

87
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"CAMPUS ARAGON"

**ESTUDIO Y SOLUCIÓN ANALÍTICA DE UN
FLUJO FUERTE GENERADO POR UN
MOLINO DE DOS RODILLOS.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO REYES HUESCA

**ASESOR DE TESIS:
DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR**

MÉXICO

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A mis queridos padres Antonio y Cristina, por su apoyo y confianza en mí en todo momento.

A mi linda esposa, por su ejemplo de fuerza y cariño.

A mi niño, alegría de cada despertar.

A mis hermanos Edith, Eduardo, Cristina, Sofía y Adrián, por su apoyo.

A Mami y Rosi, por su cariño.

A la memoria de mi abuelita Lucita y de mi tía Ene.

A mis suegros, por su valiosa ayuda.

A mis cuñadas Teresa y Silvia.

A mis amigos y compañeros Jacinto, Ramón, Andos, Ernesto, Mario, Paty, Carlos y Gaby.

Agradecimientos.

De forma especial agradezco al Dr. Enrique Geffroy Aguilar por la dirección de esta tesis y el apoyo recibido durante la elaboración de la misma. Muchas gracias.

También extiendo mi agradecimiento a los sinodales

***M. en C. Daniel Aldama Ávalos,
Ing. Fortunato Cerecedo Hernández,
Ing. Teresa Celia Moreno Bañuelos,
Ing. José Mariano Santana Colín,***

las observaciones realizadas a este trabajo.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales por el apoyo recibido durante la realización de esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México la formación que me brinda.

Y un reconocimiento al Ing. Casiodoro Dominguez Crisanto, por el apoyo que me ha brindado y el ejemplo de superación.

Índice

Introducción.	v	
Capítulo 1	Mecánica de fluidos de flujos extensionales. Un molino de dos rodillos.	1
1.1	Medios continuos. Tensores de deformación y vorticidad.	1
1.1.1	Concepto del Continuo.	1
1.1.2	Movimiento del continuo.	3
1.1.3	Cinemática de la deformación de un continuo.	5
1.2	Clasificación cinemática de los flujos.	8
1.2.1	Tipos de flujos.	8
1.2.2	Importancia de los flujos fuertes.	12
1.2.3	Un molino de dos rodillos.	14
1.2.4	Criterio cinemático de Astarita para la clasificación de flujos.	15
1.3	Leyes de conservación.	17
1.3.1	Conservación de la masa.	17
1.3.2	Conservación del momentum lineal o de la cantidad de movimiento.	18
1.3.3	Ecuaciones constitutivas.	19
1.3.4	Ecuación de Navier-Stokes.	21
1.4	Soluciones para números de Reynolds bajos. La aproximación de Stokes.	24
1.4.1	Valores típicos y adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes.	25
1.4.2	Representación de flujos bidimensionales en términos de la función de corriente para flujos lentos.	27
Capítulo 2	Solución analítica para el flujo generado por un molino de dos rodillos.	30
2.1	Coordenadas curvilíneas.	30
2.1.1	Sistema de coordenadas bipolares.	35
2.2	Solución a la función de corriente propuesta por Jeffery para un molino de dos rodillos ideal.	38
2.3	Rapidez de corte y grado extensional en el punto de estancamiento.	49

Capítulo 3	Características del flujo en la región entre los rodillos.	54
3.1	Las características del flujo en el punto de estancamiento.	54
3.2	Características del campo de flujo global.	59
3.2.1	Casos particulares. Características del flujo a lo largo del eje x ($\alpha = 0$).	65
Capítulo 4	Consideraciones para el diseño mecánico de un molino de dos rodillos.	73
4.1	Diseños actuales de molinos de dos rodillos.	73
4.2	Contorno de la caída de flujos.	76
4.3	Parámetros de importancia.	80
4.3.1	Cálculo del torque requerido.	80
4.3.2	Tolerancias.	81
4.3.3	Otras consideraciones importantes.	83
Capítulo 5	Conclusiones.	84
Bibliografía	87

Introducción.

Los procesos de manufactura de materiales plásticos, la efectividad del uso de lubricantes, la aplicación de pinturas, el procesamiento de alimentos y el movimiento de fluidos biológicos, entre muchos otros, son algunas de las disciplinas de tecnología e ingeniería que requieren el control y conocimiento de fluidos complejos.

A diferencia de fluidos como el agua o el aire, los fluidos anteriores se denominan no-newtonianos y, en general, presentan un espectro de relajamiento asociado a un comportamiento viscoelástico. La viscoelasticidad de estos fluidos es resultado de los cambios en el arreglo de las partículas que conforman el líquido o material, como resultado de las deformaciones generadas por el procesamiento o flujo.

Un conocimiento preciso y profundo de la dinámica de estos materiales ofrece toda una diversidad de posibles nuevas aplicaciones o, de igual valor tecnológico, permite optimizar las aplicaciones actuales: menor costo operativo, mayor velocidad de proceso, mejores características en el producto, etc. En particular, y puesto que el flujo altera la conformación microscópica del fluido, el conocimiento de la dinámica de estos materiales nos permite lograr valores extraordinarios para algunas propiedades de éstos. Tal es el caso de fibras de poliestireno, en donde la resistencia a la tensión mejora casi cien veces cuando las moléculas están preferencialmente orientadas a lo largo de la fibra, con propiedades aún mejores que las de cualquier acero.

Así, esta tesis se enmarca en un proyecto de investigación que busca ampliar el conocimiento de la dinámica de flujos de sustancias complejas. En particular, de soluciones poliméricas con una dinámica viscoelástica notable y que presentan además un amplio espectro de tiempos de relajamiento. Como consecuencia del amplio espectro, las características observadas en líquidos poliméricos sometidos a un flujo dependen fuertemente del tipo de deformación así como de la historia de deformación, siendo aquellas deformaciones que producen un alto grado de anisotropía en la microestructura del polímero las que producen propiedades interesantes. Sin embargo, las mismas propiedades del flujo que causan el cambio de conformación de las moléculas del polímero, se ven afectadas por los cambios sufridos por estas moléculas. Es por ello, que para realizar estudios de dinámica no lineal de polímeros se requiere conocer simultáneamente las propiedades del flujo y de la conformación que toma la molécula dentro de éste.

Por ello, la investigación requiere conjuntar tres áreas de estudio. La primera busca medir las propiedades conformacionales de las moléculas poliméricas utilizando técnicas ópticas que perturban, en forma mínima, los efectos a estudiar. Segundo, los efectos de interés en las aplicaciones antes mencionadas requieren el entendimiento de la dinámica no-lineal de los materiales poliméricos, caracterizados por una dinámica que depende fuertemente de la conformación microscópica observada, esto es, interesa conocer los espectros de relajamiento bajo una amplia variedad de condiciones. Y tercero, en el laboratorio se requiere contar con una celda de flujos que permita realizar las mediciones anteriores, produciendo a la vez las condiciones de gran deformación en la microestructura.

En particular, esta tesis se centra en la última área antes mencionada. Aquí se analiza una celda de flujos del tipo de dos rodillos rotacionales que genera grandes deformaciones en la

conformación polimérica y que permite integrar fácilmente la técnica óptica de medición, la cual ha servido para realizar las primeras mediciones de dinámica fuertemente no-lineal de fluidos poliméricos. *El objetivo principal de este trabajo de tesis es el estudio de las características de un flujo generado por un molino de dos rodillos, por su importancia para el estudio de materiales viscoelásticos bajo condiciones difícilmente accesibles en un laboratorio de investigación, y por su importancia para las aplicaciones industriales semejantes a las del soplado de láminas o elaboración de filamentos, entre muchas otras.*

Algunas de las características principales del flujo generado por el molino de dos rodillos son:

1. bidimensional — útil para mediciones ópticas,
2. elongacional — permite grandes deformaciones,
3. es posible obtener una solución analítica válida para flujos lentos — simplificación de la ecuación de Navier-Stokes (aproximación de Stokes) y la aplicación de $\nabla^2\psi$,
4. la solución analítica concuerda con los resultados numéricos de Singh [1], y datos experimentales reportados por Dunlap [2] y Wang [3].

Con base en la metodología propuesta por Geffroy y Ascoli [4] en este trabajo de tesis se obtiene una solución para un flujo lento, newtoniano, bidimensional, con base en la geometría de un dispositivo de flujo de dos rodillos alrededor del punto de estancamiento. Aún más, se propone una solución analítica válida para todo el dominio del flujo y, con los datos obtenidos con ésta, se sugiere un nuevo diseño para un molino de dos rodillos.

Una de las ventajas principales del uso del molino de dos rodillos para generar flujos estriba en su capacidad para producir una amplia diversidad de flujos bidimensionales. Los diferentes flujos se obtienen simplemente modificando la geometría del molino, siendo cada configuración descrita de manera semejante por el mismo sistema de coordenadas. Los diferentes flujos se caracterizan por producir diferentes razones de vorticidad con respecto de las razones de deformación. En un extremo, es posible aproximarse a las condiciones que imperan en un flujo cortante simple, denominado *flujo débil*, porque la vorticidad del flujo tiene la misma magnitud que la velocidad de deformación, y, en el otro extremo, en el que la vorticidad es casi despreciable y se tienen condiciones de un flujo puramente elongacional, que se considera un *flujo fuerte*.

La importancia de estudiar la dinámica de líquidos poliméricos utilizando para ello un molino de dos rodillos está basada en la posibilidad de correlacionar estos estudios con un gran acervo de datos, tanto teóricos como experimentales, que existen publicados en la literatura científica. Sin embargo, los flujos fuertes son en realidad tecnológicamente más importantes dado que la gran mayoría de los procesos industriales involucran flujos con un carácter elongacional. Es por ello que conocer una solución aproximada al flujo de dos rodillos representa valiosas oportunidades desde una perspectiva de ciencia básica como de desarrollo tecnológico.

Dada la complejidad para buscar una solución analítica de un flujo para un líquido polimérico, en el Capítulo I se presentan las suposiciones necesarias para simplificar el problema a resolver, enfatizando a la vez las limitaciones del modelo aproximado. En particular se parte de suponer una ecuación constitutiva de fluido newtoniano (por ejemplo, agua, etc.) que no presenta efectos elásticos, y que posteriormente se analiza para flujos lentos, en los cuales los efectos inerciales son despreciables.

El Capítulo 1 comprende todo lo relativo a la mecánica de fluidos necesario para el estudio de un dispositivo de flujo de dos rodillos. Este Capítulo comienza con una definición de un medio continuo y de ahí aborda la cinemática de la deformación de un continuo con el propósito de obtener los tensores de deformación y vorticidad de un flujo, los cuales se utilizan para la aplicación de un criterio de clasificación de flujos propuesto por Astarita [5] con lo que se calcula la cantidad de deformación que impone a las moléculas de un fluido en cualquier flujo. También se da una descripción de un molino de dos rodillos, el cual tiene un punto de estancamiento localizado en el centro del dispositivo, a lo largo de la línea formada entre los ejes de los rodillos. En esta región en particular, es posible imponer grandes deformaciones (y también con una gran rapidez de deformación) a las moléculas, y por tanto, obtener grandes cambios conformacionales en las moléculas de los fluidos poliméricos de interés. También se presentan las características de otros flujos semejantes a los flujos generados por el molino de dos rodillos, enfatizando las idealizaciones posibles de estudiar analíticamente, como también los flujos que frecuentemente se utilizan en los procesos industriales y que tienen similitudes con la solución teórica aquí propuesta. El propósito es conocer líneas de aplicación de los resultados obtenidos.

Para terminar el Capítulo 1 se presentan las ecuaciones de conservación para un fluido newtoniano válidas cuando los efectos de la aceleración puntual son despreciables. El objetivo es obtener una solución que sirva de base para otras soluciones que asintóticamente consideren los efectos aquí despreciados.

La solución general que propone Jeffery está expresada en coordenadas bipolares, es por ello que en el siguiente capítulo se da inicialmente una introducción a las coordenadas curvilíneas y al sistema coordenado bipolar, para posteriormente obtener una solución particular para el molino de dos rodillos con giro corrotatorio, basados en dos parámetros geométricos de éste (el radio de los rodillos y la distancia entre ejes) así como la velocidad angular de los rodillos.

El Capítulo 2 comienza con la descripción del sistema de coordenadas bipolares que facilita la definición de las condiciones de frontera para un molino de dos rodillos de longitud infinita, y continúa con la aplicación de la solución general para la función de corriente que propone Jeffery [6]. Con ello, es posible obtener una solución analítica para la aproximación de Stokes de un líquido newtoniano (que también se conoce como *flujo lento*, en donde existen bajas velocidades que permiten despreciar los términos inerciales).

La solución que se obtiene está dada en términos de series de Fourier y toma ventaja de las características de simetría del flujo generado en un molino de dos rodillos de igual radio con giro corrotatorio y con la misma velocidad angular. Esta solución se utiliza para calcular las expresiones de las propiedades cinemáticas importantes del flujo, como la magnitud del gradiente de velocidad, el tensor de vorticidad y el tensor de deformación, y la razón de la rapidez de deformación y de la vorticidad (parámetro de flujo), dadas por la geometría del molino de dos rodillos.

La solución obtenida permite conocer las velocidades y las historias de deformación a las que están sujetos los elementos de materia en la vecindad del punto de estancamiento. Una bondad de la solución es que ésta es cerrada, es decir, dada la precisión requerida de la solución, es posible siempre calcular el número de términos de la serie de Fourier que garantiza tal precisión.

El manejo matemático de las ecuaciones y de los gráficos que se presentan se hizo, en gran parte, con Mathematica® [7], debido a la complejidad de las ecuaciones.

El Capítulo 3 comienza con las características del campo de flujo en el punto de estancamiento, y se comparan los trabajos precedentes, teóricos y experimentales, con los datos que se obtienen con la solución que se presenta en esta tesis. Posteriormente, se obtienen las características del campo de flujo global y se aplican para obtener un caso particular, que muestra la estructura más compleja y que corresponde a la línea perpendicular a la recta que une los ejes de los rodillos que atraviesa el punto de estancamiento.

Las características del flujo que se pueden calcular con la expresiones que se presentan en los Capítulos 2 y 3, proporcionan la base inicial para evaluar el grado de la deformación de las moléculas del polímero y el grado de alineamiento del polímero estirado a lo largo de la dirección principal del tensor de la rapidez de deformación, como una función del tipo de flujo y de la magnitud del gradiente de velocidad.

En el Capítulo 4 y con base en la solución obtenida para el flujo del molino de dos rodillos, se propone un nuevo diseño del molino, se procede a comparar las propiedades del flujo en las fronteras, y además se determinan las características del dispositivo con base en los perfiles que presentan las diferentes propiedades del flujo y se comentan las bondades del nuevo diseño.

Capítulo 1.

Mecánica de fluidos de flujos extensionales. Un molino de dos rodillos.

Los estudios de dinámica de polímeros requieren generar conformaciones microscópicas fuera de equilibrio, es decir en las cuales la entropía del sistema polimérico es menor, y por lo tanto, la tendencia al equilibrio final implica un cambio de la microestructura hacia una mayor entropía, que coincide con un arreglo microscópico totalmente desordenado [8]. Para una macromolécula (polímero lineal de alto peso molecular) lo anterior significa que la conformación más probable es la de una madeja de hilo y el estado fuera de equilibrio, de mínima entropía, corresponde al hilo estirado en línea recta [9].

Cual cualquier campo de fuerzas es capaz de producir un cierto grado de ordenamiento en la microestructura del fluido polimérico, sin embargo, cuando interesan las propiedades viscoelásticas del material polimérico resulta conveniente causar los cambios conformacionales utilizando un flujo. Así en este Capítulo se presentan las ideas básicas de la mecánica de fluidos en particular relativas al análisis de los flujos generados por el molino de dos rodillos cuando el fluido es un líquido polimérico. En la Sección 1.1 se plantean los conceptos básicos para describir las deformaciones macroscópicas y su relación con la microestructura del fluido. Se dan también las leyes de conservación de masa y momentum mediante las cuales pueden inferirse las *historias de deformación* [10] que se aplican al material polimérico y finalmente, se plantean las simplificaciones del modelo que permiten encontrar una solución analítica al problema de interés.

1.1 Medios continuos. Tensores de deformación y vorticidad.

1.1.1 Concepto del Continuo.

La mecánica de fluidos es una teoría de campo ya que describe los fenómenos observados considerando la materia como un continuo. El análisis del movimiento de los fluidos asume que el volumen de fluido bajo consideración forma un continuo físico, es decir, un medio lleno

de materia continua tal que cada región del medio, sin importar que tan pequeña sea, es por sí misma un continuo y está completamente llena de materia. No son de interés en un continuo las propiedades de cada molécula en algún punto P , sino el promedio de un gran número de moléculas en la vecindad del punto P . Matemáticamente, la asociación de valores promedio de propiedades en un punto P también da un continuo de puntos y valores. En la teoría del continuo, un cuerpo se concibe compuesto de una gran cantidad de partículas materiales, referidas en su totalidad como *puntos materiales*, que corresponden a pequeños volúmenes macroscópicos.

Para cada punto en un fluido se supone un valor único en la velocidad, presión, densidad y otras "variables de campo" y, de esta forma, estas propiedades se consideran funciones continuas de la posición y el tiempo. Se requiere entonces, que la materia obedezca las leyes de conservación de la masa, momentum y energía, dando con ello una serie de ecuaciones diferenciales que gobiernan las variables de campo. La solución de estas ecuaciones define la variación de cada variable en el espacio y tiempo, la cual corresponde al valor medio de la magnitud molecular de la variable de campo alrededor de cada punto y tiempo correspondiente.

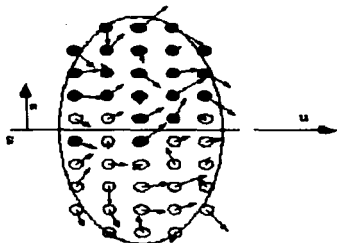


Figura 1.1. Considere una superficie S dibujada en un fluido que está modelado como un gas conformado por bolas de billar. Inicialmente, visto desde un nivel macroscópico, hay una discontinuidad a través de la superficie — el fluido arriba es negro mientras que el fluido abajo es blanco. La velocidad macroscópica es paralela a S así que $u_1 \cdot n_1 = 0$. Entonces, no existe una transferencia del fluido negro hacia la zona blanca, o viceversa, debido al movimiento macroscópico u_1 . A nivel molecular, sin embargo, todas las moléculas experimentan un movimiento aleatorio (y el promedio de este movimiento es al que denotamos por u_1). Este movimiento aleatorio no produce un transporte neto de las moléculas a través de S cuando se toma en cuenta la escala macroscópica puesto que $u_1 \cdot n_1 = 0$. Sin embargo, se produce un flujo neto de "color" — en promedio, existe un flujo neto entre las dos regiones. En una teoría macroscópica diseñada para describir el transporte de fluido blanco y negro, este flujo neto aparece como una contribución superficial.

Como puede verse en la Figura 1.1, la descripción del continuo requiere contemplar los flujos macroscópicos como consecuencia de dos contribuciones, una debida al flujo mismo de partículas y la segunda resultado de las fluctuaciones locales en el número de partículas. Esto es, la descripción macroscópica de la dinámica microscópica requiere tomar en cuenta estos dos flujos. Así, en la transferencia de momentum la hipótesis del continuo requiere que el balance de momentum macroscópico sea la suma de momentum de cada partícula mas las fuerzas que actúan sobre la superficie del volumen macroscópico que se denomina *vector de esfuerzos* y que es consecuencia directa de las fluctuaciones termodinámicas. En la siguiente sección se plantea el formalismo para una descripción del continuo, para posteriormente presentar las ecuaciones de balance, enfatizando esencialmente aquellas ideas directamente relacionadas con el molino de dos rodillos.

1.1.2 Movimiento del continuo.

Para describir cualquier clase de movimiento se requiere de un sistema coordinado de referencia. Por simplicidad, se escoge un sistema de referencia en reposo y se refiere todo el movimiento de las partículas con respecto a él.

Los puntos materiales en cualquier tiempo t , son localizados con respecto a un sistema coordinado por medio de vectores de posición desde un origen establecido en un tiempo fijo t_0 . De esta forma, sean \mathbf{X} y \mathbf{x} los vectores de posición de las partículas de fluido en los tiempos t_0 y t respectivamente. Supóngase que para $t = t_0$ se aísla una porción del continuo con una superficie límite o de frontera S_0 y se selecciona una partícula específica en la región encerrada por esta superficie localizada en \mathbf{X} . Conforme esta partícula se mueve, su posición para cualquier tiempo $t > t_0$ está localizada, con respecto al sistema de referencia, por medio de una ecuación continuamente diferenciable llamada *función de mapeo* o *movimiento* cuya expresión es

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \quad (1.1)$$

donde ϕ es una función vector-valorada determinada por las leyes del movimiento del fluido. De la misma forma, cualquier partícula etiquetada por sus coordenadas puede ser seguida en cualquier tiempo $t > t_0$. Colectivamente, todas esas partículas están encerradas por una superficie S_t para $t > t_0$. Esto da la noción del mapeo de puntos en $t = t_0$ encerrados por una superficie imaginaria S_0 sobre los puntos de la región encerrada por S_t en $t > t_0$. Este mapeo es *uno a uno* para distintos puntos.

Puesto que cada posición espacial \mathbf{x} está ocupada por una y sólo una partícula \mathbf{X} en un instante dado, se tiene que la inversa de la Ecuación 1.1 es

$$\mathbf{X} = \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

la cual describe el *movimiento inverso*. Matemáticamente, esta condición se expresa por medio del jacobiano J del mapeo, el cual no puede ser nulo en ningún punto del campo de flujo. Entonces,

$$J(\mathbf{X}, t) = \det(\nabla \mathbf{x}) \neq 0. \quad (1.3)$$

Esta condición se conoce como la *condición de suavidad* del movimiento de fluidos, y es consecuencia del axioma de impenetrabilidad que señala que dos partículas de una sustancia simple no pueden ocupar la misma posición en el mismo tiempo.

Para analizar este movimiento existen dos métodos equivalentes: el lagrangiano y el euleriano. Las coordenadas de X se llaman *coordenadas materiales o lagrangianas*, y las coordenadas de x se llaman *coordenadas espaciales o eulerianas*. En el lagrangiano se estudia el movimiento de partículas individuales mientras el cuerpo se deforma o fluye. Esto se hace siguiendo el movimiento de una partícula X y determinando los cambios que ocurren en los campos físicos de relevancia como funciones de x y t . En el método euleriano, en vez de estudiar el movimiento individual de partículas, se estudian posiciones espaciales en el cuerpo deformado, sin tomar en cuenta cuáles partículas alcanzan esa posición en un instante dado de tiempo t . Para este propósito se escoge una posición espacial x en el cuerpo deformado y se determinan los cambios que ocurren en los campos físicos como funciones de x y t .

Para conocer la dinámica de un flujo, resulta de crucial importancia conocer la aceleración de cada "partícula de fluido" o elemento de volumen. Es claro que para conocer la aceleración, es necesario seguir la trayectoria de cada "partícula" mediante su representación $x = \phi(X, t)$, y posteriormente calcular las segundas derivadas respecto del tiempo, procedimiento de cálculo que en la práctica es difícil y resulta inconveniente. De hecho, en los estudios del movimiento de fluidos es frecuente describir tal movimiento enteramente con base en la *distribución de las velocidades* en el espacio y el tiempo, y que corresponde al *campo de velocidades* del flujo.

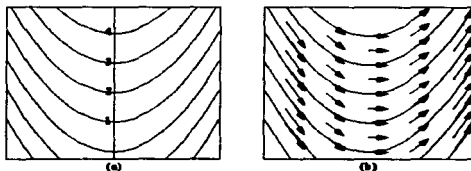


Figura 1.2. Esquema en donde se muestran (a) las líneas de corriente y (b) el campo de velocidades de un flujo. Las líneas de corriente de un flujo son dependientes del tiempo y en todo momento el vector de la velocidad es tangente en todo punto a la línea de corriente que pasa por dicho punto, por lo que indican, en el caso de un flujo estacionario, la trayectoria que siguen las partículas del fluido que se encuentran en una línea en particular.

En este esquema, el concepto de un flujo *estacionario*, es decir, que no evoluciona en el tiempo, queda representado como un campo vectorial que tampoco evoluciona y su importancia radica en la gran diversidad de flujos que en la práctica son posibles de representar con un campo de velocidad cuasiestacionario.

Así, un flujo estacionario se puede mostrar usualmente como una colección de pequeñas flechas, cuyas longitudes son proporcionales a la rapidez del flujo, y que apuntan en la dirección de éste último, para ese punto del flujo; ver la Figura 1.2. Asimismo, es fácil visualizar que concatenando las diferentes flechas se obtiene un conjunto de líneas llamadas *líneas de corriente*; véase la Figura 1.2. Evidentemente, en un flujo estacionario, estas líneas corresponden con las trayectorias sobre las que viajan las partículas, pues cualquier elemento de fluido sobre una línea de corriente permanecerá en ella, ya que el vector de velocidad es *tangente* a la línea en cada punto.

1.1.3 Cinemática de la deformación de un continuo.

En el análisis del movimiento de fluidos, todas las cantidades físicas y cinemáticas relativas al fluido forman un campo de valores. En un campo, las cantidades están distribuidas de acuerdo a ciertas leyes físicas que son particulares de cada campo. En la cinemática de deformaciones interesa la distribución de velocidad en un medio, así como aquellas cantidades cinemáticas que juegan un papel importante en la estructura del campo mismo, tales como el tensor de esfuerzo y el gradiente de velocidad, entre otros.

Ahora, considérese dos puntos materiales vecinos P y Q que se mueven con la velocidad local de un flujo. Sean las coordenadas de P representadas por \mathbf{x} y las de Q representadas por $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. El cambio en la velocidad entre los puntos P y Q , o la velocidad relativa de Q respecto a P , en un tiempo dado es [11]

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4)$$

Haciendo una expansión de Taylor a la expresión anterior y conservando únicamente los términos de primer orden para $\delta\mathbf{x}$, se tiene [12]

$$\delta\mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = (\nabla\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{x} = \frac{D}{Dt} \delta\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

donde $\nabla\mathbf{u}$ es un tensor de segundo orden, denominado *tensor gradiente de velocidad*. El cambio en la velocidad entre dos puntos es de mucha utilidad porque describe la deformación de un elemento material lineal $\delta\mathbf{x}$ mientras éste se mueve con el flujo.

Ahora bien, todo tensor de segundo orden se puede decomponer en sus parte simétrica y antisimétrica, de modo que el tensor $\nabla\mathbf{u}$ toma la forma

$$\nabla\mathbf{u} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}), \quad (1.6)$$

donde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T), \quad (1.7)$$

en donde \mathbf{D} es la parte simétrica y \mathbf{W} es la parte antisimétrica y $\nabla\mathbf{u}^T$ es la transpuesta de $\nabla\mathbf{u}$.

La descomposición de $\nabla\mathbf{u}$ anterior presenta ventajas para la descripción de la dinámica de flujos. En especial, la longitud del elemento de línea que conecta los puntos P y Q es $|\delta\mathbf{x}| = (\delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x})^{1/2}$, y la razón de cambio de su longitud es proporcional a

$$\delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x} \cdot (\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{W} \cdot \delta\mathbf{x}). \quad (1.8)$$

Sin embargo, como \mathbf{W} es antisimétrico, se tiene que $(\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} \cdot \delta\mathbf{x}) = 0$, entonces

$$\delta\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{x} \cdot \frac{D}{Dt} \delta\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\|\delta\mathbf{x}\|^2) = \delta\mathbf{x} \cdot (\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

de aquí que \mathbf{D} se denomine *gradiente de velocidad de deformación* o *tensor de rapidez de deformación* o simplemente *tensor de deformación*. Así, la razón de cambio de la distancia entre dos puntos materiales vecinos depende sólo de la parte simétrica de $\nabla\mathbf{u}$, esto es, del tensor \mathbf{D} .

