56
24.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN

AJUSTE DE UN MODELO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A:

CELESTE VALDEZ MUCIÑO

A S E S O R:

ACT. MARIA DEL CARMEN GONZALEZ VIDEGARAY

MEXICO, D. F. 1997

A Dios :

Por todo lo que me ha dado en la vida y por permitirme llegar hasta este momento tan importante en mi vida profesional.

A mis Padres :

A mi Madre por ser una persona cariñosa y comprensiva conmigo.

A mi Padre por que hasta el final me siguió amando y teniendo la fe puesta en mi.

Ellos me han dado toda su vida, su esfuerzo, amor y ejemplo. Gracias, son lo más grande que tengo en la vida.

A mis Hermanas :

Por su comprensión, cariño y la fe que han depositado en mi.

A mi Esposo :

Por su ayuda, consejos y sobre todo por que siempre está conmigo. Gracias mi amor.

A mis Familiares y Amigos :

Con quienes siempre sabré contar y por los momentos tan felices que hemos pasado juntos.

Al Instituto Mexicano del Petróleo :

Por brindarme la oportunidad de obtener mi primer experiencia profesional.

A mis compañeros de trabajo :

Por su compañerismo y brindarme su amistad desinteresadamente.

Al Lic. Genaro Guzmán Rodríguez :

Por que además de ser un buen jefe, es un buen amigo y compañero.

Al Ing. Zenón Pérez Matus :

Por su apoyo en mi trayectoria de trabajo.

A mi Escuela y Profesores :

Por la educación que me fue impartida a lo largo de mi carrera.

Especialmente a mi Asesora Act. María. del Carmen González Videgaray :

Por sus enseñanzas, atención y guía durante mi carrera y sobre todo por su colaboración en el desarrollo de mi tesis. Gracias Maestra.

"El objetivo principal de toda investigación sobre el mundo externo debería ser el descubrimiento del orden racional y la armonía que le han sido impuestos por Dios y que Él nos reveló en el lenguaje de las matemáticas."

J. Kepler.

AJUSTE DE UN MODELO

DE

ALISAMIENTO EXPONENCIAL

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Evidentemente el pronosticar es de gran importancia en las organizaciones, es por eso que las predicciones a futuro pueden ser incorporadas en los procesos de decisión ya que estos pueden llegar a tener gran importancia en cuanto a sus consecuencias. Algunas de estas consecuencias pueden ser catastróficas y deben preveerse a través de un pronóstico que sea suficientemente parecido al fenómeno real y que permita una visión confiable del proceso. Con este propósito es importante disponer de un buen método de pronóstico, es por eso que se desarrolló el presente trabajo que tiene por objetivo proponer el empleo del método de Alisamiento Exponencial a series de tiempo, el cual emplea estadísticas básicas para evaluar el pronóstico propuesto. Con el apoyo de herramientas de cómputo se logrará identificar la presencia de tendencia y/o ciclos estacionales, así como medir los efectos de los valores que se asignan a las constantes de alisamiento exponencial.

Es este trabajo se propone el uso del método de Alisamiento Exponencial como método de pronóstico práctico a través del cual se puede obtener un modelo matemático que represente el fenómeno real lo más cercano posible y así disponer de un pronóstico aceptable. Actualmente se cuentan con varios métodos de pronóstico con diferentes grados de complejidad y otros que quizás no tan complejos con los que se pueden obtener buenos resultados.

El método de Alisamiento Exponencial presenta simplicidad en los cálculos ya que para un número grande de diferentes series de tiempo para los cuales los pronósticos son continuamente calculados, lo más importante es que cada cálculo sea simple y rápido.

Por otra parte con la ayuda de las técnicas de programación, se desarrolló un programa que se denominó MA-EXPO para realizar el proceso de construcción del modelo provisto de una gráfica para comparar los datos históricos y el resultado generado por el pronóstico propuesto.

Los criterios y conceptos importantes son ampliamente definidos en el Capítulo 1. En el Capítulo 2 estudiaremos las técnicas de Alisamiento Exponencial Simple, Doble y Triple, cada una de esas técnicas se aplica en series de tiempo con características específicas, esto es : la técnica de Alisamiento Simple considera series de tiempo sin tendencia o estacionalidad, la técnica de Alisamiento Doble se aplica en series de tiempo que presentan tendencia lineal creciente o decreciente y la última técnica trabaja muy bien para series de tiempo que presentan una tendencia cuadrática. En base a esto es posible combinar tales técnicas para obtener un modelo adecuado que considere las caracteristicas o componentes que una serie de tiempo puede presentar y así generar un pronóstico más realista, estos aspectos se plasmaron en el Capitulo 3, en el cual se presenta el método que simplemente se denominará Alisamiento Exponencial. Este método considera el Método de Alisamiento Simple, el cual va a ser ampliado con el incremento de los componentes de tendencia y estacionalidad, además emplea medidas estadísticas las cuales son de utilidad para evaluar si se obtuvo un buen pronóstico.

En el Capítulo 4 se realizó una aplicación en base a un fenómeno real como es la serie de tiempo referente al Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico, tal información fue proporcionada por PEMEX en la Gerencia de Información y Evaluación. En base a los conceptos definidos en el Capítulo 1 se describen las características de esta serie de tiempo. La finalidad de esta aplicación no es la de obtener un pronóstico adecuado al fenómeno, sino que sólo se muestra la utilidad del método de pronóstico así como también una breve descripción del uso del programa.

CAPITULO 1

1. ANTECEDENTES

1. ANTECEDENTES.

1.1 PRONÓSTICOS.

La mayoría de las decisiones que se realizan día con día tanto personales como a nivel organizacional, se basan en pronósticos. Estos pueden ser muy simples como el decidir que vestimenta utilizar después de escuchar el pronóstico del tiempo una noche anterior o de gran importancia como el pronosticar entre otros la calidad del aire, la calidad del agua, el grado de desempleo, el grado de inflación para que de esta forma un gobierno formule sus políticas.

Los pronósticos pueden ser intuitivos o subjetivos. Normalmente la mayoría requiere de una respuesta a corto plazo y puede ser desfavorable utilizar técnicas sofisticadas y costosas para obtener un pronóstico.

Puede ser que se tenga confianza o que sea bastante satisfactorio un pronóstico intuitivo, sobre todo cuando la información cualitativa es suficiente. Los factores que se toman en cuenta en la forma de este pronóstico pueden ser muchos o pocos, pero el carácter escencial es que no es reproducible, es decir, es único para el pronosticador. Podemos tener algunas ideas cualitativas de como es formado el pronóstico por el pronosticador. La veracidad del pronóstico puede ser evaluado desde un registro de pronósticos acumulados a través del tiempo.

Si se dispone del tiempo y las fuentes de información, se pueden emplear métodos estadísticos y matemáticos para la generación de pronósticos. Es conveniente contar con tales métodos cuando se trata de decisiones a nivel organizacional y sobre todo en el caso de que pueden implicar perdidas debido a errores.

1.2.- SERIES DE TIEMPO.

Al generar pronósticos a futuro de ciertos eventos, se debe contar con información concerniente a eventos que han ocurrido en el pasado. Esto es, se deben analizar los datos históricos y los resultados del pronóstico deben basarse en este análisis.

La obtención de un pronóstico sigue un proceso, primero se analizan los datos para identificar el patrón que los describe, entonces este mismo patrón es evaluado para preparar el pronóstico. Esta estrategia básica es empleada por la mayoría de las técnicas de pronóstico y resta suponer que este patrón será continuo en el futuro.

Debe notarse que una técnica de pronóstico no puede generar una buena predicción a menos que la suposición descrita anteriormente sea válida. Es por esto que ante los posibles cambios en los datos, se emplean ciertas medidas en el sistema de pronóstico. Este punto se verá con más detalle en *"Existencia de los errores en los pronósticos"*.

Una Serie de Tiempo es un conjunto de observaciones que tienen una secuencia cronológica.

Por ejemplo, en la tabla 1.1, tenemos una serie de tiempo la cual se refiere al Indice Nacional de Precios al Consumidor correspondientes a los años de1993 a Julio de 1995. Observe que cada uno de los datos tienen el mismo intervalo de tiempo, es decir mensual. Las series de tiempo pueden ser observaciones anuales, trimestrales, mensuales etc. Se listan a continuación algunos ejemplos de series de tiempo.

- Ventas de un producto.
- El total de ventas de una compañía.
- El número de empleados y desempleados.
- Producción de un producto.
- La calidad del aire ó del agua.
- Cambios en la población.
- La temperatura media diaria.

MESES	1993	1994	1995
Enero	90.42	97.20	107.14
Febrero	91.16	97.70	111.68
Marzo	91.69	98.20	118.27
Abril	92.22	98.69	127.69
Mayo	92.75	99.16	133.029
Junio	93.27	99.66	137.251
Julio	93.72	100.10	140.049
Agosto	94.22	100.57	
Septiembre	94.92	101.28	
Octubre	95.30	101.81	
Noviembre	95.73	102.36	
Diciembre	96.45	103.26	

Tabla 1.1 Serie de Tiempo. Valores mensuales del IPC.
Fuente : Carpeta Electrónica del Banco de México.

La serie de tiempo es examinada desde su gráfica, a través de la cual se pueden identificar varios componentes:

Los componentes de una serie de tiempo son:

1.- Tendencia.
2.- Fluctuaciones Cíclicas.
3.- Fluctuaciones Estacionales.
4.- Fluctuaciones Irregulares.

La *tendencia* se refiere al movimiento ascendente o descendente que caracteriza a una serie de tiempo a través de cada periodo de tiempo.

Estos movimientos pueden ser consecuencia de varios factores. Por ejemplo, los movimientos ascendentes observados en las ventas de una industria en particular, pueden ser determinados por uno, varios o todos los factores que a continuación se listan:

1. Cambios tecnológicos en la industria.
2. Cambios en las preferencias de los consumidores.
3. Incremento de los ingresos.
4. Incremento de la población.
5. Crecimiento del mercado.
6. Inflación o deflación (cambios en los precios.)

Las *fluctuaciones cíclicas o de la situación económica* que aproximadamente corresponden a los ciclos económicos generales. Conociendo la historia del devenir económico de un país dado, podemos con facilidad encontrar los periodos de crisis y de prosperidad por medio del diagrama de una serie de tiempo.

Las fluctuaciones cíclicas no son necesariamente una causa de factores económicos. Por ejemplo, las fluctuaciones cíclicas en la producción agrícola pueden reflejar que existen cambios en las condiciones atmosféricas; en las ventas de cierto artículo de ropa pueden presentar fluctuaciones cíclicas debido a que existen cambios en los estilos de ropa establecido por algunos diseñadores. Dado que no hay una explicación particular del porqué se presentan las fluctuaciones cíclicas, estas varían grandemente en longitud y magnitud.

Fluctuaciones estacionales, recurrentes periódicamente en ciertas épocas de cada año o mes. Tales cambios aparecen con claridad en los diagramas de muchas series de tiempo que contienen datos correspondientes a periodos mensuales o aún más cortos. Encontramos fluctuaciones de este tipo, por ejemplo, en una serie que represente el transporte ferroviario de grano, el cual se incrementa en otoño y decae en primavera. También aparecen fluctuaciones estacionales en series que representan el consumo de electricidad, la revolvencia del efectivo en los bancos, etc.

Fluctuaciones irregulares que son difíciles de analizar y de abarcar en un esquema específico, ya que tienen la forma de zig-zags irregulares en el diagrama de una serie de tiempo.

Algunos econometristas distinguen dos tipos de fluctuaciones irregulares a) fluctuaciones causadas por factores exógenos tales como la guerras, los desastres naturales, las epidemias, etc., y b) fluctuaciones aleatorias que son el resultado de un gran número de causas accidentales.

Al primer tipo de fluctuaciones irregulares se les llama también fluctuaciones catastróficas. Estas aparecen esporádicamente y por lo general producen una desviación mucho mayor que las fluctuaciones aleatorias. Estas últimas, por lo común están ligadas con fenómenos de masa y son de un carácter similar a los errores aleatorios de cuyas peculiaridades se ocupa la teoría de las probabilidades.

Estos componentes de las series de tiempo son ilustradas en la figura 1.1. En la figura 1.1a se muestra una gráfica de las ventas las cuales presentan principalmente una línea con tendencia. En la 1.1b se observa una serie de tiempo de ventas que presenta un diagrama estacional que se repite anualmente. En la figura 1.1c se trata de una serie de tiempo referente a la producción agrícola, en la cual se observa un efecto cíclico de intervalos de 10 años.

Hay que puntualizar que estos componentes de las series de tiempo, no siempre ocurren por separado, es decir, que puede existir alguna combinación de estas o en todo caso que se presenten todas en una misma serie. Por esta razón no existe una técnica de pronóstico que sea la mejor. Una técnica de pronóstico que sea empleada para pronosticar series de tiempo que presenten solamente tendencia, no va a ser apropiada para aquellas que muestren fluctuación estacional y tendencia. De este modo, tenemos que uno de los problemas más importantes a resolver es el de disponer de una técnica de pronóstico que pueda contemplar estos componentes. Una vez que se selecciona la técnica de pronóstico apropiada, la metodología generalmente involucra al análisis de los datos de tal forma que los diferentes componentes que se presentaron pueden ser estimados.

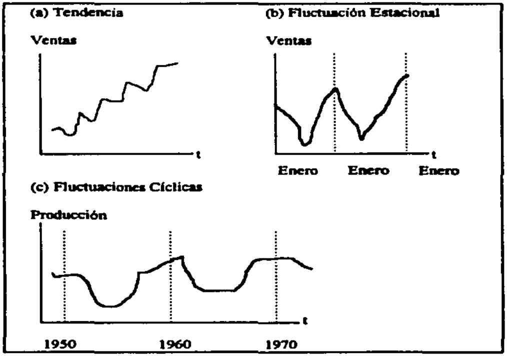


Figura 1.1 Componentes de la serie de tiempo.

Las diferentes estimaciones obtenidas son entonces combinadas para generar un pronóstico. Por ejemplo, si una serie de tiempo presenta tendencia y estacionalidad, la técnica de pronóstico estimaría primero estos dos componentes y obtener el pronóstico. Hay que enfatizar que la clave de esta metodología es encontrar una técnica que se iguale con el diagrama de los datos.

1.3.- EXISTENCIA DE LOS ERRORES EN LOS PRONÓSTICOS.

Desafortunadamente, en los pronósticos está involucrada la incertidumbre en cualquier magnitud, esto es, que existe la presencia del componente irregular, el cual representa fluctuaciones inexplicables o impredecibles en los datos o lo que es lo mismo son errores que se esperan en el pronóstico.

Si el efecto del componente irregular es substancial, nuestra habilidad para pronosticar con exactitud será limitada. Sin embargo si este componente es pequeño, la determinación de los diagramas de tendencia, estacionalidad o fluctuaciones cíclicas nos permitiría pronosticar con mayor exactitud.

El componente irregular no es la única fuente de errores en el pronóstico. La exactitud con que podemos predecir cada uno de los componentes de una serie de tiempo, también influye en la magnitud del error del pronóstico.

Puesto que estos componentes no pueden ser perfectamente predecibles en una situación práctica, los errores en el pronóstico representan los efectos combinados del componente irregular y la exactitud con que la técnica de pronóstico pueda predecir los diagramas de tendencia, estacionalidad y fluctuaciones cíclicas.

Los errores de gran magnitud pueden indicar que el componente irregular es tan grande que la técnica de pronóstico no producirá pronósticos exactos o que es inapropiada.

1.3.1.- TIPOS DE PRONÓSTICOS.

El hecho de que las técnicas de pronóstico frecuentemente generan predicciones que son un poco erróneas, tienen una presión en el tipo de pronósticos que requerimos. Se consideran dos tipo de pronósticos: *1) Pronóstico Puntual, 2) Pronóstico dentro de un intervalo de confianza.*

El pronóstico puntual es un número que representa la mejor predicción del valor de la variable de interés dado en el tiempo. Es esencial que la mejor suposición para un valor futuro de la variable va a ser el pronóstico. Por ejemplo, en una compañía se produce cierto producto con un pronóstico de ventas de 40,000 unidades para el siguiente mes. Este pronóstico el cual es sólo un número o "punto", es el pronóstico puntual. Sin embargo, un pronóstico puntual como único pronóstico no es adecuado.

La compañía requiere de alguna estimación para saber qué tan equivocado puede estar este pronóstico, tal estimación es provista por un pronóstico dentro de un intervalo de confianza. Un intervalo de confianza es un rango de valores que es calculado y que tienen un 95% de seguridad, tal que el valor de la variable que va a ser nuestro pronóstico, se encuentra dentro del rango, a este intervalo le llamaremos "intervalo de confianza al 95%" y podemos decir que el nivel de confianza es el 95%. Así para el ejemplo anterior decimos que las ventas de la compañía para el siguiente mes son calculadas con un intervalo de confianza del 95% en donde no serán menores de 38,000 unidades ni mayores de 42,000 unidades.

Los pronósticos dentro de un intervalo de confianza son frecuentemente útiles para aquellos planes con varios puntos de vista. Por ejemplo, la misma compañía puede interpretar este resultado de varias formas: - Que las ventas no serán mayores de 42,000 unidades y así determinar que el nivel del inventario para el siguiente mes. - Las ventas no serán menores de 38,000 unidades y especificar la cantidad monetaria que va a disponer para el siguiente mes. Esta información indicará si la compañía está preparada para solicitar algún préstamo al siguiente mes.

