2
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONTINUOS INDESCOMPONIBLES CON UNA Y DOS COMPOSANTES"

T E S I S

Que para obtener el título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

GUSTAVO ADOLFO ARELLANO SANDOVAL

Director de Tesis: Dra. Isabel Puga Espinosa

Facultad de Ciencias
U. N. A. M.

1997

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "CONTINUOS INDESCOMPONIBLES CON UNA Y DOS COMPOSANTES"

realizado por GUSTAVO ADOLFO ARELLANO SANDOVAL

con número de cuenta 8338413-2 **, pasante de la carrera de** MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA	
Propietario	DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA	
Propietario	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA	
Suplente	M. en C. JEFFERSON EDWIN KING DAVALOS	
Suplente	MAT. ROSA MARTHA GARCIA DE LA ROSA	

P.A. Virginia Abrín Batule
Consejo Departamental de Matemáticas

Dedicatorias

a mi familia, la cual siempre me apoyó y proveyó de todo lo necesario.

a todas aquellas personas que estuvieron a mi lado desde el inicio de este sueño y que aunque ahora no lo estén, se les recuerda y agradece todos sus cuidados, comprensión y cariño.

Prólogo

El presente trabajo detalla el artículo "Indecomposable continua with one and two composants" original del Dr. David P. Bellamy (Fundamenta Mathematicae, 1987) en el cual se establecen las condiciones para que un continuo indescomponible tenga una o dos composantes, se construye un continuo que cumple con tales condiciones y se prueba que este tiene exactamente dos composantes.

Ya que todo continuo métrico indescomponible tiene siempre una cantidad no numerable de composantes, es claro entonces que el continuo construido en este trabajo es no métrico. Tal construcción involucra el límite inverso de ω_1 continuos métricos indescomponibles y del límite inverso de algunas familias de hiperespacios de continuos.

Este trabajo esta dividido en cuatro capítulos. En los tres primeros se prueban resultados generales referentes a continuos, composantes, límites inversos e hiperespacios. El último capítulo es propiamente la exposición en detalle del artículo mencionado al inicio de este prólogo.

Quisiera finalmente destacar que en la mayoría de los resultados referentes a límites inversos que se exponen en el capítulo II, se han enunciado y probado para familias de espacios cuyos índices son elementos de un conjunto dirigido ya que la todos los resultados encontrados a la fecha estaban enunciados para familias de espacios cuyos índices eran elementos de un conjunto totalmente ordenado.

Agradezco la colaboración de todas aquellas personas que contribuyeron con sugerencias, ideas y comentarios técnicos al presente trabajo y en especial a la Doctora Isabel Puga, quién lo dirigió con interés y paciencia durante todo su desarrollo.

30 Mayo de 1997

Índice

Capítulo I *Continuos y composantes*

Definición 1.1
Definición 1.2 .... Página 1
Proposición 1.1 .... Página 2
Proposición 1.2
Definición 1.3 .... Página 3
Teorema 1.1
Principio Maximal .... Página 4
Definición 1.4
Definición 1.5 .... Página 5
Ejemplos .... Página 6
Teorema 1.3
Proposición 1.3
Lema 1.1 .... Página 7
Teorema 1.4
Teorema 1.5 .... Página 8
Teorema 1.6 .... Página 9
Teorema 1.7
Teorema 1.8 .... Página 10
Teorema 1.9
Corolario 1.1 .... Página 11
Corolario 1.2
Definición 1.5
Ejemplo .... Página 12
Lema 1.2 .... Página 13

Capítulo II *Límites Inversos*

Teorema 2.1
Definición 2.1
Definición 2.2 .... Página 1
Proposición 2.1 .... Página 2
Definición 2.3
Proposición 2.2 .... Página 4
Teorema 2.2
Definición 2.4
Lema 2.1 .... Página 5
Lema 2.2 .... Página 7
Definición 2.5 .... Página 8
Teorema 2.3 .... Página 9
Lema 2.3 .... Página 10

Capítulo III *Hiperespacios*

Definición 3.1
Definición 3.2
Proposición 3.1 .... Página 1
Definición 3.3
Proposición 3.2 .... Página 3
Proposición 3.3 .... Página 4
Teorema 3.1 .... Página 6
Lema 3.1 .... Página 10
Lema 3.2 .... Página 11
Teorema 3.2 .... Página 12
Teorema 3.3
Proposición 3.4 .... Página 13

Capítulo IV *Continuos indescomponibles con una y dos composantes*

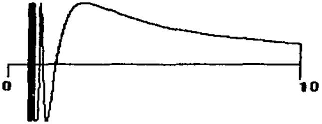
Teorema 4.1 .... Página 1
Lema 4.1 .... Página 5
Lema 4.2 .... Página 6
Teorema 4.2 .... Página 13
Corolario 4.1
Bibliografía .... Página 14

Definición 1.1

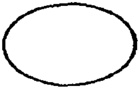
Un continuo X es un espacio topológico no vacío, Hausdorff, compacto y conexo; un subcontinuo K de X es un subespacio de éste , que a su vez es también un continuo. Decimos que X es continuo métrico si X es un continuo y además admite una métrica.

El hecho de que un espacio sea compacto y conexo lo hace interesante y al mismo tiempo, rico en propiedades y resultados. Algunos de estos resultados serán expuestos en este documento. A continuación algunos ejemplos de continuos:

a) $I = [0, 1]$

b) $X=$ 

c) $X=$ 

d) $S^1=$ 

Como es natural, antes de profundizar en el estudio de los continuos, necesitamos probar algunos resultados básicos. Estos resultados están generalizados con base en la siguiente definición:

Definición 1.2

Definimos un conjunto dirigido como un conjunto D con una relación $<$ entre sus elementos que satisface:

a) Para toda $\alpha \in D$, $\alpha \nless \alpha$. (α no está relacionado con α, antireflexividad).

b) Para todas α, β, γ en D, $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ implica $\alpha < \gamma$ (transitividad).

c) Para todas α, β en D, existe λ en D tal que $\alpha < \gamma$ y $\beta < \gamma$.

Proposición 1.1

Sean D un conjunto dirigido, X_0 un espacio compacto y Hausdorff y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una familia de espacios compactos no vacíos contenidos en X_0 tales que $X_\beta \subseteq X_\alpha$ si $\alpha < \beta$. Sea $X = \bigcap_{\gamma \in D} X_\gamma$. Si U es un subconjunto abierto de X_0 tal que $U \supset X$, entonces existe $\varsigma \in D$ tal que $U \supset X_\alpha$ para todo $\alpha \geq \zeta$. Más aun, X es no vacío.

Demostración. Supongamos que para cada $\eta \in D$ existe $\alpha(\eta) > \eta$ tal que $X_{\alpha(\eta)} - U \neq \varnothing$.

La familia de cerrados $\{X_{\alpha(\eta)} - U\}$ tiene la propiedad de la intersección finita: $(X_{\alpha(\eta_1)} - U) \cap \ldots \cap (X_{\alpha(\eta_k)} - U) \neq \varnothing$, ya que $(X_{\alpha(\eta_1)} - U) \cap \ldots \cap (X_{\alpha(\eta_k)} - U) = (X_{\alpha(\eta_1)} \cap \ldots \cap X_{\alpha(\eta_k)}) - U$ y como $(X_{\alpha(\eta_1)} \cap \ldots \cap X_{\alpha(\eta_k)}) \supseteq X_\xi$ para $\xi > \text{máx}\{\alpha(\eta_1), \alpha(\eta_2), \ldots, \alpha(\eta_k)\}$, entonces $(X_{\alpha(\eta_1)} - U) \cap \ldots \cap (X_{\alpha(\eta_k)} - U) \supseteq X_\xi - U \supseteq X_{\alpha(\xi)} - U \neq \varnothing$.

Así pues, $\bigcap_{\eta \in D}\left(X_{\alpha(\eta)} - U\right) \neq \varnothing$, o lo que es lo mismo, $(\bigcap_{\eta \in D} X_{\alpha(\eta)}) - U \neq \varnothing$. Se probará que $\bigcap_{\eta \in D} X_{\alpha(\eta)} = \bigcap_{\eta \in D} X_\eta = X$ de donde obtendremos que $X - U \neq \varnothing$, lo que es una contradicción y concluirá la prueba. Bastará probar que $\bigcap_{\eta \in D} X_{\alpha(\eta)} \subseteq \bigcap_{\eta \in D} X_\eta$.

Sea pues, $z \in \bigcap_{\eta\in D} X_{\alpha(\eta)}$ y $\gamma \in D$. Como $\bigcap_{\eta\in D} X_{\alpha(\eta)} \subseteq X_{\alpha(\gamma)}$ y $X_{\alpha(\gamma)} \subseteq X_\gamma$ entonces $z \in X_\gamma$, que es lo que se quería mostrar.

Proposición 1.2

Sean D un conjunto dirigido, X_0 un espacio compacto y Hausdorff. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in D}$ una familia de continuos contenidos en X_0 tales que $X_\beta \subseteq X_\alpha$ si $\alpha < \beta$ y sea $X = \bigcap_{\alpha\in D} X_\alpha$. Entonces X es un continuo.

Demostración. X es un compacto porque la intersección de compactos es compacto. Supongamos a X inconexo. Sea $X = A \cup B$ con A, B ajenos, no vacíos y cerrados. Como X_0 (que es el mayor espacio en términos de contención) es normal, (compacto y Hausdorff $\Rightarrow$ normal) existen abiertos ajenos V, W de X_0 tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces $X_\beta \subseteq U$ para alguna $\beta \in D$ (proposición 1.1). Entonces $X_\beta = (X_\beta \cap V) \cup (X_\beta \cap W)$. Como $X_\beta \supset X = A \cup B$, y $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ se tiene que $X_\beta \cap V \neq \varnothing$ y $X_\beta \cap W \neq \varnothing$, por lo que, X_β no es conexo, lo cual es una contradicción.

Algunos resultados básicos en lo referente al producto topológico de continuos serán expuestos en el capítulo II; por el momento se requiere de una importante definición que nos permitirá profundizar en el estudio de los continuos.

Definición 1.3

Sea X un continuo y sea $A \subseteq X$ cualquier subconjunto de X. Diremos que un continuo $H \subseteq X$ es irreducible alrededor de A si $A \subseteq H$ y para todo subcontinuo K de X con $A \subseteq K \subseteq H$, se tiene que $K = H$.

Para tener una idea más clara del concepto, consideramos $I = [0, 1]$. Sea $H = [1/3, 1/2] \subset I$. Entonces H es irreducible alrededor de $A = \{1/3, 1/2\}$. Más aun, podemos decir que I es irreducible alrededor de $\{0, 1\}$.

Existen continuos X tales que para todo subcontinuo $A \subset X$, con $A \neq X$, se tiene que X no es irreducible alrededor de A, como S^1, sin embargo, para todo subcontinuo $A \subset X$, A está contenido en un subcontinuo de X irreducible alrededor de A. Formalizaremos esto con el siguiente teorema que junto con las definiciones de composante y continuo descomponible, darán origen al estudio de interesantes resultados.

Teorema 1.1

Sea X un continuo y sea A cualquier subconjunto de X. Entonces, existe un subcontinuo H de X tal que H es irreducible alrededor de A.

Antes de probar este teorema será necesario enunciar el llamado Principio Maximal y una definición que le acompaña. Sea A cualquier conjunto y sea $<$ una relación binaria definida entre los elementos de A. Decimos que $<$ define un orden simple sobre A o que A está simplemente ordenado por $<$ si, *a)* para todo a, b en A se tiene que $a < b$ o bien que $b < a$ y *b)* $a < b$ y $b < c$ implica $a < c$.

Si en el enunciado anterior *a)* no necesariamente se cumple para cada pareja de puntos a, b en A entonces decimos que $<$ define un orden parcial sobre A o que A está parcialmente ordenado por $<$. Cabe mencionar que un conjunto simplemente ordenado se dice que está bien ordenado si todo subconjunto no vacío A' de A tiene un primer elemento.

PRINCIPIO MAXIMAL. Sea A un conjunto parcialmente ordenado por $<$. Sea B un subconjunto de A y suponga que B está simplemente ordenado por $<$. Entonces existe un subconjunto M de A que está simplemente ordenado por $<$, M contiene a B, y no es subconjunto propio de ningún otro subconjunto de A con esas propiedades. *(Hocking & Young ed. Addison Wesley, 1960 pag 25)*

Demostración del Teorema 1.1. Sea $\{H_\alpha\}$ la colección de todos los subcontinuos de X que contienen a A. Esta no es vacía, pues el total es un subcontinuo que contiene a A. Si definimos, por inclusión, un orden parcial en $\{H_\alpha\}$, usando el principio maximal, podemos obtener una subcolección maximal $\{K_{\alpha'}\}$ con un orden simple. Sea $K = \cap K_{\alpha'}$. De la proposición 1.2, K es un continuo que contiene a A. Si K no fuera irreducible alrededor de A, un subcontinuo T de K contendría a A y esto contradiría la maximalidad de $\{K_{\alpha'}\}$.