El tensor de deformación describe las razones de elongación de los extremos y las razones de cambio de los ángulos formados en los extremos de un elemento material que inicialmente es cúbico y está orientado paralelamente a los vectores base de su origen; es decir, denota la rapidez de cambio de la forma. Puesto que este tensor es simétrico, la matriz de sus componentes puede diagonalizarse por medio de una rotación del sistema de coordenadas; los elementos de la diagonal principal se obtienen por medio de los eigenvalores del tensor, y éstos representan las tres razones de deformación principales o *razones de elongación* a lo largo de los ejes principales del tensor. Debe ser ahora claro que cualquier flujo en el cual $\nabla\mathbf{u} \neq 0$ y $\mathbf{D} \neq 0$ genera deformaciones macroscópicas para cada elemento de volumen. Como consecuencia de esta cinemática, podemos suponer que un elemento de volumen en un fluido polimérico también se deforma e introduce cambios en la conformación microestructural. Son estos cambios microestructurales inducidos por un flujo los que se utilizan para producir los estados fuera de equilibrio en la configuración microscópica de las moléculas poliméricas y que se utilizan para estudiar la dinámica polimérica.

El tensor \mathbf{W} es la *razón de rotación* o *tensor de vorticidad*. La contribución del tensor \mathbf{W} al vector de velocidad relativa $\delta\mathbf{u}$ corresponde físicamente a una rotación de cuerpo rígido (local) con una velocidad angular igual a $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$, donde

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

y $\boldsymbol{\omega}$ se llama *vector vorticidad* o simplemente *vorticidad*.

El vector vorticidad está relacionado con \mathbf{W} por medio de

$$2\nabla \cdot \mathbf{W} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.11)$$

o de igual forma por

$$2\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (1.12)$$

donde \mathbf{v} es un vector arbitrario diferente de cero.

Resumiendo, la velocidad en Q está compuesta por las siguientes contribuciones de P

1. Una traslación.
2. Una deformación.
3. Una rotación de cuerpo rígido.

La Figura 1.3 ilustra los ejes principales del tensor de deformación y la naturaleza de la rapidez de deformación pura en los ejes principales del tensor. El caso en el cual el primer eigenvalor α es mayor que cero se ilustra, describiendo una rapidez de elongación uniforme en la dirección x' ; el segundo eigenvalor β es menor que cero, el cual describe una rapidez de contracción uniforme en la dirección y' . Durante un lapso de tiempo corto dt , estos procesos deforman la esfera de radio ϵ en un elipsoide cuyos semiejes tienen las longitudes

$$\epsilon(1 + \alpha dt), \epsilon(1 + \beta dt), \epsilon(1 + \gamma dt). \quad (1.13)$$

Los ejes del elipsoide en la Figura 1.3 apuntan en las direcciones x' , y' y z' , y se denominan *ejes principales* de la rapidez de deformación.

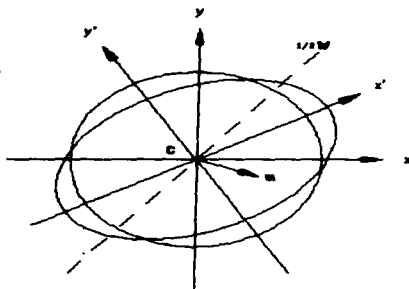


Figura 1.3. El efecto que el gradiente de velocidad tiene sobre una partícula de fluido esférica pequeña M analizado en sus tres constituyentes: (i) una translación uniforme a la velocidad u del centro de masa C de la partícula, (ii) una rotación de cuerpo rígido con velocidad angular igual a $\frac{1}{2}\omega$ donde ω es la vorticidad en C ; y (iii) la rapidez de deformación pura. (Figura tomada de Lighthill [12]). Los ejes principales de deformación son x' , y' y z' , en donde ocurre una elongación simple en la dirección x' , una contracción en la dirección y' junto con una contracción o una elongación en la dirección z' . La dirección x' es normal al plano del dibujo.

Además de la rapidez de deformación pura, la Figura 1.3 también ilustra las otras dos componentes del movimiento de la partícula M , siendo la translación a velocidad uniforme del centro de masa C y la rotación de cuerpo rígido a una velocidad angular $\frac{1}{2}\omega$.

1.2 Clasificación cinemática de los flujos.

1.2.1 Tipos de flujos.

Con base en las propiedades del tensor gradiente de velocidad es posible realizar una clasificación cinemática para flujos en los que no aparecen efectos caóticos como turbulencia. Esta clasificación sigue siendo muy amplia, pues no impone ninguna otra condición sobre la cinemática del flujo y es válida para todos los casos de flujo laminar.¹

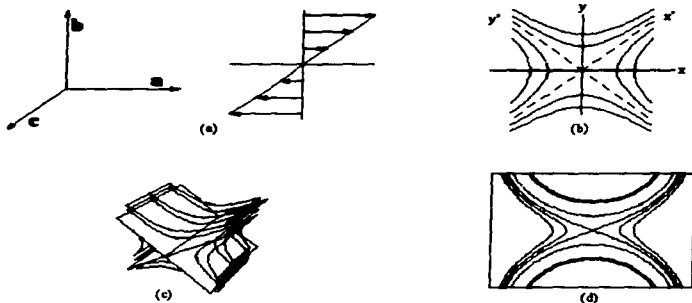


Figura 1.4. (a) Flujo cortante generado por el desplazamiento de una placa paralela a otra. \mathbf{D} y \mathbf{W} son diferentes de cero. (b) Flujo elongacional puro. Existe simetría axial para la dirección de elongación. $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D}$, $\mathbf{W} = \mathbf{0}$. (c) Flujo elongacional bidimensional con $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D}$, $\mathbf{W} = \mathbf{0}$. (d) Flujo bidimensional generado por un molino de dos rodillos. $\nabla \mathbf{u}$, \mathbf{D} y \mathbf{W} son diferentes de cero.

Flujos viscométricos. En el flujo viscométrico, cada elemento de fluido experimenta un movimiento simple cortante, más la posibilidad de una traslación y una rotación rígida, ver la Figura 1.4. Todos los flujos viscométricos pueden ser visualizados como el movimiento relativo de un conjunto de superficies materiales paralelas e inextensibles.

¹ Posteriormente en esta Sección se hace uso de un esquema de clasificación de acuerdo a los números dimensionales del sistema, en particular basados las ecuaciones válidas en flujos lentos.

Un ejemplo de tal movimiento es el flujo cortante simple cuyo campo de velocidades no depende del tiempo y puede expresarse de la forma

$$\mathbf{v} = \dot{\gamma}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} \quad (1.14)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores unitarios ortogonales y $\dot{\gamma}$ es la rapidez de corte y es constante, ver la Figura 1.4. En este flujo los puntos del fluido en el plano $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \text{constante}$ forman una superficie material que se llama superficie deslizante. Cada superficie deslizante se mueve como un cuerpo rígido, y este movimiento corresponde al movimiento deslizante relativo de un conjunto de superficies. El vector \mathbf{a} es tangente a la superficie deslizante y representa la dirección del movimiento, mientras que \mathbf{b} es la dirección normal a la superficie deslizante. Es conveniente definir un tercer vector unitario \mathbf{c} , ortogonal a \mathbf{a} y \mathbf{b} y se denominan a \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} los ejes de corte (o cizallamiento).

La historia de deformación de un elemento de fluido es viscométrica si su movimiento, visto desde un sistema con posibles ejes rotatorios, es un movimiento cortante simple continuo. Si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son los ejes de corte (dependientes del tiempo) de una partícula dada, y los elementos materiales infinitesimales de longitud dx tienen componentes a lo largo de las direcciones de los ejes de corte $\mathbf{a}(t)dx$, $\mathbf{b}(t)dx$ y $\mathbf{c}(t)dx$ en el tiempo t . La configuración de estas fibras materiales para un tiempo t' define la deformación de un elemento de volumen diferencial contenido entre los tiempos t y t' . La deformación es viscométrica si, para todo t' , las direcciones y las longitudes de estas tres fibras están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t)dx &\rightarrow \mathbf{a}(t')dx, & \mathbf{c}(t)dx &\rightarrow \mathbf{c}(t')dx, \\ \mathbf{b}(t)dx &\rightarrow [\mathbf{b}(t') + (t' - t)\dot{\gamma}\mathbf{a}(t')]dx, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $\dot{\gamma}$ es una constante para la partícula considerada.

Esta forma de la definición de la historia de deformación viscométrica no requiere que todas las partículas en un flujo dado estén en movimiento viscométrico para llamar al movimiento de una de ellas viscométrico, pero la característica global de tal flujo es que las superficies deslizantes, que son superficies materiales, se mueven sin estirarse permitiendo únicamente que las superficies cambien de forma.

En muchas situaciones, las superficies deslizantes se mueven constantemente como cuerpos rígidos, y cada superficie deslizante ocupa todo el tiempo la misma localización en el espacio, el movimiento relativo de dos cuerpos rígidos en contacto sobre una área se describe como la combinación de acciones deslizantes, giratorias y helicoidales. Esto es útil cuando se piensa en movimientos viscométricos con superficies deslizantes rígidas, en donde las superficies pueden ser cilíndricas, superficies de revolución o helicoides [13].

Esfuerzos en flujos viscométricos estacionarios. Cuando un líquido viscoelástico se lleva desde el reposo a un estado de movimiento cortante continuo, los esfuerzos son dependientes del tiempo a causa de los efectos transitorios de la historia de deformación pasada. Sin embargo, si el fluido es sometido a razones constantes de corte, estos transitorios decaen en el transcurso

del tiempo, y los esfuerzos cortantes se aproximan al valor del estado estacionario que depende sólo de la razón de corte. Para el caso más simple, con un campo de velocidades de la forma $v = \dot{\gamma}y \mathbf{i}$, las componentes del esfuerzo y - z y x - z deben ser cero por simetría, y el esfuerzo cortante σ_{xy} es una función impar de corte,

$$\sigma_{xy} = \dot{\gamma}\eta(\dot{\gamma}), \quad \eta(-\dot{\gamma}) = \eta(\dot{\gamma}). \quad (1.16)$$

Las condiciones de simetría asumen implícitamente que el fluido es isotrópico, así que cualquier propiedad direccional a de ser inducida por el flujo mismo. El cociente $\sigma_{xy}/\dot{\gamma} = \eta$ es la viscosidad cinemática del fluido.

Los componentes normales del esfuerzo σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} son funciones pares (cuadráticas) de la rapidez de corte por argumentos de simetría: los valores negativos de la rapidez de corte no afectan estos componentes. Consecuentemente, las diferencias entre estos componentes debe ser cero en cualquier teoría del comportamiento de un líquido caracterizado por una respuesta dependiente linealmente de la rapidez de corte (esto no se aplica a líquidos viscoelásticos). Los argumentos de simetría para deducir la forma del campo de esfuerzos en flujos cortantes se deben a Weissenberg (ver Tanner [14]).

Las dos diferencias independientes

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1(\dot{\gamma}) \quad \text{y} \quad \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2(\dot{\gamma}), \quad (1.17)$$

son funciones de la rapidez de corte que se desvanecen sólo cuando $\dot{\gamma} = 0$. Estas dos funciones de la rapidez de corte se llaman la *primera y segunda diferencia de esfuerzos normales*. Bajo la concepción clásica de un fluido, éste no permanece indefinidamente en reposo aún bajo la acción de pequeños esfuerzos cortantes; es decir, no hay ningún esfuerzo en el caso de que $\dot{\gamma} = 0$, puesto que la declaración de que $\dot{\gamma}$ es cero significa que el fluido ha estado en reposo el tiempo suficiente como para que todos los transitorios hayan desaparecido. Esto implica que no sólo σ_{xy} se desvanece, sino que todas las componentes normales de esfuerzo se anulan cuando $\dot{\gamma} = 0$. Es conveniente expresar esto como

$$N_1 = \dot{\gamma}^2 \nu_1(\dot{\gamma}) \quad \text{y} \quad N_2 = \dot{\gamma}^2 \nu_2(\dot{\gamma}). \quad (1.18)$$

Las funciones ν_1 y ν_2 son funciones pares de la rapidez de corte; estas funciones se llaman *primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales*. La primera y segunda diferencias de esfuerzos normales se desvanecen cuando se trata de fluidos newtonianos incompresibles.

Flujos elongacionales. Considérese ahora una barra de material que está siendo extendida homogéneamente a lo largo de su eje x . En cada sección se supone una rapidez de elongación $\partial u_x / \partial x$ ($\equiv \dot{\epsilon}$) independiente de x y que es una función del tiempo por lo menos. Por la conservación de la masa y por simetría axial se requiere que $\partial u_y / \partial y = \partial u_z / \partial z = -\dot{\epsilon}/2$. Todas las componentes de esfuerzo cortante son cero y por simetría $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. Para un líquido incompresible, la respuesta del esfuerzo está definida completamente por la dependencia de $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ sobre la rapidez de extensión $\dot{\epsilon}$ y el tiempo t transcurrido desde el inicio del estiramiento

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \dot{\epsilon} \eta_T(\dot{\epsilon}, t), \quad (1.19)$$

donde γ_T es la *viscosidad elongacional*, que generalmente es una función de la rapidez de estiramiento $\dot{\epsilon}$ y del tiempo; ver la Figura 1.4(b).

Un flujo extensional simple es, en cierto sentido, lo contrario de un flujo cortante simple. Para un flujo cortante, la deformación de una partícula de fluido consiste sólo de un cambio angular. Correspondientemente, el tensor de deformación sólo contiene un elemento en la diagonal secundaria: la rapidez de corte. Además, la partícula de fluido rota, así que para un flujo cortante $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; por lo que el tensor de vorticidad no es nulo. Un flujo extensional simple, por lo contrario, se distingue porque las partículas no rotan ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$) y son tensadas o comprimidas en direcciones mutuamente perpendiculares. Con respecto a una base coordenada cartesiana, estas direcciones en el tensor de deformación se expresan como

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Los elementos de la diagonal principal son las razones de elongación en las diferentes direcciones. Cuando se trata de un flujo incompresible, se tiene que $\text{Tr } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$. En un flujo extensional simple e isocórico, los elementos $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$ y $\dot{\epsilon}_3$ son constantes en cualquier posición, aunque posiblemente dependan del tiempo. Por lo tanto, todas las partículas del fluido en todo tiempo son tensadas o comprimidas en la misma cantidad, por lo que se le llama *deformación homogénea*. Ahora, puesto que se tienen tres constantes que describen un flujo de tipo extensional o elongacional es posible definir varios casos de interés. Un flujo *extensional uniaxial* es aquel en el que un elemento de volumen se estira en una dirección a una rapidez de elongación $\dot{\epsilon} > 0$, y se comprime en las otras dos direcciones a la mitad de la rapidez de elongación, es decir, $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}$ y $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}/2$. La inversa de este proceso, la compresión o encogimiento de un espécimen en cierta dirección con elongación en las dos direcciones perpendiculares, es conocido como flujo *extensional biaxial*.

Los esfuerzos que ocurren en un flujo extensional son exclusivamente esfuerzos normales en las direcciones consideradas, en las cuales el material se tensa o comprime, de esta manera el tensor de esfuerzos tiene la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Es claro que un tercer tipo de flujo extensional puede generarse con un flujo *bidimensional* en el que los elementos de volumen son estirados en una dirección y comprimidos, con la misma rapidez, en una dirección perpendicular, mientras que la tercera dirección normal a las anteriores permanece sin cambios; esto es $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_3 = 0$. De nuevo se tiene un flujo capaz de generar deformaciones puras, sin que exista vorticidad alguna.

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

(Ver la Figura 1.4(c)).

Los tres casos anteriores corresponden a los conocidos como flujos extensionales simples.

1.2.2 Importancia de los flujos fuertes.

La designación de flujos fuertes es tomada del criterio general propuesto por Olbricht [15] (como también los denomina Tanner [14], entre otros). En flujos bidimensionales, esta denominación implica que la *magnitud de la rapidez de deformación es mayor que la magnitud de la vorticidad*. Entonces, los flujos extensionales no son más que el caso particular en el cual la vorticidad se anula. Estudios realizados tanto en soluciones de polímeros diluidas como en concentradas, han mostrado que la orientación y extensión del polímero es cualitativamente similar para todos los flujos fuertes, incluyendo extensión pura, estipulando que la orientación del polímero se compara con el eigenvector principal del tensor gradiente de velocidad, y se usa la rapidez de deformación efectiva (es decir, la magnitud del eigenvector principal) a lo largo de esta dirección, en vez del gradiente de velocidad.

Los flujos extensionales simples no ocurren en la naturaleza, sin embargo hay una serie de procesos tecnológicos en los cuales ocurren flujos extensionales con propiedades que al menos *localmente* corresponden con las características de un flujo elongacional simple, tal es el caso de los dados de extrusión, los procesos de fabricación de fibras, entre muchos otros de interés en la ingeniería. En general, los flujos que ocurren en la naturaleza o en los procesos de manufactura son notablemente más complejos que los anteriores como se explica a continuación, y sin embargo, generalmente se asemejan más a los de tipo elongacional que al flujo simple cortante. Por ejemplo, en el proceso de extrusión de monofilamentos (fibras de acero, vidrio o materiales poliméricos, etc.) el material fundido se extruye desde una boquilla y es estirado por tensión, mientras simultáneamente es enfriado, así que la fibra se adelgaza y solidifica después de viajar una cierta distancia. Los parámetros de importancia de este proceso son la longitud de la zona fundida antes de la solidificación, la fuerza de tensión, la razón de reducción de la sección transversal de la fibra, la velocidad a la que la fibra se extruye y el flujo másico en la boquilla. El proceso de extrusión tiene varias características generales que son resultado del tipo de material procesado, es decir, las características del filamento a la salida de la boquilla dependen del grado de elasticidad que tenga el material, encontrándose que para un líquido viscoelástico existe una región de *hinchamiento* notable, justo después de la boquilla, efecto que no existe para un líquido puro como el agua. (Ver Figuras en Bird et al. [16]) A este efecto elástico se le conoce como "die swelling", y puede utilizarse para conocer la viscosidad elongacional η_T de un material viscoelástico.

A pesar de la complejidad del proceso, es posible caracterizar la cinemática de las diferentes regiones que ocurren en el procesamiento. Es claro que el fluido en la boquilla está sujeto a un flujo cortante, e inmediatamente después de haber salido, el material está sometido a una combinación de flujo cortante y flujo *elongacional biaxial*. Una vez recorrida la zona de hinchamiento, el material se estira uniaxialmente sin que exista mayor complejidad en el flujo. El flujo uniaxial ocurre en la dirección axial del filamento mientras que el proceso previo ocurre en la dirección radial. Así, existe una región de *transición* desde el interior de la boquilla hasta la región de elongación uniaxial, en la que V_x , D y W cambian de valor, en función de las coordenadas cilíndricas que caracterizan el filamento (r , z). Sin embargo, a pesar de que la región de elongación no está claramente delimitada, el flujo del fundido se analiza a partir

del lugar en donde ocurre el hinchamiento máximo del extruido ($x = 0$). Debido a que la fibra generalmente es fina y estrecha, todas las partículas del fluido se mueven en la zona de elongación en la misma forma como aquellas que están en el eje de simetría axial. Hay, principalmente, desplazamiento en la dirección axial a una determinada velocidad. Por lo tanto, sucede un flujo aproximadamente extensional uniaxial e irrotacional. Este proceso puede ser estable, pero representa una deformación no homogénea, porque la razón de elongación $\dot{\epsilon} = du/dx$ de hecho cae a cero en el punto de solidificación, y por eso, obviamente depende de la posición. Por lo tanto, el proceso no es estrictamente estacionario refiriéndose a coordenadas materiales.

Un segundo proceso relacionado con flujos elongacionales es el "soplado de películas" usado en la fabricación de láminas delgadas de plástico. En este caso, el fluido sale de una boquilla anular y forma un tubo cerrado simétrico, el cual se solidifica o enfría a alguna distancia dada de la boquilla, mientras una presión manométrica baja dentro del tubo contribuye a darle estabilidad durante su expansión. Para dar al extruido el espesor deseado éste puede además ser estirado con una tensión longitudinal. Entonces, el extruido se estira en la zona de formación del tubo no sólo en la dirección anular, sino que también longitudinalmente. Por lo tanto, hay un flujo extensional biaxial con dos razones de elongación independientes la una de la otra.

Sin embargo, debido a que los polímeros fundidos son fluidos no newtonianos, el análisis de su dinámica (no lineal) resulta difícil, a pesar de los avances en la reología, y debido a ello, se hacen aproximaciones en las cuales primero se estudia el flujo de un fluido a bajos números de Reynolds, y de esta forma se busca abordar el problema de dinámica no lineal de soluciones poliméricas como una aproximación lineal de un fluido newtoniano. Es por ello, que resulta de gran valor estudiar dispositivos que generen flujos fuertes, y conocer las desviaciones de la teoría y de los experimentos para poder evaluar la aproximación mencionada. Es claro que matemáticamente es posible definir condiciones de flujo que se asemejan notablemente a las que ocurren en diferentes procesos industriales. Sin embargo, en el laboratorio es difícil generar flujos que permitan caracterizar la respuesta del material a una deformación de tipo elongacional que sea equivalente a aquellas que frecuentemente existen en la naturaleza. Es más, en la práctica, los flujos generados en el laboratorio pueden caracterizar los materiales sujetos a flujos cortantes, siendo también posible generar condiciones equivalentes a flujo elongacional *únicamente* en una *pequeña* región, en la cual se aplican efectos elongacionales por tiempo corto o para pequeños elementos de volumen del material. La caracterización de la respuesta de un material a flujos elongacionales es todavía un problema científico abierto de gran interés tanto académico como tecnológico. Una contribución importante en este tipo de flujos se ha hecho en años recientes con flujos *lineales bidimensionales* en los que puede controlarse la magnitud de D y de W [1, 3]. Estos flujos se generan con molinos de dos o de cuatro rodillos como se muestra en la Figura 1.4(d).

El objetivo principal de este trabajo de tesis es el estudio de las características de un flujo generado por un molino de dos rodillos, por su importancia para el estudio de materiales viscoelásticos bajo condiciones difícilmente accesibles en un laboratorio de investigación, y por su importancia para las aplicaciones industriales semejantes a las de soplado o elaboración de filamentos, entre muchas otras.

En las próximas secciones se plantean las herramientas necesarias para el estudio analítico propuesto. A continuación se describe en detalle las características del flujo generado por un molino de dos rodillos, enfatizando sus bondades en relación a las propiedades del flujo y los efectos sobre el material para condiciones semejantes a las de los procesos de soplado o elongación de fibras.

1.2.3 Un molino de dos rodillos.

El molino de dos rodillos consiste en dos cilindros del mismo diámetro y de altura finita con sus ejes paralelos y a una distancia fija, que giran con sentido corrotatorio a una misma velocidad angular. Los rodillos se encuentran contenidos en un recipiente que tiene tapas transparentes que permiten utilizar técnicas ópticas para realizar mediciones y que a la vez sirven de soportes para los ejes de los rodillos. El molino de dos rodillos tiene las siguientes características:

- Un punto de estancamiento localizado en la mitad de la línea que une los ejes de los rodillos.
- Las características del flujo dependen del radio de los rodillos R , de la separación g entre los ejes de éstos y de la velocidad angular ω , por lo que el tensor gradiente de velocidad ∇u , el tensor de deformación D y de vorticidad W son funciones de R , g y ω .
- Puede generar historias de deformación semejantes a flujo cortante así como flujos elongacionales, variando el radio de los rodillos.
- Se puede utilizar para estudios de dinámica polimérica en conjunto con la técnica de birrefringencia bicolor para flujos, la cual mide el grado de anisotropía de la microestructura del polímero, siendo una técnica rápida, con medidas puntuales de la anisotropía del fluido y con muy buena reproductibilidad. Además, el método de birrefringencia bicolor es capaz de obtener lecturas puntuales en campos de flujos no homogéneos con una resolución espacial de $50 \mu\text{m}$.

Una de las ventajas principales del molino de dos rodillos sobre el de cuatro rodillos es la existencia de una solución analítica para el caso de un flujo lento no acotado bidimensional, permitiendo predecir completamente las características del flujo para geometrías dadas. La forma general de la solución de un flujo lento estacionario generado por dos cilindros idénticos de radio arbitrario y con una distancia centro a centro también arbitraria fue dada por Jeffery [6] en 1922, quien también analizó el caso particular de un molino de dos rodillos con giro contrario. Sin embargo, esta solución general dista mucho de ser útil para los propósitos mencionados en la sección anterior. Más aún, a la fecha no se han publicado las soluciones particulares en función de los parámetros geométricos del molino y de la velocidad de giro de los rodillos. Ahora bien, si se conocen soluciones *aproximadas* o válidas en *regiones específicas* del molino. En particular, existe la solución aproximada de Dunalp [2] para la región que incluye el punto de estancamiento, la solución en series de Geffroy y Ascoli [4] para la misma región y la solución numérica de Singh y Leal [1]

Este trabajo presenta una solución exacta, en series, que es válida para cualquier punto en el molino de dos rodillos. Asimismo, esta solución permite calcular y conocer los principales parámetros del flujo que son relevantes para la reología de líquidos viscoelásticos.

1.2.4 Criterio cinemático de Astarita para la clasificación de flujos.

Después de varios intentos por establecer un criterio para poder clasificar los flujos de acuerdo a sus propiedades cinemáticas, en 1979, Astarita [5] propone uno basado en los tensores de deformación y de vorticidad del flujo. Además del criterio puramente cinemático, Astarita propone otro paralelo que involucra las propiedades reológicas del fluido; este criterio y el anteriormente mencionado tienen diferente aplicación de acuerdo al problema que se desea estudiar.

El criterio cinemático que Astarita propone tiene las siguientes propiedades:

- a. es un criterio local, pues es posible calcular su valor en un punto sin que se requiera tener información de todo el campo,
- b. es objetivo (invariante al cambio del marco de referencia), y
- c. es generalmente aplicable, puesto que su cálculo es viable en la mayoría de los casos de interés.

El criterio propuesto por Astarita es aplicable como un criterio estrictamente cinemático como aquí se utiliza. Es también aplicable cuando se consideran algunos parámetros del fluido (por ejemplo, el tiempo de relajamiento del fluido) asociados a su estructura interna. Este segundo uso para el criterio expuesto ha sido también utilizado por Tanner y Huilgol [17], Olbricht y Leal [15] con el propósito de relacionar los tiempos característicos del flujo y del material.

Es importante señalar lo que se entiende por la objetividad de una ecuación constitutiva. Esencialmente existen dos principios de objetividad, el primero de ellos establece solamente que la forma de una ecuación constitutiva debe ser invariante bajo transformaciones de coordenadas ortogonales. El significado físico es que la forma de una ecuación constitutiva no debe cambiar si, en vez de expresarla con respecto a algún sistema de coordenadas, la expresamos en términos de un segundo sistema de coordenadas derivado del primero por medio de una rotación o una inversión de los ejes de coordenadas, lo cual se llama transformación ortogonal. Este principio se fundamenta en el hecho de que el cambio en la orientación o sentido del sistema de coordenadas no influye en el proceso físico relevante, y esto no debe influir en la forma de la ecuación constitutiva.

El segundo requerimiento de objetividad de una ecuación constitutiva es que ésta debe permanecer sin cambio bajo una transformación en el marco de referencia del observador, aun si el marco del observador (o del fluido) está acelerado con respecto a otro marco de referencia. Esto es una consecuencia de la noción intuitiva de que las propiedades mecánicas o térmicas de un elemento material no dependen de ningún movimiento del observador. Este principio se llama *principio de la objetividad material*. La objetividad material es un requerimiento más estricto que el de la objetividad de las ecuaciones constitutivas que involucran variables dinámicas.

Si se aplican las más altas razones de deformación (de estiramiento) a una línea material, un líquido elástico puede acumular esfuerzos debido a la razón de deformación progresivamente más alta que la razón de relajación de esfuerzos. Sin embargo, si el material rota, la misma línea material no estará siempre expuesta a la razón más alta de tensión, y de hecho, ocasionalmente experimentará compresiones, así que la acumulación de esfuerzos total será menos severa, aunque

es más compleja. La dificultad para formalizar este concepto radica en el hecho de que el tensor de vorticidad, el cual mide la razón de rotación, *no es objetivo*. Lo relevante aquí no es la razón de rotación del material con respecto a un marco de referencia de laboratorio (el cual no es objetivo, pues las propiedades materiales no dependen del marco de referencia del observador), sino la razón de rotación con respecto a la dirección del máximo estiramiento, esto es, con respecto a los ejes principales de \mathbf{D} . Esta última razón de rotación es objetiva, puesto que no está relacionada a ninguna selección arbitraria del marco de referencia.

