20
2cj.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS DE LOS PROBLEMAS Y TEOREMAS VINCULADOS CON LOS ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICA,

P R E S E N T A :

VERÓNICA HOYOS AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER ELIZONDO

1997

PAGINACION VARIA

COMPLETA LA INFORMACION

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Algunos de los problemas y teoremas vinculados con los orígenes de la geometría analítica"

realizado por Verónica Hoyos Aguilar

con número de cuenta 6906861-8 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis : Dr. Javier Elizondo Huerta
Propietario : Dr. Javier Elizondo Huerta

Propietario : Dr. Santiago López de Medrano

Propietario : Dra. María de la Paz Alvarez Scherer

Suplente : M. en C. Pilar Martínez Téllez

Suplente : Mat. Enrique Vega Ramírez

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. Manuel Falconi Magaña

Agradecimientos

Quisiera hacer un reconocimiento especial por su participación a todas las personas que constituyeron el motor para la consecución de este trabajo:

- al Dr. Javier Elizondo por su atención, paciencia, y por pensar en la posibilidad de que este trabajo fuese un punto de partida hacia una experiencia matemática de mayor profundidad;

- a todos los sinodales de esta tesis, Dr. Santiago López de Medrano, Dra. M. Paz Álvarez S., M. en C. Pilar Martínez T., y Mat. Enrique Vega R., por su disposición para leerla. En particular agradezco a la Dra. Álvarez S., por sus detalladas indicaciones a lo largo de todo el escrito;

- al Dr. Ernesto Sánchez S., por su constante apoyo y solidaridad.

Índice

Contenido | Páginas

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se presenta un estudio de algunos de los problemas matemáticos y filosóficos que están en la base de la construcción de la geometría analítica. Se abordan ambos aspectos implícitamente, en el entendido de que la adherencia a ciertos principios de actividad matemática (o programas de matemáticas) constriñen o impulsan el desarrollo de los entes matemáticos involucrados.

De hecho, ambas vertientes, la filosófica y la matemática, se entretejen para dar cuerpo a una nueva matemática, la *geometría analítica*. La vertiente filosófica se expresa al querer dar un orden o estructura al cuerpo de conocimientos de la época, en particular a la geometría; y la vertiente matemática, al tratar de dar soluciones generales a viejos problemas de lugares geométricos.

En el Capítulo 1 presentamos una revisión del trabajo de Descartes realizado en los " Libro I " y " Libro II " de su obra *La Géométrie.* Esta revisión está basada en un seguimiento de la solución de Descartes al problema de Pappus. El problema de Pappus es un ejemplo de problema que plantea Descartes en el Libro I, para resolverlo con *su método*; y es hasta el Libro II que Descartes termina su resolución. Nosotros, aquí enfocamos a los antecedentes matemático-representacionales a que da lugar Descartes, con respecto a las coordenadas cartesianas y la clase de curvas algebraicas planas.

La tesis que de esta primera exposición se deriva es que el método analítico que desarrolla Descartes es una herramienta que él instaura en su *Géométrie* para resolver problemas de origen matemático y filosófico.

En el Capítulo 2 exponemos un análisis de la obra de Fermat en torno a la construcción de la geometría analítica.Iniciamos este capitulo presentando los antecedentes griegos de construcción geométrica denominados *locus,* puesto que la hipótesis de Boyer (1956) sobre el trabajo de Fermat en *Ad locus planus et solidos isagoge* es que es una presentación del trabajo griego al respecto. El capítulo continúa con la exposición de un bosquejo del contenido de dicho tratado, junto con algunos comentarios de la obra de Fermat en general.

El capitulo 3 completa lo expuesto en el capítulo anterior, ya que se presentan las apreciaciones de Boyer (1956) sobre las aportaciones de Descartes a la geometría analítica para terminar levantando un cuadro de diferencias entre los dos autores de la geometría analítica.

Con lo hasta aquí elaborado en los capítulos 1, 2, y 3, se sustenta la tesis de que los trabajos de Descartes y Fermat pueden considerarse como complementarios en el sentido de que el primero desarrolla conceptos básicos de la geometría analítica a través de la resolución de problemas de construcción; y el segundo encuentra un lugar más destacado en la historia de la geometría analítica a través de sus aplicaciones (también de construcción geométrica) a la geometría infinitesimal.

Finalmente, dado que aquí (ver capítulos 1 y 3) hemos tratado de hacer ver que la potencia y el desbordamiento de los métodos algebraicos de que hace uso Descartes buscan su sustentación en construcciones geométricas dinámicas, en el Capítulo 4 de este trabajo profundizamos en el análisis de este aspecto de la geometría cartesiana a través del trabajo que sobre ella realiza Bos, H. J., en el artículo "On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*" .

De esta manera, terminamos sosteniendo la tesis principal de este estudio: que la representación algebraica de las curvas materializa la conciencia de Descartes del movimiento continuo, y que la representación geométrico-mecánica de éste (del movimiento) juega el papel de interpretante de tal simbolización algebraica.

Por último, añadimos en el cuerpo de este trabajo de tesis un apéndice que trata sobre el desarrollo de los procedimientos algebraicos de Descartes usados en la solución del problema de Pappus para tres, cuatro y cinco líneas rectas.

GUÍA DE LA TESIS

A manera de guía, las preguntas que hemos tratado de contestar en el presente trabajo de tesis son las siguientes:

1. ¿Qué tipo de problemas, en relación con el origen de la geometría analítica, son los que abordan Descartes en su obra *La Géometrie* , y Fermat en sus *Oeuvres*?

2. ¿En qué se diferencian Descartes y Fermat, durante la resolución de problemas geométricos, con respecto al uso de un método analítico-algebraico? Desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, ¿se diferencian las obras matemáticas de Descartes y de Fermat con respecto a tal uso?

3. ¿Qué es lo que trae a las ecuaciones algebraicas a la escena matemática? ¿Cuáles son las consideraciones o el entorno de su aparición?

4. ¿Cómo se identifica a la geometría analítica? Es decir, ¿cuáles son las características más relevantes que la definen?

Capítulo 1

" este tratado temo que no pueda ser leido más que por aquellos que ya conocen lo que está en los libros de geometria"
(Descartes, La Geometria, Advertencia)

Ámbitos de representación cartesiana para las curvas algebraicas planas: Los Libros I y II de *La Géométrie*

En este capitulo hacemos una revisión de los Libros I y II de *La Géométrie* de Descartes enfocando a los antecedentes matemático-representacionales de Descartes con respecto las coordenadas cartesianas y a la clase de curvas algebraicas planas. Para este efecto nos basaremos en la traducción al español, *La Geometria*, publicada por la editorial Espasa Calpe en 1947. También, introducimos aquí opiniones autorizadas sobre el trabajo de Descartes (cf. Boyer (1956), y Bos (1981)) para tener una perspectiva más amplia acerca de tales elaboraciones.

Empezamos el capitulo exponiendo el problema de Pappus, problema principal planteado por Descartes en el Libro I. Además de la solución de Descartes a este problema, añadimos una descripción general de la estrategia de Descartes para tal resolución a fin de resaltar los procesos analíticos en juego. Enseguida presentamos el tema de la generación de curvas de Descartes, pasando al Libro II de *La Geometria*.

Por último en este capitulo, se presenta una prueba matemática, desarrollada por Bos (1981), del acotamiento de la afirmación general avanzada por Descartes acerca de la correspondencia entre los lugares geométricos identificados en el problema de Pappus, y las curvas algebraicas planas.

Del "Libro Primero" en La Geometría de Descartes

A continuación, comenzamos presentando dos textos que plantean el problema de Pappus: el primero, es el citado por Descartes en *La Geometría*, luego, pasamos a presentar un planteamiento actual del mismo problema, tomado de Bos (1981):

> *"Ese lugar de tres o cuatro líneas, a propósito del cual Apolonio se jacta y alaba por sus agregados, aunque debiera estar reconocido al primero que lo trató, es el siguiente:*
>
> *Si dadas las posiciones de tres rectas se trazan desde un mismo punto otras tres rectas que formen con aquellas ángulos dados, y se da la relación entre el rectángulo (producto) formado por dos de estas trazadas, al cuadrado de la tercera, el punto se encontrará sobre un lugar sólido, dado en posición, es decir sobre una de la tres cónicas. Si es respecto a cuatro rectas dadas, que se trazan otras cuatro formando ángulos dados, y se da la relación del rectángulo de dos de las distancias al de las otras dos, el punto se encontrará igualmente sobre una sección cónica. Si las rectas son solamente dos, está establecido que el lugar es plano; pero si hay más de cuatro, el lugar del punto no es ya de esos conocidos; es de esos que se llaman simplemente líneas (sin saber de antemano sobre su naturaleza o sus propiedades) y no se ha hecho la síntesis de ninguna de estas líneas ni demostrado su aplicación a esos lugares; ni aún respecto a la que parece la primera y la más indicada. He aquí como se proponen esos lugares:*
>
> *- Si las líneas dadas fueran seis, y se da la relación del sólido formado por tres de las distancias al sólido formado por las otras tres, el punto se encontrará igualmente sobre una cierta línea.*
>
> *- Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las otras, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones.*
>
> ...
>
> *Sin embargo, poco tiempo antes de nosotros se ha acordado la libertad de hablar así, sin designar empero, nada que no sea inteligible, diciendo: lo comprendido por tales rectas con respecto al cuadrado de tal recta, o a lo comprendido por tales otras. Y es fácil, por medio de las relaciones compuestas, enunciar y demostrar en general las proposiciones antes citadas y las que siguen.*
>
> *He aquí cómo:*
>
> *- Si de un punto se trazan sobre rectas dadas, otras rectas que formen ángulos dados y se da la relación compuesta de una de las trazadas a otra de ellas; la de un segundo par, la de un tercero, en fin la de la última a otra dada, si hay en total siete rectas;o bien la de las dos últimas, si hay ocho, el punto se encontrará sobre una línea dada.*

Puede decirse lo mismo, cualquiera que sea el número de rectas, par o impar; pero como lo he dicho, para cualquiera de esos lugares que siguen al correspondiente a cuatro rectas, no hay una síntesis ya hecha que permita conocer la línea" . (Planteamiento del problema de Pappus, citado por Descartes en La Géometria, pp.60-62. Dicho planteamiento del problema de Pappus, está tomado de la versión de Commandino de Pisa, de 1588, según nota de pie de página de la versión castellana de Espasa-Calpe)

De acuerdo a Bos,

> En su *Geometría* Descartes expuso un nuevo programa para tratar con problemas geométricos, para ello usó un problema como ejemplo clave: el problema de Pappus... :
>
> **Sean n líneas dadas, L_i, en el plano, y sean φ_i ángulos fijos.**

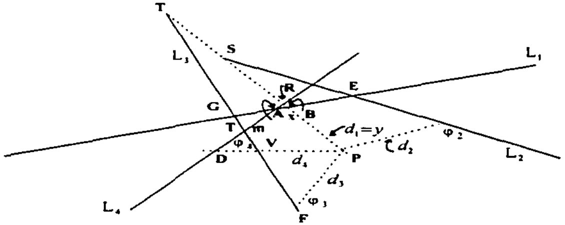


Fig. 1

> **Denotemos con d_i la longitud del segmento de línea del punto *P* a L_i, el cual hace un ángulo de φ_i con L_i. Sea $\alpha : \beta$ una razón dada y sea a un segmento de línea dado. Se requiere encontrar los puntos *P* con las siguientes propiedades:**
>
> **- para tres líneas:**
>
> $$(d_1 \cdot d_2) : (d_3^2) = \alpha : \beta$$
>
> **- para cuatro líneas:**
>
> $$(d_1 \cdot d_2) : (d_3 \cdot d_4) = \alpha : \beta$$

- para un número impar (2n-1) de líneas, con n>2 :

$$(d_1 \cdots d_n) : (d_{n+1} \cdots d_{2n-1} \cdot a) = \alpha : \beta$$

- para un número par (2n) de líneas, con n>2 :

$$(d_1 \cdots d_n) : (d_{n+1} \cdots d_{2n}) = \alpha : \beta$$

Lo que nosotros tenemos aquí es un problema de lugar geométrico; ...este lugar geométrico es generalmente una curva. Pappus establece que para tres y cuatro líneas el lugar geométrico es una sección cónica y que para más de cuatro líneas nada se conoce sobre la forma del lugar geométrico. (Bos, 1981, págs.298-300)

Solución de Descartes al problema de Pappus

En el "Libro Primero", pág. 66-71 de la edición en nuestras manos de *La Geometría*, Descartes desarrolla la estrategia que seguirá para dar solución al problema de Pappus en el caso de tres o cuatro líneas. Enseguida describiremos tal estrategia, misma que instrumenta Descartes en el caso general de *n* líneas.

Lo que enseguida exponemos se basa en lo que el propio Descartes realiza en sus Libros Primero y Segundo. No se sigue al pie de la letra, pues aunque la notación de Descartes ya usa símbolos algebraicos actuales, hemos preferido introducir elementos de análisis del trabajo cartesiano derivados de una perspectiva matemática actual.

Estrategia de Descartes para la resolución del problema de Pappus

- Se toma una de las líneas dadas, cualquiera de ellas (llamémosle L_1), y la "distancia" (d_1) o segmento del punto ***P*** a la línea recta escogida (tal segmento forma con L_1 uno de los ángulos, φ_1 en este caso, fijos de antemano según la recta escogida);

- se denota con y a la "distancia" elegida del punto P a la recta L_1, es decir, $d_1 = y$ y al segmento delimitado por la interseccción de y con la recta escogida y con alguna otra de las rectas dadas se le denota con x;

- definidos los segmentos x y y, Descartes pasa a representar las restantes "distancias" o segmentos que van del punto P a las rectas dadas en términos de las citadas x y y, gracias a que en un triángulo fijo las proporciones entre sus lados son constantes.

En el caso de 3 y 4 líneas dadas

En el siguiente desarrollo, nos referiremos a la notación y a la disposición de las rectas dada en la Fig.1, dado que dicha disposición es arbitraria:

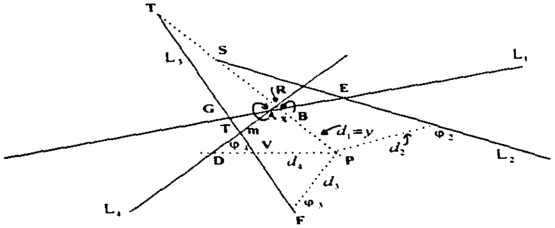


Fig. 1

Así, elegidas x y y como aparecen en la Fig. 1 , Descartes:

- considera el triángulo ΔARB : como el ángulo que forma d_1 con L_1 es fijo y el ángulo que forma L_1 con L_4 está dado (puesto que las rectas son dadas), los tres ángulos del ΔARB están completamente determinados, por lo que la proporción entre sus lados es constante y se indicará como *z/b*. Es decir que,

$$AB/BR = z/b$$

como $AB = x$, $BR = bx/z$, y $PR = y + bx/z$.

Ahora, Descartes discute en tres renglones los posibles cambios de signo en la combinación lineal $y + bx/z$ dependiendo de la posición que guardan entre sí los puntos colineales P , B , y R ;

- enseguida considera el ΔPDR , el cual tiene con el ΔARB en común el ángulo $\angle PRD$. Como este ángulo estaba determinado, y el $\angle PDR$ es fijo, resultan completamente determinados los tres ángulos del ΔPDR, por lo que las proporciones entre sus lados son constantes. De manera que $PR/PD = z/c$,

De modo que siendo $PR = y + bx/z$,

$PD = cy/z + bcx/zz$, i.e. $d_4 = cy/z + bcx/zz$.

Nótese que en este momento ya se tienen expresadas como combinaciones lineales de x y de y a dos de las "distancias", a d_1 y a d_4. **Descartes** procederá de manera análoga para expresar a las distancias restantes. En el caso de cuatro líneas, faltarían d_2 y d_3;

- En este punto, hacemos notar que aunque el proceso para llegar a expresar d_2 y a d_3 como combinaciones lineales de x y de y es el mismo aplicado a los casos de d_1 y d_4, de consideración de triángulos determinados por la intersección de dos de las líneas dadas y la "distancia" en cuestión, ello implica una reconstrucción de la resolución cartesiana, vuelta a aplicar ahora a análogas "formas" geométricas:

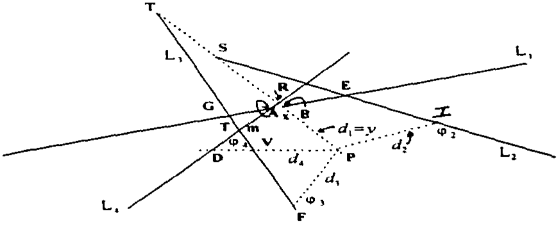


Fig. 1

- Considere entonces la intersección E de L_1 con L_2, como las rectas están dadas, lo está también dicho punto E (tanto como lo estaba, arriba, $\boldsymbol{A}$);

- llamémosle k a la distancia de A a E, i.e. $k = AE$, luego $BE = k - x$.

- Considere el $\Delta\, EBS$. Ahí, el $\angle EBS$ es fijo y lo es también el $\angle BES \therefore \angle ESB$ también lo es. De donde $BE/BS = z/e = cte$.

$\rightarrow BS = BE\, e/z$ i.e. $BS = k(e/z) - x(e/z)$

$\therefore\ PS = PB + BT = y - x(e/z) + k(e/z)$

De donde si $\mathcal{I}PS = z/f = cte$, entonces; $d_2 = PS\,(z/f)$

$$\text{i.e.} = y(z/f) - x(e/z)\,(z/f) + k(e/z)\,(z/f)$$

$$= \delta y + \eta x + \rho$$

- Por otro lado, la intersección T de L_4 con L_3 está dada, como lo está A, la intersección de L_1 con L_4. Llamésmole m a la distancia que hay entre A y **T**, luego

$$DR = DT + TA + AR$$

$$= DT + m + AR$$

- Ahora bien, en el triángulo $\Delta\, PDR$, $DR/PD = g/z = cte$

luego, $DR = PD\,(g/z) = (cy/z + bcx/zz)\,(g/z)$

$$= y(c/z)\,(g/z) + x(bc/zz)(g/z), \text{ i.e.}$$

$$= \gamma\, y + \sigma\, x$$

De donde $DT = DR - m - AR$

$$= \gamma\, y + \sigma\, x - m - AR$$

- Además, del $\Delta\, ARB$, $AR/AB = h/z = cte$, de donde $AR = x\, h/z$,

luego, $DT = \gamma\, y + \sigma\, x - m - x\, h/z = \gamma\, y + \sigma' x - m$

- Llamémosle ahora V a la intersección de d_4 con L_3. Como los tres ángulos del triángulo $\Delta\, DTV$ están dados, se tiene que:

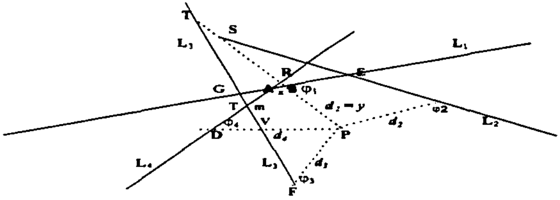


Fig.1

$DV/DT = i/z = cte$, de donde $DV = DT\,(i/z)$

$$DV = (\gamma\, y + \sigma' x - m)(\, i/z)$$

$= \gamma' y + \gamma'' x - m'$

Como $d_4 = cy/z + bcx/zz = PV + VD$, se tiene que $PV = -VD + cy/z + bcx/zz$

$= -(\lambda y + \gamma x - m') + cy/z + bcx/zz$

$= \lambda' y + \gamma' x + m''$

- Finalmente, en el ΔPVF los tres ángulos son dados, de donde

$PF/PV = j/z = cte$, de donde: $PF = PV(j/z) = (\lambda' y + \gamma' x + m'')(j/z) = \lambda'' y + \gamma'' x + m'''$

i.e. $d_3 = PF = ay + bx + c$.

