

45
20j



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FORMALISMOS ADM Y DE GEODESICAS
FUNCIONALES APLICADOS A CAMPOS
AXISIMETRICOS ESTACIONARIOS.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

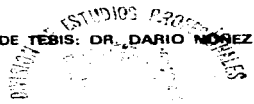
F I S I C O

P R E S E N T A :

RAYMUNDO PEREZ LOPEZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. DARIO NOBRES ZURIGA



MEXICO, D. F.

FACULTAD DE CIENCIAS
SALA DE REGISTRO

1997.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "FORMALISMOS ADM Y DE GEODESICAS FUNCIONALES APLICADOS A CAMPOS AXISIMETRICOS ESTACIONARIOS"

realizado por Raymundo Pérez López

con número de cuenta 8618182-0 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario
Propietario
Propietario
Suplente
Suplente

DR. DARIO NUÑEZ ZUNIGA

DR. SHAHEN HACYAN SALERYAN

DR. ALBERTO ALEJANDRO GARCIA DIAZ

DR. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKY

DR. ALFREDO RAUL LUIS MACIAS ALVAREZ

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

AGRADECIMIENTOS

Un día 30 de abril, cuando aun era un niño, mi padre me regalo un par de libros, yo en realidad esperaba un juguete, así que, desilusionado los guarde en un ropero. Un par de años después, los lei y desde entonces cobre gusto por la lectura. Por esas fechas, mi ultimo profesor de primaria me dio una de las mejores enseñanzas: el hábito del estudio y las técnicas para estudiar.

Cuando fui estudiante del CCH, me invitaron a participar en la 1a. OMM. que a la postre influiría en la definición de mi vocación por la Física. También de aquí nació un conjunto de amistades, los miembros del CMO, que aun conservo y me siguen apoyando; y que se hicieron presentes en los momentos difíciles de la carrera.

Conocí nuevos amigos durante la estancia en la carrera, de ellos aprendí, que el trabajo en equipo puede dejar muchas cosas en claro y que la convivencia con nuestros semejantes es necesaria.

Con los Drs. Darío Núñez y Hernando Quevedo, conocí que el trabajo de investigación es arduo y requiere de mucha dedicación, gracias a sus orientaciones este trabajo pudo llegar hasta aquí.

A todas estas personas que he recordado en estas lineas, les doy mil gracias por lo que me brindaron, así como a mis hermanos que en todo momento me dieron su apoyo moral y económico. Quiero hacer un

agradecimiento especial a tres mujeres que siempre fueron un motivo para elaborar este trabajo.

A mi madre, Lina López C.; por haber hecho todo para darme la oportunidad de seguir una carrera universitaria.

A mi esposa, Barbara, por su apoyo y paciencia durante la elaboración del mismo.

A mi hija, Elisa Ariel, que es un motivo para pensar en el futuro.

GRACIAS.

CONTENIDO

INTRODUCCION.....	1
1. ECUACIONES DE EINSTEIN.....	3
1.1. ESPACIOS CURVOS Y CURVATURA.....	3
1.2. ECUACIONES DE EINSTEIN.....	15
1.3. EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE HILBERT.....	18
1.4. SIMETRIA AXIAL.....	19
1.5. ECUACIONES DE EINSTEIN PARA UN CAMPO AXISIMETRICO ESTACIONARIO.....	23
2. FORMALISMO ADM PARA UN CAMPO AXISIMETRICO ESTACIONARIO.....	25
2.1. DIVISION DEL ESPACIO TIEMPO EN ESPACIO Y TIEMPO.....	25
2.2. CURVATURA INTRINSECA Y EXTRINSECA.....	28
2.3. FORMULACION DE ARNOWITT, DESER Y MISNER DE LA GEOMETRIA.....	31
2.4. APLICACION DE LA FORMULACION ADM AL CAMPO AXISIMETRICO ESTACIONARIO.....	32
3. GEODESICAS FUNCIONALES.....	39
3.1. ENFOQUE GENERAL.....	39
3.2. TRANSFORMACIONES CANONICAS.....	42
3.3. METODO DE ROUTH.....	44
3.4. REDUCCION DIMENSIONAL.....	46
3.5. LAGRANGIANO SIN POTENCIAL.....	48
3.6. SIMETRIA AXIAL Y ESTACIONARIA EN VACIO.....	50
3.7. GEODESICAS FUNCIONALES PARA CAMPOS AXISIMETRICOS ESTACIONARIOS.....	54
3.8. HAMILTONIANO GEODESICO.....	55
4. COMPARACION ENTRE LOS FORMALISMOS.....	58
5. CONCLUSIONES.....	61
APENDICE A.....	A1
APENDICE B.....	B1
APENDICE C.....	C1
APENDICE D.....	D1
BIBLIOGRAFIA.....	

INTRODUCCIÓN

La formulación de la gravitación hecha por Einstein con su teoría general de la relatividad, nos muestra no solo cómo están relacionados la gravitación y la geometría sino que además nos indica cómo la misma distribución de materia y energía pueden cambiar la geometría del espacio tiempo. Las 10 ecuaciones que describen esta relación forman un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo grado acopladas entre sí. Esto hace que determinar soluciones sea un problema complicado. Debemos además agregar que de las 10 ecuaciones, 4 corresponden a constricciones sobre las condiciones a la frontera y 6 a la dinámica del problema, pero en la formulación de Einstein, no se sabe decimos cuáles son.

Se han desarrollado varias formas de resolver los problemas de separar las constricciones de las ecuaciones dinámicas, y de obtención de soluciones. Para el primer caso se ha desarrollado el formalismo ADM, llamado así por las iniciales de sus autores Arnowitt, Deser y Misner; también conocido como el formalismo 3+1, porque se basa en la foliación del espacio tiempo en superficies espaciales que evolucionan a lo largo de un campo vectorial que toma el papel de tiempo. Este formalismo ha sido también una alternativa para brindar una formulación Hamiltoniana de la gravitación.

Por otra parte, para la generación de soluciones a las ecuaciones de Einstein se ha desarrollado el formalismo de Geodésicas Funcionales. Este parte de la interpretación del Lagrangiano de Einstein-Hilbert como un elemento de línea del espacio de potenciales introducido por Kramer y Neugenbauer. Este elemento de línea, al ser extremizado, da lugar a ecuaciones de geodésicas que son equivalentes a las ecuaciones de Einstein.

De esta forma, si se conoce una solución a esta ecuación de geodésicas, entonces pueden generarse nuevas soluciones haciendo uso de las propiedades de simetría de las geodésicas. Es posible que este formalismo permita definir una formulación Hamiltoniana de la gravitación.

Una teoría de la gravitación, en particular debe de describir objetos que se encuentren rotando cuya forma tenga simetría axial, la rotación del objeto puede ser independiente del tiempo, es decir estacionaria. De la simetría axial y de la independencia del tiempo se tiene que el campo gravitacional deberá de ser axisimétrico estacionario. La mayoría de los objetos celestes del universo poseen estas características de manera aproximada.

El objetivo de este trabajo es analizar la métrica axisimétrica estacionaria desde el punto de vista de los formalismos ADM y de Geodésicas Funcionales, estudiando los pros y contras de cada formalismo. También se analizan los momentos conjugados en cada formulación, así como de los Hamiltonianos derivados de cada una de ellas, se comparan los resultados con la idea de poder obtener alguna información sobre la posible cuantización de los mismos.

1. ECUACIONES DE EINSTEIN

Para comenzar vamos a establecer las ideas que sustentan a la Teoría General de la Relatividad, y exponemos las bases matemáticas en las que se basa la teoría. En seguida se derivan las ecuaciones de campo de Einstein y, seguimos con la definición de lo que es simetría axial y estacionaria y, para finalizar el capítulo se calculan las ecuaciones de campo para este tipo de simetría.

1.1 Espacios curvos y curvatura

El aparato matemático que sustenta a la Relatividad General es la geometría de espacios curvos, y la mayoría de las formulaciones que se derivan de esta teoría, deben ser expresadas en términos de este aparato matemático. Iniciemos explicando la relación que existe entre la geometría y la gravitación.

1.1.1 Sobre la relación entre gravitación y curvatura

Un ingrediente de la relatividad especial es la existencia de sistemas de referencia inerciales que mapean todo el espacio tiempo: Un sistema puede mapear todos los puntos del espacio tiempo, donde todos los puntos coordenados permanecen inmóviles respecto al origen, y donde todos los relojes marchan al mismo ritmo respecto a un reloj colocado en el origen. La función matemática que define un intervalo (distancia entre dos puntos del espacio tiempo) es la métrica, la cual es definida físicamente por longitudes de caminos y lecturas de reloj.

Una de las propiedades más importantes de un sistema inercial es que una partícula puesta en reposo, permanece en reposo si no actúan fuerzas sobre ella. Para poder hacer uso de esta propiedad debemos formarnos una idea de lo que es una fuerza. La gravedad es reconocida como una fuerza, pero ella se distingue de las demás fuerzas por el hecho de todos los cuerpos con la misma velocidad inicial seguirán una misma trayectoria en un campo gravitacional sin importar su composición interna. Con todas las otras fuerzas no sucede lo mismo, pues sus efectos dependerán de las propiedades físicas de los cuerpos sobre los que actúan.

Ahora bien, supongamos que una partícula prueba se deja caer a cierta altura desde la superficie terrestre, para esta partícula no hay un marco de referencia inercial en reposo en la tierra, pero observada desde un marco de referencia , también en caída libre, se verá moviéndose con un movimiento uniforme y si ambos, partícula y marco de referencia, partieron desde el reposo; la seguirá viendo en reposo, esto es , se comportará como un sistema de referencia inercial. Desde este punto de vista un campo gravitacional es equivalente a un marco de referencia en caída libre; este es el *principio de equivalencia* entre gravedad y aceleración, y es una piedra angular de la teoría de Einstein.

Para un campo gravitacional, este marco en caída libre no puede ser un marco de referencia global , lo más que puede ser es un *marco de referencia local*. En un campo gravitacional, las líneas de universo de dos partículas cercanas, que comienzan siendo paralelas no necesariamente terminan paralelas. Entonces el campo gravitacional no es globalmente plano, aunque localmente si lo sea.

Las líneas de universo de partículas serán nuestra prueba para poder construir sistemas inerciales. Es natural entonces discutir la geometría del

espacio tiempo definida como las líneas de universo de partículas libres. Los espacios de Riemann, cuentan con la propiedad de ser localmente planos, y la línea de universo de una partícula libre seguirá una trayectoria en un espacio Riemanniano a la que llamaremos *geodésicas*. Fue Einstein quien identificó las trayectorias de partículas cayendo libremente con las geodésicas de una geometría curva.

En estos términos el espacio de Minkowski es un espacio plano porque obedece el axioma de las paralelas de Euclides, pero no es Euclidiano, porque su métrica es diferente.

En la siguiente sección estudiaremos la manera de caracterizar al espacio tiempo como una variedad diferencial, y las propiedades de los campos tensoriales en esa variedad.

1.1.2 Variedades diferenciables y tensores.

Un conjunto de puntos M es definido como una variedad si cada punto de M tiene una vecindad abierta sobre la que se define un mapeo continuo 1-1 a un conjunto abierto de \mathbf{R}^n para alguna n [1]. Esto significa que una variedad es un conjunto de puntos con la propiedad de que cada uno puede servir como origen de coordenadas locales válidas en una vecindad. Esta vecindad constituye una "copia" de una vecindad abierta en \mathbf{R}^n .

Matemáticamente la asociación de puntos con los valores de sus parámetros puede ser tomada como un mapeo de puntos de una variedad dentro de puntos del espacio Euclidiano de la dimensión adecuada. Este es el modo de pensar en una variedad: es un espacio con coordenadas, que localmente se ve Euclidiano pero globalmente puede no serlo.

Supongamos que una variedad se mapea por dos sistemas de coordenadas, y la transformación de un sistema a otro esta dada por una función que es diferenciable, entonces se dice que el espacio es continuo y diferenciable. La suposición de diferenciabilidad significa que pueden definirse vectores (vectores covariantes) y uno-formas (vectores contravariantes o vectores duales), usando estos objetos podemos construir el conjunto completo de tensores de tipo $\binom{N}{M}$

Los tensores vienen a ser un nuevo tipo de objeto geométrico el cual tendrá, como los vectores ciertas propiedades algebraicas.

Resumen del álgebra tensorial.

1. Un campo tensorial define un tensor en cada punto del espacio tiempo.

2. Vectores, \mathbf{V}, \mathbf{W} ; y uno-formas, ω, σ ; son operadores lineales cada uno sobre el otro, que producen números reales. La linealidad significa:

$$\langle \omega, a\mathbf{V} + b\mathbf{W} \rangle = a\langle \omega, \mathbf{V} \rangle + b\langle \omega, \mathbf{W} \rangle$$

$$\langle a\omega + b\sigma, \mathbf{V} \rangle = a\langle \omega, \mathbf{V} \rangle + b\langle \sigma, \mathbf{V} \rangle$$

dónde a y b son cualquier campo escalar.

3. Los tensores son similarmente operadores lineales sobre uno-formas y vectores, produciendo números reales.

4. Si dos tensores del mismo tipo tienen las mismas componentes en una base dada, ellos tienen iguales componentes en todas las bases y se dice que son idénticos, o iguales, o los mismos. En particular si las componentes de un tensor son todas cero en una base, serán cero en todas, y el tensor se dice ser cero.

5. Un número de manipulaciones de las componentes de un campo tensorial son llamadas 'operaciones tensoriales permisibles' porque ellas producen componentes de nuevos tensores:

- **Multiplicación por un campo escalar** produce componentes de un nuevo tensor del mismo tipo.
- **Adición** de componentes de dos tensores del mismo tipo dan componentes de un nuevo tensor del mismo tipo.

El producto exterior de dos tensores es la multiplicación de componentes de dos tensores de tipo arbitrario dan componentes de un nuevo tensor del tipo igual a la suma de los tipos de tensores multiplicados.

- **Diferenciación covariante** de las componentes de un tensor de tipo $\binom{M}{N}$ dan componentes de un tensor de tipo $\binom{M}{N+1}$.
- **Contracción** sobre un par de índices de las componentes de un tensor de tipo $\binom{M}{N}$ producen las componentes de un tensor del tipo $\binom{M-1}{N-1}$. La contracción solo se define entre un índice superior y uno inferior.

1. Si una ecuación ha sido formada empleando únicamente operaciones permisibles, y si la ecuación es válida en una base, entonces la ecuación es válida en cualquier otra base.

1.1.3 Variedades Riemannianas

La mayoría de los espacios vectoriales que se emplean en física involucran un producto interno (producto punto) el cual es una regla que nos permite asociar a dos vectores un número real. Ésta es una función lineal de ambos vectores, por lo que se trata de un tensor tipo $\binom{0}{2}$ al que llamaremos el tensor métrico g .

Denotamos lo anterior por la siguiente ecuación

$$(1.1) \quad g(V,U) = g(U,V) = U \cdot V$$

donde además exigimos que el tensor sea simétrico. Sus componentes en una base $\{e_\alpha\}$ son

$$(1.2) \quad g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta) = e_\alpha \cdot e_\beta$$

Las componentes forman una matriz simétrica de $n \times n$.

Si $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ decimos que el tensor métrico corresponde a una métrica Euclidiana y el espacio vectorial donde está definido es un espacio Euclidiano. Al considerar el vector V fijo, notamos que la métrica define un mapeo 1-1 con 1-formas. Esto es, la métrica para un vector dado representa una función lineal en los números reales, por lo que se trata de una 1-forma. Dado un campo vectorial $V(P)$ hay un único campo 1-forma

$$(1.3) \quad V(P) = g(V(P), \cdot)$$

Para ejemplificar como funciona esta relación veamos ésta ecuación en forma de componentes.

$$V_\alpha = V(e_\alpha) = g(V, e_\alpha) = g(V_\beta e_\beta, e_\alpha) = V^\beta g(e_\beta, e_\alpha) \\ V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

La métrica provee una forma de asociar vectores y 1-formas como

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta \\ V^\alpha = g^{\alpha\beta} V_\beta$$

Las componentes de g son llamadas $g_{\alpha\beta}$; las componentes de la matriz inversa serán llamadas $g^{\alpha\beta}$.

Al considerar al espacio tiempo como una variedad, la métrica que se defina en ella es fundamental puesto que lleva la información de como avanzan los relojes y las distancias entre puntos. Por ello al seleccionar nosotros una métrica g tenemos una cierta curvatura, cuando con otra diferente g' tendremos una curvatura distinta.

Un sistema local de Lorentz o sistema local inercial es aquel que satisface:

$$(1.4) \quad g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{para toda } \alpha, \beta;$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}(P)}{\partial x^\gamma} = 0 \quad \text{para toda } \alpha, \beta, \gamma$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}(P)}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} = 0$$

La existencia de sistemas locales inerciales no es más que la enunciación de que cualquier espacio curvo tiene un espacio tangente T_P plano en cualquier punto. Recordando que líneas rectas en un espacio tiempo plano son las líneas de universo de partículas libres; la ausencia de los términos en la primera derivada de la ecuación (1.5) de arriba en la métrica de un espacio tiempo curvado significará que las partículas se moverán sobre líneas que son localmente rectas en este sistema coordenado.

1.1.4 Diferenciación covariante

La derivada de un campo vectorial involucra la diferencia entre vectores en dos puntos distintos, en el límite en que los puntos están cercanos entre sí. Puesto que una pequeña región de una variedad puede verse plana y esto nos dice de forma natural que las derivadas de un vector cuyas componentes son constantes es cero en este sistema coordenado. Esto es, las derivadas de los vectores base de un sistema localmente inercial son cero en P .

Lo expuesto anteriormente lleva a la conclusión de que en cualquier base $g_{\alpha\beta;\lambda}=0$, así mismo se deriva el resultado [2] de que

$$(1.7) \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 1/2 g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta;\nu} + g_{\nu\beta;\mu} - g_{\mu\nu;\beta})$$

es válido en cualquier sistema de coordenadas. Cuando en un sistema coordenado particular, encontramos que $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=0$ en un punto, estos símbolos no se anulan en donde quiera y tampoco en cualquier otro sistema.