Supongamos que esta empresa también desea tomar una decisión sobre lo que asignará en capacidad más productiva en el siguiente año y también suponemos que un intervalo de confianza del 95% para las ventas mensuales de un año es [68,000 unidades, 72,000 unidades].

Entonces si la capacidad productiva en el mes actual es mayor de 72,000 unidades (mayor al límite superior del intervalo de confianza), la compañía puede estar segura de no necesitar capacidad adicional. Si en el mes actual la capacidad productiva es menor de 68,000 unidades (menor al límite inferior del intervalo), la empresa puede estar segura de que será necesaria una capacidad adicional para cumplir con las demandas a futuro del producto. En tales situaciones el pronóstico dentro de un intervalo de confianza puede proporcionar una ayuda valuable para las decisiones en los procesos del mercado.

1.3.2.- MEDIDAS A CONSIDERAR

Denotemos que el valor actual de la variable de interés en el periodo t es y_t. Entonces si denotamos que el valor del pronóstico de y_t es $\hat{y}_t$, al substraer el valor y_t del valor $\hat{y}_t$ obtenemos el error de pronóstico e_t. Esto es:

El error del pronóstico $\hat{y}_t$ es

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Un examen de los errores de pronóstico a través del tiempo a menudo indica que si la técnica de pronóstico empleada se iguala al diagrama de la serie de tiempo. Por ejemplo, si a través de una técnica obtenemos un pronóstico para los componentes de tendencia, estacionalidad o fluctuaciones cíclicas que están presentes en una serie de tiempo, los errores de pronóstico reflejarían sólo el componente irregular de la serie. En tal caso, los errores aparecerán puramente aleatorios. La figura 1.2a ilustra los errores que indican que la técnica de pronóstico es utilizado apropiadamente para el pronóstico de los componentes de la serie. Algunas veces cuando la técnica no se iguala al diagrama de los datos, los errores muestran así mismos un patrón a través del tiempo. En la figura 1.2b los errores presentan una tendencia ascendente, la cual indica que la metodología no considera la tendencia ascendente en la serie de tiempo. Los errores de pronóstico en la figura 1.2c indican que un patrón estacional en los datos no es considerada por la metodología utilizada. En la figura 1.2d, los errores indican que la técnica no está evaluando el patrón cíclico presentado en los datos. Los patrones de los errores de pronóstico ilustrados en las figuras 1.2b, c y d indican que la técnica de pronóstico empleada no es la adecuada, esto es, que no se iguala al patrón que caracteriza a la serie de tiempo.

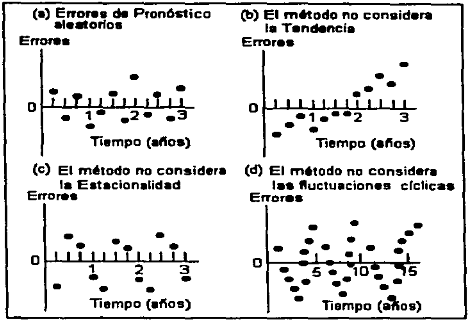


Figura 1.2 Gráficas de los errores de los pronósticos.

Si los errores observados a través del tiempo indican que la técnica es apropiada (los errores tienen una distribución aleatoria), es importante medir su magnitud, por lo que se determina si es posible obtener un pronóstico exacto. En base a esto consideremos la suma de los errores, esto es:

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)$$

aquí tenemos la suma de las diferencias entre el valor del pronóstico ($\hat{y}_t$) y el valor actual (y_t) del periodo t = 1 hasta t = n, donde n es el número total de observaciones. Sin embargo, esta cantidad no es útil porque si los errores presentan un patrón aleatorio, algunos errores serán positivos mientras que otros serán negativos y la suma de los errores estará cercano a cero y neutrales del tamaño de los errores. Esto es, no importa que tan grandes o pequeños sean los errores positivos y negativos porque se cancelarán el uno al otro.

Una forma de remediar este problema es considerar los valores absolutos de los errores. Estos valores son llamados desviaciones absolutas.

$$\text{Desviación Absoluta} = |e_t| = \left|y_t - \hat{y}_t\right|$$

Dadas las desviaciones absolutas, podemos definir a la desviación de la media absoluta (DMA). Esta medida es el promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada observación y el pronóstico. Esto es:

$$\text{Desviación Media Absoluta (DMA)} = \frac{\sum_{t=1}^{n}|e_t|}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left|y_t - \hat{y}_t\right|}{n}$$

Un ejemplo de los cálculos de DMA se presentan en la tabla 1.2. Este valor puede ser utilizado para determinar la magnitud de los errores generados por la metodología del pronóstico empleada.

Otra forma de prevenir que los errores positivos y negativos se cancelen unos a otros, es calcular el error cuadrático de los errores. Esto es,

$$\text{Error Cuadrático} = (e_t^2) = (y_t - \hat{y}_t)^2$$

Valor Actual y_t	Valor del pronóstico $\hat{y}_t$	Error $e_t = y_t - \hat{y}_t$	Desviación Absoluta $\lvert e_t\rvert = \lvert y_t - \hat{y}_t\rvert$
25	22	3	3
28	30	-2	2
30	29	1	1
			$\sum_{t=1}^{3}\lvert e_t\rvert = 6$

$$\text{DMA} = \frac{\sum_{t=1}^{3}|e_t|}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Tabla 1.2 Cálculo de la desviación media absoluta.

Dados los errores cuadráticos se define lo que se conoce como Error Cuadrático Medio (ECM). Esta medida es simplemente el promedio de los errores cuadráticos de todos los pronósticos. Esto es:

$$\text{Error Cuadrático Medio (ECM)} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(e_t)^2}{n} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n}$$

En la tabla 1.3 se muestra un ejemplo de los cálculos de ECM. Esta medida también puede determinar la magnitud de los errores de los pronósticos.

Valor Actual	Valor del pronóstico	Error	Error cuadrático
y_t	$\hat{y}_t$	$e_t = y_t - \hat{y}_t$	$(e_t)^2 = (y_t - \hat{y}_t)^2$
25	22	3	9
28	30	-2	4
30	29	1	1
			$\sum_{t=1}^{3}(e_t)^2 = 14$

$$\text{ECM} = \frac{\sum_{t=1}^{3}|e_t|^2}{3} = \frac{14}{3} = 4.67$$

Tabla 1.3 Cálculo del Error Cuadrático Medio.

La diferencia básica entre estas medidas es que el ECM a diferencia de DMA, penaliza más a la técnica de pronóstico por errores grandes que por los que son menores.

Por ejemplo, con un error de 2 se tiene un error cuadrático de 4 mientras que con un error de 4 (un error dos veces más grande) se tiene un error de 16 (un error cuadrático 4 veces más grande). Por esto cuando se emplea el ECM se debería preferir por los errores pequeños a los grandes. Esto se muestra en la tabla 1.4 donde se consideran dos conjuntos diferentes de pronósticos generados por los métodos A y B. El método A generó predicciones con los que se obtuvieron errores moderados, mientras que con el método B se tienen dos errores pequeños y uno grande. Note que el método A tiene un DMA grande, mientras que en el B tenemos un ECM grande. Esto es porque en el cálculo del ECM el método B penaliza fuertemente para los errores grandes en el pronóstico para el valor actual de 67.

Estas medidas pueden ser empleadas de dos formas diferentes. Primero como una ayuda en el proceso para seleccionar una técnica de pronóstico. Supongamos que seleccionamos de entre varias técnicas para determinar cual de ellas generará pronósticos más exactos para valores futuros de las variables de interés. Una estrategia común empleada para realizar tal selección involucra la simulación de los datos históricos. En el proceso de simulación se pretende que no sabemos cuáles son los valores de los datos históricos. Entonces utilizamos cada una de las técnicas para generar las "predicciones", las comparamos con los valores actuales de nuestros datos históricos simulados y medimos su exactitud con el cálculo de DMA o ECM. De esta forma se analizará cuál de estas técnicas generan los pronósticos simulados más exactos.

	Valor Actual y_t	**Valor del pronóstico $\hat{y}_t$**	**Error**	**Desviación Media Absoluta**	**Error Cuadrático**
Pronósticos del Método A	60	57	+3	3	9
	64	61	+3	3	9
	67	70	-3	3	9
				9	27

$$DMA = \frac{9}{3} = 3$$

$$ECM = \frac{27}{3} = 9$$

Pronósticos del Método B	60	59	+1	1	1
	64	65	-1	1	1
	67	73	-6	6	36
				8	38

$$DMA = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$ECM = \frac{38}{3} = 12.67$$

Tabla 1.4 Comparación de los errores generados por dos métodos de pronósticos diferentes.

Segundo, la medida DMA o ECM es incorporada para controlar un sistema de pronóstico para detectar cuando algo "va mal" en el sistema. Por ejemplo, en la sección 1.1 se describió que no se puede esperar que los pronósticos generados por las técnicas de pronóstico, sean exactos a menos que el patrón de los datos históricos tengan el mismo comportamiento a través de los periodos. Consideremos un patrón de los datos que ha sido persistente durante un periodo extenso en el tiempo y tiene un cambio repentino y que el método de pronóstico empleado no es adecuado ante este cambio. Ante esta situación nos gustaría descubrir el cambio en el patrón tan rápido sea posible antes de generar un pronóstico inexacto por nuestro sistema de pronóstico. Esto puede realizarse incorporando las medidas de DMA y ECM para controlar los errores y "señalarlos" cuando estos errores lleguen a ser más grandes.

1.4.- MÉTODOS DE PRONÓSTICO.

En la sección 1.1 se puntualizó que no existe una técnica de pronóstico universal o particular. De hecho existen varios métodos de pronóstico que pueden ser empleados para predecir eventos futuros. Estos métodos pueden dividirse en dos tipos básicos *Métodos Cualitativos y Métodos Cuantitativos.*

1.4.1.- MÉTODOS CUALITATIVOS.

Estos generalmente se apoyan en las opiniones de los expertos, para que subjetivamente pronostiquen eventos futuros. A menudo se requieren tales métodos cuando los datos históricos no están disponibles o son escasos.

Por ejemplo, consideremos que un nuevo producto es introducido en el mercado. En este caso no se disponen de los datos históricos de las ventas de este producto. Para pronosticar las ventas, la compañía debe considerar una opinión experta de sus miembros y equipos de investigación del mercado.

Las técnicas de pronóstico cualitativas también se utilizan para predecir los cambios en el patrón de los datos históricos. Desde que el uso de los datos históricos para predecir eventos futuros se basa en la suposición de que el patrón de los datos persiste, los cambios en el patrón no podrán ser pronosticados en base a los datos históricos. Así los métodos cualitativos frecuentemente se emplean para predecir tales cambios.

Brevemente se describe el uso de las técnicas de pronóstico cualitativas. La primera de estas técnicas es el ajuste a una curva. Consideremos una empresa que introduce un nuevo producto y desea pronosticar sus ventas para los próximos años, por lo que se va a determinar la capacidad productiva necesaria para producir este producto. Para predecir estas ventas es conveniente considerar el llamado "ciclo de vida de un producto". Este ciclo de vida consiste de varios estados, durante el primer estado (crecimiento) las ventas del producto comienzan crecer lentamente, después el crecimiento es rápido y continúan así a un ritmo lento.

En el siguiente estado (madurez), las ventas se estabilizan con un crecimiento lento, alargando una meseta y entonces decrecen lentamente. En el último estado (declinación) las ventas del producto declinan a un grado de crecimiento. Este ciclo de vida es ilustrado en la figura 1.3. En los pronósticos de las ventas del producto durante el estado de crecimiento, la compañía puede apoyarse en la opinión de expertos en ventas y personal del mercado para que subjetivamente se construya una curva-S que se muestra en la figura 1.4. Esta puede ser empleada para pronosticar las ventas durante este estado. En la construcción de la curva-S, la compañía debe considerar la experiencia que se ha tenido con otros productos y todos sus conocimientos con respecto a su nuevo producto y así predecir o pronosticar cuanto tiempo tomará para que comience un rápido crecimiento de las ventas, cuánto tiempo será continuo y cuando se estabilizan las ventas.

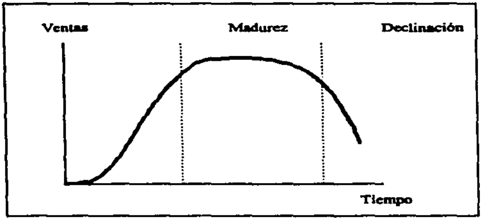


Figura 1.3 Ciclo de vida de un producto.

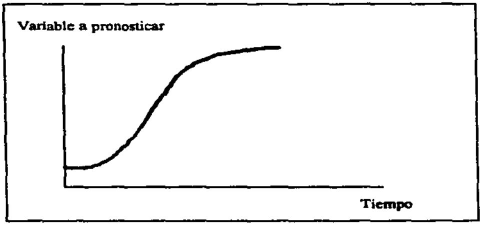


Figura 1.4 Curva-S

Observe que la construcción de esta curva es hecha subjetivamente ante la restricción de no tener disponible los datos de las ventas del nuevo producto y en otro caso que estos datos sean escasos. La estimación de esta curva es un ejemplo de un ajuste a una curva subjetiva.

Desde luego que uno de los mayores problemas es emplear esta técnica para predecir cual curva se debe utilizar. En el ciclo de vida de un producto, el uso de la curva-S puede ser apropiado, pero se pueden utilizar muchas otras. Por ejemplo, una curva exponencial (Figura 1.5) y una curva logarítmica. Primero se debe determinar la forma de la curva a emplear. La construcción subjetiva de tales curvas es muy difícil y requiere de una gran experiencia.

Otro método cualitativo es el denominado Método Delphi, esta técnica la cual fué desarrollada por RAND Corporation, cuenta con un grupo de expertos para realizar pronósticos acerca de un caso específico, tal como el nuevo desarrollo que se efectuará en un campo en particular. La utilidad del método Delphi radica en que el grupo de miembros están reconocidos como expertos en el campo de interés y también asume que el intercambio de sus conocimientos ayudará a obtener un buen pronóstico. Cuando este grupo de expertos es llamado para realizar las predicciones, parece ser apropiado un panel de discusión, tales discusiones son frecuentemente controladas por un individuo o por un grupo pequeño de individuos. Las decisiones efectuadas por este grupo, se verán influenciadas por varios aspectos sociales. Este método trata de evitar estos problemas manteniendo al grupo físicamente separados.

Esto es, que cada participante es llamado para responder una serie de cuestionarios y retornará al cuestionario completo del coordinador del grupo. Después de que el primer cuestionario está completo, subsecuentemente el resto de los cuestionarios son agrupados, así los participantes podrán revisar sus predicciones relativas a la respuesta del grupo. Después de varios conjuntos de cuestionarios, la respuesta del grupo converge sobre un consenso que será como un pronóstico. Sin embargo debe notarse que el método Delphi no requiere que un consenso sea investigado, en su lugar el método permite justificar las diferencias entre opiniones.

La tercer técnica de pronóstico cualitativa se refiere a las comparaciones tecnológicas independientes del tiempo. Este método es frecuentemente utilizado para predecir cambios tecnológicos. El método implica la predicción de cambios en un área con el del monitoreo de cambios que tienen lugar en otra área. Esto es, el pronosticador trata de determinar un patrón de cambios en un área que frecuentemente es llamada tendencia primaria, de los cuales se cree que habrá un nuevo desarrollo en alguna otra área. Un pronóstico de los desarrollos en una segunda área puede ser realizado con el monitoreo de desarrollos de la primer área. Por ejemplo, consideremos que se quiere pronosticar cuando un nuevo metal de aleación será comercializado. Supongamos que se determina que los avances de la metalurgia en la industria están relacionados con los avances metalúrgicos en los programas de vuelos espaciales, entonces en base a los avances realizados en el programa de vuelos espaciales, se puede predecir cuando estos tomarán lugar en la industria. Así el desarrollo tecnológico en cuanto al metal en el programa de vuelos espaciales nos permitirá predecir cuando este estará disponible para uso comercial. Este tipo de pronósticos platean dos problemas básicos. Primero se identifica una tendencia primaria que pronosticará los eventos en el área de interés. Segundo hacer uso de la habilidad para determinar la relación entre la tendencia primaria y los eventos a pronosticar. Los pronósticos en el área primaria de interés pueden ser formulados por el control de la tendencia primaria.

Las técnicas de pronóstico cualitativas antes mencionadas - *ajuste a una curva subjetiva, el método Delphi y las comparaciones tecnológicas independientes del tiempo* - representan sólo algunos de los métodos de pronósticos subjetivos disponibles. Existen otros métodos subjetivos para pronosticar eventos futuros, estos son el método "cross-impact", el método del árbol relacional y el método de investigación morfológica.

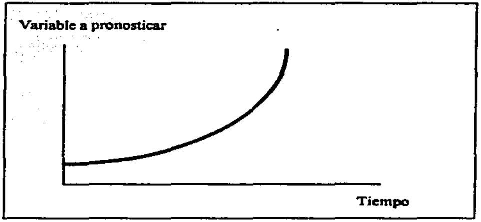


Figura 1.5 Curva Exponencial.

1.4.2.- MÉTODOS CUANTITATIVOS.