Definición 1.4

Sea X un continuo y sea $p \in X$ Definimos la composante de p como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p y la denotaremos por Cp.

Equivalentemente, $Cp = \{x \in X \mid \exists$ un subcontinuo propio H de X con $x, p \in H\}$. De aquí que si $y \notin Cp$, entonces X es irreducible entre p y y.

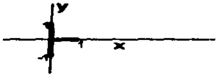
Definición 1.5

Sea X un continuo. Decimos que X es descomponible si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Un continuo es indescomponible si no es descomponible.

La construcción de un continuo que es indescomponible no es inmediata ni trivial. En este momento, con las herramientas que tenemos, es posible construir uno; sin embargo, esto se realizará posteriormente, después de terminar el análisis de ciertas propiedades que harán natural su construcción. A continuación, algunos ejemplos que ilustrarán la definición de composante:

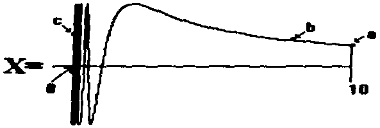
a) Sea $X = I = [0, 1]$ el intervalo unitario. Entonces $C_0 = [0,1)$, $C_1 = (0,1]$ y $C_{1/2} = [0, 1]$. Observemos que $C_t = [0, 1]$ para toda $t \in (0,1)$.

b) Sea $X = D_3 = \{0\} \times [-1, 1] \cup I \times \{0\}$ cuya gráfica es la siguiente:



En este caso, $C_p = D_3$ para todo $p \in D_3$. Así pues, vemos que D_3 sólo tiene una composante. Hacemos la misma observación para S^1, donde S^1 representa al conjunto de puntos en el plano cartesiano cuya distancia al origen es la unidad.

c) Definamos $Y = \{ p \in R^2 \mid p = (x, Sen(1/x))$ para $x \in (0, 10] \}$ y $\overline{Sen\ (1/x)}$, como $Y \cup (\{0\} \times [-1, 1]) = X$.



La composante de X para **b**, y todo punto que esté en $Y \setminus \{a\}$, es X; la composante de X para **a** es Y y la composante para **c** es $X \setminus \{a\}$. Como podemos ver, X tiene exactamente tres composantes distintas.

En los ejemplos anteriores podemos ver que las composantes pueden ser, en ciertos casos, todo el continuo y en otros, casi todo. De hecho, se probará que las composantes de un continuo K son densas en K y que si K es descomponible, entonces existe $p \in K$ tal que $C_p = K$. He aquí algunos resultados interesantes:

Teorema 1.3

Si K es un continuo descomponible, entonces K es composante de alguno de sus puntos.

Demostración Supongamos que $K = A \cup B$ donde A, B son subcontinuos propios de K. Sea p cualquier punto en $A \cap B$ (K es conexo, por lo que $A \cap B \neq \emptyset$). Entonces K es una composante para p. Si x es cualquier punto de K, entonces K contiene a un subcontinuo propio (ya sea A o B) conteniendo a p y a x, por lo que el teorema queda probado.

Proposición 1.3

Sea K un continuo y sean C_a, C_b composantes en K tales que $C_b \subseteq C_a \neq K$. Entonces $C_a = C_b$.

Demostración. Sea $t \in C_a$. Entonces existe un subcontinuo propio H de K que contiene a a y a t. Como $b \in C_a$, entonces existe un subcontinuo propio T de K que contiene a a y a b.
De lo anterior concluimos que $H \cup T$ es un continuo, pues es la unión de dos continuos con $a \in H \cap T$; que es propio, pues $H \cup T \subseteq C_a \neq K$ y que además $b, t \in H \cup T$, por lo que $t \in C_b$, que es lo que se quería probar.

Lema 1.1

Sea K un continuo y sean C_a, C_b composantes en K distintas de K tales que $C_a \neq C_b$. Entonces K es irreducible alrededor de $\{a, b\}$.

Demostración. Supongamos que K no es irreducible alrededor de $\{a, b\}$. Entonces existe un subcontinuo propio H de K que contiene a $\{a, b\}$. Entonces $H \subseteq C_b$.

Sea $t \in C_b - C_a$. Entonces existe un subcontinuo propio T de K, contenido en C_b, que contiene a $\{t, b\}$.

De lo anterior concluimos que $H \cup T$ es un subcontinuo propio de K pues $H \cup T \subseteq C_b \neq K$ (proposición 1.3) y que además a, $t \in H \cup T$, por lo que $t \in C_a$, lo que es una contradicción a la elección de t. Esto concluye la demostración.

Teorema 1.4

Sean K un continuo descomponible y C_a, C_b composantes distintas en K. Entonces $K = C_a \cup C_b$.

Demostración. Se asume que $C_a \neq K$ y que $C_b \neq K$. De otra manera, la demostración seria trivial. Ahora bien, supongamos que $K \neq C_a \cup C_b$. Entonces existe $k \in K$ tal que $k \notin C_a \cup C_b$.

Sean A, B subcontinuos propios de K tales que $K = A \cup B$.

Como (lema 1.1) K es irreducible entre a y b, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a \in A$ y $b \in B$.

Entonces $\{k, a\} \in A$ o bien $\{k, b\} \in B$ lo cual es una contradicción pues $k \notin C_a$ y $k \notin C_b$.

Teorema 1.5

Si K es un continuo descomponible entonces K tiene o bien una o bien tres composantes.

Demostración. Sea p $\in$ K tal que C_p = K. supongamos que K tiene mas de una composante. Entonces existe q $\in$ K tal que $C_q \neq$ K por lo que podemos elegir t $\in$ K - C_q. De lo anterior se concluye que $C_t \neq$ K y que $C_t \neq C_q$ pues q $\in C_t$. A continuación, se probará que estas 3, son las únicas posibles composantes de K.

Sea r $\in$ K tal que $C_r \neq$ K, $C_r \neq C_q$ y $C_r \neq C_t$. Por el teorema 1.4 podemos suponer que r$\in C_t$. Es decir, que existe un subcontinuo propio A ($A \subset C_t$) de K que contiene a t y a r.

Sea x $\in C_t$. Entonces existe un subcontinuo propio $B \subset C_t$ de K que contiene a x y a t. Como $A \cup B$ es un subcontinuo propio de K ($A \cup B \subseteq C_t \neq$ K) que contiene a x y a r, se tiene que x $\in C_r$ y por lo tanto, $C_t \subseteq C_r$. Esto implica que $C_t = C_r$ (proposición 1.3) lo que es una contradicción, por lo que el teorema queda demostrado.

Los anteriores resultados muestran que si un continuo es descomponible, el número de sus composantes es 1 o bien 3, que éstas no son ajenas, que una es el total, y que la unión de cualesquiera dos de ellas es el total. A continuación se discuten algunos resultados en lo referente a continuos métricos que no son descomponibles. Como se verá, las composantes de estos continuos, se comportan, en número y estructura, de manera muy diferente a las de los continuos que son descomponibles.

Teorema 1.6

Un continuo P es descomponible si y sólo si existe un subcontinuo propio C de P con interior no vacío.

Demostración. Sea $\overset{\circ}{C}$ como en la hipótesis. Si P - C es conexo, como $\overline{P - C}$ no es todo P, vemos que P = C $\cup$ $\overline{P - C}$ es una descomposición de P. Si P - C es no conexo, entonces P - C = U $\cup$ V donde U y V son abiertos ajenos, luego, U $\cup$ C y V$\cup$ C son subcontinuos propios de P (*) y entonces (U$\cup$C) $\cup$ (V$\cup$C) es una descomposición de P. Inversamente, si P es la unión de dos subcontinuos propios C_1 y C_2 entonces C_1 - C_2 es un abierto no vacío en **P**; por lo tanto C_1 tiene puntos interiores.

(*) *Hocking & Young ed. Addison-Wesley, 1960 pag 16 Teorema 1-14*

De lo anterior, podemos concluir que si K es un continuo métrico indescomponible, éste no posee ningún subcontinuo propio con puntos interiores.

Teorema 1.7

Si K es un continuo métrico, cada composante de K es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios de K.

Demostración Sea C_p la composante determinada por un punto p. El conjunto abierto K - {p} tiene una base contable $\{U_i\}$. Para cada i, sea C_i el mayor conexo de $K - U_i$ que contiene a p (a C_i se le conoce también como "la componente" de $K - U_i$ que contiene a p). Entonces para cada i, C_i es un subcontinuo propio de K que contiene a p y por lo tanto, $\bigcup_{i\in N} C_i \subseteq C_p$.

Por otro lado, sea $x \in C_p$. Como C_p es una composante de K, existe un subcontinuo propio K' de K que contiene a p y a x. Sea $q \in K - K'$. Entonces existe j tal que $q \in U_j$ y $U_j \subseteq K - K'$. Así, K' es un subconjunto de C_j y $x \in C_j$. Por lo tanto, $C = \bigcup_{i\in N} C_i$ lo que concluye la demostración.

Teorema 1.8

Sea K un continuo métrico indescomponible. Entonces K tiene una cantidad no numerable de composantes.

Demostración. Suponga que K contiene sólo una cantidad numerable de composantes. Entonces (por el teorema 1.7) cada composante de K es unión numerable de subcontinuos propios de K. Esto implica que K es una unión numerable de subcontinuos propios y éstos, no pueden contener puntos interiores (si así fuera, K sería descomponible por el teorema 1.6). Esto contradice al teorema de Baire y concluye la demostración.

(**Teorema de Baire.** Si M es un espacio métrico completo, M no es la unión de una cantidad numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío. *Hocking & Young ed. Addison-Wesley, pag. 87*).

Teorema 1.9

Sea X un continuo indescomponible. Entonces la relación $x \approx y$ si x y y están en la misma composante es una relación de equivalencia.

Demostración. Sólo la transitividad requiere demostración. Supongamos que $x \approx y$ y que $y \approx z$. Entonces existen subcontinuos propios K y H de X tales que $x, y \in H$ y $y, z \in K$. Como $K \cup H$ es un subcontinuo de X, (pues $y \in K \cap H$) y es propio, ya que X es indescomponible, la demostración queda concluida.

Los resultados anteriores nos permiten enunciar dos corolarios que son determinantes en el estudio de los continuos indescomponibles y que harán ver natural la construcción de uno.

Corolario.

Si K es un continuo indescomponible, las composantes de K son ajenas dos a dos.

Corolario.

Si K es un continuo indescomponible, entonces K es irreducible entre cada dos puntos distintos de un conjunto no numerable.

Con las herramientas anteriores y ya habiendo madurado las ideas y conceptos fundamentales de la teoría de las composantes para continuos descomponibles e indescomponibles, podemos ahora, construir un continuo métrico indescomponible y, al mismo tiempo, podremos fácilmente ver que en verdad lo es. Primeramente, una definición que se usará para su construcción:

Definición 1.5

Sea S un subconjunto no vacío de R^n. Definimos como una cadena simple a la familia $\Im$ = $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos cerrados de S donde cada A_i con i = 1,2,..., n será llamado un *eslabón* y donde los elementos de $\Im$ tienen la propiedad de que $A_i \cap A_j \neq \varnothing \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$.

Adicionalmente, si $\Im = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una cadena simple de subconjuntos cerrados de $S \subseteq R^n$, decimos que $\Im$ va de x hasta z pasando por y si, $x \in A_1$, $z \in A_n$ y $y \in A_i$ para algún i $\in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. En el siguiente ejemplo, denotaremos por $\Im^* = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ que como podemos ver, es un subconjunto cerrado de S.

Ejemplo de un continuo indescomponible

Sean a, b, c puntos distintos de R^2 y sean $\Im_n$ cadenas en R^2 con n = 1,2, ... cuyos eslabones son discos cerrados con diámetro menor a 2^{-n} tales que:

i) $\forall$ n = 0, 1, ... $\Im_{3n+1}$ va de a hasta c pasando por b;

$\Im_{3n+2}$ va de b hasta c pasando por a;

y $\Im_{3n+3}$ va de a hasta b pasando por c.

ii) $\forall\ n = 1, 2, \ldots \quad \mathfrak{I}_n^* \supset \mathfrak{I}_{n+1}^*$.

De la propiedad *ii)* se sigue que si $X = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{I}_n^*)$ entonces $X = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{I}_{n+1}^*)$ (X es un continuo por la Proposición 1.2). Ahora se probará que X es irreducible entre a y c.