Uno puede entonces calcular todas las derivadas covariantes una vez dada g .

$$(1.8) \quad V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} V^{\mu}$$

$$(1.9) \quad P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} P_{\mu}$$

$$(1.10) \quad T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} T^{\mu\alpha}$$

y la fórmula para la divergencia de un vector podemos escribirla de forma muy compacta como

$$(1.11) \quad \nabla V = V^{\alpha}_{;\alpha} = ((-g)^{1/2} V^{\alpha})_{;\alpha}$$

1.1.5 Transporte paralelo, geodésicas y curvatura

Es importante distinguir dos tipos de curvatura: intrínseca y extrínseca. La curvatura intrínseca de una variedad n -dimensional considera solo las relaciones entre puntos de trayectorias que permanecen sobre la variedad. La curvatura extrínseca viene de considerar a la variedad como una superficie en un espacio de dimensión superior, e indica la curvatura de las líneas que viven en la superficie comparadas con las líneas rectas. Así pues, la noción de curvatura extrínseca requiere de un espacio de orden superior.

Sobre una variedad curvada simplemente no es posible definir globalmente vectores paralelos. Sin embargo, uno puede definir vectores

paralelos localmente, por ejemplo como mover un vector de un punto a otro, permaneciendo este paralelo y de la misma magnitud. Pero el resultado de tal transporte paralelo de un punto A a un punto B dependerá de la trayectoria empleada.

La definición de *Transporte paralelo* es que la derivada covariante a lo largo de la curva por la que se realiza el transporte es cero. Esto puede ser expresado como

$$(1.12) \quad \nabla_u V = 0$$

Las curvas más importantes en un espacio plano son las líneas rectas. Uno de los más importantes axiomas de Euclides es que si dos rectas son inicialmente paralelas, permanecerán paralelas cuando son extendidas infinitamente. ¿Qué se entiende por extender? Por extender queremos decir que la tangente a la curva en un punto es paralela a la tangente a la curva en el punto previo. De hecho, una línea recta en el espacio Euclidiano es la única curva que transporta paralelamente a su propio vector tangente. Las llamadas geodésicas son entonces aquellas curvas que su propio vector tangente es transportado paralelamente a ellas:

$$\{U \text{ es tangente a la geodésica}\} \Leftrightarrow \nabla_U U = 0$$

que en notación de componentes es igual a

$$(1.13) \quad U^\alpha U^\beta{}_{;\alpha} = U^\alpha U^\beta{}_{;\alpha} + \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} U^\alpha U^\mu = 0$$

ahora bien si λ es el parámetro de la curva, entonces $U^\alpha = dx^\alpha / d\lambda$ y $U^\alpha \partial / \partial x^\alpha = d/d\lambda$.

$$(1.14) \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) + \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden no-lineal.

Como λ es un parámetro de la curva entonces, la curva puede ser reparametrizada, por ejemplo si definimos el parámetro afin $\phi = a\lambda + b$ donde a y b son constantes, y entonces ϕ es también un parámetro en el que la ecuación (1.14) se satisface. En general, solo las transformaciones lineales de λ como ϕ dan nuevos parámetros en los que la ecuación de geodésicas se satisface. Este tipo de parámetros son llamados *parámetros afines*.

Una geodésica es también una curva de longitud extrema. Cuando consideramos el elemento de línea $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, su valor dependerá de la métrica que seleccionemos, cuando pedimos que esta sea un valor extremo, entonces se tiene la ecuación geodésica dada por la ecuación (1.14) [3].

1.1.6 Derivada de Lie

A parte de la derivada covariante definida anteriormente, y la cual depende de que conozcamos explícitamente los valores de la conexión $\Gamma_{\beta\eta}^\alpha$, puede definirse también la derivada de manera independiente a la conexión. En esta sección explicaremos como se hace esto.

Un conjunto de curvas que llena una variedad, o alguna parte de ella, sin intersectarse, se le llama una congruencia.

Una congruencia nos ofrece un mapeo natural de la variedad en sí misma. Esto es, si λ es el parámetro de la curva, entonces cualquier cantidad infinitesimalmente pequeña $\Delta\lambda$ define un mapeo en que cada punto es mapeado en otro punto sobre la misma curva situado a una distancia paramétrica $\Delta\lambda$. Este es un mapeo 1-1, en al menos una región en que el campo vectorial es bien comportado (es de clase C^1).

Si el mapeo existe para toda $\Delta\lambda$, entonces hay una familia unidimensional diferenciable de tales mapeo, y entonces el mapeo es llamado un arrastre de Lie.

El concepto de arrastre permite la definición de una derivada a lo largo de la congruencia. La definición de una derivada en un espacio curvo lleva consigo varios problemas, la principal es sobre cómo comparar dos vectores en puntos distintos; cómo decidir si son paralelos o no. La congruencia puede proveer un modo de sustituir el concepto de paralelismo en puntos distintos. Este es; cuando comparamos vectores en dos puntos λ y $\lambda+\Delta\lambda$ sobre una curva de la congruencia, entonces podemos hacer un arrastre de Lie sobre el vector en $\lambda+\Delta\lambda$ y llevarlo a λ , donde puede ser abstraído del primero para definir la diferencia entre ambos. Esta diferencia es única, lo que nos da una única derivada dada una congruencia.

Hay una notación especial para el operador de la derivada de Lie: \mathcal{L}_V donde V denota al campo vectorial que genera la congruencia.

En base a esta idea se puede calcular la expresión de la derivada de Lie para cualquier campo tensorial [1]. Derivada de Lie de una función escalar f

$$(1.15) \quad \mathcal{L}_V f = df/d\lambda$$

Derivada de Lie de un campo vectorial U

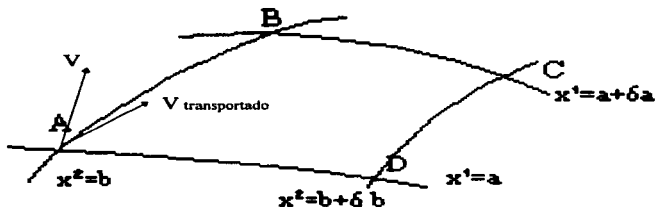
$$(1.16) \quad \mathcal{L}_V U = dU/d\lambda - dV/d\mu = [V, U]$$

Derivada de Lie de un campo de 1 formas ω en componentes

$$(1.17) \quad (\mathcal{L}_V \omega)_i = V^j \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i - \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} V^j$$

esta noción de derivada es equivalente a la derivada covariante definida más arriba, cuando se conoce la métrica de la variedad.

1.1.7 El tensor de curvatura



Pequeña sección de un enrejado coordenado.

Figura 1-1

Si nosotros llevamos por transporte paralelo un vector V del punto A al punto B y luego a C y D, para regresar a A, no necesariamente vamos a obtener el mismo vector que partió de A, sino un vector que se diferenciará por una cantidad que llamaremos δV

$\delta V^\alpha =$ cambio de V^α al ser transportado, primero desde $\delta a e_\alpha$

luego a $\delta b e_\lambda$, luego a $\delta a e_\alpha$ y finalmente a $\delta b e_\lambda$

$$= da db [\Gamma^\alpha_{\mu\sigma\lambda} \Gamma^\alpha_{\lambda\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}] V^\mu$$

$$= [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu$$

entonces vemos que si definimos :

$$(1.18) \quad R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} = \Gamma^\alpha_{\mu\sigma\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$$

entonces $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ son las componentes de un tensor que es llamado el tensor de curvatura de Riemann.

También el tensor de Riemann puede ser considerado en base al conmutador de las derivadas covariantes

$$(1.19) \quad [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\nu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu$$

esto significa que en un espacio curvo, uno debe de ser cuidadoso de conocer el orden en que las derivadas covariantes son tomadas, pues ellas no conmutan.

1.2 Ecuaciones de Einstein

En las secciones 1.1.2 a 1.1.7 se expuso la forma de expresar las propiedades de un espacio curvo, y éstas, como se vio en 1.1, estas propiedades describen la gravitación misma. En las siguientes secciones se muestra como se relacionan estas propiedades con la gravitación.

1.2.1 Identidades de Bianchi y el tensor de Ricci

De la ecuación (1.18) que define las componentes de Riemann y de sus propiedades de simetría, se puede llegar a a las llamadas identidades de Bianchi.[2]

$$(1.20) \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0$$

Definimos el tensor de Ricci como

$$(1.21) \quad R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$$

Este tensor proviene de la contracción del 1er. y 3er. índices del tensor de Riemann. Pueden en principio haber otras contracciones, pero debido a las simetrías del tensor de Riemann todas estas son iguales o difieren en signo de que hemos definido.

De igual modo definimos el escalar de Ricci como

$$(1.22) \quad R = R^\alpha_\alpha = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

1.2.2 El tensor de Einstein

Al aplicar la contracción de Ricci a las identidades de Bianchi, obtenemos

$$g^{\alpha\beta} (R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0$$

o

$$R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

contraemos nuevamente sobre los índices β y ν se tiene

$$(1.23) \quad R_{;\lambda} - R^\mu_{\lambda;\mu} + (-R^\mu_{\lambda;\mu}) = 0$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$(1.24) \quad (2R^\mu_{\lambda} - \delta^\mu_\lambda R)_{;\mu} = 0$$

Si definimos el tensor

$$(1.25) \quad G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R$$

entonces se ve que la ecuación (1.24) es equivalente a

$$(1.26) \quad G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

El tensor $G^{\alpha\beta}$, que es construido a partir del tensor de Riemann y la métrica únicamente, es llamado el tensor de Einstein, puesto que él estableció su importancia para la gravitación.

1.2.3 Las ecuaciones de campo

Para establecer una teoría de la gravitación hemos supuesto que ella y sus efectos sobre la materia pueden ser descritos en base a una variedad curvada con una métrica definida. Para completar la teoría debemos:

- Generalizar de alguna manera la ley de Newton de la gravitación

- No introducir un sistema privilegiado de coordenadas
- Garantizar localmente la conservación de la energía

$$(1.27) \quad T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

donde $T^{\alpha\beta}$ corresponden a las componentes del tensor de energía momento, que es donde esta la información de la distribución de materia energía que genera el campo gravitacional.

Con estas premisas, nosotros tenemos que postular una ley que tenga la forma

$$(1.28) \quad \mathbf{O}(g) = kT$$

donde k es una constante y \mathbf{O} es un operador diferencial del tensor métrico g . \mathbf{O} bien, de ser una combinación de $g_{\mu\nu,\lambda\beta}$, $g_{\mu\nu,\lambda}$ y $g_{\mu\nu}$. Puesto que el tensor de Ricci satisface estas condiciones, y de hecho; cualquier tensor de la forma

$$(1.29) \quad \mathbf{O}^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}$$

satisface esta condición, si μ y Λ son constantes. Ahora usamos el hecho de que la energía se debe de conservar con lo que a partir de las ecuaciones (1.27) y (1.29), encontramos que

$$(1.30) \quad (R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0$$

Comparando esta ecuación con (1.24) y (1.25) tenemos que $\mu = (-1/2)$ si deseamos que la ecuación se satisfaga para cualquier métrica arbitraria g . Con esto hemos llegado a las llamadas ecuaciones de Einstein de la relatividad general, o ecuaciones de campo de Einstein

$$(1.31) \quad G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}$$

Λ es conocida como la constante cosmológica, y en lo que sigue la consideraremos nula.

1.3 El principio variacional de Hilbert

Todo el contenido dinámico de la relatividad general está totalmente expresado en las ecuaciones de campo de Einstein. Así mismo, estas ecuaciones pueden ser derivadas de un Lagrangiano, esto no solo contribuye a la apariencia estética de la relatividad general, sino que además de darnos las ecuaciones de los campos en forma covariante, esta formulación descansa en la idea de unificación.

Cinco días después de que Einstein presentó su ley geometrodinámica en su forma final y estándar, Hilbert descubre independientemente como formular esta ley como consecuencia de emplear simplemente el principio de acción extrema dado por:

$$(1.32) \quad I = \int (-g)^{1/2} L dx^4 = \text{extrema!}$$

donde

$$(1.33) \quad L = L_{EH} + L_{materia}$$

siendo $L_{EH} = (1/16\pi)R$ que corresponde al Lagrangiano de Einstein-Hilbert y $L_{materia}$ representa al Lagrangiano de materia.

Para poder escribir el principio variacional en términos de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ y $g^{\alpha\beta}$ notemos que la densidad lagrangiana L_{EH} es

$$(1.34) \quad (-g)^{1/2} L_{EH} = (1/16\pi)R (-g)^{1/2} = (1/16\pi) g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2}$$

con lo que al variar la acción y pedir que sea extrema tenemos

$$\delta I = (1/16\pi) \int \delta (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2}) d^4x + \int \delta (L_{campo} (-g)^{1/2}) d^4x = 0$$

Considerando las variaciones de los factores de cada uno de los sumandos de la ecuación de arriba tenemos

$$(1/16\pi) \int [(\delta g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2} + g^{\alpha\beta} \delta(R_{\alpha\beta}) (-g)^{1/2} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \delta((-g)^{1/2})] d^4x + \int L_{materia} (-g)^{1/2} d^4x + \int L_{materia} \delta((-g)^{1/2}) d^4x = 0$$

puede verse que

$$\delta(-g)^{1/2} = (-1/2)(-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

, y ,

$$\delta R_{\alpha\beta} = \delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta}$$

con lo que tendremos

$$(1/16\pi) \int [(\delta g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} (-g)^{1/2} + g^{\alpha\beta} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta}) (-g)^{1/2} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} (-1/2)(-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] d^4x + \int L_{materia} (-g)^{1/2} d^4x + \int L_{materia} (-1/2)(-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0$$

que al reagrupar términos queda como

$$(1/16\pi) \int [(R_{\alpha\beta} - (1/2)R g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} (\delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta;\lambda} - \delta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda;\beta})] (-g)^{1/2} d^4x + \int (\delta L_{materia} \delta g_{\alpha\beta} - 1/2 L_{materia} \delta g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} (-g)^{1/2} d^4x = 0$$

El último integrando del lado izquierdo de la última ecuación nos da el tensor de energía momento $T^{\alpha\beta}$, mientras que el segundo término del primer integrando, al hacer una integración por partes se anula [4] y se ve que al hacer la variación respecto a los coeficientes métricos se recuperan las ecuaciones de Einstein

$$(1.35) \quad R_{\alpha\beta} - (1/2)R g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

1.4 Simetría axial

Las ecuaciones (1.35) de campo de Einstein, forman un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. Este número de

ecuaciones puede ser reducido haciendo uso de las simetrías de los campos que deseamos describir. En particular en este trabajo vamos a hacer uso de la simetría axial y estacionaria (axisimétrica estacionaria). En esta sección se pretende describir las características de esta simetría y establecer la forma general de la métrica correspondiente.

1.4.1 Definición intuitiva de simetría axial

Pensemos en coordenadas cilíndricas (ρ, z, ϕ) donde el ángulo ϕ es referido como el ángulo azimut. Entonces podemos dar esta definición de simetría axial [5]:

Una función escalar de la posición $f(\rho, z, \phi)$, se dice que tiene simetría axial si puede ser expresada en términos de coordenadas polares es independiente del ángulo ϕ , esto es

$$f = F(\rho, z)$$

donde $F(\rho, z)$ es función únicamente de ρ y z . Entonces las funciones con simetría axial son simétricas bajo rotaciones alrededor del eje Z.

Más en general, la simetría axial es invariante bajo rotaciones alrededor de un eje fijo.

Un modelo realista de los objetos astronómicos deberá de describir objetos que se encuentren rotando y cuya forma sea axisimétrica; es decir que cuenten con simetría axial. Supongamos que el campo es generado por la rotación constante de una estrella hecha de un fluido perfecto. La estrella y el campo a su alrededor posee simetría axial respecto su eje de rotación que pasa por el centro de la misma y el cual será nuestro origen de coordenadas y el eje de rotación el eje z. De la independencia en el tiempo y la simetría axial, se selecciona a la coordenada temporal como $x^0 = t$ y a la coordenada angular

$x^3 = \phi$ de los cuales los coeficientes métricos son independientes. Entonces tenemos que

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$$

Debido a que la estrella gira en la dirección de ϕ , el campo generado no es invariante bajo la inversión temporal (t en $-t$), puesto que ello invertiría el sentido de rotación de la estrella, con lo que resultaría una geometría del espacio tiempo distinta. Así mismo, el campo de la estrella no es invariante bajo la transformación de ϕ en $-\phi$; porque ello cambiaría el sentido de rotación de la estrella. Pero el campo de la estrella es invariante bajo la transformación simultánea de t y ϕ en $-t$ y $-\phi$. Debido a estas propiedades los coeficientes métricos g_{01} , g_{02} , g_{13} , y g_{23} deben de anularse ya que de otro modo en la transformación simultánea de t y ϕ en $-t$ y $-\phi$, el término $dt dx^1$ cambiaría de signo, por lo que

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0$$

con lo que la forma de la métrica es [6]

$$(1.36) \quad ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{03} dt d\phi + g_{33} d\phi^2 + g_{ab} dx^a dx^b$$

La métrica de la ecuación (1.36) también puede ser obtenida rigurosamente a partir de los vectores de Killing.

Posteriormente en 1917 Weyl simplificó el elemento de línea que contiene a todas las soluciones a las ecuaciones de Einstein para un campo axisimétrico estático. Quince años después, Lewis generaliza este elemento de línea para incluir soluciones estacionarias.

El elemento de línea toma entonces la forma de

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 + (g_{\rho\rho} d\rho^2 + 2g_{\rho z} d\rho dz + g_{zz} dz^2)$$

Haciendo diversas simplificaciones [5][6] uno llega a que el elemento de línea es el siguiente

$$(1.37) \quad ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\psi^2]$$

con $f=e^{2\psi}$

Para estos valores la métrica está dada por

$$(1.38) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & \omega f \\ 0 & f^{-1}e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{-1}e^{2\gamma} & 0 \\ \omega f & 0 & 0 & -f\omega^2 + f^{-1}\rho^2 \end{pmatrix}$$

la signatura de la métrica es $[-,+,+,+]$ y las coordenadas de un punto son (t,ρ,z,ϕ) .

Hasta aquí, para encontrar la forma del elemento de línea para un campo axisimétrico estacionario solo hemos usado algunas consideraciones físicas; pero es necesario establecer una manera covariante de expresar las simetrías; esto se hace en base a los vectores de Killing, como se delinea en la siguiente sección.