De manera que este procedimiento de representación de los segmentos d_i en términos de las cantidades desconocidas x y y se aplica a la resolución del problema de Pappus no importa cuál sea el número de rectas dadas.

De acuerdo a Descartes:

> Se ve así que cualquiera que sea el número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde P, que forman ángulos dados, conforme al enunciado, se pueden siempre expresar, cada una por tres términos de los que uno está compuesto por la cantidad desconocida y multiplicada o dividida por alguna otra conocida, y el otro, de la cantidad desconocida x, también multiplicada o dividida por alguna otra conocida y el tercero, de una cantidad toda conocida. Se exeptúa el caso de que ellas (todas) sean paralelas bien a la línea AB, en cuyo caso el término compuesto de la cantidad x será nulo; o bien a la linea CB, y en este caso el término compuesto de la cantidad y será nulo[1]; lo cual está suficientemente claro para que no me detenga en explicarlo más. Y respecto a los signos + y - que se unen a estos términos, pueden ser cambiados de todas las maneras imaginables.
> (Descartes, 1956, pág.68-69)

De manera que en el caso de cuatro líneas el lugar geométrico buscado es el conjunto de puntos P que satisfacen $d_1 \cdot d_2 = d_3 \cdot d_4 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, es decir,

$y(\delta y + nx + e) = (ay + bx + c)\ \left(\frac{c}{z}y + x\frac{bc}{Zz}\right)\ \frac{\alpha}{\beta}$.

[1] En el apéndice que aparece al final de esta tesis hemos desarrollado con detalle dos casos de paralelismo.

De donde se obtiene:

$$a_1y^2 + a_2yx + a_3x^2 + a_4y + a_5x + a_6 = 0$$

la cual es la ecuación general de una cónica, es decir que el problema de Pappus para el caso de 4 rectas dadas describe de manera general a cualquier cónica.

Según Bos (1981), la respuesta de Descartes no es novedosa en cuanto al lugar geométrico solución al problema de Pappus en los casos de 3 y 4 rectas dadas:

> "Pappus establece que para tres y cuatro líneas el lugar geométrico es una sección cónica y que para más de cuatro líneas nada se conoce sobre la forma del lugar geométrico". (Bos, 1981, págs.298-300)

Sin embargo, lo que desde nuestro punto de vista constituye la real aportación de Descartes en este contexto, es el método instrumentado (al cual nos hemos referido como "la estrategia de Descartes" para la resolución del problema) para llegar a la determinación del lugar geométrico en cuestión.

Dicho método, de sustitución de magnitudes dadas por combinaciones lineales variables le permite a Descartes ir más allá de lo alcanzado por los antigüos geómetras griegos.

En el último párrafo del libro primero de La Geometría, aparece claro que son estos procedimientos analíticos (inaugurados por Descartes) los que le permiten a Descartes dar una respuesta al problema de Pappus en el caso de n rectas dadas:

> Puede suceder, estando propuesto el problema para seis o más líneas, si hay entre las líneas dadas algunas que sean paralelas a *BA* o *BP*, que una de las dos cantidades x o y no tenga más que dos dimensiones en la ecuación, y por lo tanto que se pueda encontrar el punto P con la regla y el compás. Pero, por el contrario, si ellas son todas paralelas, aunque el problema no se refiera más que a cinco líneas, el punto P no podrá ser encontrado de ese modo, a causa de que, no encontrándose la cantidad x en toda la ecuación, ya no será permitido tomar una cantidad conocida como y, sino que esa será la que hay que buscar. Y puesto que ella tendrá tres dimensiones, no se la podrá obtener más que extrayendo la raíz de una ecuación cúbica: lo que generalmente no puede hacerse, sin que se emplee por lo menos una sección cónica. ...(Descartes, 1956, pág. 71)

Continuando en este tenor, Descartes también establece que:

- en el caso de 9 líneas paralelas, 10, 11, 12 ó 13 líneas, pero no todas paralelas entre sí, la ecuación en x (ó en y, para 9 líneas paralelas) es de grado ≤ 6; la construcción por medio de intersección de secciones cónicas en general no será posible y una curva más complicada tendrá que ser usada,

- en el caso de 13 líneas paralelas, 14, 15, 16, ó 17 líneas, pero no todas paralelas entre sí, ...etc.

El "Libro Segundo" de La Geometría de Descartes

En el Libro Segundo, Descartes aborda la naturaleza de las curvas. Aquí, expone consideraciones acerca del tipo de líneas que no deben ser excluidas de la geometría:

> considerando la geometría como una ciencia que enseña generalmente a conocer las medidas de todos los cuerpos, no deben excluirse las líneas por compuestas que sean, **mientras pueda imaginárselas construidas por un movimiento contínuo**, o por varios que se suceden, y en que los últimos están enteramente regidos por los que les preceden; pues por este medio se puede tener siempre un conocimiento exacto de su medida. (Descartes, 1956, pág.74-75)
>
> ...
>
> Pero, para comprender en conjunto todas las que están en la naturaleza, y distinguirlas por orden en ciertos géneros, no conozco nada mejor que decir que **todos los puntos de las que pueden designarse geométricas, es decir, que admiten cierta medida precisa y exacta**, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta, **que pueden ser expresadas por alguna ecuación, la misma para todos los puntos**. (Descartes, 1956, pág.78)

Es decir que aquí Descartes ha identificado *curvas geométricas* con aquellas que pueden expresarse por medio de una ecuación algebraica, y a estas últimas con las curvas que admiten una medida precisa y exacta, las que él imaginaba construidas por un movimiento contínuo.

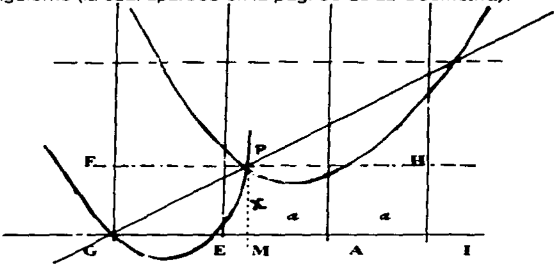
La parábola de Descartes

Otra de las cuestiones del "Libro II" que aquí discutiremos (págs.96-100), surge al considerar Descartes el caso particular del problema de Pappus en que se dan cinco líneas rectas, no todas paralelas, en la siguiente disposición:

Sean cuatro de las líneas dadas paralelas y con distancias iguales a a entre ellas; si además la quinta línea es perpendicular a las otras, y la constante de proporcionalidad es tomada como a , entonces como lugar geométrico tenemos una cúbica, la llamada "parábola de Descartes":

> Sean por ejemplo, las líneas dadas **AB**, **IH**, **DE**, **GF**, y **GA** y que se pida el punto **P** de manera que trazando **PB**, **PF**, **PD**, **PH** y **PM** en ángulos rectos sobre las dadas, el paralepípedo de las tres **PF**, **PD**, y **PH** sea igual al de las otras dos **PB** y **PM** , y de una tercera, como la **AI**. Haciendo
>
> $PB = y$ $\qquad$ $PM = x$ $\qquad$ AI ó AE ó $GE = a$
>
> de manera que, estando el punto **P** entre las líneas **AB** y **DE**, se tenga
>
> $PF = 2a - y$ $\qquad$ $PD = a - y$ $\qquad$ $PH = y + a$
>
> y multiplicando estas tres, una por otra, se obtiene
>
> $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, igual al producto de las otras tres, que es axy.
> (Descartes, pág.97)

La figura a la que está haciendo alusión Descartes en el párrafo anterior es la siguiente (la cual aparece en la pág. 98 de *La Geometría)*:



Antecedentes de curvas dinámicas

Sin embargo, ya los antigüos griegos conocían algunas curvas generadas de manera dinámica.

En particular, en el Capítulo I de su *History of Analytic Geometry* ("Las primeras contribuciones"), Boyer reporta que Hipias el Sofista (~425 A.C.) inventó la primera curva distinta del círculo y de la recta, a través de la intrusión en geometría de la noción de movimiento mecánico: si una barra horizontal o un segmento de línea *AB* se mueve hacia abajo con un movimiento uniforme de traslación a la posición *OC* al mismo tiempo que una barra vertical igual a un segmento *OA* rota sobre *O* a la posición *OC*, la intersección *P* de estas barras o segmentos de línea trazará una curva conocida como la cuadratriz de Hipias (ver fig.2).

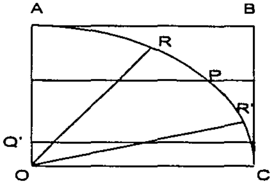


Fig.2

Esta curva fue usada por los griegos para resolver dos de los tres problemas clásicos. De hecho, "resuelve" fácilmente todas las cuestiones de multisección, incluyendo la de trisección. Para trisectar el ángulo *COR*, por ejemplo, uno primero trisecta el segmento *OQ*, por el punto *Q'*, entonces encuentra el punto correspondiente *P'* sobre la cuadratríz, y finalmente extiende *OP'* hasta intersectar al círculo en *R'*, el punto deseado que trisecta al arco *CR*.

De acuerdo a Boyer, la cuadratríz es importante no únicamente como una nueva curva, sino también porque anuncia una de las ideas importantes de la geometría analítica: la de lugar geométrico.

Recordemos que, actualmente, un lugar geométrico o *locus* se define como sigue:

> " Un conjunto de puntos de un plano se dice que forman un lugar geométrico, si se cumplen estas dos condiciones:

1. Todos los puntos del lugar poseen una misma propiedad previamente establecida;
2. Si un punto tiene la misma propiedad pertenece al lugar.

Ejemplos. La mediatriz de un segmento, la circunferencia, la bisectriz de un ángulo, etc. " (Santaló y Carbonell, p.75)

Nótese que antiguamente el punto de vista dinámico para la definición y/o construcción de curvas parece no haber sido apreciado dado que la cantidad de curvas conocidas antes del trabajo de Descartes y Fermat era muy reducido. Además, todo parece indicar que Descartes es el primero en definir sistemas de enlaces para el trazado de curvas continuas. De manera que, en tanto no había aparatos para describir una curva por movimiento continuo, una construcción puntual era necesaria, aún cuando el lenguaje de la definición fuese cinemático, como antes pudimos apreciar a partir de la definición de la cuadratriz de Hipias.

Por su parte, Descartes conocía que una ecuación en dos desconocidas determinaba una curva, y sin embargo, no parecía considerar tal ecuación como una definición adecuada de la curva, sintiéndose constreñido a exhibir una construcción mecánica real, en cada caso.

Las construcciones cinemáticas continuas en el Libro II de Descartes, juegan el papel de validadoras de la respectiva representación algebraica por medio de una ecuación.

Desde el punto de vista de Boyer, se ha conjeturado que los antiguos griegos enfatizaban las construcciones a causa de que ellas les servían como teoremas de existencia. De la misma manera, uno está tentado a aplicar esta idea a Descartes y decir que él dudaba de la existencia de una curva como correspondiendo a una ecuación a menos que pudiera suministrar una construcción cinemática para ella (cf. Boyer, 1956, pág.88)

De acuerdo a Boyer, "el concepto de movimiento juega un papel prominente en su trabajo (en el de Descartes) más que en el de Fermat" (Boyer, pág.89).

La designación "curva cartesiana" aún hoy es aplicada a los miembros de una familia usada por Descartes como una ilustración de la manera en la cual uno construye "el árbol genealógico o familiar" de una curva algebraica. En otro apartado que incluimos más adelante (ver Cap. 4 de esta tesis), especificamos cómo se obtiene tal familia de curvas.

Distintos ámbitos de representación para las curvas planas

Desde el punto de vista de Bos, la representación de curvas es fundamental a estos problemas, pues los argumentos sobre el dominio de validez de una curva únicamente puede ser formulado en términos de la representación de curvas, y la discusión es compleja porque tres métodos diferentes de representación están involucrados: representación por la especificación del movimiento continuo que traza la curva, representación por el método de construir puntos sobre la curva, y representación por la especificación de la maquinaria de trazado involucrando cuerdas. A estos tres uno puede añadir un cuarto método -la representación de una curva por su ecuación.

La vinculación de máquinas y el artificio de una curva movible cuya intersección con una regla traza nuevas curvas son los ejemplos que Descartes dió para ilustrar su concepto del trazado de curvas por combinación de movimientos. Este es un concepto fundamental porque Descartes estableció que introduciría nuevas curvas únicamente si éstas eran trazables de esta forma (cf. Bos, pág.313).

Desde nuestro punto de vista, aparece clara la identificación que Descartes está estableciendo entre curvas geométricas de trazado continuo y la representación algebraica de las curvas.

En este sentido, valga hacer notar que Descartes, para dejar fuera de la clase de curvas geométricas a la espiral y a la cuadratríz, da un argumento de inconmensurabilidad:

> "(la espiral y la cuadratríz) están concebidas como descritas por dos movimientos separados, entre los cuales no existe relación que pueda ser medida exactamente", y, por tal razón, ellas "en realidad únicamente pertenecen a la Mecánica". (Descartes, La *Géométrie*, p.317, citado por Bos, 1981, pág.314)

De acuerdo a Bos, gracias al trabajo de Descartes y de Fermat, el siglo XVII presencia un cambio considerable en cuanto al conocimiento matemático sobre las curvas. El bagaje de curvas conocidas hasta entonces consistía en las secciones cónicas, algunas curvas algebraicas superiores tales como la conchoide de Nicómedes y la cisoide de Diocles, y unas pocas curvas trascendentales de entre las cuales la más importante era la espiral arquimedeana y la cuadratriz de Dinostrato. Fue a través de la nueva geometría analítica de Fermat y Descartes que la colección de curvas matemáticas llegó a incluir a todas las curvas algebraicas, i.e., todas las curvas cuya ecuación en coordenadas rectilineales involucra únicamente las operaciones algebraicas de suma, resta, producto, división, y radicales enteros positivos. La colección de curvas trascendentales, i.e., las curvas que no admiten una ecuación como la descrita, también se agrandó, por supuesto.

La cicloide apareció aproximadamente en 1630, y la curva logarítmica en los alrededores de 1660. Posteriormente los matemáticos encontraron muchas más curvas que dependían algebraicamente de estas dos curvas trascendentales; muchas de ellas ocurriendo como soluciones al problema inverso de la tangente.

Con respecto al papel que jugaban las curvas en la geometría, Bos explica lo siguiente (Bos, 1981,pág.295),

> las nuevas curvas, al igual que las primeras, podían jugar tres papeles diferentes: ser objeto de estudio, ser un medio para resolver un problema, o ser la solución a un problema.

Ver, p.e., la cicloide, la parábola cartesiana, y la curva $a(exp(-y/a)) = a - y+x$ en un orden respectivo.

Este mismo autor comenta:

> los matemáticos del siglo XVII no tenían una definición uniforme del concepto de curva y por lo tanto no tenían una forma estándar para especificar las curvas que tenían en mente. De hecho existían muchas maneras de especificar a las curvas. Uno podía, por ejemplo, indicar cómo podían construirse los puntos sobre la curva, uno podía describir una máquina por medio de la cual la curva podía ser trazada, y (después que la geometría analítica fue introducida) uno podía dar la ecuación de la curva...

Bos distingue así, tres formas de uso en la época (siglo XVII) para la especificación de curvas. Es en ese sentido que el término "representación de curvas" hace referencia a esas u otras formas de uso de las curvas, si es que dichas formas han permitido conocer a una determinada curva.

¿Todas las curvas geométricas ocurren como lugar geométrico de alguno de los casos del problema de Pappus?

De acuerdo al análisis de la obra de Descartes que realiza Bos (1981, págs.301-302), Descartes introduce en el Libro II otra clasificación para las curvas según el grado de sus ecuaciones. Lo que lo conduce a la siguiente clasificación de casos del problema de Pappus:

- 3 ó 4 líneas, la ecuación del lugar geométrico es de grado a lo más 2; el lugar geométrico es de primera clase;

- 5, 6, 7, ó 8 líneas, la ecuación es de grado a lo más 4; el lugar geométrico es de segunda clase, ó en casos excepcionales, de la primera;

- 9, 10, 11, ó 12 líneas, la ecuación es de grado a lo más 6; el lugar geométrico es de tercera clase o de una clase inferior en casos excepcionales;

- etc.

Es en conección con esta clasificación, de acuerdo a Bos (1981, pág.302), que Descartes establece que todas las ecuaciones algebraicas pueden ocurrir como ecuaciones del lugar geométrico de alguno de los casos del problema de Pappus:

> De modo que no hay una línea curva susceptible de cálculo y que pueda ser admitida en Geometría, que no sea útil para algún número de líneas. (Descartes,1947, pág. 83)

Con respecto a la prueba matemática de tal afirmación, Bos señala que aparentemente Newton es el primero en cuestionarla, y en dar una prueba de que ésta es errónea (Bos remite a *The mathematical papers of Isaac Newton*, ed. D.T. Whiteside, Cambridge, Vol. 4 , 1971, pp.340-344).

¿Toda curva algebraica plana corresponde a un lugar geométrico como los descritos en el problema de Pappus?

En este apartado se presenta un desarrollo matemático encaminado a la demostración de que una respuesta negativa a la pregunta planteada es la correcta. Para tal exposición, nos basaremos en el apéndice del artículo de Bos (1981, pp. 332-338).

El autor primero obtiene algunas propiedades de los polinomios que ocurren en las ecuaciones de los lugares geométricos de problemas de Pappus. Posteriormente, después de exponer pruebas matemáticas de las propiedades de los polinomios en dos variables denominados de Pappus, Bos establece el siguiente,

> **Teorema 4. Si n > 21 , existen polinomios $F(x,y)$ de grado n, tales que $F(x,y)=0$ es una curva real no vacía y $F(x,y) = 0$ no ocurre como el lugar geométrico de un problema de Pappus. (Bos, 1981, pág.337)**

Hasta aquí el contenido formal del primer capítulo de esta tesis. El lector puede enseguida continuar con el Capítulo 2 a fin de introducirse al estudio de lo elaborado por Fermat en torno a la base conceptual de la geometría analítica. Sin embargo, a efecto de mostrar que una de las ramificaciones principales del trabajo cartesiano en el campo de la matemática ha sido la algebraica, presentamos enseguida una prueba actual al teorema 4.

Apéndice al Capítulo 1: Prueba de Bos al Teorema 4

I

En primer lugar se derivarán algunas propiedades de los polinomios que ocurren en las ecuaciones de los lugares geométricos de los problemas de Pappus.

Sea V_n un espacio vectorial real de dimensión $6n+1$, el cual consiste en los vectores de la forma

$$v = (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \ldots a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}, \alpha).$$

Considere el mapeo P_n definido por

$$P_n(v)(x,y) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i) - \alpha \prod_{i=n+1}^{2n} (a_i x + b_i y + c_i)$$

P_n mapea a V_n en el espacio de polinomios en dos variables con coeficientes reales.