Sea K un subcontinuo propio de X con a, c $\in K$. Sea p $\in$ X - K. Entonces la distancia d(p, K) de p a K es positiva y por lo tanto existe n $\in$ N tal que d(p, K) $> 2^{-n}$. Como $\mathfrak{I}_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, existe i $\in$ {1, 2, ... , m} tal que p$\in A_i$ y entonces $A_i \cap K = \varnothing$ para algún i $\in$ {1, 2, ... , m}.

Sea $W = \bigcup_{s=1}^{i-1} A_s$ y sea $W' = \bigcup_{s=i+1}^{m} A_s$. Entonces:

i) $V = W \cap K$ y $V' = W' \cap K$ son cerrados de K.

ii) $V \cup V' = K$ pues ya que $A_i \cap K = \varnothing$, $(W \cup W') \cap K = (X - A_i) \cap K = K$

iii) $V \cap V' = \varnothing$ pues $(W \cap K) \cap (W' \cap K) = (W \cap W') \cap K = \varnothing$

iv) a $\in$ V y c $\in$ V'

De los cuatro puntos anteriores se obtiene que K no es conexo, lo que es una contradicción, por lo que concluimos que K = X. Análogamente se prueba que X es irreducible entre a y b y que también lo es entre b y c por lo que X es indescomponible (Lema ◇).

Lema ◇. Si un continuo X es irreducible entre cada dos de tres puntos elegidos de X entonces X es un continuo indescomponible.

Demostración. Supongamos que X es irreducible entre cada dos de tres puntos elegidos y que X es descomponible, es decir, que $X = A_1 \cup A_2$ con A_1 y A_2 subcontinuos propios de X.

Sean a, b, c $\in X$ los puntos elegidos. Entonces, dos de estos tres puntos están contenidos o bien en A_1 o bien A_2, digamos que a, b $\in A_1$. Como A_1 es un subcontinuo propio de X, se tiene entonces que X no es irreducible entre a y b, lo que es una contradicción. Esta contradicción muestra que X es indescomponible.

A continuación, un esquema del continuo que se construyó anteriormente. En él, se ven esbozados los tres primeros pasos de la construcción.

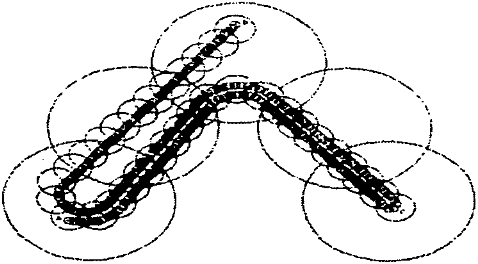


Figura 4 Esquema de la construcción anterior

Teorema 2.1

Sea D un conjunto dirigido. El espacio producto $\prod_{\alpha\in D} X_\alpha$ de la familia de espacios topológicos no vacíos $\{\ (X_\alpha, \tau_\alpha)\ \}_{\alpha\in D}$ es un espacio no vacío y conexo si y sólo si cada X_α es conexo. Más aun, si cada X_α es compacto, entonces el producto lo es. *(Topology. John G. Hocking & Gail S. Young p25 Addison-Wesley Inc. 1961)*

Con base en el teorema anterior podemos decir que el producto $C = \prod_{\gamma\in D} X_\gamma$ de continuos es un continuo. Más aun, C es un continuo no vacío si y sólo si, para cada $\gamma \in D$, X_γ es un continuo no vacío.

Definición 2.1

Sea D un conjunto dirigido. Un sistema inverso $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ consiste de dos familias: una familia de espacios topológicos no vacíos $\{\ (X_\alpha, \tau_\alpha)\ \}_{\alpha\in D}$ (llamados espacios coordenados) y una familia de funciones continuas $\{\, r[\alpha,\beta] \mid \alpha, \beta \in D \text{ y } \alpha \geq \beta\,\}$ (llamadas funciones de ligadura) con las propiedades:

i) $r[\alpha,\beta] : X_\alpha \to X_\beta$.

ii) Para $\alpha, \beta, \gamma \in D$ si $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ entonces $r[\beta,\gamma] \circ r[\alpha,\beta] = r[\alpha,\gamma]$.

iii) $r[\alpha,\alpha](x_\alpha) = x_\alpha$ para toda $\alpha \in D$ y toda $x_\alpha \in X_\alpha$.

Definición 2.2

Sea D un conjunto dirigido y sea $S = \{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$, con $\alpha, \beta \in D$, un sistema inverso. Definimos el límite inverso de S como:

$$\varprojlim S = \left\{ <x_\alpha>_{\alpha\in D} \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha : r[\alpha,\beta](x_\alpha) = x_\beta \text{ para todas } \alpha, \beta \in D \text{ tales que } \beta \leq \alpha \right\}$$

con la topología heredada por la topología producto.

A continuación una importante proposición que facilitará la demostración de uno de los teoremas más importantes de este capítulo. Este muestra que un límite inverso puede verse como la intersección anidada de ciertos conjuntos.

Proposición 2.1

Sea D un conjunto dirigido y sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso de continuos métricos y funciones de ligadura suprayectivas $r[\alpha,\beta]$ con límite inverso X_∞. Para cada $\eta \in D$, definimos :

$$Q_\eta = \{<x_\alpha>_{\alpha\in D} \in \prod_{\alpha\in D} X_\alpha : r[\alpha,\beta](x_\alpha) = x_\beta \text{ para todas } \alpha, \beta \in D \text{ tales que } \beta \leq \alpha \leq \eta\}$$

siempre con la topología heredada por la topología producto. Se tiene entonces que:

i) $Q_\eta \supset Q_\zeta$ si $\eta < \zeta$

ii) Q_η es homeomorfo a $\prod_{\gamma\geq\eta} X_\gamma$

iii) $X_\infty = \bigcap_{\eta\in D} Q_\eta$

Demostración i) y iii) son inmediatas. Para el inciso ii) sea $\eta \in D$ y $\varphi : Q_\eta \to \prod_{\gamma\geq\eta} X_\gamma$ definida por: $\varphi(<x_\alpha>_{\alpha\in D}) = <x_\alpha>_{\alpha\geq\eta}$.

Probaremos que φ es biyectiva, continua y con inversa continua.

Inyectividad.

Sean $<x_\alpha>_{\alpha\in D}$, $<y_\alpha>_{\alpha\in D} \in Q_\eta$ con $<x_\alpha>_{\alpha\in D} \neq <y_\alpha>_{\alpha\in D}$ entonces, existe $\gamma \in D$ tal que $x_\gamma \neq y_\gamma$.

Como $\varphi(<x_\alpha>_{\alpha\in D}) = <x_\alpha>_{\alpha\geq\eta}$ y $\varphi(<y_\alpha>_{\alpha\in D}) = <y_\alpha>_{\alpha\geq\eta}$ si $\gamma\geq\eta$ es inmediato que $<x_\alpha>_{\alpha\geq\eta}\neq<y_\alpha>_{\alpha\geq\eta}$.

Si $\gamma<\eta$ entonces $x_\eta\neq y_\eta$ (si $x_\eta = y_\eta$ entonces $x_\gamma = r[\eta,\gamma](x_\eta) = r[\eta,\gamma](y_\eta) = y_\gamma$, que es una contradicción) y por lo tanto se tiene que $<x_\alpha>_{\alpha\geq\eta}\neq<y_\alpha>_{\alpha\geq\eta}$.

Suprayectividad.

Sea $<z_\gamma>_{\gamma\geq\eta}\in\prod_{\gamma\geq\eta}X_\gamma$. Construimos $<x_\alpha>_{\alpha\in D}$ en Q_η así:

$$x_\beta = \begin{cases} r[\eta,\beta](z_\eta) \text{ para } \beta<\eta \\ z_\beta \text{ para } \beta\geq\eta \end{cases}$$

De la anterior construcción se tiene que $<x_\alpha>_{\alpha\in D}\in Q_\eta$ y que $\varphi(<x_\alpha>_{\alpha\in D}) = <z_\gamma>_{\gamma\geq\eta}$ lo que muestra la suprayectividad de φ.

φ es continua pues φ es la restricción a Q_η de una función proyección.

La función $\tau:\prod_{\gamma\geq\eta}X_\gamma\to Q_\eta$ definida de la siguiente manera:

$\tau(<x_\gamma>_{\gamma\geq\eta}) = <q_\alpha>_{\alpha\in D}$ donde $q_\beta = r[\eta,\beta](x_\eta)$ para $\beta<\eta$ y $q_\beta = x_\beta$ para $\beta\geq\eta$, es continua, pues cada $r[\eta,\beta]$ lo es, para todos η, β en D con $\beta\leq\eta$. Para concluir la prueba, bastará mostrar que τ es la inversa de φ. Es decir, deberá probarse que $\tau(\varphi(x)) = x$ para todo $x\in Q_\eta$ o bien, ya que φ es inyectiva, (y por lo tanto su inversa es única) que $\varphi(\tau(z)) = z$ para todo $z\in\prod_{\gamma\geq\eta}X_\gamma$, pero esto último es inmediato apartir de la definición de τ, lo que concluye la prueba.

Definición 2.3

Sea D un conjunto dirigido, sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso de continuos con límite inverso X_∞ y sea $\alpha \in D$. Si $\pi_\alpha : \prod_{\gamma\in D} X_\gamma \to X_\alpha$ denota la proyección de $\prod_{\gamma\in D} X_\gamma$ en X_α y $\pi_\alpha|_{X_\infty}$ su restricción a X_∞, definimos a $\rho_\alpha : X_\infty \to X_\alpha$ (la α–ésima proyección de X_∞ en X_α) como $\rho_\alpha = \pi_\alpha|_{X_\infty}$.

De la definición anterior y de la forma en que se define la topología producto se desprende, de manera inmediata, que para toda $\alpha \in D$, $\rho_\alpha(<x_\gamma>_{\gamma\in D}) = x_\alpha$, tal como fue definida, es una función continua. También es inmediato que si γ, $\zeta \in D$ son tales que $\gamma < \zeta$, entonces $\rho_\gamma = r[\zeta,\gamma] \circ \rho_\zeta$.

Proposición 2.2

Sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso tal que cada función de ligadura es suprayectiva. Entonces $\rho_\alpha : X_\infty \to X_\alpha$, la α–ésima proyección de X_∞ en X_α, es suprayectiva para cada $\alpha \in D$:

Demostración. Sean $\alpha \in D$, $x_\alpha \in X_\alpha$ y sea $K = \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$. Se probará que $K \cap X_\infty$ en no vacío. Ahora bien, si para cada $\eta \in D$ definimos Q_η tal y como se hizo en la proposición 2.1, tenemos entonces que probar que $K \cap \bigcap_{\xi\in D} Q_\xi$ es no vacío o equivalentemente, por la proposición 1.1, que $K \cap Q_\eta \neq \varnothing$ para toda $\eta \in D$.

Sea pues $\eta \in D$. Como D es un conjunto dirigido, existe $\gamma \in D$ tal que $\gamma > \eta$ y $\gamma > \alpha$. Como $r[\gamma, \alpha]: X_\gamma \to X_\alpha$ es suprayectiva, existe $x_\gamma \in X_\gamma$ tal que $x_\alpha = r[\gamma, \alpha](x_\gamma)$. Definimos $x_\beta = r[\gamma, \beta](x_\gamma)$ para toda $\beta < \gamma$; y si υ no es menor que γ, simplemente elegimos algún punto $x_\upsilon \in X_\upsilon$.

Del párrafo anterior se tiene que $\langle x_\xi \rangle_{\xi\in D} \in K \cap Q_\eta$. por lo que $\rho_\alpha : X_\infty \to X_\alpha$ es suprayectiva, que es lo que se quería probar.

Teorema 2.2

Sea D un conjunto dirigido. Si $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ es un sistema inverso donde cada X_α es un continuo, entonces su límite inverso X_∞ es un continuo. Más aun, si para cada $\alpha \in D$, X_α contiene más de un punto, y cada $r[\alpha,\beta]$ es suprayectiva, entonces el límite inverso X_∞ tiene más de un punto.

Demostración. Como cada Q_η es un continuo (por ser homeomorfo a $\prod_{\gamma > \eta} X_\gamma$ y con base en la proposición 2.1) por la proposición 1.2 se tiene entonces que $X_\infty = \bigcap_{\eta\in D} Q_\eta$ es un continuo distinto del vacío.

Para la segunda parte de la demostración, sea $< x_\eta >_{\eta\in D} \in X_\infty$ y sea $\alpha \in D$ fijo. Como X_α, por hipótesis, contiene más de un punto, podemos elegir $y_\alpha \in X_\alpha$ tal que $y_\alpha \neq x_\alpha$. Como $\rho_\alpha : X_\infty \to X_\alpha$ es suprayectiva, existe $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha\in D} \in X_\infty$ tal que $\rho_\alpha(\langle y_\alpha \rangle_{\alpha\in D}) = y_\alpha$. Esto concluye la demostración.

