

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

TESIS

Sistemas de Control Borroso.  
Acercamiento a los Aprovechamientos  
Hidráulicos.

PRESENTA

**Gabriel Soto Cortés**

para obtener el grado de  
Maestro en Ingeniería Hidráulica.

Dirige:

Dr. Carlos A. Escalante Sandoval

MÉXICO, D.F., DICIEMBRE DE

1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**En primer lugar, a ustedes... mis padres  
A las Instituciones educativas del país y a sus miembros  
A México... mi patria**

**Especialmente a ti Graciela, por tu amor y paciencia**

**" ... aún te resta mucho que aprender. Te digo que el dolor es lo único infinito en este mundo. Ahora vete a tu casa y toma un lápiz. Cuanto más hambriento y desgraciado estés, mejor trabajarás... "**

**- Irving Stone - "Anhelos de vivir"**

## **Agradecimientos.**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el respaldo prestado durante estos dos años de arduo trabajo.

A la Universidad Nacional y a todos aquellos profesores con vocación que motivaron en mi un cariño entrañable a la Hidráulica.

Al Dr. Carlos Escalante Sandoval, por compartir conmigo su conocimiento y su tiempo; por creer en mi y en mi trabajo alentándome y guiándome con sus comentarios desde mi ingreso a la DEPFI.

Al M.I. Moisés Berezowsky Verduzco. Es precisamente en su persona en la que reconozco que antes de cualquier grado o reconocimiento académico está la calidad y calidez humana. Tendré siempre presente su incondicional amistad.

Al M.I. Gilberto Sotelo Ávila, por representar en mi vida un ejemplo de profesionalismo, capacidad y amor a una profesión.

Al Ing. Darío Guaycochea Guglielmi, guía de mis primeros pasos y responsable, en gran medida, de mi incursión en la Hidráulica.

Al Dr. Arturo Trejo Rodríguez. Ejemplo y pieza motivadora en mi desarrollo profesional.

Al Dr. Rolando Springall Galindo, al M.I. Oscar Fuentes Mariles y al Dr. Jesús Gracia Sánchez, por contribuir a mejorar notablemente este trabajo con sus críticas y comentarios.

Al Ing. Fabián Rivera Trejo, quien participó activamente en la discusión y desarrollo de algunos capítulos de este trabajo. Amigo sincero en los "buenos y malos tiempos".

A la Ing. Adriana Moreno, culpable de mi "borrosidad", a la Ing. Regina Castellanos, por ofrecerme su ayuda en la revisión ortográfica de este trabajo, al Ing. Alberto Kampfner y al Ing. Baldemar Mendez por sus comentarios y amistad sincera.

Al Ing. Efraín Estrada Soto y al D.G. Miguel Ángel Villegas Molina quienes tuvieron que soportar mis monólogos sobre subconjuntos borrosos y que participaron en la preparación de la presentación oral de este trabajo.

Al final de la lista pero no al último, a la Profra. Angélica Soto y al Profr. Gerardo Ávila por los que guardo especial cariño y quienes de manera desinteresada patrocinaron gran parte de mis estudios.



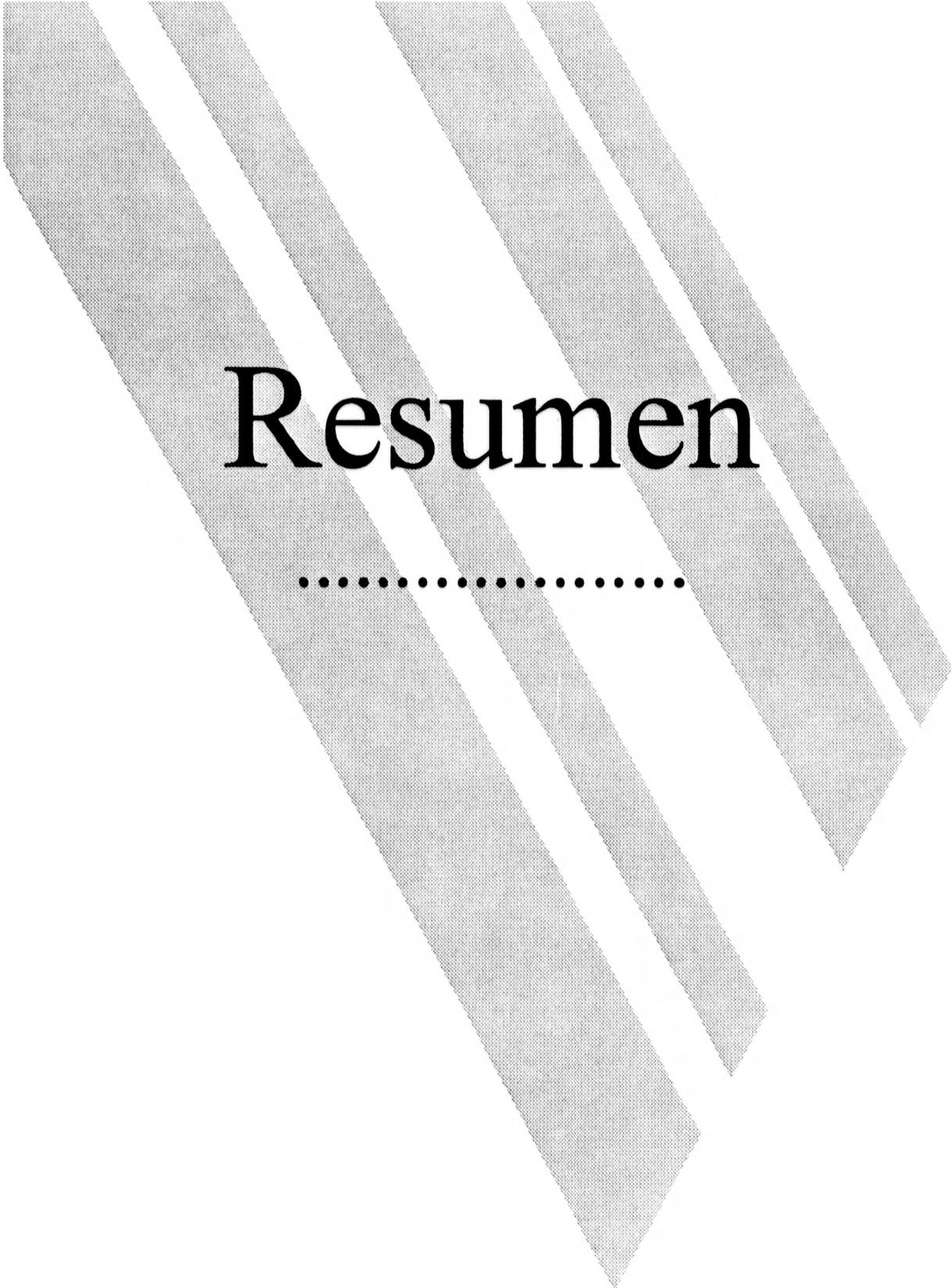
# Contenido

.....

## **Contenido**

<b>Resumen</b> .....	1
<b>Introducción</b> .....	3
<b>Capítulo uno: "El Mundo Borroso"</b>	
1.1 Introducción.....	8
1.2 El Mundo Borroso.....	8
1.2.1 La Lógica Borrosa y sus Orígenes.....	8
1.2.1.1 La Lógica Aristotélica como Raíz de la Lógica Borrosa.....	9
1.2.1.2 La Lógica Aristotélica y las Corrientes Filosóficas Posteriores.....	9
1.2.2 En Camino a la Borrosidad.....	10
1.2.3 El Nacimiento.....	11
1.2.4 La Primera Aplicación de la Lógica Borrosa a los Sistemas de Control.....	11
1.3 La Industria de la Matemática Borrosa.....	12
1.3.1 Japón en Términos Económicos.....	12
1.3.2 Estados Unidos.....	13
1.3.3 La Llegada de los Sistemas de Control Borroso.....	14
1.3.3.1 El Choque Cultural.....	14
1.3.3.2 Ambiente Idóneo para la Implantación de Sistemas de Control Borroso.....	15
1.3.3.3 Ventajas de los Sistemas de Control Borroso.....	15
1.3.3.4 Desventajas de los Sistemas de Control Borroso.....	16
1.4 Métodos que Trabajan con la Incertidumbre.....	16
1.4.1 Los Métodos Probabilísticos.....	16
1.4.2 Los Métodos no Probabilísticos.....	17
<b>Capítulo dos: "Bases Matemáticas de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos"</b>	
2.1 Introducción.....	19
2.2 El Subconjunto Ordinario y la Función Característica.....	19
2.2.1 Operaciones Elementales entre Subconjuntos Ordinarios.....	20
2.2.1.1 Complementación.....	20
2.2.1.2 Intersección.....	20
2.2.1.3 Unión.....	21
2.3 El Subconjunto Borroso y la Función de Membresía.....	21
2.3.1 Operaciones Elementales entre Subconjuntos Borrosos.....	22
2.3.1.1 Inclusión.....	22
2.3.1.2 Igualdad o Equivalencia.....	22
2.3.1.3 Complementación.....	23
2.3.1.4 Unión.....	24
2.3.1.5 Intersección.....	24
2.4 El Número Borroso.....	26
2.4.1 Subconjunto Ordinario de Nivel $\alpha$ .....	26
2.4.2 El Subconjunto Ordinario de Nivel $\alpha$ y el Número Borroso.....	27
2.4.2.1 Suma y Sustracción de Números Borrosos.....	28
<b>Capítulo tres: "Probabilidad, Posibilidad y Teoría de Subconjuntos Borrosos"</b>	
3.1 Introducción.....	30
3.2 Teoría de Probabilidad vs. Teoría de Subconjuntos Borrosos.....	30
3.2.1 Bases Probabilísticas.....	31
3.2.2 Bases Borrosas.....	33
3.3 Teoría de Posibilidad.....	34
3.3.1 Grafo Borroso.....	34
3.3.2 Proposiciones Borrosas.....	35
3.3.3 Implicación.....	37

<b>Capítulo cuatro: "Aplicación de la Teoría de Posibilidad a la Confiabilidad de Sistemas"</b>	
4.1	Introducción..... 39
4.2	La Confiabilidad de un Sistema Medida por una Función de Membresía..... 39
4.2.1	Una Clasificación General de la Función "Membresía" ..... 39
4.3	Toma de Decisiones con base en Información Borrosa..... 42
4.3.1	Análisis de Confiabilidad para un Sistema de Drenaje..... 42
4.3.1.1	Establecimiento de las Condiciones de Falla del Sistema..... 43
4.3.1.2	Estructurando un Diagrama Borroso de Falla..... 44
4.3.1.3	Estableciendo las Distribuciones Borrosas de Falla..... 45
4.3.1.4	Interpretación de las Relaciones Borrosas entre Estados..... 46
4.3.1.5	Determinación de la Posibilidad Anual Borrosa de Falla..... 47
<b>Capítulo cinco: "Determinación Borrosa de los Tiempos de Concentración en una Cuenca"</b>	
5.1	Introducción..... 52
5.2	Planteamiento Borroso..... 52
5.2.1	Enfoques Básicos..... 52
5.3	Determinación Borrosa de los Tiempos de Concentración en una Cuenca..... 54
5.3.1	Objetivos..... 54
5.3.2	Tiempo de Concentración..... 55
5.3.3	Establecimiento de los Universos de Discusión..... 55
5.3.4	Establecimiento de la Base de Conocimiento Borroso..... 58
5.3.5	Ajuste del Sistema..... 60
5.3.5.1	Consideraciones Previas al Ajuste..... 62
5.3.5.2	Consideraciones de Cálculo..... 62
5.3.6	La Superficie de Solución al Sistema..... 65
5.3.7	Conclusión..... 67
<b>Capítulo seis: "Pronóstico Borroso de Avenidas a Tiempo Real Usando Gastos Precedentes"</b>	
6.1	Introducción..... 71
6.2	Pronóstico Borroso a Tiempo Real de Avenidas Máximas en la Estación Huites (Sinaloa, Méx.)..... 71
6.2.1	Registros Históricos de Escurrimientos en la Estación Huites..... 72
6.2.2	Modelo Borroso para la Determinación de Tiempos Pico..... 76
6.2.2.1	Correlación Histórica de los Tiempos de Pico con respecto a los Tiempos de Base..... 78
6.2.2.2	Resultados de la Predicción de las Variables Temporales "tp", "tr" y "tb"..... 78
6.2.3	Modelo Borroso para la Determinación del Gasto de Pico "Qdp"..... 81
6.2.3.1	Primera Etapa de Ajuste..... 83
6.2.3.2	Resultados de la Predicción de "Qdp" en la Primera Etapa de Ajuste..... 84
6.2.3.3	Segunda Etapa de Ajuste..... 87
6.2.3.4	Resultados de la Predicción de "Qdp" en la Segunda Etapa de Ajuste..... 89
6.2.4	Comentarios Finales sobre el Pronóstico Borroso de Avenidas..... 92
<b>Conclusiones Generales..... 95</b>	
<b>Símbolos y Nomenclatura..... 98</b>	
<b>Bibliografía y Referencias..... 100</b>	



# Resumen

.....