Si ninguno de los factores $a_i x + b_i y + c_i$ es constante (*i. e.* si para toda i, $a_i \neq 0$ ó $b_i \neq 0$), entonces

$$P_n(v)(x,y) = 0$$

es la ecuación de un lugar geométrico de un problema de Pappus en $2n$ líneas. Sean estas líneas L_i; sus ecuaciones son

$$a_i x + b_i y + c_i = 0$$

Tomando en cuenta la posibilidad de que alguno de los factores pueda ser constante, veremos que

$$P_n(v)(x,y) = 0$$

es la ecuación del lugar geométrico del siguiente problema generalizado de Pappus:

> Dadas $k+l$ líneas, con $k \leq n$ y $l \leq n$, encuentre el lugar geométrico de puntos en el plano tales que la razón del producto de las distancias (orientadas) a las primeras k líneas y el producto de las distancias (orientadas) a las últimas l líneas es constante.

Esta es una generalización natural del problema original de Pappus. Todos los problemas para $2m$ líneas y para $(2m-1)$ líneas, con $m \leq n$ ocurren entre los $P_n(v)(x,y)$.

Def. A los polinomios que pueden ser escritos como los $P_n(v)$, para alguna n y algún $v \in V_n$, los llamaremos ***Polinomios de Pappus.***

Los polinomios de Pappus son aquellos polinomios que pueden ser escritos como la diferencia entre dos polinomios en donde cada uno de los cuales puede ser descompuesto en factores lineales. La afirmación de Descartes se refiere entonces a cuándo un polinomio puede ser escrito como una de tales diferencias.

Enseguida, describiremos una serie de propiedades de los polinomios de Pappus, las cuales se derivarán de los siguientes teoremas, enumerados del 1 al 3.

Teorema 1. Sea $v \in V_n$ y sea L_i lineas correspondientes a los factores no constantes $a_i x + b_i y + c_i$, no todas paralelas entre sí. Entonces existen puntos (x, y) en el plano tales que $P_n(v)(x,y) = 0$.

Demostración. Como no todas las líneas son paralelas entre sí, existe un par de ellas, a saber L_i y L_j, con $i \leq n$ y $j > n$, las cuales se intersectan. Sea (x_0, y_0) su punto de intersección. Entonces

$$a_i x_0 + b_i y_0 + c_i = a_j x_0 + b_j y_0 + c_j = 0$$

y por lo tanto

$$P_n(v)(x_0, y_0) = 0$$

Si nosotros estamos hablando propiamente de un problema de $2n$ líneas, es decir, si todos los factores en $P_n(v)$ son no constantes, el grado de $P_n(v)$ será generalmente igual a n. Pero, a causa de que $P_n(v)$ es la diferencia de dos polinomios, puede suceder que los términos de grado mayor se cancelen entre sí, de tal manera que un problema de $2n$ líneas puede conducir a una ecuación de grado menor que n. Un ejemplo es el problema de 8 líneas,

$$(y+1)(y-1)(x+1)(x-1) - (y+2)(y-2)(x+2)(x-2) = 0$$

el cual conduce a la ecuación cuadrática

$$x^2 + y^2 = 5 .$$

Inversamente, esto significa que si queremos encontrar a todos los polinomios de Pappus de grado n, no tenemos que restringirnos a los polinomios $P_n(\nu)$ porque los polinomios de Pappus buscados bien pueden ser originados por algún $P_m(\nu)$ con $m > n$. Esta posibilidad será importante cuando interpretemos y chequemos la afirmación de Descartes. En particular necesitaremos el siguiente teorema sobre el grado de $P_n(\nu)$:

Teorema 2. Sea $\nu \in V_n$ tal que todos los factores $a_i x + b_i y + c_i$ en $P_n(\nu)$ sean no constantes y tal que no todas las L_i líneas sean paralelas. Entonces

$$\frac{n}{2} \leq \text{grado de } P_n(\nu) \leq n$$

Demostración. Es imposible que el grado de $P_n(\nu)>n$. Para probar la otra desigualdad, llamémosle $L_1, \ldots, L_n$ al primer conjunto de líneas y $L_{n+1}, \ldots, L_{2n}$ el segundo conjunto de líneas, y consideremos primero el caso de que los dos conjuntos no tengan líneas en común. Si existe una línea en el primer conjunto que no sea paralela a ninguna de las líneas del segundo conjunto, tomémosla como L_1 y procedamos tomando $k = 0$ en el argumento siguiente. Si no existe ninguna de estas líneas en el primer conjunto, elijamos (reenumerando si es necesario) $L_1, \ldots, L_k$ del primer conjunto de líneas y $L_{n+1}, \ldots, L_{n+k}$ del segundo conjunto de tal manera que

$$L_1 \| L_2 \| - \| L_k \| L_{n+1} \| - \| L_{n+k},$$

además, de tal manera que ni en el primero ni en el segundo conjunto de líneas haya más líneas paralelas a L_1. Supongamos que en el segundo conjunto de líneas no existen más de k líneas paralelas a L_1 (si otro fuera el caso se pueden cambiar los conjuntos). Ya que todas las líneas son paralelas, existe un conjunto de líneas $L_1, \ldots, L_k$, $L_{n+1}, \ldots, L_{n+k}$ con

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2},$$

ya que si k fuera $> \frac{n}{2}$ un pequeño conjunto con la mismas propiedades podría ser elegido de las líneas restantes. Si $b_1 \neq 0$, sustitúyase

$$y = \frac{-a_1 x - c_1}{b_1}$$

en

$$P_n(\nu)(x,y) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i) - \alpha \prod_{i=n+1}^{2n} (a_i x + b_i y + c_i).$$

El primer producto es entonces 0 (ya que $a_1x + b_1y + c_1 = 0$), y en el segundo producto los factores son

$$\frac{a_i b_1 - a_1 b_i}{b_1}\, x + \frac{b_1 c_i - b_i c_1}{b_1}.$$

Para $n + 1 \leq i \leq n + k$, las líneas L_i son paralelas a L_1 pero no iguales a L_1; entonces en tal caso

$$a_i b_1 - a_1 b_i = 0 \quad \text{y} \quad b_1 c_i - b_i c_1 \neq 0,$$

así, los primeros k factores del segundo producto son constantes $e_i \neq 0$. Las líneas $L_{n+k+1}, \ldots, L_{2n}$ no son paralelas a L_1 entonces para $n + k + 1 \leq i \leq 2n$, $a_i b_1 - a_1 b_i \neq 0$, de tal manera que los últimos $n - k$ factores del segundo producto pueden ser escritos como $f_i x + g_i$, con $f_i \neq 0$.

Entonces

$$P_n(v)\left(x, \frac{-a_1 x - c_1}{b_1}\right) = -\alpha \prod_{i=n+1}^{n+k} e_i \prod_{i=n+k+1}^{2n} (f_i x + g_i)$$

es un polinomio en x de grado $n - k$. Pero esto significa que

$$\text{grado } P_n(v)(x, y) \geq n - k.$$

También

$$n - k \geq \frac{n}{2},$$

de manera que

$$\text{grado } P_n(v)(x, y) \geq \frac{n}{2}.$$

Si $b_1 = 0$, puede ser probado analogamente (sustituyendo $x = -\frac{c_1}{a_1}$) que $P_n(v)(-\frac{c_1}{a_1}, y)$ es un polinomio en y de grado $n - k$, de tal manera que en tal caso

$$\text{grado } P_n(v)(x, y) \geq n - k \geq \frac{n}{2}.$$

Finalmente, si algunas de las líneas del primero y del segundo conjunto coinciden, a saber $L_1, \ldots, L_d$, esto es $L_1 = L_{n+1}$, $L_2 = L_{n+2}$, ..., $L_d = L_{n+d}$. Entonces para $1 \leq i \leq d$,

$$a_i x + b_i y + c_i = \delta_i\, (a_{n+i} x + b_{n+i} y + c_{n+i}), \quad \delta_i \neq 0.$$

Tenemos entonces

$$P_n(v)(x,y) = \prod_{i=1}^{d} (a_i x + b_i y + c_i) \, .$$

$$\left\{ \prod_{i=d+1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i) - \alpha \prod_{i=1}^{d} \delta_i^{-1} \prod_{i=n+d+1}^{2n} (a_i x + b_i y + c_i) \right\} .$$

El factor entre llaves es un polinomio de Pappus $P_{n-d}(w)$ para el cual el primero y el segundo conjunto de líneas no tienen ninguna en común. Entonces su grado es $\geq \frac{n-d}{2}$, de tal manera que

$$\text{grado } P_n(v) \geq \text{d} + \frac{n-d}{2} \geq \frac{n}{2} .$$

Esto completa la prueba del teorema 2.

II

Descartes notó que el caso en donde todas las líneas son paralelas es excepcional. Ahí, los teoremas 1 y 2 no se aplican. Estos casos los discutiremos separadamente.

Sea $v \in V_n$ tal que ninguno de los factores $a_i x + b_i y + c_i$ es constante y que las $2n$ lineas L_i son paralelas. Entonces cualquiera de las ecuaciones de las líneas L_i puede ser escrita como

$$\alpha_i z + \beta_i = 0$$

con

$$z = a_1 x + b_1 y \, .$$

Entonces

$$P_n(v)(x,y) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i z + \beta_i) - \alpha \prod_{i=n+1}^{2n} (\alpha_i z + \beta_i) = F(z),$$

en donde $F(z)$ es un polinomio en z formado por la diferencia entre dos polinomios de n-ésimo grado en z, cada uno teniendo n raíces reales. Sin embargo, puede suceder que $F(z)$ en sí mismo no tenga raíces reales o que su grado sea $< \frac{n}{2}$. Entonces los análogos de los teoremas 1 y 2 no se aplican en este caso. Notemos que en el caso de $2n$ lineas paralelas, la superficie en R^3

$$w = P_n(v)(x, y) = F(z)$$

es una superficie regular.

Con respecto al grado de F probaremos:

Teorema 3. Sea $v \in V_n$ tal que ninguno de los factores es constante y tal que las $2n$ líneas son todas paralelas. Si $P_n(v)$ tiene grado $m < n$ entonces existe una $w \in V_m$, tal que

$$P_n(v) = P_m(w)$$

en donde las líneas que le corresponden a w son todas paralelas.

(En otras palabras, si a un problema de Pappus de $2n$ líneas paralelas le corresponde una ecuación de grado m, entonces existe un problema de Pappus de m líneas paralelas el cual satisface la misma ecuación.)

Demostración. Ya que

$$P_n(v)(x,y) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i z + \beta_i) - \alpha \prod_{i=n+1}^{2n} (\alpha_i z + \beta_i) = F(z),$$

lo que tenemos que probar es que todo polinomio $F(z)$ de grado m en una variable puede ser escrito como la diferencia entre dos polinomios $G(z)$ y $H(z)$ de grado m, cada uno con raíces reales únicamente.

Considere por un momento un intervalo, $[a, b]$, de tal manera que sea $|F(z)| < k$ para $z \in [a, b]$. Elija puntos en $[a, b]$ como sigue:

$$a = d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < c_{m-1} < d_{m-1} < c_m < d_m = b$$

y considere

$$G(z) = \prod_{i=1}^{m} (z - c_i)\,.$$

Claramente $G(d_i) \neq 0$ y entre cada par d_i, d_{i+1}, G tiene un cambio de signo. Elija α tal que $|\alpha \ G(d_i)| > K$ para todo d_i y considere al polinomio de grado m

$$H(z) = F(z) + \alpha \ G(z)\,.$$

A causa de que $|F(d_i)| < K$ y $|\alpha \ G(d_i)| > K$, $H(d_i)$ tiene el mismo signo que $G(d_i)$ entonces H tiene un cambio de signo entre cada par d_i, d_{i+1}. Por lo tanto todas las raíces de H son reales. La descomposición requerida es por lo tanto.

$$F(z) = H(z) - \alpha \ G(z)\,.$$

Corolario de los Teoremas 2 y 3. Si $F(x, y)$ es un polinomio de Pappus y el grado $F = k$, entonces existe una $m \leq 2k$ y una $w \in V_m$ tal que $F = P_m(v)$.

III

Regresaremos ahora a la interpretación de la afirmación de Descartes:

- Si Descartes hablaba de que todo polinomio en dos variables es un polinomio de Pappus, entonces es bastante fácil probar que tal afirmación es equivocada. Un contraejemplo es

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 1\,,$$

porque no existen puntos con coordenadas que satisfagan que $F(x,y) = 0$. También $w = F(x,y)$ no es una superficie regular en R^3 entonces por el Teorema 1 y la nota que precede al teorema 3, $F(x,y)$ no puede ocurrir como un $P_n(v)$ para algún n y $w \in V_n$. No existen evidencias de que Descartes estuviera consciente de esta complicación relacionada con los polinomios que no tienen raíces reales. Sin embargo, en vista de la última parte del pasaje que estamos discutiendo, en donde Descartes habla sobre curvas, debemos concluir que él no estaba pensando en polinomios sino más bien en ecuaciones polinomiales de curvas *i.e.* polinomios $F(x, y)$ tales que el conjunto $\{(x,y) \quad F(x,y) = 0\}$ es no vacio.

Aún con esta restricción la afirmación es equivocada. Probaremos esto con un argumento dimensional. En particular:

Teorema 4. Si $n > 21$, existen polinomios $F(x, y)$ de grado n, tales que $F(x, y) = 0$ no ocurre como el lugar geométrico de un problema de Pappus.

Demostración. Sea Q_n el espacio de polinomios en dos variables de grado $\leq n$. La dimensión de Q_n es $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Sea $O_n \subset Q_n$ un subconjunto abierto de Q_n tal que los elementos de O_n son los polinomios $F(x, y)$ tales que $F(x, y) = 0$ es una curva real no vacia. La dimensión de O_n es también $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. [Que el conjunto O_n existe puede verse de lo siguiente: Sea $O^+_{(1,0)}$ el conjunto de los polinomios F tales que $F(1, 0) \geq 0$; y sea $O^-_{(-1,0)}$ el conjunto de los polinomios F tales que $F(-1, 0) \leq 0$. Ambos conjuntos son subconjuntos abiertos de Q_n y su intersección "O" es no vacía, $F(x, y) = x$ pertenece a tal intersección. Si $F \in O$, entonces $F(1, 0) \geq 0$ y $F(-1, 0) \leq 0$ de tal manera que $F(x, y) = 0$ es una curva real no vacía]. Supongamos que todas las $F \in O_n$ son polinomios de

Pappus. Entonces, de acuerdo al corolario de los teoremas 2 y 3, cada $F \in O_n$ debe ocurrir como un $P_{2n}(v)$ para algún $v \in V_{2n}$. Por otro lado $O_n \subset Q_n \subset Q_{2n}$ de tal manera que O_n debe ser un subconjunto de la imagen de P_{2n} en Q_{2n}.

Entonces

$$\dim O_n \leq \dim \text{Imagen } (P_{2n}) \leq \dim V_{2n},$$

esto es

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq 12n + 1 .$$

Esta condición no se satisface si $n > 21$, entonces en este caso deben existir polinomios en O_n que no sean polinomios de Pappus.

Capítulo 2

Una Presentación Sistemática de la Aplicación de un Procedimiento Algebraico-Analítico: El Trabajo de Fermat en *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*

En este capítulo exponemos un análisis de la obra de Fermat en torno de la construcción de la geometría analítica, para lo cual nos basaremos[1] en el texto que sobre el tema presenta Boyer (1956) en el capítulo 5 de su libro *History of Analytic Geometry* .

Iniciamos este Capítulo 2 presentando los antecedentes griegos de la construcción geométrica denominada *locus* o lugar geométrico, puesto que la hipótesis de Boyer sobre el trabajo de Fermat en *Ad locus planus et solidos isagoge* es que fue una continuación del trabajo griego al respecto. El capítulo continúa con la exposición de un bosquejo del contenido de dicho tratado, junto con algunos comentarios de la obra de Fermat en general.

[1] Es de lamentarse que no demos cuenta directamente de alguno de los textos de Fermat, el caso es que no estaban disponibles en la biblioteca. (N. A.)

El significado del locus o lugar geométrico

Alrededor de 1629, Fermat realizó un tratamiento analítico de máximos y mínimos, y aproximadamente al mismo tiempo, aplicó el análisis de Vieta a problemas de lugares geométricos, inventando entonces la nueva geometría:

> Fermat compuso únicamente un cortísimo tratado sobre geometría analítica, al cual llamó *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge* ... es un trabajo dedicado a la línea, al círculo y a las secciones cónicas... Aquí, Fermat propuso someter la teoría de *locus* a un análisis apropiado a tales problemas, el cual podría, el aseguraba, abrir la vía para un estudio general de problemas de locus .... Sin más introducción, establece en un lenguaje claro y preciso el principio fundamental de la geometría analítica:
>
> > "Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar geométrico, cuya extremidad describe una línea, recta o curva." (Fermat, *Ad Locus Planos et...* ; citado por Boyer, pág.75)

Antes de continuar con la exposición que sobre la obra de Fermat realiza Boyer, en el capítulo cinco de su *History of Analytic Geometry*, parece conveniente que quede claro el significado de los lugares geométricos. Es decir que vamos a tratar de responder a la cuestión: ¿en qué consiste un problema de lugar geométrico?

En el tiempo en que Descartes realiza su *Géométrie* , los matemáticos de la época estaban ocupados en recuperar la matemática griega, más que nunca tenían vigencia los procedimientos y nociones matemáticas de los griegos, en particular, de acuerdo a Boyer, para los griegos una ecuación originada de un problema geométrico representaba una igualdad de líneas, áreas o volúmenes, y entonces la solución de ecuaciones cuadráticas era una especie de traslación de los métodos babilónicos al lenguaje de las construcciones geométricas, como veremos enseguida, después de presentar algunos de los logros de los babilonios.

En esta revisión de antecedentes aparece claro, desde nuestro punto de vista, que una característica que identifica al álgebra, o que es propio a su naturaleza es el establecimiento de vínculos con distintos Sistemas Matemáticos de Signos -a saber, con el aritmético y con el geométrico. Esta *analiticidad algebraica* dota de sentido a los signos algebraicos, junto con la operatividad que les es reconocida.

Por ejemplo, actualmente hablamos de nociones o procedimientos algebraicos como de aquellos involucrados en la generalización de relaciones o patrones numéricos, y en la realización de procedimientos algorítmicos generales, es decir que son válidos para cualesquiera objetos matemáticos dados. Así, podemos ver que en el texto de Kline (1972) el autor se refiere a un *álgebra de los babilonios* en el siguiente sentido:

"Un problema fundamental de la vieja álgebra babilónica fue el de preguntar por un número, el cual añadido a su reciproco es igual a un número dado... De hecho, los babilonios tenían las fórmulas cuadráticas". (Kline, 1972, pág.8 y 9)

También, en relación del vinculo del álgebra con la geometría en esta época, Kline establece que los babilonios planteaban y resolvían problemas algebraicos de manera verbal, anclados en significados geométricos para lo que actualmente serían variables algebraicas:

"(Los babilonios) frecuentemente usaban las palabras *us* (longitud), *sag* (anchura), y *asa* (área) para las desconocidas, no porque las desconocidas necesariamente representaran a estas cantidades geométricas, sino probablemente porque muchos problemas algebraicos vienen o se derivan de situaciones geométricas y la terminología geométrica llega a ser estándar. Una ilustración de la manera en que los términos eran empleados es la siguiente: *He multiplicado longitud y anchura y el área es diez. He multiplicado la longitud por sí misma y he obtenido un área. el exceso de la longitud sobre la anchura la he multiplicado por sí misma y a este resultado por nueve. Y esta área es el área obtenida por la multiplicación de la longitud por sí misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura?*
Aquí es obvio que las palabras *longitud, anchura y área* son términos meramente convenientes para las desconocidas y su producto, respectivamente" (Kline, 1972, pág.9)

Con respecto al último problema planteado, Kline advierte que su solución conduce incidentalmente a una ecuación de cuarto grado con una desconocida en dónde los términos de primer y tercer grado no aparecen, de manera que tal ecuación puede ser resuelta como una simple cuadrática.