Definición 2.4

Un subconjunto R de un espacio S es un retracto de S si existe una función continua f : S $\to$ R tal que $f(x)=x$ para cada punto x en R; tal función es llamada una retracción.

Lema 2.1

Sea T el conjunto de ordinales menores que ω_1 con el orden de los ordinales, donde ω_1 representa al primer ordinal no numerable, y sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso de continuos con límite inverso

X_∞. Supongamos que cada $r[\alpha,\beta]$ es una retracción y que para cada $\xi, \zeta \in \mathbf{T}$, con $\xi < \zeta$, se tiene que X_ξ es un subcontinuo propio de X_ζ. Sea $\gamma \in \mathbf{T}$, entonces existe un encaje de X_γ en X_∞.

Demostración. Sea $h : X_\gamma \to X_\infty$ definida como $h(x) = \langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in T}$ donde:

$$x_\lambda = \begin{cases} x & \text{si} \quad \lambda \geq \gamma \\ r[\gamma, \lambda](x) & \text{si} \quad \lambda < \gamma. \end{cases}$$

h está bien definida pues $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in T}$ es, en efecto, un elemento de X_∞ ya que, por hipótesis, si $x \in X_\gamma$, $x \in X_\eta$ para toda $\eta > \gamma$ y cada $r[\alpha,\beta]$ es una retracción.

La inyectividad de h es inmediata, ya que si $x \neq y$ entonces $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in T} \neq \langle y_\alpha \rangle_{\alpha \in T}$ pues difieren, por construcción, en el lugar γ.

h es continua, pues para cada $\lambda < \gamma$, la función J_λ: $X_\gamma \to X_\lambda$ definida por $J_\lambda(x) = r[\gamma, \lambda](x)$ es continua y para todo $\gamma \leq \lambda$ con $\gamma, \lambda \in \mathbf{T}$, se tiene que la aplicación J'_λ: $X_\gamma \to X_\lambda$ definida por $J'_\lambda(x) \to x$ también lo es. Finalmente, $r[\alpha, \alpha](x) = x$ para todo $x \in X_\alpha$ y toda $\alpha \in \mathbf{T}$, lo que prueba esta afirmación. Adicionalmente, obtenemos que $h(X_\gamma)$ es un subcontinuo de X_∞ (ya que es la imagen de un continuo bajo una función continua) y que además es propio, ya que existe $\langle z_\alpha \rangle_{\alpha \in T} \in X_\infty - h(X_\gamma)$, donde $z_\alpha \in X_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ para cada $\alpha \in T$. Esta elección es posible dado que para cada $\xi, \zeta \in \mathbf{T}$, con $\xi < \zeta$, se tiene que X_ξ es un subcontinuo propio de X_ζ.

Dado lo anterior, $h:X_\gamma \rightarrow h(X_\gamma)$ como fué definida, es una función continua y biyectiva entre los continuos X_γ y $h(X_\gamma)$, por lo que concluimos que es un homeomortfismo. Esto concluye la demostración.

A partir de este momento, si G es el conjunto de los ordinales menores que ω_1, con el orden de los ordinales, y $\Im = \{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ es un sistema inverso de continuos que satisface las hipótesis del lema 2.1, nos podremos referir a X_α para cada $\alpha \in G$, como un subcontinuo propio del límite inverso de $\Im$. En lo sucesivo, nos referiremos a los elementos de $E = \bigcup_{\alpha\in G} X_\alpha$ como al conjunto de las ω_1-sucesiones casi constantes. Es decir, elementos $< x_\alpha >_{\alpha<\omega_1}$ tales que para alguna $\eta \in G$, se tiene que $x_\alpha = x_\eta$ para toda $\alpha > \eta$.

Lema 2.2

Sea D un conjunto dirigido y sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso de contimuos con límite inverso X_∞. Sea W un subconjunto compacto de X_∞. Entonces $W = [\prod_{\alpha\in D}\rho_\alpha(W)] \cap X_\infty$.

Demostración. Si $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha\in D} \in W$, como $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha\in D} \in X_\infty$, sólo hay que ver que $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha\in D} \in [\prod_{\alpha\in D}\rho_\alpha(W)]$, pero esto es claro pues $w_\alpha \in \rho_\alpha(W)$. Por lo que: $W \subseteq [\prod_{\alpha\in D}\rho_\alpha(W)] \cap X_\infty$.

Ahora, sea $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha\in D} \in [\prod_{\alpha\in D}\rho_\alpha(W)] \cap X_\infty$ y para cada $\gamma \in D$ defínase: $K_\gamma = W \cap \rho_\gamma^{-1}(y_\gamma)$ y consideremos los 3 siguientes puntos:

a) Dado que $y_\gamma \in \rho_\gamma(W)$ $\forall \gamma \in D$, podemos afirmar que $K_\gamma \neq \emptyset$ $\forall \gamma \in D$.

b) La imagen inversa de $\{y_\gamma\}$ bajo ρ_γ, que es una función continua, es un cerrado de X_∞ y por lo tanto es un compacto de X_∞; finalmente, como W es compacto, concluimos que K_γ también lo es.

c) $K_\zeta \subset K_\gamma$ si $\gamma < \zeta$ con $\zeta, \gamma \in D$. Bastará probar que $\rho_\zeta^{-1}(y_\zeta)$ está contenido en $\rho_\gamma^{-1}(y_\gamma)$. Sea $\langle x_\alpha \rangle \in \rho_\zeta^{-1}(y_\zeta)$. Entonces $y_\zeta = \rho_\zeta(\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D})$, luego $r[\zeta, \gamma](y_\zeta) = r[\zeta, \gamma]$ $(\rho_\zeta(\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D}))$. Como $\rho_\gamma = r[\zeta, \gamma] \circ \rho_\zeta$, se tiene que $y_\gamma = r[\zeta, \gamma](y_\zeta) = \rho_\gamma(\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D})$ y como $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha \in D} \in X_\infty$, $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in D} \in \rho_\gamma^{-1}(y_\gamma)$, como se requería probar.

Dado lo anterior, la familia $\{ K_\gamma \}_{\gamma \in D}$ tiene la propiedad de la intersección finita y por lo tanto, $\bigcap_{\gamma \in D} K_\gamma \neq \emptyset$.

Sea $V = \langle v_\alpha \rangle_{\alpha \in D} \in \bigcap_{\gamma \in D} K_\gamma$. Claramente, $V \in W$ y además, $v_\gamma = y_\gamma \;\; \forall \gamma \in D$ por lo que $V = \langle y_\gamma \rangle_{\gamma \in D}$, lo que concluye la demostración. (Si para algún $\gamma \in D$ $v_\gamma \neq y_\gamma$, como $\langle v_\alpha \rangle_{\alpha \in D} \in K_\eta$, se tendría entonces que $y_\gamma = \rho_\gamma(\langle v_\alpha \rangle_{\alpha \in D}) = v_\gamma$ contradiciendo la elección de γ.)

Definición 2.5

Sea D un conjunto dirigido y sea T un subconjunto de D. Decimos que T está distribuido en D si, para toda $\alpha \in D$, existe $\gamma \in T$ tal que $\alpha < \gamma$.

Cabe mencionar que si D es un conjunto dirigido, y F es un subconjunto de D que no está distribuido en D, entonces F está acotado superiormente. Esta observación a la definición anterior nos facilitará probar el siguiente teorema. En lo sucesivo, si $A \subseteq X_\alpha$, definimos $r[\alpha,\beta]\langle A\rangle = \{r[\alpha,\beta](x_\alpha) \mid x_\alpha \in A\}$.

Teorema 2.3

Sea D un conjunto dirigido y sea $\{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}$ un sistema inverso de continuos y funciones de ligadura $r[\alpha,\beta]$ suprayectivas con límite inverso X_∞. Supongamos que para toda $\zeta \in D$, si A_ζ, B_ζ son subcontinuos de X_ζ tales que $A_\zeta \cup B_\zeta = X_\zeta$, entonces se tiene que, o bien $r[\zeta,\gamma]\langle A_\zeta\rangle = X_\gamma$ o bien $r[\zeta,\gamma]\langle B_\zeta\rangle = X_\gamma$ para $\gamma < \zeta$. Entonces X_∞ es un continuo indescomponible.

Demostración. Supongamos que $X_\infty = A \cup B$ con A, B subcontinuos de X_∞. Se probará que $A = X_\infty$ o bien que $B = X_\infty$. Sabemos que $X_\alpha = \rho_\alpha(X_\infty) = \rho_\alpha(A \cup B) = \rho_\alpha(A) \cup \rho_\alpha(B)$ $\forall \alpha \in D$.

Del párrafo anterior, y por hipótesis, para toda $\alpha \in D$ $r[\alpha,\beta]\langle\rho_\alpha(A)\rangle = X_\beta$ ó $r[\alpha,\beta]\langle\rho_\alpha(B)\rangle = X_\beta$. Como $r[\alpha,\beta]\circ\rho_\alpha = \rho_\beta$ (ver el comentario a la definición 2.5), entonces para toda $\beta \in D$, $\rho_\beta(A) = X_\beta$ ó $\rho_\beta(B) = X_\beta$.

Sea $\Im = \{ T \subseteq D \mid T$ está distribuido en $D\}$ y sean $F = \{\gamma \in D \mid \rho_\gamma(A) = X_\gamma\}$ y $G = \{\gamma \in D \mid \rho_\gamma(B) = X_\gamma\}$. Como $F \cup G = D$, entonces $\mathbf{F} \in \mathfrak{I}$ o $\mathbf{G} \in \mathfrak{I}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ocurre lo primero; es decir, que $\mathbf{F} \in \mathfrak{I}$. Se probará que $\mathbf{F} = D$.

Sea pues, $\gamma \in D$ y sea $\nu \in \mathbf{F}$ tal que $\gamma < \nu$. Como $\rho_\nu(A) = X_\nu$ y existe $r[\nu,\gamma] : X_\nu \to X_\gamma$ entonces tenemos que $X_\gamma = r[\nu,\gamma]\langle\rho_\nu(A)\rangle = \rho_\gamma(A)$. Por lo tanto, $\gamma \in \mathbf{F}$.

Por el lema 2.2, como A es un subconjunto compacto de X_∞, $A = (\prod_{\alpha\in D}\rho_\alpha(A)) \cap X_\infty$. Como $\rho_\gamma(A) = X_\gamma \quad \forall\ \gamma \in D$, se tiene entonces que $A = X_\infty$, por lo que la demostración queda concluida.

Lema 2.3*

Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{K_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de conjuntos cerrados en X tales que $K_\alpha \subseteq K_\beta$ si $\alpha>\beta$. Entonces existe $\eta < \omega_1$ tal que $K_\gamma = K_\eta$ para todo $\gamma > \eta$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que para todo $\alpha < \omega_1\ \exists\ \lambda > \alpha$ tal que $K_\alpha - K_\lambda \neq \varnothing$.

De lo anterior, podemos construir la siguiente familia infinita de ordinales: $\mathfrak{I} = \{\eta_\xi < \omega_1 \mid \xi < \omega_1, \eta_\alpha < \eta_\beta$ si $\alpha < \beta$ y $K\eta_\alpha - K\eta_\beta \neq \varnothing\}$

Sea, para cada $\lambda < \omega_1$, $z_\lambda \in K\eta_\lambda - K\eta_\gamma$, donde $\eta_\lambda, \eta_\gamma \in \mathfrak{I}$ y γ es mayor que λ. Sea $Y = \{z_\lambda : \lambda < \omega_1\}$.

Como $Y \subseteq X$ y X es 2° numerable, Y también lo es y por lo tanto, es Lindelöff. *(Topology, Kelley Vol I pag 146 Ed Mir Moscú 1964)*

Sea $A_\lambda = X - K_\lambda$ y sea $A'_\lambda = A_\lambda \cap Y$. $Y \subseteq \bigcup_{\lambda<\omega_1} A'_\lambda$, ya que si $z_\gamma \in Y$, entonces existe $\mu < \omega_1$ tal que $z_\gamma \in K\eta_\gamma - K\eta_\mu$ luego, $z_\gamma \in X - K\eta_\mu = A\eta_\mu$, por lo tanto, $z_\gamma \in A\eta_\mu \cap Y = A'\eta_\mu \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} A'_\alpha$.

Como Y es Lindelöff, podemos obtener una subcubierta numerable $\{ A'_{\alpha_1}, A'_{\alpha_2}, \ldots, A'_{\alpha_t}, \ldots \}$ de la cubierta $\{A'_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Sea $\gamma = sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, para algún entero no negativo t, $z_\gamma \in A'_{\alpha_t}$ y por lo tanto, $z_\gamma \notin K_{\alpha_t} \supseteq K_\gamma \supset K\eta_\gamma$, lo que es una contradicción, pues $z_\gamma \in K\eta_\gamma - K\eta_\mu$. Así pues, el lema queda probado.