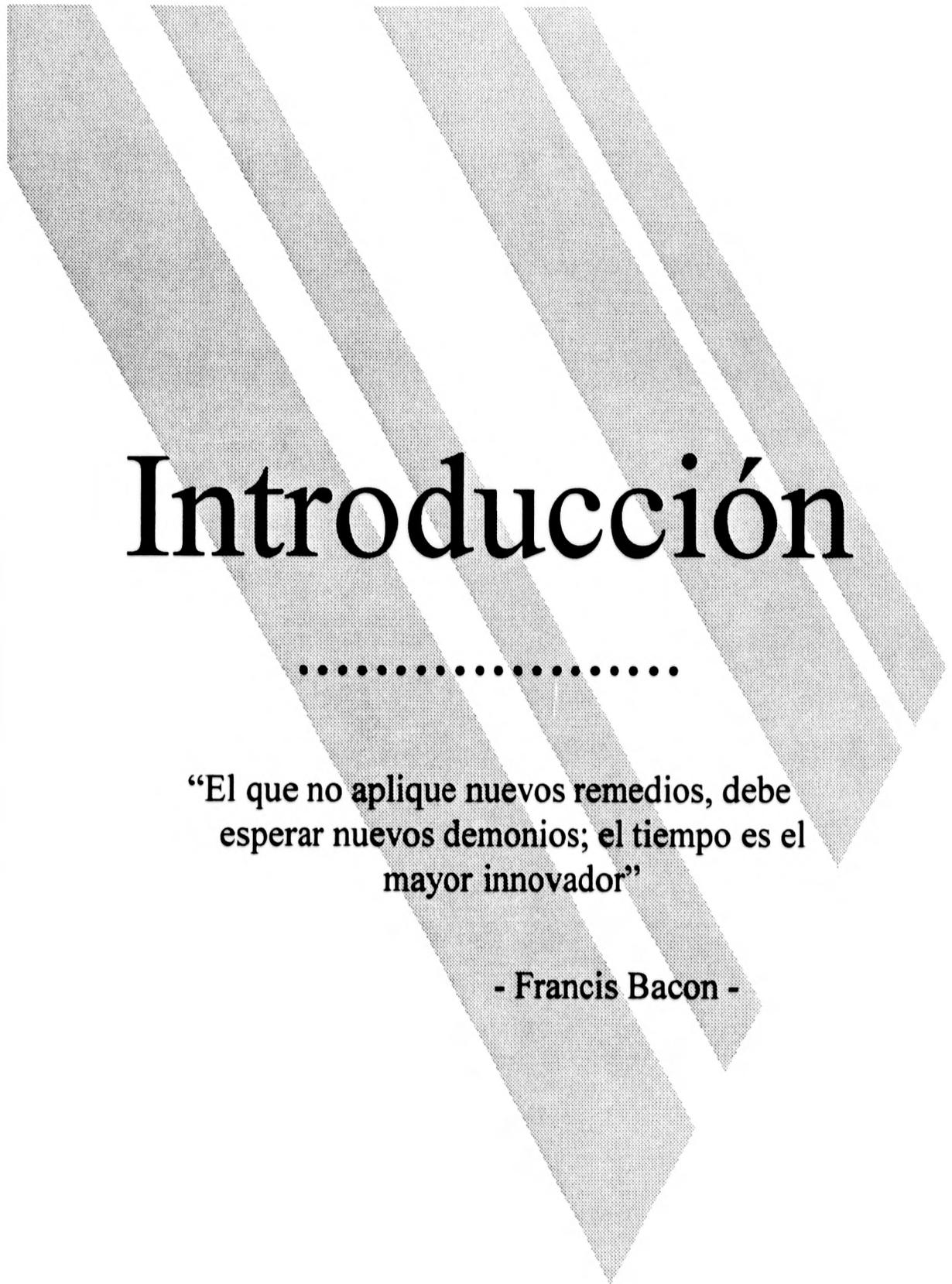
## **Resumen**

Se incluye una breve revisión de los principios matemáticos fundamentales que cimentan la teoría de subconjuntos borrosos, su origen, así como su comparación con la teoría de conjuntos ordinaria.

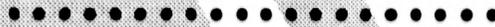
De manera más extensa, se trabaja sobre la línea de la teoría de la posibilidad y certeza, así como en los sistemas de control borrosos para destacar sus posibilidades de aplicación en el área de ingeniería y, muy concretamente, en la Hidráulica y los Aprovechamientos Hidráulicos.

Cabe hacer notar, que aunque la teoría de los subconjuntos borrosos se encuentra en una etapa prospera de desarrollo en algunas áreas de investigación (sobre todo de la llamada inteligencia artificial y la teoría de control de sistemas), sus aplicaciones hidráulicas e hidrológicas son prácticamente nulas. En este trabajo se desarrollan algunas posibles aplicaciones al respecto, y en particular:

- Se estudia la confiabilidad en sistemas hidráulicos con base en la teoría de posibilidad.
- Se aplica el "planteamiento borroso de sistemas de control" en la determinación borrosa del tiempo de concentración en una cuenca.
- Se demuestra con un ejemplo el potencial de aplicación de los sistemas de control borroso en la predicción de eventos en donde se involucran varias variables; específicamente, en el pronóstico de avenidas a tiempo real usando dos variables de entrada.



# Introducción



**“El que no aplique nuevos remedios, debe  
esperar nuevos demonios; el tiempo es el  
mayor innovador”**

**- Francis Bacon -**

## **Introducción**

El hombre, desde sus orígenes, ha tratado de dar explicación a los fenómenos que lo rodean y enfrentar las carencias y limitaciones que le impone su época.

En un principio se acepta simplemente, que las cosas se suceden bajo lineamientos y normas "divinas" que no son cuestionables; paralelamente a esta idea surge de manera tímida la ciencia exacta, cuyo principio fundamental es el de dar una explicación lógica de las cosas. Hasta nuestros tiempos, la pugna ideológica continúa entre el cuestionar o no.

Conforme se han abierto nuevas áreas del conocimiento y nos hacemos más conscientes de la naturaleza del pensamiento humano, nos vemos obligados a romper con el esquema que nos ha ligado desde siempre al enfoque objetivo de las cosas, surgiendo nuevos protagonistas dentro de esta pugna, pues, si bien pareciera que el resultado de la evolución encamina al pensamiento humano a la ciencia objetiva y exacta, debemos estar conscientes de que ninguna mente humana es idéntica a otra, lo cual conlleva a percibir la objetividad del pensamiento de manera distinta. Por ejemplo, los modelos y las leyes formuladas bajo el método científico tienen un principio universal y su aplicación no está limitada en tiempo ni espacio, sino solamente por las restricciones mismas del modelo. Así, dos teorías como son las de, la física clásica y la física relativista, separadas conceptualmente y concebidas en tiempos distintos, se contienen mutuamente la una a la otra bajo las cotas adecuadas, mostrando de ésta manera la exactitud y universalidad de la ciencia.

Por otra parte, es el hacedor de la ciencia, quien al dar su propia interpretación de la misma la modifica. Así, la física relativista ha adquirido gran parte de su fama y popularidad, gracias a las diferentes interpretaciones del mismo modelo matemático, concebidas por distintos investigadores.

De esta manera, surge la necesidad de encontrar nuevas herramientas conceptuales que ayuden a entender nuestra propia vaguedad del pensamiento, la cual da lugar a esta diversidad de interpretaciones de un mismo modelo; es en este ámbito donde surge el término "pensamiento borroso":

*"¿Cómo reunir conceptualmente al razonamiento global y al razonamiento lógico?, ¿Cómo asociarlos para estar a las vez más cerca de que es la realidad física, y de lo que es la interpretación por medio del pensamiento humano?, ¿Cómo introducir lo borroso en la matemática?" (Kaufmann, 1982).*

## Introducción

---

La teoría de los subconjuntos borrosos permite identificar y estructurar de manera más clara todo aquello separado por fronteras poco precisas, como el pensamiento, el lenguaje y la percepción del hombre sobre todo aquello que lo rodea y a la cual, Kaufmann llama razonamiento global.

La concepción matemática de los subconjuntos borrosos, surge a partir de 1965 por L. A. Zadeh. Para coordinar la vaguedad de los pensamientos humanos, Zadeh introdujo esta teoría, orientando sobre cómo racionalizar la incertidumbre de la imprecisión y de la vaguedad.

Así, por ejemplo, al usar el lenguaje cotidiano para comunicar ideas, involucramos el uso de adjetivos para referimos a las cosas. Los adjetivos, en general, tienen una naturaleza ambigua y pueden tener varios significados dependiendo del punto de vista de quien los utiliza. De lo anterior se observa la necesidad de cuantificar esta vaguedad.

Por ejemplo, el movimiento de sedimentos es un problema complejo de movimiento incipiente en el cual los términos "liso" y "rugoso" del cauce son los que le determinan cuantitativamente, pero ¿Cuál es la frontera entre lo "liso" y lo "rugoso"?

De manera semejante, podría pensarse en el diseño de una obra hidráulica, en la cual deseamos saber si la lluvia en la región debe considerarse como un criterio significativo en la toma de decisiones, para lo cual un grupo de ingenieros ha formulado la siguiente política:

Si la lluvia es densa, entonces debe considerársele muy fuertemente como un criterio en la toma de decisiones.

Si la lluvia es moderada, entonces debe considerársele fuertemente como un criterio en la toma de decisiones.

Si la lluvia es escasa, entonces debe considerársele normalmente como un criterio en la toma de decisiones.

¿Pero cómo cuantificar los términos "liso", "rugoso", "denso", "moderado", "escasa", "muy fuertemente", "fuertemente" y "normalmente"? y lo que es más ¿Cómo establecer sus fronteras? (Por ejemplo entre fuertemente y muy fuertemente).

El presente trabajo intenta mostrar de manera introductoria el potencial que para la ingeniería (y en particular para la Hidráulica) tiene reservada la teoría de los subconjuntos borrosos.

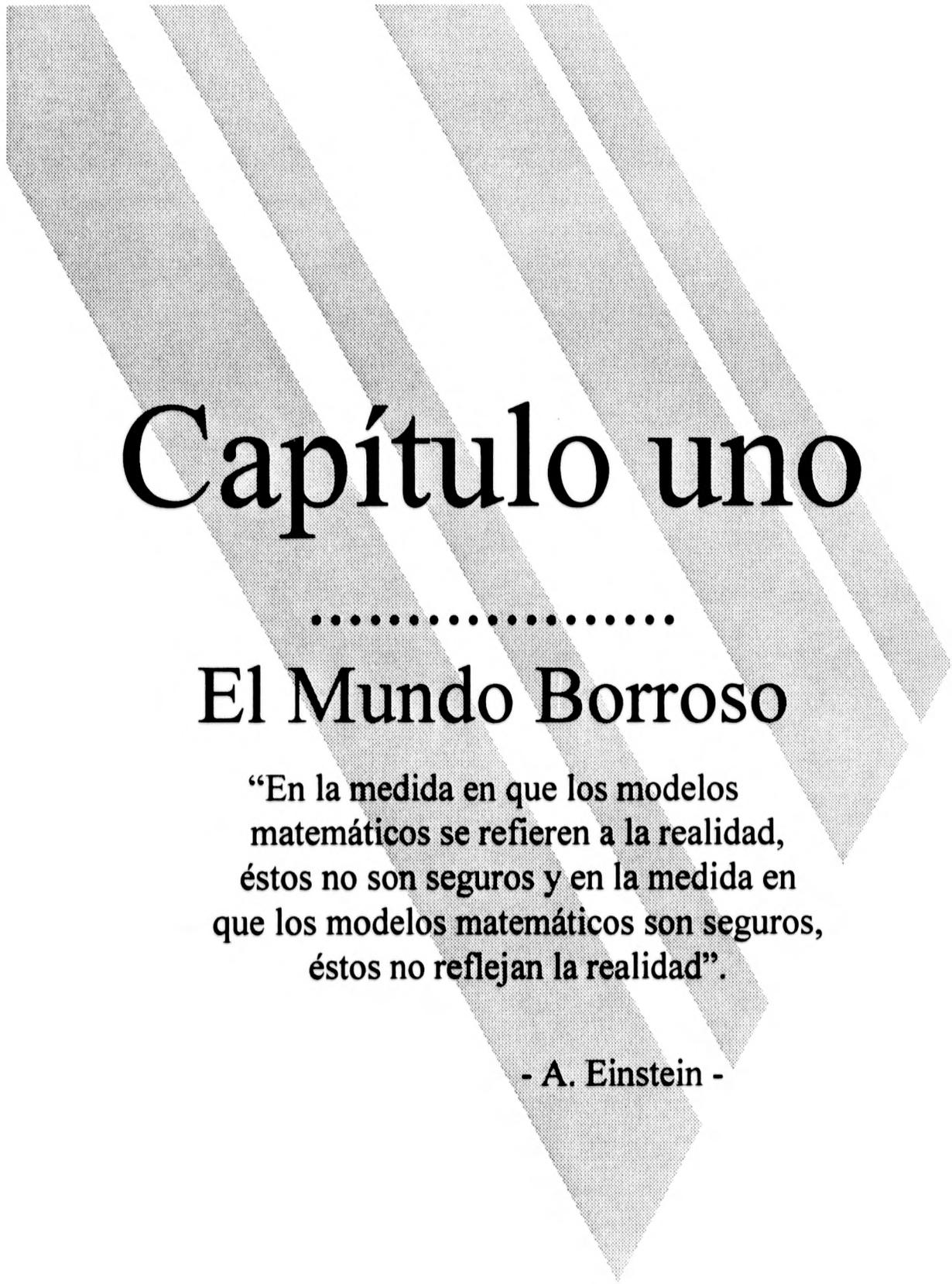
## Introducción

---

Se parte presentando la historia y las bases matemáticas de esta teoría y el cómo se integra ésta a la concepción tradicional.

Se continuará dando un vistazo a una aplicación de una herramienta ingenieril, que posiblemente represente el subtema más poderoso de los subconjuntos borrosos, la "Teoría de Posibilidad y Certeza" .

Se abordará, finalmente, el área de los Sistemas de Control Borroso con dos aplicaciones a los Aprovechamientos Hidráulicos.



# Capítulo uno

.....