Por otro lado, de acuerdo a Boyer, los griegos fueron conducidos por Zenon e Hipasus a abandonar la búsqueda de una aritmetización completa de la geometría, ello tal vez debido al descubrimiento de los inconmensurables; y tal trayectoria no fue retomada hasta que la geometría analítica hubo alcanzado madurez señalando más vías al respecto. Así, en toda la historia griega no hubo algo parecido al análisis algebraico.

Para los griegos, la geometría fue el dominio de las magnitudes continuas, la aritmética estuvo relacionada con el conjunto discreto de los enteros; y los dos campos fueron irreconciliables. Longitud, área y volúmen no eran números asociados a una configuración dada, eran conceptos geométricos no definidos. Es decir que, por ejemplo, los griegos hablaban de longitud, de área o de volúmen sin pensar en su medida como en números específicos. Los griegos pensaban en tales conceptos a través de relaciones, de comparación entre ellos. Los matemáticos griegos, por ejemplo, siempre consideraban la razón de dos líneas en lugar de la longitud de una.

En contraste con el álgebra analítica de Descartes, "el álgebra griega" llamaba más a construcciones geométricas que a la determinación de números. Por ejemplo, en el problema de la cuadratura del círculo, los griegos buscaban más construir un cuadrado que determinar un número.

Así, por ejemplo, el "álgebra" griega fue una geometría de líneas en lugar de un algoritmo de números; y los problemas clásicos llamaban a la construcción de líneas - para su validación, como siendo tales construcciones los términos de una demostración; una especie de equivalente a los modernos teoremas de existencia en análisis- para las cuales ellos no tenían fórmulas algebraicas independientes.

Pasemos a ver un ejemplo del tratamiento griego de las ecuaciones cuadráticas. Recordemos que mil años antes, los babilonios redujeron problemas geométricos de medida a ecuaciones cuadráticas y entonces resolvían éstas numéricamente.

Tal vez, implícitamente usaban un simbolismo algebraico que en mucho seria como el de ahora, pues, de acuerdo a Kline, los babilonios reducían mediante transformaciones problemas más complicados que los que arriba hemos mencionado, a otros más simples (Kline, 1972, pág.9).

Sin embargo, a los geómetras griegos nos se les facilitó la transición de un campo al otro. Para ellos una ecuación originada de un problema geométrico representaba una igualdad de líneas, áreas o volúmenes, y entonces la resolución de ecuaciones cuadráticas era una especie de traslación de los métodos babilonianos al lenguaje de las construcciones geométricas. El método por el cual esto era realizado, conocido como la aplicación de áreas, está dado sistemáticamente en Euclides pero bien puede venir de los pitagóricos.

Con respecto a la aplicación de áreas, un área se dice que es aplicada a una línea recta (un segmento) cuando se describe una área dada sobre esta línea como base, o más generalmente, cuando un lado del área se piensa como subyaciendo a lo largo de la línea, aún si el lado excede a la línea o si es más corto que ella. En su forma simple la aplicación de áreas significa encontrar la línea que, junto con una línea dada, determine un rectángulo de área dada, es decir que esto corresponde a la división de un producto dado por uno de sus factores. En forma general esto significaba un álgebra de factorización, usada en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Como una ilustración de su uso, supóngase que se requiere resolver $\mathbf{x^2 + c^2 = bx}$ (en donde todos los términos son positivos y $\mathbf{b>2c}$).

En la terminología griega, se requiere aplicar a un segmento **b** de una línea recta un rectángulo igual a un cuadrado dado $\mathbf{c^2}$, y a disminuir al rectángulo, al final del segmento, por una figura cuadrada.

Dibuje **AB** igual a **b** , y sea éste bisectado en el punto **H** (ver figuras 1 y 2) . Dibuje **HO** igual a **c** perpendicular a **AB** . Con **O** como centro y **b/2** como radio dibuje un arco que corte a **AB** en **D** . Entonces **BD = x** es la línea requerida. (**APQD** es el rectángulo aplicado al segmento **b** , y **DBRQ** es el cuadrado por el cual **APQD** queda disminuido al final del segmento).

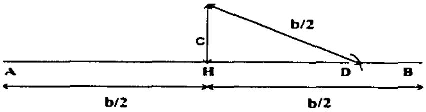


Fig.1

En efecto, pues por la construcción realizada, tenemos lo siguiente:

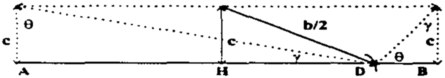


Fig.2

OG = OF = HB = b/2 ; GB = c y dado que el triángulo **BGD** es equivalente al triángulo **ADF** pues todos sus ángulos coinciden (ya que el ángulo **FDG** es recto por subtender al diámetro **FG**), tenemos que la **x** construida es tal que

$$x : c = c : (b-x)\text{ . Es decir que } \quad xb - x^2 = c^2 \quad \text{i.e.} \quad xb = c^2 + x^2 \text{ .}$$

Por procedimientos similares las ecuaciones $x^2 + bx = c^2$ y $x^2 = bx + c^2$ (las únicas otras cuadráticas con raíces positivas) eran resueltas geométricamente.

Tales soluciones muestran que el "álgebra" griega, distinta de la aritmética y de otros cuerpos organizados de conocimiento de los griegos, estaba totalmente dependiente de la geometría. Probablemente una de las razones claves por las que Grecia no desarrolló una geometría algebráica es que ellos estaban limitados por un álgebra geométrica.

Generación de nuevos lugares geométricos

La historia de las matemáticas y en particular la de la geometría analítica ha estado muy influenciada por la búsqueda de soluciones a los tres problemas clásicos griegos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, y la trisección del ángulo); el hecho de que estos fuesen insolubles bajo las restricciones clásicas motivó la búsqueda y el descubrimiento de otras curvas.

Según Boyer, tal búsqueda tiene que ver con la historia de la geometría analítica porque la construcción de nuevos lugares geométricos surgió directamente de estas cuestiones. Ese es el caso, por ejemplo, de la cuadratriz de Hippias, ya presentada en el capítulo 1.

Nótese, sin embargo, dada la poca cantidad de curvas definidas cinemáticamente a principios del siglo XVII, que tal punto de vista dinámico para la definición y/o construcción de curvas parece no haber sido apreciado previamente. Además, en tanto no había aparatos para describir una curva por movimiento continuo, una construcción puntual era necesaria, aún cuando el lenguaje de la definición fuese cinemático. Así, la distinción entre curvas definidas geométricamente y aquellas descritas mecánicamente por un movimiento continuo fue rediscutida seriamente hasta el siglo XVII. (Boyer, pág.12)

En este sentido, es importante señalar que una de las intenciones del trabajo que emprende Descartes, de acuerdo a los argumentos que al respecto esgrime Bos (1981), es la de dar o proporcionar un orden al trabajo geométrico hasta entonces realizado. Precisamente, Descartes viene a identificar las curvas geométricas con las curvas descritas por una ecuación algebraica.

Antecedentes analíticos en la geometría griega

De entre los tres famosos problemas griegos de geometría, la duplicación del cubo fue uno de los que jugaron un papel más importante como antecedentes en el desarrollo de la geometría analítica.

Según Boyer, después de inútiles esfuerzos para duplicar el cubo de acuerdo a las reglas establecidas (con regla y compás), los griegos dirigieron sus esfuerzos hacia otros artificios. Así, Hipócrates de Quios avanzando en la resolución de este problema mostró que si dos medias proporcionales x y y pueden ser determinadas de tal manera que satisfagan la proporción continua $a : x = x : y = y : 2a$, entonces la proporcional x será el lado del cubo deseado -i.e., ésta satisfará la ecuación $x^3 = 2a^3$.

Ello es claro ya que de dicha proporción obtenemos las ecuaciones $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, y $xy = 2a^2$. Lo que en la actual geometria de coordenadas determina el punto de intersección de dos parábolas o de una parábola y una hipérbola.

En aquel entonces, el problema apelaba a la construcción, a través de métodos geométricos de tal proporcional.

Arquitas, un escolástico pitagórico (~428-347 A.C.), fue famoso por haber determinado la media requerida (Boyer,pág.13) a través de una construcción remarcable que apelaba a la intersección de tres superficies de revolución: un cono, un cilindro, y un toro. Nótese que en aquellos días las superficies no estaban definidas por ecuaciones sino por la revolución de curvas conocidas, tales como la recta y el circulo.

Por otro lado, también es reportado por Proclo y Eudoxio que la elipse, hipérbola, y parábola fueron descubiertas por Menecma (Menaechmus) hacia la mitad de la cuarta centuria antes de nuestra era. (Boyer,pág.17)

Menecma parece haber llegado a ello siguiendo la trayectoria que Arquitas había sugerido -esto es, pensó en resolver el problema Deliano (de la duplicación del cubo) a través de considerar las secciones de sólidos geométricos. Por medio de las secciones cónicas se puede duplicar el cubo, ya sea a través de la determinación de la intersección de dos parábolas (como antes hemos mencionado, $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$), o a través de la intersección de una de ellas con una hipérbola ($xy = 2a^2$). Sin embargo, la designación de los griegos adoptada invariablemente para problemas y lugares geométricos determinados por las secciones cónicas -problemas y lugares geométricos sólidos, distinguidos de los problemas y lugares geométricos planos, los cuales son construidos por líneas y círculos- parece puntualizar un origen tridimensional de las cónicas como el que aquí se ha sugerido. (Boyer, pág.18)

Más que la fuente original de las cónicas -planimétrica o estereométrica- la parte sorprendente del descubrimiento de Menecma no son las curvas en sí mismas sino el hecho de que aparentemente él fue capaz de ir de uno de los aspectos de éstas hacia otros. Las secciones de conos demostraron tener propiedades fundamentales como lugares geométricos planos; y de estas "ecuaciones geométricas" básicas otras propiedades planas de las curvas fueron deducidas. (Boyer, pág.19)

Es una lástima que los trabajos de Menecma se hayan perdido, de tal manera que las reconstrucciones de su trabajo son en gran medida conjeturas. (Boyer, pág.20)

Debe ser puntualizado, sin embargo, que aunque Menecma estudió las cónicas más o menos analíticamente, bajo las limitaciones impuestas por el carácter geométrico del álgebra griega, no existen indicios, ya sea en el trabajo de

Menecma, o en trabajos posteriores de la antigüedad, de una geometría analítica general.

Valga decir, a fin de precisar los términos que aquí se están manejando que "la esencia de la geometría analítica es el estudio de lugares geométricos por medio de sus ecuaciones" (Coolidge, *History of Geometric Methods*, p.117-119).

Casi dos mil años después de la geometría de Menecma, Descartes emprendió el dar un orden a las curvas planas superiores, inventando así la geometría analítica en un sentido más general que lo realizado al respecto hasta entonces. (Boyer, pág.20)

Para llevar a cabo su programa, Descartes encontró necesario substituir la teoría de proporciones y la aplicación de áreas por un álgebra simbólica de la cual los griegos no desarrollaron ni los rudimentos.

Ad Locus Planos et Solidos Isagoge

De acuerdo a Boyer, la breve frase de Fermat que aparece en su introducción a *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge* (la que nosotros reprodujimos al inicio de este capítulo), representa una de las más significantes afirmaciones en la historia de las matemáticas, pues se introduce no únicamente la geometría analítica sino también la inmensamente útil idea de una variable algebraica.

Recuérdese que las vocales en la terminología de Vieta siempre habían representado incógnitas, magnitudes siempre fijas o determinadas; es decir que las ecuaciones viéticas involucraban constantes dadas y una incógita. De manera que el punto de vista de Fermat le dió significado a las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas.

En los trabajos griegos antiguos, ciertas líneas asociadas con una curva dada habían jugado un rol equivalente al de un sistema de coordenadas, y las propiedades de la curva habían sido expresadas en términos de estas líneas por medio de un álgebra retórica. Históricamente, la curva llegó primero (Boyer, pág.75), las líneas fueron entonces sobrepuestas a ella, y finalmente la descripción verbal (o la ecuación algebraica) fue derivada a partir de las propiedades geométricas de la curva.

Por ejemplo, en su tratado sobre las secciones cónicas, Apolonio usa cuerdas a las curvas dadas, para referirse a propiedades distintivas entre ellas (ver Kline, 1972, pp. 90-96).

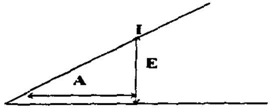
De acuerdo a Boyer, el genio de Fermat hizo posible la situación inversa: comenzando con una ecuación algebraica, él mostró cómo esta ecuación podia considerarse que definía un lugar geométrico de puntos con respecto a un sistema dado de coordenadas.

Como puede ser apreciado en los libros de Apolonio sobre las secciones cónicas, Fermat no inventó un sistema de referencia a base de ordenadas, y tampoco fue el primero en usar representación gráfica. Sin embargo, pareciera no haber una apreciación antes de los tiempos de Fermat y Descartes del hecho de que, en general, una ecuación en dos cantidades desconocidas determina, en sí, una única curva geométrica. El reconocimiento de este principio, junto con su uso como un procedimiento algorítmico formalizado, constituyó la contribución decisiva de estos dos hombres.

Según Boyer, el razonamiento analítico había sido largamente usado en matemáticas, y la aplicación del álgebra a la geometría había llegado a ser un lugar común, sin embargo, antes de Fermat y Descartes no se reconocía que en general, una ecuación algebraica dada en dos desconocidas determinara, *per se* , una única curva geométrica.

Así, por ejemplo, en el trabajo de Vieta *Arte Analítico*, el autor muestra el juego existente entre identidades algebraicas complejas y correspondientes construcciones geométricas.

Ni Fermat ni Descartes usaron el término "sistema de coordenadas" o la idea de dos ejes. Fermat eligió una línea conveniente para jugar el papel de eje x moderno, y un punto sobre ella -o extremidad como Fermat le llamó- fue tomado como equivalente a lo que posteriormente llegó a ser el origen. Para una ecuación dada en A y en E (lo que correspondería a nuestras actuales x y y), valores de A fueron medidos a lo largo de esta línea desde un punto fijo. Correspondientes valores de E fueron entonces levantados como segmentos de línea (más tarde conocidos como ordenadas) formando un ángulo fijo con la línea de base. Fermat indicó que este ángulo fuera tomado regularmente como recto, aunque en algunos casos una línea equivalente al eje y aparece, la absisa, o cantidad A no es interpretada como una línea dibujada desde el punto en cuestión a tal eje de ordenadas (ver fig.3).



- Fig.3 -

El esquema de Fermat, al igual que el de Descartes, puede ser caracterizado como una geometria de ordenadas -más que de coordenadas. Más aún, Fermat restringió sus operaciones a lo que ahora sería llamado el primer cuadrante. Veremos que en este aspecto Descartes fué algo más allá que Fermat.

La geometría analítica de Fermat es sorprendentemente sistemática para una materia recientemente descubierta. Comienza con la división clásica de lugar geométrico en tres tipos -planos, sólidos, y lineales- y sigue con una afirmación importante de que si las potencias de los términos en una ecuación dada no exceden el cuadrado, entonces el lugar geométrico es plano o sólido (plano o sólido, en el sentido que enseguida se explica). Esta afirmación constituye el tema central de su trabajo. Fermat la justifica por detallada consideración de casos de ecuaciones, tomadas en orden. Como más adelante veremos, Fermat comienza con una ecuación lineal en la terminología de Vieta. (Boyer, p.76)

En este punto, quisiéramos hacer notar que es con Fermat que aparecen las rectas consideradas como lugar geométrico. Antes que Fermat, nadie, ni los griegos, se había ocupado de las rectas en tanto que lugares geométricos. Tal vez este hecho obedece al proceso de sistematización llevado a cabo por Fermat, pues en el enfoque analítico de Descartes las rectas no son explícitamente consideradas.

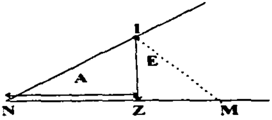
Luego, la clasificación de Fermat de los lugares geométricos en tres tipos: planos, sólidos y lineales, es completamente innovadora. Las dos primeras categorías (planos y sólidos) puede ser que obedezcan al modo de construcción o de reconocimiento de dichos loci, es decir ya sea que se construyen con regla y compás -de ahí el adjetivo "planos" - ya sea que se obtienen a partir de ciertos cortes en el cono -de ahí el adjetivo "sólidos"-.

Sin embargo, ateniéndose a un artificio de construcción de los objetos geométricos considerados, resultarían únicamente dos categorías puesto que las rectas -los "lugares geométricos lineales"- estarían contenidas en la clasificación de "planas". Esta consideración es coherente con la afirmación de Fermat de que si las potencias de los términos en la ecuación no exceden el cuadrado, entonces el lugar geométrico es plano o es sólido. Es decir que de los artificios de construcción, únicamente se derivan dos categorías, como aquí argumentamos.

Asimismo, Boyer hace notar, en un pie de página, que es sorprendente que Fermat haya retenido esta clasificación antigua de lugares geométricos planos y sólidos, enfrentado a la clasificación por grados de las ecuaciones que su propio trabajo le sugería.

Bosquejo del trabajo de Fermat en el Isagoge

Fermat comienza con la ecuación "**D in A aequetur B in E**" (lo que es equivalente en términos actuales a $\mathbf{Dx = By}$, con **D** y **B** constantes dadas), señalando que el lugar geométrico correspondiente es una recta. Similarmente (por medio de un triángulo en un diagrama, ver figura siguiente), muestra que la ecuación más general, equivalente a $\mathbf{dx + by = c^2}$, corresponde también a una recta. Fermat establece que, sin ninguna dificultad, puede ser mostrado que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas.



- Fig.4 -

De acuerdo a Fermat, la línea **MI** es la que corresponde a la ecuación $\mathbf{Dx+By=c^2}$ ya que $\mathbf{MZ = c^2/D - A}$.

Enseguida, pasa por una proposición (la cual no es demostrada), en que identifica con una recta al lugar geomé:rico de un punto desde el cual la suma de los segmentos trazados con ángulos dados a un número también dado de rectas fijas, es constante.

Tal proposición, podría derivarse del hecho de que los segmentos son funciones lineales de las coordenadas del punto; y de la proposición de toda ecuación de primer grado representa una línea recta. (Boyer, pág.77)

Con respecto a las ecuaciones de segundo grado, Fermat realiza lo siguiente:

- demuestra que "**A in E aequetur Z pl.**" (lo que es equivalente en términos actuales a $\mathbf{xy = (cte)^2}$) es una hipérbola;

- añade que cualquier ecuación de la forma $\mathbf{d^2 + xy = rx + sy}$ puede ser reducida al caso anterior de la hipérbola;

- considera ecuaciones que involucran cuadrados de las cantidades desconocidas, comenzando con $\mathbf{x^2 = y^2}$. Esta y otras ecuaciones cuadráticas homogéneas en **x** y **y** -tales como aquellas en las cuales $\mathbf{A^2}$ o la cantidad $\mathbf{A^2 + AE}$ es a $\mathbf{E^2}$ en una razón dada- él las interpreta como líneas rectas singulares, pues no considera coordenadas negativas;

- demuestra que $x^2 = dy$ y $y^2 = dx$ (y las formas más generales $b^2 \pm x^2 = dy$) son parábolas;

- demuestra que $x^2 + y^2 + 2dx + 2ry = b^2$ es un círculo;

Después de tal demostración, Fermat agrega que sobre la base de este último hecho ha reconstruido todas las proposiciones del segundo libro de Apolonio sobre lugares geométricos planos.