El tensor cinemático $\mathbf{\Omega}$ es la razón de rotación del tensor \mathbf{D} para una partícula (o punto material). Si \mathbf{n} es un eigenvector de \mathbf{D} normalizado (es decir, un vector unitario a lo largo de los ejes principales de \mathbf{D}), la definición de $\mathbf{\Omega}$ es

$$\frac{D\mathbf{n}}{Dt} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.23)$$

Un segundo tensor cinemático es el tensor $\mathbf{\bar{W}}$ definido por

$$\mathbf{W} = \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \quad (1.24)$$

que mide la razón de rotación de una partícula con respecto a la razón de deformación de los ejes principales de esa partícula. Aunque \mathbf{W} y $\mathbf{\Omega}$ no son objetivos, $\mathbf{\bar{W}}$ sí lo es [5].

De esta forma, una medida objetiva de la razón de rotación relevante está ahora disponible, y el criterio cinemático que Astarita propone es

$$R = -\text{Tr } \mathbf{\bar{W}}^2 / \text{Tr } \mathbf{D}^2, \quad (1.25)$$

el cual se expresa también de la siguiente forma

$$R = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^2, \quad (1.26)$$

en donde $\lambda^2 \leq 1$ y se extiende a través de todo el rango de interés, desde movimiento de cuerpo rígido ($\lambda = -1$), pasando por flujo viscomérico ($\lambda = 0$) hasta flujo elongacional ($\lambda = 1$). R es la medida de qué tan rápido el material se protege a sí mismo de estiramientos severos por medio de rotación, cuyo valor es infinito para rotaciones de cuerpo rígido y decrece monotónicamente a la unidad en el caso de flujos viscoméricos, y siendo cero para flujos elongacionales. En el último caso, no hay rotación que alivie los esfuerzos.

De las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{-\text{Tr } \mathbf{\bar{W}}^2}{\text{Tr } \mathbf{D}^2} = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^2, \quad (1.27)$$

pero como \mathbf{W} es antisimétrico, entonces $-\text{Tr } \mathbf{\bar{W}}^2 = \text{Tr } \mathbf{W} \mathbf{W}^T$ y la expresión queda como

$$\left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) = \sqrt{\frac{\text{Tr } \mathbf{D}^2}{-\text{Tr } \mathbf{W}^2}} = \frac{\sqrt{\text{Tr } \mathbf{D}^2}}{\sqrt{\text{Tr } \mathbf{W} \mathbf{W}^T}} = \frac{\|\mathbf{D}\|}{\|\mathbf{W}\|}. \quad (1.28)$$

El rango de flujos fuertes se encuentra entre $0 < \lambda \leq 1$, y el rango de flujos débiles está entre $-1 \leq \lambda \leq 0$ [15].

Ahora es posible probar que los tensores de deformación de Green-Cauchy [13] y que las deformaciones producidas por flujos fuertes, además de tener menor vorticidad, presentan historias de deformación que crecen con el tiempo *exponencialmente*, mientras que el flujo cortante crece, a lo más, cuadráticamente (flujo doble cortante [13]). Las implicaciones para el estudio de la dinámica polimérica son obviamente importantes, pues los cambios en la microestructura de un fluido pueden ser severos, lográndose fuertes efectos elásticos en líquidos poliméricos resultado de una estructura macromolecular fuertemente estirada.

1.3 Leyes de conservación.

Para poder iniciar el análisis de la solución general de un molino de dos rodillos es necesario, primero, comenzar con los principios básicos de la mecánica de fluidos para evaluar las consecuencias de las simplificaciones hechas y conocer las limitaciones y ventajas de la solución final obtenida.

1.3.1 Conservación de la masa.

El principio de conservación de la masa considera un volumen material o masa de control $V_m(t)$ en un flujo, que se mueve con la velocidad local del continuo y así se va deformando. Sin embargo, su masa permanece invariante, por lo que el principio de la conservación de la masa implica que

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \, dV = 0, \quad (1.29)$$

donde el símbolo D/Dt representa la *derivada material o substancial*, que da la razón de cambio de la masa del volumen material, o en general de cualquier variable de campo a medida que se desplaza en el espacio y tiempo en la dirección del flujo, cuya expresión es

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (1.30)$$

La ecuación de la conservación de la masa (Ecuación 1.29) se puede también expresar en forma vectorial como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.31)$$

Esta expresión se le conoce como la *Ecuación de Continuidad*. Existen algunas formas particulares de la ecuación de continuidad; por ejemplo para flujos estacionarios (independientes del tiempo) la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.32)$$

Asimismo, cuando el fluido tiene una densidad constante (fluidos incompresibles) la ecuación de continuidad es simplemente

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.33)$$

que es válida tanto para flujos dependientes del tiempo como para flujos estacionarios.

1.3.2 Conservación del momentum lineal o de la cantidad de movimiento.

El principio de conservación del momentum lineal o de la cantidad de movimiento es una aplicación de la segunda ley de movimiento de Newton a un elemento de fluido. Esto es, cuando se considera una masa dada de fluido en un sistema de referencia inercial, se establece que la razón a la cual el momentum del fluido en cuestión cambia, es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre tal masa.

Los dos tipos de fuerzas posibles que actúan sobre masas fluidas y están distribuidas a través de todo el medio fluido se pueden clasificar como: (a) fuerzas de cuerpo o volumétricas, y (b) fuerzas superficiales.

Las fuerzas de cuerpo son fuerzas de carácter *extensivo* y son debidas a alguna causa externa o campo externo. Los campos externos pueden ser el gravitatorio, campos eléctricos y magnéticos, fuerzas centrífugas, etc. entre otras. El carácter extensivo de las fuerzas de cuerpo implica que son proporcionales a la masa del fluido y por lo tanto, se expresan como fuerza por unidad de masa y se denotan por $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ o simplemente por \mathbf{f} . Así, las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen se representan por $\rho \mathbf{f}$.

Las fuerzas superficiales son fuerzas de naturaleza *intensiva* o local. Las fuerzas superficiales surgen de la interacción física de porciones contiguas de fluidos en la superficie imaginaria que los separa, o entre un fluido y una superficie sólida. Esta interacción da origen a un campo de fuerzas superficiales (o esfuerzos superficiales) que son diferentes en magnitud y dirección para distintos puntos, por lo que estos vectores se representan como $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ o simplemente $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, donde \mathbf{n} es el vector normal unitario saliendo de la superficie imaginaria en el punto \mathbf{x} . Unido al concepto de vector esfuerzo se encuentra el del tensor de esfuerzos \mathbf{T} , que determina el estado de los esfuerzos, a través de tres planos mutuamente perpendiculares que se intersectan en un punto, y se relaciona con $\boldsymbol{\tau}$ mediante la ecuación $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}$. Sin embargo, el tensor \mathbf{T} es simétrico [18, 19] entonces $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, y por tanto

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.34)$$

El principio de la distribución de esfuerzos superficiales o *principio de esfuerzo de Cauchy* establece que sobre una superficie cerrada imaginaria $S_m(t)$ existe una distribución de vectores de esfuerzo $\boldsymbol{\tau}$ cuya resultante y momento resultante son equivalentes a las fuerzas ejercidas por el material fuera de $S_m(t)$ sobre el fluido encerrado por $S_m(t)$ [11].

Las propiedades principales de los vectores de esfuerzo son:

1. El vector de esfuerzo es la fuerza por unidad de área en la dirección del vector \mathbf{n} .
2. El vector de esfuerzos es una función lineal de las componentes de la normal a cualquier superficie pasando a través del punto.
3. Los vectores de esfuerzo están en equilibrio local

La ley de la conservación del momentum establece que la razón de cambio temporal del momentum lineal de un cuerpo, mientras éste experimenta una deformación o fluye, es igual a la suma de las fuerzas superficiales que actúan sobre la frontera del cuerpo más las fuerzas de cuerpo que actúan sobre él. De esta forma, la ecuación de conservación del momentum se expresa como

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_m(t)} \boldsymbol{\tau} dS, \quad (1.35)$$

que se puede expresar en forma vectorial de la siguiente manera

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (1.36)$$

Asimismo, esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma alternativa

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.37)$$

que se conoce como la *ecuación del movimiento de Cauchy*.

Si se toma el producto interno de la ecuación de Cauchy con \mathbf{u} se obtiene

$$\frac{\rho}{2} \frac{D u^2}{Dt} = (\rho \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}), \quad (1.38)$$

que es la relación conocida como *balance de energía mecánica* y es una consecuencia directa de la ley de la conservación del momentum.

1.3.3 Ecuaciones constitutivas.

Hasta ahora, las ecuaciones básicas del medio continuo no son suficientes en número para determinar las variables independientes en su totalidad. Las ecuaciones constitutivas son relaciones adicionales que no introducen más variables independientes y representan las características materiales del fluido. Las ecuaciones constitutivas relacionan la magnitud del campo externo y la respuesta del material, por ejemplo, la relación que existe entre el tensor de esfuerzos y el tensor de deformación, etc. Puesto que la Ecuación 1.37 involucra el tensor de esfuerzos, entonces la primera ecuación constitutiva a considerar es precisamente la que relaciona los esfuerzos y las deformaciones. En este caso la ecuación constitutiva debe cumplir con:

1. Cuando el fluido está en reposo, el esfuerzo es hidrostático si se trata de fluidos incompresibles; y en el caso de fluidos compresibles, la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.
2. A primera aproximación, el tensor de esfuerzos \mathbf{T} es linealmente proporcional al tensor de deformación \mathbf{D} y depende sólo de ese tensor.
3. Puesto que no hay acción cortante en una rotación de cuerpo rígido, no hay esfuerzos cortantes en tal movimiento.
4. No hay direcciones preferentes en el fluido, así que las propiedades del fluido son funciones puntuales.

La condición 1 requiere que el tensor de esfuerzos tenga la forma

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.39)$$

donde $-p$ es la parte isotrópica, siendo p la presión termodinámica en el caso de fluidos compresibles o la presión de fluido o estática en fluidos incompresibles; $\boldsymbol{\sigma}$ es la parte anisotrópica o deviatoria llamada *tensor de esfuerzos deviatorios* o *cortantes*, que depende solamente del movimiento del fluido. El tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es una consecuencia de la resistencia a la rapidez de deformación del elemento de fluido y forma un campo de fuerza que se representa por ese tensor.

La condición 2 implica que el tensor de esfuerzos \mathbf{T} , y por lo tanto el tensor de esfuerzos deviatorios $\boldsymbol{\sigma}$, están relacionados linealmente con el tensor de deformación. Los postulados de Stokes (véase Warsi [11]) indican que

1. $\boldsymbol{\sigma}$ es una función continua de \mathbf{D} y es independiente de todas las demás variables cinemáticas.
2. La forma de $\boldsymbol{\sigma}$ como función de \mathbf{D} no depende ni de la posición en el espacio ni de cualquier otra dirección preferencial.
3. Para fluidos invíscidos, $\boldsymbol{\sigma} = 0$ y $\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$.

De acuerdo a lo anterior, cuando $\mathbf{D} = 0$, entonces $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Los fluidos que presentan este comportamiento se conocen como fluidos de Stokes. Estos fluidos conforman una clasificación general que incluye fluidos anisotrópicos, conductores del calor, termoviscosos, heterogéneos e inclusive aquellos con la característica de que $\boldsymbol{\sigma}$ no es una función lineal de \mathbf{D} [20]. Los fluidos de Navier-Stokes son una subclase de los fluidos de Stokes con características de homogeneidad, isotropía y de linealidad en la función $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D})$; éstas son las características de los llamados fluidos newtonianos. Se conocen como fluidos viscoelásticos de Maxwell aquellos que cuando \mathbf{D} tiende a cero, los esfuerzos no desaparecen inmediatamente, sino que se relajan gradualmente con el tiempo.

Hay nueve elementos del tensor de esfuerzos que se expresan como una combinación lineal de los nueve elementos del tensor de deformación, mediante una función isotrópica tensor-valuada de \mathbf{D} . La expresión que describe esta relación es

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \text{TrD}) \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D}, \quad (1.40)$$

donde TrD es la traza del tensor de deformación y la ecuación constitutiva para el esfuerzo de un fluido newtoniano es

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \text{TrD}) \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{D}. \quad (1.41)$$

Esta ecuación indica que el tensor de esfuerzos se expresa en términos de la presión, del gradiente de velocidad y de dos coeficientes λ y μ , que se determinan experimentalmente y se denominan *coeficientes de viscosidad*. El coeficiente μ es la viscosidad dinámica, viscosidad al cortante o primer coeficiente de viscosidad y el parámetro λ es conocido como el segundo coeficiente de viscosidad o viscosidad dilatacional.

La segunda relación constitutiva involucra el flujo de calor debido únicamente a conducción. La ley de Fourier de la conducción del calor establece que

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (1.42)$$

siendo esta la ecuación constitutiva para el flujo de calor, donde k es la conductividad térmica del fluido y ∇T es el gradiente de la temperatura.

1.3.4 Ecuación de Navier-Stokes.

La combinación de la ecuación de la conservación del momentum lineal y las relaciones constitutivas para un fluido newtoniano dan como resultado la ecuación de Navier-Stokes. Realizando la sustitución de la Ecuación 1.41 en la Ecuación 1.37 se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] &= \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Ésta es la ecuación de Navier-Stokes en forma vectorial.

Si se considera que el fluido es incompresible y que la viscosidad dinámica es constante, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.44)$$

Los primeros dos términos en el lado izquierdo de la Ecuación 1.44 corresponden a las fuerzas de inercia del elemento de fluido, que surgen debido a la razón de cambio de su momentum lineal. En el lado derecho, el primer término representa las fuerzas de cuerpo que se aplican sobre el mismo elemento, el segundo representa la fuerza del gradiente de presión y el último representa la fuerza friccional debida a la viscosidad, todos calculados por unidad de volumen. Entonces, la ecuación de Navier-Stokes expresa la condición de que todas las fuerzas mencionadas están en equilibrio local.

Bajo ciertas condiciones, en la ecuación de Navier-Stokes es posible simplificar los términos asociados a las fuerzas de cuerpo. Esta simplificación se muestra a continuación.

Eliminación del término de la fuerza de cuerpo. En el caso del flujo de un fluido incompresible, el término de la fuerza de cuerpo $\rho \mathbf{f}$ en la Ecuación 1.44 puede ser incluido en el término del gradiente de presión bajo las siguientes condiciones:

1. La única fuerza de cuerpo es aquella debida a la gravedad, esto es, $\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$.
2. No hay una superficie libre en el flujo, ya que en tal caso es necesario considerar la presencia explícita de la fuerza de cuerpo debida a la gravedad.
3. No hay estratificaciones en el fluido por diferencias de densidad (lo cual significa que el fluido es homogéneo y que las fuerzas de flotación son despreciables).

Cuando estas condiciones se satisfacen, se tiene que $\rho f = \rho g = -\nabla U$, donde U es la energía potencial del fluido, y la Ecuación 1.44 toma la forma

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 v \quad (1.45)$$

donde

$$P = p + U + p_0 \quad (1.46)$$

y p_0 es una constante. La cantidad P es la presión del fluido modificada o presión dinámica, que se determina como una constante arbitraria dadas las condiciones de frontera. El manejo implícito del término de las fuerzas de cuerpo es útil sólo cuando las condiciones de frontera no involucran términos de presión, pues de lo contrario las condiciones del cañero en las fronteras requieren los términos de la presión dentro del análisis.

Para un fluido incompresible sobre el que no actúan fuerzas de cuerpo, la ecuación de Navier-Stokes puede reescribirse utilizando la identidad vectorial $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ y $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ quedando como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ahora, aplicando el rotacional $\nabla \times$ a ambos lados de la ecuación y simplificando se obtiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (1.48)$$

o equivalentemente

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (1.49)$$

Las Ecuaciones 1.48 y 1.49 gobiernan el transporte de la vorticidad durante un flujo. En la Ecuación 1.48, el primer y segundo términos del lado derecho representan respectivamente la *convección* y la *difusión de la vorticidad*. Conjuntamente, estos dos procesos dan la rapidez de cambio de la vorticidad en un elemento de fluido.

Una vez que se conocen las ecuaciones que gobiernan el acarreo de masa y momentum, entonces, además de que se requiere conocer la viscosidad μ y la densidad ρ , para conocer el campo de velocidades y de presión se necesita conocer las condiciones iniciales y los valores de frontera. En particular, las primeras definen las condiciones del flujo a un tiempo inicial $t = t_0$, y las segundas definen el dominio (físico) del flujo, así como las condiciones que imperan sobre la superficie de dicho dominio.

Cuando sobre la superficie de dominio del flujo el fluido está en contacto con una frontera sólida, las fuerzas de atracción que ocurren entre ellos causan que el fluido moje la superficie sólida. Como consecuencia, el fluido se adhiere a la frontera sólida. Esto significa que en la teoría clásica del continuo del movimiento de fluidos viscosos, la velocidad relativa del fluido

con respecto a la superficie sólida se puede tomar como cero. Entonces, si la frontera sólida está en reposo, la velocidad del fluido debe satisfacer la condición $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre la frontera sólida. Si la frontera sólida está en movimiento con una velocidad \mathbf{v}_0 , la velocidad del fluido debe satisfacer la ecuación $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ sobre la frontera. Esta condición de frontera se conoce como la *condición de no deslizamiento* o *condición de adherencia*.

En una *entrecara*² entre dos fluidos inmiscibles, una de las condiciones de frontera es que las velocidades deben ser iguales, esto es, que las velocidades deben ser continuas a lo largo de la entrecara. Además, el tensor de esfuerzos también debe ser continuo a lo largo de la superficie, lo cual es una consecuencia del hecho de que las fuerzas ejercidas por los fluidos uno al otro en su superficie de contacto deben ser iguales y en sentidos opuestos. Estas condiciones se pueden expresar como $\mathbf{v}_{\text{fluido } 1} = \mathbf{v}_{\text{fluido } 2}$ y $\mathbf{T}_{\text{fluido } 1} \cdot \mathbf{n}_{\text{fluido } 1} = \mathbf{T}_{\text{fluido } 2} \cdot \mathbf{n}_{\text{fluido } 2}$ las cuales se mantienen en cualquier punto de la entrecara.

En la superficie libre de un fluido los esfuerzos desaparecen, la condición de frontera es entonces, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Las condiciones iniciales especifican el campo de velocidad y el campo de densidad a través de toda la masa total del fluido en algún tiempo inicial convenientemente seleccionado. Entonces, las condiciones iniciales pueden establecer que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x}, t_0) = \rho_0(\mathbf{x})$ para todo el fluido en el tiempo inicial t_0 .

Con las ecuaciones de continuidad, la constitutiva para un líquido simple y la de Navier-Stokes, en principio es posible conocer el campo de velocidades para un flujo isotérmico. Sin embargo, es claro que el problema, con frecuencia, es matemáticamente imposible por la existencia del término fuertemente no-lineal $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Sin embargo, para el problema de interés de este trabajo varias simplificaciones son posibles:

1. La celda de flujos (el molino de dos rodillos) es un recipiente cerrado en el que el fluido está en contacto únicamente con las paredes del recipiente y tiene una capacidad aproximada de 110 cm^3 de volumen, con una altura de 38 mm y durante los experimentos se mantiene la temperatura del fluido con variaciones menores de $0.05 \text{ }^\circ\text{C}$. Bajo estas condiciones, el efecto de la gravedad en el balance de fuerzas de cuerpo es despreciable.
2. La región de interés en la celda de flujos puede analizarse como un *flujo extensional bidimensional* en el que el vector de vorticidad es diferente de cero para cualquier punto en el flujo, en donde el fluido es incompresible, isotérmico y se mueve lentamente. Así, dos ideas complementarias se han de introducir en la ecuación de Navier-Stokes de forma que el problema matemático se simplifique: la función de corriente, que permite conocer las componentes de la velocidad (como las derivadas parciales de la función de corriente) y la vorticidad que es totalmente equivalente al campo de velocidades.

² Se usa la palabra entrecara para referirse a la superficie definida entre dos líquidos y que en la literatura inglesa se conoce como *interface*.

1.4 Soluciones para números de Reynolds bajos. La aproximación de Stokes.

Siendo claro hasta este punto que, aún para un fluido newtoniano e incompresible sujeto a condiciones de flujo no turbulento e isotérmico, la obtención de una solución para las ecuaciones de balance, mas las condiciones de frontera, representa ser un problema matemático casi imposible para la mayoría de los casos. La dificultad estriba en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales fuertemente no lineales para el cual no se conocen métodos generales de solución.

Así, mucho del avance alcanzado desde el siglo pasado ha sido posible para casos especiales (por ejemplo, los flujos unidireccionales) en los que el término no-lineal desaparece. Más recientemente, el énfasis para la búsqueda de soluciones se ha centrado en las metodologías para la solución de ecuaciones aproximadas a la ecuación de Navier-Stokes y la obtención de soluciones exactas [21].

En particular, la ecuación completa de Navier-Stokes puede linealizarse para el caso de flujos lentos. Esta bondad se explota a plenitud en la búsqueda de la solución para el flujo de dos rodillos. Por tanto, en esta Sección se busca establecer el marco físico que define un sistema de ecuaciones para el flujo, para el cual se pueden aplicar metodologías probadas en la obtención de la solución.

Ahora, si bien las ecuaciones resultantes no son la ecuación de Navier-Stokes, las soluciones obtenidas resultan ser de gran utilidad para el cálculo de soluciones aproximadas para flujos aún más generales, pues existen las metodologías analíticas apropiadas para ello, tales como aproximaciones asintóticas para ecuaciones no-lineales, mediante teoría de perturbaciones o de expansiones asintóticas, en donde la solución lineal corresponde con la solución aproximada de orden cero.

Es por ello que contar con una *solución exacta* a orden cero (flujo lento) para el caso del molino de dos rodillos es de gran importancia para la mecánica de fluidos, pues ofrece la posibilidad de estudiar toda una clase de problemas de utilidad en la industria, así como en la ciencia básica.

Soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento para fluidos viscosos son difíciles de obtener debido a la naturaleza no lineal de la ecuación de Navier-Stokes. Sólo se conocen algunas soluciones exactas y frecuentemente se pueden calcular soluciones en flujos donde los términos no lineales desaparecen, como en el caso de flujo en ductos. Más aún, flujos alrededor de cuerpos inmersos que se caracterizan por números de Reynolds altos son más difíciles de investigar debido a que las variables dependientes, la velocidad y la presión, ya no son funciones únicas de las coordenadas espaciales y del tiempo.

En los problemas en los cuales una solución exacta no es conocida, puede ser posible obtener una solución aproximada. Una solución aproximada es una expresión analítica que satisface aproximadamente las ecuaciones gobernantes en vez de utilizar aproximaciones numéricas de estas ecuaciones.

La aproximación de Stokes es la aproximación fundamental para números de Reynolds bajos. La ecuación de Stokes es un caso especial de la ecuación de Navier-Stokes correspondientes a movimientos muy lentos de fluidos viscosos. Bajo estas condiciones la inercia del fluido se desprecia en comparación con las otras fuerzas que actúan sobre él. Puesto que el número de Reynolds puede ser considerado como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas del fluido, la condición de fuerzas de inercia despreciables indica números de Reynolds pequeños. La característica esencial de la aproximación de Stokes es que el componente de inercia se asume que es despreciable, comparado con las fuerzas viscosas. Entonces, de las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes, las ecuaciones gobernantes de la aproximación de Stokes para un campo de flujo incompresible sin fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Esta última ecuación corresponde a la llamada *ecuación de Stokes*. Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad representan cuatro ecuaciones escalares con cuatro incógnitas (\mathbf{u} y p). La gran ventaja de esta aproximación es que las ecuaciones gobernantes son ahora *lineales* y pueden aplicarse técnicas matemáticas bien conocidas para la obtención de la solución.

1.4.1 Valores típicos y adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes.

La solución que caracteriza de manera completa el flujo en principio se puede obtener, si además de conocer las condiciones a la frontera e iniciales, se conoce la ecuación de Navier-Stokes y la de conservación de la masa. En general, para un flujo laminar, isotérmico, de un líquido newtoniano, incompresible, en un dominio con fronteras sólidas y rígidas y con condiciones de valores iniciales y a la frontera, es posible especificar tres parámetros *dimensionales*, que junto con μ y ρ definen la estructura de la *solución matemática* que describe el flujo. Estos parámetros dimensionales son la longitud característica l_c , la velocidad característica U_c y el tiempo característico t_c . l_c es la distancia típica sobre la cual la velocidad cambia proporcionalmente a U_c . U_c representa una magnitud típica de las velocidades del fluido en el dominio del flujo y generalmente toma valores entre la magnitud de velocidad límite o la magnitud de la velocidad a grandes distancias de las fronteras, y el tiempo característico t_c es una medida de la rapidez de cambio de la velocidad tal como la experimenta un elemento de fluido típico.

Con los parámetros característicos es posible adimensionalizar las variables independientes de forma que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= U_c \mathbf{u}^* \\ p &= \frac{\rho \nu U_c}{l_c} p^* \\ \mathbf{x} &= l_c \mathbf{x}^* \\ t_c &= \frac{l_c^2}{\nu} t^*\end{aligned}\quad (1.51)$$

Las cantidades con asterisco son las variables adimensionalizadas, en donde la viscosidad cinemática ν se utiliza para adimensionalizar la presión y el tiempo. Si el flujo y la geometría son estables, desde un punto de vista euleriano, la escala de tiempo t_c es justamente l/U , y representa el tiempo en que un elemento de fluido "típico" viaja una distancia l .

Sustituyendo las variables adimensionales u^* , p^* , x^* y t^* en la ecuación de Navier-Stokes la ecuación vectorial resultante es

$$\frac{\nu U}{l^2} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{l} (u^* \cdot \nabla^*) u^* = - \frac{\nu U}{l^2} \nabla^* p^* + \frac{\nu U}{l^2} \nabla^{*2} u^*, \quad (1.52)$$

en donde el gradiente y el laplaciano están expresados ahora en términos de las coordenadas espaciales adimensionalizadas. Multiplicando esta ecuación por $l^2/(\nu U)$ e introduciendo el número de Reynolds $Re = Ul/\nu$ se obtiene

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + Re(u^* \cdot \nabla^*) u^* = - \nabla^* p^* + \nabla^{*2} u^*. \quad (1.53)$$

De esta forma, es fácilmente apreciable que la ecuación de Stokes se obtienen de la ecuación de Navier-Stokes tomando el límite $Re \rightarrow 0$. Esto sugiere que para cualquier flujo, las aproximaciones de alto orden a la solución de la ecuación de Navier-Stokes se pueden obtener expandiendo las variables dependientes en potencias ascendentes del número de Reynolds. Entonces, se puede considerar a la ecuación de Stokes como el límite asintótico de la ecuación de Navier-Stokes correspondiente a cero número de Reynolds, mientras que las coordenadas espaciales permanecen de orden unitario.

Una forma alternativa de las Ecuaciones 1.50 separa la velocidad y la presión de manera que dichos campos se pueden determinar separadamente. Para obtener la ecuación gobernante del campo de velocidad, se aplica el rotacional del rotacional a la segunda Ecuación 1.50. Hecho esto, se emplean las identidades vectoriales $\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla^2 u$ y $\nabla \times \nabla p = 0$. La ecuación resultante es

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla(\nabla \cdot u) - \nabla^2 u] = \nu \nabla^2 [\nabla(\nabla \cdot u) - \nabla^2 u]. \quad (1.54)$$

Finalmente, utilizando la ecuación de continuidad para un fluido incompresible, la ecuación en la forma independiente de la presión queda como

$$\nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^4 u. \quad (1.55)$$

Para obtener ahora la ecuación de la presión, se aplica el operador divergencia a la misma ecuación dando como resultado

$$\nabla^2 p = 0. \quad (1.56)$$

La ventaja de estas ecuaciones es que el campo de presión ha sido separado matemáticamente del campo de velocidades.

Para un flujo estacionario, laminar, isotérmico e incompresible, de un fluido newtoniano en ausencia de entrecaras gas-líquido o líquido-líquido, la Ecuación 1.54 en el límite de números de

Reynolds muy pequeños ($Re \ll 1$) muestra que el término de la aceleración (término inercial) es despreciable en comparación con los términos tanto viscoso como del gradiente de presión, con lo cual se obtienen las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{1.57}$$

que representan una primera aproximación a la ecuación de Navier-Stokes y continuidad para el límite de números de Reynolds muy pequeños. Estas ecuaciones son conocidas como *ecuaciones de flujos lentos* (creeping flow equations). El régimen para obtener un flujo lento se puede lograr a través de una combinación de velocidades muy pequeñas, con escalas de longitud grandes o una viscosidad cinemática grande, siendo este último caso el que resulta de interés analizar para el molino de dos rodillos.