## El Mundo Borroso

**“En la medida en que los modelos matemáticos se refieren a la realidad, éstos no son seguros y en la medida en que los modelos matemáticos son seguros, éstos no reflejan la realidad”.**

**- A. Einstein -**

## **1.1 Introducción**

En la últimas dos décadas han surgido una serie de tecnologías que se ven motivadas por el interés de integrar y aprovechar alguna o algunas de las cualidades y funciones intrínsecamente humanas; por ejemplo, la inteligencia artificial puede considerarse por completo inmersa en el dominio de la psicología. Algunas otras como las redes neuronales, la genética y la programación están inspiradas en la consideración de que los procesos biológicos del procesamiento de información y de comunicación son el ejemplo a seguir. No resulta difícil encontrar un punto en común a todas estas tecnologías llamadas "inteligentes" :

*"La necesidad de encontrar nuevas metodologías para procesar, representar, manipular y asimilar el conocimiento de manera que sea posible reproducir el estilo del pensamiento humano y además haciéndolo susceptible de ser llevado al procesamiento computacional"*(Mc Neill, 1993).

Originalmente, la lógica borrosa fue vista como la herramienta que permitía interpretar sofisticadas sentencias del lenguaje natural dentro de un formalismo matemático.

Dentro de las páginas siguientes, abordaremos el barco fascinante de la matemática borrosa desde sus fundamentos filosóficos y conceptuales para sorprendernos de su antigüedad. Se comentarán posteriormente, algunas de las más notables aplicaciones, surgidas en los orígenes de esta teoría, y como han evolucionado éstas en tan sólo 30 años, así de cómo han impactado en los ingresos económicos de las grandes potencias industrializadas.

Se ha hecho un cuidadoso y extenso estudio bibliográfico, para rescatar las noticias más recientes sobre nuestro tema y hacer evidente, según avancemos en este capítulo, la necesidad de entender que, nos guste o no, hoy día ya nos encontramos inmersos en un mundo borroso.

## **1.2 El Mundo Borroso**

### **1.2.1 La Lógica Borrosa y sus Orígenes**

Mientras que la motivación original de la lógica borrosa fue la de ayudar a manejar la imprecisión de las palabras, sus primeros usuarios se ocuparon primordialmente de sus matices teóricos. Muchos de estos artículos fueron devotos de los fundamentos básicos y de describir su "potencial" de aplicación. Durante esta primera etapa se destacó la necesidad de

distinguir la lógica borrosa de la teoría de la probabilidad<sup>1</sup>. Ahora queda bien claro que tanto una teoría como la otra están dirigidas a tratar diferentes tipos de incertidumbre.

La siguiente etapa del desarrollo de esta disciplina fue caracterizada por el éxito de la misma, particularmente en Japón. Su éxito ha motivado la aplicación de la lógica borrosa en la construcción de modelos de sistemas complicados de construcción en las disciplinas de ingeniería. La situación actual, nos hace ser testigos del nacimiento de una nueva etapa de desarrollo de la lógica borrosa, en la cual se hará evidente el poder de esta metodología.

### **1.2.1.1 La Lógica Aristotélica como Raíz de la Lógica Borrosa**

La lógica fue desarrollada hacia el siglo IV a.C. por el filósofo griego Aristóteles, por lo que frecuentemente se le llama lógica aristotélica en su honor. Aristóteles basó su obra en los trabajos de los primeros filósofos griegos, Pitágoras y los que le siguen, quienes pensaban que la materia era esencialmente números y que por ende el universo podía definirse con base en relaciones de este tipo. Aristóteles extiende la idea de Pitágoras hacia el pensamiento humano y propone que la toma de decisiones se vale de "cierta" precisión matemática.

Para el siglo X d.C., la lógica aristotélica seguía siendo la base de pensamiento del viejo mundo, situación que persistía por dos razones:

- porque simplifica el pensamiento alrededor de problemas y
- porque da certeza fácil de probar y aceptar.

Para 1996 la borrosidad no es una nueva idea de ningún modo. Se ha desarrollado el concepto borroso durante 30 años con ese nombre pero sus raíces se remontan 2500 años.

### **1.2.1.2 La Lógica Aristotélica y las Corrientes Filosóficas Posteriores**

Aun Aristóteles consideraba que había grados de verdad y falsedad, particularmente al construir conjeturas acerca de posibles eventos futuros. Platón, maestro de Aristóteles, tuvo que considerar grados de pertenencia. De hecho la palabra platónico envuelve este concepto de "pertenencia conceptual".

---

<sup>1</sup> En el Capítulo tres de este trabajo, se desarrollarán algunas ideas respecto a este tema.

Para el siglo XVIII tres filósofos contemporáneos juegan alrededor de esta idea. El filósofo y clérigo irlandés George Berkeley y el escocés David Hume piensan que cada concepto tiene un fondo concreto, y aquellos que son parecidos en cierta forma son atraídos entre sí. En particular, Hume cree en la lógica del sentido común (razonamiento basado en el conocimiento de la gente ordinaria adquirido por la experiencia).

En Alemania, Immanuel Kant considera que **solamente las matemáticas pueden proveer definiciones incuestionables**; si fuese de esta manera, muchos principios contradictorios no podrán entenderse; por ejemplo, es cierto que teóricamente "la materia puede ser dividida infinitamente", pero al mismo tiempo no podemos dividirla infinitamente. Lo anterior es un ejemplo de una verdad parcial. Particularmente al respecto, la escuela americana de filosofía llamada pragmatismo, fundada en los primeros años de este siglo por Charles Sanders Peirce, considera la vaguedad como algo más que CIERTO o FALSO.

### 1.2.2 En Camino a la Borrosidad

El concepto ordinario de la lógica produce innumerables contradicciones, las cuales fueron popularizadas a los inicios del siglo XX por el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell quien estudió la vaguedad del lenguaje tanto como su precisión, concluyendo que la vaguedad es susceptible de cuantificarse.

El filósofo alemán Ludwig Wittgenstein, estudió los caminos en los cuales las palabras pueden ser usadas con diferentes significados que tienen realmente poco en común.

La teoría ordinaria de conjuntos, fue inventada hasta el siglo XIX por el matemático alemán Georg Cantor, con las bases de la lógica aristotélica.

La primera lógica de la vaguedad fue desarrollada en 1920 por el filósofo polaco Jan Lukasiewicz, quien consideró conjuntos con valores característicos 0,  $\frac{1}{2}$  y 1, para posteriormente extenderlas a todo el intervalo  $[0, 1]$ .

Posteriormente, la naturaleza matemática de los eventos de la vida real y la complejidad de todos los roles jugados por la naturaleza, fueron descubiertos por físicos como Albert Einstein (relatividad) y Werner Heisenberg (incertidumbre).

Einstein comenta:

---

*“ En la medida en que los modelos matemáticos se refieren a la realidad, estos no son seguros y en la medida en que los modelos matemáticos son seguros, estos no reflejan la realidad”.*

El siguiente gran paso fue dado por Max Black en 1937 en la Universidad de Cornell. Max Black consideró el grado hasta el cual los objetos eran miembros de un conjunto dado (**grado de membresía**). Con lo anterior, se da inicio a una teoría general de la vaguedad.

### 1.2.3 El Nacimiento

El trabajo desarrollado durante los siglos XIX y XX da pie al concepto de la lógica borrosa, introducido por el nacionalizado estadounidense Lotfi Zadeh<sup>2</sup>.

En los 60's, Lotfi Zadeh, inventó la lógica borrosa, la cual combina los conceptos de la lógica ordinaria y la teoría de conjuntos de Lukasiewicz para definir el grado de membresía. Una de sus principales aportaciones, fue la de demostrar que las matemáticas pueden usarse para ligar el lenguaje y la inteligencia humana. Muchos conceptos se definen mejor con palabras que con matemáticas, y la lógica borrosa, usando como medio de expresión el subconjunto borroso, constituye una disciplina que puede construir mejores modelos acordes a la realidad.

Actualmente, los usos de la lógica borrosa se extienden ampliamente en diversas áreas: la predicción, la toma de decisiones, sistemas de control, etc.

### 1.2.4 La Primera Aplicación de la Lógica Borrosa a los Sistemas de Control

Aunque los europeos fueron los primeros en desarrollar aplicaciones de la lógica borrosa en el control de procesos, Japón es actualmente su principal usuario<sup>3</sup>.

El ingeniero británico, Ebrahim Mamdani fue el primero en usar los conjuntos borrosos de manera práctica en sistemas de control. A inicios de los 70's, Mamdani se enfrenta al desarrollo de un sistema automatizado de control

---

<sup>2</sup> Una breve pero muy interesante narración sobre la vida de este brillante ser humano, así como de los hechos más relevantes que acompañan al nacimiento de la teoría de los subconjuntos borrosos puede leerse en: Mc Neill, Daniel y Paul Freiberger. "Fuzzy Logic. The Discovery of a Revolutionary Computer Technology and How it is Changing our World". New York: Simon & Shuster, 1993.

<sup>3</sup> A lo largo de todo nuestro trabajo, hablaremos frecuentemente de "sistemas" y "sistemas de control". Debe mencionarse que estos conceptos se refieren a la ingeniería de control de procesos y no (forzosamente) a un sistema informático o computacional.

---

para una caldera usando la experiencia de un "operador experto"<sup>4</sup>. Originalmente el plan fue crear el sistema usando la teoría de decisión Bayesiana, un método de probabilidades definidas en situaciones inciertas y que considera a los hechos después de ocurridos para modificar sus predicciones acerca del futuro.

El operador ajusta la válvula reguladora y la temperatura en la caldera que es requerida para mantener la velocidad de giro de una turbina y regula la presión de la caldera. Mamdani incorporó la experiencia del operador en un algoritmo inteligente que "aprende" a controlar la maquinaria. Descubrió tristemente que el desempeño del algoritmo era pobre comparado con el operador humano. Pensó que un mejor método sería crear una descripción abstracta del funcionamiento de la máquina.

Mamdani y sus colegas, decidieron usar un método de la inteligencia artificial llamado "regla basada en sistemas expertos", el cual, combina la experiencia humana con una serie de reglas lógicas para usar el conocimiento. Mientras ellos luchaban tratando de escribir las reglas lógicas en las que se basaría el sistema e intentaban traducirlas a un lenguaje computacional, llegó a sus manos el nuevo trabajo de Lotfi Zadeh, donde hacía uso de las reglas borrosas y algoritmos para el análisis de toma de decisiones en sistemas complejos. Mamdani inmediatamente decidió dirigir sus esfuerzos hacia la borrosidad y creó un controlador borroso.

A finales de los 70's dos ingenieros daneses, Lauritz Peter Holmblad y Jens-Jurgen Ostergaard, desarrollaron comercialmente el primer control de sistemas borrosos para hornos cementeros en diferentes países.

### **1.3 La Industria de la Matemática Borrosa**

#### **1.3.1 Japón en Términos Económicos**

El más espectacular de los sistemas borrosos funciona actualmente en la ciudad japonesa de Sendai. Desde 1987, un sistema de control borroso controla el desplazamiento de los trenes sobre la ruta, el frenado, el acelerado, el tiempo de espera en las estaciones, etc.

Los japoneses son grandes consumidores de productos de las compañías Matsushita y Nissan. Matsushita vende la primera lavadora borrosa que es fácil de encontrar en los hogares japoneses. La máquina evalúa la carga de ropa y se ajusta a sí misma agregando la cantidad de detergente requerida, regula la temperatura del agua, y selecciona el tipo de ciclo

---

<sup>4</sup> Este término es frecuentemente usado en la jerga de la ingeniería de control. Se refiere a aquel grupo de expertos que hacen posible de manera exitosa, el desarrollo de cierto proceso.

de lavado. La idea original de las cámaras de video que eliminan la vibración en la imagen debida al desplazamiento de quien la porta, también pertenece a esta compañía. La televisión borrosa de Sony se ajusta por sí sola, controlando el contraste, el brillo y el color. Nissan construye transmisiones automáticas borrosas y la idea de los frenos antibloqueo en los automóviles es también tecnología borrosa. Las industrias Mitsubishi-Heavy, diseñan los sistemas de control borroso para elevadores. Los más exitosos edificios "inteligentes" son diseñados por expertos en sistemas de control borroso.

De acuerdo con Datapro<sup>5</sup>, la industria de la lógica borrosa japonesa está invirtiendo billones de dólares anualmente en su desarrollo. El ingreso global neto, sólo en 1993, fue de alrededor de \$650 millones de dólares. El crecimiento es tan acelerado que se espera, para 1997, un ingreso neto de alrededor de **\$6.1 billones de dólares**. De acuerdo a otras fuentes, Japón actualmente gasta \$500 millones de dólares al año en el desarrollo de sistemas borrosos.

Mientras tanto, en Estados Unidos, la inversión en esta rama empieza a crecer de manera vertiginosa. Las industrias norteamericanas más poderosas, intentan recuperar el terreno perdido ante el aplastante éxito japonés<sup>6</sup>.

### 1.3.2 Estados Unidos

Resulta interesante hacer notar, que en los inicios del desarrollo de esta industria, la élite intelectual norteamericana califica a la lógica borrosa como "un curioso ejercicio mental carente de fundamento y rigor matemático". Salvo casos particulares, la teoría de los subconjuntos borrosos se vio descartada del mundo científico estadounidense. A pesar de ello, la lógica borrosa continuó su desarrollo tanto teórico como de aplicación en algunos países europeos y en Japón, enfocándose principalmente al desarrollo de **Inteligencia artificial** con tal éxito, que por ejemplo en Japón, la información relacionada a este tema es controlada por un organismo gubernamental con el sello de "secretos de seguridad nacional".

