son reales y positivas, pudiendo interpretarse como

$$[F_0(s)]_{s=i\omega} = 2\langle P_d \rangle$$

$$[T_0(s)]_{s=i\omega} = 4\langle W_m \rangle$$

$$[V_0(s)]_{s=i\omega} = 4\langle W_e \rangle$$

Ahora, supóngase que se tiene que dicha región espacial se encuentra envuelta en un material conductor ideal, de tal forma que  $\hat{n} \times \vec{E} = \hat{n} \times \vec{H} = 0$ , pero se permite el introducir un par de cables sobre los cuáles se puedan medir una corriente y un voltaje asociados. Entonces,

$$-\int_s \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\alpha = VI^* = |I|^2 Z = |V|^2 Y^*$$

es decir,

$$Z(s) = r_0 + l_0 s + \frac{s_0}{s}$$

$$Y(s) = g_0 + c_0 s + \frac{T_0}{s}$$

donde

$$r_0(s) = \frac{F_0}{|I|^2}$$

$$l_0(s) = \frac{T_0}{|I|^2}$$

$$s_0(s) = \frac{V_0'}{|I|^2}$$

y

$$g_0(s) = \frac{F_0'}{|V|^2}$$

$$r_0(s) = \frac{T_0'}{|V|^2}$$

$$c_0(s) = \frac{V_0}{|V|^2}$$

$$T_0'(s) = ss^* T_0(s) \geq 0$$

El interés se centra en las frecuencias naturales complejas de estos circuitos, las cuáles, a su vez, están asociadas con las partes real e imaginaria del sistema compuesto a través de

$$\Omega_0 = \frac{R_e + Z_0}{2L_e}, \Omega_0' = \frac{G_e' + Y_0}{2C_e'}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_e C_e}}, \omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L_e' C_e'}}$$

Se definen los anchos de banda para las Q's perturbadas, donde las Q's denotan el factor de calidad o definición de las resonancias del sistema

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Omega_0}$$

que para el sistema perturbado se modifica como

$$Q_L = \frac{\omega_0 L_e}{R_e + Z_0}, Q_L' = \frac{\omega_0' C_e'}{G_e' + Y_0}$$

Se observa así, que el conectar un sistema disipativo en uno de los extremos de la LT tiene como consecuencia un cambio en las frecuencias características del sistema. Las amplitudes de las oscilaciones no aparecen en ninguno de los resultados, ya que el grado de excitación en ausencia de fuentes puede ser elegido de forma arbitraria, por ejemplo, a través de algunas condiciones iniciales en el pasado. En presencia de fuentes o emisores, las amplitudes quedan preestablecidas unívocamente.

En particular, se tiene que la impedancia de la terminación de la LT determina la razón de la amplitud compleja que se propaga en dirección (+) respecto a la que se propaga en dirección (-). A esta razón se la llama "coeficiente de reflexión" y se define como:

$$K_R = \frac{V_-}{V_+}$$

Si se supone que en un punto fijo de la LT el voltaje y la corriente están descritos por las ecuaciones ( ), entonces la impedancia total del sistema LT + terminación queda descrito por

$$Z_T = \frac{V_R}{I_R} = Z_0 \frac{V_+ e^{-\beta l} + V_- e^{\beta l}}{V_+ e^{-\beta l} - V_- e^{\beta l}}$$

que en términos del coeficiente de reflexión queda como

$$Z_T = Z_0 \frac{1 + K_R}{1 - K_R}$$

De esta expresión se despeja el coeficiente de reflexión y se obtiene.

$$K_R = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0}$$

El significado físico de la expresión anterior es clara: una onda de voltaje que se propaga por la LT, al encontrar la terminación, no cumple enteramente con las condiciones de frontera ideales con una carga, por lo que dicha carga genera una onda reflejada en la LT. Dada la impedancia característica de la línea, la impedancia de la carga no fija unívocamente los valores para las amplitudes incidentes y reflejada, sino su razón  $V_-/V_+$ . Por eso, en vez de pensar en una terminación como una impedancia adicional, se puede considerar como un "reflector", caracterizado por un número complejo que lleva la información sobre la amplitud de onda reflejada por unidad de amplitud de onda incidente en él. El coeficiente involucrado se llama "de reflexión" y tiene la siguiente expresión:

$$K_R = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$

donde  $Z_0$  es la impedancia característica de la línea y  $Z_R$  la impedancia del reflector. La impedancia, que caracteriza al reflector en particular, depende de su "estado" inicial, ya que después de interactuar con la LT, termina en otro estado diferente del inicial. Es aquí en donde se llega al punto de tener que caracterizar el reflector como elemento de la LT, de forma que se puede encontrar el "acoplamiento", de la que ya se ha hecho mención.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

## REPRESENTACIÓN DEL MEDIO ACTIVO LÁSER COMO LÍNEA DE TRANSMISIÓN

El comportamiento y la eficiencia de un láser, constituido por una cavidad óptica estable ( $Q=\text{cte.}$ ) y un medio activo conocido, están subordinados a las características de la fuente de bombeo. En muchas aplicaciones se requieren pulsos ópticos de muy corta duración y alta razón de repetición. Los pulsos eléctricos que proporcionan el bombeo se propagan en una línea de transmisión acoplada a un láser. En este trabajo se estudian los parámetros fundamentales que intervienen en el acoplamiento línea de transmisión - láser.

### Introducción

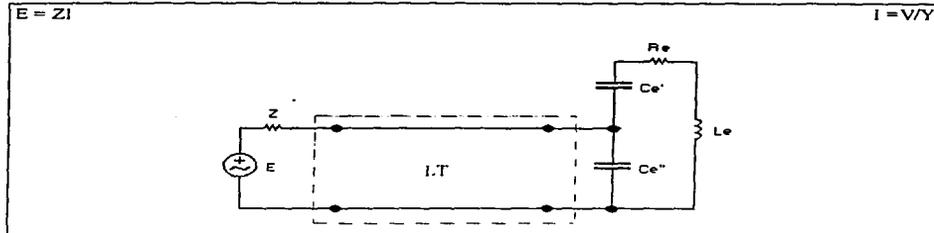
La finalidad de este capítulo es proporcionar un modelo eléctrico sencillo para el acoplamiento óptimo entre una línea de transmisión eléctrica (LT) y, en principio, cualquier tipo de láser pulsado o continuo, siempre y cuando se tomen en consideración los parámetros fundamentales que a continuación se analizarán. Principalmente se argumenta el porqué se justifica el incluir a un láser como parte de un sistema eléctrico y qué papel juega en él. La primera parte revisa los principios del acoplamiento entre líneas de transmisión y circuitos resonantes. En la segunda parte se incluye el circuito 'Blumlein' en el circuito eléctrico constante de sistema eléctrico de bombeo - línea de transmisión - circuito resonante (SEB - LT - CR). La tercera parte revisa las características de frecuencia de un medio atómico gaseoso en presencia de una perturbación armónica y establece la impedancia eléctrica del medio atómico activo. La cuarta parte se encarga de incluir la respuesta pulsada del medio atómico al bombeo eléctrico particular. En la quinta y última parte se pretende generalizar los resultados anteriores con especial énfasis en la estabilidad del sistema y se concluye después de ello.

### Bombeo Eléctrico Activo

El uso de conductores metálicos comerciales, y de preferencia baratos, imponen límites naturales en cuanto a carga y frecuencia. Algo de trabajo de laboratorio es todavía necesario. No obstante, la posibilidad de predicción de los resultados se facilita gracias a la naturaleza aplicada de la teoría en que se basa. Ahora se revisan algunos casos concretos sobre la forma espectral particular de ciertos circuitos resonantes, donde el comportamiento de uno de sus elementos es otro elemento resonante. Es decir, se considera el caso de acoplamiento entre un sistema resonante con otro, vía una LT arbitraria. En el caso particular se trata de un sistema eléctrico de bombeo (SEB) acoplado a un circuito resonante (CR) por medio de una línea de transmisión (LT) eléctrica de constantes distribuidas (SEB-LT-CR). La primera pregunta que deberá hacerse es respecto a qué modelo eléctrico debe considerarse para poder plantear un análisis cuantitativo.

Existe en la literatura reciente, y también en la no tan reciente, dos enfoques que, desde la perspectiva particular del presente trabajo, se contraponen. Una, la no tan reciente, considera a los circuitos de bombeo como líneas de transmisión, e inclusive, sustituye a las placas metálicas de muchos circuitos convencionales por cables coaxiales. Otra, en cambio y la no tan reciente, ve a los circuitos de bombeo como sistemas de transferencia de carga entre condensadores dispuestos de forma particular en un circuito sencillo. El balance de cargas inductivas y capacitivas permite entonces transferir la mayor parte de la carga de un condensador a otro a través de la ionización del medio activo láser. Cada anillo que compone el circuito es un circuito resonante de baja resistencia neta y los parámetros a modificar son básicamente las capacitancias e inductancias de cada uno. En el peor de los casos, se incluye en el diagrama eléctrico del circuito una figura eléctricamente indefinida que pretende diagramar la ubicación de la cavidad láser en el circuito, mas no se conocen sus propiedades de resistencia, capacitancia e inductancia, o mejor dicho, su impedancia.

Como ya se vio en el capítulo 4 de este trabajo, el acoplamiento de una LT hacia un sistema resonante viene dada por su coeficiente de reflexión, ya que de no existir dicho acoplamiento, la energía se refleja hacia la LT al llegar al CR. Para que no se dé este caso, se necesita empatar las impedancias de los elementos terminales de la LT entre sí. Esto se lleva a cabo al acoplar las impedancias de dichos elementos mediante la LT, para lo cuál considérese el caso siguiente:

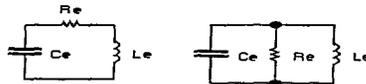


**Ilustración 0—1 SEB - LT - CR**

donde  $R_e$ ,  $L_e$  y  $C_e$  son los elementos del circuito resonante en serie, mismos que definen una frecuencia de resonancia

Así, si  $Z_c$ , es decir, la impedancia del circuito resonante, es igual a  $Z$  de la LT para una frecuencia  $\omega$  cercana a  $\omega_0$ , la potencia que se inyecta en el CR coincide con la inyectada en la LT y el valor de la corriente es el mismo. Lo mismo es válido para una resonancia en paralelo y la discusión anterior se puede rehacer en términos del voltaje.