(*) <u>**Nota:**</u> Para la demostración de este lema, se contó con la ayuda del Dr. Angel Tamariz Mascarúa, quién contribuyó con la mayoría de ideas y sugerencias en él expuestas y a quién se le agradece tal esfuerzo.

En este capitulo, las demostraciones a las proposiciones 3.1, 3.2, 3.3, el teorema 3.1, y el lema 3.1 son originales del Dr. Alejandro Illanes Mejía. Así mismo, las demostraciones al teorema 3.2 y al lema 3.2 lo son, pero han sido, en este documento, rescritas de manera equivalente, con el fin de facilitar su integración y lectura al resto de las proposiciones en este capítulo.

Definición 3.1

Sea X un contimuo métrico. Definimos $2^X = \{\ A \subsetneq X : A$ es cerrado y $A \neq \varnothing\ \}$ y $C(X) = \{\ A \in 2^X : A$ es conexo $\}$.

Definición 3.2

Sea X un continuo y d una métrica en X. Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos $N(\varepsilon, A) = \{\ x \in X : \exists\, a \in A \ni d(a,x) < \varepsilon\ \}$ y la llamamos la nube de radio ε alrededor de A.

Dado que $N(\varepsilon, A)$ puede ser también visto como la unión de las bolas con centro en cada punto de A y radio ε, se puede concluir, de manera inmediata, que $N(\varepsilon, A)$ es abierto en X.

Proposición 3.1

Para A, B en 2^X definimos $H(A,B) = \inf\{\ \varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon,B)\ y\ B \subset N(\varepsilon, A)\ \}$. La función $H(A, B)$ define una métrica en 2^X. Tal métrica se conoce como la métrica de Hausdorff.

Demostración

i) H está bien definida. Sean A,B en 2^X Como A es no vacío, podemos elegir algún $a_0 \in A$. Ahora, como B es cerrado en un compacto, B también es compacto; por lo tanto, existen $x_0 \in X\ y\ \delta > 0 \ni B \subset B_\delta(x_0)$. Sea $\varepsilon = d(a_0, x_0) + \delta$. Entonces $B \subset B_\varepsilon(a_0) \subset N(\varepsilon, A)$. Análogamente, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $A \subset N(\varepsilon_1, B)$. Sea $\varepsilon_2 = m\acute{a}x\{\varepsilon_1, \varepsilon\}$ entonces

$B \subset N(\varepsilon_2, A)$ y $A \subset N(\varepsilon_2, B)$. Así, el conjunto con el que definimos $H(A,B)$ es no vacío y está acotado inferiormente por el cero.

ii) $H(A,B) \geq 0$ pues es un ínfimo de valores positivos.

iii) $H(A,B) = H(B,A)$. Pues A y B juegan papeles simétricos

iv) $H(A,B) = 0$ implica $A = B$. Sea b en B. Por demostrar que b está en A. Como A es cerrado, basta probar que b está en la cerradura de A. Sea $\delta > 0$. Como $\delta > 0 = H(A,B)$ entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \delta$ y $B \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\delta, A)$. De manera que $b \in N(\delta, A)$. Así pues, existe a en A tal que $d(a,b) < \delta$. Esto muestra que $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$, por lo que b está en la cerradura de A. De manera similar se puede probar que $A \subset B$ por lo tanto, $A = B$.

v) $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$. Se probará antes el siguiente hecho: Si $A \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\delta, B)$, entonces $A \subset N(\varepsilon + \delta, B)$. Sea $a \in A \subset N(\varepsilon, C)$ entonces existe c en C tal que $d(a,c) < \varepsilon$. Como $c \in C \subset N(\delta, B)$, entonces existe b en B tal que $d(c,b) < \delta$. De aquí que $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \varepsilon + \delta$. Por lo que $A \subset N(\varepsilon + \delta, B)$.

Dado lo anterior, podemos ver que $H(A,C) + H(C,B) =$

$= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, A) \; y \; C \subset N(\varepsilon, A)\} +$

$+ \inf\{\delta > 0 : C \subset N(\delta, B) \; y \; B \subset N(\delta, C)\}$

$= \inf\{\varepsilon+\delta : A \subset N(\varepsilon,C),\ C \subset N(\varepsilon,A),\ C \subset N(\delta,B),\ B \subset N(\delta,C)\}$

Y por la propiedad inicialmente descrita:

$H(A,C)+H(C,B) \geq$

$\geq \inf\{\varepsilon+\delta : A \subset N(\varepsilon+\delta,B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon+\delta,A)\} = H(A,B)$

Con lo que concluye la demostración probando así que H es métrica.

A partir de este momento, intentaremos mostrar que $C(X)$ es un espacio compacto; para este efecto, probaremos primero que 2^X es compacto y entonces bastará demostrar que $C(X)$ es cerrado en 2^X.

Definición 3.3

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$, definimos $\liminf A_n = \{x \in X$: para toda $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n (todas salvo un número finito)$\}$. De manera similar definimos:

$\limsup A_n = \{x \in X$: para toda $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices $\}$

Proposición 3.2

a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

b) $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ son conjuntos cerrados.

c) $\limsup A_n \neq \emptyset$ para toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración.

a) Sea $x \in \liminf A_n$. Tenemos que mostrar que $x \in \limsup A_n$, es decir, tenemos que probar que si $\varepsilon > 0$, entonces $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Como $x \in \liminf A_n$, por definición tenemos que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n, es decir, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para toda $n > N$ y, por tanto, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. De esto concluimos que $x \in \limsup A_n$.

b) Demostraremos que $\text{lím sup } A_n$ coincide con su cerradura. Bartará probar que $\overline{\text{lím sup } A_n} \subset \text{lím sup } A_n$.

Sea pues $x \in \overline{\text{lím sup } A_n}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que $(\text{lím sup } A_n) \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, de manera que podemos tomar un punto $z \in (\text{lím sup } A_n) \cap B_\varepsilon(x)$. Como $z \in B_\varepsilon(x)$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(x)$ y como $z \in \text{lím sup } A_n$, entonces $B_\delta(z) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de índices n. De aquí que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de índices n y por tanto $x \in \text{lím sup } A_n$.

La demostración de que $\text{lím inf } A_n$ es cerrado es análoga a la anterior.

c) Elegimos puntos $a_n \in A_n$. Como X es compacto, existen un punto en x en X y una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que a_{n_k} tiende a x, cuando k tiende a infinito. Dada $\varepsilon > 0$, existe un número natural M tal que $a_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ para toda $k \geq M$. De aquí que $B_\varepsilon(x)$ intersecta a A_n para una infinidad de índices n. Por tanto $x \in \text{lím sup } A_n$. Hemos probado entonces que $\text{lím sup } A_n \neq \varnothing$ para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$.

Proposición 3.3

a) $x \in \text{lím inf } A_n$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

b) $x \in \text{lím sup } A_n$ si y sólo si existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ (para toda k) tales que $x_{n_k} \to x$.

Demostración.

a) $\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para demostrar que $x \in \liminf A_n$, tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. De manera que $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n$ para toda $n \geq N$. Así que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Por tanto, $x \in \liminf A_n$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in \liminf A_n$, para cada n elegimos $x_n \in A_n$ de tal forma que $d(x, x_n) = \min\{ d(x, y) : y \in A_n \}$, donde d es la métrica de X. (x_n está bien definido para cada n pues la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(y) = d(x, y)$, con x fijo, es continua y como A_n es compacto, f alcanza un mínimo en A_n. Por lo tanto, existe $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) = \min\{ f(y) \in \mathbb{R} : y \in A_n \}$.) Vamos a demostrar que $x_n \to x$. Para esto tomamos $\varepsilon > 0$, como $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. De modo que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$, pero $d(x, x_n) = \min\{ d(x, y) : y \in A_n \} \leq d(x, a_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Por tanto $x_n \to x$.

b) $\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \ldots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ (para toda k) tales que $x_{n_k} \to x$. Tenemos que demostrar que $x \in \limsup A_n$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ para toda $k \geq t$, esto implica que $x_{n_k} \in A_{n_k} \cap B_\varepsilon(x)$ para toda $k \geq t$, de manera que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de índices n (n_k, n_{k+1}, etc.). Por lo tanto, $x \in \limsup A_n$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in \text{lím sup } A_n$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. En particular para $\varepsilon = 1$ se tiene que $B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n. Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ y $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$ entonces $d(x, x_{n_1}) < 1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1}$.

Para $\varepsilon = 1/2$ $B_{1/2}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de índices n, entonces podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que $B_{1/2}(x) \cap A_{n_2} \neq \emptyset$. Elegimos $x_{n_2} \in B_{1/2}(x) \cap A_{n_2}$, entonces $d(x, x_{n_2}) < 1/2$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$.

Continuando este procedimiento, se pueden elegir números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. De aquí se sigue que $x_{n_k} \to x$ cuando $k \to \infty$.

La razón por la que incluimos en este trabajo las nociones de límite superior es que vamos a usarlo para demostrar que 2^X es compacto. Pero antes de hacer esto veremos qué relación tienen estos límites con la convergencia que ya tenemos definida en 2^X con la métrica de Hausdorff.

Teorema 3.1

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$, entonces A_n converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$ si y sólo si $\text{lím inf } A_n = A = \text{lím sup } A_n$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que A_n converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$. Demostraremos que $\text{lím inf } A_n = A = \text{lím sup } A_n$. Sabemos que $\text{lím inf } A_n \subset \text{lím sup } A_n$, entonces sólo tenemos que demostrar que

a) $\mathcal{A} \subset \lim\inf A_n$ y que b) $\lim\sup A_n \subset \mathcal{A}$.

a) Sean $a \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$. Como A_n converge a $\mathcal{A}$ (con la métrica de Hausdorff) se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(\mathcal{A}, A_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Es fácil demostrar que esto implica que $\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, A_n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces $a \in N(\varepsilon, A_n)$. Esto implica que existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \varepsilon$. De manera que $x_n \in B_\varepsilon(a) \cap A_n$. Hemos probado que $B_\varepsilon(a) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Esto muestra que $a \in \lim\inf A_n$. Por tanto $\mathcal{A} \subset \lim\inf A_n$.

b) Supongamos que $\lim\sup A_n$ no está contenido en $\mathcal{A}$, entonces existe $x \in \lim\sup A_n$ tal que $x \notin \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrado, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{A} = \varnothing$. Ya que $x \in \lim\sup A_n$, tenemos que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de índices n. Dado que A_n converge a $\mathcal{A}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(\mathcal{A}, A_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$; es decir, tal que $A_n \subset N(\varepsilon/2, \mathcal{A})$ y $\mathcal{A} \subset N(\varepsilon/2, A_n)$ para toda $n \geq N$. Entonces podemos elegir $M \geq N$ tal que $B_{\varepsilon/2}(x) \cap A_M \neq \varnothing$. Elijamos $z \in B_{\varepsilon/2}(x) \cap A_M$, entonces $d(x, z) < \varepsilon/2$ y $z \in A_M \subset N(\varepsilon/2, \mathcal{A})$. De aquí que $d(x, z) < \varepsilon/2$ y existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $d(z, a) < \varepsilon/2$. Esto implica que $d(x, a) < \varepsilon$ donde $a \in \mathcal{A}$. Por tanto $B_\varepsilon(x)$ intersecta a $\mathcal{A}$. Esto contradice la elección de ε y prueba que $\lim\sup A_n \subset \mathcal{A}$.

Con esto complementamos la demostración de $\Rightarrow$).

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\lim\sup A_n = \lim\inf A_n$. Definimos $\mathcal{A} = \lim\sup A_n$. $\mathcal{A} \in 2^X$ pues se vio que $\lim\sup A_n$ es cerrado y no vacio. Entonces hay que demostrar que A_n converge a A con la métrica de Hausdorff.

Sea $\varepsilon > 0$, probaremos que:

a) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para toda $n \geq M_1$ y,

b) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\varepsilon, A)$, para toda $n \geq M_2$.

b) Supongamos que no se cumple b). Esto es, supongamos que para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que A_n no está contenido en $N(\varepsilon, A)$.

para 1, existe $n_1 \geq 1$ tal que $A_{n_1} \not\subset N(\varepsilon, A)$

para $n_1 + 1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $A_{n_2} \not\subset N(\varepsilon, A)$.

Para $n_2 + 1$, existe $n_3 > n_2$ tal que $A_{n_3} \not\subset N(\varepsilon, A)$.