Estas técnicas implican el análisis de datos históricos para pronosticar los valores futuros de una variable de interés. Estos métodos son agrupados en dos tipos: *Series de Tiempo y Causales.*

El método más común es el denominado modelos de *series de tiempo*. En tales modelos se realiza un análisis para identificar el patrón de los datos históricos a pronosticar. Entonces asumimos que la forma de este patrón continuará a futuro, el patrón de los datos es analizado para generar un pronóstico. Note que los modelos de series de tiempo generan pronósticos que se basan en el patrón histórico de la variable a ser pronosticada, así cualquier decisión puede implementarse a futuro. Estos modelos son los más útiles cuando se supone que las condiciones de la serie de tiempo permanecen iguales y no cuando se presentan cambios súbitos. Por ejemplo, mientras que un modelo de series de tiempo puede pronosticar las ventas si la empresa continúa aplicando las mismas estrategias en el mercado, tal modelo no sería útil si surgen cambios en las ventas que pueden ser causa de un incremento en los precios, como puede ser un gasto mayor en publicidad o el anuncio de una nueva campaña.

Los modelos de pronósticos *causales* son los que identifican otras variables que están relacionadas con la variable a ser pronosticada.

Una vez que estas variables son identificadas es desarrollada una medida estadística que describe la relación entre estas variables y la variable a ser pronosticada. La relación estadística derivada es empleada para pronosticar la variable de interés.

Por ejemplo, las ventas de un producto pueden estar relacionadas con el precio del mismo, las gastos de publicidad, los precios de los competidores para el mismo tipo de producto etc. En tal caso las ventas serán nuestra variable dependiente y las otras nuestra variable independiente. El trabajo del pronosticador es estimar estadísticamente la relación funcional entre las ventas y las variables independientes. Habiendo determinado esta relación se emplearán los valores futuros pronosticados de la variable independiente (precio del producto, gastos en publicidad, precios de los competidores etc.) para pronosticar los valores de las ventas (variable dependiente).

En el mundo de los negocios, los modelos causales tienen ventajas porque permiten al "gerente" evaluar el impacto de varias políticas alternativas. Por ejemplo, el gerente desea predecir como varias estructuras de precios y niveles de gastos en publicidad afectarán las ventas. Un modelo causal puede ser empleado para relacionar estas variables, sin embargo los modelo causales tienen muchas desventajas. Primero, que son difíciles de desarrollar, también requieren de datos históricos de todas las variables incluidas en el modelo, no solamente de la variable a ser pronosticada. También para predecir la variable dependiente se debe considerar la habilidad del pronosticador para pronosticar valores futuros exactos de las variables independientes. A pesar de estas desventajas, los modelos causales son frecuentemente empleados para generar pronósticos.

1.4.3.- SELECCIÓN DE LA TECNICA DE PRONOSTICO.

Antes de continuar, se resume lo visto anteriormente. Los métodos de pronóstico cuantitativos son empleados cuando se dispone de datos históricos: Los modelos de series de tiempo pronostican los valores a futuro de la variable de interés solamente en base al patrón de datos históricos de esta variable, asumiendo que el patrón histórico será continuo; los modelos causales pronostican valores futuros de la variable de interés en base a la relación entre esta variable y otras variables. Las técnicas de pronóstico cualitativas son empleadas cuando los datos históricos son escasos o no se dispone de todos y dependen de las opiniones de expertos quienes subjetivamente pronostican eventos futuros. En la práctica actual la mayoría de los sistemas de pronóstico emplean tanto los métodos cualitativos como los cuantitativos. Por ejemplo, los métodos cuantitativos son empleados cuando existe un patrón de los datos que se espera que no presente cambios mientras que los métodos cualitativos se emplean cuando existe un patrón de los datos que pueden presentar un cambio repentino. Así el pronóstico generado por los métodos cuantitativos son casi siempre evaluados subjetivamente por el "gerente". Esta evaluación puede dar como resultado una modificación del pronóstico en base a la "opinión experta del gerente".

Retomemos al problema de la elección de un método para emplearlo en una situación de pronóstico. Se consideran los siguientes factores en la selección de la técnica de pronóstico:

1. Considerar los tipos de pronóstico.
2. El tiempo
3. El patrón de los datos.
4. El costo invertido para llevar a cabo el pronóstico.
5. La exactitud.
6. La cantidad de datos que se dispone.
7. La facilidad de operación y entendimiento.

El primer factor que se considera es la forma del pronóstico. Se ha determinado la diferencia entre un pronóstico puntual y un pronóstico dentro de un intervalo de confianza, en algunos casos el pronóstico puntual puede ser suficiente y en otros se requiere el intervalo de confianza.

El segundo factor es el tiempo, los pronósticos son generados por puntos en el tiempo, los cuales pueden ser un número de días, semanas, meses, trimestres o años en el futuro. Esta longitud de tiempo es denominada como el tiempo o el horizonte. La longitud del tiempo está catalogado como se muestra a continuación:

Inmediato: menor de un mes.
A corto plazo: de uno a tres meses.
Medio: más de tres meses y menor de dos años.
A largo plazo: dos años o más

En general, la longitud del tiempo influye en la elección de la técnica de pronóstico ya que con un tiempo muy extenso hace que la exactitud del pronóstico sea más difícil, las técnicas de pronóstico cualitativas llegan a ser más útiles cuando se incrementa el tiempo.

Es muy importante que se identifiquen los componentes en el patrón de los datos, que frecuentemente determinan la técnica a emplear.

Tenemos también que los costos son un caso relevante, primero se debe considerar el costo que implica para el desarrollo del método, la complejidad y aumento de los costos de los procedimientos varía de técnica en técnica. Segundo es importante considerar el costo del almacenamiento de los datos a analizar, en algunos métodos se requiere el almacenamiento de una cantidad relativamente pequeña de datos, mientras que en otros se requiere almacenar grandes cantidades de datos. Por último el costo de las operaciones, algunos métodos se operan de forma más simple mientras que otros son muy complejos. El grado de complejidad puede influir de forma definitiva en el costo total para llevar a cabo el pronóstico.

Otro factor importante es la exactitud del pronóstico. En algunos casos puede ser aceptable un pronóstico con un error del 20% aproximadamente, en otros si tiene un error del 1% puede ser desastroso.

Se ha puntualizado que los datos históricos de la variable de interés son aplicados en los métodos de pronóstico cuantitativos. La disponibilidad de la información es otro factor importante. Entre los varios métodos que existen requieren de diferentes cantidades de datos.

En los datos se deben considerar su exactitud y si no tienen límite de tiempo, ya que la inexactitud y la obtención de datos muy viejos generarán pronósticos inexactos. Si no se dispone de los datos, se pueden implementar procesos especiales de colección de datos, en estos casos hay que tener especial interés en la selección del método.

Por último hay que considerar que el método de pronóstico sea fácil de operar y comprender. Para un caso particular, los gerentes son responsables de las decisiones efectuadas y para este fin se apoyan en los pronósticos generados por las técnicas, es por esto que ellos deben entender estas técnicas.

Si el gerente no comprende tales técnicas simplemente no va a tener confianza en las predicciones obtenidas por estas y como consecuencia, no empleará el proceso "decision-marking". Es por eso que es de total importancia que él entienda estos sistemas de pronóstico.

Al seleccionar la técnica se debe buscar un balance de los factores vistos anteriormente. Es obvio que el "mejor" método de pronóstico para cierto problema no es siempre el "más exacto". Pensemos que el método de pronóstico que apliquemos es el que considere las necesidades del problema, costo e inconvenientes.

Supongamos que una compañía desea pronosticar las ventas del próximo mes. Para cumplir con esta tarea la empresa desarrolla un sistema de pronóstico complicado y encuentra que la desviación de la media absoluta es de 2,000 unidades. La empresa debe determinar si se puede justificar el costo y los inconvenientes de este sistema. Si el promedio de las ventas mensuales son de 5,000 unidades, entonces la desviación de la media absoluta de 2,000 unidades es muy grande y los pronósticos serán inexactos. En tal caso el empleo de un sistema de pronósticos complejo probablemente no pueda justificarse. Por otro lado si el promedio de las ventas mensuales es de 40,000 unidades, el pronóstico puede ser adecuado y aún así el método puede no ser apropiado.

1.4.4.- CRITERIOS CONSIDERADOS PARA LA SELECCION DEL METODO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL

Criterios que se consideraron para el desarrollo del Alisamiento Exponencial. Por medio de los cuales se puede justificar su elección como método para pronóstico.

Se sugieren muchas técnicas de pronóstico de series de tiempo, sin embargo, ante todas estas posibilidades, no hay una técnica que sea universalmente satisfactoria. Cuando se selecciona una técnica, se necesitan algunos criterios, por medio de los cuales se van a justificar los méritos de cada una de estas.

A continuación se describen tres criterios que son frecuentemente convenientes, donde la importancia de cada uno de ellos dependerá mucho de la aplicación. Sin duda alguna hay otros criterios que se pueden considerar.

Se debe tener alguna razón por la que se opta por utilizar algún método y exponerla.

Estos son los criterios usualmente importantes:

- Precisión.
- Simplicidad en los cálculos.
- Flexibilidad para ajustar el grado de respuesta.

PRECISION

La necesidad de una estimación precisa de los coeficientes en el modelo de pronóstico es obvia. La precisión primordial del pronóstico está influenciada por la selección de los datos observados en el proceso y la forma del modelo seleccionado para representar el proceso fundamental.

Las observaciones deben estar tan cerca del proceso como sea posible. El ruido debe tener media cero, mínima varianza e independencia consecutiva entre las muestras sucesivas.

El modelo debe ser una representación lo más exacta del proceso fundamental. Se aclara que se habla de la precisión de la estimación de los valores de los coeficientes. Una estimación exacta de estos en el modelo equivocado nos conduce a un pronóstico deficiente.

Existen varias medidas para obtener esta precisión, Chebyschev desarrolló técnicas de ajuste de una línea (o polinomios de alto grado) a un conjunto de datos que generan ruido de tal forma que se minimiza la máxima diferencia entre la observación y el valor que sería el del pronóstico que se obtuvo a partir del modelo.

En el caso de un sistema de control de inventario, un buen pronóstico sería el que maximize el servicio prestado para invertir en el promedio de inventario. Esto es, los errores muy grandes en el pronóstico podrían ser tolerados si ocurren siempre que el inventario es grande. Se requiere de una precisión a tiempo cuando se ha optado por decidir si se efectúa otra orden de mercancía o no. Se requiere de un mayor trabajo realizarlo con la estimación de máxima verosimilitud.

Se utiliza el método de mínimos cuadrados como un criterio de precisión. Los valores de los coeficientes son calculados de tal manera que se minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones y los valores del pronóstico obtenidos por el modelo. El cuadrado de esta diferencia es descartada lejos de las observaciones más recientes. La diferencia entre la observación actual y la del modelo es ponderada como un valor máximo. Una observación al t-ésimo periodo es ponderada por β^t donde β es una fracción menor que uno. Por lo tanto las observaciones obtenidas de hace mucho tiempo atrás tienen menor peso en el cálculo actual de los coeficientes. Si $\beta = 1$, entonces todas las observaciones tienen el mismo peso y los coeficientes son estimados tal que serían un problema convencional de ajuste a una curva.

SIMPLICIDAD EN LOS CALCULOS

La simplicidad en los cálculos es de gran importancia en diferentes aplicaciones. Para un número muy grande de diferentes series de tiempo para los cuales los pronósticos son rutinariamente calculados lo más importante es que cada cálculo sea simple y rápido.

FLEXIBILIDAD PARA AJUSTAR DEL GRADO DE RESPUESTA

Una forma de ver el proceso de alisamiento es como un medio para filtrar el ruido de las observaciones para recuperar una estimación del proceso fundamental.

Asumimos que se tiene una observación y resulta ser diferente de lo que se esperaba. La diferencia puede ser puramente ruido o puede ser el principio de un nuevo patrón. A continuación se ejemplifica este razonamiento:

En el caso de la serie de tiempo referente al Medio Circulante en los años de Septiembre de 1976 y Noviembre de 1982 se vió afectada por diferentes procesos tales como : (a) la devaluación del peso ocurrida en Septiembre de 1976, (b) el establecimiento del impuesto sobre el valor agregado (IVA) a partir de Enero de 1980, (c) la devaluación ocurrida en Febrero de 1982 y (d) la devaluación de Agosto de 1982.

Cuando la observación actual es diferente de lo que se esperaba se consideran los siguientes puntos. Si la diferencia es puramente fluctuación aleatoria, entonces el pronóstico alisaría la fluctuación y los coeficientes del modelo serían estimados en base a los datos anteriores o pasados, pero si esta diferencia es el comienzo de un nuevo patrón , entonces los datos anteriores son irrelevantes. Los coeficientes son estimados solamente con los datos que son relevantes en el proceso.

En base a una gran información externa, se puede deducir si se trata o no de un cambio en el patrón.

Se pueden presentar algunos factores que alteren los valores de los coeficientes y cambien a través del tiempo. Por ejemplo:

- La introducción de un nuevo producto o una campaña promocional pueden alterar la demanda de un producto manufacturado.
- Una ráfaga de viento puede cambiar el curso de un aeroplano o el piloto puede decidir realizar otra maniobra.
- Una epidemia puede afectar radicalmente la demanda de drogas.

En tales situaciones no tendría caso buscar un modelo que se ajuste a ambas situaciones, es decir, antes y después del cambio en la serie de tiempo. La estabilidad de las estimaciones frente a fluctuaciones aleatorias debe ser sacrificado en favor a una rápida respuesta a las nuevas condiciones. Podemos esperar que las observaciones en el proceso fundamental vayan directo a una caminata aleatoria lenta. Los coeficientes en el proceso cambian en pequeños incrementos aleatorios. Esto nos conduce a descartar los datos anteriores. Ocasionalmente puede haber un salto radical en uno o más de los coeficientes y puede ser necesario volver a calcular las condiciones iniciales, en algún evento, los datos anteriores serían descartados más rápidamente en cada salto.

Haciendo extensión que tales cambios radicales son posibles en los datos, alguna provisión debe ser incorporada para un ajuste fácil en las observaciones anteriores que son efectivas en los cálculos actuales. Cuando una serie grande de observaciones viene del mismo proceso, es mejor estimar los coeficientes promediando sobre muchos datos. De otra forma si hay un cambio significante en el patrón, los cálculos se basarían en las observaciones más recientes.

CAPITULO 2

2. DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS DE ALISAMIENTO

2.DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS DE ALISAMIENTO.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el pronóstico de series de tiempo las cuales pueden ser descritas por componentes de tendencia y componentes irregulares. Los modelos de series de tiempo estudiados en este capítulo son un caso especial del modelo :

$$\boxed{y_t = TR_t + \varepsilon_t}$$

donde TR_t es el factor de tendencia de la serie de tiempo en el periodo t ; y ε_t es el factor irregular de la serie de tiempo en el periodo t. Específicamente se pronosticarán series de tiempo para las cuales TR_t puede asumirse que es obtenido por una de las siguientes ecuaciones :

$$TR_t = \beta_0 \tag{1}$$

por lo que

$$\begin{aligned} y_t &= TR_t + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

en este caso se asume que no hay tendencia. Esto significa que la serie de tiempo presenta fluctuaciones aleatorias alrededor de la media, β_0 , esto es, que no existen cambios o que tales cambios son lentos a través del tiempo. La Figura 2.1 ilustra que el nivel medio de la serie de tiempo no presenta tendencia ni cambios a través del tiempo.

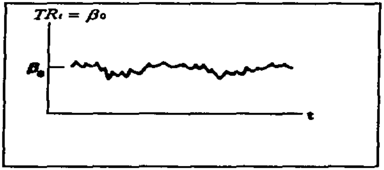


Figura 2.1 El nivel medio no presenta tendencia.

$$TR_t = \beta_0 + \beta_1 t \tag{2}$$

por lo que

$$\begin{aligned} y_t &= TR_t + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

en tal caso se asume que existe tendencia lineal. Esto es que la serie de tiempo presenta fluctuaciones aleatorias alrededor de la media que cambia en forma lineal o en línea recta a través del tiempo. La pendiente de esta línea recta es β_1 , mientras que la intercepción al tiempo cero es β_0 . Si la pendiente β_1 de la línea de tendencia es mayor que cero, el nivel medio de la serie de tiempo se incrementa a través del tiempo, en tanto que si la pendiente $\beta_1 < 0$, el nivel medio de la serie de tiempo decrece a través del tiempo. La Figura 2.2 ilustra como el nivel medio cambia en forma lineal con tendencia,

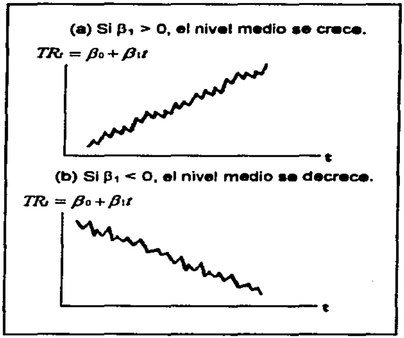


Figura 2.2 El nivel medio presenta tendencia lineal.

$$TR_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \qquad (3)$$

por lo que

$$\begin{aligned} y_t &= TR_t + \varepsilon_t \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t \end{aligned}$$

lo cual supone que existe tendencia cuadrática. Esto significa que la serie de tiempo presenta fluctuaciones aleatorias alrededor del nivel medio que cambia en forma cuadrática o curvilínea a través del tiempo. Así el nivel medio de la serie de tiempo también es creciente a un ritmo creciente o decreciente, por otra parte es decreciente a un ritmo creciente o decreciente. La Figura 2.3 ilustra como el nivel medio cambia en forma cuadrática con tendencia, la forma que puede presentar el nivel medio está determinada por los valores numéricos de β_0, β_1 y β_2.