1.4.2 Los vectores de Killing

Es necesario encontrar una forma de expresar las simetrías que sea independiente del sistema de coordenadas y que se exprese de manera covariante. Esto se hace con ayuda de los vectores de Killing, y es lo que vamos a considerar en esta sección.

Una métrica $g(x^\mu)$ es invariante bajo una transformación de coordenadas de x^μ a x'^μ si $g'(x'^\mu)$ es la misma función de x'^μ como $g(x^\mu)$ es de x^μ . Esto es

$$(1.39) \quad g_{\mu\nu}(x^\beta) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'^\alpha)$$

La transformación de x^μ en x'^μ es entonces llamada una isometría de g .

Consideremos una isometría infinitesimal de x^μ en x'^μ definida por

$$(1.40) \quad x'^\mu = x^\mu + \alpha \xi^\mu(x^\mu)$$

con α constante y $|\alpha| \ll 1$. Substituyendo en (1.39) y despreciando términos en α^2 llegamos a la siguiente ecuación

$$(1.41) \quad g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} + g_{\rho\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \xi^\mu = 0$$

Que usando la expresión para la derivada covariante de un vector, puede escribirse como

$$(1.42) \quad \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0$$

Esta es la ecuación de Killing y un campo vectorial que la satisfaga es llamado un vector de Killing de la métrica.

Puede verse también [1] que un campo vectorial de Killing puede ser definido como el campo vectorial ξ que cumple

$$(1.43) \quad \mathcal{L}_\xi g = 0$$

En el caso de simetría axial se tiene un vector de Killing espacial e_3 y para simetría estacionaria (independiente del tiempo) se tiene un vector de Killing temporal e_0 , al sustituir esto en las ecuaciones de Killing (1.41) y al resolver para $g_{\alpha\beta}$ nos lleva al elemento de línea (1.37) [5].

1.5 Ecuaciones de Einstein para un campo axisimétrico estacionario

Como hemos observado, en el marco de la relatividad general la gravitación de un cuerpo es descrita por una solución de las ecuaciones de Einstein.

$$(1.44) \quad G = 8\pi T$$

donde G es el tensor de Einstein y cuyas componentes están dadas por

$$(1.45) \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

con la métrica (1.37) podemos obtener las ecuaciones de Einstein para el caso de un campo axisimétrico estacionario en el vacío dadas por

$$(1.46) \quad G_{\mu\nu} = 0$$

Hay que mencionar que las ecuaciones que se obtienen de (1.46) deben de ser simplificadas para llegar a la forma más simple.

Nosotros derivamos las ecuaciones de campo correspondientes con ayuda de un programa hecho en MAPLE V (el código aparece en el apéndice A).

Las ecuaciones de campo a las que se llegan son ¹

$$(1.47) \quad \rho^{-2}e^{-4\psi}(\omega_\rho^2 + \omega_z^2) - 2\rho(\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \rho^{-1}\psi_\rho) + \rho(\psi_\rho^2 + \psi_z^2) = 0$$

$$(1.48) \quad \omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} - \rho^{-1}\omega_\rho + 4\psi_\rho\omega_\rho + 4\psi_z\omega_z = 0$$

$$(1.49) \quad \gamma_\rho = \rho(\psi_\rho^2 - \psi_z^2) - (1/4)\rho^{-1}e^{4\psi}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2)$$

$$(1.50) \quad \gamma_z = -(1/2)\rho^{-1}e^{4\psi}\omega_z\omega_\rho + 2\rho\psi_\rho\psi_z$$

estas ecuaciones nos determinan a los campos ψ , γ y ω que definen la geometría del espacio tiempo. Como puede verse de ellas el campo γ está definido una vez que se conozcan los valores de los campos ψ y ω .

Como veremos en los siguientes capítulos estas ecuaciones pueden derivarse desde otros formalismos

¹ aquí los subíndices indican derivadas parciales respecto a la coordenada índice.

2. FORMALISMO ADM PARA UN CAMPO AXISIMETRICO ESTACIONARIO

Como ya se ha mencionado en este trabajo, las ecuaciones de Einstein corresponden a un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, esto las hace muy complicadas de resolver. Por ello se han desarrollado diversos formalismos que pretenden simplificar el trabajo de encontrar soluciones o bien describir la evolución de los campos dadas ciertas condiciones iniciales, en este capítulo vamos a analizar el formalismo ideado por Arnowitt, Deser, y Misner.

2.1 División del espacio tiempo en espacio y tiempo

Cuando se posee una formulación Lagrangiana de una teoría lo que se ocurre en seguida es elaborar la correspondiente formulación Hamiltoniana de la misma. Esto con la intención de poder cuantizar la teoría.

La formulación Hamiltoniana de una teoría de campo requiere de una ruptura del espacio tiempo en espacio y tiempo. Por lo tanto, es necesario escoger una función tiempo t y un campo vectorial t^a en el espacio tiempo que satisfagan $t^a \nabla_a t = 1$. Notemos que no podemos interpretar a t y t^a como medidas físicas sobre relojes hasta que no conozcamos la métrica del espacio tiempo. La formulación ADM está basada en la foliación del espacio tiempo en una familia de superficies espaciales $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, caracterizadas por el parámetro real t , al que se le llama coordenada tiempo. Sobre cada superficie Σ_t , se da un sistema de tres coordenadas espaciales (x^1, x^2, x^3) , tal que para

todo el espacio tiempo (t, x^1, x^2, x^3) constituyen un sistema coordinado. Es entonces conveniente descomponer t^a en sus partes tangente y normal a las superficies Σ_t .

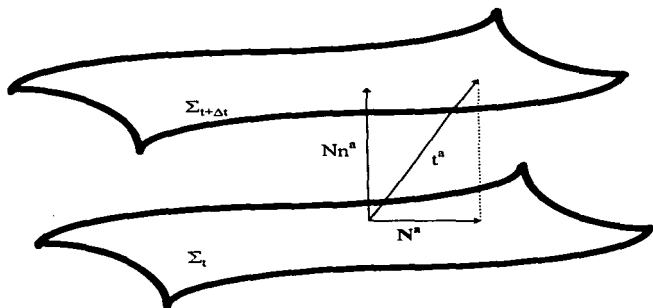


Diagrama que ilustra la interpretación geométrica de la función lapse y el vector shift

Figura 2-1

Sea \mathbf{n} el campo vectorial unitario normal a Σ_t y orientado en la dirección de incremento de t : $\mathbf{n} = -N \nabla t$, dónde el coeficiente positivo N es conocido como la *función lapse*, que al escribirla en componentes toma la forma [7]

$$(2.1) \quad N = (\mathbf{n}^a \nabla_a t)^{-1} = -g_{ab} t^a \mathbf{n}^b$$

Para la componente tangencial a las superficies introducimos el tensor métrico inducido sobre Σ_t como: $\mathbf{h}=\mathbf{g}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ que escrito en componentes toma la forma

$$(2.2) \quad h_{ab}=g_{ab}+n_a n_b$$

y definimos el *vector shift* como

$$(2.3) \quad N^a=h^a_b t^b.$$

Las componentes contravariantes de \mathbf{N} respecto a las coordenadas (x^α) , son de la forma $N^\alpha=(0, N^1, N^2, N^3)$.

Considerando a un observador que se mueva con una 4-velocidad \mathbf{n} ; la función lapse es interpretada entonces como el tiempo propio dt_0 medido por el observador entre los dos tiempos coordenados t y $t+dt$. El vector shift indica cuanto las coordenadas x^i de nuestro observador en Σ_{t+dt} difieren de sus coordenadas en Σ_t . (ver Figura 2-1)

El siguiente paso al dar una formulación Hamiltoniana es definir un espacio de fases para los campos especificando que campos tensoriales π sobre Σ , describen físicamente la configuración instantánea de los campos ψ . Dada una formulación Lagrangiana de una teoría de campo, hay una forma estándar de obtener la formulación Hamiltoniana que es muy similar a la forma de hacerlo con la mecánica de partículas. Uno toma al campo ψ como una coordenada q generalizada evaluada sobre Σ . Entonces uno ve la densidad lagrangiana como una función de las coordenadas generalizadas, de sus derivadas temporales, y sus derivadas espaciales. Definimos el momento, π , asociado con ψ en Σ como

$$(2.4) \quad \pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

El ultimo paso en la construcción de una formulación Hamiltoniana requiere de la especificación de un funcional $H(q, \pi)$ sobre Σ , al que llamaremos el Hamiltoniano, el cual es de la forma

$$(2.5) \quad H = \int_{\Sigma} \mathcal{H}$$

donde la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} es una función local de q , π y de sus derivadas tal que el par de ecuaciones,

$$(2.6) \quad \dot{q} = \mathcal{L}_\pi q = \frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$(2.7) \quad \dot{\pi} = \mathcal{L}_q \pi = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

son equivalentes a las ecuaciones de campo satisfechas por ψ . Donde se define

$$(2.8) \quad H = \pi \dot{q} - L$$

Una vez que hemos hecho la división del espacio tiempo en espacio y tiempo el paso siguiente es describir el Lagrangiano de Einstein-Hilbert en función de las cantidades N , N^a y h_{ab}

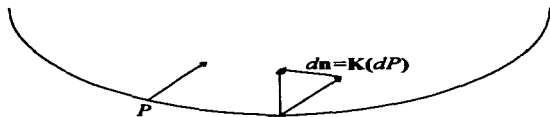
2.2 Curvatura Intrínseca y extrínseca

El concepto central del formalismo de Einstein de la gravedad es la curvatura, y entonces es conveniente analizar la curvatura en términos de la foliación del espacio tiempo. En sí, la formulación ADM consiste en escribir las ecuaciones de Einstein, que a priori forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en los coeficientes métricos $g_{\alpha\beta}$, en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en la forma de un problema de evolución de Cauchy, sujeto a ciertas constricciones. Por lo que el siguiente paso consiste en escribir la acción gravitacional (1.32) en

términos de las nuevas variables ADM, esto es, expresar R y $(-g^{1/2})d^4x$ en términos de h_{ab} , N , N^a . Esto requiere de estudiar como encajan las superficies Σ_t , y cómo los tensores son proyectados sobre Σ_t y sobre \mathbf{n} .

En la proyección del escalar de curvatura R sobre las superficies, jugará un papel importante la curvatura extrínseca \mathbf{K} a las Σ_t . Este tensor es definido como [7]

$$(2.9) \quad K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{ab}$$



La curvatura extrínseca mide el cambio en la dirección del vector normal a la superficie entre puntos muy cercanos entre sí
 figura 2-2.

con $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ la derivada de Lie a lo largo de \mathbf{n} . En particular la traza de \mathbf{K} está ligada a la divergencia covariante de \mathbf{n} por la relación

$$(2.10) \quad K = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

la interpretación geométrica de esta última relación se muestra en la figura 2. La relación de la curvatura extrínseca con las derivadas temporales, $\dot{h} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}$, de h_{ab} está dada por

$$(2.11) \quad K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} h_{ab} = \frac{1}{2} N^{-1} (\dot{h}_{ab} - 2D_{(a} N_{b)})$$

Expresamos el escalar de curvatura, R , como

$$(2.12) \quad R = 2(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b)$$

donde D es el operador derivada covariante para las superficies espaciales.

El primer término del lado derecho de la ecuación puede ser expresado como [7]

$$(2.13) \quad G_{ab}n^a n^b = ({}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2)/2$$

donde K es la traza de la curvatura extrínseca.

Por otra parte, de la definición de curvatura, podemos expresar el segundo término como

$$\begin{aligned} R_{ab}n^a n^b &= R_{abc}{}^c n^a n^b \\ &= -n^a R_{abc}{}^c n^b \\ &= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= (\nabla_a n^a)(\nabla_c n^c) - (\nabla_a n^c)(\nabla_c n^a) - \nabla_a (n_a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) \\ (2.14) \quad &= K^2 - K_{ab}K^{ab} - \nabla_a (n_a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) \end{aligned}$$

Los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación anterior son divergencias y pueden ser despreciados. Entonces tenemos

$$(2.15) \quad R = ({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2)$$

El elemento de volumen correspondiente está dado por la relación

$$(2.16) \quad \sqrt{-g} = N \sqrt{h}$$

Con lo que podemos escribir con ayuda de (2.15) y de (2.16) el principio de acción extrema de Hilbert en función de las variables ADM.

$$I_{ADM} = (1/16\pi) \int [R + (n \cdot n)(TrK)^2 - TrK^2] N h^{1/2} dt d^3x + \int L_{campos} d^4x$$

donde D_a es el operador derivada sobre Σ asociado con h_{ab}

2.3 Formulación de Arnowitt, Deser y Misner de la dinámica de la geometría

La sustitución de la ecuación (2.15) en el equivalente al Lagrangiano de Einstein-Hilbert nos expresa la acción gravitacional en la forma dada por Arnowitt, Deser y Misner (1962).

El momento canónicamente conjugado a h_{ab} es

$$(2.17) \quad \pi^{ab} = \frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ab}} = h^{1/2} (K^{ab} - h^{ab} K)$$

Puesto que el Lagrangiano no contiene derivadas temporales de N o N^a , sus momentos canónicos conjugados se anulan, interpretándose como que no son variables dinámicas relevantes..

Definimos nuestra densidad Hamiltoniana como en () con lo que llegamos a

$$(2.18) \quad H = -h^{1/2} [N(-{}^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \pi^2) - 2N_a D_b (h^{-1/2}\pi^{ab})]$$

donde se ha despreciado un término de divergencia [7] y $\pi = \pi^a_a$

De la variación de H respecto a N y N_a se obtienen las ecuaciones

$$(2.19) \quad -{}^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 = 0$$

$$(2.20) \quad D_a (h^{-1/2}\pi^{ab}) = 0$$

que corresponden a las ecuaciones de constricciones de valores iniciales. Las ecuaciones dinámicas que se obtienen son

$$(2.21) \quad \dot{h}_{ab} = 2Nh^{-1/2} \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\pi \right) + 2D_{(a}N_{b)}$$

$$\begin{aligned}
 \pi^{\mu\nu} = & -Nh^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab}R \right) + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ab} \left(\pi_{mn}\pi^{mn} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) \\
 (2.22) \quad & -2Nh^{-1/2} \left(\pi^{am}\pi_m^b - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab} \right) + h^{1/2} \left(D^a D^b N - h D^m{}_m N \right) \\
 & + h^{1/2} D_m \left(h^{-1/2} \pi^{ab} N^m \right) - 2\pi^{m(a} D_m N^{b)}
 \end{aligned}$$

Las constricciones revelan la arbitrariedad de norma que hay en la selección de la métrica h . la ecuación () no revela mas que la definición del momento canónico conjugado a la métrica.

2.4 Aplicación de la formulación ADM al campo axisimétrico estacionario para la obtención de las ecuaciones de campo.

Como vimos hemos visto, un espacio tiempo axisimétrico estacionario esta caracterizado por la existencia de dos vectores de Killing, uno temporal e_0 y otro espacial e_3 . Entonces podemos seleccionar coordenadas $(x^0=t, x^1=\rho, x^2=z, x^3=\phi)$ tal que e_0 y e_3 son los campos vectoriales

$$e_0 = \partial/\partial t$$

y

$$e_3 = \partial/\partial \phi.$$

Las componentes de la métrica g pueden ser expresadas en términos de la función lapse, el vector shift y de la métrica inducida como

$$(2.23) \quad g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 - 2N_a dt dx^a + h_{ab} dx^a dx^b$$

Esto nos permite introducir un sistema de coordenadas que se conoce como coordenadas adaptadas, de donde es claro que

$$(2.24) \quad g_{00} = N^a N_a - N^2$$

$$(2.25) \quad g_{0i} = N_a$$

$$(2.26) \quad g_{ab} = h_{ab}$$

donde los coeficientes métricos solo dependen de las coordenadas de (ρ, z) .

La derivada temporal de h_{ab} esta dada por

$$(2.27) \quad \dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_{e_0} h_{ab} = e^0 h_{ab0} - h_{ab} e^0_{,0} = h_{ab,0}$$

Este resultado es valido en general, siempre que seleccionemos coordenadas adaptadas. En el caso que estamos analizando, como no hay dependencia explicita del tiempo entonces $\dot{h}_{ab} = 0$

Para el elemento de línea del campo axisimétrico estacionario, y empleando coordenadas adaptadas, se tienen los valores para las variables ADM.

$$(2.28) \quad N = \sqrt{\frac{f\rho^2}{f^2\omega^2 - \rho^2}}$$

$$(2.29) \quad N_a = (0, 0, \omega f)$$

$$(2.30) \quad h_{ab} = \begin{pmatrix} f^{-1}e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1}e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -f\omega^2 + f^{-1}\rho^2 \end{pmatrix}$$

Para una métrica con dos vectores de Killing tenemos que la traza da la curvatura extrínseca es cero. Esto se deriva de la ecuación (2.10) pues

$$\begin{aligned} K = \nabla n &= -\frac{1}{N\sqrt{h}} \left[\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^a} (\sqrt{h}N^a) \right] \\ &= -\frac{1}{N\sqrt{h}} \left[\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \phi} (\sqrt{h}N^\phi) \right] = 0 \end{aligned}$$

pues todas las componentes son independientes de la t y ϕ .

La expresión para la curvatura extrínseca esta dada en este caso por

$$(2.31) \quad K_{ab} = -N^{-1}(D_a N_b)$$

observemos que aunque la traza de K es nula, el tensor de curvatura no lo es necesariamente, pues elementos fuera de la diagonal pueden ser distintos de cero.

El Lagrangiano que se obtiene es

$$(2.32) \quad L = h^{1/2} N \left({}^{(3)}R + K_{ab} K^{ab} \right)$$

este Lagrangiano es equivalente al Lagrangiano de Einstein-Hilbert.