1.4.2 Representación de flujos bidimensionales en términos de la función de corriente para flujos lentos.

La ecuación de Navier-Stokes y de continuidad se reducen, en el movimiento lento, a un conjunto de ecuaciones *diferenciales parciales lineales* para la velocidad y la presión; pero en el caso de flujos lentos bidimensionales, es posible hacer una simplificación del problema matemático aún mayor, combinando las ecuaciones de flujo lento y la de continuidad para obtener una ecuación *diferencial ordinaria* de orden cuarto.

El punto de comienzo es un teorema de representación general del cálculo vectorial que establece que cualquier campo vectorial continuamente diferenciable se puede representar utilizando tres funciones escalares ϕ , ψ y χ de modo que

$$\mathbf{a} = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \nabla \chi).\tag{1.58}$$

Esta ecuación representa la descomposición de un campo vectorial general \mathbf{a} en una parte irrotacional, asociada con $\nabla\phi$, y una parte solenoidal, o libre de divergencia, representada por $\nabla \times (\psi \nabla \chi)$. Puesto que

$$\nabla \cdot [\nabla \times (\psi \nabla \chi)] = \nabla \cdot (\nabla\psi \times \nabla\chi) \equiv 0,\tag{1.59}$$

la representación del vector \mathbf{a} se puede dar en términos de un campo vectorial solenoidal \mathbf{s} , tal que

$$\mathbf{a} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{s}, \quad \text{donde} \quad \nabla \cdot \mathbf{s} = 0.\tag{1.60}$$

Ahora bien, puesto que el vector \mathbf{u} es un campo vectorial continuamente diferenciable, éste se representa como

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{s}.\tag{1.61}$$

La función \mathbf{s} que aparece en esta ecuación se conoce como vector potencial para la vorticidad, pues

$$\nabla^2 \mathbf{s} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}.\tag{1.62}$$

Ahora, para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad requiere que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0, \quad (1.63)$$

mientras que la ecuación de movimiento se reduce a una ecuación para la función vector potencial \mathbf{s} ,

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{s}) = \nabla p, \quad (1.64)$$

o

$$\nabla^4 \mathbf{s} = 0. \quad (1.65)$$

La contribución de $\nabla \phi$ al campo de velocidades no es nula si en las fronteras

$$(\mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \neq 0, \quad (1.66)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la frontera; esta ecuación representa un flujo de masa a través de las fronteras. Generalmente, esta condición no se lleva a cabo y la velocidad se representa únicamente por

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{s}, \quad (1.67)$$

con $\nabla \cdot \mathbf{s} = 0$ y \mathbf{s} satisfaciendo las Ecuaciones 1.65 o 1.67. En este caso, la introducción de una función vector potencial permite simplificar el problema al eliminar la presión y obteniéndose una simple ecuación de orden cuarto para \mathbf{s} .

Para flujos bidimensionales, el vector potencial \mathbf{s} se representa en términos de una simple función escalar de la forma

$$\mathbf{s} = \psi(x, y) \mathbf{k}, \quad (1.68)$$

en coordenadas cartesianas, o de la forma

$$\mathbf{s} = h_3 \psi(x_1, x_2) \mathbf{k}_3 \quad (1.69)$$

en coordenadas curvilíneas. Los vectores unitarios \mathbf{k} y \mathbf{k}_3 de las dos expresiones anteriores son normales al plano del movimiento del fluido, y $\psi(x_1, x_2)$ es la *función de corriente*.

Para el caso de un flujo bidimensional, la ecuación de Navier-Stokes se puede expresar en términos de la función de corriente, cuando el término de la presión no está presente explícitamente y entonces la función de corriente involucra a las dos componentes de la velocidad. El flujo bidimensional representado por la función de corriente ψ , cuya velocidad es $\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{k})$ y con vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \psi \mathbf{k}$ se introduce en la ecuación de Navier-Stokes cuando está en la forma de la ecuación del transporte de la vorticidad dada en la Ecuación 1.49, la cual a su vez se simplifica para flujos bidimensionales, en donde el término $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ es nulo puesto que los componentes de la velocidad son perpendiculares al componente de la vorticidad, por lo que la Ecuación 1.49 se reduce a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (1.70)$$

Ahora bien, sustituyendo en esta ecuación las expresiones de u y ω en términos de la función de corriente se obtiene la ecuación de Navier-Stokes en términos de la función de corriente para un flujo bidimensional incompresible. En el caso de un sistema de coordenadas cartesianas, la ecuación de Navier-Stokes en términos de la función de corriente queda como

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y} = \nu \nabla^4\psi. \quad (1.71)$$

La introducción de la función de corriente en la aproximación para flujos lentos simplifica la Ecuación 1.65 de la forma

$$\nabla^4\psi = 0, \quad (1.72)$$

que representa el biarmónico de la función ψ .

Capítulo 2.

Solución analítica para el flujo generado por un molino de dos rodillos.

Este Capítulo se inicia con una introducción de los sistemas de coordenadas curvilíneas puntualizando el sistema de coordenadas bipolar, debido a que la solución general que propone Jeffery [6] está expresada en coordenadas bipolares, un sistema de coordenadas de uso poco común en ingeniería. Posteriormente, la solución propuesta por Jeffery [6] se particulariza para el molino de dos rodillos de radio igual, con giro corrotatorio y a la misma velocidad angular, obteniéndose las expresiones analíticas para sus coeficientes y, finalmente, se presentan las características del flujo en la vecindad del punto de estancamiento.

2.1 Coordenadas curvilíneas.

Un aspecto importante de los problemas físicos es la geometría de los objetos materiales involucrados así como la geometría de la región sobre la cual se extiende su respuesta a los estímulos externos y a las condiciones ambientales. Una solución matemática correcta a un problema físico depende, en buen grado, de la selección apropiada del sistema de coordenadas más apropiado para la geometría del problema [20].

Sea E^3 un espacio cruzado por un sistema cartesiano rectangular z^k con superíndice $k = 1, 2, 3$. Considerando que cada punto en E^3 se representa por la intersección de tres planos mutuamente perpendiculares $z^k = c^k$ ($k = 1, 2, 3$) se tiene la idea de las coordenadas cartesianas de ese punto. Alternativamente, se puede considerar que cada punto puede ser localizado en E^3 por la intersección de tres superficies curvilíneas únicas no coincidentes. Estas tres superficies curvilíneas se pueden especificar por sus respectivas ecuaciones referidas a un marco coordenado rectangular dado; de esta forma, si las coordenadas rectangulares z^k dependen del conjunto de tres variables x^k , $k = 1, 2, 3$, en E^3 , se tiene

$$z^k = f^k(x^1, x^2, x^3) = z^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

donde las funciones f^k de las tres variables x^k pertenecen a C^r , con $r \geq 1$ (es decir, son funciones continuas con derivadas parciales continuas hasta orden r) y están definidas en la región de interés de E^3 . La Ecuación 2.1 define una transformación de coordenadas.

La Ecuación 2.1 y la ecuación

$$x^k = x^k(x^1, x^2, x^3), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

son las inversas recíprocas y son únicas en cada punto de su dominio si y sólo si el jacobiano

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^k} \right) \neq 0. \quad (2.3)$$

Suponiendo que z^k y x^k están definidas por las Ecuaciones 2.2 y que la relación sobre el jacobiano se satisface, entonces z^k y x^k son inversas la una de la otra. Asignando un valor real constante α^k a x^k , entonces se tiene la expresión

$$x^k(x^1, x^2, x^3) = \alpha^k, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

que representa un conjunto de tres superficies curvilíneas. Puesto que la Ecuación 2.4 tiene una solución única para z^k , entonces estas tres superficies se intersectan en un punto P .

Entonces, la condición $J \neq 0$ garantiza que las superficies no sean degeneradas (es decir, que no sean coincidentes). Estas tres superficies $x^k = \text{constante}$ se definen como superficies coordenadas curvilíneas. Así, un punto cualquiera P en E^3 se localiza por sus coordenadas cartesianas z^k o por sus coordenadas curvilíneas x^k . Los dos sistemas de coordenadas son, por lo tanto, uno a uno o biyectivos.

Una de las mayores diferencias entre un sistema de coordenadas cartesiano y un sistema de coordenadas curvilíneo es que, en el primero, hay un marco rectangular fijo con ejes mutuamente perpendiculares, mientras que en el otro sistema no existe tal marco fijo de referencia. Sin embargo, las coordenadas curvilíneas tienen una simple interpretación geométrica. Si se asigna un valor constante a z^k , cada uno describe una superficie en el espacio. Asignando una serie de diferentes valores a z^k se genera una familia de superficies. Si la función es adecuada, ésta genera una superficie perteneciente a cada una de las tres familias que definen un punto P en el espacio. Entonces, un punto en el espacio está definido por la intersección de las tres superficies $z^k = \text{constante}$, denominadas superficies coordenadas. La superficie coordenada se denomina por la coordenada en la cual es constante, las otras dos coordenadas pueden variar a lo largo de esa superficie. La intersección de cualesquiera de dos superficies coordenadas resulta en una curva denominada curva coordenada, en la cual la otra coordenada puede variar.

Vectores base de sistemas de coordenadas curvilíneas. Sean x^1 , x^2 y x^3 las coordenadas curvilíneas de un punto P en un espacio tridimensional y cuyas coordenadas cartesianas son z^1 , z^2 y z^3 . Sean $\{i_1, i_2, i_3\}$ el conjunto de vectores ortonormales que conforman una base del sistema de coordenadas cartesiano z^k . El vector de posición del punto P se denota por \mathbf{p} con respecto al sistema rectangular. Entonces se puede expresar

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(z) = i_m z^m. \quad (2.5)$$

Debido a que se tiene un mapeo uno a uno, el vector \mathbf{p} no sólo es función de \mathbf{x} , sino que también es una función de \mathbf{x} a través de (2.2) y (2.3), por lo que

$$\mathbf{p}(\mathbf{s}) \equiv \mathbf{p}(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Los vectores base \mathbf{i}_m ($m = 1, 2, 3$) del sistema rectangular surgen de las derivadas parciales del vector de posición $\mathbf{p}(\mathbf{s})$, definiendo estas bases ortonormales por

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_m(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{s})}{\partial s^m}. \quad (2.7)$$

De forma análoga a las bases ortonormales se puede definir un conjunto de vectores por medio de la siguiente relación

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x})}{\partial x^k}, \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ y \mathbf{g}_3 es un conjunto de vectores linealmente independientes y son tangentes a las curvas coordenadas que se intersectan en un punto P . Esta propiedad de las curvas coordenadas está garantizada por $J \neq 0$, y los vectores linealmente independientes constituyen un sistema de vectores base "curvilíneos" que representan un sistema coordenado en E^3 .

La expresión que relaciona la base ortonormal \mathbf{i}_m con la base curvilínea \mathbf{g}_k se obtiene diferenciando (2.7) con respecto a x^k , obteniéndose

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_m \frac{\partial s^m}{\partial x^k}, \quad (2.9)$$

que expresa a \mathbf{g}_k en términos de \mathbf{i}_m . Los vectores \mathbf{i}_m se pueden también expresar en términos de \mathbf{g}_k por medio de

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^m} \Leftrightarrow \mathbf{i}_m = \mathbf{g}_k \frac{\partial x^k}{\partial x^m}. \quad (2.10)$$

Es importante hacer notar que los vectores \mathbf{g}_k son funciones de \mathbf{x} y no son necesariamente ortogonales; además, tampoco son necesariamente vectores unitarios.

Métrica de un espacio euclidiano. Considere una curva C en el espacio E^3 dada por la ecuación paramétrica

$$C: \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}, \quad t \in [a, b]. \quad (2.11)$$

Ahora sean P y Q dos puntos sobre la curva C con vectores de posición \mathbf{p} y $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$, respectivamente y sea $\overline{PQ} = d\mathbf{p}$. Cuando el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de C , la diferencia entre la longitud $d\mathbf{p}$ y la longitud de arco PQ a lo largo de la curva C tienden a cero; por lo tanto, el elemento de arco ds se considera igual al vector infinitesimal $d\mathbf{p}$, y se tiene que

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l dx^k dx^l = \mathbf{g}_{kl} dx^k dx^l, \quad (2.12)$$

donde

$$\mathbf{g}_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = \mathbf{g}_k = h_{kl}^2. \quad (2.13)$$

Los coeficientes h_{kl} especifican la naturaleza del sistema de coordenadas y se denominan la *métrica* del sistema coordenado, siendo una propiedad intrínseca de cada sistema y generalmente son funciones de la posición. Las funciones \mathbf{g}_{kl} son los coeficientes métricos fundamentales del espacio y el conjunto de éstos forman el tensor métrico fundamental.

Definiciones. Coordenadas curvilíneas ortogonales. Un sistema coordenado x^k en E^3 se dice que es un sistema ortogonal si

$$\begin{aligned} g_{kj} &= g_{jk} = 0, & \text{para } k \neq j, \\ g_{kk} &\neq 0, & \text{para } k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, en estos sistemas solamente $h_{kk} \neq 0$, y es por ellos que se denotan simplemente como h_k . Ejemplos de sistemas coordenados ortogonales son los sistemas coordenados rectangular, cilíndrico, esférico y bipolar, entre otros.

Conjunto de vectores recíprocos. Un conjunto de vectores g^k , $k = 1, 2, 3$, en E^3 , se dice que es el recíproco del conjunto g_k , $k = 1, 2, 3$, si

$$g^k \cdot g_m = g_m \cdot g^k = \delta_1^k, \quad (2.15)$$

donde δ_1^k es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_1^k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, los sistemas coordenados curvilíneos ortogonales cumplen con la propiedad

$$g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}}, \quad (2.17)$$

que indica que los vectores naturales y sus recíprocos tienen la misma dirección y que la magnitud de uno es la inversa de la magnitud del otro.

Magnitud de los vectores base. La magnitud de un vector v , $\|v\|$ está definida como

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}. \quad (2.18)$$

Así, para los vectores base se tiene que

$$\begin{aligned} \|g_k\| &= \sqrt{g_k \cdot g_k} = \sqrt{g_{kk}}, \\ \|g^k\| &= \sqrt{g^k \cdot g^k} = \sqrt{g^{kk}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vectores base unitarios de un sistema de coordenadas curvilíneas. Los vectores base unitarios de un sistema de coordenadas curvilíneo y su conjunto de vectores recíprocos son denotados por e_k y e^k , respectivamente, y se obtienen dividiendo el correspondiente vector base con su respectiva magnitud. Esto es

$$e_k = \frac{g_k}{\sqrt{g_{kk}}}, \quad e^k = \frac{g^k}{\sqrt{g^{kk}}}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Estos vectores base unitarios son funciones de las coordenadas x^k . Si se trata de un sistema ortogonal, se tiene que (2.20) se puede expresar como

$$e_k = g_k \sqrt{g^{kk}} = \frac{1}{h_k} g_k, \quad e^k = g^k \sqrt{g_{kk}} = h_k g^k, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

y entonces, de acuerdo con lo anterior, se tiene que $e_k = e^k$.

Vectores en coordenadas curvilíneas. Cuando los problemas físicos involucran materiales reales con formas geométricas cuya representación con base en un sistema de coordenadas cartesianas resulta más complejo (por ejemplo, un elipsoide de revolución, etc.), o cuando las regiones de respuesta del material a influencias externas posee una forma geométrica compleja, los vectores cartesianos (y tensores cartesianos) no son los más convenientes y resulta ventajoso reemplazarlos por un sistema curvilíneo apropiado. Se tiene que existen dos únicos conjuntos de vectores base curvilíneos generalizados, el conjunto \mathbf{g}_k y el conjunto recíproco \mathbf{g}^k . Por consiguiente, hay dos tipos diferentes de componentes de un vector dado, uno referido a la base natural \mathbf{g}_k y el otro referido a la base recíproca \mathbf{g}^k . Entonces, se tienen los siguientes dos tipos de componentes vectoriales, junto con los componentes rectangulares cartesianas de un vector \mathbf{v} , de la forma

$$\mathbf{v} = i_k v^k = \mathbf{g}_k v^k = \mathbf{g}^k v_k, \quad (2.22)$$

donde v^k , $k = 1, 2, 3$, representa los componentes cartesianas del vector, referidos a la base ortonormal i_k , $k = 1, 2, 3$. Los componentes del vector referidos a la base natural \mathbf{g}_k son denotados por v^k , $k = 1, 2, 3$, y son llamados componentes contravariantes de \mathbf{v} . Los componentes de \mathbf{v} referidos a la base recíproca \mathbf{g}^k son denotados por v_k , $k = 1, 2, 3$, y son llamados componentes covariantes de \mathbf{v} .

Los componentes covariantes y contravariantes de un vector \mathbf{v} están relacionados por

$$v^l = v_k g^{kl}, \quad v_l = v^k g_{kl} \quad (2.23)$$

Componentes físicos de un vector. Los componentes físicos de un vector (o tensor) con respecto a un sistema de coordenadas curvilíneo local dado se definen como los componentes del vector (o tensor) relativos a los vectores unitarios localizados tangencialmente a las curvas coordenadas. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^{(k)} \mathbf{e}_k = v^k \mathbf{g}_k = v^k \sqrt{g_{kk}} \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{v} &= v_{(k)} \mathbf{e}^k = v_k \mathbf{g}^k = v_k \sqrt{g^{kk}} \mathbf{e}^k, \end{aligned} \quad (2.24)$$

en donde se observa que

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= v^k \sqrt{g_{kk}}, \\ v_{(k)} &= v_k \sqrt{g^{kk}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Los componentes $v^{(k)}$ o $v_{(k)}$ son los componentes físicos de un vector en términos de los componentes tensoriales v^k y v_k , respectivamente.

Aunque los componentes físicos en términos de los componentes covariantes y contravariantes no son idénticos en sistemas coordenados curvilíneos generalizados, estos componentes son, sin embargo, idénticos en el caso de sistemas coordenados curvilíneos ortogonales, por lo que tenemos

$$v^{(k)} = v^k \sqrt{g_{kk}} = h_k v^k = \frac{1}{h_k} v_k = v_k \sqrt{g^{kk}} = v_{(k)}. \quad (2.26)$$

2.1.1 Sistema de coordenadas bipolares.

El molino de dos rodillos, capaz de inducir los grandes cambios en la conformación del líquido polimérico, consiste en dos rodillos cuyos ejes son paralelos y giran con la misma dirección (giran corrotatoriamente). El sistema de coordenadas curvilineo más adecuado a la geometría del molino es el sistema coordenado bipolar, en el que los contornos de los rodillos se representan por la coordenada α y se supone que son infinitamente largos, y generan un flujo esencialmente bidimensional, contenido en planos perpendiculares a los ejes de los rodillos. Así, los rodillos quedan representados por valores constantes de una de las coordenadas, es decir, con α constante.

En el sistema bipolar las coordenadas son $x^1 = \alpha$, $x^2 = \beta$, $x^3 = z$, definidas por sus relaciones con las coordenadas cartesianas en la forma [22]

$$\begin{aligned}x &= \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \\y &= \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \\z &= z.\end{aligned}\quad (2.27)$$

O en forma inversa como

$$\alpha + i\beta = \ln \left(\frac{x + i(y+a)}{x + i(y-a)} \right), \quad (2.28)$$

quedando

$$\alpha = \ln \left(\sqrt{\frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2}} \right), \quad (2.29)$$

$$\beta = \pi + \arctan \left(\frac{2ax}{x^2 + y^2 - a^2} \right).$$

El sistema de coordenadas bipolares se obtiene suponiendo un punto $P(x, y)$ localizado por medio de dos vectores r_1 y r_2 y dos ángulos θ_1 y θ_2 , respectivamente. Para diferentes posiciones en el plano xy , los vectores se dibujan siempre desde dos puntos fijos A y B , simétricamente localizados en el eje y a una distancia arbitraria a del origen. Las coordenadas bipolares α y β se relacionan con los vectores y ángulos mencionados por medio de

$$\alpha = \ln \left(\frac{\|r_2\|}{\|r_1\|} \right) \quad y \quad \beta = \theta_1 - \theta_2. \quad (2.30)$$

Se tienen, además, las siguientes relaciones que caracterizan al sistema de coordenadas bipolares

$$y^2 + x^2 - a^2 - 2ax \cot \beta = 0, \quad (2.31)$$

$$(y^2 - a \coth \alpha)^2 + x^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \alpha,$$

con las cuales se aprecia que para $\beta = \text{constante}$ (entre los rangos $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ó $-\pi \leq \beta \leq \pi$) se tiene una familia de círculos con centros sobre el eje x en el punto $(a \cot \beta, 0)$ y con radio igual a $a \csc \beta$. Cada curva de la familia toca los puntos fijos A y B (que representan la longitud a a lo largo del eje y en sus dos direcciones (positiva y negativa)). Para $\alpha = \text{constante}$ se tiene una segunda familia de círculos con un radio igual a $a \csc \alpha$ y centros situados sobre el eje y en el punto $(0, a \coth \alpha)$. Para cualquier punto $P(x, y)$ los círculos de las dos familias se intersectan *ortogonalmente* de manera que la posición de P se ubica mediante los valores de α y β de los círculos que pasan a través de él (Ver la Figura 2.1). Así, el punto A se obtiene cuando $\alpha = +\infty$ y B cuando $\alpha = -\infty$. Cuando $\beta = 0$ entonces los círculos degeneran a líneas rectas verticales por arriba de A y por abajo de B . Cuando $\beta = \pi$ se obtiene una recta entre A y B .

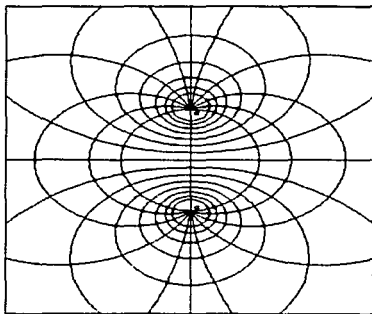


Figura 2.1. Sistema de coordenadas bipolares. La variable α constante forma circunferencias excéntricas a los puntos a , y la variable β constante forma circunferencias que se intersectan en los puntos a . Los vectores unitarios $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_\alpha$ y $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\beta$ para cualquier punto señalan hacia el centro de las circunferencias que forman los valores constantes de las variables que determinan dicho punto.

De esta manera existe una clase de problemas físicos bidimensionales cuyas geometrías pueden describirse eficientemente por las coordenadas bipolares. Por ejemplo, para problemas bidimensionales en los cuales la región a considerar es:

1. Una región finita limitada internamente por un círculo y externamente por otro círculo mayor no concéntrico.
2. Una región semi-infinita limitada externamente por una línea recta y conteniendo un círculo vacío.

3. Una región infinita conteniendo dos agujeros circulares de cualquier radio y distancia de los centros.

Si bien estas regiones pueden parecer un tanto peculiares, lejos del ámbito de soluciones a problemas reales, debe señalarse que existe un sinnúmero de aplicaciones de la mecánica de fluidos para regiones como las anteriores, en particular flujo en cilindros excéntricos entre otros, de gran aplicabilidad en la industria petrolera.

El sistema de coordenadas bipolares tiene las siguientes propiedades. El jacobiano es

$$J = \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) = \begin{vmatrix} -\frac{a \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} & \frac{a \operatorname{sen} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)} - \frac{a \operatorname{sen} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} & 0 \\ \frac{a \cosh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)} - \frac{a \operatorname{senh}^2 \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} & & -\frac{a \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\text{y por lo tanto, } J = \frac{a^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2}.$$

Los vectores base \mathbf{g}_k del sistema de coordenadas bipolares con respecto a las coordenadas cartesianas se obtienen a partir de las Ecuaciones 2.24 por medio de (2.5) y (2.8), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta} \mathbf{i}_1 + \frac{a \operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} = -\frac{a \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \mathbf{i}_1 + \frac{a (1 - \cosh \alpha \cos \beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \beta} = \frac{a (\cosh \alpha \cos \beta - 1)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \mathbf{i}_1 - \frac{a \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Con los valores de \mathbf{g}_k se obtiene el tensor métrico por medio de la Ecuación 2.13

$$(\mathbf{g}_{kl}) = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Es claro que

$$g_{11} = g_{22} = h_{11}^2 = h_{22}^2 = h^2, \quad (2.35)$$

por lo que el factor métrico queda como

$$h = \frac{a}{\cosh \alpha - \cos \beta} = J^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

2.2 Solución a la función de corriente propuesta por Jeffery [6] para un molino de dos rodillos ideal.

Los problemas de flujo lento, bidimensional, están descritos por la ecuación biarmónica $\nabla^4\psi = 0$, sujeta a condiciones de frontera apropiadas. Para obtener una solución, es conveniente expresar la ecuación anterior como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden [21].

$$\nabla^2\psi = -\omega, \quad (2.37)$$

$$\nabla^2\omega = 0, \quad (2.38)$$

que corresponde al caso del *laplaciano homogéneo* (2.38) y la solución del *laplaciano no-homogéneo* (2.37). La solución de estas ecuaciones da la función de corriente.

En 1922, G. B. Jeffery [6, 23] estudió el caso de un flujo lento para un fluido contenido entre dos cilindros *excéntricos*, utilizando para ello la solución de elasticidad lineal (de pequeñas deformaciones) para esfuerzos sobre una placa, ya que existe una analogía bien conocida entre las ecuaciones de la elasticidad en una placa y el flujo estacionario en dos dimensiones de un fluido viscoso e incompresible, en el cual la función de corriente satisface también la ecuación biarmónica para $\nabla^4\psi = 0$.³

Es claro que la forma particular de la solución depende de las condiciones a la frontera, por lo que, además de poder plantearse la solución para la geometría de cilindros excéntricos presentada por Jeffery [6], también puede analizarse el problema de un molino de dos rodillos iguales que giran corrotacionalmente a la misma velocidad, haciendo caso de las condiciones de frontera apropiadas. La solución propuesta por Geffroy et al. [4] introduce una fuente de vorticidad adicional de manera que es posible satisfacer las condiciones de frontera en el infinito, que no es posible con la solución de Dunslop [2]. Ahora, si los rodillos tienen radios iguales, entonces de la Figura 2.2 se tienen varias propiedades de simetría para el campo de velocidades que permiten simplificar aún más la solución.

La forma general para $\nabla^4\psi = 0$, expresada en coordenadas bipolares tiene la siguiente expresión [4]

$$\begin{aligned} h^*\psi = & A_0 \cosh \alpha + B_0 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + C_0 \sinh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha \\ & + K (\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ & + (A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha) \cos \beta \\ & + (A'_1 \cosh 2\alpha + C'_1 \sinh 2\alpha) \sin \beta + \sum_{n=2}^{\infty} (\phi_n(\alpha) \cos n\beta + \phi'_n(\alpha) \sin n\beta), \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde h^* representa el inverso del factor métrico, es decir

$$h^* = \frac{1}{h} = \frac{\cosh \alpha - \cos \beta}{a} \quad (2.40)$$

³ Además, en 1925 Frazer [24] propuso una solución para el molino con condiciones de frontera en el infinito ligeramente diferentes. Dunslop [2] encontró una solución para la región alrededor del punto de estancamiento y Geffroy et al. [4] propusieron una metodología comparable a la aquí propuesta, que sin embargo presenta varias singularidades sobre las superficies de los rodillos.

y las funciones $\phi_u(\alpha)$ y $\phi'_u(\alpha)$ están dadas por

$$\phi_u(\alpha) = A_n \cosh(n+1)\alpha + B_n \cosh(n-1)\alpha + C_n \sinh(n+1)\alpha + D_n \sinh(n-1)\alpha \quad (2.41)$$

y

$$\phi'_u(\alpha) = A'_n \cosh(n+1)\alpha + B'_n \cosh(n-1)\alpha + C'_n \sinh(n+1)\alpha + D'_n \sinh(n-1)\alpha. \quad (2.42)$$

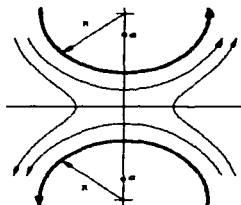


Figura 2.2. En esta figura se muestra la posición de los puntos a del sistema de coordenadas bipolares, los radios de los rodillos y unas líneas de corriente que muestran la dirección del flujo. En esta figura se aprecia la simetría que presenta el flujo.