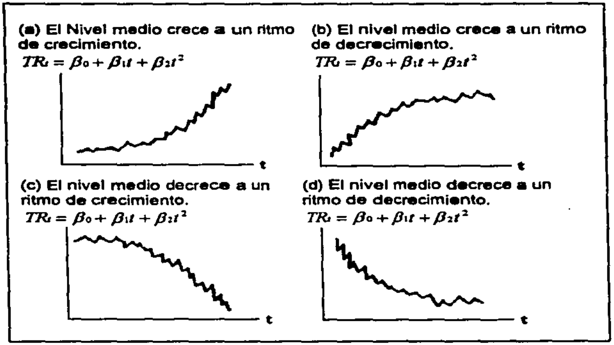


Figura 2.3 Nivel medio que presenta tendencia cuadrática.

La regresión y el alisamiento exponencial serán vistos y empleados a series de tiempo sin tendencia en el apartado 2.1, las series de tiempo con tendencia son presentados en el apartado 2.2 y los que muestran tendencia cuadrática en el apartado 2.3.

Como se vio en el capítulo 1, los modelos y métodos que se verán en el presente capítulo asumen que los errores están en términos de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ en el modelo

$$y_t = TR_t + \varepsilon_t$$

2.1-ALISAMIENTO EXPONENCIAL SIMPLE.

Pronóstico de Series de tiempo sin Tendencia.

Consideremos que el nivel medio de la serie de tiempo no presenta cambios a través del tiempo o que estos cambios sean muy lentos. El modelo apropiado para este tipo de series de tiempo puede ser :

$$\boxed{y_t = \beta_0 + \varepsilon_t}$$

En este caso, la serie de tiempo es descrita por el nivel medio β_0, el cual no presenta cambios a través del tiempo o en caso de haberlos son muy lentos. También se presentan fluctuaciones aleatorias, las cuales causan que las observaciones de desvíen del nivel medio, estas fluctuaciones están representadas por el componente ε_t.

2.1.1- REGRESIÓN

El estimador por mínimos cuadrados de β_0 es $b_0 = \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$ que es la media de las n observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Así un pronóstico de un valor futuro y_t de la serie es :

$$\boxed{\hat{y}_t = b_0 = \bar{y}}$$

2.1.2- ALISAMIENTO EXPONENCIAL

Supongamos que al final de un periodo de tiempo particular el cual llamaremos periodo $T-1$, obtenemos un conjunto de observaciones de la serie de tiempo la cual denotaremos como $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Dadas estas observaciones deseamos estimar β_0, el nivel promedio de la serie de tiempo. La estimación por mínimos cuadrados de β_0, la cual denotamos como $b_0(T-1)$ para enfatizar el hecho de que las observaciones más recientes en la serie corresponden al periodo $T-1$, es

$$\boxed{b_0(T-1) = \bar{y} = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{y_t}{(T-1)}}$$

Por lo que la estimación de β_0 es simplemente la media de las observaciones de la serie hasta el periodo $T-1$. Dada esta estimación, el pronóstico para un periodo futuro decimos $T-1+\tau$, donde τ es un entero positivo, es $b_0(T-1)$. Así el pronóstico para un periodo futuro es la media de las observaciones en la serie de tiempo hasta el periodo $T-1$.

Ahora supongamos que obtenemos una nueva observación y_t al final del siguiente periodo *T*. Incorporaremos esta nueva observación dentro de la estimación de β_0. Esto es obtener una estimación actualizada de β_0 que se basa en la nueva observación y_t, así como también las observaciones históricas $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Llamaremos a $b_0(T)$ como el nuevo estimador para indicar que las observaciones más recientes en la serie de tiempo corresponden al periodo *T*. La regresión puede ser utilizada para obtener tal estimación. El estimador está dado por:

$$\boxed{b_0(T) = \bar{y} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(T)}}$$

Por lo que este nuevo estimador se puede obtener volviendo a calcular $\bar{y}$ la cual es ahora la media de las observaciones en la serie de tiempo hasta el periodo *T*. Esta nueva estimación $b_0(T)$ es entonces el nuevo pronóstico para el nivel promedio de la serie en un periodo de tiempo futuro.

Otra forma de incorporar esta nueva observación dentro de la estimación de β_0, es conocida como *alisamiento exponencial simple*. Esta aproximación genera el nuevo estimador $b_0(T)$ en forma diferente. Parece intuitivo cambiar la estimación anterior $b_0(T-1)$ por alguna fracción del error del pronóstico la cual es resultado del pronóstico del valor de la serie de tiempo para el periodo presente.

$$\boxed{e_T = y_T - b_0(T-1)}$$

Esto es la diferencia entre los valores observados en el periodo *T* y el pronóstico obtenido para el periodo *T* en el periodo $T-1$. Si utilizamos la fracción α, entonces el estimador actualizado es dado por:

$$b_0(T) = b_0(T-1) + \alpha\,[y_T - b_0(T-1)]$$

Así el nuevo estimador se basa particularmente en el estimador anterior $b_0(T-1)$. Si el estimador anterior produce un pronóstico bajo en el periodo *T*, entonces el nuevo estimador es alto. Si el estimador anterior produce un pronóstico alto en el periodo *T*, entonces el nuevo estimador es bajo. La magnitud de ajuste alto o bajo, está determinado por la magnitud del error del pronóstico. Un error grande conduce a un ajuste mayor mientras que un error pequeño conduce a un ajuste menor.

Para simplificar la notación en este punto definiremos $S_T = b_0(T)$. Por lo que la ecuación que utilizaremos para actualizar en el estimador puede ser reescrita como:

$$S_T = S_{T-1} + \alpha\,(y_T - S_{T-1}) = S_{T-1} + \alpha\,y_T - \alpha\,S_{T-1}$$

$$\boxed{S_T = \alpha\,y_T + (1-\alpha)S_{T-1}}$$

Esta ecuación define el procedimiento actual llamado *Alisamiento Exponencial Simple.* Llamaremos a S_T la estimación alisada o estadística alisada. La fracción α es llamada constante de alisamiento.

Examinando la ecuación de Alisamiento

$$S_T = \alpha\,y_T + (1-\alpha)S_{T-1}$$

observamos que el estimador alisado se basa simplemente en las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_T$. Esto es cierto desde que S_{T-1} o $b_0(T-1)$ es la media de las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Ahora cambiemos el origen del tiempo por lo que el estimador inicial de β_0 se asume que es generado en el periodo de tiempo cero. Llamaremos a S_0.como estimador inicial. En la práctica, este estimador S_0 se obtiene calculando la media de un conjunto inicial de observaciones de la serie de tiempo. Si tal conjunto inicial de observaciones no está disponible, S_0 es comúnmente igual al primer valor observado de la serie de tiempo. Así tenemos la siguiente ecuación:

$$S_t = \alpha\,y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

esta es empleada para actualizar los estimadores de cada periodo de tiempo *t* desde periodo 1 al periodo *T*, el periodo de tiempo actual. En esta situación, el estimador de alisamiento para el periodo *T*, esto es, S_T, puede representarse como una combinación lineal de todas las observaciones anteriores. A esto consideramos que la estimación alisada:

$$S_T = \alpha\,y_T + (1-\alpha)S_{T-1}$$

de aquí tenemos que:

$$S_{T-1} = \alpha\,y_{T-1} + (1-\alpha)S_{T-2}$$

de la sustitución obtenemos:

$$S_T = \alpha y_T + (1-\alpha)[\alpha y_{T-1} + (1-\alpha)S_{T-2}]$$

$$= \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + (1-\alpha)^2 S_{T-2}$$

de nuevo podemos ver que:

$$S_{T-2} = \alpha y_{T-2} + (1-\alpha)S_{T-3}$$

sustituyendo tenemos:

$$S_T = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + (1-\alpha)^2[\alpha y_{T-2} + (1-\alpha)S_{T-3}]$$

$$= \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2{}_{T-2} + (1-\alpha)^3 S_{T-3}]$$

sustituyendo recursivamente para $S_{T-3}, S_{T-4}, \ldots, S_2$, y S_1 obtenemos:

$$S_T = \alpha y_T + \alpha(1-\alpha)y_{T-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{T-2} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{T-1} y_1 + (1-\alpha)^T S_0$$

De esta forma se observa que el estimador S_T, de β_0 en el periodo *T*, puede ser expresada en términos de las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_T$ y el estimador inicial S_0. Los coeficientes de las observaciones $\alpha, \alpha(1-\alpha), \alpha(1-\alpha)^2, \ldots, \alpha(1-\alpha)^{T-1}$, miden las contribuciones que las observaciones $y_T, y_{T-1}, y_{T-2}, \ldots, y_1$ hacen a los estimadores más recientes S_T. Puede observarse que los coeficientes decrecen geométricamente con la edad de las observaciones. Por ejemplo, si la constante de alisamiento α es 0.1, entonces estos coeficientes son 0.1,0.09,0.081,0.0081 etc. El procedimiento que se describió es llamado *alisamiento exponencial simple* porque estos coeficientes decrecen exponencialmente.

Dado que los coeficientes decrecen, las observaciones más recientes y_T hacen más grande la contribución al estimador actual de β_0. Las observaciones anteriores hacen mas pequeñas las contribuciones del estimador actual de β_0 de cada punto sucesivo en el tiempo.

Así, las observaciones lejanas decrecen del estimador actual de β_0 en el transcurso del tiempo. El grado de decrecimiento de las observaciones lejanas depende de la constante de alisamiento α. Para valores de α cercanos a 1, las observaciones lejanas disminuyen rápidamente, mientras que para valores de α cercanos a cero, las observaciones disminuyen lentamente. Por ejemplo para α = 0.9 obtenemos los coeficientes:

0.9,0.09,0.009,0.0009,...

mientras que para $\alpha = 0.1$ obtenemos:

0.1,0.09,0.081,0.0081

Por lo que la selección de la constante de alisamiento tiene una gran importancia sobre el estimador de S_T. En general cuando la serie de tiempo es bastante dispersa, es decir, cuando el componente aleatorio e_t tiene una varianza grande, seleccionamos una constante pequeña, por lo que el estimador de alisamiento S_T pesará S_{T-1} (el estimador de alisamiento para el periodo previo) a un mayor grado que el el peso de la observación y_t. Para una serie de tiempo más estable, en la que el componente aleatorio e_t tiene una varianza pequeña, seleccionamos una constante de alisamiento mayor.

Regresando al caso del pronóstico, supongamos que nos encontramos en el periodo T y el estimador actual de β_0 es $S_T = b_0(T)$. Queremos pronosticar la serie para un periodo futuro $T+t$. Dado que el modelo es $y_T = \beta_0 + \varepsilon_T$, el pronóstico es simplemente $\hat{y}_{T+\tau}(T) = S_T$, este es el nuevo estimador actual de β_0. El uso de (^) indica que $\hat{y}_{T+\tau}(T)$ es un valor de pronóstico en lugar de una observación de la serie de tiempo. La notación $\hat{y}_{T+\tau}(T)$ se utiliza para enfatizar que este pronóstico es para el periodo $T+\tau$ en el periodo T.

2.1.3- DETERMINACIÓN DE UNA CONSTANTE APROPIADA DE ALISAMIENTO.

Cuando un procedimiento de alisamiento exponencial es empleado como una herramienta de pronostico, el pronosticador debe especificar el valor de la constante de alisamiento α. Como se mencionó, la constante de alisamiento determina en qué medida influyen las observaciones históricas en el pronóstico. Dado que la asignación de un valor pequeño de una constante α, disminuye lentamente los valores de las observaciones históricas, un valor pequeño de α da por resultado una respuesta lenta a los cambios en los parámetros descritos en el nivel medio de la serie. Por otro lado, los valores grandes para α disminuyen rápidamente los valores de las observaciones históricas. Así un valor grande para α proporciona un mayor peso a las observaciones más recientes y como resultado cambios más rápidos en la serie de tiempo. Desafortunadamente esta rápida respuesta puede causar que el proceso de pronóstico reponda a movimientos irregulares en la serie de tiempo que no se reflejen los cambios en los parámetros descritos en la serie. Tal situación no es mejor que aquella en donde el procedimiento de pronóstico reacciona lentamente a cambios en los parámetros de la serie de tiempo. En la práctica se ha encontrado que valores para α de 0.01 a 0.30

trabajan muy bien. La simulación es de gran ayuda para seleccionar los valores para la constante de alisamiento. Este proceso consiste en simular un conjunto de datos históricos, utilizando diferentes valores para la constante de alisamiento α. Esto es que para cada valor de α, son generados un conjunto de pronósticos empleando el procedimiento apropiado de alisamiento exponencial. Estos pronósticos son entonces comparados con las observaciones actuales en la serie de tiempo. El valor de α que genere el "mejor" pronóstico, es el valor de la constante de alisamiento utilizada para generar pronósticos para valores futuros de la serie.

Para obtener el "mejor" pronóstico, se consideran los errores de los pronósticos obtenidos en las simulaciones. El error de pronóstico para un periodo en particular es simplemente la diferencia entre la observación actual y el pronóstico hecho para ese periodo. El conjunto de pronósticos que tengan la menor suma de los errores cuadráticos es el "mejor".

2.2.- *ALISAMIENTO EXPONENCIAL DOBLE*

Pronósticos para Series de Tiempo con Tendencia Lineal

Consideremos series de tiempo que presentan cambios en el nivel medio a través del tiempo. Se asume que los cambios en el nivel medio son en forma lineal a través del tiempo. Así el modelo apropiado para este tipo de series podría ser:

$$\boxed{y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t}$$

en donde $\beta_0 + \beta_1 t$ significa una línea recta que relaciona el nivel medio de la serie de tiempo y el tiempo. La pendiente de esta relación es β_1 mientras que la intercepción al tiempo cero es β_0. La serie de tiempo presenta tendencia lineal con fluctuaciones aleatorias, las cuales causan que las observaciones de la serie se desvíen de esta línea con tendencia. Si la pendiente β_1 es mayor que 0, quiere decir que el nivel medio de la serie crece a través del tiempo, de otra forma si β_1 es menor que 0 implica que en nivel medio de la serie decrece a través del tiempo.

2.2.1.- ANÁLISIS DE REGRESIÓN

Los estimadores de mínimos cuadrados para β_1 y β_0 respectivamente son:

$$b_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} t y_t - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n} - b_1\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} t}{n}\right)$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son las n observaciones históricas. Así el pronóstico de un valor futuro de y_t de la serie de tiempo es:

$$\boxed{\hat{y}_t = b_0 + b_1 t}$$

2.2.2- APROXIMACIÓN DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL

Supongamos que al final del periodo de tiempo *T-1* disponemos de conjunto de observaciones históricas, las cuales denotaremos como $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Dadas estas observaciones deseamos estimar los parámetros de β_0 y β_1 y emplearlos para generar pronósticos para valores futuros de la serie de tiempo. Los estimadores de mínimos cuadrados de β_0 y β_1, los denotamos ahora como $b_1(T-1)$ y $b_0(T-1)$ para enfatizar que las observaciones más recientes corresponden al periodo de tiempo *T-1*, estos estiomadores son:

$$b_1(T-1)=\frac{(T-1)\sum_{t=1}^{T-1}ty_t-\left(\sum_{t=1}^{T-1}t\right)\left(\sum_{t=1}^{T-1}y_t\right)}{(T-1)\sum_{t=1}^{T-1}t^2-\left(\sum_{t=1}^{T-1}t\right)^2}$$

y

$$b_0(T-1)=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}y_t}{T-1}-b_1(T-1)\left(\frac{\sum_{t=1}^{T-1}t}{T-1}\right)$$

dados estos estimadores, el pronóstico generado en el periodo *T-1* para algún periodo de tiempo futuro $(T-1)+\tau$ donde τ es un entero positivo, es:

$$\hat{y}_{T-1+\tau}(T-1)=b_0(T-1)+b_1(T-1)(T-1+\tau)$$

Suponemos que al final del periodo *T* obtenemos una nueva observación y_t y deseamos incorporar esta observación dentro de los estimadores de β_0 y β_1, es decir, obtener estimadores actualizados de estos parámetros que se basen en la nueva observación y_t como también las observaciones anteriores $y_1, y_2, \ldots, y_{T-1}$. Estos estimadores actualizados que denotaremos como $b_0(T)$ y $b_1(T)$ son calculados por mínimos cuadrados utilizando las observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_T$, empleando a su vez las fórmulas previamente vistas con el periodo *T-1* y ahora reemplazado por *T*.