Si las impedancias de los tres elementos es la misma, quiere decir que el sistema entero puede considerarse de forma global como un sistema resonante. El sistema resonante más sencillo se representa mediante el diagrama siguiente:



**Ilustración 0—2 Circuitos resonantes elementales (serie, paralelo)**

el primero en corriente y el segundo en voltaje. Si se quisiera integrar a este circuito el SEB y el CR o cavidad láser, podría con toda confianza descomponerse el gráfico de la forma siguiente:

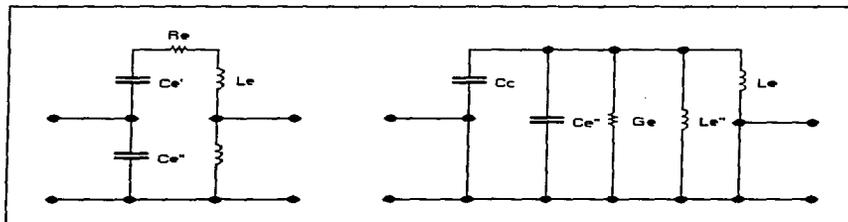


Ilustración 0—3 Elementos resonantes acoplados en serie y en paralelo

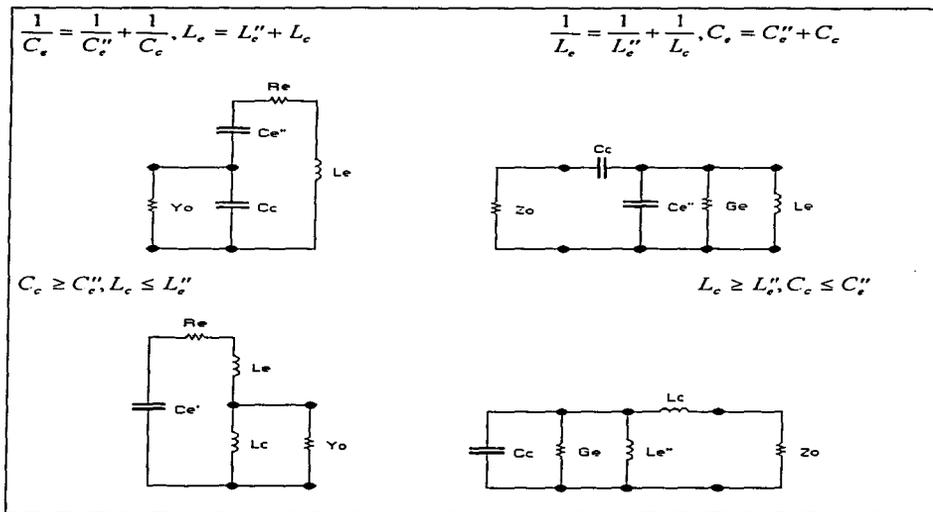
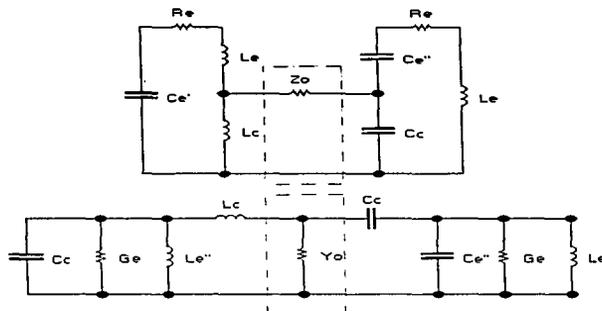


Ilustración 0—4 Acoplamientos capacitivo e inductivo en serie y en paralelo

Esta forma de descomponer los diagramas eléctricos permite manipularlos a favor, es decir, para conformar un sistema oscilante capaz de servir de fuente de alimentación para un láser. En vista de la identidad de impedancias de cada uno de los componentes, es posible generar cadenas de CR unidos por LT debidamente acoplados, donde tanto cada CR como el sistema entero poseen la misma impedancia de tal forma, que el sistema entero reacciona de forma idéntica, en el espacio de frecuencias, que cada uno de sus elementos constitutivos.

Esta forma de acoplar CR proporciona una forma aplicada de representar la coherencia entre estados resonantes de sistemas aislados. Dicho de otra manera, la LT es el vehículo mediante el cual se generan estados coherentes entre sistemas resonantes. Así, abusando de esta pequeña generalización se puede proponer la forma del circuito eléctrico que bombea a un láser de forma óptima. Para ello se toma al conjunto de diagramas anteriores, particularmente para el análisis del circuito 'Blumlein':

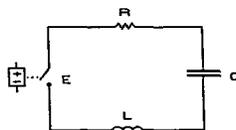


**Ilustración 0—5 Acoplamiento eléctrico entre circuitos resonantes**

Una vez conociendo los parámetros relevantes para el acoplamiento del SEB, de la LT y del CR particular, se pueden generar circuitos eficientes para bombear láseres. Nótese, que la forma de los diagramas debe ser simétrica respecto a la LT, hecho que garantiza la igualdad de impedancias y, consecuentemente, el acoplamiento entre circuitos.

### **Sistemas Eléctricos de Excitación Armónica**

Un SEB capaz de sustentar oscilaciones armónicas en el tiempo es susceptible de utilizarse como fuente de excitación láser. El sistema eléctrico con tales características es un sistema RCL conectado a una fuente electromotriz. El diagrama correspondiente es:



**Ilustración 0—6 Circuito RCL**

Se sabe que en cuanto se cierra el interruptor, por el teorema de Gibbs, solamente un conjunto resonante de frecuencias incluidas en la función de escalón podrán mantenerse en el circuito resonante, siendo fuertemente atenuadas las demás frecuencias. Las frecuencias características del circuito son

$$\omega_R = (\alpha^2 - \omega_0^2)^{1/2}$$

donde  $\alpha$  es el factor de disipación y  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento. Este circuito puede funcionar como un generador de ondas o como filtro, según si la fuente de alimentación es una fuente de corriente continua o alterna. Variando los valores de los elementos, se puede cambiar la frecuencia de resonancia del circuito.

Otro circuito resonante, y más comúnmente usado en la pulsación de láseres de nitrógeno molecular, es el circuito llamado 'Blumlein'. Este es un circuito resonante, pero con la característica de estar gobernado por una bujía, cuya función es descargar el circuito resonante de forma abrupta, generándose pulsaciones de duración muy corta y repetición variable. El diagrama eléctrico para este tipo de circuito es como sigue

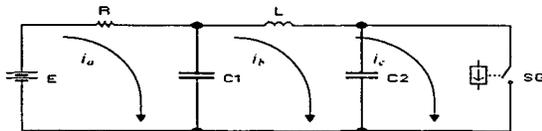


Ilustración 0—7 Diagrama eléctrico del circuito 'Blumlein'

Como es de esperarse, las características de corriente y voltaje en este circuito obedecen ecuaciones no-lineales, hecho que complica la predicción de la forma de cada pulsación. Dicha forma del pulso depende de las condiciones, macroscópicas y microscópicas, imperantes en la bujía, ya que las características de la columna generada de gas ionizado dependen de las condiciones del gas entre los electrodos, de su geometría, desgaste, temperatura, etc... Sin embargo, con una bujía cuidadosamente preparada, la repetibilidad es relativamente alta. Sin embargo, se puede representar una bujía real, mediante un modelo que considera la descarga producida por una bujía ideal y los efectos de tipo inductivo, capacitivo y resistivo que siempre aparecen. Tal modelo se esquematiza mediante el diagrama eléctrico equivalente

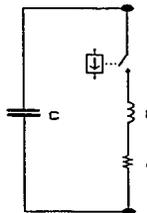


Ilustración 0—8 Representación eléctrica de la bujía

Se puede observar, que la bujía es también un circuito resonante, pero con características de frecuencia muy diferentes a las del circuito fuente, mismas que se derivan directamente de las magnitudes radicalmente diferentes de sus componentes ideales para resistencia, inductancia y capacitancia. Se considera ahora a la parte formal del análisis de este tipo de circuito, planteando las ecuaciones de Kirchoff para el circuito completo:

$$\begin{aligned}
 E &= i_a R_B + \frac{1}{C_1} \int_0^{t_0} (i_a - i_b) dt' \\
 0 &= \frac{1}{C_1} \int_0^{t_0} (i_b - i_a) dt' + L_B \frac{di_b}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^{t_0} (i_b - i_c) dt' \\
 0 &= \frac{1}{C} \int_0^{t_0} (i_c - i_b) dt' + l \frac{di_c}{dt} + i_c r
 \end{aligned}$$

Suponiendo que la bujía tiene un comportamiento temporal transitorio de duración  $\delta t$ , se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 E &= i_a R_B + \frac{1}{C_1} [(i_a - i_b)(t_0)] \delta t \\
 0 &= \frac{1}{C_1} [(i_b - i_a)(t_0)] \delta t + L \frac{di_b}{dt} + \frac{1}{C} [(i_b - i_c)(t_0)] \delta t \\
 0 &= \frac{1}{C} [(i_c - i_b)(t_0)] \delta t + l \frac{di_c}{dt} + i_c r \\
 \delta t &= rC
 \end{aligned}$$

Ahora se pueden hacer ciertas simplificaciones, si se toman en cuenta solamente términos de primer orden, la corriente a través de la bujía obedece durante la descarga la ecuación siguiente:

$$0 = \frac{d^2 i_c}{dt^2} + \frac{r}{l} \frac{di_c}{dt} + \frac{1}{lC} i_c$$

y resolviendo el polinomio característico (linealizado), se obtienen las frecuencias características del circuito:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{r}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{l}\right)^2 - \frac{4}{lC}} \right]$$

donde se nota, que la atenuación de la onda en la bujía viene dada por los valores instantáneos de la resistencia e inductancia eléctrica del arco en el gas. Sin embargo, la tasa a la que se da la ruptura en la bujía no queda determinada por el tiempo de formación de la descarga en el gas, sino por la inductancia neta del circuito (Schwab, 1976). Las frecuencias que se propagan por el circuito dependen de las características inductivas y capacitivas del circuito del que forma parte la bujía. Es por eso que para manejar altas frecuencias, es preciso que el circuito que rodea a la bujía sea de baja inductancia para respuestas en corriente, y de alta inductancia para respuestas en voltaje.

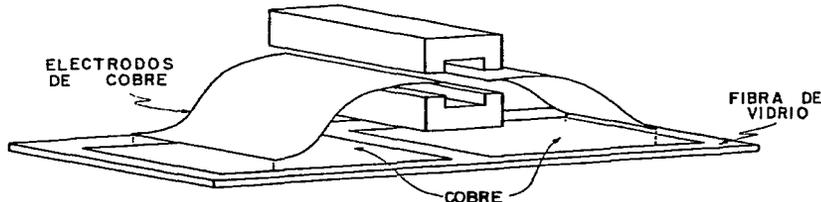
Un circuito oscilante es un generador de energía EM, de forma que para transportar dicha energía y efectuar un trabajo en otro sistema EM, es preciso diseñar el acoplamiento idóneo para los fines perseguidos. El objetivo es utilizar al circuito oscilante como fuente de bombeo para láseres, pulsados y de onda continua.

Hasta la fecha se han construido gran número de láseres de nitrógeno molecular pulsados mediante la técnica de bombeo eléctrico directo con circuitos tipo 'Blumlein' (Porta & Godoy, 1982) (Schwab, 1976) (Salzmann & Strohwal, 1974) (Shipman, 1967) (Leonard, 1965). Debido a los límites naturales impuestos en la fabricación de componentes eléctricos comerciales, el desarrollo de la microelectrónica ha revolucionado el diseño y los costos, especialmente con sus compuestos fabricados a base de óxidos metálicos, ampliando las técnicas de bombeo e inclusive las de monitoreo y las de control por el consecuente acortamiento de los tiempos de respuesta. Esta característica esencial los ha hecho fuertes candidatos para ser utilizados en la tecnología láser actual.