Procediendo de esta manera se prueba que existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tal que A_{n_k} no está contenido en $N(\varepsilon, A)$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in A_{n_k} - N(\varepsilon, A)$.

Como X es compacto, existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $\left\{x_{n_{k_t}}\right\}_{t=1}^{\infty}$ de $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $x_{n_{k_t}} \to x_0$. Ya que para todo t, $x_{n_{k_t}} \in X - N(\varepsilon, A)$ y este conjunto es un cerrado (es el complemento de un abierto) tenemos que $x_0 \in X - N(\varepsilon, A)$, lo cual implica que $x_0 \notin A$, pero $x_{n_{k_t}} \to x_0$ y $\left\{A_{n_{k_t}}\right\}_{t=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ por la caracterización que dimos antes de límite superior tenemos entonces que $x_0 \in \limsup A_n = A$. Entonces $x_0 \in A$. Esta contradicción demuestra que b) es verdadera, por lo que existe un entero no negativo M_2 tal que $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ para todo $n > M_2$.

a) Ya que la familia $\{ B_{\varepsilon/2}(a) : a \in A \}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto pues es igual $\limsup A_n$, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ tales que $A \subset B_{\varepsilon/2}(a_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/2}(a_m)$.

Como $A = \liminf A_n$, cada a_i es elemento de $\liminf A_n$. De manera que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$, entonces $A_n \cap B_{\varepsilon/2}(a_i) \neq \varnothing$. Definimos $M_1 = máx\{N_1, \ldots, N_m\}$. Dadas $n \geq M_1$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $A_n \cap B_{\varepsilon/2}(a_i) \neq \varnothing$.

Afirmamos que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$, para toda $n \geq M_1$. Tomemos pues $n \geq M_1$ y tomemos $a \in A \subset B_{\varepsilon/2}(a_1) \cup B_{\varepsilon/2}(a_2) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/2}(a_m)$. Entonces existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $a \in B_{\varepsilon/2}(a_i)$. Como $n \geq M_1$ entonces existen $x \in B_{\varepsilon/2}(a_i) \cap A_n$. Así que $d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por tanto $a \in N(\varepsilon, A_n)$. De manera que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$. Con esto terminamos la prueba de a).

Ahora que ya tenemos probadas a) y b) hacemos $N = máx\{M_1, M_2\}$, entonces si $n \geq N$, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$. De aquí que $H(A, A_n) \leq \varepsilon$ para $n \geq N$. Esto muestra que $A_n \to A$ con la métrica de Hausdorff. Con esto terminamos la prueba de $\Leftarrow$) y, por tanto, la del teorema.

Hasta este momento, se ha analizado la convergencia en 2^X. Con esta base será posible estudiar la compacidad del hiperespacio 2^X y como conceccuencia, la de $C(X)$. A continuación un importante lema que será el eslabón entre lo visto anteriormente y el objetivo principal de este capítulo.

Lema 3.1.

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un $A_0 \in 2^X$.

- **Demostración.**

De acuerdo con el teorema anterior , el único candidato que se puede proponer para el límite es $A_0 = \text{lím sup } A_n$.

Para probar que $A_n \to A_0$ (Con la métrica de Hausdorff) tenemos que probar que $\text{lím inf } A_n = \text{lím sup } A_n$. De manera que tenemos que demostrar que $\text{lím sup } A_n \subset \text{lím inf } A_n$.

Sea $x \in \text{lím sup } A_n$. Sea $\varepsilon > 0$, hay que demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, para $\varepsilon / 2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_m) < \varepsilon / 2$, para n, $m \geq N$.

Como $x \in \text{lím sup } A_n$, entonces $B_{\varepsilon/2}(x)$ intersecta a A_n para una infinidad de índices n. Elijamos una $M_0 \geq N$ tal que $B_{\varepsilon/2}(x) \cap A_{M_0} \neq \varnothing$. Dada $n \geq N$ cualquiera, $H(A_{M_0}, A_n) < \varepsilon/2$ pues ambos índices son mayores o iguales a N, lo cual implica que $A_{M_0} \subset N(\varepsilon/2, A_n)$.

Sea $y \in A_{M_0} \cap B_{\varepsilon/2}(x)$. Entonces $y \in A_{M_0} \subset N(\varepsilon/2, A_n)$, por lo que existe $z \in A_n$ tal que $d(y, z) < \varepsilon / 2$ y por tanto $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Hemos probado entonces que $B_\varepsilon(x) \cap A_n$

$\neq \varnothing$ para toda $n \geq N$. Esto prueba que $x \in \liminf A_n$, y por lo tanto, termina la prueba de que $A_n \to A_0$.

Ya estamos listos para probar que 2^X es compacto. Como se mencionó al inicio de este capítulo, esto nos permitirá probar que $C(X)$ es un espacio métrico compacto.

Lema 3.2

Sean X un espacio topológico, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en 2^X, J un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un subconjunto infinito T de J tal que $H(A_n, A_r) < \varepsilon$ para todo $n, r \in T$, donde H, como siempre, representa la métrica de Hausdorff en 2^X.

Demostracion. Sea $\varepsilon > 0$ y J un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como X es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = B_{\varepsilon/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/2}(x_m)$.

Para cada $n \in J$ sea $K_n = \{ k \in \{1, \ldots, m\} : A_n \cap B_{\varepsilon/2}(x_k) \neq \varnothing \}$. Sea $\mathfrak{I} = \{ F : F \subset \{1, \ldots, m\} \}$. $\mathfrak{I}$ es finito pues tiene 2^m elementos. Como $K_j \in \mathfrak{I}$ para toda $i \in J$, existe $T \subset J$ infinito tal que $K_a = K_b$ para todo $a, b \in T$.

Sean $n, r \in T$. Se probará que, para un $\varepsilon > 0$ dado, $H(A_n, A_r) < \varepsilon$. Es decir, se probará que $A_r \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ y que $A_n \subseteq N(\varepsilon, A_r)$ para todos n, r en T.

Sea $y \in A_r$. Como X es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $X = B_{\varepsilon/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon/2}(x_m)$. Entonces $y \in B_{\varepsilon/2}(x_q)$ para algún $q \in K_r$. Como $K_n = K_r$, $q \in K_n$ de donde se concluye, gracias a la definición de K_n, que $A_n \cap B_{\varepsilon/2}(x_q) \neq \varnothing$, por lo que $y \in N(\varepsilon, A_n)$. La contención $A_n \subseteq N(\varepsilon, A_r)$ se prueba de igual manera y concluye la demostración.

Teorema 3.2 Sea X un continuo. Entonces 2^X es compacto.

Demostración. Recordemos que un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente (*Principios de análisis matemático, p 54. Walter Rudin, 3ª Edición Ed McGraw Hill, 1980*). Tomemos pues una sucesión cualquiera $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$. Por el lema 3.1 sólo tenemos que mostrar que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión de Cauchy.

Por el lema 3.2 existe un subconjunto infinito J_1 de $\mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_r) \leq 1$ para todas $n, r \in J_1$. Ahora sea J_2 un subconjunto infinito de J_1 tal que $H(A_n, A_r) \leq 1/2$ para todas $n, r \in J_2$. Repitiendo este proceso es posible obtener una sucesión $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tales que $J_1 \supset J_2 \ldots$ y que además, para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $H(A_n, A_r) \leq 1/k$ para todas $n, r \in J_k$.

Para construir la subsucesión, elegimos $n_1 \in J_1$. Como J_2 es infinito, existe $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$. Escogemos $n_3 < J_3$ tal que $n_2 < n_3$. De esa manera, se puede construir una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ de números naturales tal que $n_k \in J_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Se probará que la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Sea pues $\varepsilon > 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$ y sean $s, r \geq k$. Entonces $J_s, J_r \subset J_k$, de manera que $n_s, n_r \in J_k$ y, por la elección de J_k, tenemos que $H(A_{n_s}, A_{n_r}) < 1/k < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y termina la prueba de que 2^X es compacto.

Teorema 3.3 Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es un espacio métrico compacto.

Demostracion. Se probará que $C(X)$ es cerrado en el espacio métrico 2^X. Sea $A \in \overline{C(X)} \subset 2^X$ y supongamos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$ donde para cada entero no negativo n, se tiene que $A_n \in C(X)$. Bastará probar que A está en $C(X)$. Es decir, habrá de probarse que A es conexo.

Supongamos lo contrario, es decir que A es disconexo. Entonces $A = R \cup S$ con R, S cerrados y ajenos. Como $C(X)$ es normal, existen abiertos ajenos U, V tal que $R \subset U$ y $S \subset V$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $R \subset N(\varepsilon, R) \subseteq U$ y $S \subset N(\varepsilon, S) \subseteq V$. Tal ε existe, pues es el mínimo entre $\varepsilon 1$ y $\varepsilon 2$ donde $\varepsilon 1$ es tal que $R \subset N(\varepsilon 1, R) \subseteq U$ y $\varepsilon 2$ es tal que $S \subset N(\varepsilon 2, S) \subseteq V$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$. Entonces $A_n \in N(\varepsilon, A) = N(\varepsilon, R) \cup N(\varepsilon, S) \subseteq U \cup V$. Como $A \in N(\varepsilon, A_n)$ entonces $R \cup S \in N(\varepsilon, A_n)$, por lo que $R \in N(\varepsilon, A_n)$ y $S \in N(\varepsilon, A_n)$. De esto se sigue que $A_n \subset N(\varepsilon, R) \subseteq U$ y que $A_n \subset N(\varepsilon, S) \subseteq V$. Lo que es una contradicción, pues $A_n \in C(X)$ y por ello es conexo.

Así pues, se tiene que $A \in C(X)$ y por lo tanto $C(X)$ es cerrado y por ser este un subespacio de 2^X, es también compacto.

Proposición 3.4

Sea X un continuo, sean a, $b \in X$ y sea $\mathfrak{I} = \{W \in C(X) : a, b \in W\}$. Entonces $\mathfrak{I}$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.

Demostracion. Sea $t \in C(X) - \mathfrak{I}$ Entonces t es un subconjunto conexo y cerrado de X que no contiene (Sin pérdida de generalidad) a a. Como X es Normal, existe $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = d(a, t)$) tal que $B_{\varepsilon/2}(t)$ es un abierto de $C(X)$ que contiene a t y además, $B_{\varepsilon/2}(t) \cap \mathfrak{I} = \varnothing$, lo que concluye la prueba al mostrar que $C(X) - \mathfrak{I}$ es abierto.

Capítulo IV

En éste capítulo se establece el entorno bajo el cuál es posible construir un continuo indescomponible con a lo más dos composantes; en él se desarrolla un trabajo publicado en 1978 del cuál, el autor es el Dr. David P. Bellamy.

Como es de esperarse, tal continuo no es métrico por lo que su construcción no es inmediata ni trivial. A continuación un par de definiciones elementales que serán requeridas a lo largo de éste capítulo para su mejor comprensión: si $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$ definimos $f\langle A\rangle = \{ f(a) \mid a \in A\}$. $C(X_\alpha)$ es el hiperespacio asociado a X_α. Si $W \in C(X_\alpha)$, definimos $\hat{r} : C(X_\alpha) \to C(X_\beta)$ por $\hat{r}(W) = r\langle W\rangle$. Finalmente, recordemos que existe un encaje o inyección natural $h: X_\alpha \to X_\infty$ (lema 2.1 capítulo II) que nos permitirá hablar de los puntos de $\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ como si fueran elementos del límite inverso y para $\alpha < \omega_1$, de X_α como un subcontinuo propio de éste.

Teorema 4.1

Sea $\{X_\alpha : r[\alpha, \beta]\}_{\alpha,\beta<\omega_1}$ un sistema inverso de continuos métricos indescomponibles con límite inverso X_∞. Supongamos que:

i) Para $\beta < \alpha$ X_β es un subcontinuo propio de X_α y $r[\alpha, \beta] : X_\alpha \to X_\beta$ es una retracción

ii) $\forall \beta < \omega_1$, existe C_β composante de X_β tal que:

$$\left(\bigcup_{\gamma<\beta} X_\gamma\right) \bigcap C_\beta = \varnothing$$

y tal que $\forall$ $\alpha > \beta$ $r[\alpha, \beta]\langle X_\alpha - X_\beta\rangle \subseteq C_\beta$.

Entonces X_∞ es un continuo indescomponible con a lo más, dos composantes. Más aun, si $E = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ y $C = X_\infty - E$, entonces E es una composante de X_∞ y se tiene, o que $C = \varnothing$ o que C es una composante de X_∞.

