

24
24.



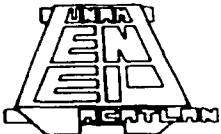
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLÁN

" SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL CIERRE DE
UNA OQUEDAD APLICADO AL
PROCEDIMIENTO DE SUBEXCAVACIÓN "

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A:
RENÉ JUÁREZ GÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDUARDO ROJAS GONZALEZ



Acatlán, Edo. de

1997

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central

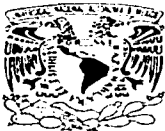


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"
PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL

SR. RENE JUAREZ GOMEZ

ALUMNO DE LA CARRERA DE INGENIERIA CIVIL.

P R E S E N T E .

De acuerdo a su solicitud presentada con fecha de 3 de Octubre de 1996, me complace notificarle que esta Jefatura de Programa tuvo a bien asignarle el siguiente tema de trabajo profesional titulado "SIMULACION NUMERICA DEL CIERRE DE UNA OQUEDAD APLICADO AL PROCEDIMIENTO DE SUBEXCAVACION EN OBRAS PÚBLICAS", el cual se desarrollara como sigue:

- INTRODUCCION
- I. SUBEXCAVACION
- II. METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS
- III. SOLUCION A GRANDES DESPLAZAMIENTOS
- IV. APLICACION AL PROCEDIMIENTO DE SUBEXCAVACION
- CONCLUSIONES

Así mismo fue designado como asesor de tesis el DR. EDUARDO ROJAS GONZALEZ. Ruego a usted tomar nota en cumplimiento de lo especificado en la Ley de profesiones, deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses, como requisito básico para sustentar examen profesional, así como de la disposición de la Dirección General de Servicios Escolares en el sentido de que se impima en lugar visible de los ejemplares del trabajo profesional, el título del trabajo realizado. Esta comunicación deberá imprimirse en el interior del trabajo profesional.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"
Acatlán Edo. de México a 22 de Enero de 1997

Ing. Carlos Rosales Aguilar,
Jefe del Programa de Ingeniería Civil



ENEP-ACATLAN
JEFATURA DEL
PROGRAMA DE INGENIERIA

A mis padres por su apoyo incondicional en todo momento

A mis hermanos

Agradecimientos.

Mi agradecimiento al Dr. Eduardo Rojas Gonzalez por su atinada dirección en la realización de este trabajo así como mi agradecimiento por sus consejos y la revisión del texto.

A los amigos y compañeros del Instituto, en especial a los que en alguna forma colaboraron en este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1. SUBEXCAVACIÓN.	2
1.1 Procedimiento de Operación.	3
1.2 Equipo	3
1.3 Ciclo de Trabajo	5
2.MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y PROGRAMA EMPLEADO.	8
2.1 Introducción	8
2.2 Características de los elementos	9
2.2.1 Función de los desplazamientos	9
2.2.2 Deformación	11
2.2.3 Deformación Inicial	12
2.2.4 Matriz Elástica	14
2.2.5 Matriz de rigidez	15
2.2.6 Fuerzas Nodales	16
2.2.7 Fuerzas Volumétricas Distribuidas	16
2.2.8 Potencial de Fuerzas Volumétricas	17
2.2.9 Cálculo de Esfuerzos	17
2.3 Programa Empleado	18
2.4 Formulación Variacional del Proceso Constructivo	20
2.4.1 Planteamiento Teórico	20
2.5 Teoría de la Elastoplasticidad y su implementación	25
2.5.1 Formulación teórica	25
2.5.2 Implementación	26
2.6 Material Elastoplastico Perfecto	32
2.7 Modelo del Estado Crítico	34
3. SOLUCIÓN A GRANDES DESPLAZAMIENTOS.	40
3.1 Formulación para una regla del valor exacto	41
3.1.1 Ley general	44
3.1.2 Ecuaciones que gobiernan	47
3.2 Descripción de Subrutinas	49
3.2.1 Subrutina EPPGD8	49
3.2.2 Subrutina EPPGD21	57

3.3 Funcionamiento	60
3.3.1 Subrutinas Utilizadas	60
3.3.2 Archivos Requeridos	62
3.3.3 Tarjetas requeridas para el funcionamiento del programa	62
4. APLICACIÓN AL PROCEDIMIENTO DE SUBEXCAVACIÓN.	67
4.1 Comparación de resultados numéricos con analíticos	70
4.2 Asentamientos de la superficie del terreno	71
4.3 Mallas Deformadas	74
5. CONCLUSIONES	81
REFERENCIAS	83

INTRODUCCIÓN.

El procedimiento de subexcavación se ha venido utilizando desde hace algunos años en la nivelación de edificios de diversas características, inicialmente se utilizó en edificios largos, ligeros y rígidos. Posteriormente se aplicó a edificios más altos y pesados. Actualmente se utiliza en la nivelación de monumentos históricos como la Catedral de la ciudad de México con muy buenos resultados. Sin embargo en algunas ocasiones se ha observado que las perforaciones realizadas a cierta profundidad no cierran completamente, retrasando en algunas zonas el proceso de nivelación del edificio. Aunque existen algunos trabajos analíticos que permiten determinar las condiciones de falla de una oquedad (Rojas et al, 1995) y los asentamientos en la superficie del terreno (Alberro et al, 1988), estas se han establecido únicamente para el caso de oquedades circulares.

Por esto, el objetivo principal de este trabajo fue el de estudiar el fenómeno del cierre de oquedades dentro de una masa de suelo, para lo cual se introduce una formulación para grandes desplazamientos en un programa de elementos finitos. Esta formulación toma en cuenta el efecto de las rotaciones de los elementos para establecer su nuevo estado de esfuerzos. El programa se aplica a oquedades de diversas geometrías y dimensiones con objeto de comparar su comportamiento y establecer algunos lineamientos que permiten hacer más eficiente el procedimiento de subexcavación.

El método de los elementos finitos permite conocer la respuesta del material para diversas geometrías de tal manera que es posible establecer cuál es la más eficiente en cada caso.

CAPITULO 1.

SUBEXCAVACIÓN.

La técnica de subexcavación la Propuso Fernando Terracina, para detener y corregir la inclinación de la torre de Pisa, aun cuando no se llegó a emplear. Se adoptó con éxito en la ciudad de México en la recuperación de la verticalidad de edificios con problemas de desplomes; entre ellos están los trabajos del Ing. González Flores en la iglesia del Pocito de la Basílica de Guadalupe y el edificio de SERFIN de 16 de Septiembre esquina con Bolívar.

Por su parte, la empresa TGC reniveló con esta técnica un edificio de 16 pisos que se desplomó 1.28 m. durante los sismos de 1985 y 22 edificios de 5 y 6 niveles de la Unidad Habitacional Rinconada del Sur, que por consolidación regional diferencial se desplomaron .

La subexcavación tiene como objetivo, corregir los desniveles y desplomes de edificios, que han sufrido hundimientos diferenciales, haciendo descender las partes altas con respecto a las partes bajas, como consecuencia de la extracción lenta y controlada del suelo en que se apoya la cimentación. Este objetivo se alcanza realizando perforaciones horizontales de pequeño diámetro, ejecutadas desde lumbreras o zanjas que permiten el acceso a los estratos del subsuelo, de los cuales se extrae el material.

1.1 Procedimiento de Operación.

A través de cada una de las boquillas penetra el tubo subexcavador con el que se extrae lenta y controladamente el suelo; este tubo tiene 10 cm de diámetro y 1.0 m de longitud, se opera con barras de acero hasta 6.0 m de penetración. En caso necesario se podrá incrementar esta longitud, así como también operar con un ademe de 12.7 cm de diámetro, para evitar subexcavar a corta distancia de la lumbrera.

Brigadas de subexcavación Están formadas por seis personas, en el interior de la lumbrera tres de ellas realizan la maniobra de extracción del suelo, otra opera la unidad de potencia hidráulica para hincar y extraer el pistón, en el exterior trabajan el malacatero y su ayudante quienes suben, bajan y trasladan los tubos de la mesa extractora. Se cuenta con un cabo por cada seis lumbreras y de un ingeniero coordinando las actividades.

1.2 Equipo.

El equipo de subexcavación esta formado por las siguientes partes, figura 1.1

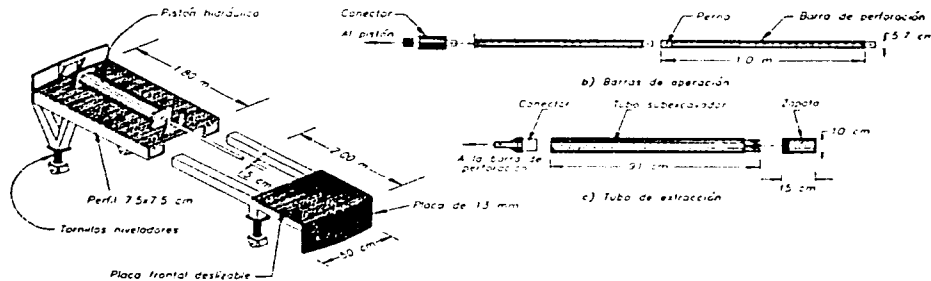


fig. 1.1 Equipo y herramienta para Subexcavación.

Mesa de subexcavación. Estructura metálica con ruedas para centrarla fácilmente con relación a las boquillas y tornillos niveladores, para ajustar su inclinación. La parte frontal es deslizable, para fijarla a la lumbrera y aprovechar la pared como superficie de reacción.

Bomba eléctrica y gato. Sobre la mesa se instala el cilindro o gato hidráulico de 5.0 cm. de diámetro 1.15 m de carrera; se acciona con una bomba eléctrica localizada en la base de apoyo, cerca de la escalera marina que accede al fondo. En los trabajos de subexcavación se usan dos tipos de equipos: el rápido, que se utiliza en las lumbreras cuyas penetraciones cierran rápidamente o se requiere mayor volumen de extracción de suelo y el normal en las restantes. En la tabla 1.1 se indican las características de estos equipos.

Tabla 1.1 Equipos de subexcavación

Equipo	Bomba Eléctrica	R.P.M.	Pistón (ton)	Presión de trabajo (kg /cm ²)	Velocidad de avance (m/min)	Velocidad de extracción (m/min)
Normal	2 HP	1800	12	150	0.5	0.66
Rápido	7.5 HP	3000	12	150	2.0	4.00

El equipo rápido tiene un tanque acumulador de hidrógeno, para aumentar la velocidad de operación y el pistón cuenta con amortiguadores

Tubo de extracción. Consta de un tubo subexcavador de 10 cm de diámetro y 1.0 m de longitud con zapata de acero de 15 cm de longitud, afilada en el extremo que se hincan en el suelo; cuenta con un conector para unirse a la tubería de perforación de 5.7 cm de diámetro y 1.0 m de longitud. Esta última tiene coples macho y hembra, se acopla entre sí por medio de pernos y con un conector al pistón subexcavador

Mesa de extracción. Esta formada por placas y perfiles de acero; sobre ella se instala el cilindro hidráulico extractor, accionado por una bomba eléctrica

Dispositivos para remoldeo. La evaluación experimental del proceso demostró la conveniencia de usar dispositivos remoldeadores, para acelerar el cierre de la subexcavación, aumentar la cantidad de material por pasada y reducir el tiempo de deformación

Se diseñaron y probaron varios remoldeadores, los mejores resultados se obtuvieron con el denominado "de manita" y con un "cortador de agua", sus características se presentan esquemáticamente en la figura 1.2, su funcionamiento y rendimiento se describen a continuación:

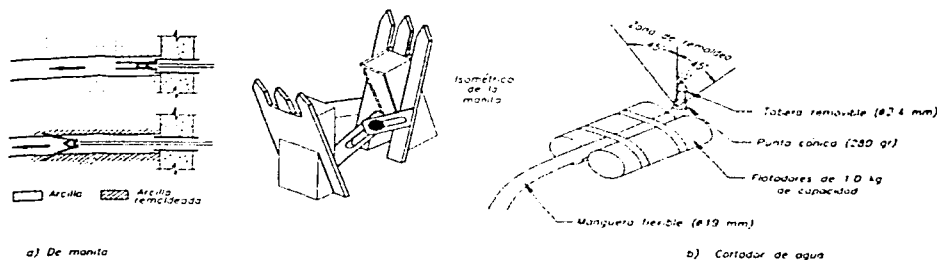


Fig. 1.2 Remoldeadores de suelo.

a) Remoldeador de manita. Consiste de dos placas de acero en forma de espátulas de punta, su abertura máxima es de 18.4 cm. y están inclinados 45°, aproximadamente, se acopla mediante pernos a las barras y al cilindro hidráulico

El remoldeador se coloca dentro de la perforación y al pasar la boquilla se abre a su diámetro máximo; se introduce con ayuda del gato, acoplándolo a la tubería de pernos usada en la subexcavación. Demostró así su utilidad y por ello se emplea en la subexcavación de suelos arcillosos de consistencia media.

b) Cortador de agua. Es un dispositivo que inyecta agua a presión, se utilizó para remoldear en la zona norte de Catedral, donde existen arcillas de consistencia firme a dura

Consta de una tobera cónica de cobre con un diámetro de salida de 2.44 mm, unida a una manguera flexible de 1.9 cm de diámetro y 6.0 m de longitud, lo que permite introducirlo con facilidad y girarlo en el interior de cada penetración. El conjunto manguera-inyector se conecta a la tubería de suministro de agua para la limpieza, una válvula de compuerta controla el flujo de agua, cuyo gasto es de 0.12 l/s con una velocidad de salida de 27 m/s

El procedimiento de remoldeo consiste en introducir el inyector el primer metro y girar la manguera una y otra vez durante 30 s para que corte en forma de abanico, con un ángulo de 45° hacia ambos lados de la vertical. Posteriormente se introduce medio metro más y se repite la operación hasta que el dispositivo llega al fondo, se saca lentamente y se introduce en la penetración siguiente

El tiempo máximo de remoldeo a lo largo de una penetración completa de 6.0 m de longitud es de 6 minutos. Con el procedimiento anterior el cierre se acelera por el caído de pequeños bloques de material, el remoldeo se realiza procurando que la zona de cohesión se distribuya igualmente en el perímetro de cada lumbrera y sea de espesor uniforme

1.3 Ciclo de subexcavación.

Las etapas de un ciclo de subexcavación son las siguientes:

a) Colocación, nivelación y centrado de la mesa hidráulica con relación a una boquilla, en seguida se acopla la tubería de subexcavación al cabezal del pistón, incluyendo su zapata cortadora.

b) Hincado del primer tramo de tubería, a continuación se extrae el tubo lleno de arcilla, se desacopla del pistón y posteriormente se identifica, se sube a la superficie en la canastilla con el malacate y se traslada a la mesa de extracción donde se pesa, se extrae el material, se toman muestras para laboratorio, se lava y regresa al interior de la lumbrera

c) Se acopla otro tubo subexcavador a la tubería de penetración de 1.0 m de longitud y se hinca en la arcilla para subexcavar el segundo metro, se extrae y se pesa. Se continúa así

hasta llegar a 6 m en cada una de las boquillas y completar una pasada de subexcavación. Cuando se cierran los orificios que quedan después de extraer el material, se repite el ciclo.

d) Cuando el cierre se demora se decide la conveniencia de utilizar un remoldeador.

En la figura 1.3 se muestra la secuencia de operación en incrementos de extracción de 1m para cada eje de penetración.

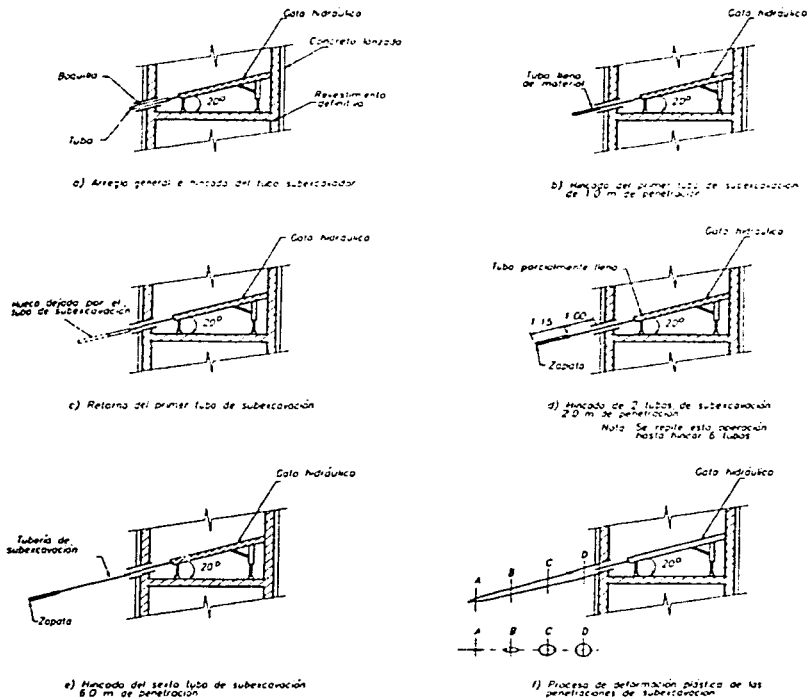


fig. 1.3 Secuencia de subexcavación.

El proceso de subexcavación induce deformaciones en el suelo que ocasionan cambios en sus propiedades mecánicas; la evolución de estos cambios en etapas sucesivas de los trabajos de subexcavación debe conocerse con el objeto de lograr la mejor comprensión de los efectos de la subexcavación. Esta información permite ratificar o modificar los programas de trabajo y en caso necesario introducir mejoras a las técnicas y equipos utilizados para llevar a cabo el proyecto.

La precisión del proceso de subexcavación se logra llevando un control cuidadoso de la cantidad de suelo extraído. Los conceptos de rendimiento de extracción, la relación y velocidad de cierre tuvieron que definirse para ejercer racionalmente dicho control. Rutinariamente se llevan a cabo pruebas para observar la variación del contenido de humedad, del peso volumétrico, de los límites de consistencia y de su resistencia al corte, mediante la prueba de penetrómetros de bolsillo, para verificar la ejecución adecuada de los trabajos. Los coeficientes de abundamiento definidos para proceso de subexcavación permiten conocer con precisión el volumen de suelo extraído y con los controles rutinarios se puede determinar cada vez que convenga.

CAPITULO 2

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y PROGRAMA EMPLEADO.

2.1 Introducción. El método de los elementos finitos es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales. Esquemáticamente la secuencia del método puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) El medio continuo (dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales) se divide en varias regiones denominadas elementos finitos, de formas convenientes (líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, etc.).
- 2) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos finitos, denominados puntos nodales, las variables de cada ecuación diferencial se aproximan mediante una combinación lineal de funciones de interpolación (conocidas) de las variables y en algunos casos de sus derivadas, especificados en los puntos nodales.
- 3) Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman en ecuaciones de los elementos finitos que gobiernan en forma aislada, a todos los elementos.
- 4) Los elementos finitos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (en el problema de valores en la frontera e iniciales) o de ecuaciones algebraicas (en el problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.

5) Los valores de las variables de las ecuaciones diferenciales quedan definidos al resolver el sistema de ecuaciones correspondientes.

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales, utilizando el elemento triangular, que es el más sencillo, pero el procedimiento es totalmente general.

En los problemas de esfuerzos y deformación plana, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos u y v en la dirección de los ejes cartesianos ortogonales x e y , respectivamente

Además, las únicas tensiones y deformaciones que se han de considerar en ambos casos son las tres componentes en el plano xy . En el caso de esfuerzos en el plano, las otras tres componentes de los esfuerzos son nulas por definición y, por consiguiente, no contribuyen al trabajo interno, pero si se desea puede ser evaluada explícitamente al final del cálculo a partir de las tres componentes principales de los esfuerzos.

2.2 Características de los elementos.

2.2.1 Función de los desplazamientos. La figura 2.1 muestra el elemento triangular típico considerado con los nodos i, j, m , numerados en sentido antihorario.