El dominio sobre el que interesa definir el flujo lesto se define con base en la geometría del rodillo, que dada la distancia entre los rodillos, g , y el radio de los mismos, entonces la superficie de los mismos queda simplemente descrita por los valores de α_R mediante

$$\frac{R}{2R} = \cosh \alpha_R - 1. \quad (2.43)$$

y el factor de escala a de (2.40) se calcula como

$$a = R \operatorname{senh} \alpha_R. \quad (2.44)$$

Ahora, con el propósito de aplicar las condiciones de simetría del campo de velocidades que se muestra en la Figura 2.2 se calcula la velocidad en función de la función de corriente como

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} h \mathbf{e}_1 & h \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h(0) & h(0) & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_2. \quad (2.45)$$

cuyas componentes son, entonces

$$u_{\alpha} = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \frac{\partial (h^* \psi)}{\partial \beta} - h^* \psi \left(\frac{1}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial (\psi/h)}{\partial \beta} - \frac{\psi}{h} \left(h \frac{\partial (1/h)}{\partial \beta} \right) \quad (2.46)$$

y

$$u_{\beta} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial (h^* \psi)}{\partial \alpha} + h^* \psi \left(\frac{1}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\partial (\psi/h)}{\partial \alpha} + \frac{\psi}{h} \left(h \frac{\partial (1/h)}{\partial \alpha} \right), \quad (2.47)$$

y de forma desarrollada se tiene que

$$\begin{aligned} u_{\alpha} = & K \operatorname{sen} \beta + B_0 \alpha \operatorname{sen} \beta + K \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) \operatorname{sen} \beta \\ & + \cos \beta (A_1' \cosh 2\alpha + C_1' \operatorname{senh} 2\alpha) \\ & - \operatorname{sen} \beta (B_1 + A_1 \cosh 2\alpha + C_1 \operatorname{senh} 2\alpha) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [-(n \operatorname{sen} n\beta (B_n \cosh (n-1)\alpha + A_n \cosh (n+1)\alpha) \\ & + D_n \operatorname{senh} (n-1)\alpha + C_n \operatorname{senh} (n+1)\alpha) \\ & + A_n' \cosh (n+1)\alpha + C_n' \operatorname{senh} (n+1)\alpha + D_n' \operatorname{senh} (n-1)\alpha] \\ & - \operatorname{sen} \beta (\psi/h) / (\cosh \alpha - \cos \beta) \end{aligned} \quad (2.48)$$

y

$$\begin{aligned} u_{\beta} = & -C_0 \cosh \alpha - D_0 \alpha \cosh \alpha - B_0 (\cosh \alpha - \cos \beta) - A_0 \operatorname{senh} \alpha \\ & - D_0 \operatorname{senh} \alpha - K \operatorname{senh} \alpha - B_0 \alpha \operatorname{senh} \alpha - K \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) \operatorname{senh} \alpha \\ & - \operatorname{sen} \beta (2C_1' \cosh 2\alpha + 2A_1' \operatorname{senh} 2\alpha) + \operatorname{senh} \beta (\psi/h) / (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} [\cos n\beta (A_n (n+1) \operatorname{senh} (n+1)\alpha + B_n (n-1) \operatorname{senh} (n-1)\alpha) \\ & + C_n (n+1) \cosh (n+1)\alpha + D_n (n-1) \cosh (n-1)\alpha) \\ & + \operatorname{sen} n\beta (A_n' (n+1) \operatorname{senh} (n+1)\alpha + B_n' (n-1) \operatorname{senh} (n-1)\alpha) \\ & + C_n' (n+1) \cosh (n+1)\alpha + D_n' (n-1) \cosh (n-1)\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Es claro que si los rodillos giran corrotacionalmente, entonces para el punto localizado entre los rodillos ($\alpha = 0$, $\beta = \pi$) se tiene un punto en el cual la velocidad del flujo es cero (punto de estancamiento). En la Figura 2.3 los puntos materiales por arriba del punto de estancamiento se desplazan a la izquierda, en dirección opuesta, aunque con la misma rapidez, que los puntos materiales localizados a la misma distancia del punto de estancamiento pero por debajo de él. Esto es, cuando $\beta = \pi$ (la línea que une los ejes de los cilindros) el componente del campo de velocidad, paralelo a α , u_{α} , cuando β tiende a π por la derecha, π^+ , tiene el mismo valor que cuando β tiende a π por la izquierda, π^- . Asimismo, el componente de la velocidad paralelo a β , u_{β} cuando $\beta \rightarrow \pi^-$ tiene el mismo valor que cuando $\beta \rightarrow \pi^+$, entonces

$$\forall \alpha \begin{cases} u_{\alpha}(\beta \rightarrow \pi^-) = -u_{\alpha}(\beta \rightarrow \pi^+) \\ u_{\beta}(\beta \rightarrow \pi^-) = u_{\beta}(\beta \rightarrow \pi^+) \end{cases} \quad (2.50)$$

Asimismo, considerando las simetrías del flujo respecto de la línea horizontal localizada entre los rodillos $\alpha = 0$ se tiene que

$$\forall \beta \begin{cases} u_{\alpha}(\alpha \rightarrow 0^-) = u_{\alpha}(\alpha \rightarrow 0^+) \\ u_{\beta}(\alpha \rightarrow 0^-) = -u_{\beta}(\alpha \rightarrow 0^+) \end{cases} \quad (2.51)$$

Para que las condiciones de simetría y de antisimetría (Ecuaciones 2.50 y 2.51) se cumplan para el campo de velocidades (Ecuaciones 2.48 y 2.49), utilizamos las relaciones $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\cosh\alpha = \cosh(-\alpha)$ y $\sinh(-\alpha) = -\sinh\alpha$ para anular los coeficientes que no cumplen con las condiciones de giro corrotatorio. De esta

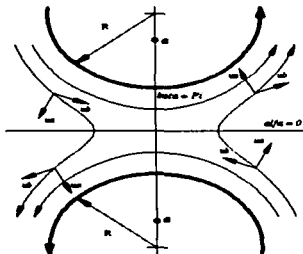


Figura 2.3. El campo de velocidades y los componentes de la velocidad en coordenadas bipolares. Se muestran la líneas donde $\alpha = 0$ y donde $\beta = \pi$, y con respecto a las cuales se toman las condiciones de simetría del flujo. u_{α} representa el componente u_{α} y u_{β} representa u_{β} . Cerca del punto de estancamiento, los componentes de la velocidad tienden a ser paralelos a los ejes cartesianos.

forma, al evaluar en u_{α} las condiciones (2.50) y (2.51) y utilizando las relaciones mencionadas, tenemos que los coeficientes B_0 , C_0 , C_1 , C_u , D_u y D_{1u} deben ser iguales a cero; y que para u_{β} los coeficientes A_1 , A_u , B_u , C_1 y D_u se anulan. De esta forma, la función de corriente para un molino de dos rodillos idénticos con giro corrotatorio a la misma velocidad angular es

$$\frac{\psi}{h} = A_0 \cosh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha + K (\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} ((A_n \cosh (n+1)\alpha + B_n \cosh (n-1)\alpha) \cos n\beta). \quad (2.52)$$

El desarrollo siguiente, en el cual se obtienen las ecuaciones para obtener el valor de cada uno de los coeficientes restantes se basa en el desarrollo que presenta Geffroy et al. [4] en su trabajo. La diferencia que radica en este análisis es que el sistema de ecuaciones simultáneas

final se resuelve de forma distinta, por lo que las expresiones finales de los coeficientes difieren, especialmente para el coeficiente K .

La Ecuación 2.52 debe también satisfacer las condiciones de frontera válidas en un flujo lento. La primera de ellas es la condición de no deslizamiento en la superficie de los rodillos $\pm\alpha_R$, diferenciando por medio del signo a un rodillo del otro. Si se denota la velocidad angular de los rodillos por ω , la condición de no deslizamiento es

$$u_{\theta}(\alpha_R) = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_R} = \omega R. \quad (2.53)$$

Por otra parte, la condición cinemática que indica que no hay flujo a través de las superficies de los rodillos es

$$u_n(\alpha_R) = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \Big|_{\alpha_R} = 0. \quad (2.54)$$

Finalmente el campo de flujo se debe desvanecer en el infinito, siendo esta condición representada por

$$u(\alpha = 0, \beta = 0) = 0 \quad (2.55)$$

o equivalentemente

$$\psi(\alpha = 0, \beta = 0) = 0. \quad (2.56)$$

De esta forma, sustituyendo $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ en la expresión de la función de corriente, Ecuación 2.52, y aplicando la condición (2.56) resulta que

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = 0, \quad (2.57)$$

o

$$A_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n). \quad (2.58)$$

Aún resta por conocer los demás coeficientes de (2.52) por lo que para continuar conviene expresar el término logarítmico de la función de corriente en términos de series de Fourier, a partir de la siguiente ecuación, como se indica a continuación⁴

$$\ln(1 - 2x \cos \phi + x^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} x^n, \quad (2.59)$$

y utilizando la equivalencia

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arcsenh} x; \quad x^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad x \cos \phi \neq 1. \quad (2.60)$$

⁴ La igualdad de que se parte en este desarrollo se obtuvo del libro de Ryzhik y Gradshteyn [25], ec. 1.514.

La Ecuación 2.59 se puede expresar de forma equivalente como

$$\ln \left(\frac{1+x^2}{2x} - \cos \phi \right) = -\ln 2x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} x^n. \quad (2.61)$$

De (2.61) se puede fácilmente recuperar el término logarítmico de la función de corriente (Ecuación 2.52) con el siguiente cambio de variables: sea $\phi = \beta$ y $\frac{1+x^2}{2x} = \cosh \alpha = \rho$. Por tanto, lo que resta es expresar a x en términos de α . Del segundo cambio de variables se tiene que

$$1 - 2x\rho + x^2 = 0, \quad (2.62)$$

cuya solución es

$$x = \frac{-(-2\rho) \pm \sqrt{4\rho^2 - 4}}{2} = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad (2.63)$$

$$x = \cosh \alpha \pm \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1} = \cosh \alpha \pm \sinh \alpha, \quad (2.64)$$

$$x = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha}) \pm (e^\alpha - e^{-\alpha})}{2} = \frac{(1 \pm 1)e^\alpha + (1 \mp 1)e^{-\alpha}}{2} \quad (2.65)$$

y obteniéndose finalmente

$$x = \begin{cases} e^\alpha & \text{cuando la raíz es positiva} \\ e^{-\alpha} & \text{cuando la raíz es negativa} \end{cases} \quad (2.66)$$

ya si $\alpha > 0$ y $x^2 \leq 1$, entonces la expresión sólo es válida para la raíz negativa, por lo tanto $x = e^{-\alpha}$ y entonces, sustituyendo el cambio de variables en la Ecuación 2.59 y utilizando el valor de x se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(\cosh \alpha - \cos \beta) &= -\ln 2e^{-\alpha} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\beta}{n} e^{-n\alpha} \\ &= \alpha - \ln 2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n} \cos n\beta \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\beta \end{aligned} \quad (2.67)$$

en donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha - \ln 2, \\ a_n &= -2 \frac{e^{-n\alpha}}{n}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

El lado izquierdo de la Ecuación 2.67 aparece en (2.52) multiplicado por $(\cosh \alpha - \cos \beta)$ y entonces procedemos a expresar como expansiones en series los dos términos. Primero tomando el término $\cos \beta$ se tiene que

$$\begin{aligned}\cos \beta \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) &= \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\beta \right) \cos \beta \\ &= a_0 \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \beta \cos n\beta,\end{aligned}\quad (2.69)$$

y utilizando la equivalencia $\cos \beta \cos n\beta = \frac{1}{2} \cos (n+1)\beta + \frac{1}{2} \cos (n-1)\beta$, se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\beta \cos \beta &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2} \cos (n+1)\beta + \frac{1}{2} \cos (n-1)\beta \right) \\ &= \frac{a_1}{2} \cos 2\beta + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \cos 3\beta + \frac{a_2}{2} \cos \beta \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2} \cos (n+1)\beta + \frac{1}{2} \cos (n-1)\beta \right),\end{aligned}\quad (2.70)$$

y simplificando aún más

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \beta \cos n\beta = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} \right) \cos n\beta. \quad (2.71)$$

Finalmente la Ecuación 2.69 se expresa como

$$\begin{aligned}\cos \beta \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) &= a_0 \cos \beta + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} \right) \cos n\beta \\ &= \frac{a_1}{2} + \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} \right) \cos n\beta.\end{aligned}\quad (2.72)$$

El término proporcional a $\cosh \alpha$ se puede también representar en términos de una expansión en series de Fourier por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\cosh \alpha \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) &= a_0 \cosh \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh \alpha \cos n\beta \\ &= a_0 \cosh \alpha + a_1 \cosh \alpha \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cosh \alpha \cos n\beta.\end{aligned}\quad (2.73)$$

Así el producto $(\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta)$ queda como

$$\begin{aligned}(\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) &= \cosh \alpha \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) - \cos \beta \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) \\ &= a_0 \cosh \alpha + a_1 \cosh \alpha \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cosh \alpha \cos n\beta \\ &\quad - \frac{a_1}{2} - \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) \cos \beta - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} \right) \cos n\beta\end{aligned}\quad (2.74)$$

y reagrupando los términos como factores de $\cos n\beta$ queda finalmente como

$$(\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) = \left(a_0 \cosh \alpha - \frac{a_1}{2} \right) + \left(a_1 \cosh \alpha - a_0 - \frac{a_2}{2} \right) \cos \beta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n \cosh \alpha - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2} \right) \cos n\beta. \quad (2.75)$$

Si ahora

$$b_0 = a_0 \cosh \alpha - \frac{a_1}{2}, \\ b_1 = a_1 \cosh \alpha - a_0 - \frac{a_2}{2}, \\ b_n = a_n \cosh \alpha - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2} \quad (2.76)$$

se obtiene

$$(\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta) = b_0 + b_1 \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\beta. \quad (2.77)$$

De esta forma, la Ecuación 2.52 queda como

$$\frac{\psi}{h} = A_0 \cosh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha + K \left(b_0 + b_1 \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\beta \right) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} ((A_n \cosh (n+1)\alpha + B_n \cosh (n-1)\alpha) \cos n\beta). \quad (2.78)$$

Con esta nueva expresión para la función de corriente se busca ahora conocer los valores de las constantes utilizando para ello las condiciones del flujo sobre las superficies de los rodillos. La condición de cero flujo a través de las superficies de los rodillos nos indica que $\psi(\alpha_R, \beta) = M$ (constante acotada) para toda β . Así se tiene

$$\frac{1}{h} \psi(\alpha_R, \beta) = \left(\frac{\cosh \alpha}{a} - \frac{\cos \beta}{a} \right) M = A_0 \cosh \alpha_R + K \left[b_0 + b_1 \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \cos n\beta \right] \\ + D_0 \alpha_R \sinh \alpha_R + \sum_{n=1}^{\infty} ((A_n \cosh (n+1)\alpha_R + B_n \cosh (n-1)\alpha_R) \cos n\beta). \quad (2.79)$$

Agrupando los términos de acuerdo al orden de $\cos n\beta$, las ecuaciones quedan como

$$\left(A_0 - \frac{M}{a} \right) \cosh \alpha_R + D_0 \alpha_R \sinh \alpha_R + K b_0 = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{M}{a} + A_1 \cosh 2\alpha_R + B_1 + K b_1 = 0, \quad (2.81)$$

y para $n \geq 2$

$$A_n \cosh(n+1)\alpha_R + B_n \cosh(n-1)\alpha_R + K b_n = 0. \quad (2.82)$$

Ahora aplicando la condición de frontera de no deslizamiento en la superficie de los rodillos, $u_J(\alpha_R) = \omega R$, se tiene

$$\begin{aligned} \omega R = & -A_0 \sinh \alpha_R - D_0 (\alpha_R \cosh \alpha_R + \sinh \alpha_R) + \frac{M}{a} \sinh \alpha_R \\ & - K \left[\sinh \alpha_R \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\beta \right) + \sinh \alpha_R \right] \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)A_n \sinh(n+1)\alpha_R + (n-1)B_n \sinh(n-1)\alpha_R] \cos n\beta. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Nuevamente, agrupando con respecto al orden de $\cos n\beta$, se obtienen otro grupo de ecuaciones, las cuales son:

$$\left(A_0 + D_0 + K(1 + a_0) - \frac{M}{a} \right) \sinh \alpha_R + \omega R + D_0 \alpha_R \cosh \alpha_R = 0, \quad (2.84)$$

$$2A_1 \sinh 2\alpha_R + K a_1 \sinh \alpha_R = 0, \quad (2.85)$$

y para $n \geq 2$

$$(n+1)A_n \sinh(n+1)\alpha_R + (n-1)B_n \sinh(n-1)\alpha_R + K a_n \sinh \alpha_R = 0. \quad (2.86)$$

Entonces, ahora se tienen como incógnitas a A_0 , A_1 , A_n , B_1 , B_n , D_0 , K y M , y se tienen siete Ecuaciones: (2.58), (2.80-82) y (2.84-86). Como M es el valor de la función de corriente ψ en la superficie de los rodillos, el cual es constante, se le puede asignar un valor arbitrario, y por tanto se tiene un sistema bien definido. Utilizando $M = 0$, es posible comenzar a resolver el sistema.

Resolviendo simultáneamente las Ecuaciones 2.82 y 2.86 se obtienen A_n y B_n con respecto a K , quedando como

$$A_n = K \frac{-a_n \cosh(n-1)\alpha_R + b_n(n-1) \sinh(n-1)\alpha_R}{n \sinh 2\alpha_R + \sinh 2n\alpha_R}, \quad (2.87)$$

y

$$B_n = K \frac{a_n \cosh(n+1)\alpha_R - b_n(n+1) \sinh(n+1)\alpha_R}{n \sinh 2\alpha_R + \sinh 2n\alpha_R}. \quad (2.88)$$

Expresando las funciones hiperbólicas $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en las ecuaciones de arriba se obtiene finalmente

$$\frac{A_n}{K} = \frac{(n+1) - e^{-2n\alpha_R} - n e^{-2\alpha_R}}{n(n+1)[\sinh 2n\alpha_R + n \sinh 2\alpha_R]} \quad (2.89)$$

y

$$\frac{B_n}{K} = \frac{(n-1) + e^{-2\alpha n} - n e^{2\alpha n}}{n(n-1)[\sinh 2\alpha R + n \sinh 2\alpha R]}. \quad (2.90)$$

Ahora se pueden obtener A_0 , A_1 , B_1 , D_0 en función de K utilizando las Ecuaciones 2.80, 2.81, 2.84 y 2.85, donde resulta que

$$A_1 = -\frac{K a_1 \sinh \alpha R}{2 \sinh 2\alpha R} = -\frac{K a_1 \operatorname{sech} \alpha R}{4}, \quad (2.91)$$

$$B_1 = -K b_1 + \frac{K a_1 \cosh 2\alpha R \operatorname{senh} \alpha R}{2 \sinh 2\alpha R} = -K b_1 + \frac{K a_1 \coth 2\alpha R \operatorname{senh} \alpha R}{2}, \quad (2.92)$$

$$A_0 = \frac{2R\omega\alpha R \operatorname{senh} \alpha R - 2K(b_0(\operatorname{senh} \alpha R + \alpha R \cosh \alpha R) - (1+a_0)\alpha R \operatorname{senh}^2 \alpha R)}{2\alpha R + \operatorname{senh} 2\alpha R}, \quad (2.93)$$

$$D_0 = -\frac{A_0 \cosh \alpha R + K b_0}{\alpha R \operatorname{senh} \alpha R}. \quad (2.94)$$

Utilizando la Ecuación 2.58 se obtiene

$$A_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = -A_1 - B_1 - \sum_{n=2}^{\infty} K \left(\frac{A_n}{K} + \frac{B_n}{K} \right) \quad (2.95)$$

y finalmente

$$A_0 + A_1 + B_1 = -K \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{A_n}{K} + \frac{B_n}{K} \right) \equiv -KS \quad (2.96)$$

en donde S representa la suma parcial que se calcula fácilmente con la exactitud requerida y sólo depende de los parámetros geométricos de los rodillos a través de αR . Entonces, S queda expresada como

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2n)e^{-2\alpha n} + (n-n^2)e^{-2\alpha n} + (n+n^2)e^{2\alpha n}}{(n-1)n(n+1)[\sinh 2\alpha R + n \sinh 2\alpha R]}. \quad (2.97)$$

Resolviendo para K se obtiene que

$$K = -\frac{A_0 + A_1 + B_1}{S}, \quad (2.98)$$

y sustituyendo las expresiones de A_0 , A_1 y B_1 en la ecuación anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} K = & -4R\omega\alpha R \operatorname{senh} \alpha R / [2S(2\alpha R + \operatorname{senh} 2\alpha R) + 4\alpha R \operatorname{senh}^2 \alpha R (a_0 + 1) \\ & - 4b_0(\alpha R \cosh \alpha R + \operatorname{senh} \alpha R) - 2b_1(2\alpha R + \operatorname{senh} 2\alpha R) \\ & + a_1 \left(2\alpha R \coth 2\alpha R \operatorname{senh} \alpha R - \alpha R \operatorname{sech} \alpha R - \frac{3}{2} \operatorname{senh} \alpha R + \frac{1}{2} \operatorname{senh} 3\alpha R \right)]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Hasta este punto ya se han obtenido los siete coeficientes para el flujo lento de un molino de dos rodillos idénticos que giran corrotacionalmente con la misma velocidad angular, y que son

proporcionales a $R\omega$. Una vez que se conocen los coeficientes de la función de corriente ψ para una geometría dada pueden calcularse todas las propiedades del flujo. En particular, en la Figura 2.4 se muestran las líneas de corriente para dos geometrías distintas en las que el diámetro de los rodillos varía y donde se mantiene fija la distancia entre ejes.

Dunlap [2] propone una ecuación de flujo más sencilla para el mismo problema, la cual es

$$\psi = \frac{a^2\omega}{\cosh \alpha - \cos \beta} (A_0 \cosh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha)$$

$$\text{con } A_0 = \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \sinh \alpha_R \cosh \alpha_R}$$

$$\text{y } D_0 = \frac{-\coth \alpha_R}{\alpha_R + \sinh \alpha_R \cosh \alpha_R}.$$
(2.100)

Esta ecuación tiene algunos inconvenientes, los que son: (1) no representa apropiadamente el desvanecimiento del flujo en el infinito, y (2) no considera como centro de vorticidad a los ejes de los rodillos, sino que dicho eje está desplazado $\alpha = \pm\infty$ (es decir, en el punto representado por a). Por lo tanto, la solución propuesta por Dunlap es válida como una aproximación para la región cercana al punto de estancamiento.

La función de corriente que aquí se utiliza (Ecuación 2.52) y la que utiliza Dunlap se comparan entre sí y con los datos experimentales y numéricos que están reportados [3, 1]. Los valores que utilizan como valores teóricos en los trabajos de Dunlap [2], Geffroy et al. [4, 26] y Wang [3] son los que se obtienen a partir de la Ecuación 2.100.

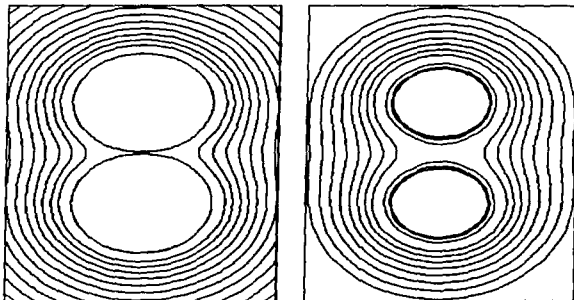


Figura 2.4. Gráficas que representan las líneas de corriente para dos tamaños de rodillos diferentes.

2.3 Rapidez de corte y grado extensional en el punto de estancamiento.

Resultado de gran importancia para las aplicaciones del molino de dos rodillos conocer las condiciones del flujo en la cercanía del punto intermedio entre los dos rodillos que, como se menciona anteriormente, se denomina el "punto de estancamiento". En realidad, puesto que el flujo es tridimensional, el punto de estancamiento corresponde a una *línea en el flujo* para las condiciones fijas $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ pero donde z toma cualquier valor. Es preciso destacar esta propiedad del flujo que resulta de interés para medir la anisotropía de líquidos poliméricos, pues cada una de las moléculas en la "línea de estancamiento" contribuye a la anisotropía de igual forma, facilitando medidas con gran precisión. Sin embargo, en la discusión subsecuente se mantiene la convención ya establecida y se denomina punto de estancamiento a la región unidimensional del flujo descrito anteriormente.

Asimismo, es evidente de la Figura 2.5 que el punto de estancamiento presenta condiciones cinemáticas esencialmente diferentes que las de otros puntos en el flujo del molino. En particular, en la región alrededor del punto de estancamiento las líneas de corriente se asemejan a hipérbolas simétricas respecto del eje de coordenadas xy , mientras que lejos del punto de estancamiento el flujo se asemeja al simple cortante. Consecuentemente, a continuación se analizan en detalle las características más relevantes de la cinemática del punto de estancamiento.

El análisis de los valores característicos para los parámetros del flujo en el punto de estancamiento puede simplificarse notablemente realizando una expansión de la ecuación de flujo en términos de series de Taylor hasta segundo orden alrededor de $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$, por lo que se obtiene que la Ecuación 2.52 queda como

$$\left[\frac{4 - (\beta - \pi)^2 + \alpha^2}{2a} \right] \psi = A_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) + D_0 \alpha^2 + K \left[\alpha^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{(\beta - \pi)^2}{8} + \frac{\ln 2}{2} \right) + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} (\beta - \pi)^2 (1 + \ln 2) \right] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} (2 - n^2 \pi^2 + 2n^2 \pi \beta - n^2 \beta) (A_n (2 + \alpha^2 (1 + n^2 + 2n)) + B_n (2 + \alpha^2 (1 + n^2 - 2n))) \quad (2.101)$$

Asimismo, expandiendo en series de Taylor las Ecuaciones 2.27 alrededor de $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$ se obtiene que $y \cong a\alpha/2$ y que $x \cong a(\pi - \beta)/2$; y entonces, despreciando α y β de estas expresiones y sustituyéndolas en la Ecuación 2.101 se obtiene lo siguiente

$$\left[\frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{a} \right] \psi = A_0 (1 + 2y^2) + 4y^2 D_0 + K \left[4y^2 \left(\frac{1 - x^2 - \ln 2}{2} \right) + 2 \ln 2 + 2x^2 (1 + \ln 2) \right] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 2n^2 x^2) (A_n (1 + 2y^2 (n + 1)^2) + B_n (1 + 2y^2 (n - 1)^2)). \quad (2.102)$$

En la Ecuación anterior, el término de la izquierda es proporcional a $(1 - x^2 + y^2)$. Ahora, multiplicando ambos lados de la igualdad por $(1 + x^2 - y^2)$, en el lado izquierdo se tiene entonces que $(1 + x^2 - y^2)(1 - x^2 + y^2) = 1 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 \equiv 1$ cuando se desprecian los términos de orden cuadrático (válido en la región del punto de estancamiento). Así (2.103) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} [1 - x^2 + y^2] (1 - y^2 + x^2) \psi &= \frac{2}{a} \psi = \\ A_0 + 2K \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (A_n + B_n) & \\ + y^2 \left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (2(A_n(u+1)^2 + B_n(u-1)^2) - (A_n + B_n)) \right] & \quad (2.103) \\ + x^2 \left[A_0 - 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} ((A_n + B_n) - 2n^2(A_n + B_n)) \right]. & \end{aligned}$$

Si los coeficientes para x^2 y y^2 tienen signos opuestos, entonces la ecuación es equivalente a la de un flujo bidimensional hiperbólico de la forma

$$y^2 - \lambda x^2 = c, \quad (2.104)$$

y ordenando la ecuación (2.106) en la forma anterior se obtiene

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{\left[A_0 - 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} ((A_n + B_n) - 2n^2(A_n + B_n)) \right]}{\left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (2(A_n(u+1)^2 + B_n(u-1)^2) - (A_n + B_n)) \right]} x^2 & \\ = \frac{\frac{2}{a} \psi - A_0 - 2K \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (A_n + B_n)}{\left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (2(A_n(u+1)^2 + B_n(u-1)^2) - (A_n + B_n)) \right]}. & \quad (2.105) \end{aligned}$$

Además, debido a la característica lineal de la aproximación de Stokes, es posible expresar el campo de velocidades como

$$\mathbf{u} = \nabla u^T \cdot \mathbf{x}, \quad (2.106)$$

es decir, expresando explícitamente el campo de velocidad bidimensional

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

donde

$$\nabla \mathbf{u} \Big|_{(x=0, y=\pi)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{2}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Expandiendo las expresiones de u_x y u_y en series de Taylor hasta términos de segundo grado alrededor de $(\alpha = 0, \beta = \pi)$ y utilizando $y = a\alpha/2$ y $x = a(\pi - \beta)/2$ se obtiene después de simplificar

$$u_x = \frac{x}{a} \left[-A_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} (2n^2 - 1)(A_n + B_n) \right] \quad (2.109)$$

y

$$u_y = -\frac{y}{a} \left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \left(2((n+1)^2 A_n + (n-1)^2 B_n) - (A_n + B_n) \right) \right] \quad (2.110)$$

y si

$$\begin{aligned} u_y &\equiv u_x(x') \\ u_x &\equiv -u_y(x') \end{aligned} \quad (2.111)$$

donde x' es el punto de estancamiento, entonces, de (2.107) se tiene que

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}y \\ -\dot{\gamma}\lambda x \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Por lo que la magnitud del gradiente de velocidad o rapidez de corte en el punto de estancamiento es

$$\dot{\gamma} = \left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \left(2(A_n(n+1)^2 + B_n(n-1)^2) - (A_n + B_n) \right) \right] / a \quad (2.113)$$

y el parámetro de flujo o grado extensional es

$$\lambda = \frac{\left[2K - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \left((2n^2 - 1)(A_n + B_n) \right) \right]}{\left[A_0 + 4D_0 + 2K + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n} \left(2(A_n(n+1)^2 + B_n(n-1)^2) - (A_n + B_n) \right) \right]} \quad (2.114)$$

el cual es idéntico al que se obtiene por medio de las Ecuaciones 2.104 y 2.105. Si bien no se calculó explícitamente el valor de $\dot{\gamma}$ mediante las Ecuaciones 2.104 y 2.105, es fácil ver que aparece implícitamente como el denominador del segundo término de la izquierda, así como en el término de la derecha.