Otra aproximación frecuentemente utilizada para determinar los estimadores de β_0 y β_1 es conocida como Alisamiento Exponencial Doble. Aquí el estimador actualizado de β_1 al final del periodo *T* está denotada como $b_1(T)$ y está dada por la siguiente ecuación:

$$b_1(T)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(S_T-S^{[2]}{}_T\right)$$

Aquí S_T es el *Estimador o Estadístico de Alisamiento Simple*, el cual es incluido en la ecuación $S_T=\alpha y_T+(1-\alpha)S_{T-1}$. La expresión $S^{[2]}{}_T$ es conocida como el *Estadístico de Alisamiento Doble*. Este es calculado aplicando la operación de alisamiento a la ecuación de alisamiento simple. Esto es, la serie de valores $S^{[2]}{}_T$ se obtiene alisando de valores de S_T utilizando la ecuación de alisamiento doble:

$$\boxed{S^{[2]}{}_T = \alpha S_T + (1-\alpha) S^{[2]}{}_{T-1}}$$

Se aclara que $S^{[2]}{}_T$ no es el cuadrado del estadístico de alisamiento doble si no que es el estadístico de alisamiento doble. La constante α, la cual se encuentra entre los valores de 0 y 1, es también conocida como *constante de alisamiento*. Con el procedimiento de alisamiento doble obtenemos el estimador actualizado para β_0 al final del periodo T, el cual denotaremos como $b_0(T)$.

$$\begin{aligned} b_0(T) &= 2S_T - S^{[2]}{}_T - Tb_1(T) \\ &= 2S_T - S^{[2]}{}_T - T\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}(S_T - S^{[2]}{}_T)\right] \end{aligned}$$

Ahora supongamos que disponemos de datos para todos los periodos incluyendo el periodo T. Deseamos obtener un pronóstico para el periodo de tiempo $T+\tau$. El pronóstico está dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+\tau}(T) &= b_0(T) + b_1(T)(T+\tau) \\ &= \left[b_0(T) + b_1(T)T\right] + b_1(T)\tau \\ &= a_0(T) + b_1(T)\tau \end{aligned}$$

Aquí

$$a_0(T) = b_0(T) + b_1(T)T$$

La expresión $b_0(T) + b_1(T)T$ es el estimador de la intercepción-y de la línea con tendencia con origen al tiempo cero más el estimador de la pendiente de la línea de la tendencia multiplicada por T, los estimadores fueron calculados al tiempo T. Así $a_0(T)$ es la intercepción-y de la línea de la tendencia actualizada cuando el origen es considerado al tiempo T. Este desplazamiento del origen cambia el origen de la línea de la tendencia al tiempo T. Tales desplazamientos del origen del tiempo es común al pronosticar.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+\tau}(T) &= a_0(T) + \tau\, b_1(T) = \\ &= b_0(T) + b_1(T)(T+\tau) \\ a_0(T) &= b_0(T) + T b_1(T) \end{aligned}$$

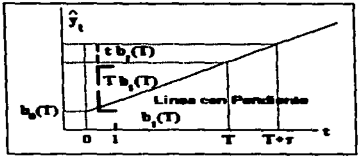


Figura 2.4 Desplazamiento del Origen.

empleando la ecuación de $b_0(T)$ tenemos:

$$\begin{aligned} a_0(T) &= b_0(T) + b_1(T)T \\ &= \left[2S_T - S^{[2]}{}_T - Tb_1(T)\right] + b_1(T)T \\ &= 2S_T - S^{[2]}{}_T \end{aligned}$$

entonces utilizando la ecuación de $b_1(T)$, la ecuación que genera el pronóstico al periodo de tiempo $T+\tau$ es :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+\tau}(T) &= a_0(T) + b_1(T)\tau \\ &= 2S_T - S^{[2]}{}_T + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(S_T - S^{[2]}{}_T\right)\tau \\ &= \left(2 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right)S_T - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right)S^{[2]}{}_T \end{aligned}$$

Para comenzar el proceso de Alisamiento Exponencial Doble debemos tener los valores iniciales de S_0 y $S^{[2]}{}_0$. Dado que estos estadísticos de alisamiento no son del todo intuitivos, la asignación directa de valores a estos estadísticos no es posible, por lo que aplicaremos el análisis de regresión a datos históricos para obtener estos valores iniciales y los estimadores de los coeficientes β_0 y β_1. Si tales datos no existen, los estimadores de β_0 y β_1 deberán ser obtenidos subjetivamente. Denotemos estos estimadores iniciales de β_0 y β_1 por $b_0(0)$ y $b_1(0)$. Sabemos que para el periodo T,

$$b_1(T) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_T - S^{[2]}_T)$$

Así para el periodo $T = 0$ tenemos:

$$b_1(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_0 - S^{[2]}_0)$$

También sabemos que para el periodo T,

$$b_0(T) = 2S_T - S^{[2]}_T - T\frac{\alpha}{1-\alpha}(S_T - S^{[2]})$$

Así para el periodo $T = 0$ tenemos:

$$b_0(0) = 2S_0 - S^{[2]}_0$$

Por lo que para $T = 0$ las ecuaciones son :

$$b_1(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_0 - S^{[2]}_0) \quad \text{y} \quad b_0(0) = 2S_0 - S^{[2]}_0$$

pueden ser resueltas para S_0 y $S^{[2]}_0$ en términos de estimadores iniciales $b_0(0)$ y $b_1(0)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_0 = b_0(0) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)b_1(0) \\ S^{[2]}_0 = b_0(0) - 2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)b_1(0) \end{array}}$$

La solución de estas ecuaciones genera los valores iniciales de los estadísticos de alisamiento S_0 y $S^{[2]}_0$ necesarios para comenzar el procedimiento de alisamiento. Si los estimadores iniciales de β_0 y β_1 no están disponibles obviamente estas ecuaciones no pueden ser empleadas para determinar S_0 y $S^{[2]}{}_0$. En tal caso es común en la práctica asignar un valor igual a la primera observación de la serie de tiempo para S_0 y $S^{[2]}{}_0$.

Dados los estimadores iniciales de S_0 y $S^{[2]}{}_0$ podemos presentar la operación de alisamiento en cada periodo utilizando las ecuaciones de alisamiento.

$$\boxed{S_T = \alpha y_T + (1-\alpha)S_{T-1} \quad \text{y} \quad S^{[2]}{}_T = \alpha S_T + (1-\alpha)S^{[2]}{}_{T-1}}$$

Podemos generar pronósticos para algún periodo $T+\tau$ utilizando la ecuación de pronóstico:

$$\boxed{\hat{y}_{T+\tau}(T) = \left(2 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right)S_T - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{(1-\alpha)}\right)S^{[2]}{}_T}$$

La simulación de una serie de tiempo histórica puede ser útil para determinar la "mejor" constante de alisamiento y aplicarlo en un proceso de alisamiento doble. Como en el caso de alisamiento simple, se genera un conjunto de pronósticos para cada conjunto de valores de α. Estos pronósticos son comparados con las observaciones actuales en la serie de tiempo histórica. El valor de la constante de alisamiento que minimiza la suma del error cuadrático del pronóstico es el valor de α utilizado para el procedimiento de alisamiento. Estas simulaciones comienzan con los valores iniciales de los estadísticos de alisamiento simple y doble. Supongamos que se consideran las primeras 6 observaciones de una serie de tiempo, las cuales utilizaremos para obtener las estimaciones iniciales de β_0 y β_1 por medio de análisis de regresión. Estas estimaciones iniciales $b_0(0)$ y $b_1(0)$ pueden ser empleadas para calcular los valores iniciales del los estadísticos S_0 y $S^{[2]}{}_0$ a través de las siguientes ecuaciones:

$$S_0 = b_0(0) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)b_1(0) \quad \text{y} \quad S^{[2]}{}_0 = b_0(0) - 2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)b_1(0)$$

De estas ecuaciones se obtienen los valores para S_0 y $S^{[2]}{}_0$ para un valor de α considerado, dados los estimadores por mínimos cadrados $b_0(0)$ y $b_1(0)$. Una vez que los valores iniciales se han determinado, comienza el proceso de alisamiento y la simulación de los datos históricos.

2.3.- ALISAMIENTO EXPONENCIAL TRIPLE

Pronósticos de Series de Tiempo con Tendencia Cuadrática

Consideremos que el nivel medio de la serie de tiempo tiene cambios en forma cuadrática o curvilínea en relación al tiempo. Esto es que el nivel medio de la serie crece a un ritmo creciente o decreciente, en otro caso decrece a un ritmo creciente o decreciente. Así el modelo apropiado para este caso es:

$$\boxed{y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t}$$

En este modelo, la serie de tiempo puede ser representada por un nivel medio que cambia de acuerdo a la función cuadrática $b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ incluyendo fluctuaciones aleatorias, las cuales causan que las observaciones se desvíen de la media.

2.3.1.- ANALISIS DE REGRESIÓN

Obtenemos la ecuación de pronóstico para el valor y_t de la serie de tiempo a través de los estimadores de mínimos cuadrados de β_0, β_1, y β_2 los cuales son b_0, b_1 y b_2 respectivamente :

$$\boxed{\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2}$$

los cálculos para obtener los estimadores de mínimos cuadrados se muestran a continuación :

Se desea encontrar los estimadores de mínimos cuadrados de β_0, β_1, y β_2 en el modelo de regresión,

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

tenemos que:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ & & \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix}$$

Así los estimadores de mínimos cuadrados de β_0, β_1, y β_2 son:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y$$

2.3.2- APROXIMACION DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL

Para comenzar reescribamos el modelo de alisamiento exponencial como sigue:

$$\boxed{y_t = \beta_0 + \beta_1 t + 1/2\beta_2 t^2 + \varepsilon_t}$$

Con la finalidad de simplificar las ecuaciones de estimación que serán presentadas para el análisis del alisamiento exponencial triple, el término $\beta_2 t^2$ es sustituido por $1/2\beta_2 t^2$.

Supongamos que al final del periodo *T* tenemos un conjunto de observaciones de la serie de tiempo $y_1, y_2, \dots y_T$. Estimaremos los parámetros β_0, β_1, y β_2 utilizando estas observaciones. Dados estos estimadores que denotaremos como $b_0(T), b_1(T)$ y $b_2(T)$ obtenemos el siguiente pronóstico para un periodo futuro $T + \tau$:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = b_0(T) + b_1(T)(T+\tau) + 1/2 b_2(T)(T+\tau)^2$$

Notemos que los estimadores $b_0(T), b_1(T)$ y $b_2(T)$ están definidos con respecto a un origen, esto es el periodo de tiempo previo al periodo correspondiente a la primera observación. El origen será ahora considerado en el periodo *T*. Este cambio de origen alterará los estimadores de β_0, β_1 y β_2. Denotemos estos nuevos estimadores como $a_0(T), a_1(T)$ y $a_2(T)$. Dados estos estimadores de β_0, β_1 y β_2 obtenemos el siguiente pronóstico al periodo $T + \tau$.

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = a_0(T) + a_1(T)\tau + 1/2 a_2(T)\tau^2$$

El *Alisamiento Exponencial Triple* involucra el empleo de tres estadísticos. Estos son definidos en las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} S_T &= \alpha\, y_T + (1-\alpha) S_{T-1} \\ S^{[2]}_T &= \alpha\, S_T + (1-\alpha) S^{[2]}_{T-1} \\ S^{[3]}_T &= \alpha\, S^{[2]}_T + (1-\alpha) S^{[3]}_{T-1} \end{aligned}}$$

Aquí S_T y $S^{[2]}_T$ son los estadísticos de alisamiento simple y doble utilizados en el proceso de alisamiento doble. $S^{[3]}_T$ es el estadístico de alisamiento triple y se obtiene aplicando la operación de alisamiento a la ecuación de alisamiento doble, es decir, la serie de valores $S^{[3]}_T$ se obtiene alisando a $S^{[2]}_T$ usando la ecuación de alisamiento triple:

$$S^{[3]}_T = \alpha\ S^{[2]}_T + (1-\alpha) S^{[3]}_{T-1}$$

Podemos ver que los estimadores $a_0(T), a_1(T)$ y $a_2(T)$ se obtienen con las siguientes ecuaciones en el periodo de tiempo T:

$$\begin{aligned} a_0(T) &= 3S_T - 3S^{[2]}_T + S^{[3]}_T \\ a_1(T) &= \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\left[(6-5\alpha)S_T - 2(5-4\alpha)S^{[2]}_T + (4-3\alpha)S^{[3]}_T\right] \\ a_2(T) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \left(S_T - 2S^{[2]}_T + S^{[3]}_T\right) \end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones por $a_0(T), a_1(T)$ y $a_2(T)$ en la ecuación de pronóstico, tenemos que:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = a_0(T) + a_1(T)\tau + 1/2 a_2(T)\tau^2$$

obtenemos la siguiente expresión que usaremos como una ecuación de pronóstico:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{y}_{T+\tau}(T) &= \left[6(1-\alpha)^2+(6-5\alpha)\alpha\tau+\alpha^2\tau^2\right]\frac{S_T}{2(1-\alpha)^2}\\ &-\left[6(1-\alpha)^2+2(5-4\alpha)\alpha\tau+2\alpha^2\tau^2\right]\frac{S^{[2]}_T}{2(1-\alpha)^2}\\ &+\left[2(1-\alpha)^2+(4-3\alpha)\alpha\tau+\alpha^2\tau^2\right]\frac{S^{[3]}_T}{2(1-\alpha)^2}\end{aligned}}$$

Para comenzar con el procedimiento de alisamiento exponencial triple, se calculan los valores iniciales de los estadísticos $S_T, S^{[2]}_T$, y $S^{[3]}_T$, por medio de la solución de las ecuaciones de los estimadores $a_0(T), a_1(T)$ y $a_2(T)$ para $S_T, S^{[2]}_T$, y $S^{[3]}_T$ con $T = 0$. Con esto obtenemos las siguientes ecuaciones para obtener los valores iniciales $S_0, S^{[2]}_0$, y $S^{[3]}_0$.

$$\boxed{\begin{aligned}S_0 &= a_0(0)-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}a_1(0)+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2}a_2(0)\\ S^{[2]}_0 &= a_0(0)-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}a_1(0)+\frac{2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{2\alpha^2}a_2(0)\\ S^{[3]}_0 &= a_0(0)-\frac{3(1-\alpha)}{\alpha}a_1(0)+\frac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2}a_2(0)\end{aligned}}$$

Aquí $a_0(T), a_1(T)$ y $a_2(T)$ son estimadores iniciales del modelo con parámetros β_0, β_1 y β_2 . Estos estimadores iniciales pueden obtenerse de los datos históricos por medio del análisis de regresión de mínimos cuadrados. Si no se dispone de los estimadores, es común utilizar la observación inicial en la serie de tiempo como el valor inicial para $S_0, S^{[2]}_0$, y $S^{[3]}_0$. Este procedimiento es adecuado dado que los valores iniciales $S_T, S^{[2]}_T$, y $S^{[3]}_T$ contribuyen menos a los pronósticos generados por el proceso de alisamiento ya que más observaciones son incorporadas en los estadísticos de alisamiento.

Una vez que los valores iniciales de los estadísticos, $S_0, S^{[2]}_0$, y $S^{[3]}_0$ han sido determinados, el procedimiento para pronosticar es sencillo. En cada periodo de tiempo los estadísticos simple, doble y triple son obtenidos utilizando las tres ecuaciones alisadas dadas previamente. Los estadísticos son introducidos en la ecuación de pronóstico. Esta ecuación genera pronósticos en periodos hacia adelante τ.

CAPITULO 3

3. IDENTIFICACIÓN DEL MODELO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL Y ALGORITMO DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL.

3.IDENTIFICACIÓN DEL MODELO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL Y ALGORITMO DEL PROGRAMA.

INTRODUCCIÓN.

El ajuste de un modelo de Alisamiento Exponencial a datos históricos implica dos diferentes procesos de decisión. Primero, la presencia o ausencia de tendencia y/o efectos cíclicos que deben ser identificados en los datos. Segundo, habiendo identificado los términos que deberían ser incluidos en el modelo, deben ser seleccionados los valores apropiados para los parámetros asociados o constantes de Alisamiento. El proceso de decisión asociado con cada una de estas tareas puede basarse en metodologías estadísticas rigurosas o técnicas intuitivas menos sofisticadas.

La mayoría de las decisiones se basan en pronósticos y la calidad de esas decisiones usualmente se reflejan en la calidad del pronóstico.

Mientras que las fórmulas empleadas en los pronósticos pueden ser fácilmente comprendidas por la mayoría de los usuarios, el desarrollo de un pronóstico aceptable es casi un arte. Entre varios métodos disponibles (y combinaciones de tales métodos) es importante elegir uno que genere un mejor ajuste entre el pronóstico y los datos actuales.

La predicción de un sistema puede ser generado con un alto nivel de confianza si el pasado ha sido igualado con cierta precisión razonable siempre y cuando al sistema no sufra cambios bruscos.

La calidad de un pronóstico puede ser medida por medios cuantitativos y cualitativos. Como ejemplos de la primera tenemos el coeficiente de correlación y la desviación media absoluta, las cuales proporcionan bases numéricas para evaluar el pronóstico. Una evaluación cualitativa se realiza mediante exámenes visuales del pronóstico y los datos originales. Una combinación de métodos como antes se mencionó se requiere generalmente para hacer una evaluación válida del pronóstico.

Se desarrolló un programa denominado MA-EXPO para este estudio. Este proporciona al usuario la oportunidad de tratar con varios esquemas sobre una serie de tiempo, es decir, que se puede tratar con varios pronósticos propuestos.

El programa realiza el proceso de construcción del modelo provisto de una gráfica. Son comparados los datos originales y el resultado generado por el pronóstico propuesto. También se calcula la desviación media absoluta y el coeficiente de correlación para cada modelo.

El alisamiento exponencial utiliza todos los puntos de los datos previos ajustándoles ciertos pesos por lo que se le puede dar mayor importancia a las observaciones más recientes que a las más antiguas. El pronóstico es un promedio ponderado en donde los pesos aplicados a cada dato previo, están en términos de una serie geométrica.