Actualmente se reconocen las posibilidades del control borroso en la industria espacial, militar y de los videojuegos, alentando la investigación seria en otros lugares del mundo y muy especialmente en Estados Unidos. Los sistemas borrosos pasan de ser una novedad para convertirse en una

---

<sup>5</sup> Datapro Gopher Server:  
gopher://datapro.mgh.com/

<sup>6</sup> Quadralay inc.. Austin Texas Foro de discusión de conjuntos borrosos. Correo electrónico:  
webmistress@quadralay.com

---

herramienta matemática muy poderosa y en una industria altamente rentable<sup>7</sup>. Diversos centros de educación superior y de investigación alrededor del mundo se interesan en esta nueva teoría<sup>8</sup>, por ejemplo, la Universidad de Nuevo México imparte cursos a sus alumnos de licenciatura enfocados exclusivamente al control borroso<sup>9</sup>.

### 1.3.3 La Llegada de los Sistemas de Control Borroso

#### 1.3.3.1 El Choque Cultural

En algunas notas de Ebrahim Mamdani<sup>10</sup> hechas hace 20 años, destaca su sorpresa de que el éxito en la implantación de las técnicas de control borroso depende de bases meramente culturales en favor de la teoría convencional de control. En aquellos tiempos, la mayoría de los controladores usaban una ley de control que suele llamarse "Proportional-Integral-Derivate (PID)". Esta sofisticada ley matemática supone que el comportamiento y funcionamiento del sistema a ser controlado es lineal y uniforme. Despreciando esta simplificación, los controladores PID son populares porque mantienen un buen desempeño con pequeños errores, siempre y cuando el sistema no se vea afectado por disturbios externos que alteren su funcionamiento "normal".

Los controladores PID fueron considerados como una alternativa de alta reputación e igual sofisticación, por lo que Mamdani sugirió que:

*"...este tipo de controladores son un ejemplo del irracional culto a lo analítico"*

De lo anterior, ya no resultará extraño mencionar que uno de los inconvenientes atribuidos a la lógica borrosa es que **trabaja con unas cuantas reglas lógicas**. En otras palabras, no satisface las expectativas de sofisticación que la gente tiene sobre lo que debería ser un buen controlador.

Despreciando el choque cultural, los sistemas de control borroso se han popularizado por dos razones: la primera es que muchos procesos no son lineales y demasiado complejos para ser modelados matemáticamente (políticas de operación, económicas, sistemas de telecomunicación etc.). En segundo lugar, es que en los procesos industriales tradicionales que

---

<sup>7</sup> Fuzzy System Engineering, 12223 Wilsey Way, Poway, CA 92064, tel.-fax 619-748-7384  
Fuzzy Logic, inc., 1160 Via España, La Jolla, CA 93037, tel.-fax 619 456-2634. Correo electrónico:  
fuzzyli@crash.cts.com

<sup>8</sup> Por ejemplo "The International Fuzzy System Association (IFSA)" o la "Universidad de Oviedo España" que organiza del 10 al 14 de septiembre de 1996 el evento "6th. Spanish Meeting on Fuzzy Logic and Technologies"

<sup>9</sup> Universidad de Nuevo México. Profr. Timothy J. Ross autor de Fuzzy logic with Engineering Applications

<sup>10</sup> Ver el apartado "La primera aplicación de la lógica borrosa a los sistemas de control" en este mismo trabajo.

usan los controladores PID, no resulta sencillo describir lo que el término estabilidad significa. La idea de recurrir a una definición matemática de la estabilidad resulta en un problema académico que no puede ser aplicado de manera práctica. Mamdani ha demostrado que los controladores borrosos son más estables que los PID.

### **1.3.3.2 Ambiente Idóneo para la Implantación de Sistemas de Control Borroso**

Existen 5 tipos de sistemas donde la borrosidad es necesaria o benéfica.

- Sistemas complejos que son difíciles o imposibles de modelar.
- Sistemas controlados por operadores expertos.
- Sistemas con complejas y continuas entradas y salidas.
- Sistemas que usan observaciones humanas como entradas o como las base de sus reglas.
- Sistemas de naturaleza vaga como aquellos relacionados con el comportamiento y las ciencias sociales.

### **1.3.3.3 Ventajas de los Sistemas de Control Borroso**

Las ventajas de los sistemas de control borroso pueden resumirse en las siguientes:

- Se requieren pocos datos, reglas y decisiones para su diseño y operación.
- Un mayor número de variables pueden ser observadas y evaluadas.
- Puede hacerse uso de variables lingüísticas (no numéricas) procesándolas de manera similar a como lo hace el pensamiento humano.
- Permite relacionar las entradas con las salidas, con la ventaja de que no es necesario entenderlas todas, permitiendo diseñar un sistema que podría ser más adecuado y estable que uno que usa un sistema de control convencional.
- Existe un considerable simplicidad en la solución de problemas que antes se consideraban insolubles.
- La generación de prototipos es rápida, ya que el diseñador del sistema no requiere conocer todo acerca del sistema antes de iniciar su trabajo.
- Simplifica la adquisición del conocimiento y su representación.
- Unas cuantas reglas sencillas pueden representar adecuadamente las complejidades conceptuales del sistema.

- Se pueden representar los sistemas convencionales de una manera más sencilla.

#### **1.3.3.4 Desventajas de los Sistemas de Control Borroso**

- Es difícil desarrollar modelos de sistemas de control borroso.
- Aunque el sistema es sencillo de diseñar y se construyen prototipos rápidamente, comparados con los sistemas de control convencionales, los sistemas de control borroso requieren mayor simulación y un ajuste fino antes de hacerlos operacionales.
- Su principal desventaja es la dependencia y predisposición cultural en favor de la matemática ordinaria y la idea de linealidad en los sistemas de control.

### **1.4 Métodos que Trabajan con la Incertidumbre**

La lógica borrosa y en general la teoría de los subconjuntos borrosos, son métodos matemáticos que trabajan problemáticas específicas de incertidumbre. Obviamente, existen muchas otras dedicadas a otros problemas en donde la teoría borrosa no tiene el mismo potencial.

En general, existen dos grandes categorías de métodos que trabajan la incertidumbre y que se encuentran actualmente en uso y son: los métodos probabilísticos y los no probabilísticos.

La probabilidad y la estadística son técnicas generalmente aplicadas tanto a las ciencias sociales, naturales y de manera extensiva a la inteligencia artificial. Gran cantidad de métodos no probabilísticos han sido probados en la solución de problemas, particularmente al de la inteligencia artificial, aplicada a problemas reales. Además de la lógica borrosa se incluye la **lógica de falla, la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, sistemas de garantía, y el razonamiento cualitativo.**

#### **1.4.1 Los Métodos Probabilísticos**

La teoría de la probabilidad estudia formalmente la verosimilitud (probabilidad) de que un evento pueda ocurrir. Los métodos probabilísticos o estocásticos describen un proceso en el cual la imprecisión (aquí llamada aleatoriedad) de los eventos afecta el valor de las variables, tal que los resultados pueden estar dados solamente en términos de probabilidades.

---

La teoría de decisión Bayesiana es una variante muy alejada de la Teoría de la Probabilidad, que analiza situaciones inciertas pasadas y determina la probabilidad de que cierto evento cause una respuesta conocida. Este análisis es usado para predecir respuestas futuras por ejemplo, diagnósticos clínicos, es decir las causas de un grupo de síntomas basados en la experiencia pasada. La regla en sí misma fue desarrollada a mediados del siglo XVIII por Thomas Bayes pero no fue popularizada hasta la década de los 60's del presente siglo. Esta técnica funciona mejor cuando se dispone de una cantidad importante de información.

El método Bayesiano ha mostrado cualidades muy interesantes en su empleo y puede considerarse como la indiscutible respuesta a los problemas de incertidumbre probabilística.

#### **1.4.2 Los Métodos no Probabilísticos**

Adicionalmente a la lógica borrosa, existen diversos métodos basados en la teoría de conjuntos y estudian eventos que involucran incertidumbre no probabilística. Estos métodos surgen, no para competir con los existentes sino para salvar serios problemas en la aplicación de métodos a situaciones que no corresponden al ámbito exigido por sus bases teóricas<sup>11</sup>. Abren un panorama de posibilidades y demuestran su bondad bajo situaciones prácticas.

En el siguiente capítulo abordaremos las bases matemáticas de la teoría borrosa que permitan posteriormente entrar al planteamiento de problemas con tintes "claramente borrosos" con la intención de dar pie a la formulación de modelos más complejos, que en breve tiempo permitan reconocer que la formulación borrosa encaja perfectamente en algunas problemáticas originadas en las áreas de nuestro interés. Muy especialmente, intentaremos sentar bases para la aplicación en el área de la Hidráulica y la Hidrología, por ejemplo en los ámbitos de las políticas de aprovechamiento y operación hidráulicas, sistemas de seguridad, evaluación de riesgos, planeación de obras y técnicas hidrológicas con escasa información entre otras.

---

<sup>11</sup> Vea el capítulo tres de este trabajo

# Capítulo dos

.....

## Bases Matemáticas de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos

“... sigo creyendo en la posibilidad de construir un modelo de la realidad, es decir, una teoría que represente las cosas en sí mismas y no sólo su probabilidad de ocurrencia...”

- A. Einstein -

## **2.1 Introducción**

El uso de ordenadores como herramienta en la solución de problemas es cada vez más frecuente debido a su alto grado de eficacia; aun así, no son capaces de reproducir en una mínima parte el razonamiento difuso o borroso, el cual es característico del pensamiento humano. Si pudieran conjuntarse las capacidades humanas con la eficacia computacional y de los modelos matemáticos, surgiría un extraordinario sistema de control<sup>1</sup>.

Esta conjunción es posible en la teoría borrosa, la cual es llamada así por su capacidad de expresar **cuantitativamente** la ambigüedad del pensamiento humano.

De lo anterior podemos ver que la aplicación de esta teoría abarca prácticamente todas las ramas de la problemática humana destacándose el objetivo primario de su creación: "La interfase máquina - hombre".

## **2.2 El Subconjunto Ordinario y la Función Característica**

La teoría de los conjuntos ordinarios es un caso particular de la teoría de los conjuntos borrosos.

Recordaremos brevemente las nociones básicas y operaciones de la teoría de conjuntos; en adelante cuando hagamos mención a "teoría de conjuntos" nos referiremos a la teoría de conjuntos ordinarios.

Sean  $A$  y  $E$  conjuntos ordinarios, donde  $E$  representa un "conjunto de referencia" (en ocasiones llamado *universo*). Sea  $x$  un elemento de  $A$ :

$A \subset E$  significa  $A$  es un subconjunto de  $E$  ( $A$  contenido en  $E$ )

$x \in A$  significa que el elemento  $x$  pertenece a  $A$ .

Puede hablarse de pertenencia en términos de la llamada función característica simbolizada como  $\mu_A(x)$  cuyo valor indica pertenencia o no pertenencia de  $x$  en el subconjunto  $A$ .

La función característica se define de la siguiente manera:

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{Si } x \in A.$$

<sup>1</sup> Ésta es una probable definición de un sistema de control borroso.

$$\mu_A(x) = 0 \quad \text{Si } x \notin A$$

Es posible representar al subconjunto A como:

$$A = \{ \mu_A(x_1) / x_1, \mu_A(x_2) / x_2, \dots, \mu_A(x_n) / x_n \}$$

### 2.2.1 Operaciones Elementales entre Subconjuntos Ordinarios

Usando la función característica representemos las operaciones elementales de conjuntos:

#### 2.2.1.1 Complementación

Si  $\bar{A}$  significa complemento de A y  $\emptyset$  representa al "conjunto nulo", entonces:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Dos propiedades bien conocidas son:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \text{ donde } \cap \text{ representa la operación "intersección".}$$

$$A \cup \bar{A} = E, \text{ donde } \cup \text{ representa la operación "unión", siendo E el universo.}$$

En términos de la función característica.

$$\text{Si } x \in A \text{ o sea } \mu_A(x) = 1 \text{ entonces } x \notin \bar{A}$$

$$\text{Si } x \notin A \text{ o sea } \mu_A(x) = 0 \text{ entonces } x \in \bar{A}$$

#### 2.2.1.2 Intersección

Sean A y B dos conjuntos

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \text{ donde } (\cdot) \text{ representa a la operación "producto Booleano"}^2 \text{ donde:}$$

$$\text{Si } \mu_{A \cap B}(x) = 1 \text{ entonces } x \in A \cap B$$

$$\text{Si } \mu_{A \cap B}(x) = 0 \text{ entonces } x \notin A \cap B$$

<sup>2</sup> Puede identificarse esta operación con la operación lógica "y".

### 2.2.1.3 Unión

De igual manera

$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$  donde (+) representa la operación "suma Booleana<sup>3</sup>" donde:

Si  $\mu_{A \cup B}(x) = 1$  entonces  $x \in A \cup B$

Si  $\mu_{A \cup B}(x) = 0$  entonces  $x \notin A \cup B$

## 2.3 El Subconjunto Borroso y la Función de Membresía

Consideremos a A como un subconjunto de E donde este último representa al conjunto de referencia; hemos visto que en la teoría de conjuntos los elementos de E o pertenecen o no a A, lo que significa que su función característica es biviariada y responde a la lógica Booleana.

¿Existirá algún elemento de E que pertenezca sólo en una fracción al conjunto A?

En los conjuntos ordinarios definitivamente no, pero intuitivamente podríamos pensar que sí.

Es precisamente este enfoque el que hace la diferencia entre un conjunto ordinario y un conjunto borroso, en el cual un elemento  $x_i$  de E puede pertenecer un poco a A ( $\mu_A(x)$  cercano a cero) o pertenecer bastante a A ( $\mu_A(x)$  cercano a 1) o simplemente, no pertenece a A ( $\mu_A(x) = 0$ ), lo cual permite definir:

$$\tilde{A} = \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1) / x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_2) / x_2, \dots, \mu_{\tilde{A}}(x_n) / x_n \}$$

donde a  $\tilde{A}$  se llama subconjunto borroso de E ( $\tilde{A} \subset E$ ).