Demostración Como el sistema $\{X_\alpha : r[\alpha,\beta]\}_{\alpha,\beta<\omega_1}$ satisface las hipótesis del teorema 2.3, se tiene entonces que X_∞ es indescomponible. Sean E y C como en el enunciado del teorema. Según el comentario posterior al lema 2.1 del capítulo II, identificamos a E como un conjunto cuyos elementos son ω_1-sucesiones casi constantes. E es unión monótona de subcontinuos propios de X_∞ y por lo tanto, está contenido en alguna composante de X_∞.

Con base en lo anterior, para probar que E es composante de X_∞, es suficiente probar que X_∞ es irreducible entre cualesquiera dos puntos $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in E$ y $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \notin E$. Es decir, se probará que si W es un subcontinuo de X_∞ que contiene a $\{\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}, \langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}\}$ entonces $W = X_\infty$.

Como $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \notin E$, $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ no es una ω_1-sucesión eventualmente constante; para cada $\beta < \omega_1$ existe $\lambda > \beta$ tal que $x_\lambda \neq x_\beta$. De lo anterior, $x_\lambda \notin X_\beta$ (Si $x_\lambda \in X_\beta$ entonces $r[\lambda, \beta](x_\lambda) = x_\beta = x_\lambda$). Como por hipótesis, $r[\lambda, \beta]\langle X_\lambda - X_\beta \rangle \subseteq C_\beta$, se tiene entonces que para todo $\beta < \omega_1$, $x_\beta = r[\lambda, \beta](x_\lambda) \in C_\beta$.

Ahora bien, como $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in E$, sabemos que existe $\eta < \omega_1$ tal que para todo $\alpha > \eta$, $y_\alpha = y_\eta \in X_\eta$. Entonces, $y_\alpha \in X_\eta \subset \bigcup_{\nu<\alpha} X_\nu$ y como $(\bigcup_{\nu<\alpha} X_\nu) \cap C_\alpha = \varnothing$, se tiene que $y_\alpha \notin C_\alpha$ para ningún $\alpha > \eta$; por lo que si $W \subseteq X_\infty$ es un subcontinuo de X_∞ que contiene a

$\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ y a $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$, entonces para cada α > η, $\rho_\alpha\langle W\rangle = X_\alpha$, pues x_α, $y_\alpha \in \rho_\alpha\langle W\rangle \subseteq X_\alpha$ y como X_α es irreducible alrededor de $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ pues $x_\alpha \in C_\alpha$ y $y_\alpha \notin C_\alpha$, se tiene que $\rho_\alpha\langle W\rangle = X_\alpha$. A continuación se probará que $X_\infty \subseteq \overline{W}$ y como $W = \overline{W}$ pues W es cerrado, se habrá probado que E es composante de X_∞.

Sean pues, $\langle z_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in X_\infty$ y W un subcontinuo de X_∞ que contiene a $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in E$ y a $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \notin E$. Recordemos que existe η < ω_1 tal que para cada α > η, $\rho_\alpha\langle W\rangle = X_\alpha$. Sea $U = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \ldots \times U_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha$ una vecindad de $\langle z_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ y sea β > máx{η, α_k}. Como β > η, entonces $\rho_\beta\langle W\rangle = X_\beta$, por lo que existe $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in W$ tal que $\rho_\beta(\langle w_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}) = z_\beta \in X_\beta$. Como $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in X_\infty$, se tiene que $w_{\alpha_i} = r[\beta,\alpha_i](w_\beta) = r[\beta,\alpha_i](z_\beta) = z_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ para todo i ≤ k, de donde se concluye que $\langle w_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in U$ y por lo tanto, que $\langle z_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in \overline{W}$.

Para completar la prueba es suficiente demostrar que C (que es $X_\infty - E$) está contenido en alguna composante de X_∞.

Sean $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$, $\langle y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in C$ y sea para cada α: $\Im_\alpha = \{\ W \in C(X_\alpha)\ : x_\alpha, y_\alpha \in W\ \}$. Afirmamos:

i) Para cada α, $\Im_\alpha$ es un subconjunto cerrado de $C(X_\alpha)$ y por lo tanto, compacto. (Proposición 3.4 del capítulo III)

ii) Si $\alpha \geq \beta$ entonces $\hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle \subseteq \Im_\beta$

Para probar esta afirmación, consideremos $H \in \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle$ entonces $H = \hat{r}[\alpha,\beta](W_\alpha)$ para algún $W_\alpha \in \Im_\alpha$ y como $x_\alpha, y_\alpha \in W_\alpha$, entonces $x_\beta, y_\beta \in r[\alpha,\beta]\langle W_\alpha\rangle = \hat{r}[\alpha,\beta](W_\alpha) = H$ por lo tanto $H \in \Im_\beta$.

iii) $\hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle$ es no degenerado.

Ya que $X_\alpha \in \Im_\alpha$ y además, existe $K_\alpha \in \Im_\alpha$, $K_\alpha \neq X_\alpha$ subcontinuo de X_α (como $x_\alpha, y_\alpha \in C_\alpha$, X_α no es irreducible entre x_α, y_α). Así, como $K_\alpha \subseteq C_\alpha \subseteq X_\alpha - X_\beta$ se tiene que $r[\alpha,\beta]\langle K_\alpha\rangle \subseteq C_\beta \neq X_\beta$ lo que prueba esta afirmación.

iv) La familia $\{\ \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle : \omega_1 > \alpha \geq \beta\ \}$ es una familia de ω_1 cerrados de $C(X_\beta)$ y es tal que si $\gamma>\eta>\beta$, como $\hat{r}[\gamma,\beta]\langle\Im_\gamma\rangle = \hat{r}[\eta,\beta] \circ \hat{r}[\gamma,\eta]\langle\Im_\gamma\rangle$ y $\hat{r}[\gamma,\eta]\langle\Im_\gamma\rangle \subseteq \Im_\eta$, entonces para $\gamma>\eta$, se tiene que $\hat{r}[\gamma,\beta]\langle\Im_\gamma\rangle \subseteq \hat{r}[\eta,\beta]\langle\Im_\eta\rangle$. De lo anterior, y por el lema 2.3, obtenemos que para $\{\ \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle : \omega_1 > \alpha \geq \beta\ \}$ existe $\upsilon < \omega_1$ tal que $\hat{r}[\gamma,\beta]\langle\Im_\gamma\rangle = \hat{r}[\upsilon,\beta]\langle\Im_\upsilon\rangle$ para todo $\gamma > \upsilon$.

v) $N_\beta = \bigcap_{\omega_1 > \alpha \geq \beta} \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle$ es no degenerado. Esto se concluye de iv).

vi) $\hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle = N_\gamma$. Se probará que $\hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle$ está contenido en N_γ y que N_γ está contenido en $\hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle$. Para la primera de las contenciones, sea $H \in \hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle = \hat{r}[\beta,\gamma]\langle \cap\, \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle\rangle$. Como $\hat{r}[\beta,\gamma]\langle \cap\, \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle\rangle \subseteq \cap\, \hat{r}[\beta,\gamma]\langle \hat{r}[\alpha,\beta]\langle\Im_\alpha\rangle\rangle$ entonces $H \in \cap\, \hat{r}[\alpha,\gamma]\langle\Im_\alpha\rangle = N_\gamma$. Para probar la otra contención, de iv) se tiene que existe $\nu < \omega_1$ con $\nu > \beta > \gamma$ tal que $N_\beta = \hat{r}[\nu,\beta]\langle\Im_\nu\rangle$. Entonces, $\hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle = \hat{r}[\beta,\gamma]\langle\hat{r}[\nu,\beta]\langle\Im_\nu\rangle\rangle = \hat{r}[\nu,\gamma]\langle\Im_\nu\rangle$. Como $N_\gamma = \cap\, \hat{r}[\alpha,\gamma]\langle\Im_\alpha\rangle \subseteq \hat{r}[\nu,\gamma]\langle\Im_\nu\rangle$, se tiene que $N_\gamma \in \hat{r}[\beta,\gamma]\langle N_\beta\rangle$ es lo que se quería probar.

De los puntos anteriores vemos que $\{N_\alpha;\hat{r}[\alpha,\beta]\,|_{N_\alpha}\}_{\alpha,\beta<\omega_1}$ es un sistema inverso de conjuntos compactos no degenerados y funciones suprayectivas, por lo que su límite inverso N tiene más de un punto. (Teorema 2.2 Capitulo II)

Sea $\langle W_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1} \in N$ tal que $\langle W_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1} \neq \langle X_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$. Entonces $\hat{r}[\alpha,\beta](W_\alpha) = W_\beta$ esto es, $r[\alpha,\beta]\langle W_\alpha\rangle = W_\beta$, para $\alpha \geq \beta$. Si W es el límite inverso de $\{W_\alpha; r[\alpha,\beta]\,|_{W_\alpha}\}_{\alpha,\beta<\omega_1}$. W es un subcontinuo de X_∞, y $W \neq X_\infty$ pues si $W = X_\infty$, aplicando $\rho_\alpha: X_\infty \rightarrow X_\alpha$ vemos que $W_\alpha = X_\alpha$ para toda α, contradiciendo la elección de $\langle W_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$.

Finalmente, vemos que $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$, $\langle y_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1} \in W$, pues para cada α, $x_\alpha, y_\alpha \in W_\alpha$, ya que $W_\alpha \in N_\alpha \subseteq \Im_\alpha$. Entonces $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$ y $\langle y_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$ están en la misma composante de X_∞, lo que concluye la demostración.

Lema 4.1

Sea $\gamma < \omega_1$, $F = \{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}_{\alpha,\beta<\gamma}$ un sistema inverso que satisface todas las hipótesis del teorema 1 y sea $E_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$. Supongamos que γ no es un ordinal límite. Entonces E_γ es una composante del límite inverso $X_\gamma = \varprojlim \{X_\alpha; r[\alpha,\beta]\}_{\alpha,\beta<\gamma}$.

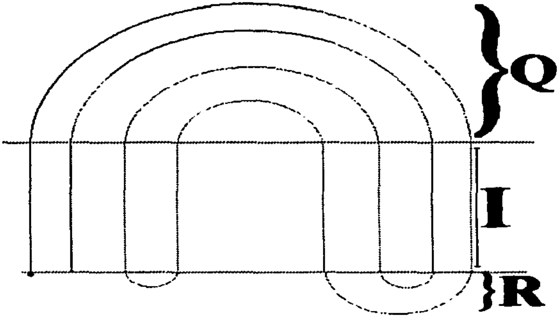
Demostración. Esta prueba puede ser obtenida directamente del primer párrafo de la prueba del teorema 1, con E_γ reemplazando a E y γ reemplazando a ω_1

Lema 4.2

Sea X cualquier continuo métrico indescomponible no degenerado, y K una composante de X. Existe un continuo métrico indescomponible Y tal que X es un subcontinuo propio de Y y una retracción $r: Y \to X$ tal que $r(Y - X) \subseteq K$. Más aun, Y puede ser escogido de tal manera que si H es cualquier composante de Y que no contiene a X, entonces $r(H) = K$.

Demostración. Sea P_0 el conjunto de Cantor usual. Sea $P_n = \{x \in P_0 : x \leq 3^{-n}\}$ y sea $F_n = P_n - P_{n+1}$. F_n consiste de aquellos puntos de P_0 entre $2 \cdot 3^{-(n+1)}$ y 3^{-n}, inclusive, y el punto medio de este intervalo, $(5/6)3^{-n}$, es el centro de simetría de F_n.

Considere la siguiente copia homeomorfa N del continuo indescomponible de Knaster: N es la unión de todos los semicírculos con centro en (1/2, 1) cóncavos hacia abajo y con puntos finales en $P_0 \times \{1\}$; $P_0 \times I$, y todos los semicírculos cóncavos hacia arriba con centro en $((5/6)3^{-n}, 0)$ y con puntos finales en $F_n \times \{0\}$ para cada entero no negativo n. Sea $Q = \{ (x, y) \in N: y \geq 1 \}$ y $R = \{ (x, y) \in N: y \leq 0 \}$.