Es común encontrar en la bibliografía, que el circuito Blumlein es la fuente de bombeo para láseres de Nitrógeno molecular pulsados (Porta & Godoy, 1982). También existen referencias sobre el uso de líneas de transmisión para la excitación del plasma, por lo que el uso del formalismo de LT es obvia. No obstante, en circuitos pulsantes tipo Blumlein, cuya configuración experimental involucra el uso de placas de cobre,

mismas que funcionan como almacenes de carga para la bujía y electrodos para la cavidad óptica (Porta & Godoy, 1982), surge la necesidad de considerar a dichas placas como LT de constantes eléctricas distribuidas, por lo que su geometría es capaz de generar variaciones en las características temporales y de frecuencia de los pulsos.

No obstante, y conociendo ya los tiempos de respuesta "naturales" del circuito Blumlein, es conveniente para el desarrollo subsiguiente, analizar las placas de cobre, no como condensadores, sino como líneas de transmisión de constantes distribuidas. Es decir, a cada placa se le puede asignar una impedancia distribuida, dependiendo de su geometría, y por lo tanto, de sus valores característicos de R, G, L y C.



**Ilustración 0—9 Vista frontal del láser con detalle de los electrodos (Porta & Godoy, 1982)**

Bajo esta óptica, el circuito 'Blumlein' es, entonces, un sistema que acopla mediante dos placas de cobre dispuestas en forma de LT un circuito oscilante gobernado por una bujía a la cavidad de un láser gaseoso ( $N_2$ ) de excitación transversal, donde las placas de cobre constituyen a su vez los electrodos de excitación del gas. Nótese, que se está tratando con un sistema difícil de predecir, gracias a la cantidad de variables que se están manejando y la forma como están dispuestas. Para evitar efectos indeseados en el funcionamiento del sistema, lo primero que debe hacerse, es estimar las impedancias características de cada componente del sistema, a modo de poder modificarlas en beneficio del comportamiento global. Uno de los aspectos más difíciles de estimar es la impedancia característica de las placas metálicas, ya que, de forma intuitiva, se sabe que depende de su geometría. No puede ser lo mismo tener unas placas cuadradas que unas triangulares, etc., ya que muchos de los parámetros eléctricos varían con el área, separación y grosor de los conductores. Un método para calcular de forma exacta la impedancia de un par de placas, cuya geometría varía con la distancia entre la fuente y la terminal se presenta a continuación. Considérese una LT, cuyas constantes eléctricas varían con la posición. Dicha variación puede deberse a cambios en la pureza del metal o del aislante, o simplemente a que son el reflejo de una geometría no-uniforme, tratándose de LT de constantes distribuidas ("lumped constant distribution line"). Esto tiene como efecto sobre una señal que se propaga a lo largo de ella, que componentes de diferentes frecuencias se transmitan a velocidades diferentes y tengan atenuaciones desiguales, y como consecuencia, que la forma final del pulso que se inyectó sea distorsionado hasta que pierda por completo su parecido al original. En el caso en que el área de los electrodos dependa de la distancia, despreciando los efectos de borde, se tiene que

$$C = \int_0^l \frac{\epsilon a(z)}{D} dz$$

$$L = \int_0^l \frac{\mu D}{a(z)} dz$$

$$G = \int_0^l \frac{\sigma a(z)}{D} dz$$

donde

- $\epsilon$  = Permisividad absoluta del dieléctrico
- $\mu$  = Permeabilidad del dieléctrico
- $\sigma$  = conductividad del dieléctrico
- C = Capacidad por unidad de longitud
- L = Inductancia por unidad de longitud
- G = Resistencia de fuga por unidad de longitud
- D = Espesor del dieléctrico
- $a(z)$  = Ancho del electrodo en la posición z de propagación
- l = Longitud total de la LT en la dirección de propagación

De esta forma, las expresiones para la impedancia y admitancia son:

$$Z = \frac{a(z)}{d} + i\omega \frac{\mu D}{a(z)}$$

$$Y = \frac{(\sigma + i\omega\epsilon)}{D} a(z)$$

donde

h es la altura del triángulo y

b la longitud de su base.

d es el espesor de las placas metálicas

Estas expresiones, substituidas en las ecuaciones telegráficas, completan la descripción del modelo y permiten encontrar la forma particular de dispersión de la señal que viaja a través de dicho elemento. Sin embargo, conociendo la magnitud de la impedancia a la entrada y a la salida de la señal permite el acoplamiento óptimo entre CR cuyas impedancias difieran entre sí. Una forma sin duda singular, pero útil, es la de las placas exponenciales, es decir, placas cuya forma viene dada por una función exponencial del tipo

$$a(z) = Ae^{hz}$$

de tal forma, que siempre se puede encontrar la exponencial que satisfaga las condiciones a la entrada y a la salida de las placas. Es, entonces, una tarea simple calcular la impedancia de entrada y de salida de una LT de constantes distribuidas, cuya geometría puede ser expresada en términos de funciones matemáticas, e insertar en la ecuación del coeficiente de reflexión a la entrada ( $z=0$ ) y a la salida ( $z=L$ ) el valor respectivo de las impedancias del CR y la LT.

El acoplamiento entre circuitos permite la óptima transferencia de la energía desde el emisor hasta el receptor, es decir, entre el SEB y el medio atómico. El hecho de que las impedancias sean compatibles bajo ciertos regímenes de operación, garantiza que la energía no es acumulada en la LT, por lo que el resultado del estímulo eléctrico sobre el sistema atómico es predecible con la teoría conocida. Sin embargo quedan algunos huecos conceptuales que hay que llenar tales como, el describir el sistema atómico interactuante como parte del circuito eléctrico, por lo que se debe conocer sus características de impedancia ante la LT.

### **Características de Impedancia Eléctrica de un Medio Activo Gaseoso Láser**

Para determinar las características eléctricas macroscópicas de un medio activo láser, deben recordarse las características EM en el espacio que rodea los electrodos en la cavidad láser. Recuérdese, que el efecto láser es una manifestación macroscópica de la discreción entre estados macroscópicos de un gas. A pesar de la naturaleza macroscópica del fenómeno láser, la separación entre estados atómicos en el gas es discreta, en lugar de continua.

### **Solución exacta de Rabi, revisitada**

Del capítulo 3, las ecuaciones de movimiento para los coeficientes atómicos de probabilidad de transición entre los estados superior e inferior vienen dados por:

$$\begin{aligned}\dot{C}_2 &= -\frac{\gamma_2}{2} C_2 + \frac{i \wp E_0}{2\hbar} e^{i(\omega - \nu)t} C_1 \\ \dot{C}_1 &= -\frac{\gamma_1}{2} C_1 + \frac{i \wp E_0}{2\hbar} e^{-i(\omega - \nu)t} C_2\end{aligned}$$

donde se propuso una solución del tipo  $C_i(t) = e^{i\mu t}$ , con lo que se obtienen las frecuencias de conmutación de Rabi o "Rabi flopping frequencies"

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2} \left[ \omega - \nu - \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \omega - \nu - \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) \right]^2 + \left( \frac{\wp E_0}{\hbar} \right)^2}$$

con los parámetros conocidos.

En el capítulo 4, en cambio, se estudiaron las soluciones para  $V(z)$  e  $I(z)$  en una LT uniforme, proponiéndose una solución del tipo  $I'(z) = I' e^{sz}$ , donde  $s$  representa las frecuencias complejas en la distribución de voltaje (o corriente) a lo largo de ella. Se obtuvo así el conjunto de soluciones siguientes:

$$s_m = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right]^2 - \left( \frac{m\pi}{l\sqrt{LC}} \right)^2}$$

Es sencillo notar, que existe un paralelismo entre ambos sistemas, donde  $s = i\mu$ , siempre que

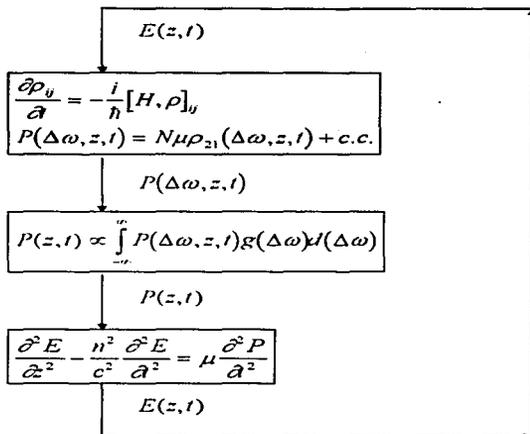
$$\begin{aligned}\frac{R}{L} &= i(\omega - \nu) \\ \frac{G}{C} &= \frac{\gamma}{2} \\ \frac{m\pi}{l\sqrt{LC}} &= i \frac{\wp E_0}{\hbar}\end{aligned}$$

donde  $\gamma = \gamma_2 \gg \gamma_1$ . O sea, existe un mapeo único para pasar del sistema atómico al de la LT.

Sin embargo, esta simplicidad no considera al medio atómico como parte de un sistema estadístico de átomos en el interior de un láser y que interactúan entre sí y con el campo en la cavidad. Para ello se necesita retomar la susceptibilidad atómica.

### Susceptibilidad atómica, revisitada

La naturaleza discreta de los estados energéticos en el gas permite el uso del formalismo mecánico-cuántico de la matriz de densidad, tal y como se estudió en el capítulo 3. Según el método de la matriz de densidad, la susceptibilidad atómica del medio láser es respuesta y fuente de la perturbación eléctrica en el hamiltoniano atómico en un campo eléctrico armónico en el tiempo de frecuencia  $\nu$ . Como se sabe, la energía entregada por las moléculas en el medio activo, la ganancia, compensa las pérdidas en la cavidad, con lo que se conserva la energía. Aunque atractiva esta simplicidad, no se puede extraer de dichos argumentos el comportamiento temporal de la intensidad de luz debido a efectos tales como "mode pulling", índice de refracción, y es inútil para describir el funcionamiento en operación multimodal del láser. Estas y muchas limitaciones más pueden ser evitadas si se describe el efecto láser mediante las ecuaciones clásicas de Maxwell y exigiendo que el campo en la cavidad sea "auto-consistente", es decir, que el campo EM que induce la polarización en el medio sea igual al campo EM resultante de la interacción con el medio activo, tal y como se esquematiza en la figura siguiente:



**Ilustración 0—10 Relación de autoconsistencia en las ecuaciones de Maxwell**

Recordando las ecuaciones de Maxwell para el campo EM en presencia de cargas, éstas son:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{D}) &= \rho \\ \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{aligned}$$

Tomando el rotacional de la derivada del tiempo del campo magnético y notando de el operador de doble rotación obedece:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

Aplicando lo anterior y notando la permutabilidad entre operadores rotacional y parcial respecto al tiempo para un campo EM armónico, se encuentra que el campo eléctrico en la cavidad láser debe obedecer la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \right)$$

Nótese además, que por el carácter regenerativo de la onda EM en la cavidad, el término

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

y la ecuación de onda se reduce a:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \right) = 0$$

Aceptando, además, que antes de encender el láser, el medio activo es eléctricamente neutro y que, durante el efecto láser, debe permanecer así, se iguala

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

por lo que sólo se conserva la última parte de la ecuación de onda que se refiere únicamente a la componente dipolar en la cavidad láser:

$$\mu_0 \left( \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \right) = 0$$

es decir,

$$\vec{J} = - \frac{c \vec{P}}{\lambda}$$

Esta ecuación es sencilla de resolver, ya que se conoce la polarización macroscópica del medio láser, de acuerdo con el análisis de la matriz de densidad, hecho en el capítulo 3.