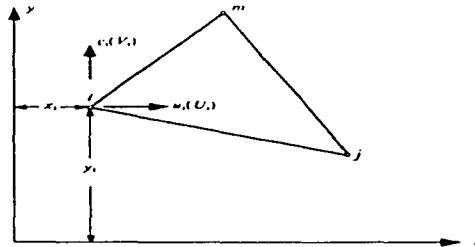


Fig. 2.1 Elemento de un medio continuo bajo tensión y deformación plana

Los desplazamientos de un nodo tienen dos componentes:

$$a_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2.2.1)$$

las seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en un vector

$$\vec{a}' = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Los desplazamientos interiores a un elemento han de quedar definidos unívocamente por seis valores. La representación más sencilla viene dada evidentemente por dos polinomios de primer grado

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.2.3)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Se pueden calcular fácilmente las seis constantes α resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultantes a los desplazamientos correspondientes a los nodos. Escribiendo por ejemplo,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

podemos calcular fácilmente α_1, α_2 y α_3 en función de los desplazamientos nodales u_i, u_j y u_m para obtener

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m] \quad (2.2.5a)$$

en la cual

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \quad (2.2.5b)$$

obteniéndose los demás coeficientes mediante permutación cíclica de los subíndices i, j, m . Además

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \times (\text{área del triángulo } ijm) \quad (2.2.5c)$$

Puesto que las ecuaciones para el desplazamiento vertical son similares, se obtiene igualmente que

$$v = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \right] \quad (2.2.6)$$

Aunque no sea estrictamente necesario en este momento, podemos expresar las relaciones anteriores (2.2.5a) y (2.2.6) en la forma general de la ec.

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = N \alpha^e = [N_i, N_j, N_m] \alpha^e \quad (2.2.7)$$

siendo I una matriz unidad 2x2, y

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta, \quad (2.2.8)$$

La función de desplazamientos elegida garantiza automáticamente la continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes, debido a que los desplazamientos varían linealmente a lo largo de cualquiera de los lados del triángulo y, al imponer los mismos desplazamientos en los nodos para dos elementos continuos, evidentemente existirá el mismo desplazamiento a lo largo del contorno de separación.

2.2.2 Deformación. La deformación total en cualquier punto del elemento puede definirse mediante sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno. Así,

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [S] \bar{u} \quad (2.2.9)$$

Sustituyendo la expresión (2.2.7), tenemos

$$\varepsilon = B \alpha^e = [B_i, B_j, B_m] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{Bmatrix} \quad (2.2.10a)$$

siendo B_i una matriz típica dada por

$$B_i = [S] \bar{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (2.2.10b)$$

Con lo cual, la matriz B de la ecuación $\epsilon = [S] \bar{u}$ queda definida explícitamente

Se advertirá en este caso que la matriz B es independiente de la posición del punto dentro del elemento y, por consiguiente, las deformaciones son constantes dentro del mismo. Es evidente que las funciones de forma satisfacen el criterio de deformación constante.

2.2.3 Deformación inicial. Las deformaciones "iniciales", o sea, las deformaciones independientes de los esfuerzos, pueden deberse a muchas causas: retracción, cristalización, o con mas frecuencia, a cambios de temperatura, y en general darán por resultado un vector de deformación inicial:

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x,0} \\ \epsilon_{y,0} \\ \gamma_{x,0} \end{Bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Aunque esta deformación inicial puede ser, en general, función de la posición dentro del elemento, normalmente se definirá por su valor medio constante en todo el elemento. Esto de acuerdo con las condiciones de deformación impuestas por la función de desplazamientos establecida.

Así para el caso de esfuerzos en el plano en un elemento de material isótropo sujeto a un incremento de temperatura θ , si el coeficiente de dilatación térmica es α , tendremos

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha \theta \\ \alpha \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.12)$$

ya que una dilatación térmica no produce deformaciones transversales.

En el caso de la deformación plana la situación es mas compleja. La hipótesis de deformación plana implica que a causa de la dilatación térmica se desarrollen esfuerzos perpendiculares al plano xy, aun cuando se suponga que los tres esfuerzos principales son nulos, y consiguientemente las deformaciones iniciales estarán afectadas por las constantes elásticas.

Se puede demostrar que en este caso

$$\epsilon_0 = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.13)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson.

Los materiales anisótropos presentan problemas particulares ya que el coeficiente de dilatación térmica puede variar con la dirección. Llamemos x' e y' a las direcciones principales del material (figura 2.2). La deformación inicial debida a la dilatación térmica es, tomando dichos ejes como sistema de referencia, para el caso de esfuerzos en el plano,

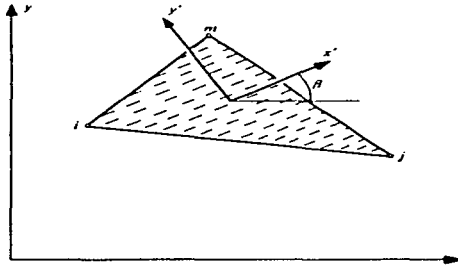


Fig. 2.2 Elemento de un material estratificado (con isotropía transversal).

$$\epsilon_0' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'0} \\ \epsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \theta^e \\ \alpha_2 \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.14)$$

donde α_1 y α_2 son los coeficientes de dilatación referidos a los ejes x' e y' respectivamente.

Para obtener los componentes de la deformación en el sistema xy es necesario emplear la matriz de transformación de deformaciones T que nos daría,

$$\epsilon_0' = T^T \epsilon_0 \quad (2.2.15)$$

Con β definido como en la figura 2.2, es fácil comprobar que

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Así pues, ϵ_n puede calcularse fácilmente. Se aprecia que la componente tangencial de la deformación ya no es nula en el sistema de coordenadas xy.

2.2.4 Matriz de elasticidad. La matriz D de la relación $\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = D \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \epsilon_0 \right) \quad (2.2.16)$$

se puede establecer explícitamente para cualquier material (excluyendo ahora σ_0 que es simplemente un término aditivo).

Esfuerzos en el plano en un material isótropo. Para los estudios de esfuerzos en el plano en los materiales isótropos se tiene, por definición,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \epsilon_{x,0} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \epsilon_{y,0} \\ \tau_{xy} &= \frac{2(1+\nu) \tau_{xy}}{E} + \epsilon_{x,y,0} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Despejando las deformaciones en el sistema anterior, obtenemos la matriz D

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

en la cual E es el modulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

Deformación plana de un material isótropo. En este caso el esfuerzo normal σ_x no es nulo, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de la tensión. Para el caso particular de dilatación térmica isotrópica, tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha\theta^* \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha\theta^* \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)r_{xy}}{E} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

pero además

$$\epsilon_x = 0 = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha\theta^*$$

Eliminando σ_z y despejando las tres dimensiones restantes obtenemos la expresión de la deformación inicial ec. (2.2.13), y comparando ésta con la ec. (2.2.16), la matriz **D** resulta

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{[2(1-\nu)]} \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

2.2.5 Matriz de rigidez. La matriz de rigidez del elemento *ijm* viene definida a partir de la relación general de la ecuación.

$$K^e = \int_{vol} B^T D B d(vol) \quad (2.2.21)$$

mediante los coeficientes

$$K_{ij}^e = \int B_i^T D B_j t dx dy \quad (2.2.22)$$

en la que *t* es el espesor del elemento y donde la integración se efectúa sobre la superficie del triángulo. Si el espesor del elemento se supone constante, hipótesis que tiende a ser tanto mas cierta a medida que disminuye el tamaño de los elementos, entonces, como ninguna de las matrices contiene a *x* o *y*, tendremos sencillamente

$$K_{ij}^e = B_i^T D B_j t \Delta \quad (2.2.23)$$

donde Δ es el área del triángulo [definido ya en la ec. (2.2.5)]. Esta expresión es ya suficientemente explícita para el cálculo, dejando para el computador las operaciones matriciales.

2.2.6 Fuerzas nodales debidas a las deformaciones iniciales. Vienen dadas directamente por la expresión (2.2.21), la cual tras integrar, se transforma en

$$(f_i)_{i_0}^* = -B_i^T D E_{i_0} t \Delta, \quad (2.2.24)$$

Estas fuerzas debidas a la "deformación inicial" se reparten entre los nodos de manera desigual y exigen un cálculo preciso. Expresiones similares pueden deducirse para las fuerzas debidas a las tensiones iniciales.

2.2.7 Fuerzas volumétricas distribuidas. En el caso general de esfuerzo o deformación plana, cada elemento de superficie unidad en el plano xy esta sujeto a las fuerzas:

$$b = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

en la dirección de los ejes correspondientes.

Ademas según la ec.(2.2.21), la distribución de dichas fuerzas a las que actúan en cada nodo del elemento viene dada por

$$f_i^* = \int N_i dx dy, \quad (2.2.25)$$

si las fuerzas volumétricas b_x y b_y son constantes. Como N_i ya no es constante la integración se ha de efectuar explícitamente.

En este caso particular, los cálculos se simplifican si situamos el origen de coordenadas en el centro de gravedad del elemento. Entonces

$$\int x dx dy = \int y dx dy = 0$$

y haciendo uso de la ec. (2.2.8)

$$f_i^* = - \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \int \frac{a_i dx dy}{2\Delta} = - \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \frac{a_i}{2} = - \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{3} \quad (2.2.26)$$

según las relaciones (2.5a),(b),(c),

Explícitamente, para todo el elemento

$$f^e = \begin{Bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{3} \quad (2.2.27)$$

lo que significa simplemente que el sistema de fuerzas que actúan en las direcciones x e y debidas a las fuerzas volumétricas se distribuyen entre los nodos en tres partes iguales. Este hecho se corresponde con lo que se intuye físicamente y con frecuencia ha sido supuesto implícitamente.

2.2.8 Potencial de fuerzas volumétricas. En muchos casos, las fuerzas volumétricas se definen en función de un potencial de fuerzas volumétricas ϕ tal que

$$b_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad b_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.2.28)$$

y es este potencial, mas que los valores constantes de b_x y b_y , ϕ , deberá variar linealmente dentro del elemento. La "función de forma" de esta variación deberá provenir evidentemente de un procedimiento análogo al seguido para deducir las ees. (2.2.4) a (2.2.6), obteniéndose

$$\phi = [N_i, N_j, N_m] \phi^e \quad (2.2.29)$$

Así pues,

$$b_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -[b_i, b_j, b_m] \frac{\phi^e}{2\Delta}$$

y

$$b_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -[c_i, c_j, c_m] \frac{\phi^e}{2\Delta} \quad (2.2.30)$$

El vector de las fuerzas nodales debidas al potencial de fuerzas volumétricas reemplazará ahora la expresión (2.2.27) por (2.2.31)

2.2.9 Cálculo de esfuerzos. Las fórmulas obtenidas nos permiten ensamblar la matriz de rigidez de la estructura y obtener los valores de los desplazamientos. La matriz de esfuerzos expresada en forma general en la ec. (2.2.21) se obtiene haciendo las sustituciones adecuadas para cada elemento.

$$f^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix} \phi^e \quad (2.2.31)$$

Según la hipótesis básica, los esfuerzos son constantes dentro del elemento. Es común suponer que estos actúan en el centro de gravedad del elemento, otra posibilidad consiste en obtener el valor de los esfuerzos de los nodos como media de los valores en los elementos adyacentes. Con esta idea se han empleado diferentes métodos de "ponderación" basados en consideraciones empíricas, pero las ventajas obtenidas no son considerables.

2.3 Programa Empleado

Una de las características prominentes de las estructuras de tierra es que los procedimientos constructivos son muy importantes para su comportamiento durante y después de la construcción e inclusive hasta pueden provocar condiciones de falla. Se pueden mencionar dos ejemplos típicos. El primero es la construcción de terraplenes en donde los estratos de materiales compactados se colocan gradualmente, y el otro, la gradual sustracción de materiales en excavaciones abiertas y subterráneas. Un análisis de esfuerzos y deformaciones en las obras geotécnicas se enfoca no solamente en las estructuras ya terminadas pero también, muchas veces con mayor importancia, en las estructuras en construcción.

Sin embargo, un análisis de este tipo es generalmente complicado por los siguientes cuatro aspectos. (1) La frontera del dominio del análisis cambia continuamente. Por ejemplo, en el caso de terraplenes, la parte previamente construida forma en las etapas posteriores la cimentación de las nuevas capas colocadas. En el caso de excavaciones, al contrario, el suelo en el fondo de la excavación va siendo removido continuamente a medida que se avanza la obra. (2) Durante el proceso de construcción y excavación, otros elementos estructurales (ademes, puntales, muros de retención y revestimientos) suelen instalarse para garantizar la seguridad local y global de la estructura térrea de tal manera que una gran variedad y un gran número de elementos que no necesariamente son de tierra intervienen en el análisis de estas estructuras. (3) El ambiente de construcción o excavación dista de ser aislado. Una excavación abierta puede efectuarse en un sitio donde a su alrededor se encuentran edificios. Un túnel puede interactuar con un cajón de cimentación. Así que el análisis de una excavación puede involucrar una o varias estructuras vecinas. (4) Por último, pero no menos importante, el comportamiento de los suelos durante el proceso constructivo es muy complicado. La trayectoria de los esfuerzos suele ser diferente de aquella bajo las condiciones de carga de servicio. Por ejemplo, durante la excavación se presenta un estado de esfuerzos de extensión en contraste al estado de compresión que generalmente inducen las cargas transmitidas por el edificio construido. Zonas de tensión y por consiguiente de

agrietamiento también pueden encontrarse. Además si las estructuras de tierra son obras temporales, muchas veces se adopta un factor de seguridad relativamente bajo, por lo que se pueden presentar zonas de fluencia en donde el suelo tiene un comportamiento plástico. Si las zonas de fluencia son limitadas la estabilidad global podría no ser amenazada a pesar de que existe la posibilidad de que ocurran movimientos excesivos del terreno. Por éstas y otras razones se justifica que en los análisis de esfuerzos y deformaciones se consideren los efectos plásticos. Los métodos de análisis y diseño simplificados en muchas ocasiones no pueden representar condiciones reales que se encuentran en el campo y se requiere un análisis más refinado.

Este capítulo reporta la implementación de un programa de elementos finitos que permite estimar esfuerzos y deformaciones en las obras térras y estructurales, simulando los detalles más relevantes de la construcción y/o excavación.

Un programa de computadora llamado TEST92 (versión del año 1992 de TEST) fue desarrollado a partir de un programa llamado TEST previamente implementado (Li y Romo, 1990). En TEST92 se conservan las siguientes características de TEST:

1. Se puede implementar en cualquier computadora personal (PC) compatible con el sistema IBM-PC;
2. Existe la opción de modelar el proceso de construcción por etapas o la forma de aplicación de cargas secuenciales;
3. Existe la capacidad de expansión de la biblioteca actual de elementos finitos;
4. El sistema de ecuaciones se resuelve con la solución directa de Gauss empleando conceptos de columna activa y de bloques, por lo que prácticamente no existe el límite en cuanto al tamaño del problema por analizar.

TEST92 proporciona las siguientes ventajas sobre TEST:

5. Cuenta con un algoritmo incremental e iterativo para analizar problemas no lineales. Los materiales pueden ser elásticos, lineales, elastoplásticos perfectos y/o que siguen el modelo modificado del estado crítico.
6. El proceso constructivo se simula con un algoritmo variacional, lo cual garantiza la unicidad del problema;
7. El programa maneja el concepto de almacenamiento dinámico en el sentido de que la memoria central está disponible en la etapa de solución del sistema de ecuaciones.

2.4 Formulación Variacional del Proceso Constructivo

2.4.1 Planteamiento teórico.

La metodología de simular el proceso constructivo basada en el método de los elementos finitos fue desarrollada en la década de los 60's (Clough y Woodward, 1967). La idea principal era convertir primero los esfuerzos distribuidos en cada elemento en fuerzas internas concentradas en los nudos, y después, las mismas fuerzas se aplicaban en la siguiente etapa como solicitaciones externas cuya dirección de aplicación debería ser consistente con el proceso a simular. Si se trataba de construcción, las fuerzas se aplicaban con signo opuesto a las calculadas de tal manera que se formaban nuevas fronteras libres de carga. Este método, que se refiere mas adelante como convencional, ha sido exitoso para el caso de construcciones (Clough y Woodward, 1967) y ha presentado desafortunadamente anomalías numéricas para el caso de excavaciones.

Se ha observado que la distribución de esfuerzos y deformaciones calculada con el método convencional depende fuertemente de la secuencia de eventos de excavación aun para un material elástico lineal. Esto, sin embargo no debe ocurrir. Según los principios de la mecánica del medio continuo, si el medio es elástico lineal, la superposición de esfuerzos y deformaciones es siempre válida. Esto implica que la respuesta final del sistema solamente depende de las condiciones de frontera finales que incluyen tanto la geometría como las cargas, y es independiente de la historia de carga y la del cambio de geometría. Este argumento lleva el nombre de la unicidad del problema. El método convencional viola el principio de unicidad, hecho que lleva a algunos autores a intentar resolver, tal problema usando métodos laboriosos (Desai y Sargand, 1984). No obstante, Ghaboussi y sus colaboradores (1983, 1984) han propuesto un método general y sencillo para simular tanto excavación como construcción de manera unificada, lo cual ha sido interpretado recientemente por Borja y otros (1989). Usando un algoritmo variacional que se distingue por su elegancia matemática. En el nuevo método variacional la idea original del método convencional sigue vigente excepto que se ha puesto atención especial sobre el dominio del cálculo de las fuerzas nodales internas. Las fuerzas nodales aplicadas en la etapa actual deben calcularse de acuerdo con la configuración actual del sistema y no con la anterior como lo hace en el método convencional. De esta manera, se ha demostrado la unicidad del problema no solamente para un medio elástico lineal sino también para cierto tipo de materiales elastoplásticos (Borja y otros, 1989). Este nuevo método es lo que fue implementado en TEST92, lo cual se expondrá a continuación siguiendo el trabajo de Borja y otros.

Refiriéndose a la figura 2.3, el dominio de análisis en el instante t es $\Omega(t)$ y las ecuaciones del campo y las condiciones de frontera para este instante son

$$\nabla \cdot \sigma(u) - f = 0 \quad \text{sobre } \Omega(t) \quad (2.4.1)$$

$$u = u_k \quad \text{sobre } \Gamma_k(t) \quad (2.4.2)$$

$$n \cdot \sigma = h \quad \text{sobre } \Gamma_h(t) \quad (2.4.3)$$

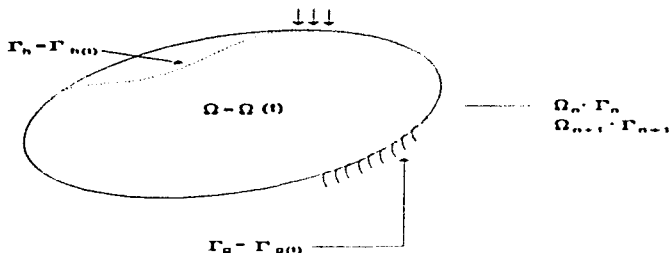


Fig. 2.3 Esquema del problema de excavación.

donde ∇ es el vector de operador gradiente, u el vector de desplazamiento, σ el tensor de esfuerzo de Cauchy, u_s el vector de desplazamiento descrito, h el vector de esfuerzo prescrito, n el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia afuera, y Γ_s y $\Gamma_n(t)$ son fronteras del problema. La ec. (2.4.1) describe un problema de valores de frontera no-lineal. Las fuentes de la no-linealidad provienen tanto del material en el dominio como del cambio geométrico en la frontera. El residuo correspondiente de la ec. (2.4.1) se obtiene mediante un vector de función de peso w :

$$\int_{\Omega(t)} w \cdot (\nabla \cdot \sigma(u) - f) d\Omega = 0 \quad (2.4.4)$$

Integrando la ec. (2.4.4) por partes, resulta que

$$W_{INT}(t) = W_{EXT}(t) \quad (2.4.5)$$

donde

$$W_{INT}(t) = \int_{\Omega(t)} \nabla w \cdot \sigma(u) d\Omega \quad (2.4.6)$$

y

$$W_{EXT}(t) = \int_{\Omega(t)} w \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_s(t)} w \cdot h d\Gamma \quad (2.4.7)$$

representan trabajo virtual interno y externo respectivamente.