Según Boyer, esta última observación de Fermat tiende a confirmar la suposición de que éste fue conducido a la geometría analítica a través del estudio de lugares geométricos más que a través de una búsqueda de soluciones geométricas para ecuaciones algebraicas, como se sitúa el caso de Descartes.

Después de abordar los casos de elipses e hipérbolas, Fermat llegó al punto culminante de su tratado al afirmar lo siguiente:

> Dado cualquier número de líneas fijas, el lugar geométrico de un punto, desde el cual la suma de los cuadrados de los segmentos dibujados en ángulos dados desde el punto a las líneas es constante, es un lugar geométrico sólido.

De acuerdo a Boyer, este punto culminante del *Isagoge* consiste en asociar la ecuación cuadrática en dos variables al problema de Pappus.

La introducción de Fermat a los lugares geométricos fue seguida de un apéndice sobre *La Solución de Problemas Sólidos por medio de Lugares Geométricos* . Este trabajo representa una continuación del trabajo de Menecma, Arquímedes, Omar Khayyam, y Vieta sobre las soluciones geométricas de ecuaciones cúbicas y cuárticas. La aportación de este trabajo consiste en la interpretación de cuestiones de eliminación algebraica, en términos de intersecciones de lugares geométricos, haciendo uso de su nuevo principio de que cualquier ecuación algebraica en dos incógnitas es un lugar plano o sólido. En este trabajo, la sistematicidad operada por Fermat en su trabajo anterior se ve ahora reeplazada por el despliegue de una serie de construcciones geométricas ingeniosas. Al respecto, Fermat puntualiza que los métodos de Vieta ahí involucrados no eran necesarios. (Boyer, pág.78)

En dicho apéndice, Fermat aplica tal método para mostrar que todos los problemas con cúbicas y cuárticas pueden ser construidos por medio de una parábola y de un círculo. Como ejemplo, Fermat resuelve la ecuación $x^4 - z^3 = d^4$ (ó **Aqq. - Zs. in aequetur Dpp.**, en la terminología de Vieta) a través de la intersección de la parábola $\sqrt{2} = x^2 - b^2$ y el círculo $2b^2x^2 + 2b^2 y^2 = z^3x + b^4 + d^4$.

Según Boyer, el método se extiende fácilmente a otros casos. Fermat añade una observación importante al final del apéndice. "Quien haya puesto atención a lo precedente no intentará reducir a problemas planos ... la trisección del ángulo y otros problemas parecidos" . Es decir que la imposibilidad de este problema antiguo llegó a ser aparente para Fermat a través del estudio analítico de los lugares geométricos. (Boyer, 1956, pág. 79)

De acuerdo a Boyer, el *Isagoge* de Fermat constituye una excelente introducción a la geometría analítica de las secciones cónicas como gráficas de ecuaciones de segundo grado.

Nótese que el enfoque actual de enseñanza de la geometría analítica se apega más a lo realizado por Fermat que al trabajo correspondiente de Descartes. Tal vez constituya un ejemplo de transposición[2] didáctica, en el sentido de que es probable que las tendencias formalistas para la enseñanza de las matemáticas de épocas posteriores hayan visto más factible usar el material desarrollado por Fermat que el de Descartes para una introducción a la geometría analítica, por la sistematización del tratamiento que la obra de Fermat presentaba.

Por otro lado, tal parece que la mayor contribución de Fermat a la revelación de nuevas curvas no se encuentra en su trabajo sobre lugares geométricos , sino en las aplicaciones de métodos analíticos a la geometría infinitesimal, materia en la cual Fermat anticipó muy de cerca a Newton y a Leibniz. (Boyer, 1956, pág.79)

De tal manera que Fermat no únicamente fue uno de los inventores de la geometría de coordenadas, sino que condujo la aplicación de los nuevos métodos a problemas de pendiente y de medidas curvilineales. (Boyer, 1956, pág.81)

Así, tal vez la herencia de más valía que haya dejado Fermat, desde un punto de vista heurístico, sea aquella que tiene que ver con un momento posterior a la generación del método analítico algebraico, a saber, sus aplicaciones al cálculo de tangentes y de máximos y mínimos.

Para ver un desarrollo del trabajo de Fermat al respecto, se puede acudir al texto de Edwards (1979, pp.122-125) sobre el desarrollo conceptual del cálculo infinitesimal,.

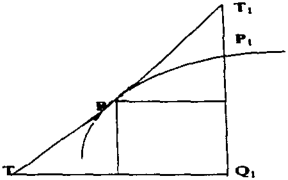
Para finalizar este bosquejo de la obra de Fermat en torno de la geometría analítica, Boyer agrega que introdujo las curvas sobre las que inicialmente se practicaron los métodos del cálculo. Fermat es recordado por la introducción de la familia de curvas $y = x^{\pm n}$ desde entonces conocidas por "parábolas e hipérbolas de Fermat" . También proporcionó un método de cálculo de tangentes, siendo precursor de la

[2] Cf. Chevallard, Y. *La transposition Didactique*, PUF, Francia.

diferenciación. Dicho trabajo se encuentra en su *Methodus Disquirendam Maximam et Minimam*, un tratado compuesto años después del *Isagoge* .

Ahí, siguiendo su interpretación previa de **A** y de **E** como variables algebraicas, Fermat retuvo la letra **A** para la variable independiente y usó a la **E** para el incremento de **A**. Su procedimiento para el cálculo de tangentes consistió esencialmente en formar, para una curva dada o función, f(**A**) , el cociente de diferencias [f(**A** + **E**) - f(**A**)] / **E** y entonces encontrar el límite de esto cuando **E** tiende hacia cero. Ni la notación funcional, ni la idea o el concepto de límite fue usado, pero la técnica fue virtualmente la misma, como se puede apreciar en la siguiente exposición del asunto que hace Kline:

> "Sea **PT** la tangente deseada en **P**, un punto sobre la curva (ver figura siguiente). La longitud **TQ** es llamada la subtangente. El plan de Fermat consistía en encontrar la longitud de **TQ**, desde la cual uno conoce la posición de **T** y puede entonces dibujar **TP**:



Sea QQ_1 un incremento de **TQ** de tamaño **E**. Dado que el triángulo **TQP** es similar al triángulo PRT_1,

$$TQ:PQ = E:T_1R \ .$$

Pero, según Fermat, T_1R es casi P_1R; por lo tanto,

$$TQ:PQ = E:(P_1Q_1 - QP) \ .$$

Llamando **f(x)** a **PQ** en nuestra notación moderna, tenemos

$$TQ:f(x) = E : [f(x + E) - f(x)] \ .$$

Entonces

$$TQ = E \cdot f(x) / [f(x + E) - f(x)]$$

> Por el tipo de funciones $f(x)$ consideradas por Fermat, era inmediatamente posible dividir el numerador y el denominador de la fracción anterior entre E. Fermat ponia entonces $E = 0$ (en realidad, él decía, quitar el término E) y así obtenía TQ." (Kline, 1972, pág.345)

Este método de Fermat es de marcada importancia, porque representó la primera de las reglas algorítmicas formuladas analíticamente, las cuales al final convirtieron a la geometría infinitesimal en el análisis infinitesimal.

Además, Fermat encontró también, por medios analíticos, las cuadraturas de las parábolas y las hipérbolas de alto orden.

De acuerdo a Boyer, en un corto tratado posterior (de menor importancia), *Isagoge ad Locos ad Superficiem* , Fermat llevó el problema de lugares geométricos a tres dimensiones, pero desafortunadamente ahí no hizo uso del método analítico.

Finalmente, puede decirse que la obra de Fermat *Maxima y Minima* creó una profunda impresión, especialmente como aplicación a la determinación de tangentes; pero la *Introductio to Loci* parece haber sido obscurecida por el trabajo de Descartes. Por ejemplo, partes del *Maxima y Minima* prontamente fueron incluidas en libros publicados por otros matemáticos, sin embargo el *Isagoge* apareció impreso por primera vez en la *Opera Varia* de Fermat en 1679, cuarenta años después de la muerte de su autor; cuarenta y dos años después de la publicación de la *Géométrie* de Descartes, y medio siglo después de que el tratado había sido compuesto. Por ese tiempo ya otros desarrollos en el campo habían sobrepasado los pasos simples dados por Fermat, y la publicación fue en gran medida sólo de interés histórico. En cuestión de notación, puede decirse que la que se adoptó fue la de Descartes , cuya influencia dominó la época. (Boyer, pág.82)

Capítulo 3

La geometría cartesiana es ahora sinónimo de la geometría analítica, pero el propósito fundamental de Descartes ha sido con mucho removido de los textos modernos sobre el tema. (Boyer, pág.83)

Diferencias entre el trabajo de Fermat y Descartes en torno de la construcción de la geometría analítica

En el capítulo anterior, hemos hecho una breve revisión del trabajo de Boyer en *History of Analytic Geometry*, en lo que a Fermat se refiere. En este capítulo 3 presentaremos las apreciaciones de este autor sobre las aportaciones de Descartes a la geometría analítica para terminar tal revisión con un cuadro de diferencias entre los dos autores de la geometría analítica.

Presentamos primero la interpretación de Boyer sobre la obra de Descartes, lo cual, junto con lo que se ha expuesto en los capítulos 1 y 2, nos conduce a la sustentación de una serie de diferencias entre las obras de Fermat y Descartes en torno de la construcción de la geometría analítica.

***La Géométrie* de Descartes, de acuerdo a Boyer**

En este apartado, haremos una exposición de la interpretación de Boyer sobre La Géométrie de Descartes. Como es nuestra costumbre, indicaremos entre paréntesis el lugar de tales apreciaciones en la obra de Boyer de referencia.

El origen de la geometría analítica en la mente de Descartes, es indicado en una carta que él escribió a Isaac Beeckmann en 1628. Ahí, Descartes da la regla para construir todas las cúbicas y las cuárticas por medio de una parábola. Su esfuerzo para dar significado geométrico a las soluciones de las ecuaciones algebraicas hace que su desarrollo del tema sea una continuación directa del trabajo de Vieta (Boyer, pág.82-83).

El procedimiento de Descartes fue predominantemente algebraico pero su significado fue puramente geométrico. El objetivo de Descartes fue el de Vieta y de los geómetras de la antigüedad clásica; el método fue esencialmente novedoso, pues hizo uso de la representación gráfica de las ecuaciones indeterminadas.

Descartes no tomó parte del movimiento contemporáneo para restaurar los trabajos de Apolonio. En lugar de eso él escribió y publicó un trabajo que condujo al virtual abandono de la geometría sintética por casi dos centurias. (Boyer, pág.83)

La geometría cartesiana es ahora sinónimo de la geometría analítica, pero el propósito fundamental de Descartes ha sido con mucho removido de los textos modernos sobre el tema. (Boyer, pág.83)

Por otro lado, la contribución de Descartes de asociar a la geometría un álgebra puramente simbólica marca un avance decisivo sobre cualquier trabajo anterior, pues así promovió el desarrollo de técnicas algebraicas independendientemente de la visualización geométrica. (Boyer, pág.84)

De acuerdo a Coolidge[1], Descartes avanzó un paso enorme aritmetizando su geometría. Los objetos con los que él trató fueron números. Descartes se liberó a sí mismo completamente de la superstición de la homogeneidad[2].

Esto proporcionó mayor libertad operacional a la técnica algebraica, y facilitó la asociación implícita del sistema de números reales con los puntos de la línea;pero no modificó seriamente el primer desarrollo de la geometría analítica.

[1] Coolidge, 1936, "The origin of Analytic Geometry", *Osiris*, v. I, p.242, citado por Boyer en pág.84

[2] Vieta es quien introduce el uso de ecuaciones en matemáticas, estableciendo un balanceo o homogeneidad en los términos de las ecuaciones. (Cf. Vieta, *Arte Analítica*)

Fermat desestimó la ventaja práctica de ganar en facilidad mecánica abandonando la manera homogenea de expresión y haciendo un álgebra completamente simbólica:

Fermat designó las cantidades desconocidas por vocales, como hizo Vieta, "porque no veo por qué Descartes hace un cambio en algo que es sin importancia y el cual es puramente materia de convención" (Fermat, Oeuvres, v. I, p.20, citado en Boyer, pág.85)

Las construcciones geométricas de raíces de ecuaciones, la meta de la geometria de Descartes, ilustran el hecho de que su objetivo era dos mil años viejo: la búsqueda de construcciones geométricas de problemas clásicos.

Esto ilustra, la importancia que para Descartes tuvieron los problemas clásicos de construcción, pero también su revisión y construcción de métodos nuevos de solución.

Es en el Libro II de Descartes "Sobre la Naturaleza de las Líneas Curvas", que uno encuentra el aspecto más moderno de su trabajo. Sin embargo, Descartes expresamente indicó que este libro fue escrito como un necesario preliminar al Libro III. (Boyer, pág. 86)

Con respecto a la introducción de coordenadas por Descartes, éstas no fueron usadas de la misma manera que las usó Oresme, para representar las propiedades de figuras o funciones. Descartes usó las coordenadas como parte de un método ideado para la solución de problemas de geometría.

El interés de Descartes no estaba en el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación dada, sino en la constructibilidad de estos puntos, pensando en ellos como soluciones de determinada ecuación algebraica, a la manera de Vieta. Es probable que tal constructibilidad tuviese el mismo estado que las actuales pruebas de existencia en matemáticas.

Descartes impresionó mucho por la potencia de su método al tratar con el locus de tres y cuatro líneas de Pappus. Es en conección con este problema, aproximadamente a la mitad del "Libro I", las coordenadas entran en la *Géométrie*, es aquí que la geometria Cartesiana, en el sentido estrico de las palabras, aparece.

Sin embargo, el principio esencial de las ecuaciones indeterminadas en dos desconocidas correspondiendo a loci aparece por primera vez claramente en el "Libro II":

> para comprender en conjunto todas las (líneas curvas) que están en la naturaleza,... , no conozco nada mejor que decir que todos los puntos de las que se pueden designarse geometricas, es decir que admiten una medida precisa y exacta, tienen necesariamente una

relación ... que puede ser expresada por alguna ecuación, la misma para todos los puntos (Descartes, pag.77-78)

Para la solución de cualquiera de estos problemas de loci no hay nada más que encontrar un punto para cuya determinación completa se desea una condición. ... En todo caso puede ser obtenida una ecuación que contiene dos cantidades desconocidas. (Book II[3], p.334-335, citado por Boyer, pág.87)

Aquí, es pertinente aclarar lo que Descartes entendía por curvas admisibles en geometría, es decir, curvas geométricas:

(son) líneas que por compuestas que sean, mientras pueda imaginárselas descritas por un movimiento continuo, o por varios que se suceden, y en el que los últimos están enteramente regidos por los que le preceden; (Descartes, Libro II, pág.74-75)

Un poco más adelante, en un apartado que Descartes dedica a la especificación de "las líneas curvas que se trazan encontrando varios de sus puntos, que pueden ser admitidas en geometría", encontramos la vinculación entre curvas geométricas y las curvas descritas puntualmente:

esta manera de determinar una línea curva, encontrando indiferentemente varios de sus puntos, no se aplica más que a las que pueden también ser descritas por un movimiento regular y continuo,... (Descartes, pag.100-101)

En resumen, por un lado, vemos la potencia y el desbordamiento de los métodos algebraicos de que hace uso Descartes, los cuales buscan su sustentación en construcciones geométricas dinámicas. Y, por otro lado, vemos al trabajo de Fermat, en torno de la geometría analítica, como continuador del trabajo desarrollado por Apolonio en torno de los loci, usando un enfoque analítico-algebraico convencional (recuérdese que conserva incluso la notación de Vieta), aplicándolo a la descripción de una geometría estática de planos y sólidos.

[3] El Libro II a que hace referencia Boyer corresponde a la edición de la *Geometría* de Descartes siguiente: The geometry. Transl. by D.E. Smith and Marcia L. Latham, con un facsímil de la primera edición, 1637. Chicago and London, 1925.

Tabla de diferencias entre Fermat y Descartes

Fermat	Descartes
1. Sin mayor introducción, en *Ad locus planus et solidus isagoge* , enuncia la idea fundamental de la geometría analítica para el caso de rectas, círculos y cónicas. Se refiere en especial al vínculo ecs. alg.→lugar geométrico ;	1. Introduce el vínculo locus → ecs. algebraicas de manera general, a través de la resolución del problema de Pappus. (Descartes, *Géométrie*)
2.Restringe sus operaciones al primer cuadrante;	2. Su sistema de ordenadas es independiente del "signo" de éstas;
3. Enfoque sistemático de un nuevo tratamiento para lugares geométricos planos, sólidos y lineales;	3. Programa de reordenación de nociones y métodos geométricos de construcción. Conjetura que cualquier ecuación algebraica corresponde a un lugar geométrico de Pappus.
4. Fermat comienza su tratamiento con la ec. de la recta.	4. Descartes no considera como objeto de estudio a la recta;
5. Fermat conserva la terminología de Vieta para las ecuaciones (de homogenización), lo que tal vez lo constriñe a un "álgebra geométrica" de aplicación de areas;	5. Descartes rompe con el "álgebra geométrica", al establecer un tratamiento aritmético de las magnitudes geométricas, p.e., magnitud lineal x magnitud lineal = magnitud lineal.
6. El trabajo de Fermat donde aborda el vínculo entre ecuaciones algebraicas y curvas se limita a ecuaciones de segundo grado: "El trabajo de Fermat *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* consta de alrededor de una veitena de páginas dedicado a la línea, al círculo y a las secciones cónicas." (Boyer, 1956, pág.75)	6. La afirmación acerca del vínculo entre ecuaciones algebraicas y curvas planas se vislumbra mucho más general. En el Segundo Libro, Descartes avanza la afirmación de que cualquier ecuación en dos variables representa un lugar geométrico correspondiente a un problema de Pappus. Esta generalidad virtual es tal vez es uno de los puntos más importantes en que difieren los trabajos de Descartes y Fermat.
7. Difícil caracterizar el papel que juega la noción de movimiento en el trabajo de Fermat pues en su obra *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* únicamente menciona que su trabajo viene a generalizar lo que los antigüos habían hecho sobre *loci* .	7. Es muy importante el papel que juega la concepción de movimiento en el trabajo de Descartes, más importante que el lugar que ocupa dicha noción en el trabajo de Fermat (pág. 89 del Boyer).
8. Fermat restringió sus operaciones a lo que ahora sería llamado el primer cuadrante.(Boyer, 1956, pág.76)	8 Descartes fué algo más allá que Fermat al respecto. De hecho, en sus consideraciones de los valores de las magnitudes consideradas hace alusión a las distintas posibilidades de la posición que guardan los puntos entre sí.