Como se esquematiza en la Ilustración 0—10, la polarización macroscópica del medio es causa y efecto del campo EM en la cavidad láser y está directamente relacionada con la matriz de densidad de estados del sistema atómico. En la representación de la matriz de interacción se tiene que la ecuación de movimiento del pseudovector atómico  $r$  emula a un trompo que precesa de acuerdo con la relación:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \vec{T}$$

donde  $r = (R_1, R_2, R_3)$ .

Esta relación es de importancia para el desarrollo inmediato, ya que condensa la dinámica de las funciones atómicas durante el efecto láser, es decir, las características temporales del dipolo atómico y de la inversión de población, que entre ambas sintetizan el comportamiento de la polarización macroscópica del medio activo como respuesta a una perturbación armónica. Se define así el vector dipolar y se substituye en la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} R &= R_1 - iR_2 \\ R_1 &= \rho_{12} e^{i\omega t} + c. c. \\ R_2 &= i\rho_{12} e^{i\omega t} + c. c. \end{aligned}$$

Recuérdese que la componente  $R_3$  da la inversión de población

$$\begin{aligned} R_3 &= \rho_{22} - \rho_{11} \\ R &= 2\rho_{12} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Como la polarización es proporcional al vector dipolar, y de acuerdo con la expresión para la densidad de corriente, ésta es proporcional a la variación temporal de la polarización, entonces es proporcional a la variación del vector dipolar, es decir,

$$J \equiv \frac{dR}{dt} = - \left[ \frac{1}{T_2} + i(\omega - \nu) \right] R - i \frac{\omega E_0}{c} R_3$$

donde  $T_2$  es el tiempo de relajamiento espín - espín, el cual destruye la coherencia (dipolar) entre los dos niveles láser. La polarización macroscópica del medio está descrita por el producto de la susceptibilidad atómica por el campo eléctrico

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

donde las componentes de la susceptibilidad atómica son:

$$\chi'(\nu) = \frac{\mu^2 T_2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{(\omega - \nu) T_2}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} N\Delta_0 = \frac{\mu^2 (\omega - \nu) T_2}{2\varepsilon_0 \hbar} g(f) N\Delta_0$$

$$\chi''(\nu) = \frac{\mu^2 T_2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + (\omega - \nu)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} N\Delta_0 = \frac{\mu^2}{2\varepsilon_0 \hbar} g(f) N\Delta_0$$

Substituyendo la expresión para las componentes de la susceptibilidad atómica del medio láser, la ecuación se reescribe como

$$\frac{dR}{dt} = -i \left( \frac{1}{T_2} \frac{\chi}{\chi''} R + \frac{\wp E_0}{\hbar} R_3 \right)$$

y definiendo la impedancia dipolar como

$$\zeta = \frac{1}{T_2} \left| \frac{\chi}{\chi''} \right| = \frac{1}{T_2} \sqrt{\frac{\chi\chi^*}{\chi''\chi''^*}}$$

Recordando la expresión para las frecuencias de oscilación de la LT, derivadas en el capítulo 4, se tiene que:

$$s_m = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right) \right]^2 - \left( \frac{m\pi}{i\sqrt{LC}} \right)^2}$$

que para altas frecuencias tiene un comportamiento que tiende a

$$s_m = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm i \frac{m\pi}{T}$$

$$T = i\sqrt{LC}$$

Si se comparan las frecuencias de la LT con las del medio atómico, igualando se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm i \frac{m\pi}{T} = - \left[ \frac{1}{T_2} + i(\omega - \nu) \right] R - i \frac{\wp E_0}{\hbar} R_3$$

con lo que se identifican las siguientes componentes, en su parte real

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) = \frac{1}{T_2}$$

y en la parte imaginaria

$$\left( \frac{m\pi}{T} \right)^2 = (\omega - \nu)^2 + \left( \frac{\wp E_0}{\hbar} \right)^2$$

La posibilidad de construir SEB capaces de sustentar oscilaciones eléctricas a frecuencias ópticas es todavía una tarea difícil y costosa, sin embargo, con el advenimiento de la tecnología a base de superconductores, esto podría realizarse en un futuro no tan lejano. Mientras tanto, los materiales y la tecnología actual es capaz de sostener dichas frecuencias por lapsos de tiempo muy cortos, por lo que la intención del presente trabajo es tratar la respuesta pulsada de dichos sistemas.

### **Pulsación Eléctrica de un Medio Activo Gaseoso Láser**

Debido a que los tiempos de respuesta de los CR empleados para la pulsación de láseres gaseosos es del orden de decenas de nseg., el espectro de potencia del pulso generado contiene gran cantidad de frecuencias, siendo las más altas las de interés particular para el presente estudio. Regresando al circuito 'Blumlein', se vio que los tiempos de respuesta del circuito son del orden de  $2 \times 10^{-8}$  seg., mismas que dependen de las características de la bujía, es decir, de los valores particulares de sus coeficientes eléctricos. Se puede adquirir control sobre los valores de resistencia, inductancia y capacitancia de la bujía, modificando la distancia entre electrodos, su geometría y la presión del gas de descarga. No se entrará en

detalles de cómo y por qué éstos cambios determinan las constantes eléctricas de la bujía, pero en la discusión anterior y la del capítulo 1 se exponen argumentos suficientes para su intuición. Entonces, suponiendo que las características de la bujía hayan sido previamente preparadas de tal forma, que las descargas sean de duración mínima, por lo tanto generando ondas portadoras de la señal de alta frecuencia y, consecuentemente, energía muy alta, la LT y el CR terminal actúan como filtros frecuenciales sobre la señal inyectada.

La señal eléctrica inyectada en los electrodos de la cavidad con el medio activo láser es convertida en campos electromagnéticos susceptibles de excitar a los átomos y provocar transiciones entre niveles energéticos del gas macroscópico. Se busca sistematizar y explotar las características eléctricas del medio atómico para encontrar las condiciones frecuenciales y de umbral en general que permiten inducir estados coherentes en un medio activo láser gaseoso o plasma.

Se ha visto que las ecuaciones para describir el medio atómico adquieren la forma de un sistema inercial en precesión, donde las variables inerciales representan las coordenadas de la interacción dipolar atómica con el campo EM en un espacio complejo que representa la absorción y la dispersión de la polarización y del campo eléctrico en el medio activo. De las ecuaciones de Maxwell se vio en el inciso anterior, que la densidad de corriente es idéntica a la derivada parcial de la polarización en el tiempo, por lo que en el modelo de precesión, la evolución temporal del vector de precesión contiene la información necesaria para conocer la densidad de corriente Maxwelliana.

De las ecuaciones anteriores de respuesta de frecuencias de precesión se tiene que

$$\frac{dR}{dt} = - \left[ \frac{1}{T_2} + i(\omega - \nu) \right] R - i \frac{\wp E_0}{\hbar} R_3$$

donde la dispersión y la absorción de la polarización quedan descritas por

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) = \frac{1}{T_2}$$

en la parte real, y en la parte imaginaria

$$\left( \frac{m\pi}{T} \right)^2 = (\omega - \nu)^2 + \left( \frac{\wp E_0}{\hbar} \right)^2$$

Como se vio en el capítulo 3, en un pulso láser, la transición entre los niveles 1 y 2 se realiza en un tiempo igual a

$$t_\pi = \frac{\pi\hbar}{\wp E_0}$$

de tal forma que la componente en  $R_3$  es un múltiplo de  $\pi$ , es decir

$$dR = \left[ \frac{1}{T_2} + i(\omega - \nu) \right] R t_\pi - i\pi$$

por lo que la duración de la descarga de la bujía debe satisfacer

$$rC \approx t_\pi = \frac{\pi\hbar}{\wp E_0}$$

Tomando en cuenta lo anterior, se puede reescribir la relación

$$\left( \frac{m\pi}{T} \right)^2 = (\omega - \nu)^2 + \pi^2$$

es decir,

$$\pi^2 \left[ \left( \frac{m}{T} \right)^2 - 1 \right] = (\omega - \nu)^2$$

que para altas frecuencias con  $m \gg 1$  se tiene que

$$\frac{m\pi}{T} = \omega - \nu$$

Si la duración del pulso eléctrico en la LT es lo suficientemente corto a comparación con el tiempo de decaimiento  $T_2$ , se tiene que la resistividad eléctrica del medio atómico durante el pulso es

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) rC = \frac{t_p}{T_2}$$

Así, dependiendo de la duración mínima del pulso, la amplitud de éste es atenuada en su recorrido por el medio activo de acuerdo con la relación que guardan las magnitudes  $t_p$  y  $T_2$ .

Cabe mencionar, que la naturaleza cuántica del medio activo láser provee a las ecuaciones de Maxwell de un aspecto poco usual o casi irreconocible, sobre todo si queremos tomar en este modelo efectos tales como bloqueo modal, conmutación Q, turbulencia y efectos termodinámicos por fricción, sin mencionar efectos cuánticos de orden superior. Los campos EM en la cavidad resonante en operación pulsada se reconstituyen en una cadena altamente dependiente del estado anterior en un proceso iterativo o recursivo, lo que hace que el tema de estabilidad aparezca de forma natural.

### Estabilidad

Si se pretende pulsar periódicamente el láser durante lapsos mucho mayores que el tiempo de recuperación del SEB o con frecuencias de repetición entre pulsos con ordenes de magnitud cercanos al inverso del tiempo de decaimiento de la coherencia (tiempo de relajamiento espín-espín) o las vidas medias de los estados atómicos involucrados, la cadena de transiciones entre estados macroscópicos del medio láser viene determinada por la vida media de los fotones en la cavidad de acuerdo con la expresión

$$t_c = \frac{n_0 l}{c[\alpha - \ln R_1 R_2]}$$

Tanto experimento como teoría ratifican el hecho que la evolución de un pulso gigante de este tipo se completa en un lapso del orden de 20 nseg., por lo que se pueden despreciar los efectos cuánticos debidos al tiempo de decaimiento de los estados atómicos y de relajamiento espín-espín. En este marco de tiempos, el cambio de potencial entre los electrodos del SEB es compatible con la vida de los fotones en la cavidad, tal como lo demuestra la valoración semi-empírica del pulso eléctrico en el circuito Blumlein.

Si se recuerda, un láser se caracteriza por el volumen modal  $V$ , la inversión total de población  $n$ , el número total de fotones en el resonador  $\phi$  y la constante de decaimiento para fotones en el resonador  $t_c$ . La constante de ganancia es proporcional a  $n$  y la intensidad de radiación crece conforme a lo ya visto

$$\frac{dI}{dz} = \beta I \rightarrow \frac{dI}{dt} = \beta \frac{c}{n_0} I$$

Si el medio activo láser tiene una longitud  $L$ , mientras que la cavidad resonante es de dimensión  $l$ , entonces solamente una fracción  $L/l$  de los fotones podrá estimular átomos en el medio activo en cada instante, por lo que la evolución temporal del número de fotones queda dado por

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \left( \beta \frac{cL}{n_0 l} - \frac{1}{t_c} \right)$$

donde  $-\frac{\phi}{t_c}$  arroja la pérdida de fotones por la ventana de salida y por pérdidas en el resonador. Si se

parametriza el tiempo en unidades de la vida media de los fotones  $T=t/t_c$ , es como si se tomase una película de la alegre tribu de los fotones con cada cuadro distanciado en tiempo del que le sigue por una vida fotónica, se tiene que

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \left( \frac{\beta}{\beta_i} - 1 \right)$$

$$\beta_i = \frac{n_0 l}{cL t_c}$$

donde se ve claramente que si  $\beta$  es mayor que  $\beta_1$ , el número de fotones crece y se tiene oscilación láser. Como  $\beta$  es proporcional a  $n$ , se puede escribir

$$\frac{d\phi}{dT} = \phi \left( \frac{n}{n_1} - 1 \right)$$

$$T = \frac{t}{t_c}$$

$$n = \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right) I$$

donde  $n_1$  es la inversión total en el umbral.