Dentro del marco teórico del método de los elementos finitos, la ec. (2.4.5) puede discretizarse para el dominio espacial y temporal, resultando en un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el instante $t = t_{n+1}$, las formas discretizadas de las ecs. (2.4.5)-(2.4.7) son

$$(F_{INT})_{n+1} = (F_{EXT})_{n+1} \quad (2.4.8)$$

donde

$$(F_{INT})_{n+1} = F_{INT}(d_{n+1}) = \int_{\Omega_{e,i}} B_{n+1}^T \{\sigma\}_{n+1} d\Omega \quad (2.4.9)$$

y

$$(F_{EXT})_{n+1} = \int_{\Omega_{e,i}} N_{n+1}^T f d\Omega + \int_{(t^*)_{e,i}} N_{n+1}^T h d\Gamma \quad (2.4.10)$$

donde $(F_{INT})_{n+1}$ y $(F_{EXT})_{n+1}$ son vectores de fuerza interna y externa respectivamente. d_{n+1} es el vector de desplazamiento nodal. B_{n+1} y N_{n+1} denotan la matriz global de transformación deformación desplazamiento y la matriz global de función de forma comúnmente usadas en el método de los elementos finitos. $\{\sigma\}_{n+1}$ es el vector de esfuerzos en el cual debemos distinguir el tensor σ aparecido en las ecs (2.4.1), (2.4.4) y (2.4.6)

Nótese que en las ecs. (2.4.9) y (2.4.10), todas las cantidades son para el instante t_{n+1} . Esto implica que el factor de tiempo esta involucrado en el problema y su solución debe realizarse marchando en el tiempo. De un instante t_n al otro t_{n+1} , los desplazamientos nodales sufren un cambio de d_n a d_{n+1} y consecuentemente hacen lo mismo los esfuerzos de $\{\sigma_n\}$ a $\{\sigma_{n+1}\}$. Si el cambio es relativamente pequeño, es posible expresar el vector de esfuerzos en una serie de Taylor de primer orden alrededor de d_n como

$$\{\sigma\}_{n+1} = \{\sigma\}_n + C_{n+1} B_{n+1} (d_{n+1} - d_n) \quad (2.4.11)$$

donde

$$C_{n+1} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right] \Big|_{d = d_n} \quad (2.4.12)$$

es el tensor de segundo orden que depende únicamente de las propiedades del material. Sustituyendo la ec. (2.4.12) en la ec. (2.4.9) y el resultado con la ec. (2.4.8), se llega finalmente a la siguiente expresión

$$K_{n+1} = \Delta d_{n+1} = (F_{EXT})_{n+1} - F_{INT}(d_n)_{n+1} \quad (2.4.13)$$

donde

$$K_{n+1} = \int_{\Omega_{e,i}} B_{n+1}^T C_{n+1} B_{n+1} d\Omega \quad (2.4.14)$$

$$\Delta d_{n+1} = d_{n+1} - d_n \quad (2.4.15)$$

$$y \quad F_{INT}^i(d_n)_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} B_{n+1}^T \{\sigma\}_n d\Omega \quad (2.4.16)$$

Un aspecto que merece gran atención se nota claramente en la ec. (2.4.16) donde aparece la fuerza interna $F_{INT}^i(d_n)_{n+1}$. Dicha fuerza interna se calcula con los esfuerzos en la etapa anterior $\{\sigma\}_n$ pero con la geometría del dominio actual Ω_{n+1} . Esto marca la diferencia fundamental del presente método con el convencional en cuanto al cálculo de las fuerzas nodales con el fin de simular el proceso de excavación. Nótese también que las discusiones expuestas anteriormente no hacen la distinción entre un elemento o un sistema completo que puede abarcar un gran número de elementos, esto es, las formulaciones son igualmente válidas para uno o varios elementos.

Por otro lado la formulación anterior supone que la solución del problema se puede lograr resolviendo la ec. (2.4.13) sin efectuar ninguna iteración. Sin embargo, esto no siempre es posible si el problema es fuertemente no-lineal debido tanto al comportamiento del material como al cambio geométrico del dominio del problema. Por tanto, la formulación anterior debe adaptarse a un algoritmo iterativo. Para ello las ecs. (2.4.11) a (2.4.16) deben reescribirse ahora para cierta etapa de iteración k en el instante t_{n+1} , obteniéndose así la ecuación final por resolver como

$$K_{n+1}^{k+1} \Delta d_{n+1}^{k+1} = (F_{INT}^i)_{n+1} - F_{INT}^i(d_{n+1}^k) \quad (2.4.17)$$

donde

$$K_{n+1}^{k+1} = \int_{\Omega_{n+1}} B_{n+1}^T C_{n+1}^{k+1} B_{n+1} d\Omega \quad (2.4.18)$$

$$C_{n+1}^{k+1} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right]^k \Big|_d = d_n^k \quad (2.4.19)$$

$$\Delta d_{n+1}^{k+1} = d_{n+1}^{k+1} - d_{n+1}^k \quad (2.4.20)$$

$$F_{INT}^i(d_{n+1}^k) = \int_{\Omega_{n+1}} B_{n+1}^T \{\sigma\}_{n+1}^k d\Omega \quad (2.4.21)$$

$$(\sigma)_{n+1}^{k+1} = \{\sigma\}_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+1} B_{n+1} (d_{n+1}^{k+1} - d_{n+1}^k) \quad (2.4.22)$$

La solución del problema converge cuando $\|\Delta d_{n+1}^{k+1}\| / \|d_{n+1}^k\|$ tiende a cero donde $\|\cdot\|$ significa la norma. Otro criterio de convergencia es evaluar la fuerza residual

$$r_{n+1}^{k+1} = F_{INT}(d_{n+1}^{k+1}) - F_{INT}(d_{n+1}^k) \quad (2.4.23)$$

con el criterio de que $\|r_{n+1}^{k+1}\|/\|r_{n+1}^k\|$ tiende a cero. Por otra parte, para entender mejor la relación entre el conjunto de ecuaciones (2.4.17)-(2.4.22) con el de (2.4.11)-(2.4.16), es provechoso recordar la siguiente convención.

$$\Lambda_n = \Lambda_{n+1}^1 = \Lambda_n^4 \quad (2.4.24)$$

y Λ es cualquier cantidad que pueda ser escalar, vector o tensor y K es el número máximo de iteraciones. La ec. (2.4.24) implica que una cantidad al final del ciclo iterativo en una etapa n sirve como la cantidad inicial en la siguiente etapa $n+1$.

Debe notarse que el proceso iterativo que acaba de describirse no depende del tipo de no-linealidades del problema. Por tanto, su implementación nos permite resolver una gran variedad de problemas geotécnicos donde intervienen simultáneamente diferentes tipos de no linealidades geométricas y de los materiales. En el cuadro 2.1 se resume el proceso de la simulación de la construcción.

Cuadro 2.1 Proceso de simulación de construcción

Para la etapa de construcción $n+1$

Datos de entrada

1. Estado de esfuerzos al final de la etapa anterior $\{\sigma^p\}_{n+1}$
2. Dominio del análisis Ω_{n+1}
3. Propiedades C_{n+1}

Cálculos:

1. Calcular $(F_{INT})_{n+1}$ con (2.4.10)
2. Para la iteración $k+1$
 - 2.a Calcular $F_{INT}(d_{n+1}^k)$ con (2.4.21)
 - 2.b Evaluar r_{n+1}^{k+1} con (2.4.23)
 - 2.c Calcular K_{n+1}^k con (2.4.18)
 - 2.d Resolver (2.4.17)
 - 2.e Calcular esfuerzos
 - 2.f Si $\|r_{n+1}^{k+1}\|/\|r_{n+1}^k\| < \epsilon$ se va al punto 1

Datos de salida

1. Estado de esfuerzos al final de la etapa $n+1$, $\{\sigma^p\}_{n+2}$
2. Propiedades C_{n+2}

2.5 Teoría de la Elasto Plásticidad y su Implementación.

La teoría de la elastoplásticidad y su aplicación en problemas geotécnicos han sido tratados ampliamente en varios textos y publicaciones (ver, por ejemplo, Chen y Baladi, 1985; Britto y Gunn, 1987 y Wood, 1990). A continuación se exponen muy brevemente los ingredientes principales de la teoría enfocados a su implementación computacional.

2.5.1 Formulación Teórica. Los argumentos esenciales de la teoría de la elasto plásticidad son

1. La deformación del material puede descomponerse en dos partes una elástica y otra plástica en la forma

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (2.5.1)$$

Se requiere por tanto especificar los parámetros que definen el comportamiento elástico del material, sea lineal o no lineal

2. Existe una función de fluencia (o de carga), denotada por F , que separa el espacio de esfuerzos en dos regiones: elástica y plástica y dicha función depende del estado de esfuerzos $\{\sigma\}$ y un parámetro de endurecimiento k tal como

$$F(\{\sigma\}, k) = 0 \quad (2.5.2)$$

El parámetro k es un escalar implicando que el endurecimiento definido por la ec. (2.5.2) es isotrópico. Generalmente la dependencia de la función de fluencia en el estado de esfuerzos no se define en términos del vector $\{\sigma\}$ sino de dos invariantes de esfuerzo p y q que se definen respectivamente como

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.5.3)$$

$$q = \sqrt{\sigma_x(\sigma_x - \sigma_y) + \sigma_y(\sigma_y - \sigma_x) + \sigma_z(\sigma_z - \sigma_x) + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} \quad (2.5.4)$$

De esta manera la ec. (2.5.2) se convierte en

$$F(p, q, k) = 0 \quad (2.5.5)$$

3. Existe un potencial plástico, denotado por Q , que especifica las magnitudes relativas de las componentes de las deformaciones plásticas tal como

$$\{d\varepsilon^p\} = \phi \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.5.6)$$

donde ϕ es una constante de proporcionalidad que esta por determinar.

4. Es necesario asignar la variación del parámetro de endurecimiento k con el nivel de esfuerzos y/o de deformaciones. Es de práctica común suponer que dicho parámetro es una función del estado de deformaciones plásticas $\{\epsilon^p\}$, o en forma mas particular del incremento de la deformación volumétrica plástica $\Delta \epsilon_p^v$ tal como

$$k = k(\Delta \epsilon_p^v) \quad (2.5.7)$$

5. Se requiere especificar la llamada regla de flujo para poder determinar la relación entre la función de fluencia y el potencial plástico. Si se considera la regla asociada, se tiene $Q = F$; y en el caso contrario, $Q \neq F$. Para el caso de la regla de flujo asociada, la condición de normalidad siempre se cumple, es decir, el vector de incremento de deformación plástica esta siempre en la dirección normal y hacia afuera de la superficie definida por la función de fluencia en el espacio de esfuerzos.

Los puntos anteriores son los pasos esenciales para establecer una teoría de la elastoplasticidad de los materiales y especialmente de los geomateriales.

2.5.2 Implementación.

La implementación de la teoría de la plasticidad consiste en dos pasos: el de la presolución y el de la postsolución. En la etapa de la presolución, se calculan las matrices de la propiedad del material, denotadas por D^e utilizando el lenguaje del método de elementos finitos; y en la de post-solución, se calculan los esfuerzos finales a que esta sometido el material y se clasifican diferentes estados de esfuerzos (elástico, plástico, endurecido, ablandado y otros) que sirven para el cálculo de las matrices de rigidez para el siguiente incremento de cargas.

Basicamente existen dos métodos de implementación: explícito e implícito. La implementación explícita es la tradicional y la mas usada. En ella, el cálculo de la matriz D^e es relativamente fácil y requiere poco trabajo computacional. Si la regla de flujo es asociada la matriz resulta simétrica lo cual nos proporciona una gran eficiencia del cálculo. En cambio, la forma implícita que es desarrollada por Borja y Lee, (1990), a su vez de tener una elegancia matemática, complica el cálculo de D^e considerablemente y la matriz resultante no es simétrica aun cuando la regla de flujo sea asociada. Por tanto, esta es poco atractiva. En el programa TEST92 se utiliza la implementación explícita. En ambos métodos, por otro lado, se requieren algoritmos de regreso con el fin de convertir el estado de esfuerzos calculados inicialmente en el real. Existen varios algoritmos (radial, central, lineal, etc.) de los cuales el radial fue seleccionado para TEST92.

Con el objeto de derivar la matriz D^e se supone que el vector del incremento de esfuerzo $\{d\sigma\}$ y el de deformación elástica $\{d\epsilon^e\}$ están relacionados por la matriz elástica D .

$$\{d\sigma\} = D\{d\varepsilon^e\} \quad (2.5.8)$$

combinando las ecs. (2.5.1), (2.5.6), y (2.5.8) se tiene

$$\{d\sigma\} = D\{d\varepsilon^e\} \quad (2.5.9)$$

De acuerdo con la ec. (2.5.5) la función de fluencia F puede expresarse como el siguiente diferencial completo

$$\{d\sigma\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (2.5.10)$$

Como el estado de esfuerzos representado por $\{d\sigma\}$ corresponde a un estado de fluencia, la ec. (2.5.9) puede sustituirse en la ec. (2.5.10) para finalmente obtener la expresión de ϕ

$$\phi = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D\{d\varepsilon\} \quad (2.5.11)$$

donde

$$\beta = A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.5.12)$$

$$A = -\frac{\partial F}{\partial k} \frac{dk}{\phi} \quad (2.5.13)$$

Sustituyendo la ec. (2.5.11) en la (2.5.9) se tiene finalmente la relación entre $\{d\sigma\}$ y $\{d\varepsilon\}$ como

$$\{d\sigma\} = D^{*p} \{d\varepsilon\} \quad (2.5.14)$$

$$D^{*p} = D - \frac{1}{\beta} D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D^T \quad (2.5.15)$$

Esta es la matriz elastoplástica que pretendemos encontrar. Notamos que en el proceso de su derivación, además de las ecuaciones (2.5.1), (2.5.2), (2.5.5) y (2.5.6), establecidas en la teoría de la elastoplasticidad, la ec. (2.5.8) tiene una gran importancia ya que ella indica que un estado de esfuerzos elastoplástico puede medirse mediante la deformación elástica. Esto implica que cuando el material ya entra en el estado plástico, también sufre una deformación elástica.

Como se decía, la implementación es relativamente sencilla cuando la teoría esta basada en la hipótesis de que la función de fluencia depende de los invariantes de esfuerzos p y q , tal como se expresa en la ec. (2.5.5), y por ello es conveniente desarrollar algunas

expresiones relacionadas con p y q que sirven para algunas derivaciones matemáticas posteriores. Primero, se tiene por la regla de la cadena,

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{\partial F}{\partial p} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial q} \right\} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.5.16)$$

pero

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{3} \{1\} \quad (2.5.17)$$

$$\left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3}{2q} \left\{ \sigma \right\} \quad (2.5.18)$$

donde

$$\{1\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T \quad (2.5.19)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}) \quad (2.5.20)$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x - p \quad (2.5.21)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y - p \quad (2.5.22)$$

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - p \quad (2.5.23)$$

Por tanto la ec. (2.5.16) queda

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \{1\} + \frac{3}{2q} \frac{\partial F}{\partial q} \{\sigma\} \quad (2.5.24)$$

Teniendo en cuenta la ec. (2.5.24) y la ec. (2.5.12) queda como

$$\beta = A + K \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial p} + 3G \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (2.5.25)$$

Donde K y G son constantes elásticas de Lamé. Similares simplificaciones también se pueden efectuar en las ecs. (2.5.11) y (2.5.15)

La teoría de la elastoplasticidad que se expone aquí es del tipo incremental. Las cargas se aplican en incrementos y las deformaciones se van acumulando consecuentemente. Las propiedades del material se actualizan conforme avanza la historia de carga. En un determinado incremento de cargas para el cual el material esta sometido a un estado inicial

de esfuerzos $\{\sigma'\}$ las propiedades se determinan con dicho estado de esfuerzos. Con la aplicación de carga, el material sufre un incremento de deformación $\{d\varepsilon\}$ que se calcula directamente de los resultados de la solución del problema. Sin embargo, después de obtener la solución del problema el incremento de esfuerzos $\{d\sigma\}$ no se puede estimar de manera directa si el material entra en el rango plástico. A continuación analizamos como calcular el incremento de esfuerzos $\{d\sigma'\}$ o bien el estado de esfuerzos final $\{\sigma\} = \{\sigma''\} + \{d\sigma\}$. Nótese que $\{\sigma''\}$ corresponde al inicio de una iteración o al inicio de una etapa de construcción si no se hace ninguna iteración dentro de la misma etapa

Para empezar, se calcula el incremento de esfuerzos debido a un incremento de deformaciones como

$$\{d\sigma'\} = D \{d\varepsilon\} \quad (2.5.26)$$

Esta ecuación es válida para calcular el incremento de esfuerzos, sea el estado de esfuerzos inicial elástico o elastoplástico. Después, con la suma de esfuerzos inicial e incremental

$$\{\sigma'\} = \{\sigma''\} + \{d\sigma'\} \quad (2.5.27)$$

se verifica si se cumple la condición de fluencia, ec. (2.5.2), o su equivalente, ec. (2.5.5). Si

$$F(p'', q'', k'') \leq 0 \quad (2.5.28)$$

el material sigue en la región elástica y el estado final de esfuerzos se calcula simplemente como

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} \quad (2.5.29)$$

y ya no se realizan los pasos siguientes. Nótese que un material puede estar inicialmente sometido a la fluencia y vuelve a un estado elástico después del incremento de carga. Este es un proceso de descarga que a veces esta acompañado por un ablandamiento del material cuyo estado de esfuerzos final esta determinado también por la ec. (2.5.29). Si la condición (2.5.28) no se cumple significa que el material ya entra en la región plástica; el estado de esfuerzos $\{\sigma'\}$ se sobrestima y debe corregirse. En la figura 2.4, se ilustran diferentes estados de esfuerzos en el espacio de esfuerzos distorsional q . El punto A representa el estado de esfuerzos inicial $\{\sigma''\}$. Con el incremento $\{d\sigma'\}$, el cambio de esfuerzos sigue una trayectoria ADB hasta llegar a un estado $\{\sigma'''\}$, representado por el punto B. Sin embargo, la trayectoria real del cambio de esfuerzos debe ser ADC teniéndose un estado de esfuerzos final $\{\sigma\}$. Nuestro objetivo es encontrar $\{\sigma\}$ a partir de $\{\sigma''\}$ de una manera consistente con la teoría de la plasticidad

Es posible obtener la incógnita $\{\sigma\}$ resolviendo un conjunto de ecuaciones no-lineales. La primera de ellas es la función de fluencia, ec. (2.5.5), y la segunda es la función que especifica el parámetro k , o bien la ec. (2.5.7). La última de ellas puede obtenerse combinando las ecs. (2.5.8) y (2.5.26) como

$$\{d\sigma\} = \{\sigma'\} - D\{\Delta\varepsilon^p\} \quad (2.5.30)$$

o bien

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} - D\{\Delta\varepsilon^p\} \quad (2.5.31)$$

donde $\{\Delta\varepsilon^p\}$ denota el cambio de la deformación plástica. De esta manera las ecs. (2.5.5), (2.5.7) y (2.5.31) constituyen el conjunto de ecuaciones de las cuales se puede determinar $\{\sigma\}$.

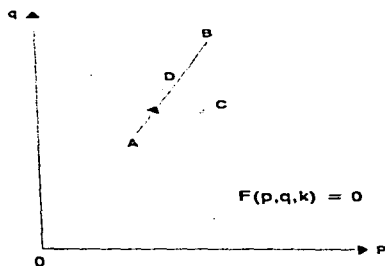


Fig. 2.4 Esquema del Algoritmo de retroceso.