Como la Ecuación 2.104 corresponde a una familia de hipérbolas, las asíntotas se obtienen igualando la constante c a cero, entonces se puede despejar el cociente de $\frac{y}{x}$, el cual es igual a $\tan \theta$. El ángulo agudo que se forma en el punto de estancamiento por el "cruce" de las líneas de flujo 2θ se define como la mitad del ángulo entre el eje de flujo de entrada y el eje del flujo de salida el cual depende explícitamente del parámetro del "tipo de flujo" λ de la siguiente manera

$$\theta = \arctan \left(\lambda^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.115)$$

La orientación θ corresponde a la orientación del eigenvector principal del gradiente de velocidad ∇u , y también representa la orientación más probable de un cuerpo deformado en el campo de flujo puesto que dicha orientación también coincide con el eigenvector principal del tensor gradiente de deformación D . La Figura 2.5 muestra las líneas de corriente en la región del punto de estancamiento para diferentes tamaños de rodillos girando corrotatoriamente a la misma velocidad angular y separados una distancia de 34.00 mm entre ejes. El valor para el cual $\psi(0, \pi)$ es constante está graficado y se observa como un "cruce" de las líneas de corriente. El significado que se le da al ángulo θ está representado por las líneas que cruzan el punto de estancamiento, en donde se ha hecho la aproximación lineal presentada en esta sección. De los valores reales que van tomando las curvas es posible aproximarse al punto de estancamiento.

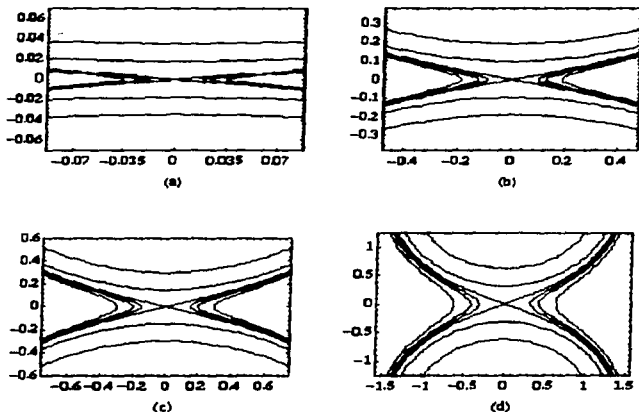


Figura 2.5. Líneas de corriente alrededor y en el punto de estancamiento para diferentes valores del radio de los rodillos. (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. El valor del ángulo entre las líneas que pasan por el punto de estancamiento es 2θ . Las líneas que cruzan por el punto de estancamiento indican la orientación más probable de un cuerpo deformado en el campo de flujo.

Dunlap [2], por su lado, presenta las expresiones para el parámetro de flujo y para el gradiente de velocidad alrededor del punto de estancamiento como

$$\lambda = \left(\frac{4 \coth \alpha_R}{\alpha_R} - 1 \right)^{-1} \quad (2.116)$$

y

$$\dot{\gamma} = \frac{A_0 \omega}{\lambda}. \quad (2.117)$$

Los valores que se obtienen de las Ecuaciones 2.113, 2.114, 2.116 y 2.117 son comparados en la Tabla 3.2 en la Sección 3.1.

El punto de estancamiento que se genera en el molino de dos rodillos es importante porque, a diferencia de muchos otros dispositivos que generan flujos extensionales (por ejemplo, el molino de cuatro rodillos, el aparato de Metzner, el fluenciómetro de Munstedt, el método de spinline, el arreglo de Sridhar y Gupta, etc.), las moléculas de polímeros cerca del punto de estancamiento están sometidas a deformaciones totales muy grandes, y consecuentemente, pueden alcanzar el máximo cambio en la conformación consistente con la rapidez de deformación aplicada (Ver Tanner [14]).

Capítulo 3.

Características del flujo en la región entre los rodillos.

Como se señala en el Capítulo 2, en el punto de estancamiento las moléculas de polímero se pueden someter a deformaciones muy grandes lo que facilita el estudio de su dinámica molecular no-lineal y de ahí su importancia para el laboratorio de Reología Óptica. En este Capítulo se analiza la región alrededor del punto de estancamiento, primero con una visión *local* del flujo y subsiguientemente analizando algunas propiedades globales de éste para la región que incluye todo el dominio entre los rodillos.

La importancia del análisis local radica en el hecho de que existe información teórica (Dunlap [2]), experimental (Wang [3]) y de simulaciones numéricas del flujo utilizando técnicas de elemento finito (Singh [1]) que permiten realizar una comparación con los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo anterior. Estas comparaciones son útiles para: (a) validar el resultado analítico, (b) conocer las limitaciones físicas que enfrentan las técnicas experimentales y (c) proveer asimismo una base sólida para correlacionar las interrelaciones de los diferentes parámetros del flujo que tanto numéricamente como experimentalmente resulta imposible de lograr.

A continuación la solución analítica se aplica a un conjunto de configuraciones (diámetros de los rodillos y separación entre ellos) con los cuales se han *realizado las medidas experimentales* de las propiedades del flujo (Wang [3]) además de los cambios conformacionales de las macromoléculas (Geffroy [26, 27]).

3.1 Las características del flujo en el punto de estancamiento.

El flujo es generado por un molino de dos rodillos con una distancia fija entre ejes de 34.00 mm y un conjunto de rodillos de diferentes radios, con los que se obtienen diferentes separaciones entre las paredes de éstos, como se puede observar en la Tabla 3.1, donde se indica la denominación que se da a cada rodillo [4]. También se da la separación existente entre sus

paredes y el valor que toma el parámetro a del sistema de coordenadas bipolares que permite representar a los rodillos con un valor constante de la coordenada α .

La expresión para el parámetro de flujo λ en el punto de estancamiento que se obtuvo tiene unos términos que se expresan como sumatorias que convergen en el infinito (Ecuación 2.114), mientras que la ecuación para el parámetro de flujo de Dunlap (Ecuación 2.116) está dada de una forma muy sencilla. La Tabla 3.2 muestra los valores que se obtienen con las expresiones

Rodillo	radio (mm.)	separación (mm.)	a (mm.)
A	16.650	0.700	3.431836
B	16.350	1.300	4.655910
C	15.700	2.600	6.519969
D	15.100	3.800	7.809609
E	14.170	5.660	9.392076
F	14.000	6.000	9.643651
G	12.780	8.440	11.210334
H	11.690	10.620	12.342767
I	10.750	12.500	13.169567

Tabla 3.1 En esta tabla se encuentran los datos para cada par de rodillos, como son el radio, su separación y el valor del parámetro a para cada par de rodillos con el cual se ajusta un valor de la coordenada α constante para representar a los rodillos.

Rodillo	lambda Dunlap	lambda 5 términos	lambda 25 términos	lambda 125 términos	lambda experimental
A	0.0104379	0.115312	0.0105409	0.0104379
B	0.0196209	0.0988742	0.0196246	0.0196209
C	0.0403169	0.0810291	0.0403162	0.0403162	0.047
D	0.0604744	0.0819761	0.0604608	0.0604608	0.067
E	0.0939736	0.102122	0.0941229	0.0941229	0.096
F	0.1004238	0.107371	0.100692	0.100692	0.114
G	0.1501333	0.154612	0.152789	0.152789	0.160
H	0.2005480	0.207745	0.20719	0.20719	0.196
I	0.2497712	0.259299	0.259108	0.259108

Tabla 3.2 Tabla comparativa de los valores de λ en el punto de estancamiento para cada par de rodillos obtenidos con la solución de Dunlap [2], la aquí propuesta (para diferentes números de términos en la sumatoria) y los valores experimentales que obtiene Wang [3].

mencionadas, presentando el número de términos en la sumatoria de (2.114). Además, se muestran los resultados experimentales que obtiene Wang [3] en un molino de dos rodillos de 25.00 mm de altura y con las características geométricas listadas en la Tabla 3.1. En tal Tabla se puede apreciar que la expresión obtenida tiene problemas de convergencia con pocos términos, pero, sin embargo, este problema de convergencia va disminuyendo conforme el radio del rodillo disminuye. Además, el valor que se obtiene para el parámetro de flujo con la ecuación que propone Dunlap tiene muy buena aproximación para radios del rodillo grandes pero conforme el radio disminuye, esta aproximación va empeorando. Para los rodillos G, en los resultados numéricos que obtiene Singh [1], el valor de λ es de 0.153. Los valores experimentales son más altos que los valores teóricos para el parámetro de flujo λ (incluso del numérico, que coincide con el valor que se obtiene con la Ecuación 2.114), que puede deberse a los efectos reales de las fronteras para el arreglo experimental que la solución analítica no puede tomar.

El problema de convergencia anterior es delicado cuando se tiene que decidir hasta qué término se van a trincar la sumatoria. En la Tabla 3.2 se puede observar el problema de convergencia para pocos términos y la variación cuando disminuye el tamaño del rodillo. La Figura 3.1 muestra como varía el valor del parámetro de flujo λ en el punto de estancamiento con respecto al número de términos representativos en las sumatorias. Se escogió la gráfica de λ -m para el rodillo A ($R = 16.650$ mm) precisamente porque es el que tiene los problemas de convergencia más fuertes. En la Tabla 3.2 se observa el número de términos mínimo cuando la Ecuación 2.114 no es confiable (aproximadamente 30 términos), y a partir de tal punto el número de términos que se elija sólo es cuestión de la precisión que se desca. Los resultados analizados en el resto de este trabajo se han calculado utilizando $m = 125$ términos para poder garantizar una buena precisión en los datos obtenidos.

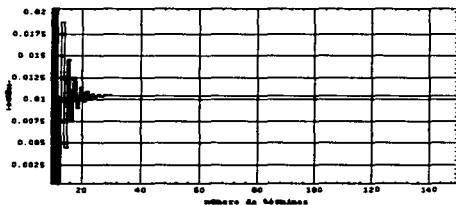


Figura 3.1. Gráfica de la variación del parámetro de flujo λ en el punto de estancamiento con respecto al número de términos en la sumatoria para $R = 16.650$ mm. El tamaño del rodillo que se escogió para esta figura se debe a que es éste el que presenta mayor sensibilidad al número de términos en las sumatorias. La variación con respecto al número de términos en la sumatoria disminuye conforme el radio de los rodillos es menor, registrando una convergencia más rápida.

La Figura 3.2 muestra el comportamiento de las expresiones de λ para el punto de estancamiento que propone Dunalap (2.116) y la Ecuación 2.114. Como se puede apreciar, la solución aquí dada presenta un comportamiento continuo (el valor del límite de λ cuando $R \rightarrow 0$ es 1), mientras que la solución que propone Dunalap presenta valores mayores que 1 cuando el radio es menor que 0.43 cm aproximadamente, dando valores de λ fuera de rango, debido a que este parámetro sólo toma valores de -1 a 1 . Si bien no es práctico hacer experimentos con rodillos de radio pequeño, la solución que propone Dunalap y la aquí dada toman valores muy cercanos cuando el radio de los rodillos es grande (arriba de 13.00 mm).

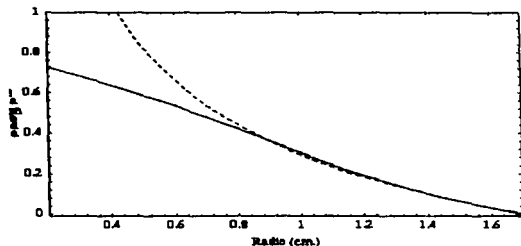


Figura 3.2. Comparación del comportamiento del parámetro de flujo λ en el punto de estancamiento en función del radio del rodillo para una distancia entre ejes de 3.40 cm. La línea continua corresponde a la solución aquí dada (Ecuación 2.114) y la línea punteada a la solución que propone Dunalap (Ecuación 2.116). La línea continua tiene como límites a $\lambda = 0$ cuando $R = 1.7$ cm y $\lambda = 1$ cuando $R = 0$. La solución de Dunalap toma valores del parámetro de flujo fuera del rango $-1 \leq \lambda \leq 1$ cuando el radio es menor que 0.43, como se puede observar en la gráfica.

El valor de la magnitud del gradiente de velocidad en el punto de estancamiento es otro de los parámetros de importancia en el estudio del flujo generado por un molino de dos rodillos. De forma semejante que para el parámetro de flujo λ , es posible comparar los valores de $\dot{\gamma}$ en el punto de estancamiento pero con una diferencia: existen dos expresiones para el cálculo de $\dot{\gamma}$, tanto para la solución que propone Dunalap como la aquí dada. Una de ellas se obtiene por medio de una aproximación desarrollada a partir de series de Taylor, y la otra expresión es la que se obtiene al evaluar la magnitud del tensor gradiente de velocidad en el punto en cuestión. Para esta segunda comparación, se cuenta también con resultados experimentales. En la Tabla 3.3 se muestran los datos obtenidos por las respectivas expresiones antes mencionadas.

Como se puede observar, los valores de la magnitud del gradiente de velocidad normalizados para rodillos de tamaño grande son idénticas para las expresiones de Dunalap y la solución con 125 términos. También, las aproximaciones son precisas para estos casos. Sin embargo, si el

tamaño de los rodillos se reduce, las expresiones empiezan a variar en sus valores. Comparando los resultados teóricos con los datos experimentales, se observa que para los rodillos B y C los valores teóricos son mayores que los experimentales en no más del 3%. Para los rodillos con dimensiones menores D, E, F y G los valores experimentales sobrepasan los valores teóricos por menos de 3% y finalmente para los rodillos H, los valores teóricos nuevamente son mayores que los experimentales. Esto último puede ser el resultado de una separación entre rodillos ($g = 10,62$ mm) que es del orden de la mitad de la longitud de los mismos, por lo que los efectos de borde debidos a la presencia de las tapas de la celda de flujos (colocadas a 125 mm de distancia en la dirección z del centro del flujo) alteran el valor de λ ya que se difunde vorticidad en la dirección de z . Los efectos debidos a la existencia de las fronteras hacen que el flujo tenga un carácter estrictamente tridimensional, y la idealización bidimensional resulta válida sólo cuando la longitud de los rodillos es mayor que su separación. Por lo contrario, explicar la discrepancia en los valores para el caso de los rodillos B y C resulta hasta ahora imposible, si bien la diferencia es inferior al 3%.

Rodillo	$\dot{\gamma}_D/\omega$ aprox.	$\dot{\gamma}_D/\omega$	$\dot{\gamma}/\omega$ aprox.	$\dot{\gamma}/\omega$	$\dot{\gamma}\omega/\omega$
A	47.237331	47.239904	47.237331	47.239904	...
B	24.819154	24.823931	24.819154	24.823931	24.1
C	11.741155	11.750694	11.741156	11.750694	11.7
D	7.610899	7.624803	7.610783	7.624681	7.84
E	4.670160	4.690736	4.669733	4.690372	4.83
F	4.329777	4.351555	4.329427	4.351319	4.44
G	2.692708	2.722886	2.695945	2.727231	2.80
H	1.868669	1.905877	1.87967	1.919587	1.84
I	1.391422	1.434168	1.41084	1.457431	...

Tabla 3.3 Valores comparativos de la magnitud del gradiente de velocidad normalizado con respecto a la velocidad angular en los rodillos $\dot{\gamma}/\omega$ para los diferentes radios de los rodillos. $\dot{\gamma}_D/\omega$ significa que es el valor obtenido con la solución de Duniap para los dos tipos de expresiones; $\dot{\gamma}/\omega$ representa el valor obtenido con la solución aquí dada con 125 términos en la sumatoria, y $\dot{\gamma}\omega/\omega$ indica los valores experimentales que obtuvo Wang [3]. Los datos son adimensionales.

La corrección de los efectos de las fronteras se puede hacer, por un lado por medio de técnicas ópticas de medición que permiten evaluar los efectos de las ventanas (fronteras) y de esta forma poder conocerlos y eliminarlos, dando así datos más cercanos al caso bidimensional; por otra parte, aumentando la altura de los rodillos, se puede lograr una zona más extensa en donde el flujo es prácticamente bidimensional. Con estas herramientas, es posible proponer un diseño

de un molino de dos rodillos y técalas de medición muy precisas que permitirán desarrollar experimentos con muy alto grado de exactitud.⁵

Como se ha podido visualizar, la metodología planteada por Geffroy et al. [4] que se usa aquí para obtener la solución ofrece ventajas sobre la propuesta por Dunlap, al ser más coherente con la teoría; falta aún compararla con datos experimentales obtenidos con una mayor exactitud. Por otra parte, las soluciones numéricas obtenidas mediante elemento finito [1] muestran un comportamiento parecido al obtenido con la solución aquí dada.

3.2 Características del campo de flujo global.

En una primera instancia, no es posible hasta el momento saber qué le ocurre en su trayectoria a una molécula del fluido, en particular por el punto de vista euleriano que se utiliza, pero sí es posible conocer las propiedades del flujo en cada punto como función de las coordenadas solamente. Es por ello, que en esta Sección se muestra el análisis para encontrar los parámetros de importancia del flujo.

El campo vectorial de la velocidad está dado por

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad (3.1)$$

y el gradiente de este vector da el *tensor gradiente de velocidad* que se expresa como⁶

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \mathbf{e}^k = u_{i;k} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^i \quad (3.2)$$

en donde

$$u_{i;k} = \sqrt{g_{kk}} u_{(k)} = h_k u_{(k)} \quad (3.3)$$

y

$$u_{i;k} = u_{i;k} - u_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ k \ n \end{matrix} \right\} = \frac{\partial u_{in}}{\partial x^k} - u_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ k \ n \end{matrix} \right\} \quad (3.4)$$

y en donde $\left\{ \begin{matrix} m \\ k \ n \end{matrix} \right\}$ representa el coeficiente de Christoffel que es igual a

$\left\{ \begin{matrix} m \\ k \ n \end{matrix} \right\} = \frac{\partial x^m}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^n} \Gamma_{jk}^m$, y en coordenadas bipolares cada uno de los coeficientes se

⁵ El trabajo realizado para medir los efectos de las ventanas lo llevó a cabo Martha de la Luz Hernández Prián [28] en su trabajo de tesis. En ella se estudia el fenómeno a lo largo de un eje óptico el cual se encuentra en el punto de entrecruzamiento y es paralelo al eje de los rodillos, evaluando los efectos de las ventanas. Con respecto a la instrumentación para obtener las mediciones, en los trabajos realizados por Carlos Corona Páez [29] y Edwin García Muñoz [30], se muestra el diseño de los circuitos para llevar a cabo mediciones muy precisas.

⁶ El desarrollo completo de cada una de las expresiones relacionadas con cálculo tensorial se pueden consultar en el libro de Naranbhan [20].

expresan como

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} &= -\frac{\operatorname{senh} \alpha}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}, & \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}, \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{\operatorname{senh} \alpha}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}, & \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} &= -\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}, \\ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} &= -\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}, & \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{\operatorname{senh} \alpha}{\operatorname{cosh} \alpha - \cos \beta}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde para cualquier otra combinación de m , k y n , el coeficiente es igual a cero.

Por lo tanto, el tensor gradiente de velocidad en coordenadas bipolares está dado por

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} u_y & \frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_y & 0 \\ \frac{1}{h} \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_x & \frac{1}{h} \frac{\partial u_y}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y su magnitud $\|\nabla u\| = \sqrt{\operatorname{Tr}(\nabla u \nabla u^T)}$ da la *magnitud del gradiente de velocidad* expresada como

$$\begin{aligned} \|\nabla u\| = \dot{\gamma} &= \left[\left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} u_y \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_y \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_x \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_y}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_x \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como se puede apreciar, el gradiente de velocidad está expresado en tres dimensiones, pero como el fenómeno que estamos analizando es bidimensional, de aquí en adelante todos los vectores y tensores se expresan como cantidades bidimensionales.

Factorizando el tensor gradiente de velocidad en su parte simétrica D y su parte antisimétrica W , se tiene que

$$D = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T), \quad (3.8)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} u_y & \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \beta} + \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \right) \\ \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \beta} + \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \right) & \frac{1}{2a} (\operatorname{senh} \alpha u_y + \operatorname{sen} \beta u_x) \\ \frac{1}{2a} (\operatorname{senh} \alpha u_y + \operatorname{sen} \beta u_x) & \frac{1}{h} \frac{\partial u_y}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} u_x \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y

$$W = \frac{1}{2} (\nabla u - \nabla u^T), \quad (3.10)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \beta} - \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \right) \\ -\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \beta} - \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \right) & \frac{1}{2a} (\operatorname{senh} \alpha u_y - \operatorname{sen} \beta u_x) \\ \frac{1}{2a} (\operatorname{senh} \alpha u_y - \operatorname{sen} \beta u_x) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

A partir de las ecuaciones anteriores es posible conocer la magnitud de \mathbf{D} que se calcula como

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{D}\mathbf{D}^T]}, \quad (3.12)$$

donde $\|\mathbf{D}\|$ corresponde a la raíz del promedio del cuadrado de los eigenvalores de \mathbf{D} , y entonces

$$\|\mathbf{D}\| = \left[\left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\text{sen } \beta}{a} u_{\alpha\beta} \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} - \frac{\text{senh } \alpha}{a} u_{\alpha\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \right) + \left(\frac{\text{senh } \alpha}{a} u_\beta + \frac{\text{sen } \beta}{a} u_\alpha \right) \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.13)$$

En la Figura 3.3 se muestran las líneas equipotenciales de ψ , $\|\mathbf{u}\|$, $\|\nabla\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{D}\|$ para un rodillo con radio de 10.75 mm y distancia entre ejes de 34 mm.

También es posible calcular los eigenvectores (o vectores propios) de \mathbf{D} , orientados a lo largo de los ejes principales de deformación de $\nabla\mathbf{u}$. Los eigenvectores en un flujo bidimensional están definidos por

$$\mathbf{N}_\pm = \left\{ \frac{D_{11} - D_{22}}{2D_{12}} \mp \sqrt{\left(\frac{D_{11} - D_{22}}{2D_{12}} \right)^2 + 1}, \quad 1 \right\}, \quad (3.14)$$

en donde el primer eigenvector \mathbf{N}_+ corresponde a la diferencia de los términos en el primer elemento, y \mathbf{N}_- es el segundo eigenvector correspondiente a la suma de los términos en dicho elemento. Estos eigenvectores se pueden normalizar y entonces

$$\mathbf{n}_\pm = \frac{\mathbf{N}_\pm}{\|\mathbf{N}_\pm\|}. \quad (3.15)$$

Si utilizamos la siguiente relación para simplificar la notación

$$r = \frac{D_{11} - D_{22}}{2D_{12}} \quad (3.16)$$

resulta que la magnitud del eigenvector de \mathbf{D} es

$$\|\mathbf{N}_\pm\| = \sqrt{(r \mp \sqrt{r^2 + 1})^2 + 1} = \sqrt{2r^2 \mp 2r\sqrt{r^2 + 1} + 2}. \quad (3.17)$$

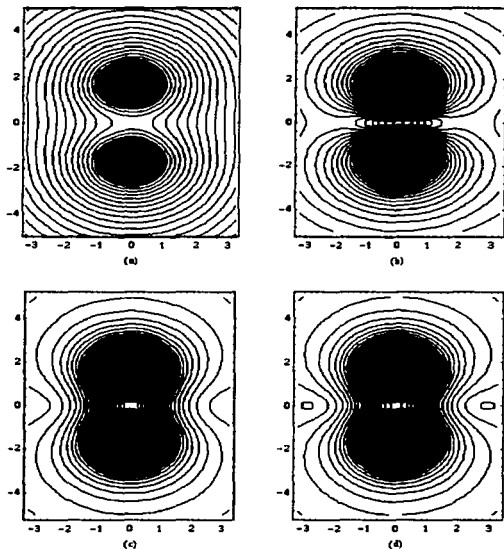


Figura 3.3. Las gráficas que se muestran corresponden a los rodillos de radio $R = 10.75$ mm. y una separación entre ejes de 34.00 mm. La figura (a) presenta las líneas de corriente; (b) muestra las isovelocidades (líneas de igual magnitud) de la magnitud del campo de velocidades $\|\mathbf{u}\|$ el cual alcanza su valor máximo sobre la superficie de los rodillos; el punto de estancamiento ($\alpha = 0$, $\beta = \pi$) está localizado al centro entre los rodillos. La figura (c) corresponde a las isovelocidades de la magnitud del gradiente de velocidad $\|\nabla \mathbf{u}\|$ y la figura (d) corresponde a la magnitud del tensor de deformación $\|\mathbf{D}\|$.

El vector unitario \mathbf{n}_{\pm} es entonces

$$\mathbf{n}_{\pm} = \left\{ \frac{r \mp \sqrt{r^2 + 1}}{\sqrt{2(r^2 \mp r\sqrt{r^2 + 1} + 1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(r^2 \mp r\sqrt{r^2 + 1} + 1)}} \right\}, \quad (3.18)$$

y los valores propios o eigenvalores de \mathbf{D} son

$$\xi_{\pm} = \frac{D_{11} + D_{22}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{D_{11} - D_{22}}{2}\right)^2 + (D_{12})^2}. \quad (3.19)$$

Si se utiliza ahora las siguientes relaciones

$$D_{11} - D_{22} = (\nabla \mathbf{u})_{11} - (\nabla \mathbf{u})_{22} = p \quad (3.20)$$

y

$$2D_{12} = (\nabla \mathbf{u})_{12} + (\nabla \mathbf{u})_{21} = q \quad (3.21)$$

y se sustituye en la expresión del vector unitario se obtiene que

$$\mathbf{n}_{\pm} = \left\{ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}} \right\} \quad (3.22)$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_+ &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}} \right\}, \\ \mathbf{n}_- &= \left\{ +\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Estas expresiones son válidas para $q > 0$, sin embargo, se pueden hacer válidas para cualquier valor de q con sólo afectar el valor de p cuando está en el numerador por el signo de q .