Ahora bien, dado que cada fotón que interactúa con un átomo reduce el término de la inversión de población por un factor de 2 (como en la doble partida de Luca Pacioli en contabilidad), se puede reescribir para  $n$

$$\frac{dn}{dT} = -2\phi \frac{n}{n_1}$$

Este par de ecuaciones acopladas se puede resolver mediante métodos numéricos, sin embargo se puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\phi_{n+1} = \phi_n \left( \frac{n_n}{n_1} - 1 \right)$$

$$n_{n+1} = -2\phi_{n+1} \frac{n_n}{n_1}$$

el subíndice  $n$  denota a la variable  $x$  medida en el  $n$ -ésimo cuadro de la película y su evolución durante la vida de un fotón en la cavidad.

Si se substituye la ecuación de arriba en la de abajo, se obtiene

$$n_{n+1} = -2\phi_n \frac{n_n}{n_1} \left( 1 - \frac{n_n}{n_1} \right)$$

En la teoría del caos determinista, esta función representa la 'función logística' o 'figtree' o 'mapeo de bifurcación de Feigenbaum', pero sin el signo negativo al principio. Este se puede eliminar si se hace la suposición, que la población al encender el láser es inicialmente negativa y que por lo tanto cada fotón inyectado contribuye con un cambio de +2, en vez de -2. Con éste cambio se recupera la forma de la ecuación original para el mapeo de bifurcación. Ésta es característica del comportamiento entre sistemas que compiten, como poblaciones de animales, y cuyo crecimiento está condicionado a valores de umbral determinados naturalmente. En un láser la competencia se da a nivel población de niveles, cosa que determina si hay o no amplificación de la luz.

Un láser cae dentro de esta clase de sistemas, en particular si se considera que una fuente 'superradiante', una vez que se superó la condición de umbral para oscilación, depende de la vida fotónica en la cavidad para sostener el estado láser. Por debajo de ésta, una señal inyectada en el medio atómico es fuertemente atenuada (absorbida), mientras que por encima de ella, es amplificada, estancándose su amplitud en un valor máximo de manera asintótica, de acuerdo con la ley logística.

Este tipo de sistemas, para sostenerse, requieren de 'retroalimentación', es decir, que cada estado determina el resultado del estado posterior a él, y éste a su vez dependió del estado anterior de la misma manera, y así sucesivamente. Esto permite que el sistema sea sensible a fluctuaciones y que bajo ciertas condiciones, actúe como amplificador o atenuador de ruido.

## CONCLUSIONES

Toda tecnología es en principio perfectible, dependiendo del paradigma que se aplique para explicar el fenómeno e implementar el experimento. Existen una gran variedad de métodos físicos para llevar a un

sistema atómico a un estado energético más alto, para después recuperar la energía almacenada en otra forma más útil. Este es el caso de los láseres, donde su entrega energética sucede en el espectro óptico del campo EM. No obstante, algunos elementos clave deben tomarse en consideración para su explotación, tales como:

costo  
eficiencia  
discoño

Generalmente, y especialmente tratándose de láseres superradiantes como el de N<sub>2</sub> o HeNe, o láseres de iones, como el Argón, CO<sub>2</sub> y otros, la potencia de entrega depende de alguna forma simple de la corriente de descarga (y ésta a su vez de la presión y temperatura de éste). Es por ésto, que el presente trabajo hace hincapié en el estudio del acoplamiento entre el sistema de bombeo eléctrico y la cavidad del láser, vista ésta no como un elemento pasivo del circuito, sino como uno que permite la máxima transferencia de energía desde un emisor a un receptor.

En los sistemas láser gaseosos, el método de bombeo más común es el que se consigue por inyección de corriente directa, que bajo la óptica del presente trabajo, implica la aplicación de campos eléctricos constantes durante la emisión en el proceso láser. La electrónica requerida es simple y permite rebasar inicialmente el voltaje de ruptura (cc. 4.) para iniciar el proceso de conducción autonantenida. A partir de este punto, la cavidad láser se comporta como un conductor ideal, para efectos prácticos.

Como se analizó en el capítulo 1 de este trabajo, los procesos de conducción en el seno de un gas son complejos, pero debe destacarse que, en particular, para la producción y mantenimiento de las corrientes eléctricas que producen la excitación en un medio activo gaseoso, los procesos relevantes son:

la ionización por electrones (cc. 1.)  
las descargas Townsend (cc. 2.)

la ionización acumulativa (responsable del sostenimiento del proceso de conducción) (cc. 3.)

El capítulo segundo hace especial énfasis en puntualizar qué clase de sistema físico es un láser. Para ello se definen las características electromagnéticas de la cavidad resonante y al hacer el análisis de los modos resonantes en la cavidad láser, destacan como características más importantes, las que quedan determinadas por parámetros tales como:

cintura (formula) (cc. 5.)  
radio del frente de onda (cc. 6.)  
fase (cc. 7)  
distribución de intensidad (cc. 8)  
estabilidad (cc. 9)

factor de calidad de la cavidad (cc. 10.)

Esto permite catalogar a la cavidad láser como un sistema resonante selectivo en el espacio de frecuencias, donde sus características espaciales vienen dadas por las ecuaciones 5, a 10.

Sin embargo, el efecto láser tiene su origen en la preparación y desexcitación sistemática del sistema atómico fuente. Para ello fue preciso analizar la interacción átomo-radiación, donde el resultado más importante es:

Regla de oro o probabilidad de Fermi (cc. 11),

la cual indica, que para que un sistema atómico perciba una perturbación armónica en el tiempo, ésta debe durar un tiempo mayor que la constante de Planck dividida entre la frecuencia de resonancia. Esto produce que la probabilidad de transición entre los estados atómicos del láser aumente linealmente conforme avanza el tiempo.

La expresión exacta de Rabi incorpora en la solución los tiempos de vida media de los estados involucrados en la transición láser (cc. 12) y describe al átomo desde un marco de referencia frecuencial que "rota" con la onda excitadora.

La descripción anterior conduce necesariamente al análisis del sistema atómico en su conjunto, es decir como un sistema estadístico de partículas sujetas a ciertas condiciones de frontera. En particular, tratándose de un sistema atómico como el que se puntualizó en el capítulo 2, se tiene que el conjunto de átomos reacciona a la perturbación armónica de manera polar, es decir, desarrollando una polarización macroscópica neta. La polarización, a su vez, depende de variables atómicas tales como la inversión de población, la frecuencia de resonancia, etc., mismas que determinan los coeficientes de la susceptibilidad atómica (cc. 13.). Ésta permite evaluar cuánto de la energía incidente de la perturbación va a ser absorbida por el sistema atómico y devuelta de forma inducida por el campo y a el campo electromagnético en la

cavidad. Se relaciona también con la anchura espectral del campo en la cavidad y lo modifica o aporta a ésta términos en fase y en cuadratura, según sea el caso de la interacción. Como de esquemáticamente en la Ilustración 3-1, para el caso de sintonía central, el medio atómico se representa como un sistema fuertemente absorbente, sin embargo, como tanto  $\chi'$  como  $\chi''$  dependen de la inversión de población, el signo de la curva para  $\chi''$  se invierte conforme al comportamiento del ensamble. Así, si la densidad de población es máxima para el estado excitado, el sistema decae coherentemente y de forma inducida por la presencia de la radiación en la cavidad. El equilibrio se encuentra, cuando la absorción y la ganancia se equilibran mediante el suministro de energía a través de la fuente de bombeo.

En el caso de tratarse de estados transitorios, como ocurre en láseres pulsados, es conveniente representar al sistema atómico mediante el pseudovector atómico (Ilustración 3-2). La utilidad principal del pseudovector atómico reside en que representa la polarización macroscópica del sistema de átomos en la cavidad láser. Ésta consta de una componente dispersiva y otra absorbente, mismas que quedan representadas por las componentes R y R3 del vector atómico, respectivamente. Los efectos de la perturbación quedan descritos por el vector T, en torno al cual precesa el vector atómico. Así, el medio en su conjunto simula un dipolo eléctrico precesando en torno al vector de perturbación. Cabe recordar, que se trata de una representación de interacción, es decir, se ha hecho un cambio de variables para describir exclusivamente los efectos del campo perturbativo.

El pulso láser es, entonces, la representación electromagnética de un solitón, es decir, un estado resonante que se propaga con cero atenuación y cuya evolución, sujeta al teorema de conservación de energía, obedece al teorema del área. Éste demuestra que el área del pulso se mantiene constante a lo largo de su evolución temporal (análogamente con el teorema de Liouville en haces de partículas).

Con ésto, se pueden explicar algunos fenómenos tales como el eco fotónico, donde se demuestra que una perturbación que gire el vector atómico en 90 grados, es susceptible de provocar que se complete el ciclo para un pulso, volviéndose al estado mixto con ángulo atómico de 90 grados, y al decaer éste al estado base, genera un pulso secundario a modo de un eco del primero.

Por último, antes de entrar en el acoplamiento entre un láser y su sistema de excitación, cabe repasar la teoría de líneas de transmisión, donde la ecuación que describe la electrodinámica de una LT es la ecuación telegráfica. Ésta representa una cuerda electromagnética en oscilación, donde sus características como tensión y masa vienen dadas por la impedancia y admitancia eléctricas.

Lo anterior es indispensable para entender el comportamiento del sistema atómico durante la transición láser. Este conocimiento permite inferir el comportamiento eléctrico del láser como parte de un circuito. De hecho, y con lo ya expuesto, se tiene que el sistema atómico es un circuito resonante con pérdidas. Estas pérdidas se dan en forma de calentamiento y entrega dinámica. Esta última se busca optimizar.