No obstante, la expresión vectorial de $\{\sigma\}$ y esto dificulta la búsqueda de la solución de las ecuaciones. Por eso, se sustituye la incógnita (el vector $\{\sigma\}$), por dos escalares (los invariantes p y q) transformando así la ecuación vectorial (2.5.31) en dos ecuaciones escalares. La contraparte de la ec. (2.5.31) para p es fácil de obtener premultiplicando por $\{1\}^T$ ambos lados de la ec. (2.5.31) resultando que

$$p = p'' - K\Delta\varepsilon_v^p \quad (2.5.32)$$

siendo la deformación volumétrica plástica

$$\Delta\varepsilon_v^p = \{1\}^T\{\Delta\varepsilon^p\} \quad (2.5.33)$$

La ec. (2.5.32) nos proporciona una manera de estimar el valor de p . Combinando las ecs. (2.5.31) y (2.5.32) se tiene el vector de esfuerzos desviadores

$$\{\bar{\sigma}\} = \{\bar{\sigma}'\} - 2G\{\Delta\bar{\epsilon}^p\} \quad (2.5.34)$$

donde

$$\{\Delta\bar{\epsilon}^p\} = \{\Delta\epsilon^p\} - \frac{1}{3}\Delta\epsilon_p^p\{1\} \quad (2.5.35)$$

es el vector de deformaciones desviadoras plásticas. Por otro lado, la regla de flujo (2.5.6) puede simplificarse como

$$\Delta\bar{\epsilon}_p^p = \phi \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (2.5.36)$$

$$\{\Delta\bar{\epsilon}^p\} = \frac{3}{2} \frac{\phi}{q} \frac{\partial Q}{\partial q} \{\bar{\sigma}\} \quad (2.5.37)$$

Sustituyendo las ecs. (2.5.36) y (2.5.37) en las ecs. (2.5.32) y (2.5.34), respectivamente, se tiene

$$p = p'' - K\phi \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (2.5.38)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = \{\bar{\sigma}'\} - \frac{3G\phi}{q} \frac{\partial Q}{\partial q} \{\bar{\sigma}\} \quad (2.5.39)$$

La ec. (2.5.39) indica que si se conoce la magnitud de q , se puede estimar $\{\bar{\sigma}\}$. Sin embargo el valor de q resulta difícil de conocer a menos que se adopte alguna hipótesis pertinente a la relación entre $\{\bar{\sigma}\}$ y $\{\bar{\sigma}'\}$. El algoritmo de regreso radial supone que $\{\bar{\sigma}\}$ es proporcional a $\{\bar{\sigma}'\}$ de la siguiente manera

$$\{\bar{\sigma}\} = \frac{q}{q''} \{\bar{\sigma}'\} \quad (2.5.40)$$

Sustituyendo la ec. (2.5.40) en la ec. (2.5.39), se tiene finalmente

$$q = q'' - 3G\phi \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (2.5.41)$$

Esta es la ecuación que pretendemos encontrar, la cual nos proporciona una manera sencilla de estimar el valor de q . Para completar el conjunto de ecuaciones, de acuerdo con (2.5.36) la ecuación de endurecimiento (2.5.7) se cambia a

$$k = k \left(\phi \frac{\partial Q}{\partial p} \right) \quad (2.5.42)$$

Hasta ahora llegamos a tener finalmente cuatro ecuaciones, (2.5.5), (2.5.38), (2.5.41), y (2.5.42) a su vez cuatro incógnitas p, q, k y ϕ que pueden resolverse simultáneamente. Conociendo los valores de p y q , se puede estimar directamente $\{\sigma\}$ a partir de $\{\sigma'\}$ como sigue

$$\{\bar{\sigma}\} = p\{1\} + \frac{q}{q'} (\{\sigma'\} - p'\{1\}) \quad (2.5.43)$$

la cual fue derivada a partir de la ec. (2.5.40)

En los cuadros siguientes se resumen los procesos de presolución y postsolución en los cuadros 2.2 y 2.3. Los ejemplos de aplicación se detallarán en las dos siguientes secciones con el modelo elastoplástico perfecto y el del estado crítico.

Obviamente, los dos cuadros son ilustrativos, los cuales contienen los cálculos mínimos ya que en cada modelo implementado siempre se involucran cálculos adicionales, pero el flujo de cálculo mostrado en los cuadros se mantiene invariable a grandes rasgos

2.6 Material Elastoplástico perfecto.

El modelo elastoplástico perfecto es el mas simple entre los modelos elastoplásticos y su uso es muy limitado en Geotecnia. Quizá únicamente útil para modelar el comportamiento no drenado de los suelos saturados en términos de esfuerzos totales, o $\phi = 0$ como suele llamarse. Además la solución de dicho modelo, cuando éste es combinado con el criterio de Von Mises, puede tener dificultades numéricas cuando la zona de fluencia es amplia Chen y Baladi, (1985). Esto fue comprobado también con TEST92.

Se adopta la ley de falla del tipo de Von Mises y se supone una regla de flujo asociada de tal manera que la función de fluencia y el potencial plástico quedan

$$F(q) = Q(q) = q - 2c = 0 \quad (2.6.1)$$

donde c es una constante experimental que corresponde al valor de la cohesión. La ec. (2.6.1) implica que no existe el efecto de endurecimiento.

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 1 \quad (2.6.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (2.6.3)$$

Cuadro 2.2 Proceso de la Presolución.

Proceso de la presolución
Datos de entrada: 1. Indicador del material IND (≤ 0 , plástico) 2. Los esfuerzos $\{\sigma\}$ 3. F. (2.5.5), k (2.5.7) y D
Cálculos: Calcular D'' con (2.5.15) acompañado por (2.5.11)- (2.5.14)
Datos de salida 1. La matriz D''

Cuadro 2.3 Proceso de la Postsolución.

Proceso de la postsolución
Datos de entrada: 1. La deformación $\{d\varepsilon\}$ 2. El esfuerzo inicial $\{\sigma'\}$ 3. El indicador inicial IND'
Cálculos: 1. Calcular $\{\sigma''\}$ con (2.5.26) y (2.5.27) 2. Verificar (2.5.28), si se cumple, calcular $\{\sigma\}$ con (2.5.29), poner IND = 0 y se va al punto 5 3. Resolver p, q, k y λ del conjunto (2.5.5), (2.5.38), (2.5.41) y (2.5.42) 4. Calcular $\{\sigma\}$ con (2.5.43) y poner IND = -1 5. Terminar los cálculos
Datos de salida 1. El esfuerzo $\{\sigma\}$ 2. El indicador IND

Con estas hipótesis, los cálculos descritos anteriormente se simplifican bastante. La deformación plástica volumétrica es siempre nula por lo que

$$p = p'' \quad (2.6.4)$$

El conjunto de las ecuaciones no lineales no requiere resolverse ya que de la ec. (2.6.1) se tiene directamente

$$q = 2c \quad (2.6.5)$$

Por tanto, de acuerdo con las ecuaciones (2.5.43) y (2.5.44) el estado de esfuerzos finales esta dado por

$$\{\sigma\} = p' \{1\} + \frac{2c}{q'} (\{\sigma'\} - p' \{1\}) \quad (2.6.6)$$

Un aspecto importante del modelo elastoplástico perfecto es que cuando el material entra en el rango plástico, se comporta como un material incompresible. Con el fin de evitar problemas numéricos con este tipo de materiales, hay que utilizar un esquema de integración reducida. Esto también esta implementado en TEST92.

2.7 Modelo del Estado Crítico.

El modelo del estado crítico es la teoría de la elastoplasticidad mas antigua y la mas usada para modelar suelos cohesivos y aun para suelos granulares. Desde el punto de vista de la Mecánica de Suelos, el aspecto mas sobresaliente de dicha teoría es el concepto del estado crítico. Según ello la falla de los suelos que están sometidos inicialmente a una compresión isotrópica, ocurre cuando el estado de esfuerzos llega al llamado crítico, y esto es independiente de la trayectoria de esfuerzos que siguen los suelos y de las condiciones de drenaje. En el estado crítico tienen lugar grandes deformaciones cortantes sin cambio alguno de esfuerzos ni de deformaciones volumétricas. En el contexto de la teoría de la elastoplasticidad, la teoría del estado crítico es un modelo elástico no lineal, y plástico con endurecimiento isotrópico y regla de flujo asociada.

Existen en la actualidad una variedad de las teorías del estado crítico y todas ellas son extensiones del modelo original llamado CAM-Clay modificado que fue propuesto por Roscoe y Burland en 1968 (ver Wood, 1990). Esta versión original es la que se implemento en TEST92.

Los ingredientes fundamentales de la teoría del estado crítico son

1. Comportamiento Elástico. La deformación volumétrica elástica $d\varepsilon_p^e$ depende solamente del nivel del esfuerzo isotrópico y no de los esfuerzos desviadores:

$$d\varepsilon_p^e = \frac{k}{v} \frac{dp}{p} \quad (2.7.1)$$

donde k es una constante experimental y v es el volumen específico, o bien $v = 1 + e$, y e la relación de vacíos. Por tanto, el módulo volumétrico de elasticidad K

$$K = \frac{v p}{k} \quad (2.7.2)$$

no es constante si no que varía linealmente con el nivel de esfuerzo isotrópico. El otro parámetro elástico puede ser el módulo cortante o el coeficiente de Poisson, los cuales se suponen, en general, invariables con el nivel de esfuerzos.

2. Función de Fluencia. La función de fluencia, igual que el potencial plástico, se define como

$$F = Q = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \quad (2.7.3)$$

donde M es una constante experimental y p_c la presión de preconsolidación que también se da como un dato. En este caso se toma p_c como el parámetro de endurecimiento, esto es $k = p_c$. En realidad, la ec. (2.7.3) define la superficie de fluencia en el plano p-q como una elipse cuyo tamaño está determinado por p_c .

3. Regla de Endurecimiento. El parámetro de endurecimiento p_c está relacionado con las deformaciones volumétricas plásticas $d\varepsilon_p^v$ de la siguiente manera:

$$d\varepsilon_p^v = \frac{1}{\vartheta} \frac{d p_c}{p_c} \quad (2.7.4)$$

donde λ es otra constante experimental y $\vartheta = \frac{\lambda - k}{v}$.

4. Otros Datos. Como se ve, el volumen específico, v, interviene en las expresiones (2.7.1), (2.7.2), y (2.7.4) por lo que es necesario estimarlo. Para la rama de consolidación normal isotrópica se tiene

$$v = N - \lambda \ln p_c \quad (2.7.5)$$

para la rama de descarga y recarga,

$$v = v_k - k \ln p \quad (2.7.6)$$

y para el estado crítico

$$v = \Gamma - \lambda \ln p_{c,c} \quad (2.7.7)$$

donde N es una constante experimental, y

$$v_k = N - (\lambda - k) \ln p_c \quad (2.7.8)$$

$$\Gamma = N - (\lambda - k) \ln 2 \quad (2.7.9)$$

$$p_{c1} = \frac{p_c}{2} \tag{2.7.10}$$

Hasta aquí llegamos a tener todas las expresiones fundamentales del estado crítico. Los parámetros del material que requieren determinarse experimentalmente son λ , k , M y N . Además, es necesario conocer la presión de preconsolidación inicial p_c' y el estado de esfuerzos inicial con los cuales el volumen específico puede ser deducido de las ecs. (2.7.5)-(2.7.10)

Supongamos que un elemento que está sometido a un estado de esfuerzos inicial, p^0, q^0 y p_c^0 , sufre un cambio de esfuerzos y llega a tener un estado de esfuerzos final, p, q y p_c . Existen cuatro posibilidades de cambio elástico, de ablandamiento, de endurecimiento y del estado crítico, los cuales se ilustran en el plano p - q en la figura 2.5. El estado de esfuerzos elástico queda dentro de la elipse de fluencia, esto es

$$F(p, q, p_c') < 0 \tag{2.7.11}$$

y el tamaño de dicha elipse p_c' se mantiene constante. Sin embargo, dentro de la región elástica definida por la ec. (2.7.11), existe una excepción en la zona delimitada por $p < \frac{p_c^0}{2}$ y $q > Mp$. En esta zona, si el material es inicialmente elástico, si el estado inicial es plástico con endurecimiento o ablandamiento, el estado final es de ablandamiento, es decir, el estado final del material sigue en el rango plástico aunque la condición (2.7.11) es válida. En este caso, la elipse de fluencia se contrae y la presión de preconsolidación final p_c es menor que la inicial p_c^0 para que $F(p, q, p_c) = 0$ se cumpla.

por otro lado, si

$$F(p, q, p_c^0) > 0 \tag{2.7.12}$$

El material entra en el rango plástico con endurecimiento. La elipse de influencia se expande y la presión de preconsolidación final es mayor que la inicial para que $F(p, q, p_c) = 0$ se cumpla. La condición (2.7.12) define una región geométrica bastante amplia en el plano p - q y algunas zonas de ella no son físicamente imposibles. Un material plástico con endurecimiento debe cumplir, además de (2.7.12), la siguiente

$$q < Mp \tag{2.7.13}$$

o equivalentemente

$$p > \frac{p_c^0}{2} \tag{2.7.14}$$

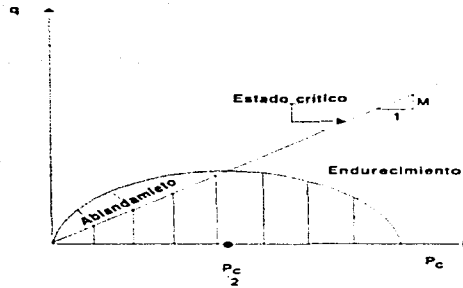


Fig. 2.5 Ubicación de zonas.

Un estado de esfuerzos que cumple con (2.7.12) pero no con (2.7.13) o (2.7.14) no es posible y su presencia en el cálculo se debe al proceso numérico de aproximaciones sucesivas y debe corregirse.

Por último, el estado crítico está definido por

$$q = Mp \quad (2.7.15)$$

El tamaño de la elipse de un material que se encuentra en el estado crítico se mantiene constante, es decir, $p_c = p_c'$.

Si el suelo no se encuentra en un estado elástico, debemos encontrar el estado de esfuerzos real a partir del esfuerzo $\{\sigma'\}$. Recordando lo que discutimos en la sección 2.5, debemos resolver un sistema de cuatro ecuaciones no lineales. Con el fin de establecerlas, primero se calculan a partir de la ec. (2.7.3)

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial P}{\partial p} = 2p - p_c \quad (2.7.16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{2q}{M^2} \quad (2.7.17)$$

y de acuerdo con ellas, las versiones correspondientes de las ecs. (2.5.38) y (2.5.41) para la teoría del estado crítico son

$$p = p'' - K\phi(2p - p_c) \quad (2.7.18)$$

$$q = q'' - 3G\phi \frac{2q}{\lambda J^2} \quad (2.7.19)$$

después, se reordena la ec. (2.7.3) como

$$q = \sqrt{p(p_c - p)} \quad (2.7.20)$$

y por ultimo, la ecuación del endurecimiento puede obtenerse integrando la ec. (2.7.4)

$$p_c = p_c^0 \exp \left[\vartheta \phi (2p - p_c) \right] \quad (2.7.21)$$

Las ecs. (2.7.17) y (2.7.20) forman el conjunto de ecuaciones no lineales. Al resolverlas se pretende eliminar las incógnitas ϕ y q . Para ello se combinan las ecs. (2.7.17) y (2.7.20) eliminando ϕ ($2p - p_c$)

$$p_c = p_c^0 \exp \left[\frac{\vartheta}{K} (p'' - p) \right] \quad (2.7.22)$$

y con las definiciones de ϑ y K la ec. (2.7.22) queda como

$$p_c = p_c^0 \exp \left[\frac{(\lambda - k)k}{v^2} \left(\frac{p''}{p} - 1 \right) \right] \quad (2.7.23)$$

Eliminando ϕ de las ecs. (2.7.18) y (2.7.19) se tiene

$$\frac{q''}{q} = 1 + \frac{6G}{\lambda J^2 K} \frac{p'' - p}{2p - p_c} \quad (2.7.24)$$

Sustituyendo la ec. (2.7.20) en la (2.7.24), esta queda

$$\frac{q''}{\sqrt{p(p_c - p)}} = 1 + \frac{6G}{\lambda J^2 K} \frac{p - p''}{2p - p_c} \quad (2.7.25)$$

Las ecs. (2.7.23) y (2.7.25) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas p y p_c . De hecho si se sustituye la ec. (2.7.23) en la ec. (2.7.25), eliminando p_c , nos queda una sola ecuación que su raíz puede encontrarse con facilidad por el algoritmo Newton-Raphson. Debe aclararse que en la ec. (2.7.23) se queda como una ecuación totalmente no lineal. Sin embargo, en vista de que el cambio de v en términos generales es pequeño, es preferible utilizar en la ec. (2.7.23) el valor inicial de v en lugar del dado por la ec. (2.7.5), dando como resultado un esquema muy eficiente de la evaluación de p_c . Por tanto la ec. (2.7.23) se escribe como

$$p_c = p_c^0 \exp \left[\frac{(\lambda - k)k}{(v^0)^2} \left(\frac{p^{1'}}{p} - 1 \right) \right] \quad (2.7.26)$$

donde $v^0 = N - \lambda \ln p_c^0$.

CAPITULO 3.

SOLUCIÓN A GRANDES DESPLAZAMIENTOS.

Este capítulo presenta una formulación y un método numérico para resolver problemas los cuales involucran deformaciones finitas de un material elastoplástico. Las ecuaciones que gobiernan están caracterizadas en forma de cantidad y las leyes constitutivas están formuladas sin tomar en cuenta la estructura principal empleada en el proceso de construcción. En particular se hace referencia a la deformación finita del suelo. Las fallas plásticas son descritas como producto de una condición general y la deformación plástica por un flujo arbitrario determinado.

En la formulación de teorías en mecánica aplicada y particularmente en mecánica de suelos, es una práctica común, asumir que las deformaciones, ambas elásticas y plásticas son infinitesimales y que la geometría inicial de un cuerpo deformado no es apreciablemente alterado durante el proceso de deformación. Estas aproximaciones no son menos justificadas para suelo que para materiales como acero y concreto.

Estas teorías de deformación finita que disminuyen algunas de estas aproximaciones restrictivas han sido desarrolladas y existe un número considerable de estudios en la literatura y en lo que es llamado "La Teoría clásica de las grandes deformaciones elásticas" (un ej. es el estudio de las grandes deformaciones del hule)

En contraste con los métodos de los primeros investigadores, muchos de los estudios recientes han preferido el método de incrementos para facilitar el análisis de una clase más general de materiales inelásticos de los que sus leyes constitutivas se expresan en términos de incrementos o cantidades exactas. Para tales formulaciones la solución de un problema dado se encuentra siguiendo una ruta específica de carga. En la mayoría de los casos las ecuaciones que gobiernan no pueden ser resueltas analíticamente y para ello es necesario adoptar una técnica numérica aproximada.

Mucho trabajo reciente ha sido dedicado a la formulación de análisis para problemas de placas y capas, involucrando grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones (un estudio es dado por Marcal). Como se ha notado estas formulaciones son inapropiadas para aplicación en geometrías voluminosas como ocurre en muchos problemas de la mecánica de suelos. Algunos intentos han sido hechos para formular una teoría aproximada para deformación finita para su uso en suelos. Un ejemplo es la de Thoms y Arman quienes directamente aplicaron la técnica de Argyris al problema de una presa construida sobre arcilla blanda. El análisis fue restringido a un material elástico y los resultados teóricos fueron comparados con los resultados de las pruebas de modelos foto-elásticos. Davidson y Chen han dado algunas soluciones para el problema de cimentación en arcilla mientras Fernández y Christian examinaron cimentación flexible y problemas de muros de retención.

En este capítulo se da una formulación para la solución de problemas de flujo finito elastoplástico sin restricción de la magnitud de deformación. La falla plástica es descrita por una condición general producida y una deformación plástica por un flujo arbitrario regulado. La teoría se desarrolla para una ley general constitutiva la cual relaciona objetivamente esfuerzos exactos con deformaciones exactas. Esta teoría tiene aplicaciones a problemas tales como la penetración de una presa dentro de suelos muy suaves; el comportamiento de capas de arcilla normalmente consolidada en la cual el módulo elástico y la fuerza cortante no drenada se incrementa con la profundidad, siendo virtualmente cero en la superficie, el comportamiento de la carga máxima de arcillas extremadamente sensibles para las cuales fuertes deformaciones de corte son requeridas para mantener el reblandecimiento correspondiente a la fuerza residual, la explosión de un cráter, la formación de una cavidad subterránea.