9. En su trabajo *La Solución de Problemas Sólido por medio de Loci*, Fermat realiza construccio geométricas ingeniosas el lugar de los reeplazos sistematicos de operaciones algebraicas de su obra *Ad Locos Planos*...,Fermat puntualiza que los métodos de Vieta ahí ahi involucrados no eran necesarios. (Boyer, pág.78) Este uso analitico entre notación algebraica y grafica aparece en forma más decidida y resuelta en el trabajo de Fermat que en el Descartes.	9. Desde el punto de vista de Bos, Descartes mismo no aceptaba que la representación algebraica tuviese el mismo estatus que la geométrica. (Incluir referencia precisa del artículo de Bos).
10. En efecto, de acuerdo a Boyer, (Boyer, 1956, pág.79) la mayor contribución de Fermat a la revelación de nuevas curvas no se encuentra en su trabajo sobre *loci* , sino en las aplicaciones de métodos analíticos a la geometría infinitesimal (ver p.e. los métodos infinitesimales de Arquímedes) , en la cual el anticipó muy de cerca a Newton y a Leibniz.	10. Tal vez la mayor contribución de Descartes, la constituya que introduce herramientas generales (un uso analítico de las ecuaciones en dos variables), para dar un orden al estudio de lugares geométricos y ó de curvas.

Una conclusión desde un punto de vista de una didáctica del uso analítico de las ecuaciones en dos variables, es que los trabajos de Descartes (sobre el estudio de curvas) y de Fermat (sobre geometría infinitesimal), aparecen como ejes complementarios hacia una formación algebraico-analítica.

Así, uno de los aspectos del trabajo de Fermat que debiera rescatarse como apoyo para la enseñanza de la geometría analítica, es el que se refiere al ejercicio de construcciones geométricas en el afán de resolver problemas, en lugar de enfocar la enseñanza de este tema únicamente hacia una ejercitación sistemática de operaciones algebraicas.

Capítulo 4

Aunque el álgebra ocupaba una posición dominante en el programa de Descartes de 1637, fue la meta geométrica del trabajo la que determinó su estructura y proveyó la motivación.
(Bos, pág.331)

Acerca del uso de las ecuaciones algebraicas en *La Géométrie* de Descartes

En el Capítulo 3 establecimos que los trabajos de Descartes (sobre el estudio de curvas) y de Fermat (sobre geometría infinitesimal), aparecen complementándose como ejes para un desarrollo algebraico-analítico posterior.

En esta tesis no abordaremos la geometría infinitésimal de Fermat, tarea que posteriormente deberá completarse para un acercamiento analítico algebraico anterior al cálculo diferencial, el cual enfoque hacia aspectos didácticos que complementen la formación matemática obligatoria del nivel bachillerato.

Por otro lado, dado que aquí (ver capítulos 1 y 3) hemos hecho ver que la potencia y el desbordamiento de los métodos algebraicos de que hace uso Descartes buscan su sustentación en construcciones geométricas dinámicas, en este Capítulo 4 profundizaremos en el análisis de este aspecto de la geometría cartesiana a través del trabajo que sobre ella realiza Bos, H. J., en el artículo "On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*".

¿Qué tipo de problemas rodean al uso de ecuaciones algebraicas que despliega Descartes?

Comencemos por señalar que en el Capítulo V, "Fermat y Descartes" , del libro de Boyer, *History of Analytic Geometry* , se lee lo siguiente:

> El punteo de curvas, en la manera ahora acostumbrada, no fue parte de la geometría analítica cartesiana. Incluso los lugares geométricos de Papus no estaban bosquejados. Descartes conocía que una ecuación en dos desconocidas determina una curva, sin embargo, no parecía considerar a tal ecuación como una definición adecuada de la curva y se sentía constreñido a exhibir una construcción mecánica real, en cada caso.
>
> Se ha conjeturado que los antiguos griegos enfatizaban las construcciones a causa de que ellas les servían como teoremas de existencia. Uno está tentado a aplicar esta idea a Descartes y decir que él dudaba de la existencia de una curva como correspondiendo a una ecuación a menos que pudiera suministrar una construcción cinemática para ella.
> (Boyer, 1956, pág.88)

Desde un punto de vista didáctico, interesa señalar estas cuestiones de transición hacia usos del álgebra más avanzados. En particular, el párrafo anterior nos sugiere el papel que podrían jugar tales construcciones cinemáticas en el camino a la abstracción: el de validadoras a un cierto nivel concreto de una utilización representacional del simbolismo algebraico. En un sentido semiótico[1], tales trazados o construcciones cinemáticas, tendrían el papel de interpretantes para las ecuaciones algebraicas.

Desde el punto de vista de Boyer, Descartes deseaba una sistematización superior de la geometría de tal manera que no existieran limitaciones sobre el grado de dimensionalidad de un problema. De acuerdo a ello, en un sentido figurado, Descartes retoma la sugerencia de Vieta de añadir nuevos postulados a la geometría euclidiana, de tal manera que fuera posible una construcción sistemática de las raíces de ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, ya que hubiera

[1] En los términos de Peirce, algo llega a ser un signo, o un representamen, en relación a un objeto, en virtud de la posibilidad de que un interpretante sea producido, es decir, un evento singular, o una respuesta regular o habitual, la cual responde al representamen como significando un objeto (algo diferente de él mismo) en algun aspecto (cf. Whitson,1994, p.48)... El objeto es interpretado en algún aspecto, de acuerdo a Whitson, en el interpretante, no directamente, o inmediatamente, sino a través del representamen mediando... Este modelo de relaciones sígnicas triádico, continuamente productivo, puede acomodar relaciones entre los más diversos elementos aun dentro de una única tríada sígnica . (cf.Idem)

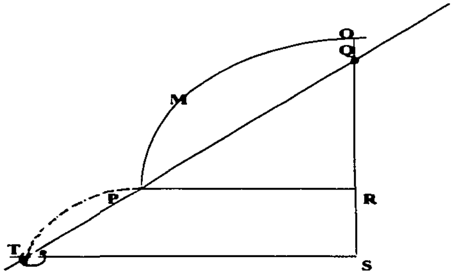
podido añadir a los postulados de Euclides la afirmación de que "dos o más curvas pueden ser movidas una sobre la otra, determinando por su intersección otras curvas." (Boyer, pág.88, ahí, Boyer ha citado lo entrecomillado del Libro II de Euclides, pág.316)

Es decir que, de acuerdo a Boyer, el concepto de movimiento juega un papel prominente en el trabajo de Descartes, más que en el de Fermat. (Boyer, pág.89)

Así, la designación "curva cartesiana" aún hoy es aplicada a los miembros de una familia usada por Descartes como una ilustración de la manera en la cual uno construye "el árbol genealógico o familiar" de una curva algebraica.

Método de Descartes de Generación de Familias de Curvas o Curvas Cartesianas

Para hacer la descripción de la construcción de una familia de curvas de Descartes, nos basaremos en el texto que Boyer (Boyer, 1956, pág.89-90), dedica al respecto. De acuerdo a este autor, la designación de *Curvas Cartesianas* aún hoy se aplica a los miembros de una familia usada por Descartes como una ilustración de la manera en la cual se construye un "árbol genealógico" de una curva algebraica. Sea **OM** una curva previamente construida, sea **O** un punto sobre ella y **Q** un punto que no lo está, ambos fijos con respecto a la curva:



Sea **S** un punto fijo sobre la línea **OQ** y sea **T** un punto fijo sobre la línea perpendicular a **OQ** en **S**. Sea **P** un punto de intersección de la curva con la línea **TQ**. Entonces, cuando la curva **OM** (y entonces también **Q**) se mueve con un movimiento rígido de traslación en una dirección paralela a **TS**, el punto **P** describirá una nueva curva **PT** la cual puede ser considerada como sucesora de la curva original. Si la curva dada **OM** es una línea recta, la nueva curva será una hipérbola; si es una parábola, la curva derivada será la parábola Cartesiana (o tridente) a la que antes nos hemos referido. Dicha parábola Cartesiana, es "la primera y la más simple para el problema de pappus, cuando no hay más que cinco líneas rectas dadas"[2] . Es decir que Descartes se está refiriendo a la curva de ecuación:

$$y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$$

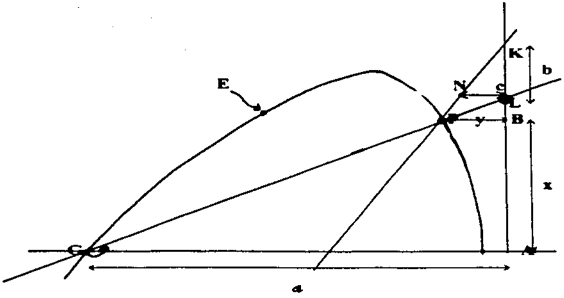
De acuerdo a Boyer, Descartes transformó esta jerarquía cinemática de curvas en una clasificación algebraica a través del principio de que "todos los puntos de una curva geométrica (cuando es definida por movimientos) deben tener una relación definida expresada por una ecuación"[3] .

Así, un ejemplo que desarrolla Descartes acerca de la generación de curvas, es el de la obtención de una hipérbola. Transcribimos a continuación el segmento de La Geometría donde Descartes ilustra el procedimiento original que sigue para obtener la ecuación de la curva "sucesora" ó generada:

> "Como si quisiera saber de qué genero es la línea **EP** que imagino descrita por la intersección de la regla **GL** y la pieza **PNKL**, cuyo lado **KN** está prolongado indefinidamente hacia **P**, y que moviéndose sobre el plano, en línea recta -es decir de tal manera que su lado **KL** se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea **BA** prolongada de uno y otro lado- hace mover circularmente la regla **GL** alrededor del punto **G**, por estar a ella vinculada de tal manera que pasa siempre por el punto **L**. Elijo una línea recta como **AB** para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva **EP** ; y en esta línea **AB** elijo un punto, como el **A**, para empezar por él el cálculo. Digo que elijo éste ó aquélla porque soy libre de tomarlos como quiera: pues aunque hay muchas maneras de elección para hacer la ecuación más corta y más fácil, siempre, cualquiera sea la manera como se los tome, puede hacerse que la línea aparezca de un mismo género, como es fácil de demostrar.

[2] Descartes, R. La Geometria , pág.81. También se puede ver aquí, en el Capítulo I.

[3] Descartes, R. La Geometría , pág.77



Despúes de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el **P** , sobre el cual supongo que el instrumento que sirve para describirla está aplicado, trazo por este punto **P** la línea **PB** paralela a la **GA**, y puesto que **PB** y **BA** son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las designo a la una y y a la otra x . Pero, para encontrar la relación de ambas, considero también las cantidades conocidas que determinan el trazado de esa línea curva, tales como **GA** que denomino a ; **KL** que denomino b y **NL** paralela a **GA**, que denomino c . Luego digo: como **LN** es a **LK** ó c a b, así **PB** o sea y , es a **BK** que es por consiguiente $(b/c)y$; y **BL** es $(b/c)y - b$; y **AL** es $x + (b/c)y - b$. Además, como **PB** es a **LB** ó y a $(b/c)y - b$, así a o sea **GA** es a **LA** ó $x + (b/c)y - b$. De manera que multiplicando la segunda por la tercera se obtiene $(a\,b/c)y - ab$, que es igual a $xy + (b/c)\,yy - by$, que resulta multiplicando la primera por la última; y así que la ecuación que se debía encontrar es

$$yy = cy - (c/b)\,xy + a\,y - a\,c$$

en la cual se sabe que la línea **EP** es de primer género: pues, en efecto, no es otra que una hipérbola.

Y si, en el instrumento que sirve para trazarla, en lugar de la línea recta **PNK** , se utiliza esta hipérbola ó alguna otra línea curva del primer género, para limitar la pieza **PNKL** , la intersección de esta línea borde y de la regla **GL** describirá, en vez de la hipérbola **EP** , otra línea curva que será de segundo

> género[4]. Si **PNK** es un círculo, en que **L** es su centro, se describirá la primera *concoide* de los antigüos; ... Pero si en lugar de una de estas líneas curvas de primer género, fuese una de segundo la que limita la pieza **PNKL**, se obtendría de ella una de tercero; o si fuese una de tercero resultaría una de cuarto y así al infinito, como es bien fácil deducir por el cálculo. Y de cualquier otra manera que se imagine el trazado de una línea curva, siempre que sea de las del número que yo llamo Geométricas, se podrá encontrar invariablemente una ecuación para determinar todos sus puntos, de esa manera." (Descartes. "Libro Segundo", págs.78-81)

No es objetivo de esta tesis profundizar en el estudio de sistemas de enlaces, como el utilizado por Descartes en el ejemplo anterior. No obstante, vale la pena mencionar que tal tema forma parte de la cinemática. La cinemática (como hemos podido observar en el ejemplo trabajado por Descartes), está intimamente ligada con la geometría métrica elemental. Hilbert y Cohn-Vossen (1952, págs. 272-288), aparte de abordar el estudio de varios de estos sistemas, realizan una discusión más general de los movimientos contínuos usando los métodos de la geometría diferencial.

¿Cuándo una nueva curva es suficientemente conocida?

De acuerdo a Bos (1981, pág.296), los matemáticos del siglo XVII no tenían una definición uniforme para el concepto de curva, y por lo tanto no tenían una forma estándar para especificar las curvas que tenían en mente.

De hecho existían muchas maneras de especificar curvas. Uno podía, por ejemplo, indicar cuantos puntos sobre la curva podían ser construidos, uno podía describir una máquina a través de la cual la curva podía ser trazada, y después que la geometría analítica fué introducida, uno podía dar la ecuación de la curva. Algunas de estas maneras de describir a las curvas era considerada satisfactoria, otras lo eran menos, algunas no lo eran del todo.

Bos, usa el término "representación de curvas" para significar maneras de especificar curvas de las que se pensaba que hacían a las curvas suficientemente conocidas.

De acuerdo a este autor, el tema es también de interés más general porque toca a una importante pregunta matemática o metamatemática, a saber, ¿cuándo una entidad matemática se da por conocida? O, ¿cuándo un problema está resuelto?

---

[4] Descartes llama curvas de primer genero a las cónicas y de segundo género a las de 3er. grado. (N.T. de la edición en español de *La Geometría* que estamos usando en este trabajo)

Así, Descartes y Fermat crean un nuevo lenguaje al usar signos (literales) y reglas de operación entre ellos (antes introducidos por Vieta), inicialmente para resolver problemas geométricos, y posteriormente *para describir un nuevo conocimiento* relacionado con la construcción de curvas, el cual se alcanzaba mediante el uso referenciado.

La *Géométrie* hace patente un conflicto entre métodos de definición geométricos y algebraicos y criterios de aceptabilidad.

De acuerdo a Bos, este conflicto refleja un rompimiento en el desarrollo del pensamiento de Descartes sobre geometría. En la primera fase, Descartes consideró que el objetivo de la geometría era construir soluciones de problemas geométricos por medio de curvas trazadas con ciertos instrumentos; los instrumentos servían como generalizaciones aceptables de la regla y el compás. De esta manera él trataba de encontrar nuevas soluciones y clasificarlas. Alrededor de 1630 el plan pareció estancarse y también sucedió que Descartes llegó a estar consciente de la potencia de los métodos algebraicos. Entonces Descartes cambió su programa. El álgebra llegó a ser la herramienta dominante para la clasificación de curvas y para la resolución de problemas.

En su *Géométrie*, Descartes expuso un nuevo programa para tratar con problemas geométricos, y a través de la resolución que Descartes da al problema de Pappus, se pueden inferir la clase de problemas geométricos que él tenia en mente, y explicar los papeles de las construcciones geométricas, de las curvas y de los cálculos alg^braicos de la *Géométrie*.(Bos (pág.298)

La solución de Descartes al problema de Pappus provee de una buena ilustración de los dos diferentes papeles que las curvas pueden jugar en la solución de los problemas de lugar geométrico: una curva puede ocurrir como un lugar geométrico, y puede ocurrir también como medio para construir puntos de un lugar geométrico. (Bos, pág.302)

Bos hace notar el caso en donde las secciones cónicas ocurren como lugar geométrico. Esto sucede en los casos del problema de Pappus para tres y cuatro líneas y Descartes establece que estos problemas son 'planos'. Esto implica que él considera el lugar geométrico en este caso como constructible con regla y compás. Pero con regla y compás uno puede únicamente construir puntos sobre una cónica; uno no puede construir o trazar la cónica como un todo. Sin embargo, como *lugar geométrico*, Descartes considera tal construcción puntual de una cónica suficiente. (Bos, pág.302-303)

Por otro lado, si una curva es usada como un medio de construcción, debe ser posible encontrar su intersección con otras curvas. Una construcción puntual no es suficiente para tales propósitos. En su lugar uno necesita obviamente un método de trazar la curva por un movimiento contínuo, de tal manera que su intersección con otras líneas sea realmente marcada. El requerimiento de que las curvas sean trazables por un movimiento continuo es crucial en la *Géométrie* de Descartes. (Bos, pág. 303)

A propósito de las rectas, como antes vimos cuando se expuso la estrategia que usa Descartes en el "Libro I" (ver cap.1 de esta tesis), éstas ocurren en la *Géométrie* de Descartes como medio para resolver un problema de geometría, un problema de construcción de un lugar geométrico. ¿Por qué Descartes no usa explícitamente una expresión algebraica para las rectas? En su lugar usa únicamente las letras **x** o **y**.

Bos refiere que en su *Géométrie* Descartes presentó un nuevo enfoque para la solución de problemas geométricos; éste contrastaba tan fuertemente con sus anteriores enfoques que uno puede hablar de un nuevo paradigma.

De hecho, la cuestión de si el trabajo de Descartes fue causa ó no de una revolución en el desarrollo del conocimiento matemático es un tema de discusión actual (cf. Gillies, 1992).

Continuando con este discurso, en el texto de Bos se refiere que los matemáticos clásicos habían encontrado, y resuelto, problemas de geometría que no podían resolverse de esta manera sino con intersecciones de cónicas o con curvas más complicadas (como la conchoide). Los antiguos llamaron a estas curvas mecánicas, lo cual no le pareció adecuado a Descartes pues esto pareciera implicar que los griegos no las consideraban genuinamente geométricas.

El enfoque de Descartes puede ser resumido como sigue: en los problemas de construcción uno puede usar las curvas más simples como sea posible. Pero esto no implica que curvas más complejas sean necesariamente menos geométricas que la línea recta y el círculo, o que las construcciones geométricas por medio de estas curvas sean menos geométricas que las construcciones por medio de regla y compás. Si una construcción en un problema se hace por la intersección de dos de tales curvas (círculos, cónicas, conchoides, etc.) y no puede ser construida por curvas simples, entonces tal construcción es la elección correcta y no es menos geométrica que una construcción vía regla y compás. (Bos, pág.304)

Esta visión de Descartes acerca de los problemas geométricos por procedimiento de construcción determinó un *programa en tres partes:*

- primero, Descartes tenía que determinar cuales curvas eran aceptables como medios geométricos genuinos para problemas de construcción;

- segundo, él tenia que aclarar los criterios de decisión de la complejidad de las curvas; esto conduciría a una clasificación, de acuerdo a su simplicidad, de la colección de curvas geométricamente aceptables;

- tercero, tenia que ser vislumbrado un método de descubrir qué curvas eran las más simples posibles en un problema de construcción. (Bos, pág.304)

Básicamente, Descartes tomó como geométricas aquellas curvas "que pueden ser descritas por un movimiento regular" (*G*, p.369). Además, Descartes deseaba incluir en la colección de curvas geométricamente aceptables a todas las curvas que ocurrieran como *lugar geométrico* de solución de problemas, tales como en el problema de Pappus. Esto significaba de hecho, aunque Descartes nunca lo explicitó, que él quería considerar a todas las curvas algebraicas como geométricas. Sin embargo, hacerlo así implicaba probar que todas las curvas algebraicas podían ser trazadas por movimientos continuos y geométricamente aceptables, o que ellas eran trazables por otros medios que eran tan geométricos como los movimientos continuos.