En el capítulo 5 hemos tratado de llevar a un conocimiento práctico más profundo de lo que implica acoplar un SEB con una cavidad láser. Como se demostró, existe amplia bibliografía donde el uso de LT para el bombeo de láseres ha sido estudiado y analizado a detalle, tal como lo muestra Schwab (Schwab, 1972), donde realiza una comparación en la respuesta temporal entre la bujía y la cavidad láser. Schwab demuestra que la respuesta del medio atómico depende directamente de la inductancia eléctrica de la cavidad, o la asociada con ella. La variación temporal de la corriente a través de la cavidad láser corresponde al voltaje inyectado en el circuito. Sin embargo, ésto equivale a decir que la respuesta eléctrica del plasma en la cavidad equivale a la respuesta de la carga inductiva paralela a la cavidad. Bien es cierto que la inductancia externa sobrepasa a la del plasma, sin embargo el plasma es capaz de generar su propia inductancia dinámica, por así llamarla, misma que se asocia con las características dipolares del medio atómico, y por ende con los tiempos de decaimiento de los estados involucrados en la transición láser y, en general, aquellos involucrados en la transmisión de la señal eléctrica inyectada en la cavidad. Bien es cierto también, que el valor de la inductancia externa determina el comportamiento inductivo de la cavidad, pero ésto se puede comparar con lo que antiguamente se practicaba para hacer una línea de transmisión telegráfica más fiel, o mejor dicho, para quitarle distorsión: se cargaba inductivamente con bobinas cada cierta distancia para "tensarla" eléctricamente, conocido como "inductive loading". La condición para una LT sin distorsión es que:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

Substituyendo ésto en la parte real de la expresión para la impedancia eléctrica atómica

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) = \frac{1}{T_2}$$

obtenemos que

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{T_2}$$

El equivalente atómico sería entonces el utilizar un medio cuyo "tiempo de relajamiento espín-espín",  $T_2$ , sea muy grande, es decir, en el que el tiempo de pérdida de información sobre la coherencia entre estados atómicos involucrados en la transición sea muy largo. ¿Qué quiere decir esto? Que se necesita enfriar el medio láser suficientemente, que se debe diluir el medio para evitar colisiones que rompan la coherencia, que se debe evitar tener un flujo de corriente eléctrica adecuado para evitar la desexcitación por colisiones con electrones o iones, etc...

Definitivamente, ésto permite que la forma temporal de la señal inyectada al medio atómico sea una copia fiel de la señal generada en la bujía, mas no implica que tenga las características para optimizar el proceso de absorción y emisión estimulada, es decir, el efecto láser.

Más aún, si la geometría de los electrodos incide sobre los parámetros eléctricos de la LT, como se mostró que sucede con las expresiones para R, L, G y C en placas metálicas con una geometría arbitraria, la señal generada en la bujía sufre una distorsión considerable en su recorrido hasta la cavidad del láser, sobre todo en lo que respecta a sus componentes frecuenciales. Con ésto, se nos presenta el reto de comprender lo que realmente está sucediendo con la potencia inyectada en las placas, vistas éstas como líneas de transmisión: La función de las placas es así la de acoplar eléctricamente a la bujía con la cavidad del láser. Sin embargo, las características eléctricas del arco generado en la bujía difieren enormemente de las prevalcientes en la cavidad del láser, por lo que es natural sostener que existe una diferencia de impedancias muy grande entre las placas y la bujía, y a su vez entre las placas y la cavidad láser. En estas condiciones, una señal que se transmite por las placas encuentra en sus extremos diferencias de impedancia grandes respecto a la suya propia y por lo tanto se generan ondas reflejadas, por lo que la potencia inyectada sufrirá mermas importantes antes de llegar a la cavidad o, desde el punto de vista de circuitos resonantes, al receptor. Una vez en el receptor, dada su carga inductiva aumentada, se volverá a generar otra onda reflejada en las placas y la única forma de disipar la potencia generada es mediante la radiación de la energía en forma de calentamiento, corriente de fuga y ruido electromagnético ambiental. En el peor de los casos se tendrá una acumulación de potencia electromagnética tal, que se alcance en ciertos puntos de las placas voltajes con la suficiente magnitud para romper el dieléctrico que las separa o acortando la vida media del sistema de placas utilizado.

Finalmente, la respuesta del medio atómico se puede representar mediante un modelo similar al de la LT, como acabamos de demostrar. Esto se deriva de las características del medio atómico para seleccionar frecuencias resonantes de acuerdo con sus valores energéticos en los estados atómicos. Esto no quiere decir, que un medio atómico se comporte en su totalidad como una LT, sin embargo, a semejanza de una LT es capaz de almacenar energía, transmitir y radiarla, sin que signifique que los mecanismos que intervienen sean los mismos. En un caso se tiene una serie de patrones espacio-temporales de campos electromagnéticos generados por la movilización de electrones en conductores metálicos dispuestos espacialmente en forma particular y con dimensiones finitas; en el otro se tienen densidades de probabilidad de ocupación de estados atómicos por electrones o de transición entre dichos estados, por lo que la representación y el modelo conceptual son totalmente distintos en cada caso. Sin embargo, la respuesta frecuencial es una cantidad medible en ambos y que además se derivan de sus constantes eléctricas distribuidas particulares. En un diseño experimental cuidadosamente preparado, se deberá entonces tomar en cuenta las características frecuenciales de cada elemento incluido en el circuito eléctrico, con lo que se podrá garantizar el pleno aprovechamiento de la potencia generada. Tomando en cuenta la experiencia que se tiene de la distribución de potencia en compañías eléctricas, se optimiza la transmisión de potencia evitando la corriente en cuadratura, es decir, colocando condensadores entre los elementos de la LT, y reduciendo así la corriente reactiva y conservando la corriente resistiva de los conductores,

$$R + iX, X \rightarrow 0 .$$

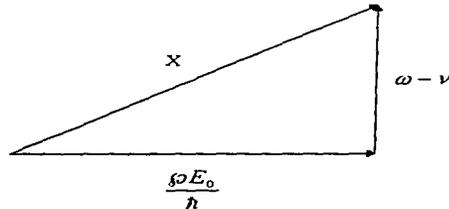
No obstante lo anterior, no es sencillo modificar las características eléctricas del medio atómico como se ha visto que se puede hacer con el circuito eléctrico que lo alimenta. Permitásemme reescribir las ecuaciones para las componentes de la impedancia eléctrica del medio atómico en la parte imaginaria:

$$\left(\frac{m\pi}{\sqrt{LC}}\right)^2 = (\omega - \nu)^2 + \left(\frac{\wp E_0}{\hbar}\right)^2$$

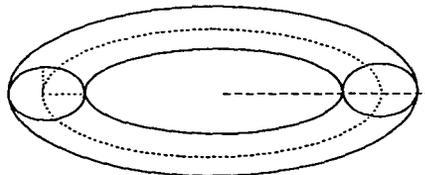
Si se carga capacitivamente el circuito, es decir, se hace incrementa considerablemente su capacidad  $C \gg L$ , entonces la expresión a la izquierda del término imaginario se reduce al mínimo. Desde el punto de vista atómico, la desintonización es aquella parte del término imaginario que es susceptible de minimizarse mediante el empleo de perturbaciones armónicas al medio atómico, cuya frecuencia sea lo más parecida posible a la frecuencia de resonancia del gas. Esto permite la óptima transmisión de la potencia inyectada en el láser.

Con los elementos anteriores, es entonces una tarea más simple, evaluar las expresiones eléctricas de sus contrapartes atómicas para el medio láser y obtener así, el orden de magnitud de la impedancia eléctrica del medio activo durante el proceso para una desintonización dada y un medio atómico conocido. El igualar impedancias nos permite que la energía inyectada al láser no sea reflejada a la LT y sea convertida en luz, de forma más eficiente por el medio atómico.

Por último, tratemos de definir la geometría del proceso de bombeo armónico sobre un sistema atómico: De acuerdo con las ecuaciones para la impedancia, se tiene que la resistencia en fase, es decir, el término real de la impedancia, se mapea directamente sobre el "tiempo de relajamiento espin-espin",  $T_2$ , mientras que el término en cuadratura, la parte imaginaria, se mapea sobre la coherencia frecuencial entre la LT y el medio atómico y la tasa de excitación, o bombeo. Es decir, se tiene que:



Si se toman en cuenta ambas componentes de la impedancia, se tiene que el espacio fase se encuentra sobre la superficie de un toro, donde la parte real corresponde al radio mayor y la parte imaginaria al radio menor.



De hecho, si consideramos que una línea de transmisión es topológicamente un anillo, y ésta interactúa con un medio atómico está representado por el vector de precesión, mismo que se mueve sobre una esfera, nos arroja un espacio fase toroidal de la convolución de ambos. Dicha convolución, además, es una representación en más dimensiones del mismo anillo de la LT. Así, pues, ambas representaciones, es decir, la de la LT y la del medio atómico, son topológicamente equivalentes.

Como punto final, cabe mencionar que el toro es un espacio fase en el cuál se observan inestabilidades dependientes de la relación entre ciclos para cada uno de sus ejes. La descripción de los atractores quedan representados por el diagrama de bifurcaciones de Feigenbaum o "figtree", que arroja las relaciones entre ejes mayor y menor para las cuales se presentan bifurcaciones en los periodos de oscilación para el sistema en su conjunto, tal como se vio en el apartado de estabilidad anterior.

**Resumiendo:**

Las características de eficiencia de un sistema láser bombeado mediante circuitos eléctricos, quedan determinadas por la calidad del acoplamiento entre el circuito eléctrico y la cavidad del láser.

El medio activo láser se puede modelar eléctricamente como una línea de transmisión de constantes distribuidas con características de impedancia dependientes de la frecuencia de excitación.

La optimización del bombeo eléctrico armónico se puede dar con el cálculo de la componente en fase o e cuadratura de la impedancia del circuito eléctrico en su totalidad, tomando en cuenta si se desea minimizar la distorsión o maximizar la transferencia de potencia a la cavidad del láser.

Una incompatibilidad de impedancias entre el circuito eléctrico y la cavidad láser generan ondas reflejadas en el circuito que pueden dar origen a comportamientos inesperados del láser o al deterioro del sistema fuente que lo alimenta.

La relación entre frecuencias de bombeo y de transiciones atómicas tensan un espacio fase con la posibilidad de presentarse un comportamiento caótico dependiente de la razón entre sus magnitudes.

**BIBLIOGRAFIA**

- Bloch, F., *Phys. Rev.*, 70, p. 460, 1954.
- Bloembergen, N., and Pound, R.V., "Radiation damping in magnetic resonance experiments," *Phys. Rev.*, 95, p. 8, 1954.
- Bonifacio, R., Hopf, F., Meystre, P., and Scully, M., cap. 9, 1976, editado por S.F. Jacobs, M.O. Scully, M. Sargent III y C.D. Cantrell III, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass.
- Boyd, G.D., and Gordon, J.P., "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers," *Bell Syst. Tech. J.*, 40, pp. 489-508, March 1961.
- Boyd, G.D., and Kogelnik, H., "Generalized confocal resonator theory," *Bell Syst. Tech. J.*, 41, pp. 1347-1369, July 1962.
- Boyd, R.W., and Mukamel, S., "Origin of spectral holes in pump-probe studies of homogeneously broadened lines," *Phys. Rev.*, A29, p. 1973, 1984.
- Brewer, R.G., and Shoemaker, R.L., "Photon echoes and optical nutation in molecules," *Phys. Rev.*, 27, p. 632, 1971.
- Bridges, W.E. and Halstead, A.S., "Gaseous ion laser research", Hughes Res. Lab., Malibu, Calif., Tech. Rep. AFAL-TR-67-89, DDC, ASTIA Doc., AD814897, May. 1967.
- Brock, E.G., Czavinski, P., Hormats, E., Neddeman, H.C., Stirpe, D., and Unterleitner, F., "Coherent stimulated emission from molecular crystals," *J. Chem. Phys.*, vol. 35, pp. 759-760, August 1961.
- Clark, P.O., and J.Y.Wada, "The influence of xenon on sealed-off CO<sub>2</sub> lasers", *IEEE J. Quantum Electron.*, vol QE-4, pp. 263-266, May 1968.
- Compton, K. T., and Langmuir, I., *Rev. Mod. Phys.*, 2, 136, 1930.
- Compton, K. T., and Langmuir, I., *Rev. Mod. Phys.*, 2, 222, 1930.
- Chaffee, E. L., "Theory of Thermionic Vacuum Tubes", pp. 58-66, 95-126, McGraw Hill Book Co., Inc., New York, 1933.
- Chambers, C. C., *J. Franklin Inst.*, 218, 463, 1934.
- Child, C. D., *Phys. Rev.*, 32, 492, 1911.
- Dempster, A. J., *Phys. Rev.*, 46, 728, 1934.