3.1 Formulación para una Regla General del Valor Exacto.

Existen dos modos de descripción de las deformaciones de un medio continuo, el Lagrangiano y el Euleriano. En la referencia de una estructura construida, la descripción Lagrangiana emplea las coordenadas α de un material típico particular en algún estado inicial de referencia como variables independientes. En la descripción Euleriana las

coordenadas χ_i , de un material particular en una condición actual deformada son consideradas como variables independientes. Cuando las deformaciones de magnitud no restringidas son descritas, cuidadosas distinciones deben hacerse entre estos sistemas

Intentos previos para formular soluciones hacia problemas finitos de deformación, en una manera apropiada usando el método de los elementos finitos, han diferido ambos en sus elecciones del modo de descripción y en la selección de una ley constitutiva adecuada. Mas sin embargo se usa una aproximación de incrementos en la cual una ruta de carga específica es seguida. Por ej. Hibbit y otros usan un tratamiento Lagrangiano y una ley de esfuerzo deformación dado por:

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl} \Delta E_{kl} \quad (3.1)$$

donde

ΔS_{ij} es el incremento del tensor esfuerzo de Kirchhoff asociado con
 ΔE_{kl} el incremento del tensor deformación de Greens, y
 D_{ijkl} es una función conocida del estado actual

Hofmeister y colaboradores también usan la aproximación Lagrangiana con una ley constitutiva:

$$\Delta \sigma_{ij} = D_{ijkl} \Delta E_{kl} \quad (3.2a)$$

donde

$\Delta \sigma_{ij}$ es el incremento del tensor esfuerzo dado por

$$\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 \quad (3.2b)$$

con

σ_{ij}^0 es el tensor de esfuerzo cartesiano inicial (antes del incremento actual de carga) referido a una estructura global relacionada y
 σ_{ij} es el tensor de esfuerzo cartesiano subsecuente (después del incremento actual de carga) referido también a la estructura global

Davidson y Chen adoptaron la ley

$$\Delta \tau_{ij} = D_{ijkl} e_{kl} \quad (3.3a)$$

donde

e_{kl} es el incremento del tensor de deformación infinitesimal, y
 $\Delta \tau_{ij}$ es el incremento del tensor esfuerzo dado por:

$$\Delta \tau_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_{ij} \quad (3.3b)$$

donde σ_{ij} es como en (3.2), y

τ_{ij} es un tensor de esfuerzo cartesiano en la configuración subsecuente. Estas componentes de esfuerzo son referidas a una estructura cartesiana localmente rotada la cual varía de punto a punto.

Osius y Swedlow han adoptado una formulación Euleriana y una ley material resumida por:

$$\hat{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} d_{kl} \quad (3.4)$$

donde

$\hat{\sigma}_{ij}$ es el valor del tensor esfuerzo de Jaumann, y

d_{ij} es el tensor deformación,

mientras Fernández y Christian usaron una de las leyes propuestas por Biot. Algunas ideas de la diferencia en la respuesta a la deflexión en carga que pueden surgir en un problema práctico debido a la adopción de leyes constitutivas diferentes es discutida por Cárter.

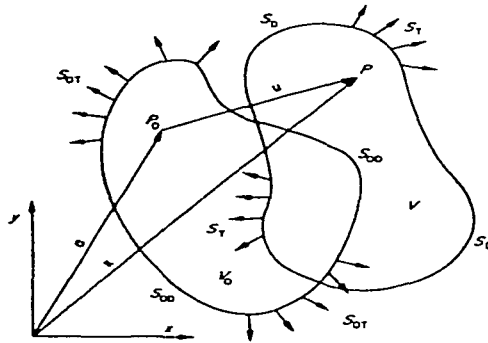


Fig. 3.1

En este capítulo se adopta la siguiente aproximación. La solución involucra una ruta de carga específica. A cualquier tiempo t_0 , el cuerpo general de la figura 3.1 ocupa una región en el espacio I_0 limitado por la superficie S_0 y está en equilibrio con fuerzas

conocidas del cuerpo y con tracciones específicas las cuales actúan en una porción de la superficie S_{int} . En el remanente de la superficie, S_{ext} , las velocidades son específicas. El cuerpo se ha movido a esta configuración de algún estado de referencia por las acción combinada de todas las fuerzas que actúan sobre él desde un tiempo 0 hasta t_0 . Nosotros fijamos la atención en el movimiento del cuerpo durante un incremento subsecuente de carga en el intervalo t_0 a t . En el tiempo t el cuerpo ocupa la región V limitada por la superficie S y las tracciones y velocidades son especificadas como S_T y S_V respectivamente. En tales circunstancias parece razonable postular que existe una relación la cual puede por supuesto depender de la historia previa del cuerpo, entre los incrementos de esfuerzo y los incrementos de deformación, y que así como el intervalo de tiempo llega a ser infinitesimal podrá reducirse a una relación entre el valor exacto de esfuerzos y valor exacto de deformaciones.

3.1.1 Ley General.

Por simplicidad de presentación es conveniente que en esta formulación se adopte una estructura de referencia cartesiana y que vaya de acuerdo con un problema de deformación plana.

A un tiempo dado t_0 considerando una partícula típica en un cuerpo deformado para ocupar una posición P_0 en el espacio descrito por el vector $a = (a, b)$ relativo a alguna estructura asociada. Al mismo tiempo t es la misma partícula que ocupa P , descrita por $x = (x, y)$. Estos dos vectores están por supuesto relacionados por:

$$x = a + u \quad (3.5)$$

donde $u = (u_x, u_y)$ es el vector de las componentes durante el incremento actual del movimiento. Adoptando una descripción Euleriana, el instante exacto de deformación puede ser descrito por el vector de gradiente de velocidad.

$$d = (\varepsilon^T, \omega)^T \quad (3.6)$$

donde

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^T$$

$$\omega = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad y$$

$$v = (v_x, v_y) = \frac{\partial}{\partial t} u(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

es el vector de las componentes de velocidad en el tiempo t . Las cantidades ϵ y ω están relacionadas a ϵ' y ω' , el lagrangiano de deformación objetiva y el vector de rotación (figura 3.2) respectivamente a través de

$$d' = \Phi d \quad (3.7)$$

donde

$$d' = (\epsilon'^T, \omega')^T$$

$$\epsilon' = \left(\frac{\partial v_x}{\partial a}, \frac{\partial v_y}{\partial b}, \frac{\partial v_x}{\partial b} + \frac{\partial v_y}{\partial a} \right)^T$$

$$\omega' = \left(\frac{\partial v_x}{\partial b} - \frac{\partial v_y}{\partial a} \right)$$

y

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial a} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial a} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial a} \\ 0 & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial b} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial b} & -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial b} \\ \frac{\partial u_x}{\partial b} & \frac{\partial u_y}{\partial a} & 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial a} + \frac{\partial u_y}{\partial b} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial b} - \frac{\partial u_y}{\partial a} \right) \\ \frac{\partial u_x}{\partial b} & -\frac{\partial u_y}{\partial a} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial b} - \frac{\partial u_y}{\partial a} \right) & 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial a} + \frac{\partial u_y}{\partial b} \right) \end{bmatrix}$$

Un problema importante en mecánica del medio continuo ha sido la selección de una definición apropiada para el esfuerzo objetivo para utilizar en relaciones constitutivas. Esto ha llamado la atención de entre otros a Jaumann, Truesdell, Green, Cotter y Rivlin cada uno adoptando una definición ligeramente diferente. Un valor adecuado del esfuerzo debe dar una medida objetiva del cambio de esfuerzo cuando se ve desde un sistema de referencia que rota con el material. Su definición debe también contener un término rotatorio para compensar la variación de las componentes de esfuerzo con respecto a un sistema de coordenadas que participa en la rotación instantánea en los alrededores de una partícula considerada. El ejemplo de una rotación rígida de una barra en tensión simple es frecuentemente citado en la literatura. Como Prager y Oldroyd han observado la diferencia

entre definiciones establece que la velocidad de aplicación de esfuerzo debe necesariamente consistir de una combinación lineal de velocidades de aplicación de esfuerzo. De este modo, en cualquier ley constitutiva que exprese la velocidad de aplicación de esfuerzo como una combinación lineal de la velocidad de aplicación de deformación, de tal manera que dichos términos pueden ser siempre absorbidos dentro de esta relación lineal así que la diferencia entre las definiciones es únicamente ilusoria. Como Prager apuntó existen razones para preferir la definición debida a Jaumann cuando el comportamiento plástico está involucrado y esta definición es adoptada en este capítulo y de acuerdo a la ecuación

$$\dot{\hat{\sigma}} = \dot{\sigma} + M d \quad (3.8)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma_x \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \end{bmatrix}$$

d es el vector definido por la ecuación (6)

$\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_x)^T$ es el vector cartesiano de las componentes de esfuerzo en el instante t. El índice superior indica la derivada del material con respecto al tiempo.

Una correspondencia general entre los esfuerzos objetivos y las deformaciones puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{\sigma}} = D \varepsilon + g \quad (3.9a)$$

donde

- $\hat{\sigma}$ es el vector de esfuerzos objetivos de Jaumann
- ε es el vector de deformaciones objetivas definido en la ecuación (6), y
- D es una matriz en la cual sus componentes dependen del estado actual y algunas veces de todos los estados previos en una línea específica.

y donde el vector g es incluido para tomar en cuenta la presencia de algunas características tales como la presión de poro (un ejemplo es la ley de esfuerzos efectivos), o calor y efectos de encogimiento. Si estos están ausentes entonces $g=0$. de tal forma podemos expresar la ecuación (3.9a) como:

$$\dot{\hat{\sigma}} = H d + g \quad (3.9b)$$

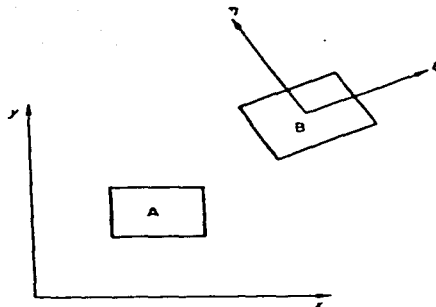


Fig. 3.2

donde $H = (D, 0)$. Alternativamente la ecuación (3.9b) puede ser escrita como

$$\dot{\sigma} = P d + g \quad (3.9c)$$

donde

$$P = H - M$$

Esto debe de ser destacado en este punto ya que los desplazamientos u son de grado relativo a la posición del cuerpo en el tiempo t_0 y de este modo desaparecen cuando $t = t_0$, mientras los esfuerzos σ son los valores actuales en el tiempo t .

3.1.2 Ecuaciones que Gobiernan.

Para el cuerpo de la figura 1 se asume que en el tiempo t el campo de esfuerzos $\sigma(x, t)$ está en equilibrio con una tracción T actuando sobre la superficie S_p y con el cuerpo de fuerzas F dentro de V entonces al vector V se asigna denotar el campo de velocidad de todas las partículas dentro de V , lo cual satisface las condiciones de frontera de velocidad Δv las cuales son compatibles con el incremento de deformación $\Delta \varepsilon$.

De esta forma podemos utilizar el principio de los trabajos virtuales y desde un tiempo t .

$$\int_V \Delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \Delta v^T F dV + \int_{S_p} \Delta v^T T dS \quad (3.10)$$

La ecuación (3.9c) puede ser integrada para obtener

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{t_0}^t (P d + g) dt \quad (3.11)$$

donde σ_0 es el vector cartesiano denotado por el campo de esfuerzos dentro de I_0 en el tiempo t_0 .

Sustituyendo la ecuación (3.10) en (3.11) tenemos

$$\int_v \Delta \varepsilon^T \left\{ \sigma_0 + \int_{t_0}^t (P d + g) dt \right\} dI^* = \int_v \Delta v^T F dV + \int_{S_T} \Delta v^T T dS \quad (3.12)$$

Esta es una ecuación exacta que gobierna el comportamiento del cuerpo en deformación desde I_0 hasta I^* .

Una solución aproximada de la ecuación (3.12) puede obtenerse usando el método de los elementos finitos. Si la deformación continua del cuerpo es dividida en un número discreto de elementos conformados, entonces suponemos que el campo de desplazamientos puede ser representado adecuadamente en los nodos conectados 1, 2, ..., N y otros

$$\delta^T = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

Entonces suponemos que el campo de velocidades continuas puede ser aproximado por

$$v = \Lambda \dot{\delta} \quad (3.13)$$

donde la forma de Λ dependerá en adelante del tipo particular del elemento usado, en general, dependerá de la posición actual. Si seguimos entonces que el vector d , de gradiente de velocidad, y ε , las deformaciones objetivas pueden ser relacionadas por las aproximaciones.

$$d = B \dot{\delta} \quad (3.14a)$$

y

$$\varepsilon = C \dot{\delta} \quad (3.14b)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad A$$

y C es la matriz B sin el último renglón. Sustituyendo en la ecuación (3.12) entonces encontramos que para las variaciones arbitrarias $\Delta \delta$ consistentes con las condiciones de frontera de velocidad

$$\Delta \delta^T \left[\int_v \left\{ C^T \int_0^t P B \dot{\delta} dt \right\} dV - h \right] = 0 \quad (3.15)$$

y de este modo tenemos

$$\int_v \left\{ C^T \int_0^t P B \dot{\delta} dt \right\} dV = h \quad (3.16a)$$

donde

$$h = - \int_v C^T \left\{ \sigma_0 + \int_0^t g dt \right\} dV + \int_v A^T F dV + \int_{S_p} A^T T ds \quad (3.16b)$$

En muchos casos la conservación de la masa puede ser usada para simplificar la integral que contiene el campo de fuerzas volumétricas. Por lo cual, en iguales circunstancias esto es conveniente para considerar tales fuerzas como iniciales, existentes más allá de un período de tiempo. Esto puede ser usado como un dispositivo cuando el material es adicionado al cuerpo o puede corresponder a una carga física tal como una prueba en un aparato centrífugo.

3.2 Descripción de la subrutina.

3.2.1 Subrutina EPPGDS.

Subrutina para un sólido isoparamétrico con ocho nodos para material elastoplástico perfecto con el criterio de Von Mises. La subrutina **EPPGDS**, comienza leyendo los datos

de los elementos en primer instancia coordenadas con su grado de libertad y después lee las incidencias o conectividades con su tipo de material y la etapa asignada para ese elemento, después llama a la subrutina PROFIL la que calcula el perfil de arreglos globales, luego llama a SHP28 que es la subrutina que calcula la función de forma (el cambio geométrico del elemento) a continuación se llama a EPPGD21 que es la otra subrutina modificada y que calcula la matriz de esfuerzo deformación para material elastoplástico perfecto, también define el rango en el que se va a trabajar al hacer un primer cálculo de esfuerzos, sabemos si está en el rango elástico o plástico, ya con la matriz geométrica y la matriz elastoplástica se comienza a formar la matriz de rigidez, continuando con el proceso se calculan las reacciones todo esto dentro de un ciclo, es decir elemento por elemento. Ya hecho esto se ensambla la matriz de rigidez global, se calculan los vectores de desplazamiento y la deformación, por último se llama a EPP22 que es la subrutina que calcula los esfuerzos principales. A continuación se presenta el listado de las subrutinas modificadas

Subrutina EPPGDS

```

SUBROUTINE EPPGDS(X, ID, IDD, NCNP, IX, ELPRO, SIGA, LM, NCEL,
1      LISNDF, MAXA, AK, R, DISA, NUMNP, NDM, NDFMAX, ITYPE,
2      NEL, NEN, NEN2, NLM, NDF, NMAT, NPRO, NSTR, NGAUS, NPAR1,
3      NPAR2, ISW)
COMMON /FILE/ IINP, IOUT, HERR, IDAT, ILM, NSTFP, NSTFT, NRED, NPVT
COMMON /CAPAS/ NLayer, ITER
COMMON /ERROR/ ERR0, ERR1
COMMON /INICIA/ INI, PF(20), SZ0(20), COF(20), AGA(20), PC0(20), NS
DIMENSION X(NDM, 1), ID(NDFMAX, 1), IDD(NDFMAX, 1), NCNP(1), IX(NEN2, 1),
1      ELPRO(NPRO, 1), LM(NLM), NCEL(1), MAXA(1), LISNDF(1), AK(1),
2      R(1), DISA(NDFMAX, 1), XX(2, 8), AD(3, 4),
3      BA(4, 16), AB(3, 16), AS(16, 16), XK(2), SHP(3, 8), EPS(3),
4      UD(16), SIGA(NSTR, NGAUS, 1), REAC(16),
5      W(3, 4), PP(3, 4), aa(16, 3), a(16, 4),
6      AN(3, 3), GG(4, 4)
C-----C
C      ELPRO(1) = Modulo de elasticidad           C
C      ELPRO(2) = Coeficiente de Poisson         C
C      ELPRO(3) = Peso volumetrico              C
C      ELPRO(4) = Cohesion                       C
C      ELPRO(5) = Resistencia a la tension       C
C-----C
C      SIGA(1) = Esfuerzo x-x                     C
C      SIGA(2) = Esfuerzo y-y                     C
C      SIGA(3) = Esfuerzo z-z                     C
C      SIGA(4) = Esfuerzo x-y                     C
C      SIGA(5) = Indicador < 0, Plastico, Otros, Elastico C
C-----C
LINT=NGAUS**(1 /REAL(NDM))
    
```

```
      GO TO (1,2,3,4,5,6),ISW
C...
  1 WRITE(IOUT,3000)
3009 FORMAT(// ' DATOS DE LOS ELEMENTOS ELASTO-P. PLASTICO',//)
      DO 10 I=1,NMAT
  10 READ(HINP,*) (ELPRO(I,I),I=1,NPRO)
      DO 12 I=1,NMAT
        I=1
        WRITE(IOUT,3010) I
3010 FORMAT(' GRUPO #',I5,' DE MATERIALES',/)
  11 WRITE(IOUT,3015) I,ELPRO(I,I)
      IF(I,GE,NPRO) GO TO 12
        I=I+1
        GO TO 11
3015 FORMAT(' PROPIEDAD #',I5,' =',F20.7)
  12 CONTINUE
      WRITE(IOUT,3020)
3020 FORMAT(' # ELEM.          INCIDENCIAS          # MAT.
  1# LAYER')
      DO 20 I=1,NEL
        READ(HINP,*) (IX(I,I),I=1,NEN2)
  20 WRITE(IOUT,3040)I,(IX(I,I),I=1,NEN2)
3030 FORMAT(10I5)
3040 FORMAT(15,8I5,2I8)
      DO 25 I=1,NDF
  25 LISNDF(I)=I
      DO 30 I=1,NEL
  30 NCEL(I)=I
      CALL
PROFIL(NCEL,NCNP,IDD,IX,MAXA,LM,NLM,LISNDF,NEL,NDF,NEN,NEN2,
  1 NDFMAX)
      RETURN
C...
  2 DO 60 I=1,NEL
    NCEL(I)=0
    IF(IX(NEN2,I) LT 0.AND.ABS(IX(NEN2,I)).LE.NPAR2) GO TO 60
    IF(IX(NEN2,I).GT 0.AND.ABS(IX(NEN2,I)).GT.NPAR2) GO TO 60
    NCEL(I)=I
    DO 50 J=1,NEN
      N=IX(J,I)
      NCNP(N)=N
    DO 40 K=1,NDF
      IDD(K,N)=ID(K,N)
  40 CONTINUE
    IF(NDF.EQ.NDFMAX) GO TO 50
```

```

DO 45 K=NDF+1,NDFMAX
  IDD(K,N)=1
45 CONTINUE
50 CONTINUE
60 CONTINUE
  RETURN
C...
  3
PROFIL(NCEL,NCNP,IDD,IX,MAXA,LM,NLM,LISNDF,NEL,NDF,NEN,NEN2,
  1 NDFMAX)
  RETURN
C...
  4 XK(1)=-0.5773502691896E0
    XK(2)=-XK(1)
    DO 500 NNN=1,NEL
      NELEM=NCEL(NNN)
      READ(ILM,*) NELEM,(LM(I),I=1,NLM)
      CALL ZEROR2(AS,16,16)
      IF(NELEM EQ 0) GO TO 400
      NM=IX(NEN+1,NNN)
      NLAY=IX(NEN+2,NNN)
      E=ELPRO(1,NM)
      PO=ELPRO(2,NM)
      GAMM=ELPRO(3,NM)
      C=ELPRO(4,NM)
      DO 160 J=1,8
        DO 160 I=1,2
160 XX(I,J)=X(I,IX(J,NNN))
      AREA=0.E0
      DO 300 LX=1,LINT
        DO 300 LY=1,LINT
          IP=LINT*(LX-1)+LY
          CALL SHP28(XK(LX),XK(LY),XX,SHP,XSJ,AREA)
          CALL EPGD21(IP,NNN,E,PO,C,SIGA,AD,W,PP,NSTR,NGAUS)
          CALL ZEROR2(AB,3,16)
          DO 170 N=1,8
            NN=2*N-1
            II=NN+1
            AB(1,NN)=SHP(1,N)
            AB(2,II)=SHP(2,N)
            AB(3,NN)=SHP(2,N)
            AB(3,II)=SHP(1,N)
170 CONTINUE
c write(38,171)
c 171 format(//,'MATRIZ GEOMETRICA',//)