Ahora, el cambio de orientación para el vector unitario, como función de la posición y en el límite cuando la separación entre los puntos tiende a cero es

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{n}(\mathbf{x}')}{\Delta \mathbf{x}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}(t) - \mathbf{n}(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} \quad (3.24)$$

y entonces la razón de cambio en el tiempo corresponde a una rapidez de giro resultado del cambio de orientación para la dirección de deformación que se puede expresar como

$$\mathbf{n}'_{\pm} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{q(q * p' - p * q')}{(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 \mp p/\sqrt{p^2 + q^2}}} \right), \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{q(q * p' - p * q')}{(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 \pm p/\sqrt{p^2 + q^2}}} \right) \right\} \quad (3.25)$$

en donde

$$p = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_{y2}}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{a} (\operatorname{sen} \beta u_{y2} - \operatorname{senh} \alpha u_{x2}), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} \left(2 \frac{\partial u_{x2}}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_{y2}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \frac{1}{a} \left(\operatorname{sen} \beta \frac{\partial u_{y2}}{\partial \alpha} - \operatorname{cosh} \alpha u_{x2} \right) \quad (3.27)$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial \beta \partial \alpha} - \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial \beta^2} \right) - \frac{1}{a} \left(\cos \beta u_{y2} - \operatorname{senh} \alpha \frac{\partial u_{x2}}{\partial \beta} \right), \quad (3.28)$$

y también

$$q = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_{y1}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{a} (\operatorname{senh} \alpha u_{y1} + \operatorname{sen} \beta u_{x1}), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{senh} \alpha}{a} \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial u_{y1}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{1}{a} (\operatorname{sen} \beta \frac{\partial u_{x1}}{\partial \alpha} + \operatorname{cosh} \alpha u_{y1}) \quad (3.30)$$

y

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{a} \left(2 \frac{\partial u_{x1}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_{y1}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial \beta \partial \alpha} \right) + \frac{1}{a} (\cos \beta u_{x1} + \operatorname{senh} \alpha \frac{\partial u_{y1}}{\partial \beta}). \quad (3.31)$$

De la Ecuación 1.23 tenemos que la derivada material de n es

$$\frac{Dn}{Dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + u \cdot \nabla n = \Omega \cdot n \quad (3.32)$$

y la expresión $u \cdot \nabla n$ está dada por

$$(u \cdot \nabla) n = \left[\frac{1}{h} \left(u_x \left(\frac{\partial n_1}{\partial \beta} - \frac{1}{a} \operatorname{sen} \beta n_2 \right) + u_y \left(\frac{\partial n_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{a} \operatorname{senh} \alpha n_1 \right) \right) \right] \quad (3.33)$$

Entonces $\Omega \cdot n$ queda como

$$\Omega \cdot n = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} n_1 + \Omega_{12} n_2 \\ \Omega_{21} n_1 + \Omega_{22} n_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

y se tiene además que

$$n_{+1} = -n_{-2}, \quad (3.35)$$

$$n_{+2} = n_{-1},$$

por lo que es posible formar un conjunto de cuatro ecuaciones para determinar cada uno de los términos del tensor Ω expresado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Omega_{11} n_{+1} + \Omega_{12} n_{+2} &= (u \cdot \nabla n_{+})_{(1)} = A, \\ \Omega_{21} n_{+1} + \Omega_{22} n_{+2} &= (u \cdot \nabla n_{+})_{(2)} = B, \\ \Omega_{11} n_{-1} + \Omega_{12} n_{-2} &= (u \cdot \nabla n_{-})_{(1)} = C, \\ \Omega_{21} n_{-1} + \Omega_{22} n_{-2} &= (u \cdot \nabla n_{-})_{(2)} = D, \end{aligned} \quad (3.36)$$

y finalmente se obtiene que

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= \frac{n_{-2}A - n_{+2}C}{n_{+1}n_{-2} - n_{-1}n_{+2}}, \\ \Omega_{12} &= \frac{n_{+1}C - n_{-1}A}{n_{+1}n_{-2} - n_{-1}n_{+2}}, \\ \Omega_{21} &= \frac{n_{-2}B - n_{+2}D}{n_{+1}n_{-2} - n_{-1}n_{+2}}, \\ \Omega_{22} &= \frac{n_{+1}D - n_{-1}B}{n_{+1}n_{-2} - n_{-1}n_{+2}}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Ahora se puede conocer la vorticidad objetiva o invariante, para cambios en el marco de referencia, utilizando la Ecuación 1.24

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} - \boldsymbol{\Omega} \quad (3.38)$$

y de (1.28) se sabe que

$$\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} = \frac{\|\mathbf{D}\|}{\|\mathbf{W}\|} = G. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, la expresión para el parámetro de flujo se expresa como

$$\lambda = \frac{G - 1}{G + 1} = \frac{\|\mathbf{D}\|/\|\mathbf{W}\| - 1}{\|\mathbf{D}\|/\|\mathbf{W}\| + 1} = \frac{\|\mathbf{D}\| - \|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\| + \|\mathbf{W}\|}. \quad (3.40)$$

La expresión resultante del parámetro de flujo λ es muy complicada y difícil de simplificar. Aún así, se puede conocer el valor del parámetro de flujo para cada punto que sea de interés y también es posible conocer su comportamiento a lo largo de ciertas direcciones en donde se simplifica la ecuación, como por ejemplo, cuando $\alpha = 0$ y para $\beta = \pi$.

Este mismo procedimiento se usa para obtener la expresión del parámetro de flujo para la ecuación de flujo de este dispositivo que propone Dunlap, la cual resulta simple, en comparación con la que aquí se obtiene.

3.2.1 Casos particulares. Características del flujo a lo largo del eje x ($\alpha = 0$).

Si bien la información que se muestra en la Figura 3.3 permite visualizar globalmente los cambios que ocurren en el molino, esta información se puede complementar con el cambio de algunas propiedades (en función de las coordenadas y para regiones específicas) pero que ofrecen un mayor grado de detalle.

En particular, el valor del parámetro de flujo, λ , de la magnitud del gradiente de velocidad, $\dot{\gamma}$, a lo largo de direcciones específicas en el flujo, tales como el eje x dado por $\alpha = 0$, el eje y y entre los rodillos definido por $\beta = \pi$ y el eje z alejándose de los rodillos $\beta = 0$ se pueden

obtener en forma simplificada. En la Tabla 3.4 se muestran las funciones que se eliminan que hacen que el análisis en estas direcciones se simplifique.

Para $\alpha = 0$	Para $\beta = \pi$	Para $\beta = 0$
$h = \frac{a}{1 - \cos \alpha}$	$h = \frac{a}{\cos \beta + 1}$	$h = \frac{a}{\cos \beta - 1}$
$u_{,\beta} = 0$	$u_{,\alpha} = 0$	$u_{,\alpha} = 0$
$\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha} = 0$	$\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha} = 0$	$\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha} = 0$
$\frac{\partial u_{,\beta}}{\partial \beta} = 0$	$\frac{\partial u_{,\beta}}{\partial \beta} = 0$	$\frac{\partial u_{,\beta}}{\partial \beta} = 0$
$\frac{\partial^2 u_{,\alpha}}{\partial \alpha^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\alpha}}{\partial \alpha^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\alpha}}{\partial \alpha^2} = 0$
$\frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \beta^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \beta^2} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \beta^2} = 0$
$\frac{\partial^2 u_{,\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$	$\frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$

Tabla 3.4 En esta tabla se muestran las funciones que se eliminan para los diferentes casos particulares

En esta subsección se muestra el comportamiento de λ y de $\dot{\gamma}$ a lo largo $\alpha = 0$. Las ecuaciones siguientes se obtienen utilizando los datos de la Tabla 3.4 y el desarrollo obtenido en la Sección 3.2, y entonces

$$\lambda = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2a} \sin \beta u_{,\alpha}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2a} \sin \beta u_{,\alpha} - \frac{2u_{,\alpha}}{2h} \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2h} \sin \beta u_{,\alpha}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2h} \left(\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{2a} \sin \beta u_{,\alpha} - \frac{2u_{,\alpha}}{2h} \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}\right)^2}} \quad (3.41)$$

en donde q y $\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha}$ están dadas por

$$q = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha} \right) + \frac{\sin \beta}{a} u_{,\alpha}, \quad y \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial^2 u_{,\alpha}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_{,\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \frac{1}{a} \left(\sin \beta \frac{\partial u_{,\beta}}{\partial \alpha} - u_{,\alpha} \right);$$

y el valor de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma} = \|\nabla u\|$ es

$$\|\nabla u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial u_{,\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{a} \sin \beta u_{,\alpha}\right)^2} \quad (3.43)$$

Las Figuras 3.4 a la 3.6 muestran el valor de λ a lo largo de $\alpha = 0$, (Ecuación 3.41) a partir del punto de estancamiento, en donde la función es simétrica. Para los rodillos de radio $R = 16.65$ mm y con 34.00 mm de separación entre sus ejes, el valor de λ en el punto de estancamiento es 0.0104379. Para los puntos que se alejan del punto de estancamiento, el valor de λ se vuelve negativo, en particular en la región en la que se tiene un vórtice puro ($\lambda = -1$) que para $R =$

16.65 mm está localizado alrededor de 34 mm a partir del punto de estancamiento, variando su posición hasta 28.5 mm cuando $R = 10.75$ mm. La presencia del vórtice también se observa en la Figura 3.3(d) en la que se muestra la magnitud del gradiente de deformación para $R = 10.75$ mm, que se encuentra en la región circular (alrededor de $x = \pm 2.85$ en la escala de la gráfica) donde las deformaciones son nulas y únicamente se tiene vorticidad.

Un segundo punto de interés es aquel en donde el flujo se torna casi puramente elongacional, con un comportamiento semejante al vórtice en función de la separación a partir del punto de estancamiento (ver la Figura 3.4).

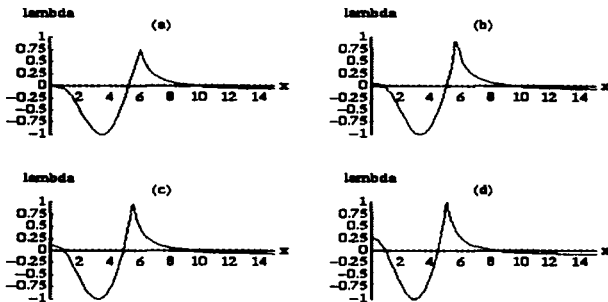


Figura 3.4. Gráficas de la variación del parámetro de flujo λ con respecto a la posición a lo largo de eje x ($\alpha = 0$). Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. Obsérvese que todas las gráficas muestran la misma estructura: (1) el punto de estancamiento, en donde el parámetro de flujo λ tiene un valor positivo definido por el radio de los rodillos; (2) el punto en donde λ es igual a -1 , que indica un flujo completamente rotacional, es decir, que la deformación es nula; (3) el punto en el cual λ se acerca a 1, que significa que el flujo se hace fuertemente elongacional, es decir, que la deformación es máxima debido a que la vorticidad es mínima; y (4) los puntos en los cuales λ es igual a 0, en donde el flujo es cortante y la deformación es igual a la vorticidad.

En las Figuras 3.5 y 3.6 se grafica la información de la Figura 3.4 pero ahora reescalando la abscisa con el radio de los rodillos (Figura 3.5) y con la separación entre los rodillos (Figura 3.6); esto es, la coordenada es ahora adimensional y corresponde a x/R y x/g respectivamente.

Para $R = 10.75$ mm de las gráficas en las Figuras 3.4 - 3.6 es claro que la posición del vórtice o del punto en el que el flujo es puramente elongacional varía fuertemente cuando la

abscisa se reescala en términos de R o g . Sin embargo, el efecto de reescalamiento se vuelve

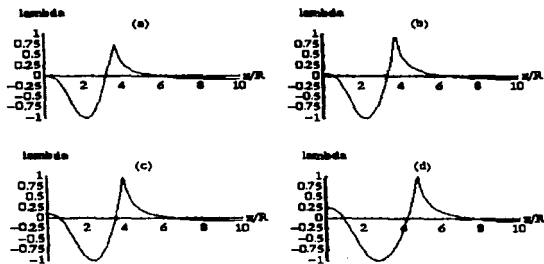


Figura 3.5. Gráficas de la variación del parámetro de flujo λ con respecto a la posición x relativo al radio del rodillo que genera el flujo. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm.

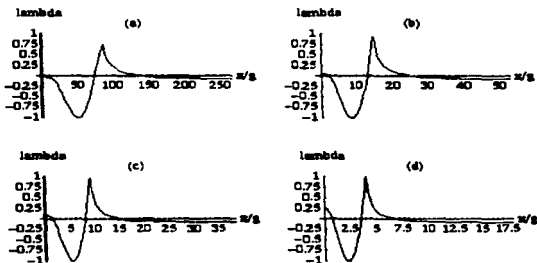


Figura 3.6. Gráficas de la variación del parámetro de flujo λ con respecto a la posición x relativo a la separación de las paredes de los rodillos. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm.

más notable a medida que el valor de λ en el punto de estancamiento disminuye. Para el caso del molino con rodillos de radio $R = 16.65$ mm es fácil observar que el vórtice se aleja del punto de estancamiento, localizándose aproximadamente a 50 veces la distancia entre las paredes de los rodillos. Esto es, debe esperarse que dicho vórtice se localice en $x/g \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, que es lo que debe esperarse para el flujo cortante simple. Las siguientes Figuras muestran el comportamiento que presenta la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ con respecto a x , x/R y x/g , todas a lo largo del eje horizontal, de modo equivalente a las Figuras 3.4 - 3.6.

Dos observaciones relevantes se hacen: primero se ha supuesto la misma velocidad angular para todos los pares de rodillos y consecuentemente a medida que la distancia entre rodillos se reduce el valor característico para la magnitud del gradiente de velocidad aumenta considerablemente. Esto es, cuando $R = 16.65$ mm, $\dot{\gamma}_{\max}(\alpha = 0, \beta = \pi) \approx 48 \text{ seg}^{-1}$, mientras que para el par de rodillos con $R = 10.75$ mm —a la misma velocidad angular que el par de rodillos anterior—, $\dot{\gamma}_{\max}(\alpha = 0, \beta = \pi) \approx 1.45 \text{ s}^{-1}$.

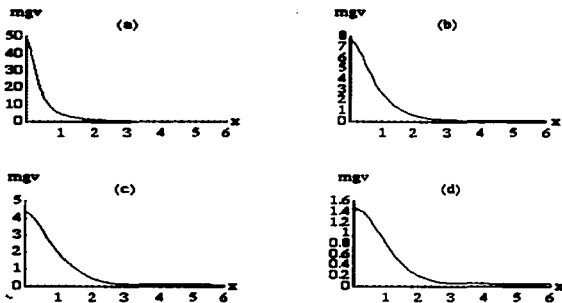


Figura 3.7. Gráficas de la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ con respecto a la posición a lo largo de eje x ($\alpha = 0$). Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. Las gráficas muestran que el valor máximo de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ se encuentra en el punto de estancamiento, y cuyo valor disminuye rápidamente cuando nos alejamos de él.

La segunda observación se relaciona con el "ancho característico" de la función $\dot{\gamma}(\alpha = 0)$ en la que claramente la región con un valor medio de $\dot{\gamma}$ es más amplia para los rodillos con una separación menor entre ellos. El ancho de $\dot{\gamma}(\alpha = 0)$ se puede ver fácilmente cuando la abscisa se reescala por g , que es la separación entre los rodillos, Figura 3.9.

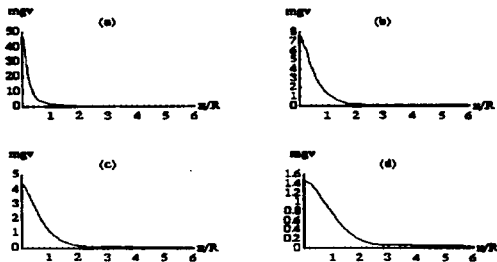


Figura 3.8. Gráficas de la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ con respecto a la posición x lo largo de eje x relativo al radio del rodillo que genera el flujo. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm.

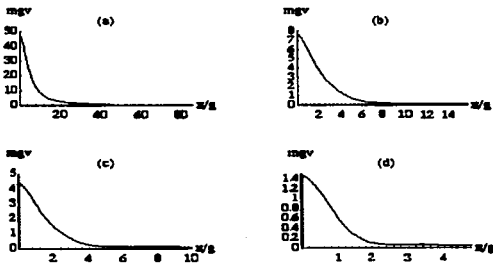


Figura 3.9. Gráficas de la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ con respecto a la posición x a lo largo de eje x relativo a la separación de las paredes de los rodillos. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm.

Esta propiedad del flujo se debe esencialmente a que para $\lambda(\alpha = 0, \beta = \pi) \simeq 0.25$ el valor de la magnitud del gradiente de velocidad depende fuertemente del valor medio de la separación de las fronteras (las superficies de los rodillos). Así, para un punto en el flujo cercano al punto de estancamiento, la distancia medida a los cilindros es esencialmente la separación entre los rodillos, pero tal escenario se modifica rápidamente cuando x aumenta y las paredes de los rodillos se alejan rápidamente debido a la curvatura de los mismos. Este efecto es ciertamente

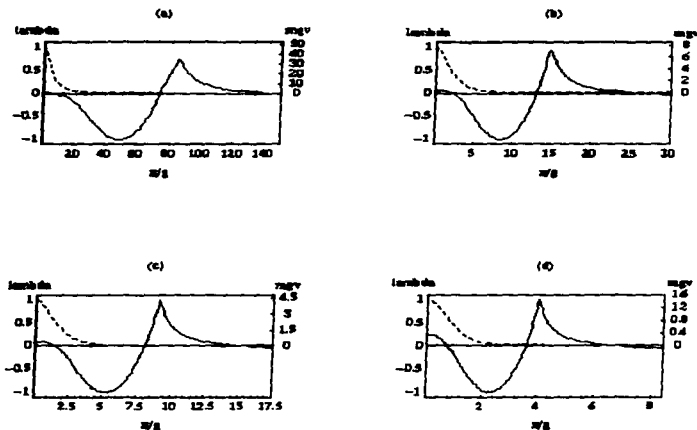


Figura 3.10. Gráficas de la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ y del parámetro de flujo λ con respecto a la posición x a lo largo del eje x relativa a la separación de las paredes de los rodillos x/g . La línea continua es la de λ y su escala está marcada a la izquierda y la línea punteada es la de $\dot{\gamma}$ con su escala a la derecha de la gráfica. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. Se puede evaluar la influencia del parámetro de flujo λ de acuerdo al valor que toma la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$, esto quiere decir, que aunque λ tome valores más grandes que el que tiene en el punto de estancamiento, los efectos que ejerce en esas zonas son menores debido a que el valor de $\dot{\gamma}$ es pequeño; siendo de esta forma el punto de estancamiento un punto de grandes cambios conformacionales para las moléculas que ahí se encuentran.

menor cuando la separación entre rodillos es pequeña (rodillos más grandes) y, entonces, el ancho de la función $\dot{\gamma}(\alpha = 0)$ aumenta, en particular cuando la adimensionalización de la abscisa se da en términos de la separación entre los rodillos. Este resultado es congruente con el caso límite del flujo cortante simple en el que $g/R \rightarrow 0$.

La Figura 3.10 muestra las gráficas tanto de λ como de $\dot{\gamma}$ en función de la distancia desde el punto de estancamiento, correspondientes a las Figuras antes mencionadas. Ahora es claro por qué la existencia del vórtice es más notable en el caso de rodillos con $R = 10.75$ mm, ya que el valor de la función $\dot{\gamma}(\alpha = 0)$ es diferente de cero aún en la región del vórtice más cercano al punto de estancamiento. Esto es, para la región delimitada por $1 \leq x \leq 2.8$, contenida en el vórtice, $\dot{\gamma} > 0$, y propicia la existencia de líneas de flujo cerradas que son observables experimentalmente. Este vórtice, si bien existe para cualquier geometría del molino de acuerdo a la Figura 3.4, la intensidad del mismo disminuye rápidamente cuando la separación entre rodillos se reduce. En suma, de acuerdo con la Figura 3.10, no sólo la posición del vórtice se aleja del punto de estancamiento sino que además la intensidad del mismo decrece substancialmente respecto a las características del flujo en $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

Como resultado de lo anterior, la región alrededor del punto de estancamiento es la región más importante del flujo, pues las otras regiones están caracterizadas por valores de λ cercanos a cero (flujo cortante simple) cuando $\dot{\gamma}$ difiere de cero. Por ello, el molino de dos rodillos presenta una región elongacional en la que el campo de velocidad es pequeño, y que es capaz de inducir grandes cambios conformacionales cuando el líquido tiene microestructura como es el caso de soluciones poliméricas.

Capítulo 4.

Consideraciones para el diseño mecánico de un molino de dos rodillos.

Con base en las consecuencias no deseables presentes en el diseño de la celda de dos rodillos reportados es [4] a continuación se describen algunas ideas relativas a la construcción de una celda de flujos con las cuales se busca subsanar tales deficiencias. La parte modular de las mejoras del diseño se basa en el conocimiento del flujo ideal bidimensional generado por el molino reportado en los Capítulos anteriores, así como la necesidad de incorporar otras ideas resultado de las técnicas ópticas complementarias utilizadas en el estudio de los cambios conformacionales de las macromoléculas inducidos por el flujo que han sido reportados por Bautista [31] y Hernández Prian [28].

La celda de flujos propuesta tiene: (1) una recámara cuyo contorno se ha optimizado de acuerdo a las líneas de corriente que se obtienen cuando se analiza el flujo generado por diferentes pares de rodillos; (2) una altura que permite mantener el carácter bidimensional del flujo, a pesar de los efectos de borde debido a las tapas de la recámara, y (3) tapas de zafiro isotrópico, cuyo doble propósito es primero poder hacer mediciones de anisotropía de líquidos tan pequeñas como las del mismo material de las tapas y segundo, visualizar y estudiar detalladamente las características del flujo en regiones alejadas del punto de estancamiento. Cada uno de estos tres puntos se amplía en este Capítulo.

4.1 Diseños actuales de molinos de dos rodillos.

Los molinos de cuatro y dos rodillos son dispositivos que ya se han estudiado y utilizado con anterioridad en reología. En la mayoría de los casos, la región alrededor del punto de estancamiento es la región principal de estudio, debido a la variedad de tipos de flujos fuertes y esfuerzos que se pueden generar, los cuales resultan de interés para el estudio de diversos fenómenos (deformación de moléculas, el comportamiento de pequeñas gotas inmersas en otro fluido, etc.), los cuales resultan de interés práctico en operaciones de ingeniería química [21] o de la mecánica de fluidos de líquidos viscoelásticos [13], entre otras áreas.

El molino de dos rodillos ha sido construido con anterioridad con diversas configuraciones y considerando las diversas técnicas de instrumentación, medición y visualización que generalmente requieren emplearse en forma conjunta. Estos molinos dan en la región entre los rodillos rotatorios una buena aproximación a un flujo lineal, con relaciones de la rapidez de deformación y la vorticidad y la magnitud del gradiente de velocidad independientemente controlados. En el caso de rodillos corrotatorios, moviéndose a la misma velocidad angular, el tipo de flujo es controlado por la geometría del dispositivo de flujo, es decir, el radio de los cilindros y la separación entre sus paredes, y la magnitud del gradiente de velocidad es proporcional a la velocidad angular de los cilindros.

El experimento reportado por Geffroy et al. [4] utiliza un molino de dos rodillos encerrado por un contorno circular como se muestra en la Figura 4.1, teniendo la celda un diámetro de 80.01 mm y capacidad para rodillos de hasta 16.65 mm de radio. La separación entre los ejes es de 34.00 mm y tiene una altura (longitud de los ejes) de 25.9 mm. La región entre los rodillos tiene ventanas de cristal para realizar medidas ópticas de las propiedades del fluido y del flujo.

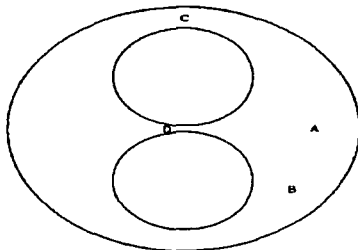


Figura 4.1. Contorno circular del molino de dos rodillos que utilizó Geffroy et al [4]. Este contorno tiene regiones en donde el fluido no participa en la dinámica del flujo y se considera como volumen muerto (A).

Algunos de los inconvenientes del diseño anterior se pueden resumir de la siguiente manera. Primero, la región A de la Figura 4.1 representa un gran volumen del fluido que difícilmente participa en la dinámica del flujo y puede considerarse un volumen muerto. Este punto es una desventaja para el experimento, en particular cuando se trabaja con soluciones poliméricas que para su preparación se requieren alrededor de 12.000 dólares por litro. Operativamente, este volumen incide innecesariamente y de manera desventajosa en los costos de operación de la celda.

Segundo, la región B es una región de flujo elongacional pues ∇u tiene componentes en la dirección de u . Por ello, la región en la que se producen grandes deformaciones no está

contenida exclusivamente a la región entre los rodillos, lo que complica el cálculo de las historias de deformación que se aplican a un polímero.

Una tercer desventaja se debe a la región de flujo ubicada en C, pues ahí se tiene una distancia característica para el flujo del orden de la que existe en la región del punto de estancamiento. Como resultado de ello, los valores de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ en tal región son del mismo orden que en la región central, lo que una vez más complica el cálculo de las historias de deformación para moléculas que pasan cerca del punto de estancamiento.

Si bien la altura de la celda no aparenta ser un punto crítico en el diseño, en realidad, el efecto de borde debido a la distancia finita a la que se encuentran las tapas de la celda es un serio problema experimental que recientemente ha sido analizado en detalle por Hernández Prián [28]. La conclusión principal del trabajo de Hernández Prián se relaciona con los cambios de los valores para los diferentes parámetros en la región cercana al punto de estancamiento, y debidos a la difusión de vorticidad por la presencia de las tapas y que está correlacionado directamente con un fuerte efecto sobre la anisotropía óptica del líquido polimérico. Esto es, cualquier frontera representa una fuente de vorticidad que se difunde hacia el interior del flujo. Puesto que el punto de estancamiento representa el punto en el que la vorticidad es mínima, el efecto de las tapas es notable a medida que el valor para el parámetro de flujo aumenta (cuando la vorticidad disminuye). Este efecto es importante si (a) la separación entre rodillos es del orden de la distancia entre tapas y (b) si la viscosidad, que es una medida de la difusividad de la vorticidad, es grande, lo cual es siempre el caso con las soluciones poliméricas.

Como se menciona en el trabajo de Geffroy [4], la región alrededor del punto de estancamiento se estudia a través de dos ventanas de vidrio que están montadas en las tapas mediante tres tornillos de sujeción. Con esta configuración, el procedimiento de montaje de las ventanas se puede realizar aplicando la tensión necesaria en los tres puntos de sujeción de manera que los esfuerzos residuales en el punto central de la ventana corresponden a una anisotropía óptica mínima, y se puedan lograr así medidas de gran precisión en la determinación de las propiedades de anisotropía óptica del fluido de interés. Sin embargo, los esfuerzos residuales en las ventanas no garantizan que la birrefringencia parásita tenga un valor constante para cualquier punto en la ventana. De hecho, experimentalmente es fácil probar que la interferencia debida a las ventanas para puntos cercanos al punto de estancamiento no es despreciable y que ésta depende fuertemente de la región en la ventana que se analiza, lo que ocasiona un error sistemático importante en las medidas de anisotropía del fluido.

Entonces, si se realizan estudios de las propiedades anisotrópicas del fluido para regiones completas, es recomendable que las tapas sean transparentes y que la anisotropía residual sea mínima para cualquier región de la ventana que se analiza.

Es por ello, que en este trabajo se propone el uso de ventanas de zafiro que cubren todo el dominio del flujo. Sobre éstas han de fijarse las monturas para los rodamientos de los rodillos corrotatorios y a través de éstas pasan las flechas de transmisión. Las ventanas de zafiro se pueden cortar de modo que el eje anisotrópico está en la dirección normal a la superficie. Además tienen una excelente resistencia mecánica y buena conductividad térmica, características deseables para el estudio de fluidos poliméricos.

Con esta nueva configuración existe la posibilidad de corroborar las predicciones que se presentan en el Capítulo 3. Sin embargo, especial cuidado se debe tener para que el flujo se genere bajo condiciones lo más cercanas a la ideal. A continuación se analizan las posibles consecuencias de generar flujos con un molino de dos rodillos que, a diferencia de las condiciones de frontera en el infinito, ahora el molino está totalmente contenido en una celda.

4.2 Contorno de la celda de flujos.

Al considerar el contorno de la celda de flujos con la forma de una línea de corriente de la solución propuesta en el Capítulo 2, se busca disminuir los efectos de borde que generan los contornos utilizados [4]. Es evidente que al variar el contorno, o la altura de la celda, el volumen de la solución del fluido a estudiar también varía. Por ello, a continuación se analiza el efecto del contorno de la celda más apropiado, buscando que los efectos de borde sean mínimos y que el volumen total de la celda sea también lo más pequeño posible, pues por lo general, para la preparación y uso de soluciones poliméricas se requieren aproximadamente mil dólares por muestra.

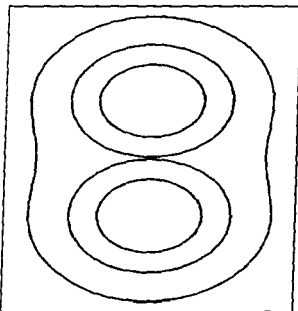


Figura 4.2. Contorno propuesto para el molino de dos rodillos. Se muestran también los rodillos A e I, que tienen respectivamente 16.65 y 10.75 mm de radio. Este contorno se obtiene al unir las regiones que delimitan las líneas de corriente de los rodillos A e I que pasan por el punto (0, 42.00).