Este proceso de manipulación de datos requiere de solamente de los resultados más recientes para ser almacenados en memoria.

El pronóstico de alisamiento exponencial tiene un recurso intuitivo, en que la tendencia y factores estacionales pueden ser incorporados dentro del modelo, por lo que se produce un pronóstico más realista.

3.1.- MODELO DE ALISAMIENTO EXPONENCIAL BASICO

Sean X_n los valores de los datos, donde n indica el periodo en el que ocurre una observación y_{n+1}, es el pronóstico para el periodo $n+1$, el cual es la suma ponderada de todas las observaciones previas.

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} = S_n &= \alpha X_n + (1-\alpha)\, S_{n-1} \\
&= \alpha X_n + (1-\alpha)\left[\alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\, S_{n-2}\right] \\
&= \alpha X_n + \alpha(1-\alpha)\, X_{n-1} + (1-\alpha)^2\left[\alpha (X_{n-2}) + (1-\alpha)\, S_{n-3}\right] \\
&= \alpha X_n + \alpha(1-\alpha)\, X_{n-1} + \alpha(1-\alpha)^2 (X_{n-2}) + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} X_1;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde α es la constante de alisamiento exponencial ($0 < \alpha < 1$) y S_n es la suma ponderada ("valor alisado") de todas las observaciones previas. La ventaja de esta técnica de alisamiento exponencial es que mientras todos los valores de X_n son considerados, sólo el valor que debe ser almacenado en memoria es S_{n-1}. El modelo básico asume que no existe tendencia o estacionalidad, el pronóstico para *k* observaciones a futuro es igual a los pronósticos más recientes.

En el caso de que la serie de tiempo presente tendencia y se desee emplear este modelo básico, se pueden utilizar las diferencias. No siempre es lo más efectivo, aunque generalmente funciona para series con un número grande de observaciones. Este método consiste en restar los valores de las observaciones uno de otro en un orden pre-establecido. Tomando las primeras diferencias de una serie con tendencia lineal, por ejemplo, la tendencia desaparece. En general, un polinomio de grado 1 se vuelve constante al aplicar una diferencia, uno de grado 2 se vuelve constante al aplicar 2 diferencias y así sucesivamente. En procesos económicos o industriales difícilmente aparecen series que requieran de más de dos diferencias para eliminar la tendencia.

3.2.- INCREMENTO DEL FACTOR DE TENDENCIA

La posibilidad de que se presente tendencia en los datos es considerada como realce o ampliación del modelo básico. El estimador de la tendencia es incluido en el pronóstico por lo que el promedio alisado S_n, seguirá en el proceso de la tendencia. El método utilizado para incluir la tendencia en el pronóstico es ilustrado en la Figura 3.1, la cual presenta el resultado de aplicar el modelo básico a un conjunto de datos descritos por una línea recta.

$$X_n = a + bn$$

En este caso, con la ausencia de variación aleatoria, la tendencia del modelo de pronóstico es:

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \left[\alpha X_n + \alpha(1-\alpha)X_{n-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{n-2} + \ldots\right] \\ &- \left[\alpha X_{n-1} + \alpha(1-\alpha)X_{n-2} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{n-3} + \ldots\right] \\ &= \alpha(X_n - X_{n-1}) + \alpha(1-\alpha)(X_{n-1} - X_{n-2}) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

De la ecuación (2) se puede observar que la pendiente del pronóstico es la misma que de la línea de los datos. Sea b el parámetro de la pendiente definida como la diferencia entre dos valores X sucesivos

$$b = X_j - X_{j-1}$$

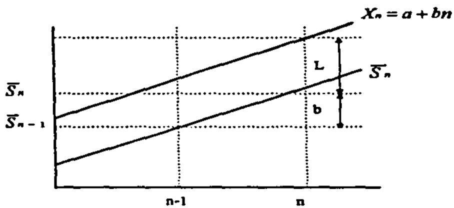


Figura 3.1 Incremento del factor de la Tendencia

La ecuación (2) puede ser expresada en términos de *b*:

$$S_n - S_{n-1} = \alpha(b) + \alpha(1-\alpha)(b) + \dots$$
$$= b\sum_{i=0}^{n} (\alpha)(1-\alpha)^i \tag{3}$$

La suma en la ecuación (3) es una serie geométrica, la cual converge a 1 para $0 \leq \alpha \leq 1$. Así la gráfica de S_n tiene la misma pendiente que de X_n.

$$S_n - S_{n-1} = b \tag{4}$$

Sea *L* definida como la diferencia entre los datos y el pronóstico:

$$\begin{aligned} L &= X_n - S_n \\ &= X_n - \left[(\alpha)X_n + (1-\alpha)S_{n-1}\right] \\ &= (1-\alpha)(X_n - S_{n-1}); \end{aligned} \tag{5}$$

De la Figura 3.1, $X_n - S_{n-1} = L + b$.

De este modo *L* puede ser redefinida como el valor de $(1-\alpha)(L+b)$ y resolviendo para *L*:

$$\begin{aligned} L &= (1-\alpha)(L+b) \\ L &= L(1-\alpha) + b(1-\alpha) \\ L - L(1-\alpha) &= b(1-\alpha) \\ L(1-(1-\alpha)) &= b(1-\alpha) \\ L &= \frac{b(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)} \\ L &= \frac{b(1-\alpha)}{1-1+\alpha} \\ L &= \frac{b(1-\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \tag{6}$$

Así el pronóstico se define como:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} &= S_n + L + b \\
Y_{n+1} &= S_n + \frac{b\,(1-\alpha)}{\alpha} b + b \\
&= S_n + \frac{b\,(1-\alpha+1)}{\alpha} \\
&= S_n + \frac{1}{\alpha} b
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Cuando la variación aleatoria se introduce en los datos, el valor de $b_n = X_n - X_{n-1}$ cambiará de periodo a periodo. La componente de tendencia del pronóstico puede ser también alisada adicionando la constante de alisamiento de tendencia β.

$$
T_n = \beta\,(S_n - S_{n-1}) + (1-\beta)\,T_{n-1};
\tag{8}
$$

donde β está en el rango de $(0 < \beta < 1)$ y T_n es el promedio alisado de las actuales y previas tendencias. Como en el modelo básico del pronóstico, sólo es necesario almacenar el valor de la última estimación del componente de tendencia.
Así el pronóstico para el periodo siguiente Y_{n+1} es definido como:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} &= S_n + \frac{1-\alpha}{\alpha} T_n + T_n \\
&= S_n + \frac{1}{\alpha} T_n
\end{aligned}
\tag{9}
$$

El pronóstico para *k* observaciones a futuro se obtiene multiplicando el estimador de la tendencia por *k*.

$$
\begin{aligned}
Y_{n+k} &= S_n + \frac{1-\alpha}{\alpha} T_n + kT_n \\
&= S_n + \left(k - 1 + \frac{1}{\alpha}\right) T_n
\end{aligned}
\tag{10}
$$

3.3.- INCREMENTO DEL FACTOR DE ESTACIONALIDAD

La presencia de ciclos o patrones estacionales pueden incorporarse al modelo. El pronóstico que considera la estacionalidad es útil cuando se observa que los datos cambian de periodo a periodo repitiéndose de un modo similar al siguiente ciclo. La base del pronóstico es modificada tomado en cuenta las desviaciones estacionales de la media. El componente estacional C_n se define como :

$$C_n = \gamma \left(\frac{X_n}{S_n}\right) + (1-\gamma)\, C_{n-p};$$

(11)

donde p es el número de observaciones en un ciclo y γ es la constante de alisamiento. El índice estacional C_n proporciona una estimación la cual es la duración de la demanda en una estación que se puede localizar arriba o abajo de la media. Se incluye el componente estacional al pronóstico de la siguiente manera :

$$Y_{n+1} = S_n\left(\frac{C_{n-p+1}}{C_n}\right)$$

(12)

Finalmente los componentes de estacionalidad y tendencia son incluidos en el modelo, el pronóstico se obtiene acorde a :

$$Y_{n+1} = \left(S_n + \frac{1}{\alpha}\, T_n\right)\frac{C_{n-p+1}}{C_n}$$

(13)

3.4.- ESTADÍSTICAS

El coeficiente de correlación r se define como una medida de asociación lineal que existe entre dos variables aleatorias X y Y. El programa MA-EXPO, este coeficiente se utiliza como una medida de relación lineal entre los datos históricos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y el pronóstico correspondiente $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$
El coeficiente de correlación se calcula a continuación:

$$r(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right]^{1/2}}$$

(14)

Después de efectuar algunos cálculos algebraicos, puede obtenerse una expresión equivalente de la forma:

$$r(X,Y) = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\left[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right]^{1/2}\left[\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right]^{1/2}} \tag{15}$$

donde r se encuentra en el intervalo $-1 \leq r \leq 1$, X representa los datos históricos, Y es el pronóstico correspondiente y n es el número de puntos a partir de los cuales se generó el pronóstico. Con base a una muestra aleatoria, un valor de r = -1 indica una relación lineal negativa perfecta entre X y Y. El valor negativo de r es el resultado de que los datos y el pronóstico toman direcciones opuestas, es decir, que los datos muestren una tendencia alta y el pronóstico tendencia baja. Un valor de r = 1 señalará una asociación lineal positiva perfecta de X y Y, esto es un buen ajuste. Si r = 0, entonces no existe ninguna relación lineal entre X y Y. En la siguiente figura se muestran algunas gráficas de dispersión comunes para algunos valores r.

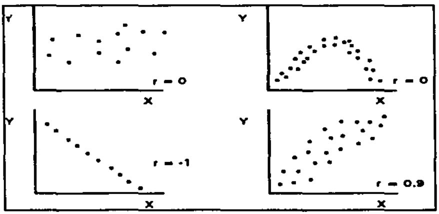


Figura 3.2 Gráficas de dispersión comunes para algunos valores de r.

A causa de varias interpretaciones erróneas que ha sufrido r, es necesario que el lector comprenda que r por sí mismo no puede probar ni desmentir una relación causal entre X y Y, aún si r = ± 1. La manifestación de una relación causa-efecto es posible sólo a través de la comprensión de la relación natural que existe entre X y Y, y ésta no debe manifestarse sólo por la existencia de una fuerte correlación entre X y Y.

La desviación media absoluta (DMA) es una medida alternativa de variabilidad que tiene mayor aceptación dado su simplicidad computacional. DMA es calculada como sigue :

$$\mathrm{DMA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - Y_i|}{n} \tag{16}$$

donde $|X_i - Y_i|$ es el error del pronóstico.

Generalmente un valor bajo de DMA indica un pronóstico aceptable. El valor de DMA es comparado con la media de los datos. Ejemplificando, un valor de DMA = 5.0 puede considerarse apropiado para un valor promedio de 100.0 de los datos, de otra forma este puede indicar un pobre ajuste con un promedio de 0.8 de los datos.

Otro de los medios para considerar que el pronóstico obtenido es el mejor, es mediante el error del pronóstico. El error del pronóstico es la diferencia entre la observación actual y el pronóstico. La suma del error cuadrático (SEC) que presente la menor cantidad aprobará el pronóstico propuesto.

$$\mathrm{SEC} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2 \tag{17}$$

3.5.- INICIALIZACIÓN

El cálculo de los valores iniciales de la base, tendencia y estacionalidad es el primer paso importante para el ajuste de los datos con el pronóstico. La calidad de las estimaciones iniciales normalmente se reflejan en la calidad del pronóstico, especialmente cuando los datos consisten de un número limitado de periodos (cuando el número de datos son suficientes). La rutina de inicialización es más crítica cuando el número de datos no es suficiente. El programa MA-EXPO proporciona al usuario la oportunidad de variar la longitud del intervalo de inicialización y observar sus efectos sobre el pronóstico. Las rutinas de inicialización para los modelos básico, tendencia y estacionalidad son descritos a continuación:

Inicialización para el modelo básico:

Sea n el número de observaciones para iniciar la rutina (este valor es proporcionado por el usuario). En el modelo básico, el valor de la base se obtiene calculando la media de los primeros n datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \tag{18}$$

Inicialización para el modelo de Tendencia:

Las estimaciones para S_n y T_n se obtienen aplicando la regresión lineal para los primeros n datos. Mediante la regresión lineal tenemos la ecuación para la demanda (X) en función al tiempo (t).

$$X = a + bt \tag{19}$$

donde "a" es el valor de X cuando $t = 0$ y b es la pendiente. El valor de T_n es igual a b.

$$T_n = b \tag{20}$$

Se obtienen los valores iniciales de T_0 y S_0.

$$T_0 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} i\, X_i - \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum X_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i}$$

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - T_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n} \right) \tag{21}$$

En seguida se tiene la ecuación para obtener la estimación inicial de S_n:

$$S_n = a + bn - \frac{1-\alpha}{\alpha}\, b \tag{22}$$

donde $a = S_0$ y $b = T_0$

Inicialización para el modelo con Estacionalidad:

Estrictamente se inicia con un múltiplo de la longitud del ciclo. El primer paso del proceso de estimación para obtener los valores de la base, tendencia y estacionalidad es obtener el factor estacional para cada estación. El siguiente cálculo es para cada ciclo:

$$CS_{ki} = \frac{pX_j}{\sum_{i=1}^{p} X_i} = \frac{X_j}{\overline{X}_p} \tag{23}$$

donde CS_{ki} es el factor estacional para la estimación i en el ciclo k, $\overline{X}_p$ es el valor promedio para ese ciclo, p es la longitud del ciclo, X_j es la j-ésima observación.
La estimación del promedio del factor estacional C_i se obtiene a través del promedio de los valores de CS_{ki} para cada i-ésima observación del ciclo.

$$C_i = \frac{\sum_{k=1}^{K} CS_{ki}}{K} \tag{24}$$

donde K es el número de ciclos. MA-EXPO obtiene la estimación inicial de C_i con el cálculo del promedio de los factores estacionales sobre el número de ciclos.
Cada valor de X_j se divide entre su correspondiente valor estacional CS_{ki} para obtener los valores X_j desestacionalizados. Las estimaciones de la base y/o tendencia se obtienen en base a los datos transformados. El proceso de inicialización para el modelo estacional se ilustra a continuación.

3.5.1.- EJEMPLO DE LA RUTINA DE INICIALIZACION

	(1) Observación j	(2) X_j	(3) k	(4) i	(5) CS_{ki}	(6) X/C_i
	1	12	1	1	0.857	13.59
1er.Ciclo	2	15	1	2	1.071	14.69
	3	16	1	3	1.143	14.34
	4	13	1	4	0.929	13.27
	5	15	2	1	0.909	16.99
2o.Ciclo	6	16	2	2	0.970	15.67
	7	18	2	3	1.091	16.13
	8	17	2	4	1.030	17.35
	9	15	3	1		
3er.Ciclo	10	17	3	2		
	11	17	3	3		
	12	16	3	4		

Tabla 1. Cálculo de Factores Estacionales. (3) núm. de ciclo, (4) observación i-ésima por ciclo, (6) datos desestacionalizados.

Se asume que se seleccionan las primeras 8 observaciones que se presentan en la columna (2) de la tabla 1 para obtener las estimaciones iniciales para un modelo estacional con tendencia. El número de observaciones por ciclo es 4. Los valores promedio para el primero y segundo ciclo son 14.0 y 16.5 respectivamente, de los cuales obtenemos los factores estacionales CS_{ki} para cada ciclo.

$$CS_{11} = \frac{4(12)}{56} = 0.857$$

$$CS_{12} = \frac{4(15)}{56} = 1.071$$

El promedio del factor estacional de la primera estación se calcula como sigue:

$$C_1 = \frac{CS_{11} + CS_{21}}{2} = \frac{0.857 + 0.909}{2} = 0.883$$

Para los restantes:

$$C_2 = \frac{CS_{12} + CS_{22}}{2} = 1.021;$$

$$C_3 = \frac{CS_{13} + CS_{23}}{2} = 1.116;$$

$$C_4 = \frac{CS_{14} + CS_{24}}{2} = 0.980.$$

Se divide cada observación su correspondiente valor C_j y de este modo tendremos datos desestacionalizados, como se puede ver en la columna (6), con la cual se calculan los valores iniciales de $T_0 = 15.007$ y $S_0 = 0.491$.

En base a la obtención de los valores iniciales se procede a utilizar las ecuaciones de los modelos de la base, tendencia y estacionalidad.

3.6.- SELECCIÓN DE LA CONSTANTE DE ALISAMIENTO.

Como se mencionó anteriormente, el primer paso para seleccionar el modelo de alisamiento exponencial es determinar los factores de estacionalidad y/o tendencia, es decir, determinar la "forma" del modelo. El segundo paso es determinar los valores apropiados para las constantes de alisamiento o factores de peso α ,β y γ .

Para la selección del modelo tomaremos en cuenta el análisis visual de la gráfica original de los datos y el conocimiento del pronóstico en el mundo real. Uno de los más simples y procesos más relevantes para el análisis es la gráfica de los datos históricos contra el tiempo. La tendencia y efectos estacionales son fácilmente identificados desde la gráfica así como la ausencia de estos. El conocimiento del tipo de datos y la fuente de los mismos es también un factor importante para determinar el modelo a utilizar. También se considera la existencia de los ciclos o variación estacional. Por ejemplo las ventas mensuales de gasolina pueden presentar una marcada tendencia y estacionalidad con un promedio alto de consumo en los meses de verano. Los efectos estacionales pueden no ser notables en las ventas semanales de gasolina a causa del incremento de la longitud del ciclo (52 en lugar de 12) y el impacto del ruido blanco (podríamos suponer que exista más variación con datos semanales que con los mensuales).