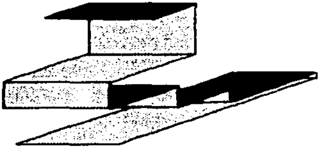


Sea X el continuo métrico indescomponible dado y K la composante especificada de X. Sea $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de subcontinuos de X cuya unión es K. Sea p $\in K_1$. Para cada K_n realice la siguiente construcción: Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ un subconjunto denso numerable de K_n con a_n= p. Para k≥n, sea L_k un subcontinuo de K_n irreducible entre a_k y a_{k+1} (tal subcontinuo siempre existe; ver el Teorema 1.1 del capítulo I) y defina el continuo $M_n \subseteq K_n\times I \subseteq X\times I$ irreducible entre (p, 0) y (p, 1) por:

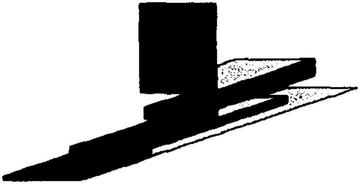
$$M_n = (\{p\}\times[1/n, 1]) \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} (L_k\times\{1/k\})\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{a_k\}\times[1/k, 1/(k-1)]\right) \cup (K_n\times\{0\})$$

y defina $M \subseteq P_0 \times (X\times I)$ por:

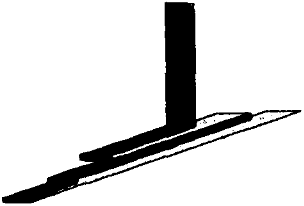
$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n\times M_{n+1}) \cup (\{0\}\times X\times\{0\} \cup \{0\}\times\{p\}\times I)$$



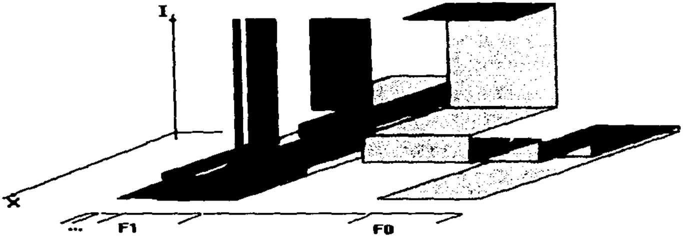
Esquema para un conjunto que contiene a $F_0 \times M_1$



Esquema para un conjunto que contiene a $F_1 \times M_2$



Esquema para un conjunto que contiene a $F_8 \times M_9$



Esquema para un conjunto que contiene a M

En el esquema anterior se ve, geométricamente, que $F_n \times M_{n+1}$ tiende a ser $(\{0\} \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times \{p\} \times I)$ cuando n crece; esto evidencia el hecho de que M es la cerradura en $P_0 \times X \times I$ de $\bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n \times M_{n+1})$.

Y es obtenido de la unión de Q, R y M identificando $(x, 1) \in Q$ con $(x, p, 1) \in M$ y $(x, 0) \in R$ con $(x, p, 0) \in M$ para cada $x \in P_0$.

Dada la construccion anterior, a partir de este momento, se probarán varias afirmaciones referentes a ella:

(a) Se mostrará que Y es un espacio métrico, (b) que es compacto (c) que es conexo, (d) que si K es una composante de X entonces existe una retraccion $r: Y \to X$ tal que $r(Y - X) \subseteq K$, (e) que Y puede ser escogido de tal manera que si H es cualquier composante de Y que no contiene a X, entonces $r(H) = K$ y finalmente, (f) que Y es indescomponible.

a) Como $Y \subseteq P_0 \times (X \times I) = Z$ y cada factor es un espacio métrico, entonces Y es un espacio métrico y naturalmente, $X \subset R$ es un subconjunto cerrado y propio de Y. Los incisos b) y c) mostrarán que Y es un continuo.

b) Para probar que Y es compacto, bastará mostrar que M lo es. Como M es un subconjunto acotado de Z, bastará mostrar que M es cerrado en Z. Como $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n \times M_{n+1}) \cup (\{0\} \times X \times \{0\} \cup \{0\} \times \{p\} \times I) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n \times M_{n+1})}$, entonces M es cerrado, y por lo tanto, Y es compacto.

c) Para probar que Y es conexo, sea $h: Y \to N$ definida por $h(q) = q$ si $q \in Q \cup R$ y $h(x, y, t) = (x, t)$ para todo $(x, y, t) \in M$. h así definida es continua.

Supongamos que Y no es conexo, es decir, que $Y = A \cup B$ con A, B subconjuntos propios cerrados y ajenos de Y, entonces obtenemos que $N = h(Y) = h(A) \cup h(B)$.

Observemos que $h(A) \cap h(B) = \varnothing$. (Si suponemos que existe $y \in h(A) \cap h(B)$ entoces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $h(a) = y$ y $h(b) = y$; pero dado que la función h es no inyectiva sólo en los segmentos L_k de Y que fueron definidos en la página 7 de este capítulo, entonces a y b deben de estar en $L_k \subset M_n \subset A \cup B$ para algún entero $k \geq n$, de donde vemos que $\{A, B\}$ separa a L_k, lo que es una contradicción a la conexidad de L_k.)

Como h es una función continua y A, B son subconjuntos cerrados de Y (que es compacto), se tiene que $h(A)$ y $h(B)$ son subconjuntos compactos y por lo tanto cerrados de N. De lo anterior, $\{h(A), h(B)\}$ es una separacion de N lo que es una contradicción y prueba que Y es conexo.

d) Defina $r: Y \to X$ de la siguiente manera: $r(x) = p$ si $x \in Q \cup R$; $r(s, x, t) = x$ si $(s, x, t) \in M$. Si $q \in M \cap (Q \cup R)$, entonces $r(q) = p$, y r restringido a X es la identidad. Claramente r es una retracción.

Para probar que $r(Y\text{-}X) \subseteq K$, suponga que $x \in Y\text{-}X$.

Si $x \in Q \cup R$ entonces $r(x) = p \in K$.

Si $x \in M$ entonces: i) $x \in F_n \times M_{n+1}$ para alguna n o bien

ii) $x \in \{0\} \times \{p\} \times I$.

i) Si $x \in F_n \times M_{n+1}$ entonces $x = (y, q, t)$ para alguna $y \in P_\sigma$, $q \in K_{n+1}$ y $t \in I$. En este caso, $r(x) = q \in K_{n+1} \subseteq K$.

ii) Si $x \in \{0\} \times \{p\} \times I$, entonces $r(x) = p \in K$.

Dado lo anterior se tiene que $r(Y\text{-}X) \subseteq K$.

e) Si H es cualquier composante de Y que no contiene a X, entonces $r|_H : H \to K$ es suprayectiva: Si $q \in K$, $q \in K_n$ para algún entero positivo n y entonces q tiene una imagen inversa en cada componente de $F_{n-1} \times M_n$ ($K_n \times \{0\} \subseteq M_n$) y como $F_{n-1} \times M_n$ es un subconjunto propio y cerrado de Y con interior no vacio, entonces H contiene alguna componente de $F_{n-1} \times M_n$ y esto concluye la prueba.

f) Y es indescomponible. Para probar esto, consideremos primero los siguientes dos puntos:

i) Si A es un subcontinuo propio de Y, entonces $(Q \cup R) - A \neq \emptyset$. Bastará con mostrar que $Q - A \neq \emptyset$. $X \subsetneq Q$, por lo que si $X - A$ es distinto de vacio, ya terminamos. Supongamos que $X - A$ es vacío. Es decir, supomgamos que $X \subsetneq A$.

Sabemos que A esta contenido en alguna composante C de Y. Sea $q_n = \left(\frac{1}{3^n}, p, 0\right)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y para cada entero no negativo t, sea H_t un subcontinuo propio de Y irreducible entre $X \cup \{q_l\}$.

Observmos que $C = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ y que $H_i \subseteq H_j$ si $i < j$. Luego, $A \subseteq H_k$ para algún entero no negativo k. De lo anterior, se tiene que $q_{k+1} \in Q$ y que $q_{k+1} \notin H_k$ por lo que $q_{k+1} \notin A$, de donde $q_{k+1} \in Q - A$, que es lo que se quería probar.

ii) Sea $h: Y \to N$ definida por $h(q) = q$ si $q \in Q \cup R$ y $h(x, y, t) = (x, t)$ para $(x, y, t) \in M$. Sea A un subcontinuo propio de Y, sea $t \in (Q \cup R) - A$, y supongamos que $h(A) = N$. Entonces, $h(t) = h(a)$ para algún $a \in A$, con $t \neq a$, lo que es una contradicción, pues h, como fue definida, es inyectiva en $Q \cup R$, por lo que concluimos que, si A es un subcontinuo propio de Y, $h(A)$ es un subcontinuo propio de N.

Supongamos que Y es descomponible, es decir, que $Y = A \cup B$ con A, B subcontinuos propios de Y. Entonces $N = h(Y) = h(A) \cup h(B)$ lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que Y es indescomponible.

Teorema 4.2

Dado cualquier continuo métrico indescomponible no degenerado Y, existe un sistema inverso $\{ X_\alpha; r[\alpha,\beta] \}_{0\leq\beta\leq\alpha<\omega_1}$ con $X_0 = Y$, satisfaciendo las hipótesis del Teorema 1, con la propiedad adicional de que $C \neq \varnothing$ para el sistema, así que el límite inverso X del sistema tiene exactamente dos composantes.

Demostración. La prueba será por inducción transfinita. Sea $X_0 = Y$, C_0 cualquier composante de X_0, p_0 cualquier punto en C_0 y r[0, 0] la identidad en X_0.

Supongamos que para algún ordinal $\gamma < \omega_1$, y para α, $\beta < \gamma$, con $\beta \leq \alpha$, X_α, X_β, C_α, p_α y r[α, β] han sido definidos de tal forma que:

1) X_β es un subcontinuo de X_α.

2) $r[\alpha,\beta]: X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es una retracción.

3) $C_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$.

4) $p_\alpha \in C_\alpha$ para toda $\alpha < \gamma$ y $r[\alpha,\beta](p_\alpha) = p_\beta$.

5) $r[\alpha,\beta]\langle X_\alpha - X_\beta \rangle \subseteq C_\beta$.

Ahora se probará que los puntos anteriores son también ciertos para γ. La demostración dependerá de si γ es un ordinal límite o no, por lo que dividimos la prueba en dos casos:

Caso 1) Si γ no es un ordinal límite, aplique el Lema 4.2 a $X_{\gamma-1}$ para obtener un continuo indescomponible X_γ y una retracción $r[\gamma, \gamma-1]$: $X_\gamma \rightarrow X_{\gamma-1}$ tal que $r[\gamma,\gamma-1]\langle X_\gamma - X_{\gamma-1} \rangle \subseteq C_{\gamma-1}$ y tome $p_\gamma \in C_\gamma$ (donde C_γ es cualquier composante de X_γ que no contiene a $X_{\gamma-1}$) tal que $r[\gamma, \gamma-1](p_\gamma) = p_{\gamma-1}$. Como para $\alpha < \gamma-1$, $r[\gamma,\alpha] = r[\gamma-1,\alpha]$ o $r[\gamma,\gamma-1]$ y como $C_{\gamma-1} \subseteq X_{\gamma-1} - X_\alpha$, se tiene que: $r[\gamma,\alpha]\langle X_\gamma - X_\alpha \rangle \subseteq r[\gamma-1,\alpha]\langle C_{\gamma-1} \rangle \subseteq C_\alpha$.

Caso 2) Si γ es un ordinal límite, sea X_γ el límite inverso de $\{\ X_\alpha; r[\alpha,\beta]\ \}_{0\le\beta\le\alpha<\gamma}$. X_γ es métrico, ya que está contenido en un producto numerable de espacios métricos. Sea $\langle p_\alpha\rangle_{\alpha<\gamma} \in X_\gamma - E_\gamma$, entonces $\langle p_\alpha\rangle_{\alpha<\gamma}$ no es una sucesión eventualmente constante. Sea C_γ la composante de X_γ que contiene a $\langle p_\alpha\rangle_{\alpha<\gamma}$. Por el lema 4.1, $C_\gamma \cap X_\alpha = \varnothing$ para $\alpha < \gamma$. Supongamos que $\langle x_\beta\rangle_{\beta<\gamma} \in X_\gamma - X_\alpha$. Entonces para algún $\gamma > \alpha$, $x_\alpha \neq x_\gamma$, así que $x_\alpha \in C_\alpha$; esto es, $r[\gamma,\alpha]\left(\langle x_\beta\rangle_{\beta<\gamma}\right) \in C_\alpha$, así que $r[\gamma,\alpha]\langle X_\gamma - X_\alpha\rangle \subseteq C_\alpha$ como es requerido.

De esta manera, el sistema inverso $\{\ X_\alpha; r[\alpha,\beta]\ \}_{0\le\beta\le\alpha<\omega_1}$, obtenido por inducción transfinita, satisface las hipótesis del teorema 4.1. Para este sistema, se tiene que $C \neq \varnothing$ pues el punto escogido $\langle p_\alpha\rangle_{\alpha<\omega_1}$ estaba en C, completando la prueba.

Corolario 4.1

Existen continuos indescomponibles con una y dos composantes.

ooooo

Bibliografía

Stephen Willard	*General Topology*	Addison Wesley 1970
John G. Hocking & Gail S. Young	*Topology*	Addison Wesley 1961
K. Kuratowsky	*Topology Vol II*	Academic Press and PWN 1968
Sam B. Nadler Jr.	*Continuum Theory*	Marcel Dekker Inc. 1992
Alejandro Illanes Mejía	*Notas de Hiperespacios*	Publicaciones internas, C.U. 1990