```

```

c  do 174 N=1,3
c  write(38,173)(AB(N,M),M=1,16)
c 173 format(16f8.3)
c 174 continue
    CALL ZEROR2(BA,4,16)
    DO 175 N=1,8
    NN=2*N-1
    II=NN+1
    BA(1,NN)=SHP(1,N)
    BA(2,II)=SHP(2,N)
    BA(3,NN)=SHP(2,N)
    BA(3,II)=SHP(1,N)
    BA(4,NN)=SHP(2,N)
    BA(4,II)=-SHP(1,N)
175 CONTINUE
c  write(39,176)
c 176 format(//,'MATRIZ GEOMETRICA AMPLIADA',/)
c  do 178 N=1,4
c  write(39,177)(BA(N,M),M=1,16)
c 177 format(16f8.3)
c 178 continue
    CALL ZEROR2(aa,16,3)
    DO 185 N=1,8
    NN=2*N-1
    II=NN+1
    aa(NN,1)=SHP(3,N)
    aa(II,2)=SHP(3,N)
    aa(NN,3)=SHP(3,N)
    aa(II,3)=SHP(3,N)
185 CONTINUE
c  write(40,186)
c 186 format(//,'MATRIZ DE FUNCION DE FORMA',/)
c  do 188 N=1,16
c  write(40,187)(aa(N,M),M=1,3)
c 187 format(16f8.3)
c 188 continue
    CALL ZEROR2(a,16,4)
    DO 190 N=1,8
    NN=2*N-1
    II=NN+1
    a(NN,1)=SHP(3,N)
    a(II,2)=SHP(3,N)
    a(NN,3)=SHP(3,N)
    a(II,3)=SHP(3,N)
    a(NN,4)=SHP(3,N)

```

```

a(11,4)=SHP(3,N)
190 CONTINUE
c write(41,191)
c 191 format(//,'MATRIZ DE FUNCION DE FORMA AMPLIADA',//)
c do 193 N=1,16
c write(41,192)(a(N,M),M=1,4)
c 192 format(16f8.3)
c 193 continue
CALL ZEROR2(AN,3,3)
DO 205 I=1,3
DO 205 J=1,3
DO 200 bb=1,16
200 AN(I,J)=AN(I,J)-AB(1,bb)*aa(bb,J)
205 CONTINUE
c write(42,206)
c 206 format(//,'MATRIZ AN',//)
c do 208 I=1,3
c write(42,207)(AN(I,J),J=1,3)
c 207 format(3f8.3)
c 208 continue
CALL ZEROR2(GG,4,4)
DO 215 K=1,4
DO 215 L=1,4
DO 210 ee=1,16
210 GG(K,L)=GG(K,L)+BA(K,ee)*a(ee,L)
215 CONTINUE
c write(43,216)
c 216 format(//,'MATRIZ GG',//)
c do 218 K=1,4
c write(43,217)(GG(K,L),L=1,4)
c 217 format(4f8.3)
c 218 continue
DO 225 N=1,16
DO 225 M=N,16
DO 220 JJ=1,3
DO 220 II=1,4
c 220 AS(N,M)=AS(N,M)+AB(JJ,N)*AD(JJ,II)*AB(II,M)*XSJ
220 AS(N,M)=AS(N,M)+AB(JJ,N)*PP(JJ,II)*BA(II,M)*XSJ
225 CONTINUE
c write(44,226)
c 226 format(//,'MATRIZ DE RIGIDEZ',//)
c do 228 N=1,16
c write(44,227)(AS(N,M),M=1,16)
c 227 format(16f12.6)
c 228 continue

```

```

DO 230 I=1,8
LL=LM(2*I)
IF(LL.EQ.0) GO TO 230
R(LL)=R(LL)-GAMM*SHP(3,I)*XSJ
230 CONTINUE
CALL ZEROR(REAC,16)
DO 245 N=1,16
DO 240 M=1,2
240 REAC(N)=REAC(N)+AB(M,N)*SIGA(M,IP,NNN)*XSJ
245 REAC(N)=REAC(N)+AB(3,N)*SIGA(4,IP,NNN)*XSJ
DO 260 I=1,NEN
II=IX(I,NNN)
DO 250 J=1,NDF
JJ=NDF*(I-1)+J
N=IDD(J,II)
IF(N.LE.0) GO TO 250
R(N)=R(N)-REAC(JJ)
250 CONTINUE
260 CONTINUE
300 CONTINUE
DO 310 N=1,16
DO 310 M=N+1,16
310 AS(M,N)=AS(N,M)
400 CONTINUE
WRITE(NSTFP,*) NELEM,((AS(I,J),I=1,NLM),J=1,NLM)
500 CONTINUE
RETURN

C...
5 DO 600 NNN=1,NEL
NELEM=NCEL(NNN)
READ(NSTFP,*) NELEM,((AS(I,J),I=1,NLM),J=1,NLM)
READ(ILM,*) NELEM,(LM(I),I=1,NLM)
IF(NELEM.EQ.0) GO TO 600
CALL ADDSTF(AS,AK,MAXA,LM,NLM)
600 CONTINUE
RETURN

C...
6 XK(1)=-0.5773502691896E0
XK(2)=-XK(1)
IF(NPAR2.EQ.NLAYER) THEN
IF(ERR1.LE.ERR0.OR.NPAR1.EQ.ITER) THEN
WRITE(IDAT,3000) NPAR2
3000 FORMAT(/,' ESFUERZO ACUMULADO DE SOLIDOS EN LA CAPA ',I5,
1//,' ELEMENTO ESFUERZOS',/)
ENDIF

```

```

ENDIF
DO 1500 NNN =1,NEL
NELEM=NCEL,(NNN)
IF(NELEM EQ 0) GO TO 1500
NM=IX(NEN+1,NNN)
E=ELPRO(1,NN1)
PO=ELPRO(2,NN1)
C=ELPRO(4,NN1)
RT=ELPRO(5,NN1)
DO 1160 J=1,8
DO 1160 I=1,2
1160 XX(I,J)=X(I,IX(J,NNN))
CALL ZEROR1(UD,16)
DO 1180 J=1,NEN
JJ=IX(J,NNN)
DO 1170 I=1,NDF
IF(IDD(I,J).EQ 0) GO TO 1170
II=NDF*(J-1)+I
UD(II)=R(IDD(I,JJ))
1170 CONTINUE
1180 CONTINUE
AREA=0.E0
DO 1300 LX=1,LINT
DO 1300 LY=1,LINT
IP=LINT*(LX-1)+LY
CALL SHP28(XK(LX),XK(LY),XX,SHP,XSJ,AREA)
XCENT=0.
YCENT=0.
DO 1205 I=1,8
XCENT=XCENT+XX(1,I)*SHP(3,I)
1205 YCENT=YCENT+XX(2,I)*SHP(3,I)
CALL ZEROR2(AB,3,16)
CALL ZEROR1(EPS,3)
DO 1210 N=1,8
NN=2*N-1
II=NN+1
AB(1,NN)=SHP(1,N)
AB(2,II)=SHP(2,N)
AB(3,NN)=SHP(2,N)
AB(3,II)=SHP(1,N)
1210 CONTINUE
DO 1220 N=1,3
DO 1220 M=1,16
1220 EPS(N)=EPS(N)+AB(N,M)*UD(M)
IF(INI.NE.0.AND.NPAR2.EQ.1) THEN

```

```

ZZ=0.
DO 1350 N=1,NEN
1350 ZZ=ZZ+SHP(3,N)*X(2,IN(N,NNN))
  INUM=0
  DO 1360 I=1,IN1
1360 IF(ZZ.LT.PF(I)) INUM=1
    AGUA=AGA(INUM)+(PF(INUM)-ZZ)/
    I (PF(INUM)-PF(INUM+1))*(AGA(INUM+1)-AGA(INUM))
    SIGZ=SZO(INUM)-(PF(INUM)-ZZ)/
    I (PF(INUM)-PF(INUM+1))*(SZO(INUM+1)-SZO(INUM))
    COEF=COF(INUM)+(PF(INUM)-ZZ)/
    I (PF(INUM)-PF(INUM+1))*(COF(INUM+1)-COF(INUM))
    PC =PC0(INUM)+(PF(INUM)-ZZ)/
    I (PF(INUM)-PF(INUM+1))*(PC0(INUM+1)-PC0(INUM))
    SZ=SIGZ
    SX=COEF*(SZ+AGUA)-AGUA
    SY=SX
    SIGA(1,IP,NNN)=SX
    SIGA(2,IP,NNN)=SZ
    SIGA(3,IP,NNN)=SY
    SIGA(4,IP,NNN)=0
    SIGA(5,IP,NNN)=1
    WRITE(IDAT,3100) NNN,XCENT,YCENT,(SIGA(M,IP,NNN),M=1,5)
    GO TO 1300
  ENDIF
  CALL EPP22(IP,NNN,E,PO,C,RT,SIGA,EPS,SIGA1,SIGA3,NSTR,NGAUS,NPAR2)
  IF(NPAR2.EQ.NLAYER) THEN
  IF(ERR1.LE.ERROR.NPAR1.EQ.ITER) THEN
  WRITE (IDAT,3100) NNN,XCENT,YCENT,(SIGA(M,IP,NNN),M=1,5)
  WRITE (IDAT,3100) IDAT,SIGA1,SIGA3
  ENDIF
  ENDIF
1300 CONTINUE
3100 FORMAT(1X,I5,7(1X,E10.3))
1500 CONTINUE
  RETURN
  END

```

3.2.2 Subrutina EPGD21.

```

SUBROUTINE EPGD21(IP,NNN,E,PO,C,SIGA,AD,W,PP,NSTR,NGAUS)
C.....C
C   CALCULATES STRESS-STRAIN MATRIX FOR ELASTO-PERFECT PLASTIC
C.....C

```


DIMENSION SIGA(NSTR,NGAUS,1),AD(3,4),W(3,4),PP(3,4)
 DIMENSION S(4),A(4),B(4),D(4,4)

C

```

DO 1 I=1,4
1 S(I)=SIGA(I,IP,NNN)
c write(30,2)
c 2 format(//,'MATRIZ DE ESFUERZOS SIGA,/')
c do 5 I=1,4
c write(30,4)S(I)
c 4 format(12f8.3)
c 5 continue
SYM=SIGA(5,IP,NNN)
    
```

C-----

C CALCULATE ELASTIC STRESS-STRAIN MATRIX

C-----

```

BK=E/(1.-2*PO)/3
G=E/(2.*(1.+PO))
AL=(3.*BK-4.*G)/3
DL=(3.*BK-2.*G)/3
CALL ZEROR2(D,4,4)
D(1,1)=AL
D(2,1)=DL
D(3,1)=DL
D(1,2)=DL
D(2,2)=AL
D(3,2)=DL
D(1,3)=DL
D(2,3)=DL
D(3,3)=AL
D(4,4)=G
CALL ZEROR2(AD,3,4)
IF(SYM.LT.0.) GO TO 22
DO 10 I=1,2
DO 10 J=1,2
10 AD(I,J)=D(I,J)
AD(3,3)=D(4,4)
AD(3,4)=0
c write(31,12)
c 12 format(//,'MATRIZ ELASTICA,/')
c do 14 I=1,3
c write(31,13)(AD(I,J),J=1,4)
c 13 format(4f8.3)
c 14 continue
CALL ZEROR2(W,3,4)
W(1,4)=-S(4)
    
```

```

W(2,4)=S(4)
W(3,4)=(S(1)-S(2))/2
c  writel(32,15)
c 15 format(//,'MATRIZ DE ESFUERZOS EN EDO. ELASTICO',//)
c  do 17 l=1,3
c  write(32,16)(W(l,J),J=1,4)
c 16 format(4f8.3)
c 17 continue
CALL ZEROR2(PP,3,4)
do 18 nn=1,3
do 18 mm=1,4
PP(nn,mm)=PP(nn,mm)+AD(nn,mm)-W(nn,mm)
18 continue
c  write(33,19)
c 19 format(//,'MATRIZ PP EN EDO. ELASTICO',//)
c  do 21 nn=1,3
c  write(33,20)(PP(nn,mm),mm=1,4)
c 20 format(4f8.3)
c 21 continue
RETURN
-----
22 CALL PQ2(S,P,Q)
S(1)=S(1)-P
S(2)=S(2)-P
S(3)=S(3)-P
S(4)=2.*S(4)
c  write(34,23)
c 23 format(//,'MATRIZ DE ESFUERZOS SIGA EN EDO. PLAS.',//)
c  do 26 l=1,4
c  write(34,24)S(l)
c 24 format(12f8.3)
c 26 continue
25 CC=0.75/C
A(1)=CC*S(1)
A(2)=CC*S(2)
A(3)=CC*S(3)
A(4)=CC*S(4)
35 DO 30 J=1,3
B(J)=0.
DO 30 JJ=1,3
30 B(J)=B(J)+D(J,JJ)*A(JJ)
B(4)=D(4,4)*A(4)
45 AB=3.*G
BETA=AB
DO 50 J=1,4

```

```

DO 50 Jj=1,4
50 D(JJ,J)=D(JJ,J)-B(JJ)*B(J)/BETA
DO 60 J=1,2
DO 60 JJ=1,2
60 AD(JJ,J)=D(JJ,J)
AD(3,3)=D(4,4)
AD(3,4)=0
c write(35,61)
c 61 format(//,'MATRIZ ELASTO-PLASTICA',//)
c do 63 I=1,3
c write(35,62)(AD(I,J),J=1,4)
c 62 format(4f8.3)
c 63 continue
CALL ZEROR2(W,3,4)
W(1,4)=-S(4)
W(2,4)=S(4)
W(3,4)=(S(1)-S(2))/2
c write(36,64)
c 64 format(//,'MATRIZ DE ESFUERZOS EN EDO. PLASTICO',//)
c do 66 I=1,3
c write(36,65)(W(I,J),J=1,4)
c 65 format(4f8.3)
c 66 continue
CALL ZEROR2(PP,3,4)
do 70 nn=1,3
do 70 mm=1,4
PP(nn,mm)=PP(nn,mm)+AD(nn,mm)-W(nn,mm)
70 continue
c write(37,71)
c 71 format(//,'MATRIZ PP EN EDO. PLASTICO',//)
c do 73 nn=1,3
c write(37,72)(PP(nn,mm),mm=1,4)
c 72 format(4f8.3)
c 73 continue
RETURN
END
C
C

```

3.3 Funcionamiento de la Subrutina

3.3.1 Subrutinas Utilizadas Se presenta un listado de subrutinas por orden alfabético y su funcionamiento:

ADBLKS:	Ensambla el sistema de ecuaciones global por bloques
ADDRESS:	Calcula la localización de los elementos diagonales de la matriz de rigidez global
ADDSTF:	Ensambla la matriz de rigidez global
BLOCK:	Forma bloques para la solución del sistema de ecuaciones
ELCAL:	Lee los datos generales de elementos y calcula el almacenamiento dinámico para los elementos
ELEMENT:	Selecciona subrutinas de elementos
LIMIT:	Calcula el error de iteración
NEQCAL:	Calcula el número total de ecuaciones
PCONT:	Lee los datos generales, calcula el almacenamiento dinámico para los datos del sistema y procede a iteraciones por etapas de construcción y/o subiteraciones dentro de estas
PROFIL:	Calcula el perfil de arreglos globales
PRTDIS:	Imprime los resultados de los desplazamientos calculados
RLOAD:	Agrega las cargas externas al vector de carga global
NLEC:	Lee los datos nodales
ZEROR1:	Vaciar un vector real
ZEROR2:	Vaciar una matriz real

Las demás subrutinas corresponden a cada tipo de elementos.

TRUSS2:
EPP21:
EPP22:
PRES2:
NOTEN4:
PRCPL:
SHP28:
SHP24:
TFORM4:
TFOR44:
PQ2:
ELPLP2:
NOTENS:
PRES3:
SHIP13:
VIGA3:
TFORS:
TFO8:
SHIP12:
VIGA2:
ELPLP8:
EPPGD8:

3.3.2 Archivos requeridos.

En primer lugar, se requiere de un archivo controlador, el cual contiene los nombres de archivos requeridos. El archivo controlador actualmente lleva el nombre de "control".

Las funciones de los 9 archivos requeridos se exponen en lo siguiente:

Archivo No. 1	Datos de entrada.
Archivo No. 2	Datos de salida.
Archivo No. 3	Escribe y lee los desplazamientos acumulados.
Archivo No. 4	Escribe los desplazamientos acumulados.
Archivo No. 5	Escribe los esfuerzos de salida.
Archivo No. 6	Escribe las matrices de rigidez parciales.
Archivo No. 7	Escribe la matriz de rigidez global.
Archivo No. 8	Escribe las matrices intermedias.
Archivo No. 9	Escribe los coeficientes de pivote.

3.3.3 Tarjetas requeridas para el funcionamiento del programa.

A continuación se presentan las tarjetas que deben incluirse y bajo que formato para el funcionamiento correcto del programa.

1. TARJETA DEL TITULO DEL PROBLEMA (20A4).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
	1-80	TITLE	Titulo del problema

2. TARJETA DE CONTROL GLOBAL (1015).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	1-5 6-10 11-15	NDM NUMNP NDFMAX	Dimensión del problema Número total de puntos nodales Número máximo de grados de libertad en cada nudo
(2)	16-20	NUMEG	Número total de grupos de elementos
(3)	21-25	NLAYER	Número total de etapas de análisis
(4)	26-30	ITER	Número máximo de iteraciones en cada etapa de análisis
(5)	31-35	NLOAD	Número total de cargas concentradas
(6)	35-40	NPRES	Número total de cargas de presión
(7)	40-45	INI	Número total de puntos que definen las condiciones iniciales de esfuerzos

NOTAS

- (1) NDM = 1 si es unidimensional,
NDM = 2 si es bidimensional y
NDM = 3 si es tridimensional.
- (2) En un análisis puede haber varios tipos de elementos (ver la tabla de elementos), NUMEG el número máximo de tipos empleados.
- (3) Los análisis se realizan por etapas: la aplicación de cargas y el cambio geométrico del problema (construcción o excavación) evoluciona por etapas de análisis. NLAYER es el número total de etapas.
- (4) Dentro de cada etapa de análisis, los cálculos se realizan iterativamente. Existen dos criterios para detener el cálculo, el error de iteración es menor que el prefijado o el número de iteraciones excede ITER. ITER es igual para todas las etapas de análisis.
- (5) NLOAD es el número total de cargas concentradas en todas las etapas.
- (6) NPRES es la suma total de cargas de presión en todas las etapas.
- (7) INI es el número de tarjetas para especificar las condiciones iniciales de esfuerzos.

3. TARJETAS DE CONTROL DE ARREGLO COMÚN (I10).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1-10	NTOT	Número de espacio necesario en memoria para el análisis

NOTAS:

- (1) Esta variable depende del compilador FORTRAN utilizado. En una PC con el compilador FORTRAN Microsoft 4.00, NTOT no debe ser mayor que 7000.

4. TARJETA DE ITERACIÓN (F10.0).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCIÓN
(1)	1-10	ERRO	Error previsto de iteración (criterio de convergencia)

NOTA:

- (1) El error se calcula de acuerdo con $ERRO = \frac{\|r_n^k\|}{\|r_n^0\|}$, donde r_n^0 es el vector de desplazamientos en la primera iteración de la etapa n y r_n^k en la k -ésima iteración.

5. TARJETAS DE PUNTOS NODALES (Libre).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)		X(1) X(2) X(3)	X - abscisa Y - ordenada (si NDM > 1) Z - ordenada (si NDM > 2)
(2)		ID(1) ID(2) ID(3) ID(4)	X - translación, código Y - translación, código Z - translación, código Z - rotación, código

NOTAS:

- (1) Este grupo de datos consiste en NUMNP tarjetas
- (2) ID = 0 Condición libre,
ID = 1 Condición fija (no se permite desplazamiento o rotación).
El número de códigos ID es igual al máximo grado de libertad NDFMAX

6. TARJETAS DE CARGAS CONCENTRADAS (315, F10.0).

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	1-5 6-10	NOD IDIRN	Punto nodal donde se aplica la carga Grado de libertad de la aplicación de la cargas
(2)	11-15	ILAYER	Número de etapa de aplicación de la carga
(3)	16-25	FLOAD	Valor de la carga

NOTAS:

- (1) Este grupo de datos tiene NLOAD tarjetas. Si NLOAD = 0, se omite este grupo de tarjetas.
- (2) Una vez aplicada la carga, se mantendrá en todas las etapas subsecuentes, por tanto ILAYER es la primera etapa donde se aplica la carga.
- (3) Debe recordarse que la carga tiene signo y es congruente con la convención del signo del sistema de coordenadas.