Explicitamente es igual a

$$(2.33) \quad L_{ADM} = 4\rho^2 \psi_\rho E_I - f^2 \omega_\rho E_2 + 2\rho \left(\frac{\partial E_3}{\partial \rho} + \frac{\partial E_4}{\partial z} \right) \\ - 2\rho \{ 2\rho^2 E_I + f^2 \omega E_2 \} \frac{1}{\rho^2 - f^2 \omega^2}$$

donde

$$E_1 = \rho^{-2} e^{-4\psi} (\omega_\rho^2 + \omega_z^2) - 2\rho (\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \rho^{-1} \psi_\rho) + \rho (\psi_\rho^2 + \psi_z^2 + \gamma_{\rho\rho} + \gamma_{zz})$$

$$E_2 = \omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} - \omega_\rho \rho^{-1} + 4(\psi_\rho \omega_\rho + \omega_z \psi_z)$$

$$E_3 = f^2 (\omega_z^2 - \omega_\rho^2) + 4\rho^2 (\psi_\rho^2 - \psi_z^2) - 4\rho \gamma_\rho$$

$$E_4 = \omega_\rho \omega_z f^2 - 4\rho^2 \psi_\rho \psi_z + 2\rho \gamma_z$$

y la diferencia con el Lagrangiano de Einstein-Hilbert es

$$L_{ADM} - L_{EH} = +2\rho (E_I - \{ 2\rho^2 E_I + f^2 \omega E_2 \} \frac{1}{\rho^2 - f^2 \omega^2})$$

como podemos observar, la diferencia entre los Lagrangianos es función de las ecuaciones de campo, esto hace que ambos sean equivalentes.

A pesar de que \dot{h}_{ab} es idénticamente nulo su momento conjugado no lo es y esta dado por la relación

$$(2.34) \quad \pi^{ab} = h^{1/2} K^{ab}$$

de esta relación se deduce que la traza del momento es cero. Podría haberse pensado que no era posible calcular el momento π^{ab} pues este se define en base a la ecuación (2.4) y como $\dot{h}_{ab} = 0$ parece haber una indeterminación. El hecho está en que no hay que sustituir durante la construcción del formalismo, sino hasta que este esta terminado. En particular las componentes π^{13} y π^{23} son las únicas distintas de cero (ver apéndice B)

$$\pi^{\rho\phi} = -\frac{1}{2} \frac{f}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)} \frac{f}{\rho} (-2\omega\rho + 4\psi_\rho \omega \rho^2 + \omega \rho f^2 \omega^2 + \omega \rho \rho^2)$$

$$\pi^{z\phi} = -\frac{1}{2} \frac{f}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)} \frac{f}{\rho} (4\psi_z \rho^2 + \omega_z f^2 \omega^2 + \omega_z \rho^2)$$

El Hamiltoniano al que se llega

$$(2.35) \quad H = -h^{1/2} \{ N(-{}^{(3)}R + h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab}) - 2N_a D_b (h^{-1/2} \pi^{ab}) \}$$

de donde se obtienen, al variar respecto a N y N^a , las ecuaciones

$$(2.36) \quad -{}^{(3)}R + h^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} = 0$$

$$(2.37) \quad D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0$$

que corresponden a las ecuaciones de constricciones de valores iniciales. De la segunda solo la tercera componente (cuando $b=\phi$) es distinta de cero y explícitamente son para (2.36)

$$4\{4f^2 \omega^2 \rho^2 (\rho^{-1} \psi_\rho - \psi_z^2 - \psi_\rho^2) + \rho^2 \Delta \psi (f^2 \omega^2 - \rho^2) - f^2 \omega^2\} \\ + 2(\psi_z^2 + \psi_\rho^2 + \gamma_{zz} + \gamma_{\rho\rho}) (\rho^2 - f^2 \omega^2)^2 - f^4 \omega^2 (\omega_z^2 + \omega_\rho^2)$$

$$-(1/2)f^6 \rho^{-2} \omega^4 \omega_\rho^2 - (5/2)f^2 \rho^2 (\omega_z^2 - \omega_\rho^2) + 2f^4 \omega^4 (\omega^{-1} \Delta \omega) - f^2 \omega \rho^2 (16\omega_z \psi_z - \psi_\rho \omega_\rho - 2\Delta \omega + 4\rho^{-1} \omega_\rho) = 0$$

donde se ha escrito

$$\Delta \psi = (\rho^{-1} \psi_\rho + \psi_{\rho\rho} + \psi_{zz})$$

$$\Delta \omega = \{ \omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} + \rho^{-1} \omega_\rho \}$$

y para (2.37)

$$(f^2 \omega^2 + \rho^2) \left(\frac{1}{4} (\omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} - \omega_\rho \rho^{-1}) + \psi_\rho \omega_\rho + \psi_z \omega_z \right) + \omega \rho^2 \Delta \psi + \frac{1}{2} f^2 \omega (\omega_\rho^2 + \omega_z^2) = 0$$

Las ecuaciones canónicas que se obtienen de (2.35) son

$$(2.38) \quad 2Nh^{-1/2} (\pi_{ab}) + 2D_{(a} N_{b)} = 0$$

$$(2.39) \quad -Nh^{1/2} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} h^{ab} R \right) + \frac{1}{2} Nh^{-1/2} h^{ab} (\pi_{mn} \pi^{mn}) - 2Nh^{-1/2} (\pi^{am} \pi_m^b) + h^{1/2} (D^a D^b N - h D^m_m N) + h^{1/2} D_m (h^{-1/2} \pi^{ab} N^m) - 2\pi^{m(a} D_m N^{b)} = 0$$

La ecuación (2.38) es equivalente a la definición de π^{ab} . Por otra parte de la ecuación (2.39) se obtienen 3 componentes distintas de cero e independientes entre sí

para $a=\rho, b=\rho$

$$(2.40) \quad f^2 (\omega_z^2 - \omega_\rho^2) + 4\rho^2 (\psi_\rho^2 - \psi_z^2) - 4\rho \gamma_\rho = 0$$

para $a=\rho, b=z$

$$(2.41) \quad \omega_\rho \omega_z f^2 - 4\rho^2 \psi_\rho \psi_z + 2\rho \gamma_z = 0$$

para $a=\phi$, $b=\phi$

$$(2.42) \quad 4f^2 \omega \rho^2 (4(\psi_z \omega_z + \psi_\rho \omega_\rho) + \omega_{\rho\rho} + \omega_{zz} - \rho^{-1} \omega_\rho) \\ + 4\rho^2 ((\rho^2 - f^2 \omega^2)(\psi_z^2 + \psi_\rho^2 + \gamma_{zz} + \gamma_{\rho\rho}) + 2f^2 \omega^2 (\psi_{\rho\rho} + \psi_{zz} + \rho^{-1} \psi_\rho)) \\ + (\omega_\rho^2 + \omega_z^2) f^2 (3f^2 \omega^2 + \rho^2) = 0$$

Las ecuaciones (2.40)-(2.42) son equivalentes a las ecuaciones de Einstein. (Ver Apéndice B).

El momento π^{ab} tiene información sobre el cambio en la curvatura de las superficies y sobre como se van desplazando horizontalmente al evolucionar respecto a t . Puesto que $\text{Tr } \pi = 0$ entonces el momento solo tiene información sobre como se desplazan las superficies, pues estas no cambian su curvatura.

Existe una arbitrariedad de norma en nuestra selección de la configuración del campo h_{ab} . Si Ψ es cualquier difeomorfismo de Σ , entonces h_{ab} y $\Psi^* h_{ab}$ representan la misma configuración física. Esto nos sugiere que podemos tomar como espacio de configuración para la relatividad general al conjunto de clases de equivalencias de la métrica Riemanniana sobre Σ , donde dos métricas están relacionadas si existe un difeomorfismo entre ellas. Este espacio de configuración es conocido como el superespacio. Al usar el superespacio como espacio de configuración, encontramos que cualquier campo vectorial w^a sobre Σ el momento conjugado π^{ab} debe satisfacer

$$\int \pi^{ab} (\delta h_{ab} + D_{(a} w_{b)}) = \int \pi^{ab} \delta h_{ab}$$

que implica que automáticamente satisface

$$(2.43) \quad D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0$$

Con lo que la constricción (2.37) se elimina al seleccionar como espacio de configuración al superespacio. [7]

La constricción (2.38) puede verse como el resultado de la arbitrariedad de norma involucrada en la forma como se hizo la división del espacio tiempo en espacio y tiempo. Es muy parecida a la constricción que aparece cuando se introduce en el Lagrangiano un parámetro tiempo y se toma a este parámetro como una variable dinámica. Para desparametrizar la teoría hay que resolver la constricción para el momento. En nuestro caso la ecuación (2.38) es cuadrática en el momento, y una desparametrización similar no es posible. Esto es un serio obstáculo para elaborar una formulación cuántica a partir de esta formulación.

Hasta aquí nuestro análisis del formalismo ADM. En el capítulo siguiente vamos a discutir el formalismo de Geodésicas Funcionales.

3. FORMALISMO DE GEODESICAS FUNCIONALES

En el capítulo anterior hemos visto la que se considera la forma natural de definir una formulación Hamiltoniana de la relatividad. En el presente capítulo estudiaremos un formalismo equivalente a la relatividad de Einstein, el cual también permite elaborar una formulación Hamiltoniana del mismo.

3.1 Enfoque general

Consideremos un Lagrangiano de la forma $L=L_{EH}+L_M$ donde $L_{EH}=(g)^{1/2}R$ es el Lagrangiano de Einstein-Hilbert y L_M representa el Lagrangiano de materia. Para calcular de manera explícita el Lagrangiano L_{EH} usamos la expresión que se obtuvo en el capítulo 1 para el tensor de Ricci.

Con lo que el Lagrangiano Einstein-Hilbert toma la forma

$$(3.1) L_{EH} = \sqrt{-g} \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \right]$$

dónde $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$; $g_{\alpha\beta}$ es la métrica del espacio tiempo con coordenadas x^{α} y $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica. Ahora los dos primeros términos de la derecha en la ecuación pueden expresarse como divergencias usando las relaciones

$$(3.2) \quad \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}$$

Si de estas ecuaciones despejamos el primer término del lado derecho y sustituimos en la expresión que obtuvimos para el Lagrangiano tenemos

$$(3.4) \quad L_{EH} = \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \\ + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} [\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}]$$

Dado que las ecuaciones de campo serán obtenidas a partir del principio variacional, podemos despreciar los términos de divergencia total pues se anulan en la frontera de la variación.

Con lo anterior el Lagrangiano toma la forma

$$L_{EH} = \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} [\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}]$$

haciendo uso de que $g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta})}{\partial x^{\beta}}$ y la relación

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{\partial (\ln \sqrt{-g})}{\partial x^{\beta}}$ entonces el Lagrangiano de Einstein-Hilbert puede expresarse finalmente como

$$(3.5) \quad L_{EH} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} [\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}]$$

por tanto, el Lagrangiano toma la forma

$$(3.6) \quad L = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left[\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} \right] + L_M$$

El Lagrangiano de Einstein-Hilbert es entonces una función de la métrica g y de sus primeras derivadas. Ahora bien, si consideramos un Lagrangiano L_M que sea función de los potenciales de materia η^A , $A=1,2,\dots,p$ y sus primeras derivadas $\eta^A_{,\alpha}$, se pueden definir nuevas variables $X^a = \{g_{\alpha\beta}, \eta^A\}$, donde $a=1,2,\dots,n$. El número n puede tomar cualquier valor en el intervalo $p+1 < n < p+6$ dependiendo de las simetrías del espacio tiempo. El Lagrangiano, por lo tanto puede expresarse como $L=L(X^a, X^a_{,\alpha})$. Sin embargo, para mantener la generalidad de nuestro análisis, consideraremos Lagrangianos que después de introducir los potenciales $X^a = (g_{\alpha\beta}, \eta^A)$ mantienen una dependencia explícita de las coordenadas del espacio tiempo x^α , y por tanto tendremos la dependencia funcional $L=L(X^a, X^a_{,\alpha}, x^\alpha)$.

En general, el Lagrangiano puede contener términos tanto cuadráticos como lineales en las "velocidades" $X^a_{,\alpha}$ y también componentes que dependan solamente de las nuevas "coordenadas" X^a . Para estudiar este tipo de Lagrangianos en una forma bastante general, vamos a considerar aquí solamente aquellos que pueden ser representados como

$$(3.7) \quad L = G_{ab} X^a_{,\alpha} X^b_{,\beta} h^{\alpha\beta} + A^a_{,\alpha} X^a_{,\alpha} + V$$

dónde G_{ab} es una métrica en el espacio abstracto de los potenciales X^a y x^α . La "métrica" $h^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}(x^\alpha)$ se usa para definir un producto escalar interno

entre las velocidades $X^a_{,\alpha}$. La matriz $A^{\alpha}_a = A^{\alpha}_a(X^a, x^{\alpha})$ determina los términos lineales en las velocidades que requieren de un tratamiento especial ya que conducen a Lagrangianos singulares, es decir, para los cuales no es posible definir el Hamiltoniano correspondiente, el potencial V contiene todos los términos del Lagrangiano que dependen únicamente de las coordenadas X^a y x^{α} .

En este trabajo no consideraremos los términos lineales en las velocidades, es decir, despreciamos el término $A^{\alpha}_a X^a_{,\alpha}$. Bajo esta consideración, podemos decir que el Lagrangiano contiene una parte cinética y una potencial. Entonces podemos aplicar el principio de acción mínima a este tipo de Lagrangianos para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes.

3.2 Transformaciones canónicas

El tipo de transformaciones más conocido es aquel que pasa de un sistema de coordenadas X^a a uno nuevo X'^a mediante ecuaciones de transformación de la forma

$$(3.8) \quad X'^a = X'^a(X^a, t)$$

donde t es un parámetro al que llamaremos tiempo. Un ejemplo de estas transformaciones lo son las ecuaciones que pasan de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. A estas transformaciones se les llama transformaciones puntuales.

Pero en la formulación de Hamilton las cantidades de movimiento son también variables del mismo nivel que las coordenadas generalizadas por lo que el concepto de transformación de coordenadas debe de ampliarse

para que incluya la transformación simultánea de las coordenadas y de las cantidades de movimiento X^a , P^a a un nuevo sistema X'^a , P'^a con ecuaciones de transformación invertibles

$$(3.9) \quad X'^a = X'^a(X^a, P^a, t)$$

$$(3.10) \quad P'^a = P'^a(X^a, P^a, t)$$

Así, las nuevas coordenadas estarán definidas no solo en función de las antiguas, sino también en función de las cantidades de movimiento antiguas.

Puede decirse que la ecuación (3.8) definen una transformación del espacio de configuraciones y las ecuaciones (3.9)-(3.10) definen una transformación del espacio fase.

Cuando se trabaja con la teoría Hamiltoniana uno está interesado en las transformaciones (3.9)-(3.10) para las cuales las nuevas coordenadas X'^a , P'^a sean coordenadas canónicas. Este requisito se satisface si existe una cierta función $H'(X'^a, P'^a, t)$ tal que las ecuaciones de movimiento en el nuevo sistema estén en la forma de Hamilton. Es decir, H' es el nuevo Hamiltoniano en el nuevo sistema de coordenadas. Este nuevo Hamiltoniano puede diferir del anterior en una derivada total de una función cualquiera respecto al parámetro t al que hemos llamado tiempo.

Con estas consideraciones podemos obtener la relación [8]

$$(3.11) \quad H' = \frac{\partial L'}{\partial X'^a} X'^a - L$$

La importancia de esta transformación es muy útil cuando algunas coordenadas son cíclicas, y analizaremos esto en la siguiente sección.

3.3 Método de Routh

La función lagrangiana L es generalmente una función de las coordenadas generalizadas X^a y de sus velocidades $X^{a,t}$. Ahora bien, puede suceder que cierta coordenada X^b no aparezca en el Lagrangiano L , pero sí su correspondiente velocidad $X^{b,t}$. La importancia de estas variables en la integración de las ecuaciones de Lagrange fue primeramente reconocida por Routh quién llamó a estas coordenadas como "coordenadas ausentes". Fue Helmholtz quién las llamo coordenadas cíclicas[9].

Si tenemos una de estas coordenadas, entonces las ecuaciones de Lagrange nos dicen que la cantidad de movimiento asociada a esta coordenada será constante

$$P^a = \text{constante} = \lambda$$

Además, sabemos de las ecuaciones de Hamilton que

$$P_{a,t} = \partial L / \partial X^a = - \partial H / \partial X^a$$

esto nos dice que una coordenada cíclica estará ausente tanto en el Lagrangiano como en el Hamiltoniano.

Consideremos un Lagrangiano en el que la coordenada X^b es una coordenada cíclica.

$$L = L(X^1, \dots, X^{b-1}, X^{b,t}, \dots, X^{b-1,t}, t)$$

con este Lagrangiano tenemos que resolver un problema con b grados de libertad aun cuando uno de ellos corresponda a una coordenada cíclica. En cambio, en la formulación de Hamilton es distinto, ya que P_b es una constante λ y H tiene la forma

$$H = H(X^1, \dots, X^{b-1}, P_1, \dots, P_{b-a}, \lambda, t)$$

El Hamiltoniano describe un problema con solo $b-1$ coordenadas, el cual puede resolverse por completo ignorando la coordenada cíclica. El comportamiento de la propia coordenada cíclica con el tiempo se encuentra integrando la ecuación de movimiento

$$\dot{X}^b = \partial H / \partial \lambda$$

Las ventajas de la formulación de Hamilton en el manejo de coordenadas cíclicas se pueden combinar con el procedimiento de Lagrange mediante el método ideado por Routh. Este método se basa principalmente en una transformación canónica que lleva de la base X^a, X^b, \dots a la base X^a, P_a tan sólo para las coordenadas que sean cíclicas, obteniendo sus ecuaciones de movimiento en la forma de Hamilton, mientras que las restantes coordenadas se estudian a partir de las ecuaciones de Lagrange. Si llamamos X^{m+1}, \dots, X^a a las coordenadas cíclicas, podemos introducir una nueva función R , llamada Routhiano, definida de la siguiente forma

$$(3.12) \quad R(X^1, \dots, X^a, X^1, \dots, X^m, P_{m+1}, \dots, P_a, t) = \sum_{i=m+1}^a P_i X^i - L$$

que al obtener su diferencial puede deducirse que

$$(3.13) \quad \frac{\partial R}{\partial X^i} = -\frac{\partial L}{\partial X^i}, \quad \frac{\partial R}{\partial X^i, t} = -\frac{\partial L}{\partial X^i, t} \quad i=1, \dots, m$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial R}{\partial X^j} = -P_j, \quad \frac{\partial R}{\partial P_j} = X^j \quad j=m+1, \dots, a$$

las ecuaciones (3.14) tienen la forma de las ecuaciones de movimiento de Hamilton en donde R hace las veces del Hamiltoniano mientras que las

ecuaciones (3.13) obedecen a las ecuaciones de Lagrange en las que R toma el papel de Lagrangiano.