Para seleccionar la forma de la celda se fijó inicialmente su altura en 38.00 mm (que es 50% más alta que la utilizada por Geffroy [4] y Wang [3]). Posteriormente se seleccionaron las líneas de corriente de los rodillos A e I (de 16.65 y 10.75 mm de radio respectivamente) y se calcularon las áreas de las superficies delimitadas por éstas, observando que no difieran entre sí en más de 1% de su valor.

De esta forma, la mejor aproximación se tiene cuando las líneas de corriente de los rodillos A e I coinciden en el punto (0, 42.00). Una vez definidas las líneas de corriente se calculan las superficies de las intersecciones. Con los puntos mencionados, es posible obtener con Mathematica™ una función de interpolación tipo "spline" (interpolación cúbica entre segmentos) e integrarla numéricamente para un cuadrante, con lo cual se calcula el área y de ahí obtener el volumen (Figura 4.2).

Una vez definido el contorno, se procedió a calcular la variación de la magnitud de la velocidad $\|u\|$ y de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ en el contorno. De esta forma, se pretende visualizar la influencia de una frontera real, en la cual la velocidad es nula debido a la condición de no deslizamiento y de pared sólida.

En la Figura 4.4 se muestran cuatro configuraciones posibles para el molino con el contorno propuesto junto con las isopletas (que al igual que las curvas de nivel, es en donde toma la función en consideración un valor constante) de la magnitud del gradiente de velocidad. La isopleta con el valor máximo es aquella que pasa por el punto cartesiano (0, 42.00) y el valor mínimo es el que pasa por el punto en la intersección del eje x con el contorno (el punto (23.32, 0)). Esto es, la variación es más marcada en la configuración con rodillos de diámetro menor en la región cercana al eje x . Esta variación en el eje x se muestra gráficamente en la Figura 4.3.

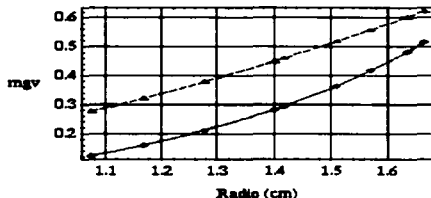


Figura 4.3. Gráfica en donde se muestra la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ en el contorno propuesto. La línea punteada indica el valor máximo que toma el parámetro en cuestión y la línea continua, el inferior. Nótese que la variación de la magnitud del gradiente de velocidad es pequeña comparada con el valor de la magnitud del gradiente de velocidad en el punto de estancamiento (en donde se tiene el valor máximo). Para $R = 16.65$ mm la variación es menor que %%% y para $R = 10.75$ mm dicha variación es menor de %%%.

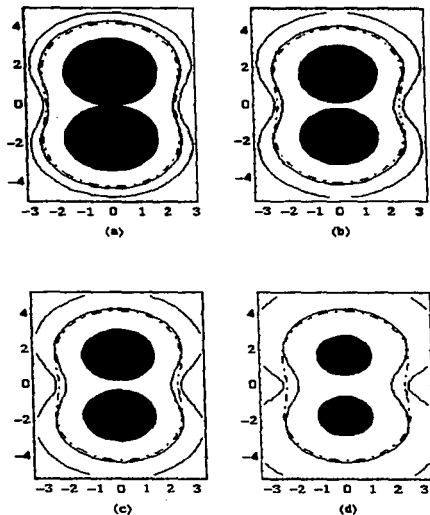


Figura 4.4. Gráficas de la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ alrededor del contorno propuesto para diferentes tamaños de rodillos. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. Las gráficas muestran que la variación mayor de las isopletas de $\dot{\gamma}$ con respecto al contorno se encuentra en donde el eje x intersecta la frontera.

La Figura 4.5 muestra la variación de la magnitud de la velocidad $||u||$, en donde se muestran las isopletas tangentes al contorno propuesto y se nota, sobre todo en la última gráfica que existe una región que engloba el punto de estancamiento, que en los rodillos de radio mayor toma una forma ahusada (que no se aprecia correctamente en las gráficas debido a la resolución). Esta "isla" que se forma alrededor del punto de estancamiento corresponde a valores de la magnitud

Contorno de la caída de flujos.

de la velocidad cercanos a cero y se convierte en prácticamente una línea para los rodillos más grandes, por lo que no se observa en las curvas de valor constante de $\|u\|$.

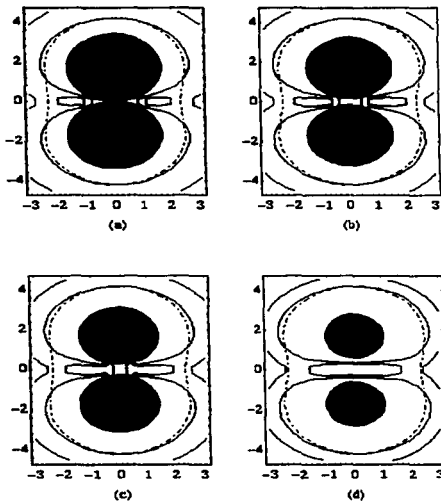


Figura 4.5. Gráficas de la variación de la magnitud de la velocidad $\|u\|$ alrededor del contorno propuesto para diferentes tamaños de rodillos. Las gráficas corresponden a: (a) $R = 1.665$ cm, (b) $R = 1.510$ cm, (c) $R = 1.400$ cm y (d) $R = 1.075$ cm. Debe aclararse que la resolución de las gráficas no muestra claramente el comportamiento alrededor del punto de estancamiento, excepto para el último caso, pero se puede ver que todas las figuras tienen esencialmente los mismos contornos.

4.3 Parámetros de importancia.

Las características de la celda de flujos son:

1. El diseño considera un alto grado de paralelismo entre los ejes de los rodillos y con la menor excentricidad alrededor de cada eje de los rodillos con el objeto de reducir las posibles asimetrías del campo de flujo. Un alto grado de paralelismo entre los ejes de los rodillos es necesario para garantizar que el campo de flujos se mantenga estrictamente bidimensional, mientras que un mínimo grado de excentricidad se requiere para que la posición del punto de estancamiento permanezca fija en el espacio, con un valor constante para el parámetro de flujo. Estas características llegan a ser requerimientos importantes debido a que el flujo o el fluido varían fuertemente como funciones de la posición.
2. Las ventanas de zafiro tienen la propiedad de tener una birrefringencia constante y soportan esfuerzos grandes que no distorsionan sus propiedades ópticas, además de permitir la visualización de casi todo el campo de flujo.
3. La celda de flujos cuenta con un canal de refrigeración con el cual se busca controlar la temperatura del fluido. Esto es debido a que la mayoría de las soluciones poliméricas cambian sus propiedades físicas con pequeños cambios de la temperatura, con lo cual resulta de mucha importancia controlar la temperatura.

La celda de flujos tiene una separación entre ejes fija (de 34.00 mm) y cuenta con 8 pares de rodillos. El cuerpo de la celda es de acero inoxidable, el cual tiene buena resistencia al benceno y al tolueno, y contará con un recubrimiento superficial de cromo negro. El máximo volumen de la celda es de aproximadamente 110 ml (para los rodillos más pequeños).

Los cristales de zafiro se van a sujetar en la celda por medio de unos anillos y sellada con arosellos (O-rings) de teflón. Estos cristales van a tener dos agujeros de 12.50 mm por donde van a pasar los ejes de los rodillos y están los soportes de los rodillos.

El punto 1 de las características de la celda de flujos tiene que ver directamente con las tolerancias, las cuales deben ser evaluadas de acuerdo a los efectos que tengan sobre el flujo. De acuerdo con esto, se procederá a analizar el contorno y los rodillos, de forma que se obtenga un criterio para determinar las tolerancias a las cuales se debe ajustar la construcción de la celda de flujos.

4.3.1 Cálculo del torque requerido.

El torque o momento por unidad de longitud requerido por los rodillos del molino para mantener el flujo se calcula integrando a lo largo de la circunferencia del rodillo la componente cortante del tensor de esfuerzos multiplicada por el radio del rodillo, es decir, que para una α_R dada (la cual es función del radio del rodillo) y para T_{12} , el torque por unidad de longitud de los rodillos está dado por

$$M = \int_0^{2\pi} R T_{12} h d\beta = \int_0^{2\pi} \frac{2 \mu a^2 \operatorname{csch} \alpha_R}{\cosh \alpha_R - \cos \beta} D_{12} d\beta. \quad (4.1)$$

Realizando la integración y simplificando, la expresión que da el torque por unidad de longitud es

$$M = -4 \pi \mu D_0 a \coth \alpha R. \quad (4.2)$$

Sin embargo, esta expresión para el par resulta ser una mera aproximación al par real requerido, debido a que no se han tomado en cuenta los efectos de fricción ocasionados por los empaques y por los rodamientos, además de no considerar la presencia de las fronteras.

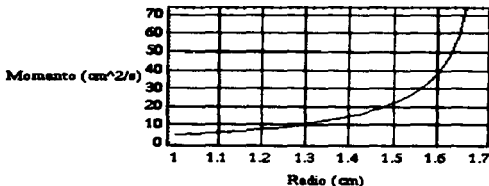


Figura 4.6. Gráfica en donde se muestra la variación del par requerido con respecto al radio de los rodillos. El valor del momento o par se encuentra por unidad de largo del rodillo y normalizado con respecto a la viscosidad μ , por lo que las unidades son cm^2/s .

4.3.2 Tolerancias.

Las tolerancias con que se construya el molino de dos rodillos es una parte muy importante del diseño si se desea tener un alto grado de exactitud en las observaciones experimentales. La forma de evaluar las tolerancias va a depender, en una primera instancia, de la sensibilidad con que se puedan tomar las mediciones, y en una segunda, de la sensibilidad de los parámetros del flujo a las variaciones de la geometría (es decir, de la sensibilidad del parámetro de flujo λ y de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ a una variación en las dimensiones). Por otro lado, y siendo el limitante más importante, las tolerancias se fijarán en orden de la precisión de que se disponga en las máquinas herramienta con que se construya el diseño. En esta tesis, se darán datos de las variaciones de los parámetros mencionados con respecto a la variación de la geometría, siendo críticos en el radio de los rodillos, en su paralelaje y posicionamiento precisos. En esta parte no se pretende fijar las tolerancias porque se necesitan los datos antes mencionados, que no tenemos disponibles en este momento, pero que en cuanto se tengan, va a ser fácil determinar las tolerancias utilizando el mismo código que se utilizó para obtener la Figura 4.7.

Las tolerancias en las dimensiones se fijan con respecto al punto de estancamiento por su importancia que ya se señaló en el Capítulo 2 y por ser un punto de referencia para el posicionamiento de la celda de flujos en el laboratorio, además de presentar los valores de los parámetros más altos del campo de flujo.

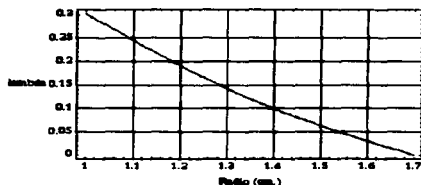


Figura 4.7. Gráfica en donde se muestra la variación del parámetro de flujo λ en el punto de estancamiento con respecto al radio del rodillo en el rango comprendido entre 1.00 a 1.70 cm.

Es importante señalar que la variación del parámetro de flujo λ con respecto al tamaño del radio de los rodillos es una relación muy compleja, puesto que no son funciones simples, ocurriendo cambios en la pendiente de la curva que indican que la sensibilidad a la variación de λ es diferente para cada radio del rodillo, pero se puede considerar la mayor variación para fijar las tolerancias (la cual corresponde a la del rodillo más pequeño).

La Figura 4.8 muestra la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ en el punto de estancamiento. Aunque éste sea un factor secundario con respecto al parámetro de flujo λ para determinar las tolerancias, es interesante observar que su variación es más fuerte mientras más

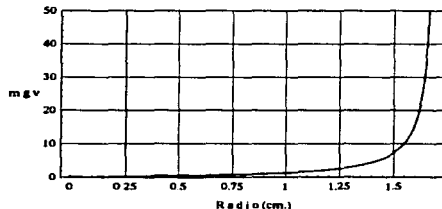


Figura 4.8. Gráfica en donde se muestra la variación de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$ en el punto de estancamiento con respecto al radio, cuando los rodillos tienen una velocidad angular $\omega = 1s^{-1}$

grande es el tamaño del rodillo, por lo que es importante cuidar que la tolerancia seleccionada para el radio de los rodillos caiga dentro del rango en donde la resolución de las técnicas de

medición de la magnitud del gradiente de velocidad no detecte una variación significativa o esté dentro de un porcentaje establecido.

4.3.3 Otras consideraciones importantes.

Además de la definición del contorno y de las tolerancias, existen otros parámetros que se deben tomar en cuenta en el diseño del molino de dos rodillos; sin embargo, dichos parámetros presentan formas difíciles de calcular por lo que se utilizan otros métodos para asegurar un funcionamiento adecuado.

Entre estos parámetros se encuentra la rigidez de la celda de flujos, lo cual representa un parámetro importante si se toma en cuenta que el molino contará con un motor a pasos el cual hará girar a los rodillos, y que puede generar vibraciones. Para asegurar que no se transmitirán vibraciones a la celda de flujo, se utilizarán monturas en el motor para que absorba las vibraciones y se hace más rígida la estructura del molino.

Otro parámetro de importancia es la refrigeración del molino, puesto que se requiere tener una temperatura controlada para evitar cambios en las propiedades de las soluciones poliméricas que se coloquen en el dispositivo. Un análisis aproximado para resolver este problema se logra utilizando la ecuación de la energía para determinar las regiones en las cuales se genera más energía interna (de acuerdo a la función de disipación), aunque el análisis no incluye los efectos viscosos del contorno y de las ventanas, y además que no se considera el calentamiento generado por el rayo láser con el cual se harán las lecturas. Entonces, una forma de controlar la temperatura es hacer canales de refrigeración en el contorno del molino y colocar ventiladores dirigidos hacia las ventanas que con ambos se logre para disipar la energía térmica generada por el movimiento viscoso del flujo.

Finalmente, el mecanismo para transmitir el movimiento del motor de pasos a los rodillos propuesto es por medio de coronas y tornillos sin fin con ajuste, de forma que no existan defasamientos en el movimiento de los rodillos, sobre todo en el momento de iniciar el movimiento, por lo que también se toman en cuenta el momento de inercia de los rodillos y del eje para evitar torciones que generen defasamientos.

Conclusiones.

En este trabajo se analiza el flujo generado por un molino de dos rodillos de radios iguales, alineados paralelamente, que giran en la misma dirección y a la misma velocidad. Este molino se describe fácilmente utilizando coordenadas bipolares; sin embargo, buscar una solución válida para un flujo general resulta aún imposible. Por tanto, en este trabajo, primero se da la solución para un flujo generado en la geometría del molino, expresada en coordenadas bipolares, para un fluido newtoniano en el cual los efectos de inercia son despreciables. Segundo, con la solución analítica se calculan algunos de los parámetros que caracterizan al flujo para la región entre los rodillos, alrededor del punto de estancamiento. Tercero y con base en tales parámetros, se propone un diseño para una celda de flujos de utilidad para estudios experimentales de líquidos viscoelásticos, pues a diferencia de los flujos que con frecuencia se utilizan para estos líquidos complejos, el molino de dos rodillos es capaz de producir historias de deformación grandes, con efectos fuertes en la respuesta de fluidos viscoelásticos. Y finalmente, se plantean posibles líneas de investigación, tanto básica como aplicada, que como resultado de este trabajo ahora son factibles de proponer y asequibles de alcanzar.

En el Capítulo 2, la solución general de Jeffery [6, 23] para flujos lentos, bidimensionales, en coordenadas bipolares, se aplica para analizar el flujo generado por un molino de dos rodillos. En la literatura de mecánica de fluidos, se conocen como flujos lentos a aquellos en donde los efectos de inercia son despreciables, y su principal característica es una representación mediante una ecuación diferencial parcial que es *lineal*. En esta solución se ha considerado de manera explícita el término $(\cosh \alpha - \cos \beta) \ln (\cosh \alpha - \cos \beta)$, inicialmente propuesto por Jeffery, con la finalidad de representar correctamente los centros de vorticidad del molino, de manera que éstos coincidan con los ejes de los rodillos. De no contar con este término, el eje de la vorticidad queda situado en el punto a del sistema de coordenadas bipolares, como sucede con la solución de Duniap [2].

La solución aquí obtenida se puede expresar como una serie de Fourier, con valores para los coeficientes que son conocidos, una vez que se define la precisión deseada de la solución. Esta solución difiere ligeramente de la presentada por Jeffroy [4], presentándose ahora el análisis detallado de las regiones más relevantes del flujo: la región alrededor del punto de estancamiento, y la región global alrededor de los cilindros.

En el Capítulo 2, las ecuaciones para los coeficientes de la función de corriente quedan expresadas en función del radio de los rodillos y de la separación entre sus ejes (o de la separación mínima entre sus paredes o "gap"). Puede parecer que tales coeficientes también son funciones de la velocidad angular de los rodillos, sin embargo, todos ellos son directamente proporcionales a ésta, por lo que no es necesario especificar la velocidad angular para obtener los valores de los coeficientes dada una geometría. Sin embargo, si es necesario conocer la velocidad angular para conocer otras propiedades del flujo, como lo es la velocidad. Entonces, la proporcionalidad de la función de corriente para el molino de dos rodillos con la velocidad angular, indica que todas las gráficas que se obtienen en este trabajo, tienen la misma forma independientemente de la velocidad angular de los rodillos (claro está, dentro del rango de flujo lento), cambiando, por supuesto, el valor de las magnitudes que representan.

En el Capítulo 2, se presenta además un análisis por medio de aproximaciones (realizando expansiones de Taylor y conservando únicamente los términos de primer orden), para calcular el parámetro de flujo, o grado extensional, λ , y la magnitud del gradiente de velocidad o rapidez de corte, $\dot{\gamma}$, en el punto de estancamiento. El parámetro de flujo λ , en ese punto, resulta ser función del tamaño del radio y de la separación entre ejes de los rodillos, mientras que la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$, además de ser función del tamaño del radio y de la separación entre ejes de los rodillos, es proporcional a la velocidad angular.

En el Capítulo 3 se comparan los resultados de las soluciones particulares propuestas por Dunlap [2], que no incluye el término logarítmico, y la aquí obtenida, con los datos experimentales que obtiene Wang [3] en la región cercana al punto de estancamiento. Los datos que se comparan son el valor del parámetro de flujo λ y el de la magnitud del gradiente de velocidad $\dot{\gamma}$.

La comparación arroja una pequeña variación de los datos teóricos, obtenidos con las soluciones mencionadas, cuando el tamaño de los rodillos es relativamente grande. Sin embargo, la precisión de las mediciones que realizó Wang [3], en el punto de estancamiento, no permiten discernir las bondades de esta solución sobre lo reportado por Dunlap [2]. Esto sugiere que se necesitan datos experimentales con mayor precisión y la corrección de algunas características que afectan negativamente al experimento. Algunas de las características no deseables del molino de dos rodillos que utilizó Wang son el contorno circular, la anisotropía de las ventanas debida a esfuerzos residuales y la altura de la celda de flujos de únicamente 24.00 mm. Aún a pesar de lo anterior, los resultados difieren menos del 5%.

Asimismo, se hace una comparación con las gráficas de los resultados numéricos que obtiene Singh [1] con valores de los coeficientes de la función de corriente para la geometría $R = 12.780$ mm y $g = 8.440$ mm. Se observa que los resultados concuerdan cualitativamente con la información que presenta Singh [1] obtenida por medio de elemento finito. Aún así, P. Singh da el valor de 0.153 para el parámetro de flujo en el punto de estancamiento, valor que coincide con el que se obtiene con la solución aquí propuesta.

Alrededor del punto de estancamiento y cuando el tamaño de los rodillos disminuye, los resultados obtenidos con la solución que se propone en este trabajo presentan un comportamiento más lógico que los que propone Dunlap, puesto que en ésta última, el valor del parámetro de flujo se sale del intervalo de valores físicamente plausibles. Cabe hacer notar, que cuando el tamaño

de los rodillos es grande (cuando casi se tocan), la solución aquí propuesta presenta algunos problemas de convergencia, requiriéndose de más términos en la serie de Fourier de ψ .

En el Capítulo 3, se obtienen las ecuaciones para conocer las características del campo de flujo, como son la magnitud de la velocidad, la magnitud del gradiente de velocidad, la magnitud de la deformación y el parámetro para cualquier punto en el flujo. Se muestran gráficamente los parámetros de la magnitud de la velocidad, la magnitud del gradiente de velocidad y la magnitud de la deformación.

El comportamiento del parámetro de flujo λ a lo largo de la línea perpendicular al centro de la recta que une los ejes de los rodillos, presenta algunos puntos de interés fuera del punto de estancamiento, alcanzando valores de $\lambda = -1$ (vórtice puro) y $\lambda \approx 1$ (elongacional puro). Estos puntos indican que las moléculas que se encuentran en ellos presentan grados extensionales casi totalmente opuestos, en donde uno es un vórtice puro y en el otro es casi puramente extensional, y sin embargo, los efectos en las moléculas no son más importantes que en el punto de estancamiento puesto que la magnitud del gradiente de velocidad es pequeña comparada con el del punto de estancamiento.

Con base en la solución analítica, en el Capítulo 4, se dan las características deseables para un diseño del molino de dos rodillos para obtener resultados experimentales con mayor precisión que los que obtiene Wang [3]. Las principales características son un contorno de la celda de flujos acorde a las líneas de corriente, ventanas que cubran el dominio del flujo con birrefringencia conocida y una mayor altura. El contorno acorde al flujo se consigue por medio de la superposición de las líneas de corriente que generan los rodillos de mayor y menor radio, manteniendo una altura de 38.00 mm y un volumen máximo de 110 ml.

La altura de 38.00 mm es 50% mayor que la utilizada por Geffroy [4] y Wang [3]. La mayor altura de la celda de flujos ayuda a conservar mejor las características bidimensionales del flujo. Las ventanas facilitarán realizar observaciones en regiones fuera del punto de estancamiento, y como se pueden conocer las propiedades del flujo en todo el campo con la solución propuesta en este trabajo, se pueden relacionar la conformación de las moléculas del fluido con las características del flujo.

Como comentario adicional, se destaca el uso de los molinos de dos rodillos como dispositivos de mezclado homogéneo para sustancias con viscosidad muy alta, lo cual no se puede llevar a cabo en los mezcladores convencionales de espas o propelas por la aparición del efecto "caverna" [32].

Bibliografia

- [1] P. Singh & L. G. Leal. Computational studies of the fene dumbbell model in a co-rotating two-roll mill. *J. Rheol.*, **30**:485-517, (1994).
- [2] P. N. Dunlap. *Studies of Flow Modification and Polymer Conformation in Extensional Flows of Dilute Polymer Solutions*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Ca., 1986.
- [3] D. Yavich & L. G. Leal J. J. Wang. Time resolved velocity gradient and optical anisotropy in lineal flow by photon correlation spectroscopy. *Phys. Fluids*, **6**(11):3519-3534, (1994).
- [4] Enrique Geffroy Aguilar. *Birefringence of Polymer Solutions in Time Dependent Flows*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Ca., 1990.
- [5] Gianni Astarita. Objective and generally applicable criteria for flow classification. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **6**:69-76, (1979).
- [6] G. B. Jeffery. The rotation of two circular cylinders in a viscous fluid. *Proc. Royal Society, A* **101**:169-174, (1922).
- [7] Stephen Wolfram. *Mathematica. A system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, U.S.A., 2nd edition. 1991.
- [8] Masao Doi. *Introduction to Polymer Physics*. Oxford University Press, U.S.A., 1992.
- [9] Pierre-Gilles de Gennes. *Scaling Concepts in Polymers Physics*. Cornell University Press, U.S.A., 1979.
- [10] Giovanni Astarita & G. Marrucci. *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Great Britain, 1974.
- [11] Z. U. A. Warsi. *Fluid Dynamics Theoretical and Computational Approaches*. C. R. C. Press, U.S.A., 1992.
- [12] James Lighthill. *An informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*. Clarendon Press-Oxford, U.K., 1990.
- [13] R. R. Huilgol & N. Phan-Thien. Fluid mechanics of viscoelasticity. For publicarse, 1996.
- [14] Roger I. Tanner. *Engineering Rheology*, volume 14 of *Oxford Engineering Science Series*. Oxford Science Publications, Great Britain, revised edition, 1988.
- [15] J. M. Rallison & L. G. Leal W. L. Olbricht. Strong flow criteria based on microstructure deformation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **10**:291-318, (1982).
- [16] R. Byron Bird. *Dynamics of Polimeric Liquids. Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, U.S.A., 1977.

- [17] R. I. Tanner & R. R. Huilgol. On a classification scheme for flow fields. *Rheologica Acta*, **14**(11):959-962, (1975).
- [18] I. G. Currie. *Fundamental Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, U.S.A., 1978.
- [19] Frank M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill. International Editions., Singapore, 2nd edition, 1991.
- [20] Mysore N. L. Narasimham. *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, U.S.A., 1993.
- [21] L. Gary Leal. *Laminar Flow and Convective Transport Processes. Scaling Principles and Asymptotic Analysis*. Butterworth-Heinemann, U.S.A., 1992.
- [22] George Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, U.S.A., 2nd edition, 1971.
- [23] G. B. Jeffery. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. *Phyl. Trans. Royal Society*, **A 221**:265-293, (1920).
- [24] R. A. Frazer. "on the motion of circular cylinders in a viscous fluid". *Phyl. Trans. Royal Society*, **A 225**:93-130, (1928).
- [25] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products. Corrected and Enlarged Edition*. Academic Press, U.S.A., 1981.
- [26] Enrique Geffroy & L. G. Leal. Flow birefringence studies in transient flows of a two roll mill for the test-fluid ml. *Journal of Non-Newtonian FluidMechanics*, **35**:361-400, (1990).
- [27] Enrique Geffroy & L. G. Leal. Flow birefringence studies of a concentrated polystyrene solution in a two roll mill. i. steady flow and start-up of steady flow. *Journal of Polymer Science; PartB: Polymer Physics*, **30**:1329-1349, (1992).
- [28] Martha de la Luz Hernández Prian. *Análisis de un medio anisotrópico inhomogéneo mediante técnicas de óptica matricial*. Tesis de Físico. Facultad de Ciencias. UNAM, México, 1996.
- [29] Carlos Alberto Corona Pastrana. *Medición de señales luminosas de alta resolución para estudios de anisotropía inducida por flujos en sistemas poliméricos*. Tesis de Físico. Facultad de Ciencias. UNAM, México, 1997.
- [30] Ramiro Edwin García Muñoz. *Detección automatizada de señales para la técnica de birrefringencia bicolor*. Tesis de Físico. Facultad de Ciencias. UNAM, México, 1996.
- [31] Ernesto Francisco Bautista Thompson. *Evaluación de la técnica de anisotropía bicolor inducida por flujos para muestras con dicroísmo, birrefringencia o depolarización residual*. Tesis de Físico. Facultad de Ciencias. UNAM, México, 1994.
- [32] Ricky Chiu-Yin Ng. *Semi-Dilute Polymer Solutions in Strong Flows. Part I: Birefringence and Flow Modification in Extensional Flows. Part II: Chaotic Mixing in Time-Periodic Flows*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Ca., 1990.

- [33] R. W. Fox & A. T. McDonald. *Introducción a la Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, México, 2nd edition, 1993.
- [34] Frank M. White. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, México, 1993.
- [35] J. K. Vennard & R. L. Street. *Elementos de Mecánica de Fluidos. Versión SI*. C.E.C.S.A., México, 3th edition, 1989.
- [36] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, U.S.A., 6th edition, 1990.
- [37] S. C. Hunter. *Mechanics of Continuous Media*. John Wiley and Sons, Great Britain, 2nd edition, 1983.
- [38] D. J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Clarendon Press, G. B., 1990.
- [39] G. Böhm. *Non-Newtonian Fluid Mechanics*, volume 31 of *North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science Publishers B. V., The Netherlands, 1987.
- [40] M. Doi y S. F. Edwards. *The Theory of Polymers Dynamics*. Oxford University Press, Northern Ireland, 1994.