7. TARJETAS DE CONTROL GLOBAL DE ELEMENTOS (1015).

NOTAS:

- (1) Este grupo de datos tiene NUMEG tarjetas. La descripción de cada tipo de elemento es:

NOTEN4: Sólido isoparamétrico con 4 nudos, material elástico lineal.

- ELPLP2 Sólido isoparamétrico con 4 nudos, material elasto plástico perfecto con el criterio de Von Mises.
- VIGA2 Viga isoparamétrica con 2 nudos, material elástico lineal
- PRES2 Elemento para calcular cargas de presión, con 2 nudos
- NOTENS Sólido isoparamétrico con 8 nudos, material elástico lineal
- ELPLPS Sólido isoparamétrico con 8 nudos, material elasto plástico perfecto con el criterio de Von Mises
- TRUSS2 Barra isoparamétrica con 2 nudos, material elástico lineal
- PRES3 Elemento para calcular cargas de presión, con 3 nudos
- EPPGD8: Sólido isoparamétrico con 8 nudos, material elasto plástico perfecto con el criterio de Von Mises.

- (2) El programa reporta los resultados de cada elemento que contiene NSTR valores.

NOTA	COLUMNAS	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	1-5	ITYPE	Indicador del tipo de elemento
	6-10	NIEL	Número de elementos
	11-15	NEN	Número de puntos nodales en cada elemento
	16-20	NDF	Número de grados de libertad
	21-25	NMAT	Número de grupos de material
	26-30	NPRO	Número de propiedades de material en cada grupo
(2)	31-35	NSTR	Número de datos de salida
	36-40	NGAUS	Número de puntos de integración Gaussiana

Los valores que se deben fijar para cada tipo de elemento se listan en la siguiente tabla.

CLAVE	ITYPE	NEN	NDF	NPRO	NSTR	NGAUSS
NOTEN4	1	4	2	4	3	2
ELPLP2	2	4	2	5	5	1
VIGA2	3	2	3	5	3	1
PRES2	4	2	2	0	0	2
NOTENS	5	8	2	3	3	2
ELPLPS	6	8	2	5	5	4
TRUSS2	7	2	2	2	1	4
PRES3	8	3	2	0	0	3
EPPGD8	9	8	2	5	5	4

8.a TARJETAS DE ELEMENTOS EPPGD8: PROPIEDADES (FORMATO LIBRE).

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	(ELPRO(1), I=1, NPRO)	Propiedades de material

NOTA:

- (1) Este grupo de datos tiene NMAT tarjetas y cada tarjeta contiene NPRO valores separados por coma
 ELPRO(1) = Módulo de elasticidad
 ELPRO(2) = Relación de Poisson
 ELPRO(3) = Peso volumétrico
 ELPRO(4) = Cohesión
 ELPRO(5) = Resistencia a la tensión

8.b TARJETAS DE ELEMENTOS EPPGD8: CONECTIVIDADES (1015).

NOTA	VARIABLE	DESCRIPCION
(1)	(IX(I), I=NEN+2)	Conectividad y propiedad del elemento

NOTA:

- (1) Este grupo de datos tiene NEL tarjetas y cada tarjeta contiene NEN+2 valores separados por un espacio
 IX(1) IX(NEN) son puntos nodales en cada elemento, IX(NEN+2) es la etapa que este elemento se construye o se excava, dependiendo del signo de IX(NEN+2), si es positivo se construye y si es negativo se excava. Los elementos intactos siempre tienen un valor de IX(NEN+2) de 1. Debe notarse que un elemento construido ya no puede ser excavado posteriormente e igualmente, un elemento excavado ya no podrá ser puesto de nuevo.

CAPITULO 4

APLICACIÓN AL PROCEDIMIENTO DE SUBEXCAVACIÓN.

La formulación ya presentada se introdujo dentro de un programa de elementos finitos (TEST92GD) que incluye una ley de comportamiento elástica lineal perfectamente plástico. Con esta formulación ya incluida se simuló el cierre de oquedades de diversas geometrías, teniendo como objetivo principal, determinar la carga mínima que garantice el cierre de la oquedad, así como también se estableció el perfil de deformación debido al cierre de la oquedad.

Para llevar a cabo la simulación de la subexcavación, primeramente se configuró la malla de elementos finitos, utilizando una sección de 14 m de base por 9 m de altura, como ya se dijo se analizaron diversas geometrías, variando la dimensión.

Considerando que la falla de una oquedad va a depender tanto de su diámetro ($2r$) como de su profundidad (d) y de la carga (q) aplicada en la superficie del terreno, es posible trazar las líneas características que muestra la figura 1 (a) (b), para los casos de un túnel somero y profundo, respectivamente. En el caso del túnel somero q representa el esfuerzo principal mayor en los puntos A y C. Por otra parte, el esfuerzo principal mayor en los puntos B y D está dado por el esfuerzo tangencial σ_{θ} , considerando que el esfuerzo radial en las paredes de la oquedad es P' . De tal manera que la línea característica de la izquierda es de tipo S_1 mientras que la de la derecha es del tipo S_2 . El esfuerzo medio aplicado en A resulta ser q-c con un ángulo $\alpha_1 = \pi/4$ medido a partir de la horizontal hacia la superficie de

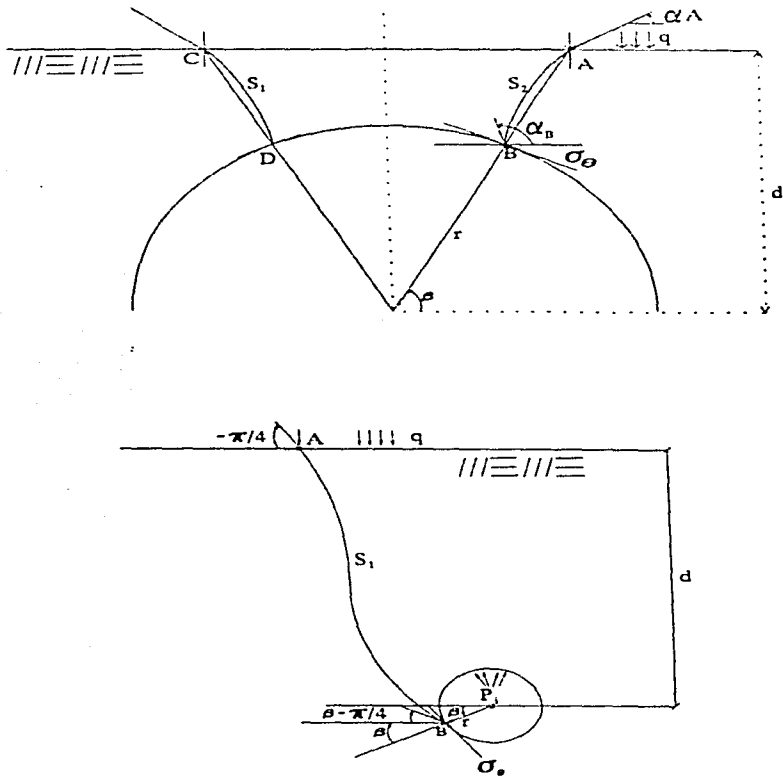


Fig. 4.1 Líneas características para el caso de un túnel, somero y profundo respectivamente

falla, mientras que en el punto B el esfuerzo medio es c con un ángulo $(\alpha_u = \beta + \pi/4)$ y una altura igual a $d - r \text{ sen } \beta$. Al aplicar la ecuación de equilibrio límite para esta línea, se obtienen las relaciones

$$q + \gamma(d - r \text{ sen } \beta) = 2C_u(1 + \beta) \quad (\text{Rojas et al, 1995}) \quad (4.1)$$

$$S_{z,\sigma} = -\frac{r^2}{d} \quad (\text{Sagaceta, 1987}) \quad (4.2)$$

El mismo resultado se obtiene para la línea tipo S_1 .

Para realizar las comparaciones de los resultados numéricos y analíticos adecuadamente, es necesario diferenciar las perforaciones someras de las profundas dado que el mecanismo de falla es diferente en cada caso. Para el primer caso ocurre cuando la profundidad de la perforación no es muy grande con respecto al diámetro de la misma. El segundo cuando el diámetro de la perforación es despreciable con respecto a su profundidad. En cada caso los valores límite de los esfuerzos que pueden producir el cierre de la coqueidad son,

para perforaciones profundas

$$q_{\text{max}} = 5.14C_u - \gamma(d + r)$$

$$q_{\text{min}} = 2C_u - \gamma d$$

para perforaciones someras

$$q_{\text{max}} = 2C_u - \gamma d$$

$$q_{\text{min}} = 2C_u \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \gamma \left(d - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

Para obtener estas relaciones se han considerado los valores máximos y mínimos que pueden tomar el ángulo β el cual depende las dimensiones, geometría y profundidad de la perforación. Los valores de los parámetros considerados para el suelo fueron los siguientes: $C_u = 10 \text{ t/m}^2$, $\gamma = 1.2 \text{ t/m}^3$. La profundidad varió de 6.5 a 6.55 m. Para los valores considerados de profundidad y radio de la perforación circular ($d = 6.5 \text{ m}$, $r = 0.2 \text{ m}$) se obtuvieron los siguientes valores máximos del esfuerzo superficial q que producen su falla ya sea en condiciones profundas o someras respectivamente

$$q_{max} = 5.14C_u^* + \gamma(d+r) = 43.3 \text{ t/m}^2 \quad (\text{falla profunda})$$

$$q_{max} = 2C_u^* + \gamma d = 12.2 \text{ t/m}^2 \quad (\text{falla somera})$$

Dado que los valores numéricos alcanzados para la carga q considerando diversas geometrías de la oquedad varían entre 6.75 y 11 t/m^2 , se deduce que el tipo de la falla para todos los casos analizados, excepto el caso rectangular de 0.20x0.10 m, es de tipo somera.

Por otro lado de acuerdo con la ec. (4.1) es posible calcular el valor del ángulo β con el que se produce la falla de la oquedad circular, el cual resulta ser de aproximadamente de -16° . Esto indicaría que en realidad la perforación no es muy somera, de tal manera que si se consideran dimensiones más pequeñas de la oquedad puede caerse en el caso de falla profunda como ocurre con el caso rectangular mencionado anteriormente para el cual la carga de falla obtenida con el análisis numérico fue de 16.75 t/m^2 , superior al valor analítico máximo determinado para fallas someras.

Durante las simulaciones numéricas se observó que el número de incrementos en los que se aplica la carga superficial q influye de manera importante en los resultados obtenidos, sin embargo, a medida que se aumenta el número de incrementos se tiende a un valor asintótico. A través de una serie de simulaciones se determinó que un valor de incrementos de carga q es de 20.

Otra observación importante que pudo hacerse durante las simulaciones numéricas es que conforme se rebasa la carga mínima para el cierre de la oquedad, se comienza a perder la simetría en los asentamientos y si la carga es suficientemente grande, se puede producir un levantamiento en alguna zona de la superficie indicando que se produce la falla generalizada de suelo.

4.1 Comparación de Resultados Numéricos contra Analíticos.

En la tabla 4.1 se presenta la comparación de los resultados obtenidos con la formulación para grandes desplazamientos y los obtenidos analíticamente, en el primer y el quinto análisis se asumió a una forma circular con el fin de poder realizar las comparaciones así mismo para las otras geometrías, ya conocida el área a excavar se obtuvo un radio equivalente para obtener el desplazamiento superficial al centro de la oquedad y comparar con los valores analíticos.

También se muestran los perfiles de deformación de la superficie del terreno ante los cierres de la oquedad, esto se presenta para cada caso analizado.

Los valores del asentamiento superficial al centro para la oquedad circular de diámetro 40 cm resultan ser cuatro veces superiores a los asentamientos calculados con la ec. 4.2, mas sin embargo para el otro caso circular de 1.0m de diámetro el desplazamiento numérico y analítico concuerdan razonablemente. Esto a pesar de que los valores numéricos

se les ha restado la parte elástica de la deformación provocada por la aplicación de la carga total en la superficie del terreno. Se comprobó que los perfiles deformados de la superficie del terreno que se producen durante el cierre total de las oquedades corresponden al área inicial de las mismas. La discrepancia entre los valores numéricos y analíticos se debe fundamentalmente a la influencia que juegan las fronteras en el análisis por elementos finitos ya que la malla se limita a un rectángulo de 14.0x9.0m, mientras que en el procedimiento analítico, el medio se considera como semiinfinito.

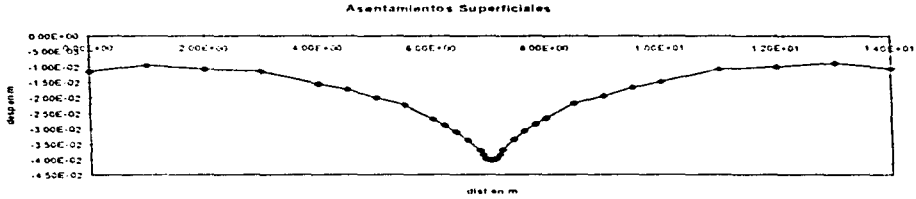
Tabla 4.1 Comparación de resultados numéricos y analíticos para oquedades de diversas formas y tamaños

FORMA	DIMENSIONES (m)	PROFUNDIDAD (m)	NUMÉRICO		ANALÍTICO	
			$q_{adm}(t/m^2)$	$S_{z_0}(m)$	$q_{adm}(t/m^2)$	$S_{z_0}(m)$
CIRCULAR	$\phi=0.40$	6.5	6.75	.0287	12.2	.0062
CUADRADA	l=0.40	6.5	7.25	.0270	"	"
RECTANGULAR	l=0.40 h=0.10	6.55	11.0	.0199	"	"
	l=1.20 h=0.10	6.55	7.75	.0374	"	"
	l=0.20 h=0.10	6.55	16.75	.0107	"	"
CIRCULAR	$\phi=1.0$	6.5	5.8	.0233	"	"
RECTANGULAR	l=1.20 h=1.0	6.5	7.55	.0283	"	"
	l=1.20 h=0.70	6.65	8.0	.0351	"	"

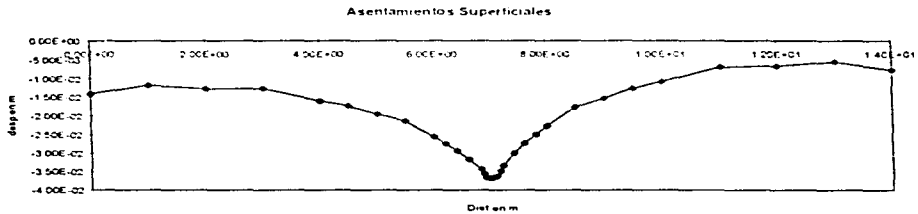
4.2 Asentamientos en la superficie del terreno.

Al comparar los asentamientos producidos por una oquedad circular de 40 cm. de diámetro, con los de un rectángulo de 120x10cm, se observa que este último presenta un asentamiento de mayor magnitud, a pesar de que las áreas excavadas son iguales, esto se comprobó al hacer una comparación mas que fue una oquedad de 1.0m de diámetro contra una geometría rectangular de 1.20x0.70m, con esto observamos que los asentamientos superficiales son mas uniformes para una excavación rectangular que para una circular. Así mismo se observa que en todos los casos el asentamiento mayor ocurre al centro de la perforación. Estos resultados nos indican que para el mismo volumen de suelo excavado la

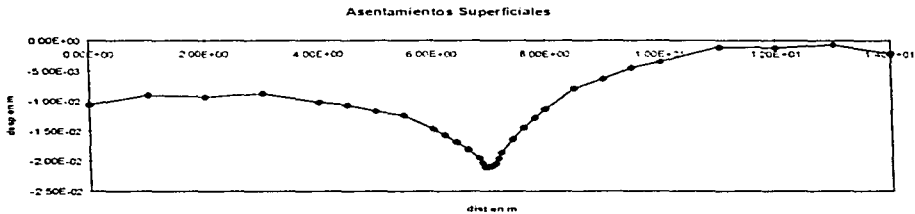
geometría rectangular puede proporcionar algunas ventajas en cuanto a la distribución de los asentamientos en la superficie del terreno.



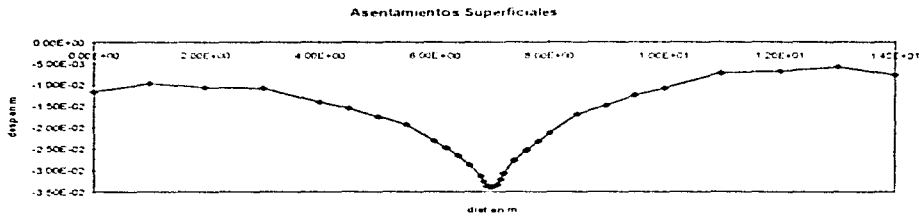
Asentamientos de la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad circular de 0.40 m de diámetro. (Caso GD)



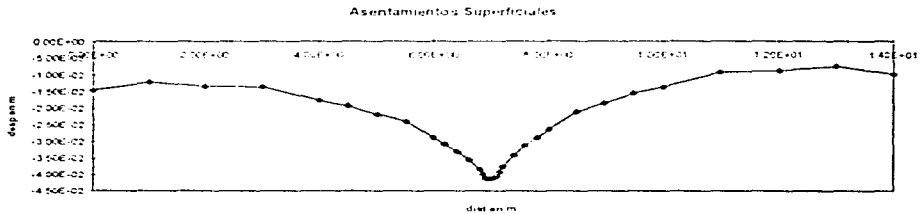
Asentamientos en la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad cuadrada de 0.40 m. (Caso GD)



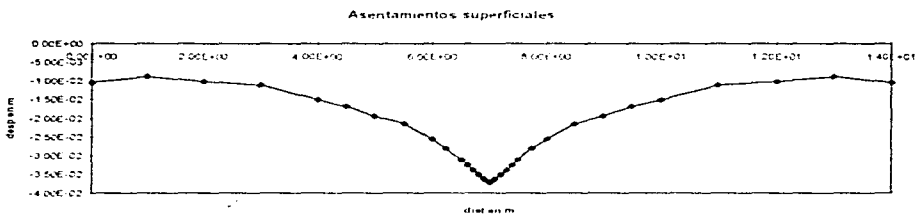
Asentamientos en la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad rectangular de 0.20 m de ancho y 0.10 m de alto. (Caso GD)



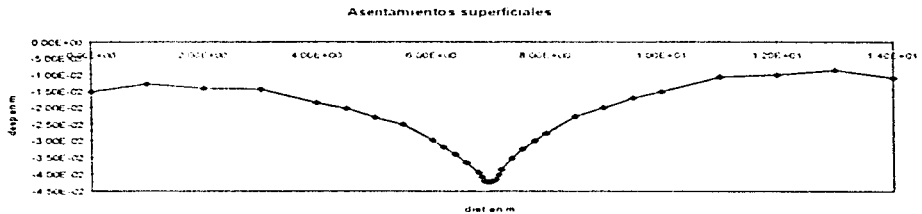
Asentamientos de la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad rectangular de 0.40 m de ancho y 0.10 m de alto. (Caso GD)



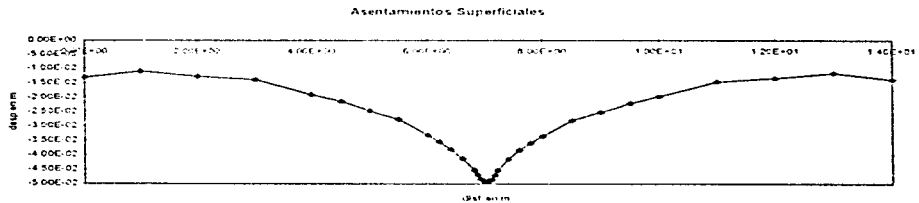
Asentamientos en la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad rectangular de 1.20 m y 0.10 m de alto. (Caso GD)



Asentamientos superficiales del terreno provocados por el cierre de una oquedad circular de 1.0 m de diámetro. (CASO GD)



Asentamientos superficiales en el terreno provocados por el cierre de una oquedad rectangular de 1.20 m de ancho y 1.0 m de alto. (CASO GD)



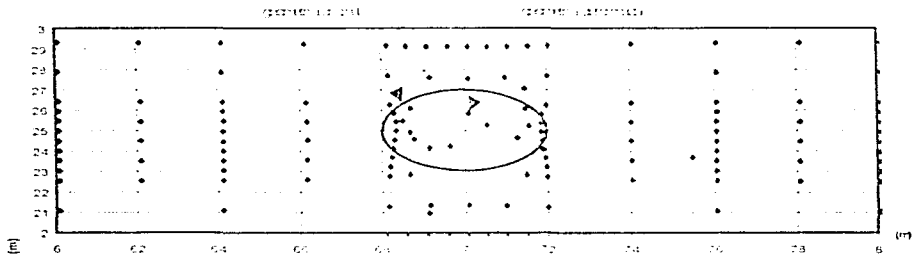
Asentamientos de la superficie del terreno provocados por el cierre de una oquedad rectangular de 1.20x0.70m. (Caso GD)

4.3 Mallas Deformadas.

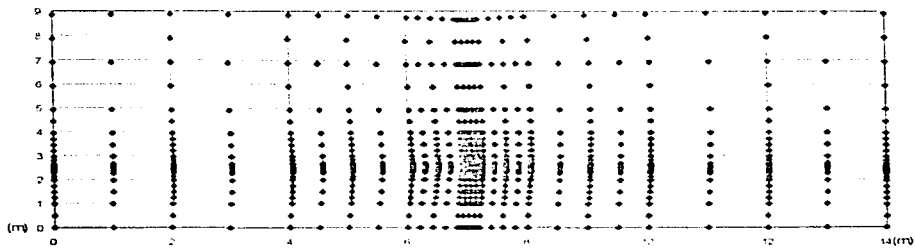
Por ultimo se presentan las mallas deformadas para cada caso, en las que podemos observar que el cierre total se alcanza en las oquedades rectangulares (0.20x0.10, 0.40x0.10, 1.20x0.10m) excepto en el ultimo caso de 1.20x0.7m, y en los otros casos solo se obtiene un cierre parcial. Asi mismo se presenta un acercamiento de la zona de la excavación para ver mas claro el cierre de la oquedad.