- Dicke, R.H., "Coherence spontaneous radiation processes," Phys. Rev., 93, p. 99, 1954.
- Dicke, R.H., Phys. Rev., 93, p. 99, 1954.
- Dumke, W.P., "Interband transitions and maser actions," Phys. Rev., vol. 127, pp. 1559-1563, September 1962.
- Duncan, R.C., Jr., "Continuous room temperature Nd<sup>3+</sup>:CaMoO<sub>4</sub> laser", J. Appl. Phys., vol. 36, pp. 874-875, March 1965.
- Dushman, S., Phys. Rev., 21, 623, 1923.
- Dushman, S., Rev. Mod. Phys., 2, 286, 1930.
- Dushman, S., Rev. Mod. Phys., 2, 458, 1930.
- Einstein, Albert, "Über die Quantentheorie der Radiation", Physikalische Zeitschrift 18, 121 (1917).
- Engel, A. v., and Steenbeck, M., " Elektrische Gasentladungen, ihre Physik und Technik", Vol. 1, p.88.
- Evtuhov, V., and Neeland, J.K., "Continuous operation of a ruby laser at room temperature", Appl. Phys. Lett., vol. 6, pp.75-76, February 1965.
- Eyring, C. F., Mackeown, S. S., and Millikan, R. A., Phys. Rev., 31, 900, 1928.
- Feher, G., Gordon, J., Buehler, E., Gere, E., and Thurmond, C., "Spontaneous emission of radiation from an electron spin system," Phys. Rev., 109, p. 221, 1958.
- Feynman, R., Vernon, F.L., and Hellwarth, R.W., J. Appl. Phys., 28, p. 49, 1957.
- Feynman, R.P., Vernon, F.L., and Hellwarth, R.W., "Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving maser problems," J. Appl. Phys., 28, p. 49, 1957.
- Fowler, R. H., and L. Nordheim, Proc. Roy. Soc. (London), A119, 173, 1928; A124, 699, 1929.
- Fox, A.G., and Li, T., "Resonant modes in a maser interferometer," Bell Syst. Tech. J., 40, pp. 453-488, March 1961.
- Geusic, J.E, Bridges, W.E., and Pankove, J.I., "Coherent Optical Sources for Communications" Prog. IEEE, Vol. 58, pp. 1419 - 1439, Oct. 1970.
- Geusic, J.E., Hensel, M.L., and Smith, R.G., "A repetitively Q-switched, continuously pumped YAIG:Nd laser", Appl. Phys. Lett., vol. 6, pp. 175-177, May 1965.

Geusic, J.E., Marcos, H.M., and Van Uitert, L.G., "Laser oscillations in Nd-doped Yttrium Aluminum, Yttrium Gallium and Gadolinium garnets", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 4, pp.182-184, May 1964.

Goodwin, D.W., and Heavens, O.S., "Doped crystal and gas lasers", *Rep. Prog. Phys.*, vol. 31, pp. 777-859, 1968.

Haar, D., *Rept. Progr. Phys.*, 24, p. 304, 1961.

Hahn, E.L., "Spin echoes," *Phys. Rev.*, 80, p. 580, 1950.

Hall, R.N., Fenner, G.E., Kingsley, J.D., Soltys, T.J., and Carlson, R.O., "Coherent light emission from GaAs junctions", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, pp. 366-378, November 1962.

Heaviside, O., *Electromagnetic Theory*, Dover, 1950.

Hemqvist, K.G., and J.R. Fendley, Jr., "Construction of long life argon laser", *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-3, pp. 66-72, February 1967.

Huerta, A. A., Bautista, E., Villegas, L. J. and Villagrán, M., "High Voltage pulse generators and spark gap for gaseous discharge control," *Revista Mexicana de Física*, 41, No. 3, pp. 408-418, 1995.

Javan, A., Bennett, W.R., Jr., and Herriott, D.R., "Population inversion and continuous optical maser oscillation in gas discharge containing a helium-neon mixture", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 6, pp. 106-110, February 1961.

Johnson, L.F., "Optically pumped pulsed crystal lasers other than ruby", *Lasers* vol. I, A.K. Levine, Ed. New York: Dekker, pp. 137-180, 1966.

Johnson, L.F., Boyd, G.D., Nassau, K., and Soden, R.R., "Continuous operation of a  $\text{CaWO}_4:\text{Nd}^{3+}$  optical laser", *Proc. IRE*, vol. 50, p. 213, February 1962.

Johnson, M.R., and Holonyak, N., Jr., "Optically pumped thin-platelet semiconductor lasers," *J. Appl. Phys.*, vol. 39, pp.3977-3985, July 1968.

Kaminow, I.P. and Siegman, A.E., "Lasers devices and Applications", IEEE Press, New York, 1973.

Kaminow, I.P., and A.E. Siegman, *Laser devices and applications*. New York: IEEE Press, pp. 8-9, 1973.

King, R.W.P., *Transmission Line Theory*, McGraw-Hill, New York, 1955.

Kiss, Z.J., and Pressley, R.J., "Crystalline solid lasers", *Proc. IEEE*, vol. 54, pp. 1236-1248, October 1966.

Kogelnik, H., "Imaging of optical modes - resonators with internal lenses," Bell Syst. Tech. J., 44, pp. 455-494, March 1963.

Kogelnik, H., and Li, T., "Laser beams and resonators," Appl. Opt., 5, pp. 1550-1556, October 1966.

Kogelnik, H., Ippen, E.P., Dienes, A., and Shank, C.V., "Astigmatically compensated cavities for CW dye lasers," IEEE J. Quantum Electron., QE-8, p. 373, March 1972.

Kramers, H.A., Atti. Congr. Intern. Fis., 2, p. 545, 1927.

Kronig, R.L., J. Opt. Soc., 12, p. 547, 1926.

Kumit, N.A., Abella, I.D., and Hartman, S.R., "Observation of a photon echo," Phys. Rev. Letters, 13, p. 567, 1964.

Kushida, T., Marcos, H.M., and Geusic, J.E., "Laser transition cross section and fluorescence branching ratio for Nd<sup>3+</sup> in yttrium aluminum garnet", Phys. Rev., vol. 167, pp. 289-291, March 1968.

Labuda, E.F., E.I. Gordon and R.C. Miller, "Continuous-duty argon ion lasers", IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-1, pp. 273-279, September 1965.

Lamb, W.E., Jr., "Theory of an optical maser," Phys. Rev., 134, (6A), p. A1429, 1964.

Lamb, W.E., Jr., Phys. Rev., 55, p. 234 (A), 1939.

Lamb, W.E., Jr., Phys. Rev., 85, p. 268, 1950.

Langmuir, I., and Compton, K. T., Rev. Mod. Phys., 3, 251, 1931.

Lasher, G.J., and Stern, F., "Spontaneous and stimulated line shapes in semiconductor lasers", Phys. Rev., vol. 133, pp. A553-563, January, 1964).

Laures, P., "Variation of the 6238-A gas laser output power with mirror transmission," Phys. Letters, 10, p. 61, 1964.

Leonard, D.A., "Saturation of the Molecular Nitrogen Second Positive Laser Transition," Appl. Phys. Lett., vol. 7, 1, July 1965.

Lieberman, I., and Grassel, R.L., "A comparison of lamps for use in high continuous power Nd:YAlG lasers", Appl. Opt., vol. 8, pp. 1875-1878, September 1969.

Loeb, L. B., "Fundamental Processes of Electrical Discharges in Gases", p. 473.

Maiman T.H., "Stimulated optical radiation in ruby masers", Nature, vol. 187, pp. 493-494, August 1960.

Maiman, T.H., "Stimulated optical radiation in ruby," Nature, 187, p. 493, 1960.

McCall, S.L., and Hahn, E.L., "Pulse-area pulse-energy description of a travelling-wave laser amplifier," Phys. Rev., A2, p. 861, 1970.

McCall, S.L., and Hahn, E.L., "Self-induced transparency by pulsed coherent light," Phys. Rev. Letters, 18, p. 908, 1967.

McCumber, D.E., "Theory of phonon-terminated optical masers," Phys. Rev., vol. 134, pp. A299-A306, April 1964.

Meingailis, I, Phelan, R.J., Jr., and Rediker, R.H., "Luminescence and coherent emission in a large volume injection plasma in InSb," Appl. Phys. Lett., vol. 5, pp. 99-100, September 1964.

Meingailis, I., "Longitudinal injection-plasma laser in InSb," Appl. Phys. Lett., vol. 6, pp. 59-60, February 1965.

Millikan, R. A., and Eyring, C. F., Phys. Rev., 27, 51, 1926.

Moore, R.K., Travelling-Wave Engineering, McGraw-Hill, New York, 1960.

Mueller, E. W., Zeit. f. Physik, 102, 734, 1936.

Nathan, M.I., Dumke, W.P., Burns, G., Dill, F.H., Jr., and Lasher, G.J., "Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions," Appl. Phys. Lett., vol. 1, pp. 62-64, November 1962.

Nicol, F.H., "Ultraviolet ZnO laser pumped by an electron beam," Appl. Phys. Lett., vol. 9, pp. 13-15, July 1966.

Ohlmann, R.C., Steinbruegge, K.B., and Mazelski, R., "Spectroscopic and laser characteristics of neodymium-doped calciumfluoroapatite", Appl. Opt., vol. 7, pp. 905-914, May 1968.

Oliveira dos Santos, B., Fellows, C.E., Oliveira e Souza, J. B. and Massone, C. A., "A 3% Efficiency N2 Laser," Appl. Phys. 41, pp. 241-244, 1986.

Osternik, L.M., and Foster, J.D., "A mode-locked Nd:YAIG laser", J. Appl. Phys., vol. 39, pp. 4163-4165, August 1968.

Papadopoulos, A. D. and Serafetinides, A. A., "Investigation of the electrical characteristics of charge transfer circuits used in gas laser excitation," J. Phys. D: Appl. Phys. 24, pp. 1917-1924, 1991.