$\mu_{\tilde{A}}(x)$  se llama función de membresía y es equivalente en notación y significado que la función característica de los conjuntos ordinarios.

Además  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  toma sus valores en el intervalo real [0,1]. Esto permitirá representar bajo esta nueva estructura conceptos que están escasamente definidos, pero cuya membresía a los conjuntos borrosos se puede jerarquizar.

De manera rigurosa Zadeh define a los subconjuntos borrosos como:

<sup>3</sup> Puede identificarse esta operación con la operación lógica "o".

Sea  $E$  un conjunto finito o infinito y  $x \in E$ ; entonces, un subconjunto borroso  $\tilde{A}$  de  $E$  es el conjunto:

$$\tilde{A} = \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1) / x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_2) / x_2, \dots, \mu_{\tilde{A}}(x_n) / x_n \}, \forall x \in E$$

donde  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  es el "grado de membresía" de  $x$  en  $\tilde{A}$  tomando sus valores de un conjunto  $M$  llamado conjunto de membresía; es decir,  $x$  es mapeada por  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  (función de membresía).

Notemos que si el conjunto de membresía es  $M = \{0,1\}$  (bivariado), el "subconjunto borroso"  $\tilde{A}$  se convierte en un subconjunto ordinario, de manera que la función  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  se convierte en una función boleana.

### 2.3.1 Operaciones Elementales entre Subconjuntos Borrosos

En adelante y para facilitar la notación, se evitará el uso de tilde para diferenciar a los subconjuntos borrosos de los ordinarios mientras esto no cause confusión en la explicación.

Con lo anterior, estamos en posibilidad de describir las operaciones elementales entre subconjuntos de la matemática borrosa.

#### 2.3.1.1 Inclusión

Sea  $A$  y  $B$  dos subconjuntos borrosos del conjunto de referencia  $E$ .  $A$  está contenido en  $B$  ( $A \subset B$ ) sí:

$$\forall x \in E \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

#### 2.3.1.2 Igualdad o Equivalencia

Bajo la misma suposición, se dice que  $A$  y  $B$  son iguales ( $A = B$ ) sí:

$$\forall x \in E \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

**2.3.1.3 Complementación**

Los subconjuntos borrosos A y B son complementarios si:

$$\forall x \in E \quad \mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$$

siempre que el conjunto de membresía asociado a E sea  $M = [0, 1]$

Al igual que en los conjuntos ordinarios se cumple que:

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ Ley de doble negación}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned} \right\} \text{Leyes de Morgan.}$$

Sin embargo, aparecen conclusiones novedosas y sorprendentes a primera vista. Antes de destacarlas pensemos en la siguiente representación gráfica para el subconjunto borroso A.

En un sistema ortogonal de ejes asignamos al eje de las ordenadas el valor de la membresía  $\mu_A(x)$  de los elementos  $x \in E$  para el subconjunto borroso A. El eje de las abscisas, por su parte, representa a los valores de  $x \in E$ . Así por ejemplo, el subconjunto borroso A de "avenidas extraordinarias", podría tener la forma dada en la figura 2.1.

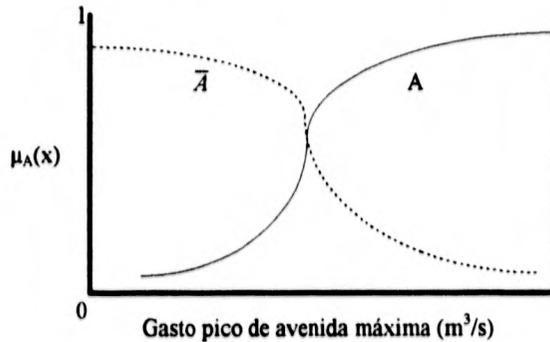


Figura 2.1

La curva mostrada en la figura, delimita la frontera del subconjunto borroso A. El concepto anterior implica que, aunque hay un rango de

picos perfectamente definido que permite establecer el subconjunto "avenidas extraordinarias", cada pico o elemento tiene un valor de membresía (pertenencia ponderada) diferente.

La línea punteada representa al subconjunto borroso "complemento de A" o  $\bar{A}$ .

### 2.3.1.4 Unión

Sean E un conjunto de referencia y  $M = [0,1]$  su conjunto de membresía asociado, además, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se definirá la unión  $A \cup B$  por el subconjunto borroso más pequeño que contiene tanto a A como a B, así:

$$\forall x \in E : \mu_{A \cup B}(x) = \text{MAX} (\mu_A(x) , \mu_B(x))$$

Es común encontrar en la literatura la siguiente representación:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x); \text{ donde } \vee \text{ significa máximo}^4.$$

### 2.3.1.5 Intersección

Sea E un conjunto de referencia y  $M = [0,1]$  su conjunto de membresía asociado, además, A y B dos subconjuntos borrosos de E; la intersección  $A \cap B$  se define como:

$$\forall x \in E : \mu_{A \cap B}(x) = \text{MIN} (\mu_A(x) , \mu_B(x) )$$

o lo equivalentemente:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x); \text{ donde } \wedge \text{ significa mínimo}^5.$$

La intersección define entoces como el subconjunto borroso más grande contenido, a la vez, en A y en B.

Si el subconjunto A y su complemento  $\bar{A}$  se describen como en la figura 2.1 las operaciones  $A \cup \bar{A}$  y la operación  $A \cap \bar{A}$  se muestra en la figura 2.2:

<sup>4</sup> Símbolo de "disyunción lógica".

<sup>5</sup> Símbolo de "conjunción lógica".

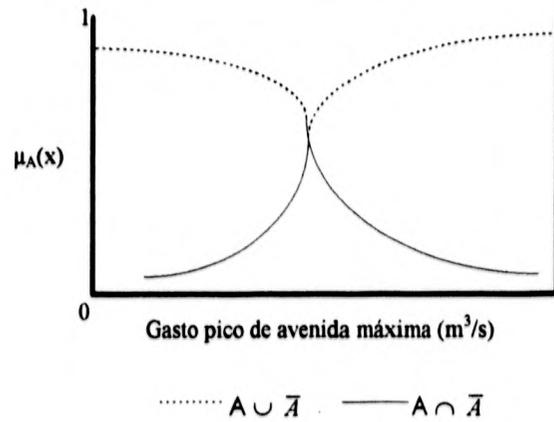


Figura 2.2

De las definiciones de unión y complementación con respaldo de la figura 2.2 se verifican las siguientes propiedades:

Si  $E$  es el conjunto referencia que contiene a los subconjuntos borrosos  $A$  y  $\bar{A}$ , entonces

$$A \cup \bar{A} \neq E$$

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

que contrastan con las equivalentes de la teoría de los conjuntos ordinaria.

## **2.4 El Número Borroso**

Cuando nos referimos a un número, mecánicamente lo relacionamos con una cantidad definida e invariable, pero, ¿qué sucede cuando a esa cantidad le asociamos un grado de ambigüedad, digamos por ejemplo "alrededor" de 3?

La respuesta es que se forma un número borroso, el cual puede ser expresado como un subconjunto borroso.

Explicar en qué basamos esta afirmación será el siguiente paso, es decir, definiremos al número borroso en términos de un subconjunto borroso.

### **2.4.1 Subconjunto Ordinario de Nivel $\alpha$**

Sea un número  $\alpha \in [0,1]$ ; se llamará "subconjunto ordinario de nivel  $\alpha$ " de un subconjunto borroso  $A$ , al subconjunto ordinario:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Todo subconjunto borroso  $A$  puede descomponerse de la siguiente manera<sup>6</sup>:

$$A = \text{MAX} [\alpha_1 \cdot A_{\alpha_1}, \alpha_2 \cdot A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n \cdot A_{\alpha_n}] \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad i=1, 2, \dots, n$$

donde aparecen los productos de subconjuntos ordinarios por los coeficientes  $\alpha_i$ .

A la expresión anterior se le conoce como "Teorema de la Descomposición" en donde se puede apreciar que:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = 1; \text{ si } \mu_A(x) \geq \alpha$$

$$\mu_{A_\alpha}(x) = 0; \text{ si } \mu_A(x) < \alpha$$

Se puede interpretar lo anterior de manera gráfica como se observa en la figura 2.3:

---

<sup>6</sup> Observe de la definición que si:  
 $\alpha_2 \geq \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$

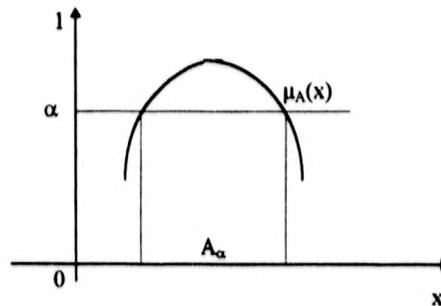


Figura 2.3

Si el conjunto de referencia es un conjunto de números reales y la función de membresía es continua, entonces,  $A_\alpha$  se llama convexo y cerrado (como se observa en la figura 2.3).

La descomposición de subconjuntos borrosos en subconjuntos ordinarios de nivel  $\alpha^7$ , es muy conveniente como se verá más adelante en el cálculo y operación entre conjuntos borrosos.

### 2.4.2 El Subconjunto Ordinario de Nivel $\alpha$ y el Número Borroso

En este momento ya podemos definir al número borroso. Según Terano (1987):

*“...diremos entonces que si un conjunto borroso convexo es acotado en un intervalo cerrado y limitado por el  $\alpha$  de corte será llamado número borroso”.*

Veamos un ejemplo.

Sea el número borroso  $\tilde{3}$  definido como sigue:

$$\tilde{3} = \begin{cases} 3: \dots \text{si} \dots \alpha = 1 \\ [2.5, 3.5]: \dots \text{si} \dots \alpha = 0.8 \\ [2, 4]: \dots \text{si} \dots \alpha = 0.3 \end{cases}$$

---

<sup>7</sup> Llamada "alfa de corte".

O de forma gráfica, según la figura 2.4:

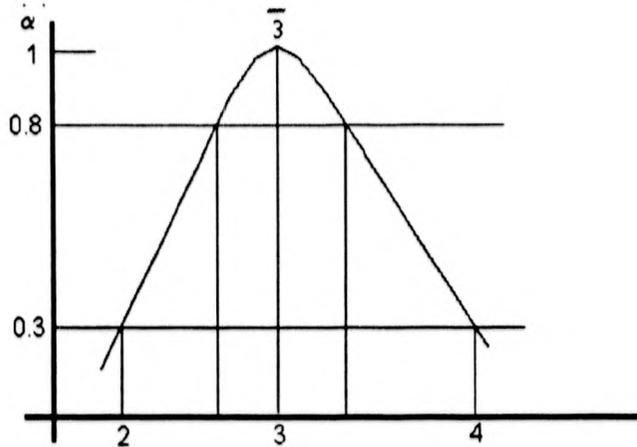


Figura 2.4

### 2.4.2.1 Suma y Sustracción de Números Borrosos

Después de dar un panorama general de cómo interpretar a un número borroso, ahora estamos interesados en las operaciones que podemos realizar con éstos.

Sean dos números borrosos continuos que puedan definirse con un  $\alpha$  de corte, entonces:

$$(A + B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$$

donde el  $\alpha$  de corte puede ser un intervalo, por lo tanto la adición y sustracción de dos intervalos  $[a,b]$  y  $[c,d]$  está dado por:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$

$$[a,b] - [c,d] = [a-c, b-d]$$

Cabe hacer mención que la sustracción no es la operación contraria a la adición.

# Capítulo tres

.....

## Probabilidad, Posibilidad y Teoría de Subconjuntos Borrosos

“Cuando la única herramienta que tienes es un  
martillo, cualquier cosa que observes te  
parecerá un clavo”

- Lotfi Zadeh -

### **3.1 Introducción**

Una de las principales dificultades a la que nos enfrentamos los que abordamos por primera vez la teoría de subconjuntos borrosos, radica en el hecho de insistir inconscientemente en relacionar los conceptos de la matemática borrosa con aquellos bien conocidos de la probabilidad y estadística.

De la literatura existente relacionada a este tema de debate y discusión, pueden rescatarse ideas muy interesantes que aclararán las dudas más inquietantes sobre las bases de la teoría de subconjuntos borrosos.

En el presente capítulo, en una primera parte, se han organizado aquellos razonamientos que permiten diferenciar imprecisión y aleatoriedad para posteriormente abordar el área que posiblemente represente el mayor poderío y potencial de aplicación de las matemáticas borrosas, "La Teoría de la Posibilidad"; en algunos textos recientes conocida como "La Teoría de la Posibilidad y Certeza". A este respecto y debido a lo extenso de su temática, (de la cual existen volúmenes enteros publicados recientemente) sólo abordaremos los puntos considerados como claves.

### **3.2 Teoría de Probabilidad vs. Teoría de Subconjuntos Borrosos**

Nos resulta difícil desligar la aleatoriedad de la imprecisión, y uno de los errores más comunes consiste en pensar en términos de probabilidad cuando se habla de la función de membresía. En casos extremos, como ha sucedido en la primera década de estudio de los conjuntos borrosos, se ha menospreciado y hecho a un lado el potencial del cual es capaz esta teoría.

En sus orígenes Zadeh se percató de ese hecho y aclaró lo siguiente:

*"Para concluir acerca de algo impreciso de manera cuantitativa, se emplean los conceptos y técnicas de la teoría de las probabilidades y las herramientas provistas por las teorías de decisión, control e información. Así, tácitamente se acepta la premisa de que la imprecisión, cualquiera que sea su naturaleza, puede ser igualada a la aleatoriedad. Esto es algo muy cuestionable, específicamente por que debe haber una diferenciación entre aleatoriedad y borrosidad; con el fin de tener una fuente de imprecisión en el proceso de decisión; con la borrosidad, se habla de un tipo de imprecisión que está asociada con los conjuntos borrosos, en los cuales no se tiene una clara transición de la membresía y la no membresía".*

Podemos asumir con base en la experiencia diaria, que la probabilidad como concepto se encuentra integrada a la vida cotidiana, de tal forma que un ser común asocia de manera automática lo conceptualmente azaroso con lo impreciso.