Hasta aquí no se ha hecho uso explícito de la naturaleza cíclica de las coordenadas X^{m+1} a X^a . Una coordenada ausente en L , también lo es en R . Las $a-m$ cantidades de movimiento P_{m+1} a P_a pueden sustituirse en el Routhiano por un conjunto de constantes $\lambda^1, \dots, \lambda^r$ ($r = a - m$) que se determinan a partir de las condiciones iniciales. Con estas modificaciones las únicas variables del Routhiano son las m coordenadas no cíclicas y sus velocidades generalizadas

$$(3.15) \quad R(X^1, \dots, X^a, \dot{X}^1, \dots, \dot{X}^m, \lambda^1, \dots, \lambda^r, t)$$

El problema se ha reducido a un problema de Lagrange con m grados de libertad, y salvo los r parámetros constantes λ^r podemos ignorar los restantes grados de libertad, en otras palabras hemos logrado reducir la dimensionalidad del problema. En la siguiente sección vamos a aplicar estas ideas a nuestro problema.

3.4 Reducción dimensional

Puesto que en este trabajo consideraremos Lagrangianos con dependencia funcional $L=L(X^a, X^{a,\alpha}, \dot{x}^\alpha)$, aplicaremos lo visto en las secciones 3.2 y 3.3 a este tipo de Lagrangiano. Primero construyamos el correspondiente Hamiltoniano

$$(3.16) \quad H=H(X^a, P^a_{\alpha}, \dot{x}^\alpha)=P^a_{\alpha} X^{a,\alpha}-L$$

donde se ha definido el momento canónico conjugado como

$$(3.17) \quad P^\alpha_\alpha = \frac{\partial L}{\partial X^\alpha_\alpha}$$

Si ahora consideramos una transformación canónica como en las ecuaciones (3.2) y (3.3) de H de tal forma que una de las nuevas coordenadas se vuelva cíclica, denotando a H' como el Hamiltoniano transformado. La acción de (n-2) transformaciones canónicas de este tipo conducirán a un Hamiltoniano de la forma

$$(3.18) \quad H' = H'(X^1_{(n-2)}, X^2_{(n-2)}, P^\alpha_{(n-2)\alpha}, x^\alpha)$$

ya que por cada una de las transformaciones canónicas se elimina una de las coordenadas X^α . El índice (n-2) indica que la coordenada respectiva es la resultante de haber aplicado las (n-2) transformaciones canónicas. Para eliminar el momento canónico asociado con las coordenadas cíclicas, primero construimos el Lagrangiano $L^{(n-2)} = L^{(n-2)}(X^1_{(n-2)}, X^2_{(n-2)}, X^\alpha_{,\alpha (n-2)}, x^\alpha)$ y aplicamos el método de Routh visto en la sección 3.3 ,

$$(3.19) \quad R = \sum_{i=3}^n \frac{\partial L^{(n-2)}}{\partial X^i_{i(n-2)}} X^i_{i(n-2)} - L$$

El Routhiano resultante es una función de las coordenadas no cíclicas, de sus velocidades asociadas y de un conjunto de constantes λ^i , con lo que finalmente puede escribirse el Routhiano de la forma

$$(3.20) \quad R = G_{ab}(X^a, \lambda^i, x^\alpha) X^a_{,\alpha} X^b_{,\beta} h^{\alpha\beta} + V(X^a, \lambda^i, x^\alpha)$$

con $a, b = 1, 2$; y $i = 3, 4, \dots, n$.

La variación de R respecto a X^a conduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales son las principales ecuaciones de campo (ecuaciones de Euler-Lagrange). Cuando se resuelven estas ecuaciones las variables cíclicas pueden ser ignoradas y considerar al Routhiano como un Lagrangiano. Las ecuaciones de campo para las coordenadas cíclicas se obtienen al realizar la variación respecto a las λ^i . Estas son ecuaciones diferenciales de primer orden que pueden ser integradas una vez que las ecuaciones de Euler-Lagrange hayan sido resueltas. Con esto hemos reducido el problema de n variables a 2, lo que puede interpretarse como una reducción dimensional del mismo.

Es necesario hacer notar que al analizar casos concretos no siempre es sencillo encontrar las transformaciones canónicas que permitan reducir la dimensionalidad y puede llegar a resultar más sencillo analizar el problema con mayor número de grados de libertad que encontrarla transformación canónica para eliminar uno de estos grados.

3.5 Lagrangiano sin potencial

Consideremos un Lagrangiano puramente cinético, es decir tomemos el potencial igual a cero

$$(3.21) \quad L = G_{ab}(X^a, X^{\alpha}) X^a{}_{,\alpha} X^b{}_{,\beta} h^{\alpha\beta}$$

dónde $a, b = 1, 2, \dots, m$; y $\alpha, \beta = 2, 3, \dots, d$. La dimensión m está contenida en el rango $2 \leq m \leq n$ y su valor explícito depende la cantidad de transformaciones canónicas que se hayan usado. El valor explícito para d , deberá estar en el

rango $2 \leq d \leq 4$, éste puede ser diferente en cada caso particular y depende las simetrías contenidas en la métrica $g_{\alpha\beta}$ del espacio tiempo original.

Hasta aquí hemos considerado G_{ab} y $h^{\alpha\beta}$ como "métricas" que pueden depender explícitamente de las coordenadas del espacio tiempo x^α . Sin embargo, en el caso que nos ocupa, simetría axial y estacionaria es posible agrupar toda la dependencia explícita de x^α solamente en G_{ab} .

Si aplicamos el principio variacional a (3.21) obtenemos las ecuaciones

$$(3.22) \quad h^{\alpha\beta} \{ (X^a_{,\alpha})_{,\beta} + \Gamma^a_{eb} X^e_{,\alpha} X^b_{,\beta} + G^{ac} G_{cb,\alpha} X^b_{,\beta} \} = 0$$

donde Γ^a_{eb} son los símbolos de Christoffel asociados con la "métrica" G_{ab} .

Como podemos observar la ecuación (3.22) corresponde a la ecuación geodésica de un espacio m dimensional. Un conjunto X^a que satisfaga la ecuación (3.22) será una geodésica funcional. Además, estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de Einstein, esto por construcción, pues si se parte del Lagrangiano de Einstein-Hilbert y aplicamos el principio variacional con respecto a los coeficientes métricos se obtienen las ecuaciones de Einstein, y cuando se tiene el Lagrangiano de la forma (3.22) y se varía respecto a las coordenadas X^a , se obtiene la ecuación geodésica, pero construimos una relación 1 a 1 entre X^a y $g_{\alpha\beta}$, esto es, los coeficientes métricos son las nuevas coordenadas.

En el caso de un Lagrangiano con potencial, puede reducirse a un Lagrangiano sin potencial haciendo uso del principio de Maupertius [10].

Esta reducción del problema es importante pues puede ahora hacerse uso de todas las simetrías de las geodésicas para investigar soluciones de las ecuaciones de Einstein.

En la siguiente sección vamos a aplicar este formalismo a la métrica axisimétrica estacionaria.

3.6 Simetría axial y estacionaria en vacío

Al calcular la densidad Lagrangiana para el elemento de línea (1.37) que estamos considerando, llegamos a

$$(3.23) \quad L = -\frac{e^{4\psi}}{2\rho}(\omega^2_\rho + \omega^2_z) + 2\rho(\psi_\rho^2 + \psi_z^2 + \gamma_{\rho\rho} + \gamma_{zz} - \psi_{\rho\rho} - \psi_{zz}) - 2\psi_\rho$$

Si ahora aplicamos la relación $\rho B_{,ij} = (\rho B_{,i})_{,j} - \rho_{,i} B_{,j}$ donde B es una función arbitraria de x_i , y despreciamos las derivadas totales, obtenemos el Lagrangiano

$$(3.24) \quad L = 2\rho(\psi_\rho^2 + \psi_z^2) - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}(\omega^2_\rho + \omega^2_z) - 2\gamma_\rho$$

que puede ser representado como un Lagrangiano cinético de la forma

$$(3.25) \quad L = G_{ab} X^a_{, \alpha} X^b_{, \beta} h^{\alpha\beta}$$

donde $X^a = (\rho, \psi, \gamma, \omega)$ y $x^{\alpha} = (\rho, z)$, además

$$(3.26) \quad G_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2\rho & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{4\psi}}{2\rho} \end{pmatrix}$$

$$(3.27) \quad h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ahora parametrizamos las coordenadas del espacio tiempo mediante un nuevo parámetro ξ , bajo la condición $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = h^{\alpha\beta}$ el Lagrangiano toma la forma

$$(3.28) \quad L = 2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma}$$

donde el punto se refiere a la derivada respecto al parámetro ξ . Algunas propiedades de este parámetro son

$$\dot{B}^2 = B_\rho^2 + B_z^2$$

$$\dot{B} = B_{\rho\rho} + B_{zz}$$

$$\dot{\rho} \dot{B} = B_\rho$$

El Lagrangiano (3.28) puede ser interpretado como un Lagrangiano que describe un sistema cinemático definido en el espacio de los coeficientes métricos con coordenadas generalizadas ρ, ψ, ω y γ que dependen de ξ .

Al considerar a (3.28) como un elemento de línea en un espacio abstracto con coordenadas $X^a = (\rho, \psi, \gamma, \omega)$ y métrica definida por (3.26), las ecuaciones para las geodésicas en este espacio abstracto que se tienen son

$$\ddot{\rho} = 0$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{\rho} \dot{\rho} \dot{\psi} + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} e^{4\psi} \dot{\omega}^2 = 0$$

$$\ddot{\gamma} + \dot{\psi}^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^2} e^{4\psi} \dot{\omega}^2 = 0$$

$$\ddot{\omega} - \frac{1}{\rho} \dot{\rho} \dot{\omega} + 4\dot{\psi} \dot{\omega} = 0$$

Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Einstein, pero ahora haremos una reducción dimensional del problema.

Dado que γ y ω son coordenadas cíclicas del Lagrangiano es conveniente hacer uso del Routhiano R el cual, como ya se ha visto, se obtiene de aplicar al Lagrangiano una transformación de Legendre sobre las coordenadas cíclicas

$$(3.29) \quad R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \dot{\gamma} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} \dot{\omega} - L = -2\rho\psi^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho} \dot{\omega}^2$$

y las ecuaciones de movimiento para este Routhiano, que son obtenidas usando las relaciones (3.13) y (3.14) de la sección 3.3 son

$$(3.30) \quad \dot{P}_\omega = -\frac{\partial R}{\partial \omega} \rightarrow \dot{P}_\omega = 0$$

$$(3.31) \quad \dot{P}_\psi = -\frac{\partial R}{\partial \psi} \rightarrow \dot{P}_\psi = -2\rho^{-1}e^{4\psi}\dot{\omega}^2$$

$$(3.32) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\omega}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \left(\frac{e^{4\psi}\dot{\omega}}{\rho} \right) = 0$$

$$(3.33) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \rho\dot{\psi} + \rho\ddot{\psi} - \frac{1}{2\rho}e^{4\psi}\dot{\omega}^2 = 0$$

el momento asociado con la coordenada generalizada ω esta dado por

$$(3.34) \quad P_\omega = \frac{1}{\rho}e^{4\psi}\dot{\omega}$$

El momento P_ω es una "constante de movimiento" en el espacio de los coeficientes métricos, ya que $P_{\omega,\xi} = 0$. Ahora bien, si introducimos una nueva función Ω de la siguiente forma

$$(3.35) \quad P_\omega = \frac{1}{\rho} e^{4\psi} \dot{\omega} = \dot{\Omega}$$

con esto el Routhiano (3.29) toma la forma

$$(3.36) \quad R = -\frac{1}{2} \rho f^{-2} (\dot{f}^2 + \dot{\Omega}^2)$$

que es la forma del elemento de línea, donde $f = e^{2\psi}$.

Finalmente podemos observar que el Routhiano puede ser interpretado formalmente como un elemento de línea de la forma

$$(3.37) \quad R = \left(\frac{dS}{d\xi} \right)^2 = G_{ab} \frac{dX^a}{d\xi} \frac{dX^b}{d\xi}$$

donde G_{ab} ($a, b=1, 2$) es una matriz simétrica de 2×2

$$(3.38) \quad G_{ab} = -\frac{1}{2} \rho f^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $X^a = (f, \Omega)$. Esta analogía es la que nos permitirá interpretar las ecuaciones de Einstein con las ecuaciones de geodésicas del nuevo espacio de coordenadas (f, Ω)

3.7 Geodésicas Funcionales para campos axisimétricos estacionarios

Para poder aplicar el concepto geodésico al caso que estamos estudiando, consideramos en espacio dimensional infinito M de las funciones $\{f(\rho, z), \Omega(\rho, z)\}$, donde es conveniente considerar a f y Ω cuadráticamente integrables, esto nos permite definir un producto escalar en M , de la forma $\langle f, \Omega \rangle = \int w f \Omega d\rho dz$ con $w = w(\rho, z)$ una función arbitraria, definamos también un vector en M como $X^a_\xi = X^a_\xi(\rho, z) = \{f_\xi, \Omega_\xi\}$. Con esto podemos construir la función

$$s(X^a_\xi, X^b_\xi) = \int G_{ab} X^a_\xi X^b_\xi d\rho dz$$

$$(3.9) \quad s(X^a_\xi, X^b_\xi) = -\frac{1}{2} \int \rho \Gamma^2 (j^2 + \Omega^2)$$

en la que hemos reemplazado la métrica (3.6). Esta expresión puede interpretarse como la energía de las curvas X^a . La variación de la ecuación con respecto a X^a nos conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, que en este caso pueden ser escritas como

$$(3.10) \quad \frac{d^2 X^a}{d\xi^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dX^b}{d\xi} \frac{dX^c}{d\xi} = \lambda(\rho) \frac{dX^a}{d\xi}$$

donde son los símbolos de Christoffel asociados con G_{ab} , la función $\lambda(\rho) = 1/\rho$ aparezca por la dependencia explícita de ρ en G_{ab} , con esto podemos estudiar puntos estacionarios de s y uno de estos puntos se llamara geodésica funcional si satisface la ecuación (3.10). Para encontrar uno de estos puntos,

definido en el espacio M , tenemos que resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales. Lo importante de todo esto es que, si la ecuación geodésica es idéntica a las ecuaciones (3.10) y por tanto equivalente a las ecuaciones de Einstein en vacío. Esto es, una solución a las ecuaciones de Einstein puede ser interpretada como una geodésica funcional.

En el caso que nos ocupa las ecuaciones geodésicas toman la forma

$$(3.11) \quad f_{\xi\xi}^{-1}(f_{\xi}^2 - \Omega_{\xi}^2) + \rho^{-1} \rho_{\xi} f_{\xi} = 0$$

$$(3.12) \quad \Omega_{\xi\xi} - 2f^{-1} f_{\xi} \Omega_{\xi} + \rho^{-1} \rho_{\xi} \Omega_{\xi} = 0$$

las cuales son equivalentes a las ecuaciones de campo para ψ y ω . [11].

Puesto que ni el momento asociado a γ , ni γ misma aparecen en el Routhiano, esto nos dice que la función métrica γ esta determinada por dos ecuaciones diferenciales de primer orden, en coordenadas de Weyl, estas ecuaciones se obtienen aplicando el teorema de Noether al Lagrangiano y tienen la siguiente forma [10]

$$(3.13) \quad 4\gamma_{\rho} = \rho f^{-2} (f_{\rho}^2 - f_z^2) - \rho^{-1} f^2 (\omega_{\rho}^2 - \omega_z^2)$$

$$(3.14) \quad 2\gamma_z = \rho f^{-2} f_{\rho} f_z - \rho^{-1} f^2 \omega_{\rho} \omega_z$$

y serían las dos ecuaciones restantes del sistema de ecuaciones de campo. Estas últimas ecuaciones pueden ser integradas por cuadraturas una vez conocidas ω y ψ .

3.8 Hamiltoniano Geodésico

Como hemos mencionado anteriormente en este trabajo, dada un formalismo Lagrangiano es posible construir el correspondiente formalismo

Hamiltoniano. En esta sección analizaremos el formalismo Hamiltoniano que se deriva de la formulación de Geodésicas Funcionales. Partiendo del Lagrangiano

$$L = 2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma}$$

calculamos los correspondientes momentos canónicos conjugados a las $X^a = (\rho, \psi, \gamma, \omega)$

$$(3.15) \quad P_\rho = -2\dot{\gamma}$$

$$(3.16) \quad P_\psi = 4\rho\dot{\psi}$$

$$(3.17) \quad P_\gamma = -2\rho$$

$$(3.18) \quad P_\omega = -\frac{e^{4\psi}}{\rho}\dot{\omega}$$

con ellos calculamos el Hamiltoniano

$$H = P_a X^a_{,t} - L$$

$$(3.19) \quad H = \frac{1}{8\rho} P_\psi^2 - \frac{1}{2} P_\gamma P_\rho - \frac{1}{2} \rho e^{-4\psi} P_\omega^2$$

las ecuaciones canónicas que se derivan de este Hamiltoniano son

$$(3.20) \quad \dot{P}_\rho = \frac{1}{8\rho^2} P_\psi^2 + \frac{1}{2} e^{-4\psi} P_\omega^2$$

$$(3.21) \quad \dot{P}_\psi = -2\rho e^{-4\psi} P_\omega^2$$

$$(3.22) \quad \dot{P}_\gamma = 0$$

$$(3.23) \quad \dot{P}_\omega = 0$$

Estas ecuaciones también son equivalentes a las ecuaciones de Einstein. También tenemos que

$$H=L$$

Sobre este Hamiltoniano tenemos que mencionar que no existen los problemas que aparecen con el Hamiltoniano de ADM, en cuanto a la definición de los momentos y a la inversión de las ecuaciones (3.15)-(3.19).

Hay que recordar que hemos considerado al Lagrangiano como un Lagrangiano puramente cinético, y al igual que en el caso de un Lagrangiano para una partícula libre, es igual a su Hamiltoniano.