En la segunda y tercera parte del programa de Descartes, el álgebra conformaba la herramienta crucial. Descartes usó el grado de las ecuaciones de las curvas para clasificar las curvas de acuerdo a su simplicidad; las dividió en clases ("géneros"): la primera clase consistió en las curvas con ecuaciones de segundo grado; éstas son las secciones cónicas. Descartes no incorporó a las líneas rectas en su clasificación. (Bos, pág.305)

Al considerar Descartes como primera clase a las secciones cónicas, es indicio, como queda ratificado posteriormente en la demostración algebraica que lleva a cabo, el que esta subsumiendo a las ecuaciones lineales en la ecuación algebraica general de segundo grado. Sin embargo, tal vez desde el punto de vista de su construcción analítica, no todas estas curvas (y rectas) tienen el mismo orden de dificultad.

En la clasificación de Descartes a las curvas con ecuaciones de 3° y 4° grado les correspondió la segunda clase; aquellas de 5° y 6° grado fueron de tercera clase, etc. (*G*, p.319).

Descartes notó que dentro de una clase algunas curvas pueden ser más simples que otras, en el sentido de que uno no puede maniobrar en problemas de construcción complicados con unas como con otras. Por ejemplo, el circulo es de la primera clase, pero existen construcciones que pueden ser ejecutadas con otras curvas de la clase (las secciones cónicas), y con el circulo no.

De acuerdo a Bos (pág.306), la clasificación de Descartes fue para curvas que servían como medios de construcción, mientras que sus argumentos clasificarían problemas más que artificios de construcción. De hecho, el grado de las curvas constructoras monta de uno en uno (parábola, grado dos, parábola cartesiana, grado tres, etc.).

Esto demuestra una contradicción entre criterios algebráicos de simplicidad (la forma de la ecuación, en particular su grado) y criterios geométricos de simplicidad (el uso de la curva como artificio para la construcción). El especial papel que juega el circulo en la primera clase demuestra que la clasificación en realidad no es adecuada para distinguir medios de construcción. (Bos, pág.306)

Podría agregarse que una clasificación adecuada a los artificios de construcción hubiera puesto a la recta y al círculo en el primer grupo. Sin embargo, si acordamos con Bos que lo que tenía en mente Descartes para su clasificación de curvas geométricas es a las ecuaciones algebraicas, resulta que en efecto Descartes no les está asignando a las rectas una ecuación algebraica propia.

Descartes trata con la cuestión fundamental de su programa en el comienzo del segundo libro de la *Géométrie* . El formulaba tal cuestión en el título marginal así: "cuáles son las líneas curvas que pueden ser aceptadas en geometría" (*G* p..315). El criticaba a los matemáticos clásicos por haber llamado a ciertas curvas usadas en construcciones geométricas "mecánicas" más que "geométricas". Descartes dice que el hecho de que las curvas macánicas sean descritas por ciertas máquinas (o artefactos) no las hace menos geométricas que la línea recta y el círculo, las cuales, después de todo, también están trazadas por artefactos, a saber la regla y el compás.

Es de notar que Descartes advierte la caracterización de la propiedad matemática del movimiento continuo a través de las ecuaciones algebraicas, como una propiedad de ciertas líneas curvas, las geométricas.

El criterio de Descartes para aceptar curvas como geométricas fué que pudieran ser trazadas por movimientos contínuos. El trazado de una curva es básico para entender su naturaleza; de manera significativa, Descartes combinó la palabra "trazado" con comprensión y concepción; él uso expresiones tales como: "maneras de trazar y de concebir líneas curvas" (*G* p.319) y "para conocer y trazar la línea" (*G* p.307). (Bos, pág.307)
Dado que Descartes consideró a las curvas primariamente como trazadas por movimientos contínuos generados por ciertas artefactos, encaró múltiples problemas de dificultad conceptual, los que resumimos en seguida:

a) Existen ciertas curvas, tales como la espiral y la cuadratríz, las cuales Descartes no aceptó como geométricas sino que consideró que eran mecánicas, en el sentido de que eran imprecisas e inexactas. Estas curvas, sin embargo, pueden ser trazadas por movimientos contínuos (ver sección 7.2). Descartes, por lo tanto, tenía que especificar cuales movimientos él rechazaba y cuales aceptaba;

b) En el curso de sus estudios Descartes llega a cruzarce con varias curvas las cuales él no podía, o no quería, presentar como trazadas por algún movimiento continuo. En su lugar él las presentaba como construidas puntualmente o como trazadas por maquinaria que involucraba cuerdas. Por lo tanto, él tenía que argumentar que tales construcciones o métodos de trazar eran tan aceptables en geometría como trazados por movimientos continuos;

c) La construcción puntual y el trazado con maquinaria que involucraba cuerdas puede también ser considerado para curvas las cuales Descartes no aceptaba en geometría. Por lo tanto él tenía que especificar cuales construcciones puntuales y cuales métodos de trazado con cuerdas eran aceptables.

d) El álgebra era una herramienta crucial en el nuevo programa de Descartes para la geometría, y las nuevas curvas que él deseaba introducir tenían que ser susceptibles de tratamiento algebraico, i.e., tenían que tener un tratamiento algebraico. Entonces Descartes tenía que considerar cuando estas curvas tenían tales ecuaciones, e inversamente, cuando las ecuaciones resultantes del uso de métodos algebraicos corresponderían a curvas geométricamente aceptables.

O sea que, de acuerdo con Bos, Descartes tiene que explicitar a qué construcciones puntuales se esta refiriendo, a efecto de eliminar curvas *non gratas* desde un punto de vista algebraico. Tal vez por ello es que Descartes hace particularmente manifiesto que lo que hace referencia a la regularidad del trazado, en una construcción puntual, es la elección arbitraria de puntos sobre la línea.

La vinculación de máquinas y el artificio de una curva movible cuya intersección con una regla traza nuevas curvas son los ejemplos que Descartes dió para ilustrar su concepto del trazado de curvas por combinación de movimientos. Es un concepto fundamental porque Descartes estable que él introduce nuevas curvas únicamente si éstas son trazables de esta forma. Esto significa que existían otras curvas que no se aceptarían como geométricas a causa de que no serían trazables en esta forma. Como ejemplos Descartes mencionó la espiral y la cuadratriz. Sin embargo ambas pueden ser trazadas por una combinación de movimientos continuos; ellas fueron de hecho definidas en esta forma. Descartes tenía que especificar por lo tanto un requerimiento mayor para los movimientos con tal de sacar estas curvas.

Toda esta discusión desvela, desde nuestro punto de vista, la identificación que Descartes está estableciendo entre la elección arbitraria de puntos, el trazado continuo, y la representación algebraica de las curvas.

Se ve como Descartes está forzando los argumentos geométricos para sacar a la espiral y a la cuadratríz de la escena. Y es que éstas no tienen una expresión algebraica-no-cortada, y, aparentemente, Descartes está identificando las curvas trazables con movimientos contínuos con las curvas algebraicas. Sólo que, como Bos sostiene, Descartes evitó dar prioridad a los argumentos algebráicos. Da entonces un argumento de inconmensurabilidad, el cual desde mi punto de vista es incoherente con la continuidad del movimiento

Descartes dice sobre la espiral, la cuadratríz y curvas similares, que "están concebidas como descritas por dos movimientos separados, entre los cuales no existe relación que pueda ser medida exactamente", y que por tal razón ellas "en realidad únicamente pertenecen a la Mecánica". (*G* p.317). En ambos casos (el de la espiral y la cuadratríz) los dos movimientos pueden en principio ser vinculados de tal manera que uno determine al otro, a saber por un mecanismo de cuerdas.

Entonces la separación entre curvas geométricas y no geométricas, la cual era fundamental en la visión de Descartes de la geometría, descansa últimadamente en su convicción de que las proporciones entre longitudes curvas y rectas no pueda ser encontrada exactamente.

En términos modernos, podemos decir que la característica de estas curvas es que son curvas trascendentes. Es decir que la trascendencia de curvas está tomando sentido a través de las relaciones de inconmensurabilidad a que se refiere Descartes, y a través de la imposibilidad de expresarlas con una única ecuación algebraica.

De acuerdo a Bos, Descartes resolvió el problema de Pappus construyendo arbitrariamente muchos puntos del lugar geométrico . El método fué como sigue: primero derivó la ecuación del lugar geométrico en indeterminadas x y y ; entonces eligió un valor arbitrario *"eta"* para y y formó la ecuación en una incógnita para los valores correspondientes de x ; entonces resolvió esta ecuación geométricamente, esto es construyó la raíz o raíces *"zi"* ; y finalmente construyó el punto o puntos con coordenadas *"zi"*, *"eta"* del lugar geométrico . Repitiendo este proceso, tomando otros valores para y , uno puede encontrar arbitrariamente muchos puntos del lugar geométrico . Sin embargo, no es tan obvio que esta construcción pueda ser considerada como una construcción satisfactoria para toda la curva que forma el lugar geométrico . Esta no es una construcción por movimiento contínuo. El proceso produce únicamente un número finito de puntos sobre la curva. Y generalmente no es posible usar esta construcción para determinar la intersección del lugar geométrico con una curva dada. (Bos, pág.315)

En su discusión del problema de Pappus en el primer libro de la *Géométrie* Descartes no dijo cuando esta construcción puntual podía ser considerada como una construcción del lugar geométrico de una curva. En el caso de los problemas de las tres, y cuatro, líneas, en donde el lugar geométrico era una cónica, Descartes no paró dando la construcción puntual: también indicó en cada caso cómo encontrar la posición de los vértices, ejes, *latus rectum* y *latus transversum*, dió una representación del lugar geométrico de la curva nombrándola (elipse, hipérbola, etc.) y dando sus parámetros básicos (G pp.327-332). Sin embargo, posteriormente en el segundo libro Descartes regresó a la construcción puntual de curvas y estableció que, en ciertos casos, curvas construidas puntualmente deberían ser aceptadas en geometría.

En el caso de construcciones puntuales aceptables todo punto es en principio constructible porque la construcción puede partir de cualquier valor dado de las coordenadas. Descartes explicó esto como sigue:

> " Vale la pena notar que existe una gran diferencia entre este método de encontrar varios puntos para trazar una línea curva, y el que es usado para la espiral y curvas similares. Por que con la última uno no encuentra indiferentemente todos los puntos de la curva requerida, sino únicamente aquellos puntos que pueden ser determinados por una simple medida como la requerida para la composición de la curva. Por lo tanto, estrictamente hablando, uno no encuentra cualquiera de sus puntos, esto es, no uno de aquellos que sean propiamente puntos de la curva y que no puedan ser encontrados excepto por medio de esto. Por otro lado no hay puntos sobre las curvas que se usen para el problema propuesto (el problema de Pappus) y que no ocurrieran entre aquellos determinados por el método explicado antes. Y porque este método de trazar una línea curva encontrando un número de sus puntos tomados al azar es únicamente aplicable a curvas que pueden ser descritas por un movimiento regular y uniforme, uno no puede excluirlas enteramente de la geometría". (G pp.339-340)

Entonces Descartes estableció firmemente, pero sin intentar probarlo, que las curvas que admitían una construcción puntual en la cual todo punto de ellas puede, en principio, ser construido, puede también ser trazada por movimiento contínuo y ser, por lo tanto, geométrica. El pasaje sugiere que Descartes vió una correspondencia entre la completa arbitrariedad de los puntos construidos sobre la curva y la continuidad del movimiento. (Bos, pág.318)

Después de este pasaje, Descartes repetidamente usó la construcción puntual para representar curvas. Por ejemplo, introdujo los famosos *óvalos* , los cuales son curvas con ciertas propiedades ópticas, a través de una construcción puntual (ver, Descartes,1947, págs.119-120).

El pasaje en el segundo libro sobre la aceptabilidad geométrica de curvas dadas por construcción puntual fué seguido por un pasaje sobre una tercera forma de representar curvas, a saber trazándolas con máquinas que involucran cuerdas. El título de esta sección es :

Y cuáles curvas que uno describe por medio de una cuerda pueden ser aceptadas (G p.340)

Descartes se refirió entonces a su *Dióptica* , en la cual él había dado construcciones por medio de cuerdas para la elipse y la hipérbola. (Bos, pág.319)

Para Descartes la ecuación de una curva fué primariamente *una herramienta* y no un medio de definición o de representación. Fué parte de toda una colección de herramientas algebraicas las cuales en la geometría mostraron ser útiles para el estudio de problemas geométricos. El uso más importante de la ecuación fué en la clasificación de curvas en clases y en la determinación de normales a curvas. Aquí la ecuación debía ser explicitada. En muchos otros casos Descartes realizaba sus cálculos sobre los problemas sin escribir la ecuación de la curva explícitamente. (Bos, pág.323)

O sea que para Descartes nunca fué un problema en sí mismo el obtener la ecuación de una curva, sino como parte de un problema de geometría.

Descartes estaba convencido de que la ecuación de una curva incorpora toda la información sobre sus propiedades. El escribió:

> "Ahora si uno conoce la relación en que todos los puntos de una línea curva se originan de todos los puntos de una línea recta en la manera en que he explicado, es fácil encontrar su relación a todos los otros puntos dados y líneas; y subsecuentemente encontrar sus diámetros, ejes, centros y otras líneas o puntos con los cuales cada curva tiene alguna relación especial, o una relación más simple que con otras, y en esta manera concebir varias maneras de describir las curvas, y elegir las más fáciles". (G p.341)

Esto concuerda con el hecho de que en ninguna parte de la *Géométrie* Descartes usó una ecuación para introducir o representar una curva. En varios casos él trató curvas sin dar sus ecuaciones; en otros casos él dió la ecuación casi casualmente en el curso de sus argumentos. (Bos,pág.322)

Descartes estableció firmemente que todas las curvas geométricas tienen ecuaciones. Después de explicar cierto artefacto para trazar curvas (el sistema de reglas conectadas para la resolución del problema de Pappus), él escribió:

> " Podria dar varias otras maneras de concebir y de trazar líneas curvas, lo cual seria más y más complicado en orden al infinito. Pero para entender la totalidad de todas las curvas que están en la naturaleza y para distinguirlas y ordenarlas en ciertas clases, no conozco mejor manera que decir que todos los puntos de aquellos que pueden ser llamados geométricos, esto es aquellos

que admiten alguna medida precisa y exacta, necesariamente tienen alguna relación con todos los puntos de una linea recta, la cual puede ser expresada por alguna ecuación, la misma ecuación para todos los puntos". (*G* p.319)

Una ecuación de una curva implica una construcción puntual; uno toma sucesivamente valores fijos para una de las variables, a saber para y, y construye geométricamente valores correspondientes para la x, como las raíces de la ecuación resultante en x. Descartes estaba convencido de que ésto podía hacerse siempre. (Bos, pág.324)

Resumiendo, hay tres afirmaciones de Descartes que aparentemente él manejaba como equivalentes:

- las ecuaciones algebraicas producen construcciones puntuales para las curvas que ellas describen, de tal manera que uno/ tiene una completamente libre elección del punto de partida para la construcción de los puntos (a saber, la elección de la y);

- las construcciones puntuales son aceptables en geometría siempre y cuando uno tenga una completamente libre elección del punto de partida para la construcción de los puntos (a saber, la elección de la y);

- tales construcciones puntuales de curvas son equivalentes al trazado por movimiento continuo. (Bos, pág.324)

Es claro que el paso crucial en este argumento es la equivalencia de las construcciones puntuales y las construcciones por movimiento continuo. A través de esta equivalencia, las curvas descritas por ecuaciones adquieren un estado en geometría igual al de las curvas trazadas por movimientos continuos.

Este requerimiento era para asegurar que las intersecciones con otras curvas podían ser encontradas, y esto era inducido por el uso de la curva como medio de construcción en geometría. Por otro lado, Descartes estableció que, bajo ciertas condiciones, las curvas representadas por construcciones puntuales eran verdaderamente geométricas. Las construcciones puntuales estaban relacionadas a las ecuaciones de curvas en el sentido de que una ecuación para una curva directamentemente implicaba su construcción puntual. Las construcciones puntuales fueron usadas primariamente para curvas que ocurrían como soluciones a problemas de lugar geométrico .El vínculo entre los dos criterios es el argumento de Descartes de que las curvas constructibles por puntos pueden ser trazadas por movimiento continuo.

Como el mismo Bos afirma, partes importantes del programa de Descartes encontraron sustento matemático hasta el siglo XIX.

De acuerdo a este autor, por 1619 Descartes se había formado una concepción de la geometría a la cual se apegaría toda su vida, que consistía en considerarla como la ciencia de resolución o de construcción de problemas geométricos. Sin embargo el programa que Descartes presentó en su Géométrie tuvo diferencias significativas introducidas básicamente por el dominio algebraico que para 1637 Descartes había alcanzado.

Es decir que para 1637 el criterio algebraico de Descartes para la simplicidad de las curvas, a saber su clase, definida vía el grado de la ecuación, había reeplazado, y de hecho era un conflicto con su primer criterio de simplicidad, a saber la simplicidad del compás y de la prueba resultante de la construcción. (Bos, pág.329)

Los otros elementos que no estaban en el programa de 1619 concernían a los lugares geométricos (loci) y a las construcciones puntuales. En esa época, Descartes no consideraba el caso en donde las soluciones son infinitas en número y forman un lugar geométrico, el cual por la naturaleza del proceso de resolución del problema, se construye puntualmente. Entonces él no estaba enfrentado con el problema de cuando o no tales curvas serían aceptadas en geometría y de acuerdo a cuales criterios. (Bos, pág.329)

Evidentemente el programa de geometría de Descartes cambió entre 1619 y 1637.

El otro nuevo aspecto, loci y construcciones puntuales, probablemente surgió en el programa de Descartes de 1631 cuando Golius le sugirió resolver el problema de Pappus. Este estudio debió girar la atención de Descartes más hacia el álgebra, a la ecuación como conteniendo toda la información sobre la curva, a la necesidad de incorporar todas las curvas que admitían una ecuación algebraica en geometría y a la necesidad de admitir la construcción puntual para curvas. (Bos, pág.330)

Estos cambios explican las contradicciones básicas del programa de Descartes en la *Géométrie*. El programa de 1619 podía haber sido impracticable pero era consistente. Proveía una demarcación entre construcciones geométricas y construcciones no-geométricas, y el criterio usado en tal demarcación era uno geométrico: las construcciones tenían que ser ejecutadas con artefactos que eran generalizaciones de la regla y el compás.

En el programa de 1637 el álgebra llegó a ser dominante. Descartes ahora clasificaba curvas de acuerdo al grado de sus ecuaciones y una gran parte de la *Géométrie* (especialmente su tercer libro) está dedicado a récnicas algebraicas relativas a las raíces y coeficientes de ecuaciones. Pero a pesar de toda esta álgebra, la concepción de Descartes que permanecía era la de una ciencia de resolución de problemas geométricos por la construcción de puntos a través de la intersección de curvas. Por lo tanto el mayor objetivo del tercer libro fué la construcción de raíces de ecuaciones a travaés de la intersección de curvas. (Bos, pág.331)

Este objetivo determinaba la estructura del tercer libro y la naturaleza de las técnicas algebraicas presentadas en él. La reducción de ecuaciones a otras ecuaciones de menor grado fué necesaria para encontrar la construcción por las más simples curvas construibles. Las técnicas relativas a las raíces y coeficientes de la ecuación servían para reducir las ecuaciones a formas estándar, para las cuales Descartes daba entonces construcciones estándar. Para ecuaciones de tercero y cuarto grados fue la construcción por la intersección de círculo y parábola; para ecuaciones de quinto y sexto grado la intersección de círculo y parábola cartesiana.