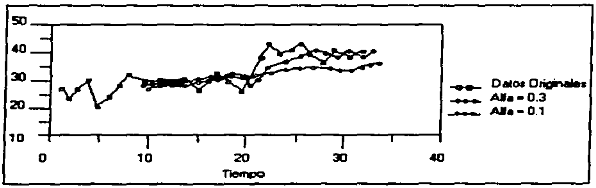


Figura 3.3 Datos Alisados

En la selección de las constantes de alisamiento normalmente se piensa que es un proceso de "ajuste del modelo a los datos". De hecho este no es el caso. Esta selección de los valores se basa en la decisión entre dos objetivos contradictorios: (1) alisamiento del ruido en el proceso de generación de los datos y (2) una respuesta a los posibles cambios en el patrón de los datos originales.

Con las constantes de alisamiento se determina la importancia relativa o pesos dados a los datos más recientes contra los datos previos a estos. Un valor grande para la constante dará mayor importancia a la información más reciente y menor para la anterior. Por consiguiente cuando estos datos recientes indican que el proceso ha cambiado, el pronóstico es capaz de reconocer este cambio. Este caso se muestra en la

Figura 3.3, donde el modelo de alisamiento pronostica para un nivel que presenta un cambio repentino en el periodo 21. El pronóstico con α = 0.3 es más sensible que para α = 0.1. Un modelo de pronóstico con valores altos para sus constantes de alisamiento no considera los cambios reales del ruido y no puede hacer un buen trabajo de alisamiento. Esto se muestra en la Figura 3.4, donde el ruido que es un proceso continuo, ha sido alisado por dos modelos, uno con α = 0.1 y otro con α = 0.3. El modelo con α=0.1 realiza un mejor trabajo de alisamiento del ruido en el proceso con media de 120.

La determinación de los valores de las constantes, análogo a la selección del modelo, está auxiliado por las técnicas gráficas que proporcionan varias alternativas de resultados que a su vez pueden ser comparados. Cuando tales procedimientos son realizados manualmente son muy tediosos, es por eso que utilizaremos éstas técnicas para nuestro estudio.

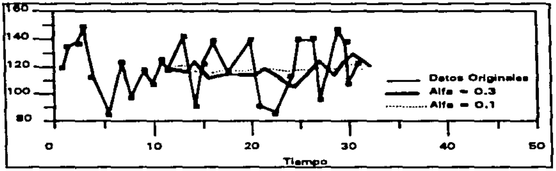


Figura 3.4 Ruido blanco alisado.

3.7 PROGRAMA COMPUTACIONAL MA-EXPO

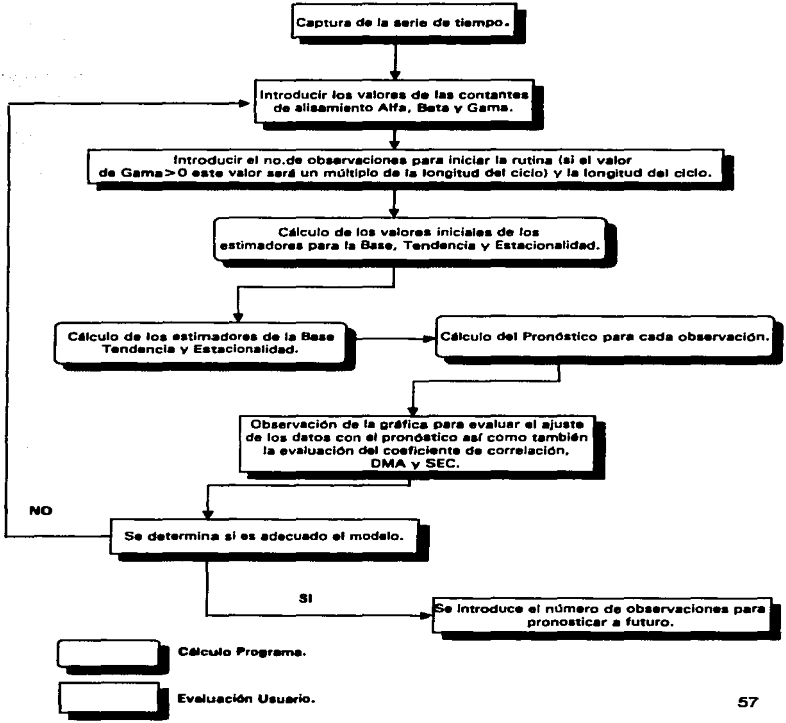
El programa MA-EXPO es una herramienta para seleccionar el modelo de pronóstico más adecuado para nuestros datos.

La técnica tradicional de prueba y error usualmente se requiere para obtener el mejor ajuste entre los datos y el pronóstico, con la ayuda del programa esto se simplifica, esto es, podemos obtener resultados con mayor rapidez y realizar evaluaciones a través de la gráfica. MA-EXPO es muy flexible en cuanto se requiere tratar con varios esquemas cambiando los valores de las constantes de alisamiento. Los efectos de estos resultados pueden ser analizados individualmente o en conjunto con otros resultados obtenidos. Se pueden examinar las gráficas superpuestas, obviamente una que corresponde a los datos originales y la otra a los datos generados por el modelo propuesto, así podemos decidir cuál va a ser la mejor combinación de nuestros parámetros.

De esta forma el proceso inevitable de prueba y error puede ser más rápido y menos tedioso. MA-EXPO también calcula estándares estadísticos para evaluar la calidad del pronóstico. El programa está provisto de medidas cuantitativas y cualitativas para que de esta forma el usuario seleccione el modelo de alisamiento exponencial que sea más compatible con sus objetivos.

MA-EXPO permite al usuario tratar con diferentes esquemas y analizar sus efectos sobre los pronósticos. Esto puede tener un efecto notable sobre la calidad en el pronóstico, especialmente cuando el número de datos es limitado. El programa también puede ser utilizado para evaluar las respuestas del modelo de pronóstico en base a los cambios de los datos originales. El valor de MA-EXPO radica en su habilidad de combinar procesos ya establecidos del Método de Alisamiento Exponencial con el uso amigable del programa.

3.8 DIAGRAMA FUNCIONAL



3.9 ALGORITMO LOGICO DEL PROGRAMA

*1.-Se considera la Serie de tiempo a analizar. La cual parte de la observación en la unidad de tiempo 1 hasta el número n de observaciones. Sea **Num_obser** como el número total de observaciones de la serie.*

Donde $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{Num\_obser}$

2.-Se definen los valores de las constantes de alisamiento. Las cuales son: α, β, γ.

Donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Si $\gamma > 0$
Proporcionar la *longitud del ciclo* que se denominará como **NPPCL.**
Dar un *múltiplo de **NPPCL*** que se denominará como **NPINI.**

Si $\gamma = 0$
Dar el número de observaciones para iniciar la rutina denominado como **NPINI.**

3.- Considerando los valores asignados a las constantes de alisamiento se proceden a calcular los valores iniciales del modelo.

3.1 Si $\alpha > 0$ y $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, se trata del *modelo básico.*

Se calcula el parámetro inicial del modelo básico mediante la siguiente ecuación:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{NPINI} \frac{X_i}{NPINI}$$

donde X_i representa los datos de la serie de tiempo en la i-ésima unidad de tiempo.

3.2 Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y $\gamma = 0$, se trata del *modelo de tendencia.*

Se calcula el parámetro inicial para el modelo de tendencia:

$$T_0 = \frac{NPINI \sum_{i=1}^{NPINI} i\, X_i - \left(\sum_{i=1}^{NPINI} i\right)\left(\sum X_i\right)}{NPINI \sum_{i=1}^{NPINI} i^2 - \sum_{i=1}^{NPINI} i}$$

donde T_0 es el parámetro del modelo de tendencia. X_i representa los datos de la serie de tiempo en la i-ésima unidad de tiempo.

Se calcula el parámetro inicial para el modelo básico:

$$S_0 = \frac{\sum_{i=1}^{NPINI} X_i}{NPINI} - T_0\left(\sum_{i=1}^{NPINI} i\right)$$

3.3 Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y $\gamma > 0$, se trata del *modelo de estacionalidad*.

Se obtiene el *número de ciclos* mediante el siguiente cálculo:

$$NCiclos = \frac{NPINI}{NPPCL} = \frac{\text{multiplo de la longitud del cliclo}}{\text{la longitud del ciclo}}$$

<u>Hacer desde el ciclo 1 hasta NCiclos:</u>

Se obtiene el valor promedio de cada uno de los ciclos de la serie que se denominará como PCiclos:

$$PCiclos = \frac{\sum_{i=1}^{NPPCL} X_i}{NPPCL}$$

Se divide cada periodo sobre el promedio de cada ciclo (Pciclos) para obtener el *factor estacional* de cada ciclo k.

$$CS_{ki} = \frac{X_i}{PCiclos}$$

<u>Hacer desde i = 1 hasta NPPCL</u>

Se obtiene el promedio del factor estacional del ciclo k. La i va a variar desde 1 hasta el NPPCL y la k va a variar desde 1 hasta NCiclos.

$$C_i = \sum_{k=1}^{k} \frac{CS_{ki}}{k}$$

<u>Hacer desde i = 1 hasta NPPCL</u>

Se divide cada dato X_i sobre cada valor promedio del factor estacional C_i para obtener los valores desestacionalizados. Se almacena cada valor obtenido en un arreglo con índice j.

$$Ddes_j = \frac{X_i}{C_i}$$

Si $\beta = 0$

Se obtiene el promedio de los datos desestacionalizados:

<u>Hacer desde j = 1 hasta NPINI</u>

$$\sum_{j=1}^{NPINI} \frac{Ddes_j}{NPINI}$$

Si $\beta > 0$

Se calculan los parámetros para los modelos básico y tendencia.

Se calcula el parámetro inicial para el modelo de tendencia:

$$T_o = \frac{NPINI \sum_{j=1}^{NPINI} j\ Ddes_j - \left(\sum_{j=1}^{NPINI} j\right)\left(\sum Ddes_j\right)}{NPINI \sum_{j=1}^{NPINI} j^2 - \sum_{j=1}^{NPINI} j}$$

Se calcula el parámetro inicial para el modelo básico:

$$S_0 = \frac{\sum_{j=1}^{NPINI} Ddes_j}{NPINI} - T_0 \left(\frac{\sum_{j=1}^{NPINI} j}{NPINI} \right)$$

4.- Se procede a obtener los estadísticos de alisamiento en base al modelo seleccionado (Básico, Tendencia o Estacionalidad).

<u>Hacer para i = NPINI + 1 hasta Num_obser</u>

Se obtiene el estadístico del modelo básico. (ec. recursiva):

$$S_i = \alpha X_i + (1 - \alpha)\ S_{i-1}$$

El pronóstico es igual al estadístico en el modelo básico.

$$Pronóstico_{i+1} = S_i$$

Si β > 0

Se calcula el estadístico del modelo de tendencia:

$$T_i = \beta(S_i - S_{i-1}) + (1-\beta)\ T_{i-1}$$

$$Pronostico_{i+1} = Pronostico_{i+1} + (\frac{1}{\alpha})\ T_i$$

Si γ > 0

Se calcula para cada ciclo:

- Se obtiene el residuo de NN = i / NPPCL
Si NN = 0 entonces NN = NPPCL

- Se obtiene el residuo de NN2 = (i+1) / NPPCL
Si NN2 = 0 entonces NN2= NPPCL

$$C_{NN} = \frac{\gamma X_i}{S_{i-1} + (1-\gamma)\ C_{NN}}$$

$$Pronostico_{i+1} = Pronostico_{i+1} * \frac{C_{NN2}}{C_{NN}}$$

5.- Se obtiene el pronóstico para n observaciones a futuro.

Se proporciona el número de observaciones a ser pronosticadas a futuro. El valor de este número será representado con la variable Obser_fut.

<u>Hacer para i = 1 hasta Obser_fut.</u>

$Obser\_pronos_i = S_{Num\_obser}$

$Obser\_pronos_i$ representa a cada observación pronosticada a futuro y S_{Num_obser} es el valor del estadístico del modelo básico para la última observación.

Si β > 0

$$Obser\_pronos_i = Obser\_pronos_i + \left(\frac{1}{\alpha} + i - 1\right) T_{Num\_obser}$$

donde T_{Num_obser} es el valor del estadístico del modelo de tendencia para la última observación.

Si $\gamma > 0$

Se obtiene el residuo de:

$$NN2 = \frac{Obser\_fut + i}{NPPCL}$$

Si NN2 = 0 entonces NN2 = NPPCL

Se obtiene el residuo de:

$$NN = \frac{Obser\_fut}{NPPCL}$$

Si NN = 0 entonces NN = NPPCL

$Obser\_pronos_i = Obser\_pronos_i\ (C_{NN2} / C_{NN})$

6.- Se calcula el coeficiente de correlación.

Donde n = Num_obser - NPINI -1

<u>Hacer para i= NPINI + 2 hasta Num_obser</u>

$$r(X,Y) = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\left[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right]^{1/2}\left[\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right]^{1/2}}$$

7.- Se calcula la desviación media absoluta y la suma del error cuadrático.

<u>Hacer para y= NPINI + 2 hasta Num_obser</u>

Donde n = Num_obser - NPINI - 2

$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - Y_i|}{n}$$

$$SEC = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2$$

CAPITULO 4

4. APLICACIONES

4. APLICACIONES

INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se muestra una aplicación del Método de Alisamiento Exponencial, para su desarrollo se empleó una serie de tiempo que se refiere al Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico.

A través del desarrollo de la aplicación, se presenta de manera breve el uso del programa que se denominó **MA-EXPO**, el cual se desarrolló como una herramienta para exponer el método. Éste se desarrolló en el lenguaje de programación Visual Basic versión 4.0 el cual trabaja en ambiente Windows, esto permite que el manejo del programa sea amigable para el usuario.

Como requerimientos para su instalación se necesita de una Computadora Personal 386 o mayor y que tenga previamente instalado Windows 3.1 o una versión mayor.

Es importante mencionar que en esta aplicación no se pretende obtener un pronóstico adecuado para el fenómeno propuesto, si no que se trata de ilustrar el uso del método.

4.- Estudio de un caso : Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico.

Como inicio del análisis de series de tiempo, se grafican los datos originales disponibles contra el tiempo, esto ayudará a visualizar la tendencia, heteroscedasticidad (varianza no constante), estacionalidad (o fluctuación estacional), discontinuidades y datos discrepantes o influyentes.

A continuación se listan los datos originales referentes al Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico correspondientes a los años de 1988 a Julio de 1995.

VOLUMEN DE LAS VENTAS INTERNAS DE GAS DOMESTICO
(MILES DE BARRILES DIARIOS)

MESES	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
ENERO	200	203	220.1	232.4	252.9	264.3	270.3	286.6
FEBRERO	189.6	192.8	209	222.2	253.2	268	272.9	271.2
MARZO	182	184.9	199	200.6	238	254.5	254.1	265.3
ABRIL	171.4	189	182.8	205.7	224.3	233.9	244.9	243.5
MAYO	163.7	178	186.1	203.4	220.7	232.1	235.2	236.1
JUNIO	169.1	171	179.6	188.7	221.6	227.5	239.1	235.4
JULIO	161.5	173.9	181.6	200.8	222.6	229.6	237.5	237.5
AGOSTO	171.3	179.6	192.4	200.3	223.2	230.9	241.4	
SEPTIEMBRE	175.5	181.9	186.5	201.9	225.5	235.5	243.6	
OCTUBRE	177.7	189.5	197.9	225.4	236.5	246.4	247.6	
NOVIEMBRE	185.6	197	208.5	233.3	246.7	256.3	263.9	
DICIEMBRE	191.6	198.7	213.2	237.3	248.5	269.6	281.5	

Tabla 4.1

Fuente : Indicadores Petroleros. Informe mensual sobre Producción y Comercio de Hidrocarburos de la Subdirección de Planeación y Coordinación en la Gerencia de Evaluación e Información. PEMEX.

En la Gráfica 4.1 se tienen los datos originales contra el tiempo y de acuerdo a ésta se observan las siguientes características :

1.- Varianza no constante (creciente).
2.- La tendencia es creciente.
3.- Variación Estacional (anual).
4.- Variación Aleatoria.

En los datos se observa un patrón recurrente ; con una periodicidad anual, es decir, cada 12 meses se repite el comportamiento. Esto se debe a que existe una mayor demanda del producto en los meses en los que se presentan bajas temperaturas climáticas, como es en Diciembre, Enero y Febrero. Debido a que estas condiciones climáticas son más favorables para la población en los meses de Marzo a Septiembre disminuye el consumo del producto, es por eso que los datos muestran un comportamiento repetitivo cada 12 meses.

Para determinar la existencia de fluctuaciones estacionales en la serie de tiempo se utilizó el paquete estadístico STATGRAPHICS, dado que es una herramienta útil para realizar entre otros un análisis del comportamiento de los datos, esto es, que a través de éste podemos obtener el periodograma integral de residuales, el cual nos servirá como instrumento visual para determinar si la serie de tiempo presenta tendencia y/o estacionalidad lo cual será de gran utilidad para conocer el fenómeno y determinar que modelo puede ser apropiado en base al Método de Alisamiento Exponencial.