Para poder elaborar una teoría cuántica de un Hamiltoniano es necesario además determinar al parámetro que figuraría como tiempo. Al tratar de hacer esto, es necesario saber si nuestro Hamiltoniano es covariante o, en caso de no serlo, definir un nuevo Hamiltoniano que sea covariante. En principio, nuestro Hamiltoniano tiene que ser covariante, luego que ha sido derivado de un Lagrangiano covariante y no se rompió la covariancia al introducir el parámetro ξ .

Además para el Hamiltoniano (3.19) se satisfacen las identidades de los paréntesis fundamentales de Poisson

$$[X^a, P_b] = \delta^a_b$$

esto permite aplicar el principio de correspondencia de Dirac donde las ecuaciones de la mecánica cuántica se obtienen sustituyendo en las ecuaciones de mecánica clásica el paréntesis de Poisson por el conmutador entre los operadores multiplicado por $-y/\hbar$.

4. COMPARACIÓN ENTRE LOS FORMALISMOS

Mediante el empleo del formalismo ADM las ecuaciones de Einstein, son proyectadas sobre una foliación del espacio tiempo llevando a

- Seis ecuaciones, (2.39), de evolución de la métrica de las superficies.
- Una ecuación, (2.36), de construcción Hamiltoniana
- Tres ecuaciones, (2.37), de constricciones en los momentos

Este formalismo representa una formulación Hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein con ciertas constricciones que revelan la arbitrariedad de norma al seleccionar la métrica h , y sobre como ha sido rebanado el espacio tiempo.

A pesar de ser una formulación Hamiltoniana, el parámetro tiempo que se seleccionó no es un parámetro que permita la cuantización de la teoría. Esto queda revelado por la construcción Hamiltoniana, la cual aparece por la forma en que rebanamos el espacio tiempo. Esta dificultad puede ser superada al definir un superespacio.

Como vimos, en el formalismo ADM la variable dinámica relevante es la "velocidad" de la métrica h^j inducida sobre las superficies respecto al parámetro tiempo elegido. Pero en el caso axisimétrico estacionario, a pesar de ser

idénticamente nula $\dot{h}^{\mu\nu}$, hay dinámica en las hipersuperficies; pues el momento canónico conjugado a ella no es nulo.

Al hacer una división del espacio tiempo en espacio y tiempo, inmediatamente el formalismo ADM rompe la covariancia de la formulación. Así también se tiene claro que el Hamiltoniano ADM describe la evolución de las superficies espaciales a lo largo del vector tiempo que se definió.

Por otra parte, los resultados mas importantes del formalismo de geodésicas funcionales son:

La reducción de los grados de libertad del problema de encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein.

La obtención de una ecuación geodésica en un espacio M abstracto de dimensionalidad infinita de los potenciales.

La interpretación de las ecuaciones de Einstein como geodésicas funcionales en un espacio abstracto de potenciales. Con lo que se puede emplear todo lo que se sabe sobre simetrías de geodésicas para generar nuevas soluciones a las ecuaciones.

Puede definirse un Hamiltoniano en base al parámetro ξ como "tiempo" , con el cual podrían cuantizarse las coordenadas (potenciales) del espacio abstracto M que se definió

El formalismo de geodésicas funcionales es un formalismo que permite encontrar la forma más simple de las ecuaciones de Einstein. Este formalismo, al realizar las transformaciones canónicas, reacomoda las ecuaciones de Einstein para llevarlas a su forma más simple. Las ecuaciones a las que se llegan pueden interpretarse como soluciones de una ecuación geodésica y pueden generar otras soluciones, las cuales podrían tener o no significado físico.

La definición del parámetro ξ como aquel que satisface la ecuación $x^i x^j_{,\xi} = h^{ij}$, no nos dice mucho sobre su interpretación física, sabemos que es un parámetro afín de las geodésicas del espacio abstracto M , lo que nos permite interpretarlo como el "tiempo propio" del "movimiento geodésico" en M . Para poder introducir este parámetro hay que exigirle que sea un parámetro afín de las ecuaciones geodésicas en el espacio tiempo de las coordenadas ρ y z .

Al construir el Hamiltoniano derivado del formalismo de Geodésicas Funcionales, no se ha roto la covariancia del mismo. Aunque no queda claro si este Hamiltoniano describe algún tipo de evolución.

5. CONCLUSIONES

Aunque los formalismos ADM y Geodésicas funcionales parten inicialmente del mismo Lagrangiano y que con ambos se llega a las mismas ecuaciones de campo, se tienen grandes diferencias en cuanto al problema que tratan de resolver. Con ambos se puede definir un Hamiltoniano y en principio es posible cuantizar.

El formalismo ADM se construye para dar una descripción de evolución de superficies espaciales a lo largo del tiempo. Este formalismo es muy útil cuando se desea, dadas las configuraciones iniciales y finales de las superficies, saber el modo como evolucionan las mismas. El papel físico de cada variable que se definió es claro, tan solo por construcción.

Con este formalismo, aunque es posible definir un Hamiltoniano, no es posible cuantizar directamente en base a él debido a las constricciones que aparecen al desarrollar el formalismo. Los momentos que se definen no son necesariamente nulos cuando en la variable dinámica que se considera si lo es.

En la construcción del formalismo ADM se rompió la covariancia de las ecuaciones al dividir el espacio tiempo en espacio y tiempo. Esto hace que la cuantización a partir de este Hamiltoniano se complique. Aunque se tiene claro que describe una evolución de superficies espaciales a lo largo de un vector tiempo.

El formalismo de Geodésicas Funcionales es desarrollado para encontrar la forma más simple de las ecuaciones de campo. No se conoce el papel físico de las variables que se introducen en el, ni del espacio abstracto de potenciales.

El formalismo Hamiltoniano para esta formulación podría en principio llevar a una cuantización de las coordenadas X^{μ} que en el se definieron, pues

APENDICE A

Ecuaciones de Einstein para un campo gravitacional axisimétrico estacionario.

En este apéndice se muestra el código en MAPLE que realiza los cálculos necesarios para obtener las ecuaciones de campo de Einstein. Se han agregado comentarios a las instrucciones con el fin de aclarar lo que estas realizan.

Las siguientes líneas son para inicializar las rutinas de tensores preconstruidas para Maple así como la declaración de variables.

```
> restart:with(tensor):
  coords:=[t, rho, z, phi]:

> alias(f=exp(2*psi(rho, z)), omega=omega(rho, z), gamma=gamma
(rho, z)):
  alias(Fz=diff(psi(rho, z), z), Fr=diff(psi(rho, z), rho)):
  alias(Gz=diff(gamma(rho, z), z), Gr=diff(gamma(rho, z), rho))
:
  alias(Wz=diff(omega(rho, z), z), Wr=diff(omega(rho, z), rho))
:
  alias(Fzz=diff(diff(psi(rho, z), z), z), Frr=diff(diff(psi(rho, z), rho), rho)):
  alias(Gzz=diff(diff(gamma(rho, z), z), z), Grr=diff(diff(gamma(rho, z), rho), rho)):
  alias(Wzz=diff(diff(omega(rho, z), z), z), Wrr=diff(diff(omega(rho, z), rho), rho)):
```

En seguida definimos las componentes de la métrica para el campo aximétrico

estacionario.

La signatura de la métrica es [-,+,+,+]

```
> g:=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4):  
g[1,1]:=-f : g[2,2]:=exp(2*gamma)/f: g[3,3]:=g[2,2]:  
g[4,4]:=-rho^2/g[1,1]+g[1,1]*omega^2:  
g[1,4]:=f*omega : g[j]:=create([-1,-1], eval(g));  
gij := table([
```

$$compts = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & f\omega \\ 0 & \frac{e^{(2\gamma)}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{(2\gamma)}}{f} & 0 \\ f\omega & 0 & 0 & \frac{\rho^2}{f} - f\omega^2 \end{bmatrix}$$

```
index_char = [-1, -1]  
])
```

Una vez definida la métrica hacemos el cálculo de los tensores relacionados a la Relatividad General, (métrica contravariante, Christoffel 1a. especie, Christoffel 2a. especie, Riemman, Ricci, Escalar de Ricci, Einstein)

```
> tensorsGR(coords,gij,gIJ,g, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C):
```

Las componentes no nulas del Tensor de Einstein que se obtienen son

```
> displayGR(Einstein, G);
```

*The Einstein Tensor
non-zero components :*

$$G_{11} = \frac{1}{4} f^2 (-8 \rho^2 F_{rr} - 3 f^2 W_{r^2} - 8 \rho^2 F_{zz} - 3 f^2 W_{z^2} - 8 \rho F_r + 4 \rho^2 F_{r^2} + 4 G_{zz} \rho^2 + 4 G_{rr} \rho^2 + 4 \rho^2 F_{z^2}) \cdot (e^{(2\gamma)} \rho^2)$$

$$\begin{aligned}
 G14 &= -\frac{1}{4} f^2 (-2 Wrr \rho^2 + 2 Wr \rho - 8 \rho^2 Wz Fz - 3 f^2 \omega W r^2 - 8 Frr \omega \rho^2 \\
 &\quad - 8 Fr Wr \rho^2 - 2 Wzz \rho^2 - 3 f^2 \omega Wz^2 - 8 Fzz \omega \rho^2 - 8 Fr \omega \rho + 4 Fr^2 \omega \rho^2 \\
 &\quad + 4 \omega Gzz \rho^2 + 4 \omega Grr \rho^2 + 4 \rho^2 Fz^2 \omega) / (e^{(2\gamma)} \rho^2) \\
 G22 &= -\frac{1}{4} \frac{f^2 W r^2 - 4 \rho^2 F r^2 + 4 \rho G r + 4 \rho^2 F z^2 - f^2 W z^2}{\rho^2} \\
 G23 &= \frac{1}{2} \frac{4 F z \rho^2 F r - f^2 W z W r - 2 \rho G z}{\rho^2} \\
 G33 &= \frac{1}{4} \frac{f^2 W r^2 - 4 \rho^2 F r^2 + 4 \rho G r + 4 \rho^2 F z^2 - f^2 W z^2}{\rho^2} \\
 G44 &= \frac{1}{4} (-8 \rho^2 F z z f^2 \omega^2 - 4 \rho^2 f^2 \omega W z z - 3 f^4 \omega^2 W r^2 - \rho^2 f^2 W r^2 - 8 \rho^2 F r r f^2 \omega^2 \\
 &\quad - 16 \rho^2 F r f^2 \omega W r - 4 \rho^4 F r^2 - 4 G z z \rho^4 - 4 G r r \rho^4 - 16 \rho^2 F z f^2 \omega W z \\
 &\quad + 4 \rho^2 F z^2 f^2 \omega^2 + 4 \rho^2 F r^2 f^2 \omega^2 - 4 \rho^2 f^2 \omega W r r - 4 \rho^4 F z^2 - 8 \omega^2 f^2 F r \rho \\
 &\quad + 4 \omega f^2 W r \rho + 4 f^2 \omega^2 G z z \rho^2 + 4 f^2 \omega^2 G r r \rho^2 - \rho^2 f^2 W z^2 - 3 f^4 \omega^2 W z^2) / (\rho^2 e^{(2\gamma)})
 \end{aligned}$$

) character : [-1, -1]

Una vez obtenidas las componentes del tensor de Einstein, es posible manipular estas para obtener las ecuaciones de campo.

Ecuacion de campo para dgamma/dz

```
> gz:=solve(G[compts][2,3]=0,Gz);
```

$$gz := -\frac{1}{2} \frac{-4 F z \rho^2 F r + f^2 W z W r}{\rho}$$

Ecuación de campo para dgamma/drho

```
> gr:=solve(G[compts][3,3]=0,Gr);
```

$$gr := \frac{1}{4} \frac{-f^2 W r^2 + 4 \rho^2 F r^2 - 4 \rho^2 F z^2 + f^2 W z^2}{\rho}$$

```
> G110:=collect(G[compts][1,1]=0,rho):G140:=collect(G[comp
```

ts] [1, 4]=0, rho) :

La ecuación de campo para omega se obtiene de multiplicar la componente (t,t) del tensor de Einstein por omega y sumar el resultado a la componente (t,fi) del tensor de Einstein.

```
> Ec1:=simplify(G110*omega+G140);
      Ec1 := 
$$\frac{1}{2} \frac{e^{4\psi(\rho,z)-2\gamma} (W_{rr} \rho + 4 \rho W_z F_z + W_{zz} \rho + 4 F_r W_r \rho - W_r)}{\rho} = 0$$

```

Sustituimos los valores que encontramos para las gammas y la ecuación para la omega en la componente (fi, fi) de G.

```
> simplify(subs(Gz=gz, Gr=gr, G[compts][4,4]));
> Ecn[psi] := simplify(subs(Wrx=-Wzz+rho^(-1)*Wr-4*(Fr*Wr+Fz*Wz),
      Frr=E1-f^2*rho^(-2)*(Wr^2+Wz^2)/2-Fzz-rho^(-1)*Fr, " ))=0;
      Ecn_psi := -2 E1 (rho^3 Fr - omega^2 e^{4\psi(\rho,z)} Fr rho + e^{4\psi(\rho,z)} omega^2) e^{(-2\gamma)} = 0
```

Aqui E1 es dado por

```
> E1=Frr+Fzz+rho^(-1)*Fr+f^2*rho^(-2)*(Wr^2+Wz^2)/2;
      EI = Frr + 
$$\frac{1}{2} \frac{f^2 (Wr^2 + Wz^2)}{\rho^2} + Fzz + \frac{Fr}{\rho}$$

```

que corresponde a la ecuacion para psi

La forma explicita del Lagrangiano de Einstein-Hilbert

```
> L[EH] := simplify((-g)^(1/2)*R[compts], power);
      LEH := 
$$\frac{1}{2} \frac{e^{(4\gamma-4\psi(\rho,z))} \rho^2 e^{(2\psi(\rho,z)-2\gamma)} (-4 \rho^2 F_{zz} - e^{(4\psi(\rho,z))} W_r^2 - 4 \rho F_r - 4 \rho^2 F_{rr} + 4 \rho^2 F_r^2 + 4 G_{zz} \rho^2 + 4 G_{rr} \rho^2 + 4 \rho^2 F_z^2 - e^{(4\psi(\rho,z))} W_z^2)}{\rho^2}$$

```

Como se sabe, el lagrangiano de Einstein-Hilbert puede expresarse en funcion de las ecuaciones de campo que se obtienen (on shell)

```
> simplify(subs(Gz=gz+E4(rho,z), Gr=gr+E3(rho,z), L[EH])):
```

Este es lagrangiano de Einstein Hilbert expresado en términos de las soluciones a las ec. de campo.

```
> simplify(subs(Wrr=E2-Wzz+rho^(-1)*Wr-4*(Fr*Wr+Fz*Wz), Frr
=E1-f^2*rho^(-2)*(Wr^2+Wz^2)/2-Fzz-rho^(-1)*Fr, "));
```

$$e^{(4\gamma - 4\psi(\rho, z))} \rho^2 e^{(2\psi(\rho, z) - 2\gamma)} \left(-2 E1 \rho + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right) \rho - e^{(4\psi(\rho, z))} W r E2 + 4 \rho^2 F r E1 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E3(\rho, z) \right) \rho \right) / \rho$$

> Aquí E1, E2, E3, E4 corresponden a las ecuaciones E1, Ec1, gr y gz definidas arriba. Es decir son las ecuaciones de campo.

Hay también que hacer notar que MAPLE usa un signo distinto para el valor del tensor de Riemman que debe de considerarse al comparar con los resultados presentados en el trabajo.

APENDICE B

Ecuaciones ADM para un campo axisimétrico estacionario

En este apéndice mostramos el programa código en MAPLE que realiza los cálculos para el formalismos ADM aplicado al caso axisimétrico estacionario, se han agregado comentarios que describen los resultados.

```
> restart:with(tensor):
coords:=[rho, z,phi]:

> alias(f=exp(2*psi(rho,z)),omega=omega(rho,z),gamma=gamma(rho,z)):
alias(Fz=diff(psi(rho,z),z),Fr=diff(psi(rho,z),rho)):
alias(Gz=diff(gamma(rho,z),z),Gr=diff(gamma(rho,z),rho)):
alias(Wz=diff(omega(rho,z),z),Wr=diff(omega(rho,z),rho)):
alias(Fzz=diff(diff(psi(rho,z),z),z),Frr=diff(diff(psi(rho,z),rho),rho)):
alias(Gzz=diff(diff(gamma(rho,z),z),z),Grr=diff(diff(gamma(rho,z),rho),rho)):
alias(Wzz=diff(diff(omega(rho,z),z),z),Wrr=diff(diff(omega(rho,z),rho),rho)):
```

Definición de la métrica espacial $h_{ij}=g_{ij}$ para el campo aximétrico estacionario

```
> h:=array(symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
h[1,1]:=-exp(2*gamma)/f: h[2,2]:=h[1,1]:
h[3,3]:=rho^2/f-f*omega^2:
hij:=create([-1,-1], eval(h)):
```

$h_{ij} := \text{table}([$

$$\text{compts} = \begin{bmatrix} \frac{e^{(2\gamma)}}{f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{(2\gamma)}}{f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2}{f} - f\omega^2 \end{bmatrix}$$

$\text{index_char} = [-1, -1]$

)

Cálculo de las cantidades los tensores relacionados a la Relatividad General para las superficies espaciales

```
> tensorsGR(coords, hij, hIJ, h, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C):
```

Definición del vector shift covariante (Ni=gi0)

```
> Ni := create([-1], array([0, 0, f*omega]));
```

```
Ni := table([  
  compts = [0, 0, f*omega]  
  index_char = [-1]  
])
```

Cálculo del vector shift contravariante

```
> Ni_contra := raise(hIJ, Ni, 1);
```

```
Ni_contra := table([  
  compts = [0, 0,  $\frac{f \omega}{\rho^2 - f \omega^2}$ ]  
  index_char = [1]  
])
```

Definición de la función lapsé N

```
> NiNi := prod(Ni, Ni_contra, [1, 1]);  
N2 := solve(-f=NiNi[compts]-N, N): N:=N2^(1/2);
```

$$N := \sqrt{\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f \omega^2}}$$

Derivada covariante del vector shift

```
> Nij := cov_diff(Ni, coords, C2);  
Nji := permute_indices(Nij, [2, 1]);  
Nijji := lin_com(Nij, Nji);
```

Cálculo del momento conjugado covariante pi_ij

```
> pi_ij := lin_com(-h^(1/2)/(2*N), Nijji);
```