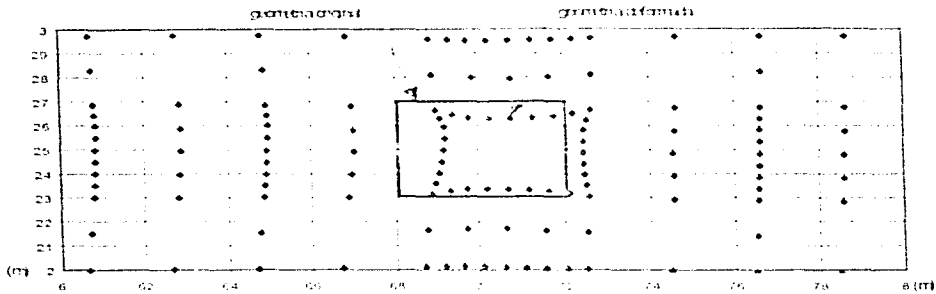
Malla deformada de una excavación circular de 0,40 m. de diámetro



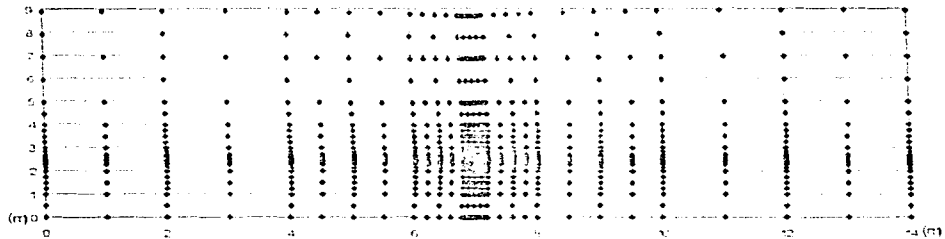
Detalle de malla deformada excavación circular de 0,40 m. de diámetro. hierro parcial con cascotes



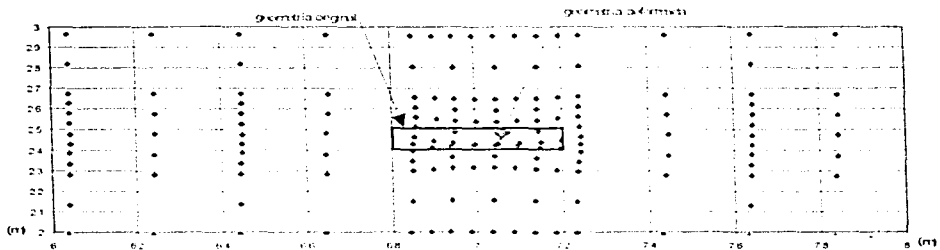
Malla deformada de una excavación cuadrada de 0,40 m



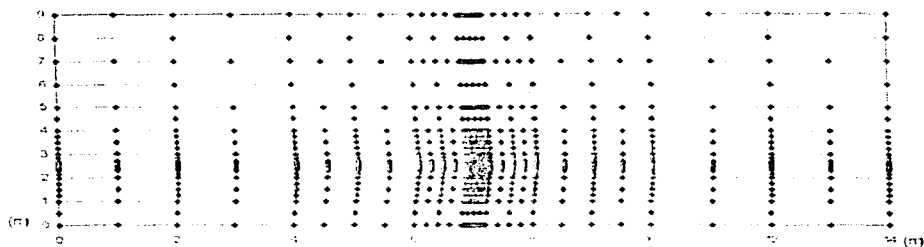
Detalle de malla deformada excavación enchavada de 0,40m. (cierre parcial)



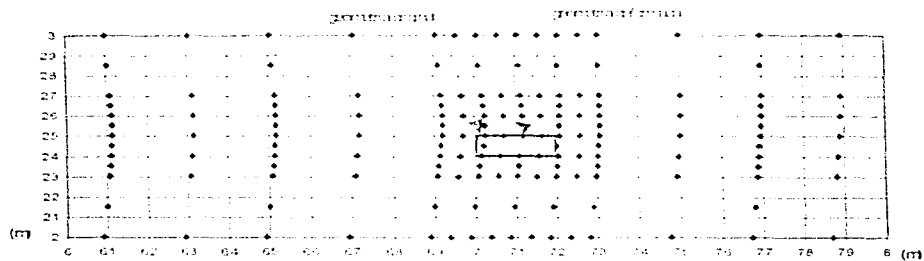
Malla deformada de una excavación rectangular de 0,40m de ancho y 0,10m de alto.



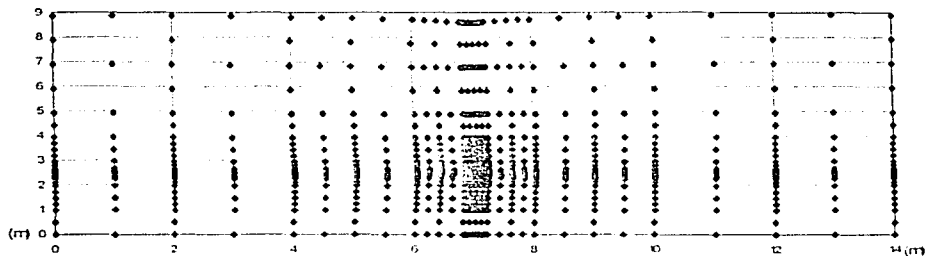
Detalle de malla deformada excavación rectangular de 0,40 x 0,10m. (cierre total)



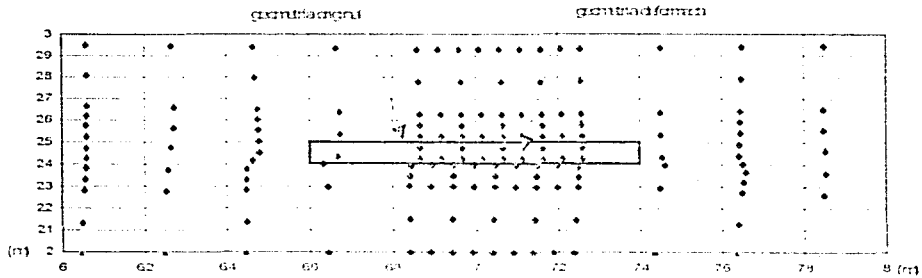
Malla deformada de una excavación rectangular de 0,20m de ancho y 0,10m de alto.



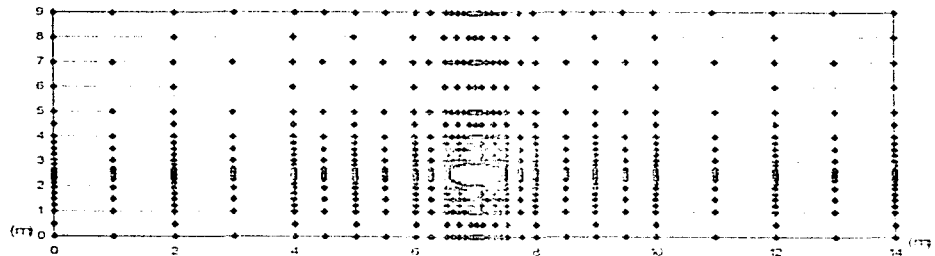
Detalle de malla deformada excavación rectangular de 0,20x0,10m. (cierre total)



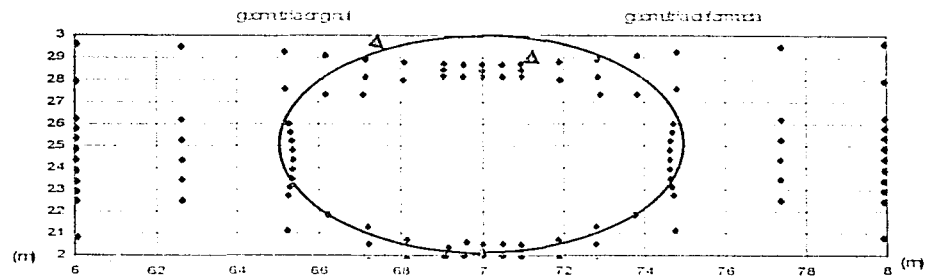
Malla deformada de una excavación rectangular de 1,20m de ancho y 0,10m de alto.



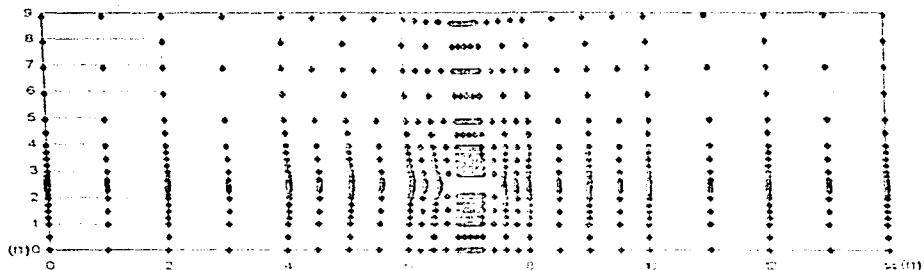
Detalle de malla deformada excavación rectangular de 1.20x0.10m. (tierra total)



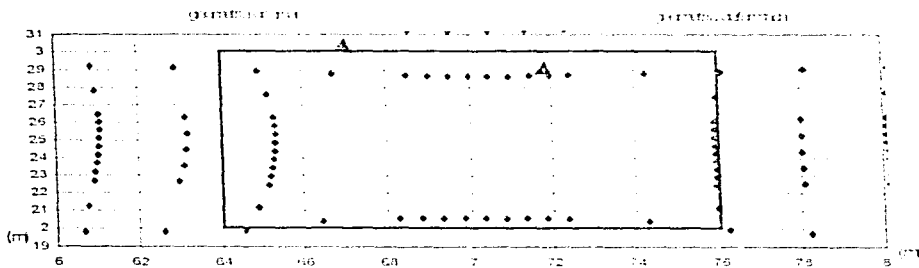
Malla deformada de una excavación circular de 1.0m de diámetro.



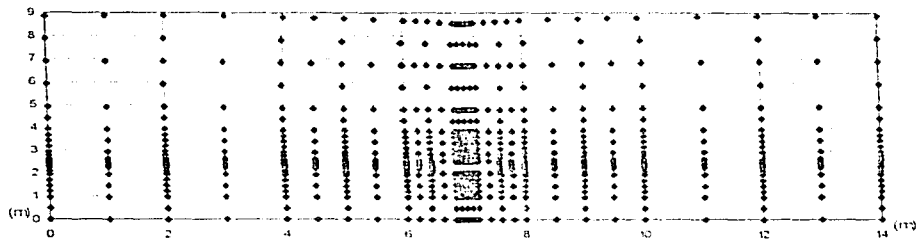
Detalle de malla deformada excavación circular 1.0m de diámetro. (cierra parcial)



Malla deformada de una excavación rectangular de 1.20m de ancho y 1.0m de alto

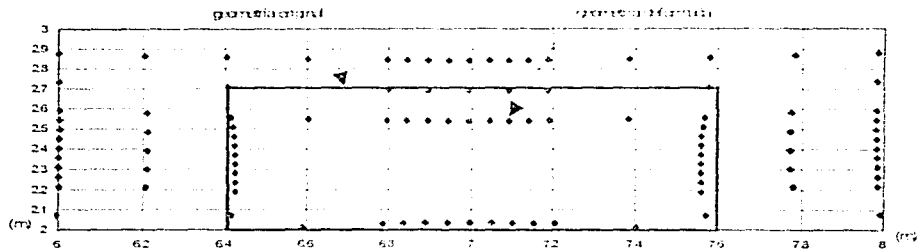


Detalle de malla deformada excavación rectangular de 1.20x1.0m. (tierra pareta)



Malla deformada de una excavación rectangular de 1.20 de ancho y 0.70m de alto.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA



Detalle de malla deformada excavación rectangular de 1.20x0.70m. (cierre parcial)

CAPITULO 5

CONCLUSIONES.

- 1) Se introdujo la formulación general para grandes desplazamientos dentro de un programa de elementos finitos de tal manera que es posible simular el cierre de una oquedad durante el procedimiento de subexcavación.
- 2) Los valores numéricos obtenidos de esfuerzos mínimos que garantizan el cierre de la oquedad concuerdan razonablemente con los valores analíticos.
- 3) Los asentamientos obtenidos por el método de los elementos finitos para el cierre completo de una oquedad resultan ser superiores a los valores analíticos, debido fundamentalmente a la influencia de las fronteras rígidas.
- 4) Las dimensiones de la oquedad influyen de manera importante en la carga mínima que garantiza el cierre total. Por otro lado, al menos para las profundidades consideradas, a igual volumen de excavación la geometría de la oquedad influye de manera moderada en la carga mínima que garantice su cierre. Por otro lado, los asentamientos producidos en la superficie reflejan en cierta medida la geometría de la oquedad. Estos fenómenos se acrecientan a medida que la profundidad de la perforación decrece.

5) Con el mismo procedimiento se puede determinar el perfil de asentamientos que producen una serie de oquedades de diversos tamaños y geometrías. También se puede introducir un elemento rígido sobre la superficie del terreno con objeto de simular de una manera más realista el comportamiento de una estructura y poder diseñar el procedimiento de subexcavación más efectivo para su nivelación incluyendo, geometría, profundidad y número de perforaciones.

REFERENCIAS

- Alberro, J. y Hernández, R. (1988)**, "Desplazamientos y esfuerzos en un medio semi-infinito elastoplástico al excavar un túnel circular". Instituto de Ingeniería, UNAM, serie azul pub. No. 516.
- Borja, R. I. , Lee, S. R. y Seed, R. B. (1989)**, "Numerical simulation of excavation in elasto-plastic soils", Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., vol. 13, No.3, 231-249.
- Borja, R. I. y Lee, S. R. (1990)**, "Cam-clay plasticity, part I: implicit integration of elasto-plastic relations", Comp. Methods. Appl. Mech. Eng., Vol.78, 49-72.
- Carter, J. P. , Booker, J. R. y Davis, E. H. (1977)** "Finite deformation of elasto-plastic soil", Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 1 25-43.
- Chen, W. F. y Baladi, G. Y. (1985)**, "Soil Plasticity, Theory and Implementation", Elsevier, Amsterdam.

- Clough, R. W. y Woodward, R. J., III (1967)**, "Analysis of embankment stresses and deformations", *J. of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, Vol.93 No SM4, 529-549.
- Desai, C. S. y Sargand, S. (1984)**, "Híbrido FE procedure for soil-structure interaction", *J. of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol 110 No.4, 473-486
- Ghaboussi, J., Hansmire, W. H., Parker, H. W. y Kim, K. J. (1963)**, "finite element simulation of tunneling over subways", *J. of Geotechnical Engineering, ASCE*, VOL.109, No. 3, 318-324
- Ghaboussi, J. y Pecknold, D. A. (1984)**, "Incremental finite element analysis of geometrically altered structures", *Int J Numer. Methods Eng.*, Vol 20 2051-2064
- Juárez Badillo, E. y Rico Rodríguez, "Mecánica de Suelos"**, Tomo I y II, Ed. Limusa
- Li, X. y Romo, M. P. (1992)**, "TEST92 un programa de elementos finitos para simular procesos constructivos en suelos elasto-plásticos". Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Mana, A. (1978)**, "Finite-elemente analysis of deep excavation behavior in soft clay", Tesis doctoral, Universidad de Stanford.
- Tamez, E., Santoyo, y Cuevas, A. (1992)**, "La catedral y el sagrario de la ciudad de México, corrección del comportamiento de sus cimentaciones". Volumen Raul J. Marsal, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, pp 62-130
- Tamez, E., Santoyo, E., et al. (1995)** "Catedral Metropolitana: Corrección Geométrica, informe técnico", ed Espejo de Obsidiana. México.
- Terracina, F. (1962)** "Foundations of the tower of Pisa". *Geotechnique*. Vol 12, No. 3
- Timoshenko, S. y Goodier, J. N., (1951)**, "Theory of Elasticity", 2da Ed. Mc Graw Hill.
- Wood D. M. (1990)**, "Soil Behavior and Critical State Soil Mechanics", Cambridge University Press, Cambridge.
- Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S. y King, I. P. (1969)**, "Elasto Plastic of Engineering Problems". *Initial Stress, Finite Element Approach, Numer Methods Engineering 1.*
- Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. (1994)**, "El Método de Los Elementos Finitos", volumen I y II, Ed Mc Graw Hill.

Clough, R. W. y Woodward, R. J., III (1967), "Analysis of embankment stresses and deformations", J. of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol.93 No SM4, 529-549.

Desai, C. S. y Sargand, S. (1984), "Híbrido FE procedure for soil-structure interaction", J. of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol 110 No.4, 473-486.

Ghaboussi, J., Hansmire, W. H., Parker, H. W. y Kim, K. J. (1963), "finite element simulation of tunneling over subways", J. of Geotechnical Engineering, ASCE, VOL.109, No. 3, 318-324.

Ghaboussi, J. y Pecknold, D. A. (1984), "Incremental finite element analysis of geometrically altered structures", int. J. Numer. Methods Eng., Vol 20 2051-2064

Juárez Badillo, E. y Rico Rodríguez, "Mecánica de Suelos", Tomo I y II, Ed. Limusa.

Li, X. y Romo, M. P. (1992), "TEST92 un programa de elementos finitos para simular procesos constructivos en suelos elasto-plásticos". Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM

Mana, A. (1978), "Finite-elemente analysis of deep excavation behavior in soft clay", Tesis doctoral, Universidad de Stanford.

Tamez, E., Santoyo, y Cuevas, A. (1992), "La catedral y el sagrario de la ciudad de México, corrección del comportamiento de sus cimentaciones". Volumen Raul J. Marsal, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, México, pp 62-130

Tamez, E., Santoyo, E., et al. (1995) "Catedral Metropolitana: Corrección Geométrica, informe técnico", ed. Espejo de Obsidiana, México.

Terracina, F. (1962) "Foundations of the tower of Pisa". Geotechnique. Vol 12, No. 3.

Timoshenko, S. y Goodier, J. N., (1951), "Theory of Elasticity", 2da Ed. Mc Graw Hill.

Wood D. M. (1990), "Soil Behavior and Critical State Soil Mechanics", Cambridge University Press, Cambridge.

Zienkiewics, O. C., Valliappan, S. y King, I. P. (1969), "Elasto Plastic of Engineering Problems". Initial Stress, Finite Element Approach, Numer Methods Engineering 1.

Zienkiewics, O. C. y Taylor, R. L. (1994), "El Método de Los Elementos Finitos", volumen I y II, Ed Mc Graw Hill.