- Patel, C.K.N., W.L. Faust and R.L. McFarlane, "CW laser action on rotational transitions of the  $\Sigma_u^+ - \Sigma_g^+$  vibrational bands of CO<sub>2</sub>", Bull. Amer. Phys. Soc., vol. 9, p. 500, 1964.
- Persephonis, P., Giannetas, V., Georgiades, C., Parthenios, J. and Ioannou, A., "The inductance and resistance of the laser discharge in a pulsed gas laser," IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 31, No. 3, pp. 573-581, 1995.
- Persephonis, P., Giannetas, V., Georgiades, C., Parthenios, J. and Ioannou, A., "The influence of the external circuit on arc-discharge of a spark-gap; its application to a pulsed gas laser," IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 31, No. 3, pp. 567-571, 1995.
- Phelan R.J., Jr., and Rediker, R.H., "Optically pumped semiconductor laser," Appl. Phys. Lett., vol. 6, pp. 70-71, February 1965.
- Pierce, J.R., "Modes in sequences of lenses," Proc. Natl. Acad. Sci., 47, pp. 1808-1817, November 1961.
- Porta C., Andrés, y Godoy S., Salvador, "Láser de Nitrógeno con Componentes Nacionales," Instrumentación y Desarrollo, 2, vol. 1, pp. 3-8, 1982.
- Portis, A.M., "Inhomogeneous line broadening in F Centers," Phys. Rev., 91, p. 1071, 1953.
- Quist, T.M., Rediker, R.H., Keyes, R.J., Krag, W.E., Lax, B., McWhorter, A.L., and Zeiger, H.J., "Semiconductor maser of GaAs," Appl. Phys. Lett., vol. 1, pp. 91-92, December 1962.
- Rabi, I.I., Phys. Rev., 49, p. 324, 1936.
- Rabi, I.I., Phys. Rev., 51, p. 652, 1937.
- Rautian, S.G., and Sobel'mann, I.I., "Remarks on negative absorption," Opt. Spectry., vol. 10, pp. 65-66, January 1961.
- Richardson, O. W., "Emission of Electricity from Hot Bodies", Longmans, Green & Co., New York, 1921.
- Richardson, O. W., Cambridge Phil. Soc., Proc. 11, 286, 1901.
- Ross, D., "Room temperature ruby CW laser," Microwaves, vol. 3, p. 29, April 1965.
- Salzmann, H. and Strohwalde, H., "High Power, Subnanosecond Pulse from a TEA Nitrogen Laser with Traveling Wave Excitation," Optics Communications, vol. 12, 4, December 1974.
- Sargent III, M., Toschek, P.E., and Danielmeyer, H.G., Appl. Phys., 11, p. 55, 1976.
- Schäfer, F.P., Schmidt, W., and Volze, J., "Organic dye solution laser," Appl. Phys. Lett., vol. 9, pp. 308-309, October 1966.

- Schawlow, A.L., and Townes, C.H., "Infrared and optical masers", Phys. Rev., vol. 112, pp. 1940-1949, December 1968.
- Schawlow, A.L., and Townes, C.H., "Infrared optical masers," Phys. Rev., 112, 1968.
- Schmidt, W., and Schäfer, F.P., "Blitzlampengepumpte Farbstofflaser," Z. Naturforsch., vol. 22a, pp. 1563-1566, October 1967.
- Schottky, W., Ann. d. Physik, 44, 1011, 1914.
- Schwab, A.J., "Compact High-Power N<sub>2</sub> Laser: Circuit Theory and Design," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-12, 3, pp. 183-188, March 1976.
- Shipman, J.D., Jr., "Traveling Wave Excitation of High Power Gas Lasers," Appl. Phys. Lett., vol. 10, 1, January 1967.
- Silva, A. V. F., Tsui, K. H., Pimentel, N. P. and Massone, C. A., "Plasma Electronics in Pulsed Nitrogen Laser," IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 28, No. 9, pp. 1937-1940, 1992.
- Silva, A. V. H., Tsui, K. H., Couceiro, I. B., Tavares, A. D. Jr. and Massone, C. A., "Resonant, Narrowing of the Nitrogen Laser pulse by Plasma Impedance Match," IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 27, No. 3., pp. 448-453, 1991.
- Smith, P.H., "An improved transmission line calculator," Electronics, 17, pp. 140-144 and pp. 318-325, 1944.
- Smith, P.H., "Charts for transmission line measurements and calculations," Electronics, 12, pp. 29-31, 1939.
- Snavely, B.B., and Peterson, O.G., "Experimental measurement of the critical population inversion for the dye solution laser," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-4, pp. 540-545, October 1968.
- Sorokin, P.P., Culver, W.H., Hammond, E.C., and Lankard, J.R., "End-pumped stimulated emission from a thiocarbocyanine dye," IBM J. Res. Develop., vol. 10, p 401, September 1966.
- Sorokin, P.P., and Lankard, J.R., "Stimulated emission observed from an organic dye, chloroaluminum phthalocyanine," IBM J. Res. Develop., vol. 10, pp. 162-163, March 1966.
- Sorokin, P.P., Lankard, J.R., Hammond, E.C., and Moruzzi, V.L., "Laser-pumped stimulated emission from organic dyes: experimental studies and analytical comparisons," IBM J. Res. Develop., vol. 11, pp. 130-148, March 1967.
- Southgate, P.D., "Stimulated emission from bulk field-ionized GaAs," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-4, pp. 179-185, April 1968.
- Spaeth, M.L., and Bortfield, D.P., "Stimulated emission from polymethine dyes," Appl. Phys. Lett., vol. 9, pp. 179-181, September 1966.

- Stockman, D.L., Mallory, W.R., and Tittel, K.F., "Stimulated emission in aromatic organic compounds," Proc. IEEE, vol. 52, pp.318-319, March 1964.
- Stoletow, A., J. d. Physique, 9, 468, 1890.
- Tiffany, W.B., R. Targ and J.D. Foster, "Kilowatt CO<sub>2</sub> gas transport laser", Appl. Phys. Lett., vol. 15, pp. 91-93, August 1969.
- Weber, M.J., and Bass, M., "Frequency and time dependent gain characteristics of dye lasers," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-5, pp. 175-188, April 1968.
- Weber, M.J., Bass, M., Andriga, K., Montchamo, R.R., and Comperchio, E., "Czocharlski growth and properties of YAlO<sub>3</sub> crystals", Appl. Phys. Lett., vol. 15, pp. 342-345, November 1969.
- Weiser, K., and Stern, F., "Higher order transverse modes in GaAs lasers," Appl. Phys. Lett., vol. 5, pp. 115-116, September 1964.
- Weiser, K., and Woods, J.F., "Evidence for avalanche injection laser in p-type GaAs," Appl. Phys. Lett., vol. 7, pp. 225-228, October 1965.
- White, A.D. and Gordon, E.J., "Excitation Mechanisms and Current Dependence of Population Inversion in He Ne Lasers", Appl. Phys. Let., Vol 3, p. 197, 1963.
- Wilson, D.K., "Stimulated emission of exciton recombination radiation in GaAs p-n junctions", Appl. Phys. Lett., vol. 3, pp. 127-129, October 1963.
- Witteman, W.J., "Increasing continuous laser action on CO<sub>2</sub> rotational vibrational transitions through selective depopulation of the lower laser level by means of water vapor", Phys. Lett., vol. 13, p. 125, 1965.
- Yariv, A., "Spontaneous emission from an inverted spin system," J. Appl. Phys., 31, p. 740, 1960.
- Yariv, A., Quantum Electronics, 3rd. Ed., New York: Wiley, 1989.
- Yariv, A., Quantum Electronics. New York: Wiley, 1967, ch. 15, pp. 242-243.
- Young, C.G., "Continuous glass laser", Appl. Phys. Lett., vol. 2, pp 151-152, April 1963.

## RESUMEN

### ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO ELÉCTRICO ENTRE UN SISTEMA DE BOMBEO ARMÓNICO Y UN MEDIO ACTIVO LASER GASEOSO MEDIANTE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

En el presente trabajo se propone un método para analizar el acoplamiento de impedancias eléctricas entre un sistema de bombeo armónico y la cavidad de un láser gaseoso. Para ello se revisan los temas relacionados con la materia, en particular los siguientes:

Tecnología actual para producir emisión láser en medios activos gaseosos, líquidos y de estado sólido, con particular énfasis en la técnica de bombeo para la población de los estados atómicos que contribuyen al efecto láser.

Teoría clásica de descargas en gases, en particular, descargas automantenidas y voltaje de ruptura para descargas tipo Townsend, donde el cátodo es un cátodo frío y donde la mecánica de ionización es principalmente mediante colisiones con electrones y en menor grado por iones.

Teoría electromagnética de cavidades resonantes y modos normales en cavidades tipo Fabry-Perot. De forma particular se analiza el caso de una cavidad resonante láser con geometría cilíndrica y se definen los parámetros característicos de una cavidad láser.

Modelo atómico de dos estados y solución exacta de Rabi para la perturbación armónica en la aproximación secular del campo excitante.

Modelo estadístico basado en la matriz de densidad y se define el concepto de susceptibilidad atómica.

Con base en el análisis anterior se estudian los pulsos láser y se describe en función del modelo de precesión de pseudovectores atómico y de campo perturbativo.

Líneas de transmisión y sus soluciones para frecuencias altas.

En el último capítulo del trabajo se presentan algunos parámetros relacionados con las líneas de transmisión, tales como las constantes de acoplamiento con sistemas oscilantes armónicos, la definición  $Q$  y el coeficiente de reflexión. En seguida se proponen los circuitos de excitación armónica y se definen como osciladores eléctricos, caso particular de los cuáles es el circuito 'Blumlein'. Se trabaja la solución a las ecuaciones de Kirchhoff en la aproximación a primer orden, es decir, como oscilador armónico y se discute su funcionamiento. El paso siguiente es proponer el acoplamiento de un sistema eléctrico de bombeo con un circuito resonante vía una línea de transmisión de constantes eléctricas definidas. Se propone el diseño de líneas de transmisión de constantes distribuidas (como placas metálicas), cuyas constantes eléctricas varían dependiendo de su geometría y, por consecuencia, también los valores para la impedancia y admitancia eléctricas. Se continúa con encontrar las características frecuenciales de impedancia eléctrica de un medio activo láser gaseoso y substituirlo en lugar del circuito resonante en el acoplamiento del sistema eléctrico de bombeo y la línea de transmisión. El sistema atómico se representa mediante el pseudovector atómico de precesión, que contiene información de la susceptibilidad eléctrica del medio atómico y su polarización en presencia de una perturbación armónica. Finalmente se estudia el efecto que tiene sobre el acoplamiento anterior el que la duración de la excitación sea del orden del tiempo que tarda el pseudovector en girar  $180$  grados, es decir la duración de un pulso  $\pi$ . Esto impone algunas restricciones más sobre las características eléctricas de la línea de transmisión. Se concluye con un ligero estudio de estabilidad en láseres desde la perspectiva de la densidad fotónica en la cavidad.

Como conclusión del presente trabajo de tesis se debe tomar en consideración las características eléctricas de impedancia de un sistema eléctrico de bombeo y un láser, dado que este último puede modelarse como un circuito resonante, que para ciertas condiciones de oscilación presenta diferentes comportamientos eléctricos no-lineales que pueden poner en riesgo la electrónica involucrada o determinar su respuesta de forma imprevista. El acoplamiento mediante una línea de transmisión es el vehículo idóneo para filtrar selectivamente las características deseadas de la perturbación eléctrica al sistema atómico, siempre que su diseño sea consistente con los tiempos y frecuencias características del proceso láser.