La imprecisión puede encontrarse en la definición de un concepto o en el significado de una palabra.

La incertidumbre de la probabilidad no se relaciona con lo impreciso de un concepto, sino con la ocurrencia o no ocurrencia del mismo, lo cual se conoce como aleatoriedad.

Puede decirse entonces que la diferencia entre aleatoriedad y borrosidad estriba en el aspecto de la imprecisión; por ejemplo la imprecisión al decir "lloverá mañana", es diferente a la imprecisión al decir "lluvia fuerte", pues en el primer caso esta ligado con el tiempo, ya que al transcurrir éste se definirá la ocurrencia o no de la lluvia; mientras que en el segundo caso la imprecisión no es aclarada con el paso del tiempo, sino que, se encuentra ligada con la interpretación que se asuma.

Aunque la teoría de los conjuntos borrosos cumple a lo más las tres décadas de historia (mientras que la probabilidad tiene 3 siglos), puede expresar de manera mucho mejor la imprecisión en comparación con la probabilidad, debido a que la borrosidad se encuentra íntimamente ligada al significado de las palabras, las cuales no pueden desligarse del pensar humano.

Según Terano:

*"Todos estamos envueltos en la borrosidad, pero no todos podemos entenderla. Si este tipo de imprecisión pudiera ser llevada a las matemáticas y a la ingeniería sus efectos serían indescritibles... Se dice que la diferencia entre las computadoras, las cuales solamente pueden procesar información binaria y el ser humano, radica en que estos últimos pueden tratar con la ambigüedad, pero ¡ahora esta habilidad humana puede ser extraída y expresada por la teoría borrosa...!"*

Daremos un vistazo más concreto a las diferencias y parentescos entre la teoría de la probabilidad y la teoría de los conjuntos borrosos.

### 3.2.1 Bases Probabilísticas

Pensemos inicialmente en el conjunto  $E$ , que representa un conjunto de referencia finito, por otra parte sea  $\wp(E)$  el conjunto finito de los posibles subconjuntos ordinarios de  $E$ ,  $\Delta$  un subconjunto de  $\wp(E)$  que contiene

necesariamente a E. El conjunto  $\Delta$  se denomina "familia", si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$a) \quad \forall A \in \Delta: \bar{A} \in \Delta$$

$$b) \quad \forall A \text{ y } \forall B \in \Delta: A \cup B \in \Delta$$

Se dice entonces que esta familia es "probabilizable". Adicionalmente se cumplen:

$$c) \quad \emptyset \in \Delta$$

$$d) \quad \forall A \text{ y } \forall B: A \cap B \in \Delta$$

$$e) \quad \forall A \text{ y } \forall B: A - B = A \cap \bar{B} \in \Delta$$

Un subconjunto  $F \subset \wp(E)$  se denomina una base de probabilidad en E si a partir de F y utilizando la complementación y la unión se puede obtener una familia probabilizable  $\Delta \subset \wp(E)$ .

Se dice también que F es un "generador" de  $\Delta$  el cual en general no es único. Por otra parte, pensemos en un conjunto de referencia E infinito. En este caso  $\wp(E)$  es no enumerable, de igual manera  $\Delta$  sea un subconjunto de  $\wp(E)$  que contiene obligatoriamente a E. Si:

$$f) \quad \forall A \in \Delta: \bar{A} \in \Delta$$

$$g) \quad \text{Para toda serie enumerable } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, \text{ donde} \\ A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Delta \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \Delta. \text{ Se dirá que} \\ \Delta \text{ es probabilizable.}$$

Según la definición teórica de probabilidad; dada en una familia  $\Delta$  probabilizable que se encuentra contenida en  $\wp(E)$ , se denominará "probabilidad" a la aplicación de  $\Delta$  en el conjunto de los reales positivos que tengan las propiedades siguientes (Se denominará  $pr(x)$  al valor tomado por x en los reales):

$$h) \quad \forall A \in \Delta: pr(A) \geq 0$$

$$i) \quad \forall A \text{ y } \forall B \in \Delta: A \cap B = \emptyset \\ \Rightarrow pr(A \cup B) = pr(A) + pr(B)$$

$$j) \quad \text{pr}(E) = 1$$

A partir de los 5 axiomas a, b, c, d y e, se establece que:

$$\text{pr}(\emptyset) = 0$$

$$\text{pr}(\bar{A}) = 1 - \text{pr}(A)$$

$$\text{pr}(A) + \text{pr}(B) = \text{pr}(A \cup B) + \text{pr}(A \cap B)$$

$$B \subset A \Rightarrow \text{pr}(B) \leq \text{pr}(A)$$

Debemos entender con claridad que no es suficiente asignar a un subconjunto un número  $\text{pr} \in (0,1)$  para que  $\text{pr}$  sea una probabilidad; primero el subconjunto y  $\text{pr}$  deben satisfacer los axiomas a, b, ..., j.

Ahora diferenciamos al conjunto borroso del subconjunto probabilizado ordinario.

### 3.2.2 Bases Borrosas

Sea  $E$  un conjunto de referencia, sea  $\tilde{A}$  un subconjunto borroso contenido en  $E$  ( $\tilde{A} \subset E$ ), el cual puede representarse como:

$$\tilde{A} = \{ \mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \dots, \mu_A(x_n)/x_n \}$$

La teoría de las probabilidades asignará números  $\text{pr}$  que estén entre  $[0,1]$ , a los subconjuntos ordinarios que constituyen la familia probabilizable  $\Delta$ .

$$\Delta = \{ \emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_1, x_2\}, \dots, \} \in \wp$$

Que aunque verifican los axiomas listados a, ..., j es claro que los valores  $\text{pr}(\wp(E)) \neq \mu_A(a)$ .

Es decir no tiene relación alguna la función de membresía con los axiomas a, b, c, ..., j.

Como se puede apreciar, las dos consideraciones (probabilística y borrosa), están bastante alejadas y es posible concebir, sin embargo, la asignación de probabilidades a los subconjuntos borrosos, tomando cada subconjunto borrosos como un subconjunto ordinario que pertenece a un subconjunto de referencia formado por elementos que son subconjuntos borrosos de otro conjunto de referencia.

Se puede imaginar una teoría de las probabilidades de eventos borrosos pero se deben diferenciar, evidentemente las dos teorías, la de los subconjuntos borrosos y la de probabilización de los conjuntos ordinarios.

### **3.3 Teoría de Posibilidad**

La teoría de posibilidad y certeza permite definir situaciones poco precisas que se encuentran con frecuencia en el lenguaje cotidiano y que debido a las imposibilidades de la matemática actual, han sido reducidos a cuantificaciones de "todo o nada".

Antes de iniciar con el tema, presentaremos el concepto de grafo borroso, el cual nos será de gran utilidad para definir cuantitativamente sentencias verbales.

#### **3.3.1 Grafo Borroso**

Sean  $E_1$  y  $E_2$  dos conjuntos ordinarios de referencia; "x" es un elemento de  $E_1$  y "y" un elemento de  $E_2$ . Un conjunto de pares ordenados  $(x,y)$  define al conjunto producto  $E_1 \times E_2$ .

Un subconjunto  $\tilde{G}$  tal que:

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2 : \mu_G(x,y) \in M$$

donde  $M$  es un conjunto de membresía de  $E_1 \times E_2$ , se le denomina grafo borroso.

Al igual que en la teoría de conjuntos, la noción de grafo borroso puede explicarse con ayuda de la noción de relación borrosa.

Sea:  $p$  un producto de  $n$  conjuntos y  $M$  su conjunto de membresía. Una relación  $n$ -aria borrosa es un subconjunto borroso de  $p$  que toma sus valores de  $M$ .

Una relación borrosa en  $E_1 \times E_2$  se escribe también como:

$$x \in E_1, y \in E_2 : x \mathfrak{R} y \quad \text{donde } \mathfrak{R} \text{ significa relación borrosa.}$$

Las definiciones anteriores nos permitirán definir una notación conveniente para las discusiones que siguen.

$\vee$  para representar el máximo respecto a un elemento o variable<sup>1</sup>.

$\wedge$  para representar el mínimo respecto a un elemento o variable<sup>2</sup>.

con lo anterior abandonemos por un momento las relaciones borrosas para comentar brevemente las proposiciones borrosas.

### 3.3.2 Proposiciones Borrosas

Las proposiciones borrosas son sentencias que pronostican sucesos y que por lo general en esta teoría se definen en su forma más simple como:

$x$  es  $A$

donde:  $A$  es el pronóstico (llamado variable borrosa) y algunas veces conocido como variable lingüística, la cual puede ser expresada en términos de conjuntos borrosos.

El pronóstico suele ser modificado en el lenguaje normal agregando adjetivos a la definición, por ejemplo: "muy grande" y "grande", en cuyos casos la función de membresía representa el medio idóneo para aclarar lo que representa la variable lingüística.

Regresemos ahora a nuestra discusión introductoria<sup>3</sup>; podemos pensar en cuantificar adjetivos tales como: "liso", "rugosos", "extremadamente", "mucho", "poco", "normalmente", "frecuentemente", etc. los cuales son llamados en algunas ocasiones modificadores, ya que éstas, cambian el significado del pronóstico; suelen representarse mediante la letra  $m$ .

Si se recuerdan las políticas de decisión comentadas en la introducción, una relación borrosa de la forma:  $x$  es  $A$ , sería por ejemplo:

"Si la lluvia es densa debe considerarse como un criterio en la toma de decisiones".

Su forma modificada:  $x$  es  $mA$ , podría ser como sigue:

"Si la lluvia es muy densa debe considerársele muy fuertemente como un criterio en la toma de decisiones",

donde el modificador  $m$ , en este caso, sería "muy".

<sup>1</sup> Operación comentada en el Capítulo dos apartado 2.3.1.4.

<sup>2</sup> Operación comentada en el Capítulo dos apartado 2.3.1.5.

<sup>3</sup> Véase la Introducción de este trabajo.

Debe aclararse que la negación también debe tomarse como modificador.

Algunos autores proponen usar reglas establecidas para encontrar el conjunto borroso modificado  $m_A$  de un conjunto  $A$ . Por ejemplo Terano argumenta las siguientes reglas:

$$\text{mucho } A = A^2$$

$$\text{más o menos } A = A^{1/2}$$

$$\text{no } A = 1 - A$$

y en términos de su membresía quedará:

$$\text{mucho } A = (\mu_A(x))^2$$

$$\text{más o menos } A = (\mu_A(x))^{1/2}$$

$$\text{no } A = 1 - \mu_A(x)$$

Esta representación permite expresar el significado de  $m$  de manera correcta.

A raíz de lo anterior puede pensarse en suponer proposiciones más complejas y completas interconectadas por conjunciones copulativas (y) o disyuntivas (o), por ejemplo:

$$[x \text{ es } A] \text{ o } [x \text{ es } B] = [x \text{ es } A \cup B]$$

$$[x \text{ es } A] \text{ y } [x \text{ es } B] = [x \text{ es } A \cap B]$$

lo cual no es contradictorio con la teoría tradicional de los conjuntos.

Por ejemplo la sentencia: "la lluvia no es densa, es una lluvia normal", en términos de conjuntos podría expresarse como:

$$\text{"La lluvia es } (1 - \text{densa}^2) \cap \text{lluvia normal}$$

Sin embargo proposiciones compuestas más complejas en donde el sujeto queda claramente definido (en el ejemplo anterior era la lluvia) no bajo un solo modificador, sino más bien como una combinación de éstos se escribirá, por ejemplo:

$$\text{si } [x \text{ es } C] \text{ y } [y \text{ es } D] = [(x,y) \text{ es } C \times D]$$

$$[x \text{ es } C] \circ [y \text{ es } D] = [(x,y) \text{ es } C \times y \cup x \times D]$$

Por ejemplo los lados izquierdos de las sentencias anteriores serían:

Si la lluvia es densa y el clima es frío

Si la lluvia es densa ó el clima es frío

### 3.3.3 Implicación

Otro importante tipo de sentencia borrosa son las llamadas implicaciones cuyo nombre radica en el significado mismo del lenguaje; éstas, acostumbran simbolizarse con una flecha en el sentido de la implicación, por ejemplo cuando tenemos:

Si  $x$  es  $C$ ,  $y$  es  $D$ , lo cual en términos de conjuntos se escribiría:

$$x \text{ es } C \Rightarrow y \text{ es } D \text{ o equivalentemente } (x,y) \text{ es } C \Rightarrow D$$

Donde  $C \Rightarrow D$  es un subconjunto borrosos determinado por  $x \times y$ , las cuales han sido definidas con anterioridad. En términos de la función de membresía tenemos:

$$\mu_{C \Rightarrow D}(x,y) = (1 - \mu_C(x) + \mu_D(y)) \wedge 1$$

La conjunción copulativa ( $y$ ) y la disyuntiva ( $o$ ) no son las únicas formas de expresar a la conjunción, existen otras cuyas aplicación depende de la situación específica del problema.

En el capítulo siguiente se expondrá un problema ingenieril en el que se esquematiza su solución aplicando la teoría de posibilidad, lo cual nos permitirá a la vez, integrar algunos otros temas de la teoría de subconjuntos borrosos, así como "aterrizar" lo anteriormente expuesto.

# Capítulo cuatro

.....