Entonces, aunque el álgebra ocupaba una posición dominante en el programa de Descartes de 1637, fué la meta geométrica del trabajo la que determinó su estructura y proveyó la motivación. (pág.331)

¿Pórqué Descartes conservó el criterio del trazado por movimiento contínuo para las curvas geométricas, y porqué no simplemente definió las curvas geométricas como aquellas que tienen ecuaciones algebraicas? Como hemos visto, toda la estructura de su *Géométrie* dependía de la concepción de construcción por la intersección de curvas geométricas. Para Descartes, estas intersecciones eran realmente encontradas o construidas únicamente si las curvas eran trazadas por movimiento contínuo. En tal caso uno puede concebir claramente y distinguir que las intersecciones son encontradas. (Bos, pág.331)

Así, queda claro la liga entre curvas geométricas y el trazado por movimiento contínuo. También, el que para Descartes ésta era una cuestión irrenunciable.

En resumen, la construcción geométrica de curvas algebraicas nace con él -y estamos hablando entonces del vínculo entre expresiones algebraicas y gráficas cartesianas- aparejada con las construcciones puntuales y el trazado por movimiento contínuo. Y esta mezcla heterogénea, de añadido de criterios que buscaban justificar lo que él veía gracias a las técnicas algebraicas por él desarrolladas, sucede por la adherencia de Descartes a su programa geométrico de 1637.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos querido expresar nuestra convicción de que la esencia del método matemático está en ese carácter analítico que hace presentar distintas perspectivas equivalentes de los objetos con los que tratan las matemáticas.

Nuestro principal objetivo ha sido el de enfatizar sobre algunos de los aspectos de la geometría cartesiana que tal vez estén entre los más abandonados por los actuales enfoques introductorios para la geometria analitica del nivel bachillerato. Estos aspectos son:

- el ejercicio de un método analítico algebraico (sustentado en un conocimiento de algunas de las propiedades básicas de la geometría elemental), fincado en la reflexión y no en la aplicación de recetas algebraicas;

- y, la introducción de sistemas de enlaces como generadores de nuevas curvas, las cuales siempre son susceptibles de ser representadas por ecuaciones algebraicas.

Dichos aspectos son los que desde nuestro punto de vista dotan a la geometría cartesiana de un caracter revolucionario con respecto al tratamiento de problemas matemáticos de con⌐trucción geométrica.

A nuestro parecer, el trazado de familias de curvas de Descartes constituye un potencial heurístico para el aprendizaje de las curvas algebraicas. Dado que una vez trazada mecánicamente alguna de las curvas planas a la manera de Descartes, el ejercicio de obtención de su ecuación, así como el de las ecuaciones de toda la familia asociada, tal vez sea una situación didáctica que propicie el pensamiento algebraico analítico.

Por otro lado, no podemos dejar de mencionar que si bien las ideas de Fermat relativas a la geometría infinitesimal de alguna manera se han tratado de incorporar en las actuales introducciones al cálculo diferencial del nivel bachillerato (tal vez por su cercanía con el enfoque de Newton al mismo cálculo de tangentes), no hay que olvidar dos cuestiones importantes al respecto.

Por un lado, que estas ideas de construcciones geométricas no aparecen en los cursos normales de geometría analítica de este nivel escolar; y, por otro lado, que solamente los cuatro primeros cursos de matemáticas son obligatorios en este nivel educativo.

De tal manera que si no se abordan estos temas durante alguno de los cuatro espacios curriculares obligatorios, es muy probable que no vuelva a existir un espacio propicio de trabajo para este antecedente en la formación matemática de los jóvenes estudiantes. Pensamos que sería deseable la recuperación de este tipo de ideas para el aprendizaje de las matemáticas obligatorias de este nivel de estudios.

Apéndice

Sobre el Significado de las Ecuaciones Algebraicas

Remarquemos que Descartes finaliza la sección del "Libro Primero" de *La Geometría* , en donde viene la parte del problema de Pappus que acabamos de exponer, realizando dos procedimientos analíticos fundamentales, mismos que desde entonces son los que le otorgan significado a las ecuaciones algebraicas.

El primer procedimiento analítico consiste en utilizar la representación de las distancias **di** que se acaba de instrumentar, para producir una nueva interpretación de las condiciones establecidas en la situación-problema de Pappus:

> Además, se ve también que multiplicando varias de estas líneas la una por las otras, las cantidades x e y que se encuentran en el producto, no pueden tener cada una más que tantas dimensiones como líneas haya. De modo que ellas no tendrán nunca más de dos dimensiones cuando no se trate más que de la multiplicación de dos líneas; ni más de tres cuando no se trate más que del producto de tres; y así al infinito. (Descartes, 1956, pág.69)

Mediante el segundo procedimiento analítico que aquí efectúa Descartes, inaugura el vínculo entre ecuación algebraica (representación algebraica) y curva plana (representación gráfica):

> Además, a causa de que para determinar el punto P no hay más que una sola condición requerida, a saber, que el producto de la multiplicación de un cierto número de líneas sea igual o (lo que no trae dificultad alguna) tenga la proporción dada, al producto de la multiplicación de las otras, **puede tomarse a discreción una de estas cantidades desconocidas x o y , y buscar la otra por la ecuación en la cual es evidente que, cuando el problema no está propuesto para más de cinco líneas, la cantidad x que no sirve para la expresión de la primera, puede siempre no tener más que dos**

dimensiones. De manera que tomando una cantidad conocida por y, no quedará más que

$$xx = + \text{ó} - ax + \text{ó} - bb$$

y así se podrá encontrar la cantidad x con la regla y el compás de la manera ya explicada. Lo mismo, tomando sucesivamente infinitas diversas magnitudes para la línea y, se encontrarán también infinitas para la línea x; y así se tendrá una infinidad de diversos puntos, análogos al P, por medio de los cuales se trazará la línea curva pedida. (Descartes, pág.70)

Descartes, en este último párrafo citado de la Geometría, hace alusión explícita a la construcción puntual de la circunferencia o cónica (solución buscada al problema de Pappus) a partir de la representación cuadrática en cuestión.

De esta manera, Descartes establece, a partir de los dos procedimientos analíticos referenciados, parte del significado actual de las ecuaciones algebraicas en dos variables.

Obtención de la ecuación algebraica en los casos de 3, 4, y 5 rectas dadas

Desarrollaremos, a continuación, lo que Descartes indica en el último párrafo de *La Geometría* que acabamos de citar, en los casos de tres, cuatro o cinco rectas dadas, no paralelas, a fin de obtener la ecuación algebraica derivada de las condiciones de Pappus dadas.

Consideremos las siguientes condiciones de Pappus:

- para tres líneas:

$$(d1 \cdot d2) : (d3 \hat{} 2) = \alpha : \beta$$

- para cuatro líneas:

$$(d1 \cdot d2) : (d3 \cdot d4) = \alpha : \beta$$

- para cinco líneas:

$$(d1 \cdot d2 \cdot d3) : (d4 \cdot d5 \cdot o) = \alpha : \beta$$

De manera que, efectuando el primer procedimiento analítico de Descartes, el cual arriba hemos subrayado, tenemos lo siguiente:

$(d1 \cdot d2) = (y)(\delta y + \eta x + \rho) = \delta y^2 + \eta y x + \rho y$; $(d3^2) = (a y + b x + c)^2$.

Además, $d4 = cy/z + bcx/zz$.

De la misma manera, por analogía, podemos obtener, en el caso de 5 líneas rectas dadas no paralelas que

$$d5 = a' y + b' x + c' .$$

De ahi, es claro que <u>en los casos de tres y cuatro rectas dadas</u>, las identidades

$$(d1 \cdot d2) = (d3^2)(\alpha/\beta) \ , \ (d1 \cdot d2) : (d3 \cdot d4) = \alpha/\beta$$

derivadas del planteamiento de Pappus, conducen entonces a una ecuación del tipo siguiente), después de una reagrupación de términos:

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$$

Es decir que la ecuación general de segundo grado en dos variables representa la solución al problema de Pappus en los casos de tres o cuatro líneas dadas no paralelas.

Las Construcciones Mecánicas como Reales, Verdaderas

De acuerdo a Boyer,

> El punteo de curvas, en la ahora acostumbrada manera, no era parte de la geometría analítica cartesiana. Incluso los lugares geométricos de Papus no estaban bosquejados. Descartes conocía que una ecuación en dos desconocidas determina una curva, sin embargo, él no parecía considerar a tal ecuación como una definición adecuada de la curva y se sentía constreñido a exhibir una construcción mecánica real, verdadera (actual), en cada caso.
>
> Se ha conjeturado que los antiguos griegos enfatizaban las construcciones a causa de que ellas les servían como teoremas de existencia. Uno está tentado aplicar esta idea a Descartes y decir que él dudaba de la existencia de una curva como correspondiendo a una

ecuación a menos que pudiera suministrar una construcción cinemática para ella.
(Boyer, 1956, pág.88)

El Caso de 5 Rectas Dadas

En el caso de 5 rectas dadas no todas paralelas entre si, tenemos que, de acuerdo a Boyer,

> Para cinco líneas el locus es una curva cúbica, y uno hubiera esperado que Descartes considerara la variedad de formas que esta curvas proporcionan. **Sin embargo, la cuestión que era de interés inmediato para él, no era la forma de un locus dado, sino su constructibilidad.** Para cinco líneas, no todas paralelas, el remarcaba triunfantemente que el locus era elemental en el sentido de que dado un valor para una de las coordenadas de un punto sobre la curva, la línea representando la otra coordenada es constructible con regla y compas únicamente. (Boyer, 1956, pag.87)

En efecto, desarrollando el procedimiento analítico para el caso de 5 rectas, mismo que antes hemos realizado en los casos de 3 y de 4 rectas, tenemos que, en general, dadas 5 rectas no paralelas, la sustitución de la representación cartesiana de las "distancias" **d1, d2, d3, d4,** y **d5** en la condición de Pappus

$$(\mathbf{d1} \cdot \mathbf{d2} \cdot \mathbf{d3}) : (\mathbf{d4} \cdot \mathbf{d5} \cdot a) = (\alpha : \beta),$$

da lugar a lo siguiente:

$$(\mathbf{d1} \cdot \mathbf{d2} \cdot \mathbf{d3}) = (y)(\delta y + \eta x + \rho)(a\,y + b\,x + c) = \delta' y^3 + \eta' y^2 (x) + \eta'' y(x^2) + \rho' y^2 + \rho'' yx + \rho''' y$$

y $$(\mathbf{d4} \cdot \mathbf{d5} \cdot a)(\alpha : \beta) = (cy/z + bcx/zz)(a'\,y + b'\,x + c')(a))(\alpha : \beta) = a''\,y^2 + b''x^2 + c''yx + c'''y + b'''x$$

De donde,

$$\delta' y^3 + \eta' y^2 (x) + \eta'' y(x^2) + \rho' y^2 + \rho'' yx + \rho''' y = a''\,y^2 + b''x^2 + c''yx + c'''y + b'''x$$

Luego, al seguir el procedimiento cartesiano de dar un valor numérico arbitrario a y, y al reagrupar términos, obtendremos finalmente, como en los casos de tres o cuatro líneas, una ecuación cuadrática en x del tipo

" $xx = +ó - ax +ó - bb$

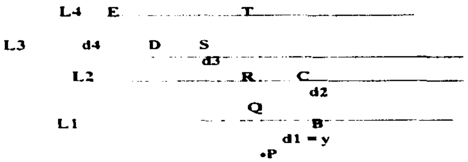
y así se podrá encontrar la cantidad x con la regla y el compás de la manera ya explicada. Lo mismo, tomando sucesivamente infinitas diversas magnitudes para la línea y, se encontrarán también infinitas para la línea x; y así se tendrá

una infinidad de diversos puntos, análogos al **P**, por medio de los cuales se trazará la línea curva pedida ". (Descartes, pág.70)

En resumen, vemos que la aplicación del procedimiento cartesiano en los casos del problema de Pappus para 3, 4, ó 5 líneas rectas dadas, conduce finalmente a la construcción de una cónica, o a la solución del problema usando regla y compás, después de haber dado un valor numérico a una de las coordenadas de un punto sobre la curva;

El Caso de 3 y 4 Rectas Paralelas: Primer Procedimiento Analítico

Si queremos desarrollar el procedimiento cartesiano para el caso de que las tres o cuatro líneas dadas sean todas ellas paralelas entre sí, tenemos una situación como la siguiente:



Como antes, los ángulos $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, y $\varphi 4$, que forman las "distancias" **d1**, **d2**, **d3**, y **d4**, a partir del punto **P** con las rectas **L1**, **L2**, **L3** y **L4** dadas, también son dados. Ahora bien, la estrategia que seguiremos para llegar a expresar como antes a las distancias **d1**, **d2**, **d3**, y **d4** en términos de únicamente una de las dos variables x o y será básicamente a través del trazado de una recta auxiliar perpendicular a las rectas dadas, considerando que la distancia vertical entre ellas es fija, y siguiendo a continuación la idea de Descartes de considerar constantes las razones entre los lados de los triángulos determinados por cada una de las distancias **di** dadas, la recta auxiliar y la correspondiente recta **Li** trazada. De manera que tenemos lo siguiente:

- Hagamos $d1 = y$, y consideremos el triángulo **BPQ**. Ahí, el ángulo en **B** está dado, y el ángulo que forma la línea auxiliar con **L1** es recto. Luego el ángulo en **P** de este triángulo también está determinado. De donde las razones entre sus lados son constantes. En particular,

$$PQ/PB = \text{cte.} = d/z \quad \Rightarrow \quad PQ = PB(d/z)$$

$$= y\,(d/z)$$

- Consideremos ahora el triángulo **CPR**, el ángulo que forma **d2** con **L2** está dado y el ángulo en **R** es recto. Luego, el ángulo en **P** también está determinado, de donde $PC/PR = \text{cte} = e/z$ de donde $PC = d2 = PR\,(e/z)$

- Ahora bien, como las rectas **Li** están dadas, también lo está la distancia vertical entre ellas. Llamémosle **k1** a dicha distancia, luego,

$$PR = PQ + QR$$

$$= y\,(d/z) + k1\text{, i.e.}$$

$$d2 = (y\,d/z + k1)\,(e/z)$$

$$= y\,(de/zz) + k1(e/z)$$

- Considérese ahora el triángulo **DPS** : el ángulo que forma **d3** con **L3** está dado ($\angle D$), y $\angle S$ es recto. Luego el $\angle P$ también está dado. De donde $DP/DS = \text{cte} = f/z$, de donde $DP = d3 = SP\,(f/z)$

$$= (RS + PR)\,(f/z)$$

Como antes, la distancia vertical entre **L2** y **L3** está dada (pues **L2** y **L3** son paralelas entre si). Lamémosle **k2** a dicha distancia, i.e.,

RS = k2 , de donde $d3 = (k2 + y\, de/zz + ke/z)\,(f/z)$

i.e. $$d3 = k2(f/z) + y\,(def)/(zzz) + (kef)/(zz)$$

$$d3 = a'y + b'$$

- Procediendo exactamente de la misma manera que lo hemos hecho en el caso de **d3**, se llega a tener la expresión para **d4** en términos de y multiplicada por una constante más (o menos) otra constante numérica, i.e. $d4 = a'y + b'$.

El Caso de que Todas las Rectas Dadas sean Paralelas: Segundo Procedimiento Analítico

Por el momento, continuaremos esta sección dedicada al problema de Pappus, exponiendo el caso de 3 ó 4 rectas dadas, cuando todas ellas son paralelas.

Si todas las rectas dadas son paralelas entre sí, tenemos que utilizando la representación cartesiana para las distancias antes mencionada, las condiciones de Pappus se transforman en:

$$(d1 \cdot d2) = y\,(y\,(de/zz) + k1(e/z))$$

Es decir, $(d1 \cdot d2) = y\,(ay + b)$

$$= (ay^2 + yb)$$

y $d3^2 = (a'y + b')^2 = cy^2 + 2dy + e$

Luego, $(d1 \cdot d2) = (ay^2 + yb) = (cy^2 + 2dy + e)(\alpha : \beta) = (d3^2)(\alpha : \beta)$

Es decir que $fy^2 + gy + h = 0$ sería la ecuación representante del lugar geométrico de los puntos cuya razón cruzada de las distancias a tres líneas paralelas es una constante dada. Distancias que forman a las líneas dadas ángulos dados.

En el caso de cuatro líneas paralelas, mediante un procedimiento análogo, también se llega a obtener una ecuación de segundo grado como la que se obtuvo en el caso de las tres líneas paralelas dadas.

En resumen, se puede ver que tanto en el caso de tres rectas paralelas, como en el de cuatro también paralelas entre sí, el lugar geométrico descrito es, en ambos casos dos rectas simétricas paralelas a las rectas dadas.

Referencias Bibliográficas

- Bos, H. J. M., 1981. "On the representation of curves in Descartes' Géométrie", in *Archive for History of Exact Sciences* , pp.295-338. Springer-Verlag, Berlin (Germany).

- Boyer, C., 1956. *History of Analytic Geometry* , Published by Scripta Mathematica, Yeshiva University, New York (USA).

- Coolidge, J.L., 1940. *A history of geometrical methods* , Oxford.

- Descartes, R., 1947. *La geometría* , Traducción al español de *La Géométrie* por Pedro Rossell Soler, Espasa-Calpe, Buenos Aires (Argentina).

- Edwards, C.H.(Jr.), 1979. *The Historical Development of the Calculus* , Springer-Verlag, New York (USA).

- Fermat, P. de, 1891-1922. *Oeuvres* , Vol.I, (pág.91), Ed. por Paul Tannery and Charles Henry, 4 vols. y sup., Paris.

- Gillies, D.(ed.), 1992. *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford Science Publications (USA).

- Hilbert, D., y Cohn-Vossen, S., 1952. *Geometry and the Imagination* , Chelsea Publishing Company, New York (USA).

- Kline, M., 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* , Oxford University Press, New York (USA).

- Loria, G., 1942-1945. "Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de 'coordonnées.' Contribution a l'histoire de la géométrie analytique", *Mathematica* , **XVIII** (1942), 125-145; **XX** (1944), 1-22; **XXI** (1945), 66-83. Este trabajo apareció también en *Osiris* , **VIII** (1948), 218-288.

- Loria, G., 1923. "Qu'est-ce que la géométrie analytique?" , *L'Enseignement Mathématique* , **XIII** , 142-147.

- Loria, G., 1937. "Descartes géomètre", en *Etudes sur Descartes, Revue de Métaphysique et de Morale* , **XLIV**, 199-220.

- Mahoney, M.S., 1971. "Descartes: mathematics and physics", *Dictionary of scientific biography* , de. C.C. Guillispie, New York , Vol. **4**, pp.55-61, pie de página 7.

- Santaló, M., y Carbonell, V., 1972. *Geometria Analitica -Matemáticas, Quinto Libro-*, Textos Universitarios, S.A., México.

- Whiteside, D.T., 1961. "Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century" , in Arch. Hist. Exact. Sci., Vol.1. , Springer-Verlag, USA.

- Whitson, J.A., 1994. " Elements of a semiotic framework for understanding situated and conceptual learning ". *PME-NA XVI*, Baton Rouge-Louisiana (USA).