A continuación se presenta el periodograma integral donde se observa una desviación sistemática sobre la línea recta de la cual se puede interpretar como tendencia.

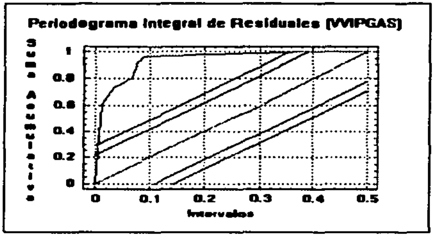


Figura 4.2 Periodograma Integral que muestra Tendencia.

En base a este resultado es necesario aplicar 1 diferencia para eliminar la tendencia, a través del siguiente periodograma integral se confirma que existe variación estacional dado que este presenta la forma escalonada o saltos en los periodos :

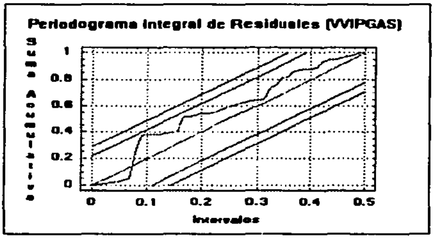


Figura 4.3 Periodograma Integral que presenta forma escalonada.

Es importante encontrar una combinación adecuada de las constantes de alisamiento, las cuales van a generar un ajuste apropiado entre el pronóstico y los datos originales. Asignaremos un valor de 0.1 a la constante α y los componentes de la tendencia y estacionalidad van a tener un valor de cero, de esta forma los excluimos por el momento del análisis. Esto se define desde el Menú Principal en las opciones **Modelo** y **Ajuste**.

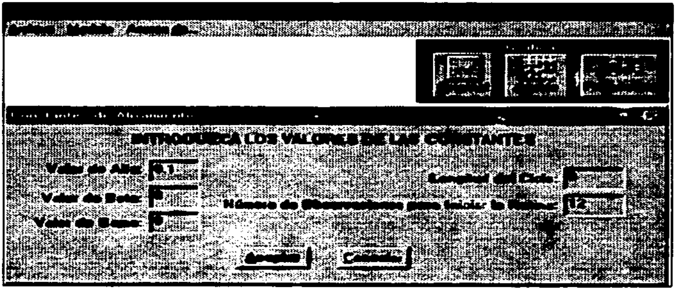


Figura 4.4 Pantalla de Captura de las Constantes de Alisamiento.

Dado que no se introdujo el valor de la constante γ, la longitud de ciclo es por default cero, esto es porque no se está incluyendo la periodicidad en el análisis. El número de observaciones para iniciar la rutina tendrá valor de 12.

Después de presionar sobre el botón **Aceptar** con la ayuda del mouse o presionar las teclas Alt+A del teclado, el programa comienza a realizar los cálculos para el modelo de la base y el pronóstico generado para cada observación. Tales cálculos se presentan en la siguiente Tabla :

	Dato	Cálculo para Alfa	Cálculo para Beta	Cálculo para Gama	Pronóstico
1	200.000				
2	189.600				
3	182.000				
4	171.400				
5	163.700				
6	169.100				
7	161.500				
8	171.300				
9	175.500				
10	177.700				
11	185.600				
12	191.600				
13	203.000	180.725			180.725
14	192.800	181.933			181.933
15	184.900	182.229			182.229
16	189.000	182.906			182.906
17	178.000	182.416			182.416
18	171.000	181.274			181.274
19	173.900	180.537			180.537
20	179.600	180.443			180.443
21	181.900	180.589			180.589
22	189.500	181.480			181.480
23	197.000	183.032			183.032
24	198.700	184.599			184.599
25	220.100	188.149			188.149
26	209.000	190.234			190.234
27	199.000	191.111			191.111
28	182.800	190.280			190.280
29	186.100	189.862			189.862
30	179.600	188.835			188.835
31	181.600	188.112			188.112
32	192.400	188.541			188.541
33	186.500	188.337			188.337
34	197.900	189.293			189.293
35	208.500	191.214			191.214
36	231.200	193.412			193.412
37	232.400	197.311			197.311
38	222.200	199.800			199.800
39	200.600	199.880			199.880
40	205.700	200.462			200.462
41	230.400	200.756			200.756
42	188.700	199.550			199.550

	Dato	Cálculo para Alfa	Cálculo para Beta	Cálculo para Gama	Pronóstico
43	200.800	199.675			199.675
44	200.300	199.738			199.738
45	201.900	199.954			199.954
46	225.400	202.499			202.499
47	233.300	205.579			205.579
48	237.300	208.751			208.751
49	252.900	213.166			213.166
50	253.200	217.169			217.169
51	238.000	219.252			219.252
52	224.300	219.757			219.757
53	220.700	219.851			219.851
54	221.600	220.026			220.026
55	222.600	220.284			220.284
56	223.200	220.575			220.575
57	225.500	221.068			221.068
58	236.500	222.611			222.611
59	246.700	225.020			225.020
60	248.500	227.368			227.368
61	264.300	231.061			231.061
62	268.000	234.755			234.755
63	254.500	236.729			236.729
64	233.900	236.447			236.447
65	232.100	236.012			236.012
66	227.500	235.161			235.161
67	229.600	234.605			234.605
68	230.900	234.234			234.234
69	235.500	234.361			234.361
70	246.400	235.565			235.565
71	256.300	237.638			237.638
72	269.600	240.834			240.834
73	270.300	243.781			243.781
74	272.900	246.693			246.693
75	254.100	247.434			247.434
76	244.900	247.180			247.180
77	235.200	245.982			245.982
78	239.100	245.294			245.294
79	237.500	244.515			244.515
80	241.400	244.203			244.203
81	243.600	244.143			244.143
82	247.600	244.489			244.489
83	263.900	246.430			246.430
84	281.500	249.937			249.937
85	286.600	253.603			253.603
86	271.200	255.363			255.363
87	265.300	256.356			256.356
88	243.500	255.071			255.071
89	236.100	253.174			253.174
90	235.400	251.396			251.396
91	237.500	250.007			250.007

Tabla 4.2 Cálculos para cuando $\alpha = 0.1$. Modelo Básico.

Esta tabla se despliega activando las opciones del Menú Principal que son Ajuste y Ver Datos.

En seguida se puede continuar con la rutina de graficación con el fin de observar el ajuste del modelo a los datos, como se muestra en la Gráfica 4.2.

Para obtener un pronóstico aceptable, se requiere de un proceso de varias iteraciones, de este modo el usuario tiene la opción de tratar con diferentes valores de las constantes hasta encontrar la combinación más adecuada. Para este fin se puede seleccionar de manera arbitraria un rango para asignar valores a las constantes, esto es, supongamos un rango de 0.05 a 0.25 en incrementos de 0.05 lo cual nos da 125 combinaciones.

Para mostrar cómo el modelo básico puede ser ampliado, los componentes de la tendencia y estacionalidad son incluidos en el análisis, en este caso se les asignan valores de α=0.20, β=0.20, γ= 0.25 y la longitud de ciclo igual a 12, por lo que la serie de tiempo tiene una periodicidad anual. El número de observaciones para iniciar la rutina es un múltiplo de la longitud del ciclo, que en este caso será igual a 24.

Como resultado de los cálculos obtenemos la Gráfica 4.3, donde se grafican los datos originales y el pronóstico. A través del modelo que considera la tendencia y/o estacionalidad se obtiene un mejor ajuste que con el modelo básico, dado que el comportamiento del pronóstico para cada dato es más parecido a los datos originales.
En base a este proceso, el usuario puede tratar con diferentes esquemas hasta encontrar un modelo con el que obtenga un ajuste adecuado a los datos originales.

Por el momento se han empleado medidas cualitativas para evaluar un pronóstico, pero también podemos aplicar medidas cuantitativas. En base a lo descrito en el capítulo 3 apartado *Estadísticas*, el programa emplea el Coeficiente de Correlación, la Desviación de la Media Absoluta y la Suma Cuadrática del Error. Los valores de estas ecuaciones se visualizan a través de una tabla que se puede activar desde las opciones Modelo y Estadísticas del Menú Principal. Esta tabla se muestra a continuación.

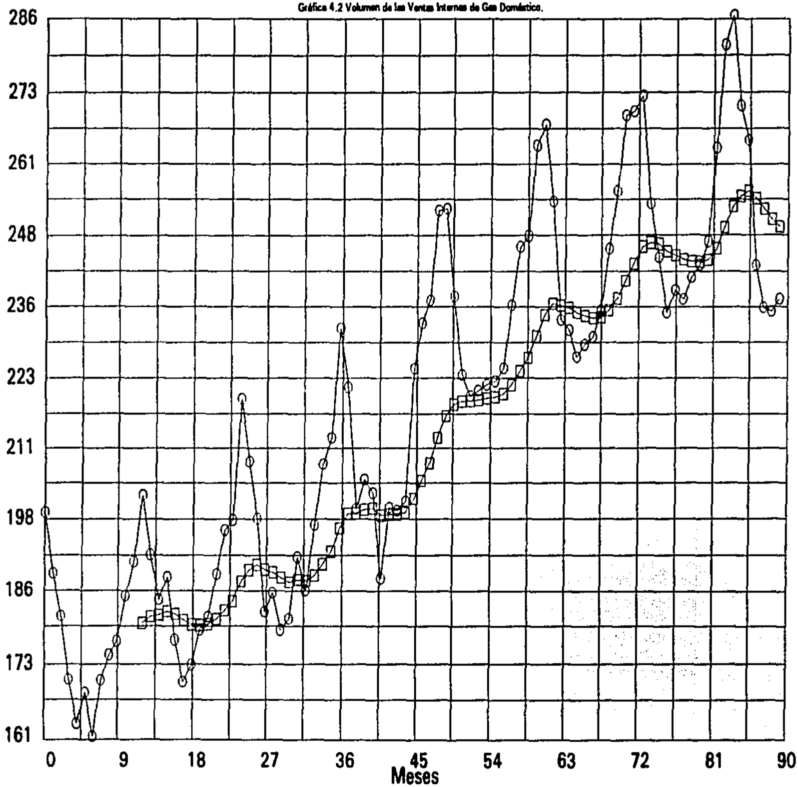
	Alfa	Beta	Gama	Coeficiente de Correlación	Desviación de la Media Absoluta	Suma Cuadrática del Error
1	0.1	0	0	0.8401870	13.934630	25627.010
2	0.2	0.2	0.25	0.8595265	11.425360	11956.460

Tabla 4.3 Estadísticas.

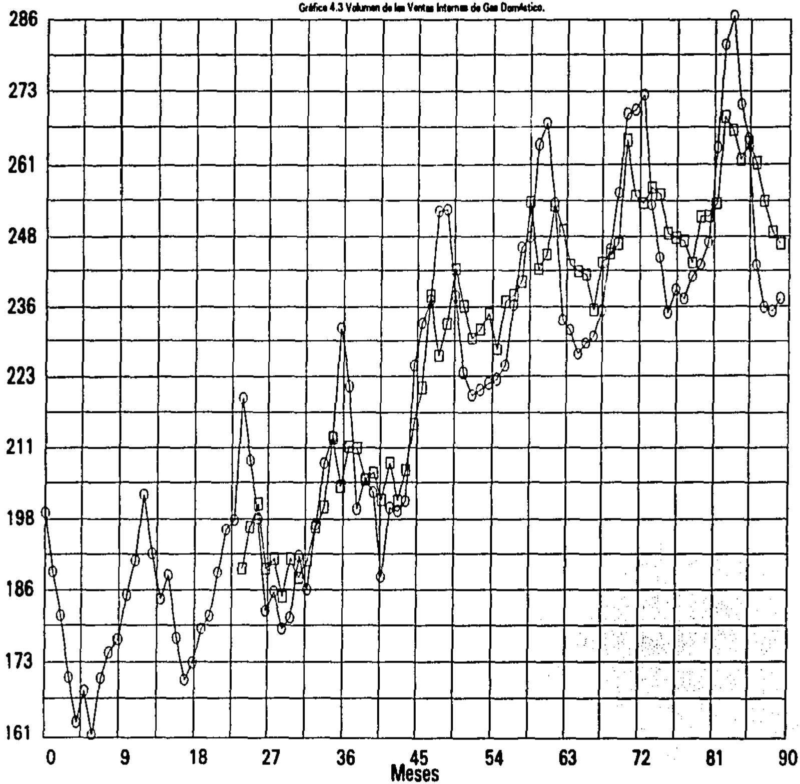
En esta tabla se despliegan la relación de los valores dados a las constantes incluyendo las columnas con los correspondientes cálculos estadísticos, de esta forma en base a la comparación de resultados, se puede realizar una evaluación para obtener el modelo adecuado.

Una vez que se ha obtenido este modelo, el usuario puede obtener los pronósticos para k observaciones a futuro, considerando que normalmente el pronóstico pierde exactitud cuando se trata de predecir a largo plazo.

Gráfica 4.2 Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico.



Gráfica 4.3 Volumen de las Ventas Internas de Gas Doméstico.



CONCLUSIONES

El Método de Alisamiento Exponencial puede ser aplicado a series de tiempo en campos como la Economía, Administración, Ingeniería, etc., para obtener pronósticos aceptables y así contribuir en la toma de decisiones. La complejidad que presentan estas series de tiempo es tal que no es posible formular ecuaciones diferenciales para la obtención de un modelo matemático que represente su comportamiento. Una característica importante de las series tiempo es que son principalmente discretas, es decir, que se presentan en intervalos de tiempo fijo ya sea semanal, mensual, anual, etc.

Por otra parte el método de alisamiento exponencial proporciona un factor de peso (ponderación) diferente para cada dato de la serie de tiempo el cual se define por el valor asignado a las constantes de alisamiento. La desigualdad de pesos consiste en dar menor peso a las observaciones remotas y mayor peso a las más recientes, esto se hace con el objeto de asegurar que las observaciones más recientes tengan mayor influencia en el pronóstico.

Debido a que el Método de Alisamiento Exponencial está fundamentado en cálculos sencillos y que además solo requiere como parámetros de entrada las constantes de alisamiento, las unidades de tiempo y la longitud de ciclo para iniciar el proceso, es por esto que es factible plasmarlo en un programa de cómputo.

Es así como el método fue sistematizado en la computadora para crear una herramienta que proporciona al usuario un empleo amigable, flexible y sobre todo que pueda obtener resultados de forma rápida y sencilla. Otra de sus características es que puede tratar con varios esquemas de modelos propuestos que implican cambios en las constantes de alisamiento, de tal manera que se pueden analizar los efectos de estas constantes sobre resultados previos con el fin de llevar a cabo una comparación entre cada modelo generado. Para evaluar el modelo propuesto, el usuario se puede apoyar sobre los resultados que se presentan en forma gráfica y tabular. A través de la gráfica se visualiza la respuesta del modelo sobre la serie de tiempo, con este resultado el usuario puede desarrollar un sentido intuitivo para decidir cual podría ser la mejor combinación de parámetros.

En cuanto a la forma tabular se despliegan los cálculos obtenidos y estándares estadísticos comúnmente empleados para evaluar la calidad de pronóstico. La combinación de estas dos formas de presentar los resultados proporciona medidas que permiten al usuario seleccionar el modelo de Alisamiento Exponencial que tenga propiedades similares al proceso real.

Las ventajas que podemos considerar en el uso del método de Alisamiento Exponencial, es que no requiere de muchos recursos de cómputo (memoria, espacio en disco), ya que solo necesita almacenar el último pronóstico el cual mediante un algoritmo recursivo puede generar un nuevo pronóstico.

Considero que este trabajo puede ser útil como material didáctico para los estudiantes de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación, ya que es importante tener conocimiento de varias técnicas de pronósticos para decidir cual de ellas podría ser de utilidad. También puede ser de ayuda para profesionistas de otras áreas que requieran emplear este tipo de método, como se muestra en el caso de estudio presentado en el Capítulo 4 el cual es del área de Ingeniería Petrolera.

Desde luego se puede pensar en las posibles mejoras del programa con el fin de enriquecerlo y el de aportar al usuario otras alternativas, esto es, incluir otras técnicas de pronóstico, ya que como se mencionó anteriormente, existen muchas técnicas, sin embargo ante todas estas posibilidades no hay una técnica que sea universalmente satisfactoria.

BIBLIOGRAFÍA.

[1] BRUCE L. BOWERMAN & RICHARD T. O'CONNELL
FORECASTING AND TIME SERIES
Duxbury Press 1979.

[2] RAFAEL G. MORAS AND ERIC L. BLAIR
FITTING EXPONENTIAL SMOOTHING MODELS WITH COMPUTER GRAPHICS
Computers Ind. Engng. Vol. 16, No. 3, pp.387-405, 1989.

[3] ACT. MARIA DEL CARMEN GONZALEZ VIDEGARAY
MODELOS DE DECISION CON PROCESOS ESTOCASTICOS II
México, 1990. UNAM.

[4] OSKAR LANGE
INTRODUCCION A LA ECONOMETRIA
Fondo de Cultura Económica. México.

[5] VICTOR M. GUERRERO
ANALISIS ESTADISTICO DE SERIES DE TIEMPO ECONOMICAS
UAM 1991.

[6] GEORGE C. CANAVOS
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA. Aplicaciones y Métodos
McGraw-Hill 1989.

[7] TIME SERIES AND SYSTEM ANALISYS WITH APPLICATIONS
WU. SHIEN MING 1983.