## Aplicación de la Teoría de Posibilidad a la Confiabilidad de Sistemas

**“Estoy convencido de que aquellas sociedades que dominan la complejidad de las nuevas ciencias y que son capaces de convertir el conocimiento en nuevos productos y formas de organización social, accederán a convertirse en las superpotencias culturales, económicas y militares del próximo siglo”**

**- Heinz Pagels -**

## **4.1 Introducción**

Convencionalmente, la *confiabilidad* de un sistema está definida en términos probabilísticos. Representa la probabilidad de que el sistema desempeñe sus funciones propiamente durante un período predefinido.

Sin embargo, en los problemas reales, tanto la información reunida como sus parámetros son obtenidos bajo cierta imprecisión del tipo borroso pues generalmente, la información se encuentra incompleta o, simplemente, no se puede obtener; de esta manera, la aproximación del problema al mundo probabilístico resulta inadecuada. Por esta razón, se ha introducido el concepto de *confiabilidad borrosa* dentro del contexto de la posibilidad, o como una transición entre dos estados borrosos: *éxito a fracaso*.

De forma general, la confiabilidad borrosa puede ser interpretada físicamente como la probabilidad de que no ocurra un deterioro en el desempeño sustancial del sistema para un intervalo de tiempo predeterminado.

## **4.2 La Confiabilidad de un Sistema Medida por una Función de Membresía**

Para formular la imprecisión borrosa de números o parámetros, pueden usarse diferentes formas y comportamientos de la función de membresía.

El tipo de función de membresía indica de forma subjetiva la preferencia de tomar cierta decisión dentro de cierta tolerancia, mientras que la posibilidad considera la factibilidad de ocurrencia de un evento.

### **4.2.1 Una Clasificación General de la Función "Membresía"**

Según Lai y Hwang, la totalidad de las funciones de membresía (funciones de posibilidad) pueden ser clasificadas dentro de las cuatro siguientes categorías:

- 1.- Funciones de membresía basadas en la determinación heurística.
- 2.- Funciones de membresía basadas en la confiabilidad concerniente a problemas particulares.

3.- Funciones de membresía basadas en mayores demandas teóricas.

4.- Funciones de membresía como modelos de conceptos humanos.

Las más comunes usadas en la literatura son las siguientes:

A) Distribución normal borrosa (figura 4.1)

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \exp[-k(x-a)^2]; \text{ donde } k > 0 \text{ y } a \in \mathfrak{R}$$

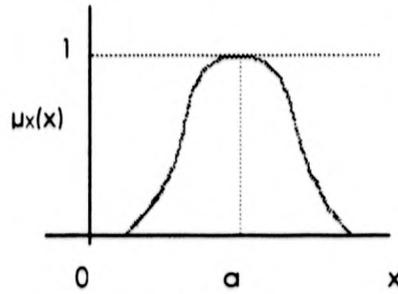


Figura 4.1

B) Distribución gamma borrosa (figura 4.2)

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} \exp[k(x-a)]; & x \leq a \\ \exp[-k(x-a)]; & x > a \end{cases} \text{ donde } k > 0 \text{ y } a \in \mathfrak{R}$$

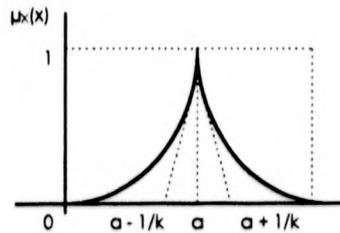


Figura 4.2

C) Distribución Cauchy borrosa (figura 4.3)

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \frac{1}{1 + \alpha(x-a)^\beta} \text{ donde } \alpha > 0, \beta \text{ es positivo par}$$

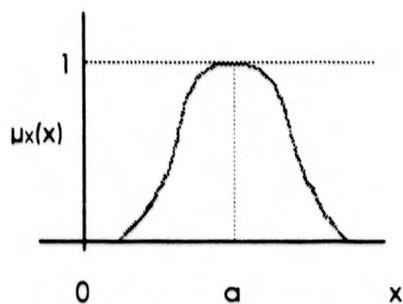


Figura 4.3

D) Distribución trapezoidal borrosa (figura 4.4)

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a - a_2 \\ \frac{a_2 + x - a}{a_2 - a_1} & a - a_2 < x \leq a - a_1 \\ 1 & a - a_1 \leq x < a + a_1, \text{ donde } 0 < a_1 < a_2 \leq a \text{ y } a \in \mathfrak{R} \\ \frac{a_2 - x + a}{a_2 - a_1} & a + a_2 \leq x \leq a + a_1 \\ 0 & a + a_2 < x \end{cases}$$

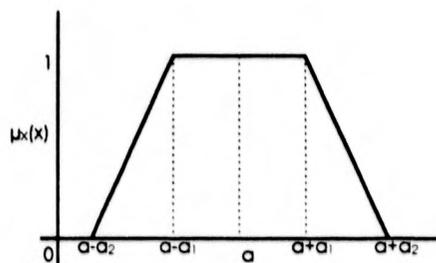


Figura 4.4



Por otra parte, una pequeña tormenta podría causar una inundación en el sótano si el sistema no opera adecuadamente. El sistema se encuentra formado por una bomba principal, con fuente de alimentación eléctrica externa, y una bomba secundaria alimentada por una batería la cual es automáticamente puesta en operación al fallar el suministro eléctrico. Así, una falla en este sistema puede ocurrir si ambas bombas fallan durante una tormenta. La bomba primaria fallará por falta de energía eléctrica o por mal funcionamiento. La bomba secundaria fallará por mal funcionamiento o si la batería se agota. Las posibles combinaciones de eventos que provocarían una falla en el sistema han sido sintetizadas a continuación:

#### **4.3.1.1 Establecimiento de las Condiciones de Falla del Sistema**

- SE INUNDA EL SÓTANO SI:

Falla el sistema de bombeo (estado L)

○

El flujo que ingresa excede la capacidad de bombeo (estado A)

- FALLA EL SISTEMA DE BOMBEO SI:

Hay escurrimiento directo al sótano (estado B)

Y

Falla la bomba principal (estado K)

Y

Falla la bomba secundaria (estado M)

- FALLA LA BOMBA PRINCIPAL SI:

Falla el suministro eléctrico (estado C)

○

Mal funcionamiento (estado D)

- FALLA LA BOMBA SECUNDARIA SI:

Se agota la batería (estado H)

○

Mal funcionamiento (estado J)

- SE AGOTA LA BATERÍA SI:

No se reemplaza (estado E)

Y

El periodo sin suministro eléctrico excede la capacidad de la batería (estado F)

Y

El periodo de ingreso de agua excede la capacidad de la batería (estado G)

### 4.3.1.2 Estructurando un Diagrama Borroso de Falla

La figura 4.6 muestra el diagrama borroso de falla y presupone que los eventos mostrados tienen diferentes funciones de membresía para representar la distribución borrosa de las fallas anuales:

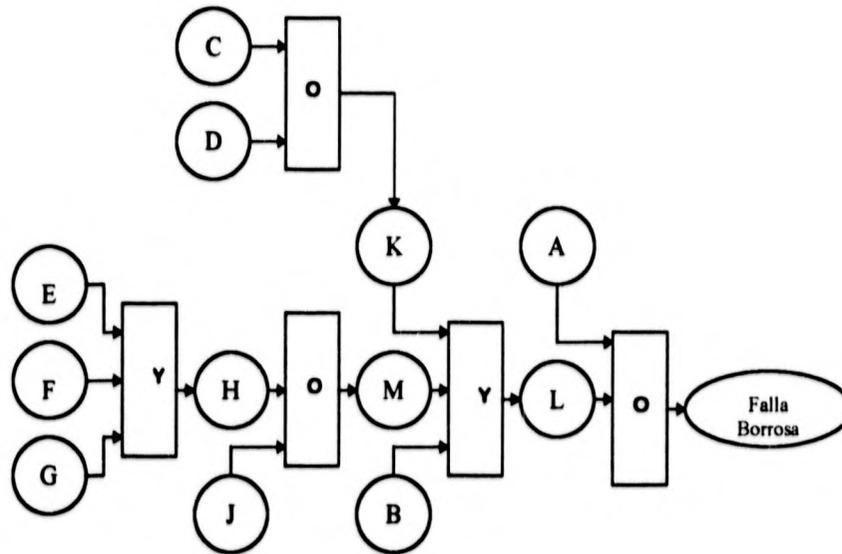


Figura 4.6

Observe, de la forma en que ha sido planteado el problema, que los estados A, B, C, D, E, F, G y J son de naturaleza borrosa (llamados estados terminales), ligándose entre sí con base en estados transitorios, los cuales se denominan K, L, M y H.

Se considera a los estados terminales de naturaleza borrosa, en el sentido que no es posible establecer con claridad su **probabilidad** de falla<sup>1</sup>. Así, por ejemplo, pensando en el estado A: "El flujo que ingresa excede la capacidad de bombeo", si nos encontráramos imposibilitados a establecer claramente la probabilidad anual de que este estado se dé, se podría aventurar este número. Con escasa información, se podría proponer que este valor de probabilidad se encuentre "**alrededor de 0.001**".

De esta manera, el término probabilidad y su teoría quedan fuera de lugar, y el término probabilidad se transforma en posibilidad anual de falla alrededor de 0.001 y que tendrá una distribución borrosa de falla como las mencionadas al inicio de este capítulo<sup>2</sup>.

#### 4.3.1.3 Estableciendo las Distribuciones Borrosas de Falla

Para el problema planteado se ha propuesto que las distribuciones borrosas de falla de los estados terminales borrosos tienen las siguientes cotas y forma:

$$\mu_{\bar{a}}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - 0.0001}{0.001 - 0.0001}, & 0.0001 < x_1 \leq 0.001 \\ \frac{0.003 - x_1}{0.003 - 0.001}, & 0.001 < x_1 \leq 0.003 \end{cases} \quad \text{TRIANGULAR}$$

$$\mu_{\bar{b}}(x_2) = \exp[-576(x_2 - 0.9)^2]; \quad 0.8 \leq x_2 \leq 1 \quad \text{NORMAL}$$

$$\mu_{\bar{c}}(x_3) = \begin{cases} \frac{x_3 - 0.05}{0.1 - 0.05}, & 0.05 < x_3 \leq 0.1 \\ \frac{0.2 - x_3}{0.2 - 0.1}, & 0.1 < x_3 \leq 0.2 \end{cases} \quad \text{TRIANGULAR}$$

<sup>1</sup> Es conveniente mencionar, que si fuera posible establecer claramente las probabilidades de falla de los estados terminales, el problema se reduciría totalmente al dominio de la teoría de la probabilidad.

<sup>2</sup> Debe entenderse, que el concepto probabilístico de función de distribución y densidad, poco o nada tienen que ver con las distribuciones borrosas. Se sugiere que en este momento se recuerde el contenido del capítulo tres "Probabilidad, Posibilidad y Teoría de Subconjuntos Borrosos".

$$\mu_{\bar{D}}(x_4) = \begin{cases} \exp[55(x_4 - 0.1)]; & 0 \leq x_4 \leq 0.1 \\ \exp[-55(x_4 - 0.1)]; & 0.1 \leq x_4 \leq 0.2 \end{cases} \quad \text{GAMMA}$$

$$\mu_{\bar{E}}(x_5) = \begin{cases} \frac{x_5 - 0.15}{0.2 - 0.15}; & 0.0001 < x_5 \leq 0.001 \\ \frac{0.25 - x_5}{0.25 - 0.2}; & 0.2 < x_5 \leq 0.25 \end{cases} \quad \text{TRIANGULAR}$$

$$\mu_{\bar{F}}(x_6) = \begin{cases} \frac{x_6 - 0.01}{0.05 - 0.01}; & 0.01 < x_6 \leq 0.05 \\ \frac{0.07 - x_6}{0.07 - 0.05}; & 0.05 < x_6 \leq 0.07 \end{cases} \quad \text{TRIANGULAR}$$

$$\mu_{\bar{G}}(x_7) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x_7 \leq 0.4 \\ 1; & 0.4 < x_7 \leq 0.6 \\ 0; & 0.6 < x_7 \leq 1 \end{cases} \quad \text{RECTANGULAR}$$

$$\mu_{\bar{J}}(x_8) = \begin{cases} \exp[99(x_8 - 0.05)]; & 0 \leq x_8 \leq 0.05 \\ \exp[-99(x_8 - 0.05)]; & 0.05 \leq x_8 \leq 0.1 \end{cases} \quad \text{GAMMA}$$

donde  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$  son las posibilidades borrosas de los eventos borrosos A, B, C, D, E, F, G y J respectivamente, y se suponen estadísticamente independientes. Se mostrará la manera de determinar la posibilidad anual borrosa de inundación en el sótano.

#### 4.3.1.4 Interpretación de las Relaciones Borrosas entre Estados

Con base en la figura 4.6 e interpretando los operadores lógicos como operadores borrosos, se observa que los estados H, M, K, L, o estados transitorios, se encuentran relacionados según argumentos posibilísticos, de la siguiente manera:

- $H = E \times F \times G$
- $M = H + J$
- $K = C + D$
- $L = B \times K \times M$

Por otra parte la posibilidad anual borrosa de falla, que aquí denotaremos  $\emptyset$ , se encuentra ligada bajo los mismos argumentos<sup>3</sup> a los estados transitorios y por ende a los estados terminales:

$$\emptyset = x_1 + x_2(x_3 + x_4)(x_5 x_6 x_7 + x_8)$$

<sup>3</sup> Revise capítulos dos y tres .

### 4.3.1.5 Determinación de la Posibilidad Anual Borrosa de Falla

Es conveniente mencionar que el procedimiento de cálculo que mostraremos es uno de los más novedosos en la literatura y sorprende por su simpleza, la cual no debe engañar al lector; la matemática borrosa es una herramienta poderosa en pleno desarrollo teórico, por lo que en general demanda un esfuerzo de creatividad importante en sus aplicaciones.