Cálculo del momento canónico conjugado contravariante, pi_IJ

```
> pi_IJ:=raise(hIJ,pi_ij,1,2);
```

como podemos observar hay cuatro componentes distintas de cero del momento pi_IJ, y su traza, que se calcula en seguida, es cero.

```
pi_IJ:=table([
```

```
compts =
```

$$\begin{bmatrix} 0, 0, -\frac{1}{2} \frac{f^3 \cdot \%1 (-2 \omega \rho + 4 Fr \omega \rho^2 + Wr f^2 \omega^2 + Wr \rho^2)}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)^2 e^{(2\gamma)}} & \frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \\ 0, 0, -\frac{1}{2} \frac{f^3 \cdot \%1 (4 Fz \omega \rho^2 + Wz f^2 \omega^2 + Wz \rho^2)}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)^2 e^{(2\gamma)}} & \frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{f^3 \cdot \%1 (-2 \omega \rho + 4 Fr \omega \rho^2 + Wr f^2 \omega^2 + Wr \rho^2)}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)^2 e^{(2\gamma)}} & \frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{f^3 \cdot \%1 (4 Fz \omega \rho^2 + Wz f^2 \omega^2 + Wz \rho^2)}{(\rho^2 - f^2 \omega^2)^2 e^{(2\gamma)}} & 0 \end{bmatrix}$$

```
index_char = [ 1, 1 ]
```

```
)
```

$$\%1 := \frac{(e^{(2\gamma)})^2 (\rho^2 - f^2 \omega^2)}{f^3}$$

Traza del momento

```
> Trpi := prod(hIJ,pi_ij, [1,2], [2,1]);
```

```
Trpi := table([
```

```
compts = 0
```

```
index_char = [ ]
```

```
)
```

Traza del cuadrado del momento

```
> Trpi2 := prod(pi_ij,pi_IJ, [1,1], [2,2]);
```

```
Trpi2 := table([
```

$$\text{compts} = \frac{1}{2} e^{(2\gamma)} (4 \omega^2 \rho^2 - 16 \omega^2 \rho^3 Fr - 4 \omega^3 \rho Wr f^2 - 4 \omega \rho^3 Wr + 16 Fr^2 \omega^2 \rho^4)$$

$$+ 8 Fr \omega^3 \rho^2 Wr f^2 + 8 Fr \omega \rho^4 Wr + Wr^2 f^4 \omega^4 + 2 Wr^2 f^2 \omega^2 \rho^2 + Wr^2 \rho^4 + 16 Fz^2 \omega^2 \rho^4 + 8 Fz \omega^3 \rho^2 Wz f^2 + 8 Fz \omega \rho^4 Wz + Wz^2 f^4 \omega^4 + 2 Wz^2 f^2 \omega^2 \rho^2 + Wz^2 \rho^4 \quad ((\rho^2 - f^2 \omega^2) \rho^2)$$

```
index_char = [ ]
]
```

Ecuación de campo que se obtiene al variar H respecto a N, esta es una de las constricciones

```
> Ecl := simplify(-R[compts] + h^(-1) * (Trp12[compts] - (1/2) * Trp1[compts]^2));
```

$$Ecl := -\frac{1}{2} (-5 \%2 Wr^2 \rho^4 - 5 \%2 Wz^2 \rho^4 - 8 \%2 \omega^2 \rho^2 + 4 \%1 \rho^2 Fz^2 \omega^4 + 4 \%1 \rho^2 Gzz \omega^4 + 4 \%1 \rho^2 Fr^2 \omega^4 + 4 \%1 \rho^2 \omega^3 Wzz + 4 \%1 \rho^2 \omega^3 Wrr - 4 \%2 \rho^4 \omega Wrr + 8 \%2 \rho^4 Fzz \omega^2 - 8 \%2 \rho^4 Gzz \omega^2 - 8 \%2 \rho^4 Grr \omega^2 - 4 \%2 \rho^4 \omega Wzz + 8 \%2 \rho^4 Frr \omega^2 + 4 \%1 \omega^3 \rho Wz - 2 \%1 Wr^2 \omega^2 \rho^2 - e^{(-2\gamma + 14 \psi(\rho, z))} Wr^2 \omega^4 - 2 \%1 Wz^2 \omega^2 \rho^2 - e^{(-2\gamma + 14 \psi(\rho, z))} Wz^2 \omega^4 - 8 \%3 \rho^5 Fr - 8 \%3 \rho^6 Frr + 4 \%3 \rho^6 Fz^2 + 4 \%3 \rho^6 Fr^2 - 8 \%3 \rho^6 Fzz + 4 \%3 \rho^6 Grr + 4 \%3 \rho^6 Gzz + 40 \%2 \omega^2 \rho^3 Fr + 12 \%2 \omega \rho^3 Wr - 40 \%2 Fr^2 \omega^2 \rho^4 - 32 \%2 Fr \omega \rho^4 Wz - 40 \%2 Fz^2 \omega^2 \rho^4 - 32 \%2 Fz \omega \rho^4 Wz + 4 \%1 \rho^2 Grr \omega^4) / ((-\rho^2 + e^{(4 \psi(\rho, z))} \omega^2) \rho^2)$$

```
%1 := e^(10 \psi(\rho, z) - 2 \gamma)
%2 := e^(-2 \gamma + 6 \psi(\rho, z))
%3 := e^(2 \psi(\rho, z) - 2 \gamma)
```

Derivada covariante del momento canónico conjugado

```
> piIJ_k := cov_diff(lin_com(h^(-1/2), pi_IJ), coords, C2) :
```

Ecuación que se obtiene al variar H respecto a Na, esta es otra de las ecuaciones de constricciones, y solo la última componente es diferente de cero

```
> piIK_k := contract(piIJ_k, [2, 3]) ;
```

```
piIK_k := table([
```

$$compts = \left[0, 0, \frac{1}{2} (f^2 \omega^2 \rho Wrr - Wr f^2 \omega^2 + 4 f^2 \omega^2 Wr Fr \rho + 4 f^2 \omega^2 \rho Fz Wz + f^2 \omega^2 \rho Wzz + 2 f^2 \omega \rho Wz^2 + 2 f^2 \omega \rho Wr^2 + 4 \omega \rho^3 Frr + 4 \omega \rho^3 Fzz + 4 Fr \omega \rho^2 \right.$$

$$-W_r \rho^2 + 4 \rho^3 W_r F_r + 4 \rho^3 F_z W_z + \rho^3 W_{rr} + \rho^3 W_{zz}) \rho f^{\prime} \left(\left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f \omega^2} \right)^{3/2} \right. \\ \left. e^{(2\gamma)} (-\rho^2 + f \omega^2)^3 \right) \\ \text{index_char} = [1] \\]]$$

Simplificación de la 3a. componente de la ecuación anterior, corresponde a una de las constricciones

```
> Ec2:=simplify(piIK_k[compts][3]=0,exp,powers);
Ec2 := (1/2 %1 \omega^2 \rho W_{rr} - 1/2 W_r %1 \omega^2 + 2 %1 \omega^2 W_r F_r \rho + 2 %1 \omega^2 \rho F_z W_z
+ 1/2 %1 \omega^2 \rho W_{zz} + %1 \omega \rho W_z^2 + %1 \omega \rho W_r^2 + 2 \omega \rho^3 F_{rr} + 2 \omega \rho^3 F_{zz}
+ 2 F_r \omega \rho^2 - 1/2 W_r \rho^2 + 2 \rho^3 W_r F_r + 2 \rho^3 F_z W_z + 1/2 \rho^3 W_{rr} + 1/2 \rho^3 W_{zz}) \rho
e^{(8 \psi(\rho,z) - 2\gamma)} \left( \left( \frac{f \rho^2}{\rho^2 - %1 \omega^2} \right)^{3/2} (-\rho^2 + %1 \omega^2)^3 \right) = 0
%1 := e^{(4 \psi(\rho,z))}
> G_IJ:=raise(hIJ,G,1,2): pi_iJ:=raise(hIJ,pi_iJ,2):
Termino3:=prod(pi_iJ,pi_iJ,[2,1]):
> n:=create([1],N):nlij:=cov_diff(cov_diff(n,coords,C2),coords,C2):
nliJ:=raise(hIJ,nlij,1,2):
nliJ:=raise(hIJ,nlij,1):nliM:=contract(nliJ,[1,2]):
termino4:=lin_com(nliJ,-nliM[compts],hIJ):
> aux1:=prod(pi_iJ,Ni_contra):
aux2:=cov_diff(aux1,coords,C2):
termino5:=contract(aux2,[3,4]):
> N_I_m:=raise(hIJ,Nij,1):
termino6:=prod(N_I_m,pi_iJ,[2,1]):
termino7:=permute_indices(termino6,[2,1]):
Ecuacion dinamica de H, que se obtiene de las ecuaciones canónicas de Hamilton.
> Ec3:=lin_com(N*h^(1/2),G_IJ,
(1/2)*N*h^(-1/2)*Tpi2[Compts],hIJ,
-2*N*h^(-1/2),Termino3,h^(1/2),termino4,termino5,
-1,termino6,-1,termino7);
Ec3 := table([
compts =
```

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} (f^2 Wz^2 - f^2 Wr^2 - 4 \rho Gr - 4 \rho^2 Fz^2 + 4 \rho^2 Fr^2) f \rho^2, \\ \left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \right)^{3/2} \cdot \%1 (-\rho^2 + f^2 \omega^2) \\ 1 (Wz Wr f^2 + 2 \rho Gz - 4 \rho^2 Fr Fz) f \rho^2, 0 \\ 2 \left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \right)^{3/2} \cdot \%1 (-\rho^2 + f^2 \omega^2) \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{(Wz Wr f^2 + 2 \rho Gz - 4 \rho^2 Fr Fz) f \rho^2}{\left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \right)^{3/2} \cdot \%1 (-\rho^2 + f^2 \omega^2)}, \\ \frac{1}{4} \frac{(f^2 Wz^2 - f^2 Wr^2 - 4 \rho Gr - 4 \rho^2 Fz^2 + 4 \rho^2 Fr^2) f \rho^2}{\left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \right)^{3/2} \cdot \%1 (-\rho^2 + f^2 \omega^2)}, 0 \end{array} \right]$$

$$\left[0, 0, \frac{1}{4} (3 f^4 \omega^2 Wr^2 + 3 f^4 \omega^2 Wz^2 + 8 \rho Fr f^2 \omega^2 - 4 \rho^2 Fz^2 f^2 \omega^2 + 8 \rho^2 Fz f^2 \omega^2 - 4 Gzz \rho^2 f^2 \omega^2 - 4 Grr \rho^2 f^2 \omega^2 + 8 \rho^2 Frr f^2 \omega^2 - 4 Fr^2 f^2 \omega^2 \rho^2 + 4 f^2 \omega Wzz \rho^2 + 4 f^2 \omega Wrr \rho^2 + 16 Fr f^2 \omega Wr \rho^2 - 4 \rho f^2 \omega Wr + 16 Fz f^2 \omega Wz \rho^2 + f^2 Wz^2 \rho^2 + f^2 Wr^2 \rho^2 + 4 \rho^4 Fz^2 + 4 Gzz \rho^4 + 4 \rho^4 Fr^2 + 4 Grr \rho^4) e^{(2\gamma)} \rho^2 f / \left((-\rho^2 + f^2 \omega^2)^3 \cdot \%1 \left(\frac{f \rho^2}{\rho^2 - f^2 \omega^2} \right)^{3/2} \right) \right]$$

index_char = [1, 1]
]
 %1 := $\frac{(e^{(2\gamma)})^2 (\rho^2 - f^2 \omega^2)}{f^2}$

De las componentes (1,1) y (1,2) de Ec3 pueden obtenerse directamente las ecuaciones para gamma.

La componente (3,3) es un múltiplo de la componente (fi, fi) del tensor de Einstein para la métrica completa

> G_r := solve (Ec3 [compts] [1, 1]=0, Gr) ; G_z := solve (Ec3 [compts] [1, 2]=0, Gz) ;

$$G_{-r} := -\frac{1}{4} \frac{-f^2 Wz^2 + f^2 Wr^2 + 4 \rho^2 Fz^2 - 4 \rho^2 Fr^2}{\rho}$$

$$G_z := -\frac{1}{2} Wz Wr f - 4 \rho^2 Fr Fz$$

Escribiremos el lagrangiano correspondiente calculado a partir de las variables ADM
 $\gg L[ADM] := \text{simplify}(N \cdot h^{(-1/2)} \cdot (R[\text{compts}] + h^{(-1)} \cdot \text{Trpi2}[\text{compt} \\
s]), \text{radical}, \text{exp}, \text{power});$

$$L_{ADM} := \frac{1}{2} (e^{(8 \psi(\rho, z))} \omega^2 W r^2 + e^{(8 \psi(\rho, z))} \omega^2 W z^2 + 4 G r r \rho^2 \%1 \omega^2 + 4 \rho^2 F z^2 \%1 \omega^2 \\
+ 4 F r^2 \%1 \omega^2 \rho^2 + 4 G z z \rho^2 \%1 \omega^2 - 4 \rho \%1 \omega W r + 16 F z \%1 \omega W z \rho^2 \\
+ 4 \%1 \omega W r r \rho^2 + 4 \%1 \omega W z z \rho^2 + 16 F r \%1 \omega W r \rho^2 + 3 \%1 W r^2 \rho^2 \\
+ 3 \%1 W z^2 \rho^2 - 4 G z z \rho^4 - 4 G r r \rho^4 - 4 \rho^4 F z^2 - 4 \rho^4 F r^2 + 8 \rho^4 F r r + 8 \rho^3 F r \\
+ 8 \rho^4 F z z) \cdot \frac{(-\rho^2 + \%1 \omega^2) e^{(4 \gamma - 6 \psi(\rho, z))}}{-\rho^2 + \%1 \omega^2} - \frac{f \rho^2}{-\rho^2 + \%1 \omega^2} e^{(2 \psi(\rho, z) - 2 \gamma)} (\rho^2 \\
(-\rho^2 + \%1 \omega^2)) \\
\%1 := e^{(4 \psi(\rho, z))}$$

Comprobamos que este lagrangiano es equivalente al lagrangiano de Einstein-Hilbert
sustituyendo las ecuaciones de campo de Einstein y verificando la relación $L_{adm}=0$

$\gg \text{simplify}(\text{subs}(Gz=G_z, Gr=G_r, L[ADM]));$
 $\gg \text{simplify}(\text{subs}(Frr=-f^2 \cdot \text{rho}^{(-2)} \cdot (Wr^2+Wz^2)/2-Fzz-\text{rho}^{(-1)} \cdot Fr, "));$
 $\gg \text{simplify}(\text{subs}(Wrr=-Wzz+\text{rho}^{(-1)} \cdot Wr-4 \cdot (Fr \cdot Wr+Fz \cdot Wz), "));$

Para encontrar la diferencia del lagrangiano ADM con el de Einstein-Hilbert,
escribimos el lagrangiano ADM en funcion de las ecuaciones de campo

$\gg \text{simplify}(\text{subs}(Gz=E4(\rho, z)+G_z, Gr=E5(\rho, z)+G_r, L[ADM]));$
 $\gg \text{simplify}(\text{subs}(Frr=E1-f^2 \cdot \text{rho}^{(-2)} \cdot (Wr^2+Wz^2)/2-Fzz-\text{rho}^{(-1)} \cdot Fr, "));$
 $\gg \text{simplify}(\text{subs}(Wrr=E2-Wzz+\text{rho}^{(-1)} \cdot Wr-4 \cdot (Fr \cdot Wr+Fz \cdot Wz), "));$
 $\text{exp}, \text{radical}, \text{power};$

$$\left(-4 \rho^4 Fr E1 + 4 \%1 \omega^2 \rho^2 Fr E1 + 4 \rho^3 E1 + 2 \%1 \omega \rho E2 + \rho^2 \%1 Wr E2 \right. \\
\left. - e^{(8 \psi(\rho, z))} \omega^2 W r E2 - 2 \rho^3 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E5(\rho, z) \right) - 2 \rho^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right) \right. \\
\left. + 2 \%1 \omega^2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E5(\rho, z) \right) \rho + 2 \rho \%1 \omega^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right) \right)$$

$$\sqrt{-(-\rho^2 + \%1 \omega^2) e^{(4\gamma - 6\psi(\rho, z))}} - \frac{f \rho^2}{-\rho^2 + \%1 \omega^2} e^{(2\psi(\rho, z) - 2\gamma)} / (\rho$$

$$(-\rho^2 + \%1 \omega^2))$$

$$\%1 := e^{(4\psi(\rho, z))}$$

La densidad hamiltoniana es

> H1:=lin_com(2,prod(Ni,piIK_k,[1,1])):

> H0:=N*ECl:

> H:=simplify(h^(1/2)*(H0-H1[compts]),exp,radical,power);

$$H := \frac{1}{2} (-40 \omega^2 \%1 \rho^5 F^2 + 32 \omega^2 \rho^4 \%1 Fr - 6 \omega \rho^5 \%1 W'zz - 40 \omega \rho^5 \%1 Wr Fr$$

$$+ 14 \omega \%1 Wr \rho^4 - 40 \omega \rho^5 \%1 Fz Wz + 4 \%4 \rho^7 Fz^2 + 4 \omega^4 \%2 \rho^3 Fr^2$$

$$+ 2 \omega^5 \%3 \rho Wrr - 5 \%1 \rho^5 Wr^2 - 8 \%4 \rho^7 Fzz + 4 \%4 \rho^7 Fr^2 - 8 \%4 \rho^6 Fr$$

$$+ 3 \omega^4 \%3 \rho W'z^2 + 4 \%4 \rho^7 Gzz + 4 \omega^4 \%2 \rho^3 Gzz + 2 \omega^5 \%3 \rho Wzz + 4 \%4 \rho^7 Grr$$

$$- 6 \omega^2 \%2 \rho^3 W'r^2 - 40 \omega^2 \%1 \rho^5 Fz^2 - 8 \omega^2 \%1 \rho^5 Gzz - 6 \omega^2 \%2 \rho^3 W'z^2$$

$$- 8 \omega^2 \%1 \rho^3 - 8 \omega^2 \%1 \rho^5 Grr + 3 \omega^4 \%3 \rho Wz^2 + 8 \omega^5 \%3 \rho Fz Wz$$

$$+ 8 \omega^5 \%3 \rho Wr Fr + 8 \omega^4 \%2 \rho^3 Frr + 8 \omega^4 \%2 \rho^2 Fr + 8 \omega^4 \%2 \rho^3 Fzz$$

$$- 8 \%4 \rho^7 Frr - 2 \omega^5 \%3 Wr + 4 \omega^4 \%2 \rho^3 Grr + 4 \omega^4 \%2 \rho^3 Fz^2 + 4 \omega^3 \%2 \rho^3 Wzz$$

$$- 5 \%1 \rho^5 Wz^2 + 4 \omega^3 \%2 \rho^3 Wrr + 4 \omega^3 \%2 \rho^2 Wr - 6 \omega \rho^5 \%1 Wrr)$$

$$\sqrt{-(-\rho^2 + e^{(4\psi(\rho, z))} \omega^2) e^{(4\gamma - 6\psi(\rho, z))} e^{(-2\psi(\rho, z))}} \left(\rho (-\rho^2 + e^{(4\psi(\rho, z))} \omega^2)^3 \right)$$

$$\sqrt{-\rho^2 + e^{(4\psi(\rho, z))} \omega^2}$$

$$\%1 := e^{(10\psi(\rho, z) - 2\gamma)}$$

$$\%2 := e^{(-2\gamma + 14\psi(\rho, z))}$$

$$\%3 := e^{(18\psi(\rho, z) - 2\gamma)}$$

$$\%4 := e^{(-2\gamma + 6\psi(\rho, z))}$$

> simplify(subs(Gz=E4(rho,z)+G_z,Gr=E5(rho,z)+G_r,H)):

> simplify(subs(Frr=E1-f^2*rho^(-2)*(Wr^2+Wz^2)/2-Fzz-rho^(-1)*Fr,"")):

> H[ADM]:=simplify(subs(Wrr=E2-Wzz+rho^(-1)*Wr-4*(Fr*Wr+Fz*Wz),""),exp,radical,power);

$$H_{ADM} := - \left(2 \omega^4 \%4 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right) + 2 \%2 \rho^6 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E5(\rho, z) \right) - \rho^4 W'r^2 \%1 \right)$$

$$- 16 \omega^2 \%1 \rho^4 Fz^2 + 4 \%2 \rho^7 Fr El - 2 \omega^2 \%4 \rho^2 W'r^2 - 4 \omega^2 \%1 \rho^4 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \omega^4 \%4 \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E5(\rho, z) \right) + 4 \omega^4 \%4 \rho^3 Fr EI - 8 \omega^2 \rho^5 \%1 Fr EI \\
& + 4 \omega^4 \%4 \rho^2 EI - 8 \omega \rho^4 \%1 Wr Fr + 4 \omega \%1 Wr \rho^3 - 8 \omega \rho^4 \%1 Fz Wz \\
& - 8 \omega^3 \%4 \rho^2 Fr Wr + 16 \omega^2 \rho^3 \%1 Fr - 2 \omega^2 \%4 \rho^2 Wz^2 + 2 \omega^3 \%4 \rho^2 E2 \\
& - 16 \omega^2 \%1 \rho^4 Fr^2 - \rho^5 Wr \%1 E2 - \omega^4 \rho Wr \%3 E2 + 2 \omega^2 \rho^3 Wr \%4 E2 \\
& - 3 \omega \rho^4 \%1 E2 + 2 \%2 \rho^6 \left(\frac{\partial}{\partial z} E4(\rho, z) \right) - 8 \omega^3 \%4 \rho^2 Fz Wz \\
& - 4 \omega^2 \%1 \rho^4 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E5(\rho, z) \right) + 4 \omega^3 \%4 \rho Wr - \omega^4 Wr^2 \%3 + \omega^5 \%3 E2 \\
& - \omega^4 \%3 Wz^2 - \%1 \rho^4 Wz^2 - 4 \%2 \rho^6 EI - 4 \omega^2 \%1 \rho^2 \Big)
\end{aligned}$$

$$\sqrt{(\rho^2 - e^{(4 \psi(\rho, z))} \omega^2) e^{(4 \gamma - 6 \psi(\rho, z))} e^{(-2 \psi(\rho, z))}} \Big/ \left((\rho^2 - e^{(4 \psi(\rho, z))} \omega^2) \right)^3$$

$$\sqrt{\frac{\int \rho^2}{\rho^2 - e^{(4 \psi(\rho, z))} \omega^2}}$$

$$\%1 := e^{(10 \psi(\rho, z) - 2 \gamma)}$$

$$\%2 := e^{(-2 \gamma + 6 \psi(\rho, z))}$$

$$\%3 := e^{(18 \psi(\rho, z) - 2 \gamma)}$$

$$\%4 := e^{(-2 \gamma + 14 \psi(\rho, z))}$$

Apéndice C

Ecuaciones Geodésicas Funcionales

En este apéndice se muestra el código en MAPLE que calcula las ecuaciones geodésicas para el lagrangiano de Einstein-Hilert, al que todavía no se le reduce la dimensionalidad.

```
>
> restart:
> with(tensor):
```

Definición de las coordenadas del espacio funcional

```
>
> coords:=[rho,psi,gamma,omega]:
> g:=array (symmetric, sparse, 1..4, 1..4):
> g[2,2]:=2*rho : g[4,4]:=-exp(4*psi)/(2*rho): g[1,3]:=-1:
>
```

Definición de la métrica

```
>
> gij:=create([-1,-1], eval(g));
```

```
gij:=table([
```

```
index_char=[-1,-1]
```

$$\text{compts} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2\rho & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{e^{(4\psi)}}{\rho} \end{bmatrix}$$

```
])
```

```
> tensorsGR(coords,gij,gIJ,g, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C):
> displayGR(Christoffel2, C2);
```

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components :

$$\{2,12\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \{2,44\} &= \frac{1}{2} \frac{e^{(4\psi)}}{\rho^2} \\ \{3,22\} &= 1 \\ \{3,44\} &= \frac{1}{4} \frac{e^{(4\psi)}}{\rho^2} \\ \{4,14\} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \\ \{4,24\} &= 2 \end{aligned}$$

Ecuaciones geodesicas

```
>
> eqns:= geodesic_eqns( coords, theta, C2 );
eqns := {
  \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \rho(\theta) = 0, \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(\theta) \right) + \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \theta} \rho(\theta) \right)^2}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{e^{(4\psi)}}{\rho^2} \%1^2 = 0,
  \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \gamma(\theta) \right) + \%2^2 + \frac{1}{4} \frac{e^{(4\psi)}}{\rho^2} \%1^2 = 0, \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \omega(\theta) \right) - \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \theta} \rho(\theta) \right)^2}{\rho} \%1 + 4 \%2 \%1 = 0
}
%1 := \frac{\partial}{\partial \theta} \omega(\theta)
%2 := \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(\theta)
```

> Aquí theta puede ser cualquier parámetro afín a la curva geodésica, podemos ver que si seleccionamos el parametro xsi que representa por así llamarlo el "tiempo propio" de la geodésica.

Estas ecuaciones geodésicas son equivalentes a las ecuaciones de Einstein.

Apéndice D

Ecuaciones Geodésicas Funcionales para el lagrangiano reducido

En este apéndice se muestra el código en MAPLE que calcula las ecuaciones geodésicas para el espacio funcional de coordenadas f y Ω .

```
>
> restart:
> with(tensor):
> coords:=[f, Omega]:
> g:=array (symmetric, sparse, 1..2, 1..2):
> g[1,1]:=rho(t)*f^(-2)/2 : g[2,2]:=g[1,1]:
> gij:=create([-1,-1], eval(g));
gij := table([
  index_char = [-1,-1]
  compts = 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\rho(t)}{f^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\rho(t)}{f^2} \end{bmatrix}$$

])
> tensorsGR(coords,gij,gIJ,g, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C):
> displayGR(Christoffel2, C2);
The Christoffel Symbols of the Second Kind
non-zero components :

$$\{1,11\} = -\frac{1}{f}$$


$$\{1,22\} = \frac{1}{f}$$


$$\{2,12\} = -\frac{1}{f}$$

> eqns:= geodesic_eqns( coords, t, C2 );
```

$$eqns := \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t) \right) - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} f(t) \right)^2}{f} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega(t) \right)^2}{f} = 0, \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Omega(t) \right) - 2 \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} f(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega(t) \right)}{f} = 0 \right\}$$

A estas ecuaciones hay que agregarles el término lambda(rho) que aparece debido a la dependencia de la métrica del parámetro rho, este término no es calculado por maple y dememos agragarlo nosotros mismos.

>

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Apéndice E

El principio variacional de la mecánica nos permite obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico arbitrario, si nos es dado su función Lagrangiana L . En la mecánica Newtoniana el espacio y tiempo juegan papeles distintos; el tiempo es una variable independiente. En Relatividad esto ya no es posible. El tiempo es una coordenada más al mismo nivel que las coordenadas espaciales. Los eventos físicos toman lugar en una variedad cuadridimensional, que posee una estructura métrica. Esta estructura exige que no exista una dirección privilegiada en el espacio tiempo. Las ecuaciones que privilegien alguna dirección contradicen el principio de la relatividad y deben ser descartadas, o corregirlas en tal modo que el sistema final pueda reflejar la estructura métrica propia del universo físico.

La existencia de un Lagrangiano facilita enormemente esta tarea, pues al tratarse de un escalar, esto es un invariante, entonces las ecuaciones derivadas de él son relativistamente correctas. Pero al elaborar la correspondiente formulación Hamiltoniana, suele romperse la covariancia al tomar al tiempo como parametro de evolución.

En una formulación Hamiltoniana que se desee sea covariante, el parámetro "tiempo" debe de ser tratado al mismo nivel que las coordenadas espaciales, es decir, debe de ser considerado como una de las coordenadas canónicas y tener un momento conjugado asociado. Para construir esta formulación, seleccionamos cualquier invariante θ que sea función monótona del movimiento de un punto a lo largo de la línea de universo de una partícula. El nuevo Lagrangiano debe depender del parámetro tiempo, las coordenadas espaciales y de sus derivadas respecto este parámetro. El nuevo Lagrangiano debe de recuperar las ecuaciones que se obtenían del anterior.

Seleccionamos un invariante θ , que el tiempo propio, que sea función monótona que describa la trayectoria de un punto en el espacio que incluye a t como una coordenada más. Si denotamos con una prima a las derivadas respecto a θ

$$(E.1) \quad x_{\mu}' = \frac{dx^{\mu}}{d\theta}$$

mientras que un punto indicará derivada respecto a t .

En el espacio que incluye a t como coordenada se definirá un nuevo Lagrangiano el cual debe de cumplir con el principio de Hamilton

$$(E.2) \quad \delta I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda(x^{\mu}, x_{\mu}') d\theta = 0$$

esta variación debe de llevar a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$(E.3) \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\mu}'} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\mu}} = 0$$

el problema es encontrar Λ tal que las ecuaciones (E.3) sean equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano L .

Un modo de obtener Λ es transformar la integral de acción sobre dt a sobre $d\theta$ y tomar a t como una coordenada generalizada. Puesto que θ es función monótona de t entonces

$$(E.4) \quad \dot{x}_i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{x_i'}{t'}$$

con esto la integral de acción se transforma en

$$(E.5) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}_i, t) dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} L(x^\mu, x_\mu') d\theta$$

entonces un posible valor para Λ es

$$(E.6) \quad \Lambda(x^\mu, x_\mu') = t' L(x^\mu, \frac{x_i'}{t'})$$

el momento conjugado a t es entonces

$$(E.7) \quad p_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial t'} = L + t' \frac{\partial L}{\partial t'}$$

Si hacemos uso explícito de la relación (E.4) entonces el momento es

$$(E.8) \quad p_t = L - \frac{x_i'}{t'} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = L - \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -H$$

Por lo tanto el momento conjugado a la coordenada tiempo es el negativo del Hamiltoniano ordinario. Hamiltoniano debe de ser igual a la energía del sistema y en un sentido relativista se identifica al la componente temporal del cuadvivector de momento con la energía E . Entonces el momento canónico conjugado a la coordenada $-t$ es H .

En el caso de las Geodésicas, se ha parametrizado al Lagrangiano con el parámetro ξ y nos preguntamos si es un parámetro que pueda ser considerado como "tiempo" en el espacio funcional que se definió. Considerando el Lagrangiano (3.28)

$$(E.9) \quad L = 2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma}$$

al que no se le ha hecho aún la reducción dimensional, construimos el nuevo Lagrangiano $\Lambda = \xi'L$ con ξ' definida como en (E.1)

$$(E.10) \quad \Lambda = \xi'(2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma})$$

usando (E.4) se reescribe como

$$(E.11) \quad \Lambda = (2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma}) \frac{1}{\xi'}$$

luego, el momento conjugado a ξ es

$$(E.12) \quad p_{\xi} = -(2\rho\dot{\psi}^2 - \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\dot{\omega}^2 - 2\rho\dot{\gamma}) \frac{1}{\xi'^2}$$

y que empleando nuevamente la ecuación (E.4) nos lleva a

$$(E.13) \quad p_{\xi} = -L = -H$$

pero L ha sido considerado como la densidad de energía de las curvas geodésicas y por tanto se parece a la visión relativista de una partícula libre. Podemos entonces decir que el momento canónico conjugado a ξ es p_{ξ} .

Pero el Lagrangiano (E.11) que se obtiene falla, al derivar el Hamiltoniano asociado, pues es un Lagrangiano singular y su Hamiltoniano es idénticamente nulo. Hay que hacer el análisis desde otra perspectiva.

Consideremos que el Lagrangiano ya es función del parámetro de evolución como coordenada¹, entonces debemos de obtener el Lagrangiano en el cual todavía no es coordenada.

Sea el Lagrangiano dado por

$$(E.14) \quad L_0 = -2\rho\psi'^2 + \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\omega'^2$$

Donde la prima indica derivada respecto a ρ . Calculemos el Hamiltoniano H_0 asociado a este Lagrangiano, para ello primero calculamos los momentos canónicos

$$(E.15) \quad P_\rho = -4\rho\psi'$$

$$(E.16) \quad P_\omega = \frac{e^{4\psi}}{\rho}\omega'$$

y entonces calculamos el correspondiente Hamiltoniano

$$(E.17) \quad H_0 = -\frac{1}{8\rho}P_\psi^2 + \frac{e^{-4\psi}}{2}P_\omega^2 = L_0$$

Las ecuaciones canónicas respectivas son

$$\psi' = -2\frac{1}{8\rho}P_\psi$$

$$\omega' = e^{-4\psi}\rho P_\omega$$

que coinciden con la definición de los momentos y

$$P_\psi' = -4\frac{e^{-4\psi}}{2}P_\omega^2$$

¹ Esto hace que el parámetro de evolución pudiera ser ρ ó ψ .

$$P_{\omega} = 0$$

que son las ecuaciones dinámicas. Observemos que además se satisface la identidad

$$(E.18) \quad \frac{dH_0}{d\rho} = \frac{\partial H_0}{\partial \rho} = -\rho^{-1} H_0$$

Para construir el Lagrangiano donde ρ sea coordenada, seleccionamos el parámetro ξ del pedimos que

$$(E.19) \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\xi} = \frac{dx^i}{d\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = x^{i'} \dot{\rho}$$

y definimos

$$(E.20) \quad \Lambda = \dot{\rho}^2 L_0$$

$$\Lambda = -2\rho\psi^2 + \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\omega^2$$

Este Lagrangiano no depende de las velocidades en ρ y entonces podríamos considerarla como una variable dinámica no relevante, o bien, hacer una transformación de coordenadas de tal modo que el Lagrangiano transformado dependa de las velocidades en ρ .

Por otra parte, si a el Lagrangiano (E.9) se le aplica una transformación de Routh en la coordenada cíclica y tendremos

$$(E.21) \quad R = -2\rho\psi^2 + \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\omega^2 = \Lambda$$

entonces podríamos hacer una transformación inversa a la Routh al Lagrangiano Λ que nos devuelva el Lagrangiano L y del cual ya conocemos

su Hamiltoniano H quedando entonces por demostrar que las ecuaciones de Hamilton para H implican que

$$P_p = -H_0$$

y que se sigue cumpliendo (E.18). Solo se satisface la segunda condición, pues para la primera tenemos que

$$P_p = -2\gamma$$

y entonces este procedimiento para hacer nuestro Hamiltoniano covariante falla.

Estos intentos fallidos por hacer que el Hamiltoniano (3.19) sea covariante, pueden estar indicando que nuestro Hamiltoniano ya es covariante y entonces lo que habría que hacer es analizarlo como eso. Hay que revisar el tratamiento correspondiente para los Hamiltonianos covariantes y tal vez entonces podremos establecer claramente cual es el parámetro de evolución.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Schutz,B. GEOMETRICAL METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Cambridge University Press. 1988
- [2] Schutz,B. A FIRST COURSE IN GENERAL RELATIVITY. Cambridge University Press. 1988
- [3] Landau,L.D. y Lifshitz,E. THE CLASSICAL THEORY OF FIELDS. Course of Theoretical Physics, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co. 1971
- [4] Misner,K;Thorne,J y Wheeler,A. GRAVITATION. W.H.Freeman and Co., New York,1973
- [5] Islam, Y. ROTATING FIELDS IN GENERAL RELATIVITY. Cambridge University Press. 1985
- [6] Quevedo,H. Forsch. Phys.. **38**(1990)10, 733-840
- [7] Wald, R. GENERAL RALATIVITY.
- [8] Goldstein. CLASSICAL MECHANICS, Addison Wesley Publishing Co. 1980
- [9] Lanczos, C. THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE MECHANICS. Dovet
- [10] Sanchez, A. ECUACIONES DE EINSTEIN COMO GEODESICAS FUNCIONALES. Tesis de Maestria. Facultad de Ciencias UNAM. 1997
- [11] Nuñez, D. y Quevedo, H. SILARG VIII. Proceedings of the 8th Latin American Symposium on Relativity and Gravitation. Aguas de Lindoia, Brazil,1993). Eds. P.S. Letelier and W.A. Rodriguez, Jr. World Scientific p.162. 1994
- [12] Corichi, A. y Nuñez, D. Rev.Mex de Fis. **37**(1991) 720-747