- Paso 1:

Como discutimos en el Capítulo dos, existen algunas operaciones básicas de los números borrosos. Nuestro problema utilizará la triangulación del número borroso para determinar los valores de  $\emptyset$  con base en las posibilidades borrosas " $x_i$ " y para diferentes valores de "alfa de corte"<sup>4</sup>.

La solución según Cheng & Mon (1993), puede simplificarse por la triangulación no lineal (programación no lineal):

$$\emptyset_{k,L} = \min(\emptyset) \quad ; \quad \emptyset_{k,R} = \max(\emptyset)$$

sujeta a:

$$X_{1\alpha}^L \leq X_1 \leq X_{1\alpha}^R$$

$$X_{2\alpha}^L \leq X_2 \leq X_{2\alpha}^R$$

$$X_{3\alpha}^L \leq X_3 \leq X_{3\alpha}^R$$

$$X_{4\alpha}^L \leq X_4 \leq X_{4\alpha}^R$$

$$X_{5\alpha}^L \leq X_5 \leq X_{5\alpha}^R$$

$$X_{6\alpha}^L \leq X_6 \leq X_{6\alpha}^R$$

$$X_{7\alpha}^L \leq X_7 \leq X_{7\alpha}^R$$

$$X_{8\alpha}^L \leq X_8 \leq X_{8\alpha}^R$$

donde      min: mínimo  
               max: máximo  
 $\emptyset_{k,L}$  : Cota izquierda (o inferior) de la posibilidad  $\emptyset$   
               para el intervalo k.  
 $\emptyset_{k,R}$  : Cota derecha (o superior) de la posibilidad  $\emptyset$   
               para el intervalo k.  
 $x_i$  : posibilidades borrosas de los estados terminales i  
               (i= 1, ..., 8)

<sup>4</sup> De un vistazo al capítulo dos en el apartado "Subconjunto Ordinario de Nivel  $\alpha$ "

$X_{i\alpha}^L$ : cota izquierda (o inferior) de las posibilidades borrosas de los estados terminales  $i$  para el valor  $\alpha$  ( $i= 1, \dots, 8$ )

$X_{i\alpha}^R$ : cota derecha (o superior) de las posibilidades borrosas de los estados terminales  $i$  para el valor  $\alpha$  ( $i= 1, \dots, 8$ )

• Paso 2:

Calcular los intervalos de corte para las funciones de membresía haciendo variar  $\alpha$  en su dominio (tabla 4.1a y tabla 4.1b).

Tabla 4.1a INTERVALOS DE CORTE

$\alpha$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
0	[0.0001, 0.003]	[0.8, 1]	[0.05, 0.2]	[0, 0.15]
0.1	[0.00019, 0.0028]	[0.8368, 0.9632]	[0.055, 0.19]	[0.0581, 0.1419]
0.2	[0.00028, 0.0026]	[0.8471, 0.9529]	[0.06, 0.18]	[0.0707, 0.1293]
0.3	[0.00037, 0.0024]	[0.8543, 0.9457]	[0.065, 0.17]	[0.0781, 0.1219]
0.4	[0.00046, 0.0022]	[0.8601, 0.9399]	[0.07, 0.16]	[0.0833, 0.1167]
0.5	[0.00055, 0.0020]	[0.8653, 0.9347]	[0.075, 0.15]	[0.0874, 0.1126]
0.6	[0.00064, 0.0018]	[0.8702, 0.9298]	[0.08, 0.14]	[0.0907, 0.1093]
0.7	[0.00073, 0.0016]	[0.8751, 0.9249]	[0.085, 0.13]	[0.0935, 0.1065]
0.8	[0.00082, 0.0014]	[0.8803, 0.9197]	[0.09, 0.12]	[0.0959, 0.1041]
0.9	[0.00091, 0.0012]	[0.8865, 0.9135]	[0.095, 0.11]	[0.0981, 0.1019]
1	[0.001, 0.001]	[0.9, 0.9]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]

Tabla 4.1b INTERVALOS DE CORTE

$\alpha$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
0	[0.15, 0.25]	[0.01, 0.07]	[0.4, 0.6]	[0, 0.1]
0.1	[0.155, 0.245]	[0.014, 0.068]	[0.41, 0.59]	[0.0267, 0.0733]
0.2	[0.16, 0.24]	[0.018, 0.066]	[0.42, 0.58]	[0.0337, 0.0663]
0.3	[0.165, 0.235]	[0.022, 0.064]	[0.43, 0.57]	[0.0378, 0.0622]
0.4	[0.17, 0.23]	[0.026, 0.062]	[0.44, 0.56]	[0.0407, 0.0593]
0.5	[0.175, 0.225]	[0.03, 0.06]	[0.45, 0.55]	[0.043, 0.057]
0.6	[0.18, 0.22]	[0.034, 0.058]	[0.46, 0.54]	[0.0448, 0.0552]
0.7	[0.185, 0.215]	[0.038, 0.056]	[0.47, 0.53]	[0.0464, 0.0536]
0.8	[0.19, 0.21]	[0.042, 0.054]	[0.48, 0.52]	[0.0477, 0.0523]
0.9	[0.195, 0.205]	[0.046, 0.052]	[0.49, 0.51]	[0.0489, 0.0511]
1	[0.2, 0.2]	[0.05, 0.05]	[0.5, 0.5]	[0.05, 0.05]

• Paso 3:

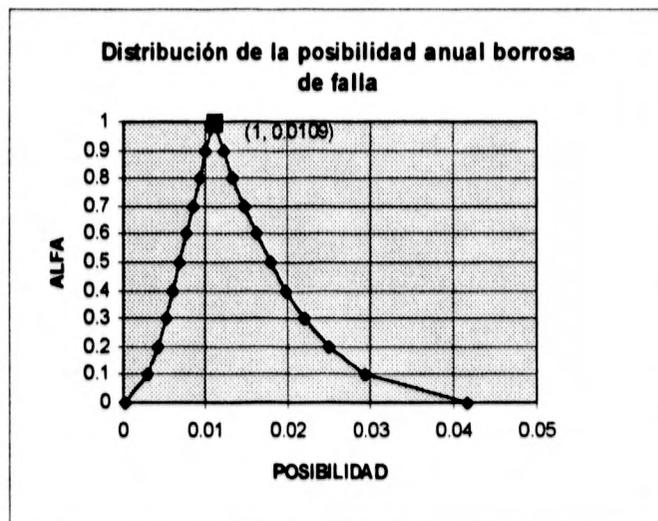
Con base en técnicas de programación no lineal determinar los intervalos de posibilidad de inundación como  $(\Phi_{\alpha,L}, \Phi_{\alpha,R})$ . Tabla 4.2

Tabla 4.2 POSIBILIDAD DE INUNDACIÓN

$\alpha$	$\emptyset$
0	[0.00012, 0.04168]
0.1	[0.00281, 0.02936]
0.2	[0.00415, 0.02483]
0.3	[0.00519, 0.2193]
0.4	[0.00609, 0.01968]
0.5	[0.00692, 0.001781]
0.6	[0.00772, 0.01618]
0.7	[0.00849, 0.01472]
0.8	[0.00926, 0.01338]
0.9	[0.01004, 0.01214]
1	[0.0109, 0.0109]

Chang & Mon aseguran que la serie de resultados obtenidos por el método son realmente representativos de la aplicación de la matemática borrosa y simplifican el procedimiento habitual de Cai, Wen y Zhang (1991), además de que superan lo inadecuado de la aplicación teoría probabilística bajo un ambiente escaso en información.

La gráfica 4.1, muestra la distribución de posibilidades borrosas anuales en el intervalo  $M = [0, 1]$  de  $\alpha$ , de acuerdo a los resultados de la tabla 4.2. Recordando los conceptos vertidos en el capítulo dos, para  $\alpha = 1$  el valor de posibilidad es equivalente al obtenido por la Teoría de Probabilidad.



Gráfica 4.1

En el ámbito borroso, la gráfica 4.1 puede representar el auxiliar adecuado en el diseño del sistema contra inundación. Suponga que debido a normas, se requiere que el sistema trabaje con una confiabilidad del 98%, o en otras palabras, con una probabilidad de falla del 2% como límite. De esta manera (y de la gráfica), observamos que será necesario un alfa de corte que cumpla la restricción:  $\alpha \geq 0.4$ . En este caso, podríamos permitirnos cierta flexibilidad en el valor de  $\emptyset$ , cuidando que las probabilidades anuales de falla de los eventos involucrados mantengan a esta función en los intervalos:  $\emptyset_L \geq 0.00609$ ,  $\emptyset_R \leq 0.01968$ .

# Capítulo cinco

.....

## Determinación Borrosa de los Tiempos de Concentración en una Cuenca

“... se está construyendo lo que se llama *un experimento pensado*, es decir un tren de pensamiento lógico y consistente en principio con las leyes de la física, que nos permite entender mejor un problema o alcanzar una conclusión firme, independientemente del hecho, meramente circunstancial e irrelevante, de si lo podemos llevar o no a efecto...”

- Luis de la Peña -

## **5.1 Introducción**

Los sistemas borrosos que actualmente se usan en el mundo, ya sea como artículos de consumo, sistemas de control industrial, dispositivos médicos o cualquier otro, se enfrentan a resolver un tipo muy particular de problemática, ya sea haciendo un análisis de eventos ocurridos en el pasado o intentando predecir el futuro.

Resulta muy importante entonces, conocer cómo diferenciar cada problemática antes de intentar interpretarla y así poder generar un sistema borroso con utilidad práctica.

A lo largo de las siguientes líneas, observaremos en su generalidad los tipos de sistemas que podrían enfocarse con nuestra perspectiva para, inmediatamente después, tratar de formar un criterio concreto con el cual abordar el planteamiento borroso de problemas<sup>1</sup>.

## **5.2 Planteamiento Borroso**

### **5.2.1 Enfoques Básicos**

La historia de aplicaciones prácticas de la teoría de los subconjuntos borrosos permite diferenciar tres tipos básicos de "formas de abordar" problemas en esta área:

- **Sistemas expertos.** Representa el enfoque más antiguo y el que ha sido explotado en mayor medida. Se encuentra fundamentado en los modelos de control desarrollados por Ebrahim Mamdani<sup>2</sup>. Enfocado primordialmente al diseño de sistemas de control.
- **Toma de decisiones.** Modelo desarrollado por Michael O'Hagan. Enfocado a la toma de decisiones y análisis de riesgo en situaciones críticas con información escasa.

---

<sup>1</sup> A la fecha, el llevar problemas reales a la borrosidad, no es un tema que se plantee claramente en la literatura, por lo que el procedimiento mostrado pretende ser una propuesta basada en diversos documentos que resumen aplicaciones prácticas de la teoría de los subconjuntos borrosos. Referencias interesantes pueden consultarse al final del presente trabajo.

<sup>2</sup> Ver el apartado "La primera aplicación de la lógica borrosa a los sistemas de control" en el capítulo uno de este mismo trabajo.

- Mapa de conocimiento borroso. Desarrollado por Bart Kosko<sup>3</sup>. Permite describir complejos sistemas de trabajo. Descripción de sistemas dinámicos.

Cada uno de los enfoques anteriores tiene características especiales, pero en general:

*“Cualquier enfoque sobre el que se plantee un problema en términos de la teoría de los subconjuntos borrosos se basa en el conocimiento experto”*

De esta manera, para propósitos prácticos, el diseñador del sistema borroso debe captar la experiencia de un especialista en el área generando lo que se ha denominado “base de conocimientos borrosos”.

La función de la base borrosa es la de relacionar las señales de entrada (valores de las variables de entrada al modelo) en términos borrosos y generar una respuesta. La figura 5.1 muestra un esquema que describe de manera general un sistema de control borroso.

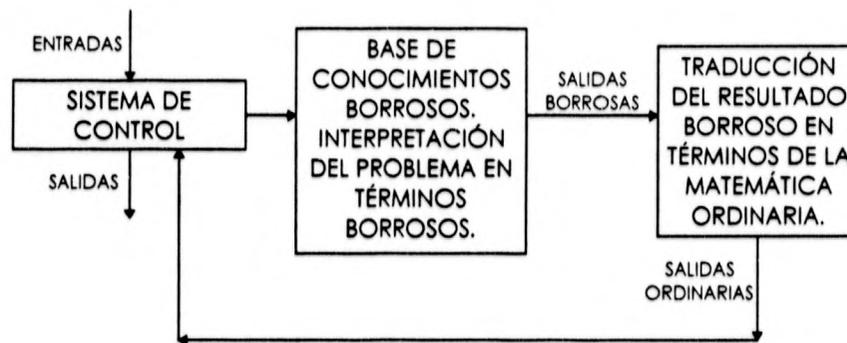


Figura 5.1

En general, la creación de un sistema de control borroso, involucra una serie de tareas que según Mc Neill pueden clasificarse como:

- Identificar, nombrar y determinar los rangos de las variables borrosas tanto a la entrada como a la salida.

<sup>3</sup> University of Southern California

- Determinar y crear las funciones de membresía involucradas en cada variable.
- Establecer las reglas lógicas borrosas que conforman la base de conocimiento.

En lo que resta del presente capítulo, concentraremos nuestros esfuerzos en construir un sistema de control borroso o, en términos más claros, un modelo matemático cuyo ámbito permite representarlo usando la teoría de subconjuntos borrosos.

### **5.3 Determinación Borrosa de los Tiempos de Concentración en una Cuenca**

#### **5.3.1 Objetivos**

Se desarrollará un sistema de control borroso que reproduzca el comportamiento no lineal de la fórmula de Kirpich para la estimación de tiempos de concentración. Se anticiparán un par de preguntas, que probablemente el lector se esté haciendo en este momento:

*“¿Para qué?... la fórmula de Kirpich es lo suficientemente confiable... ¿qué necesidad hay de traducirla en términos borrosos?”*

Las razones que justifican este ejercicio son múltiples. No es arriesgado asegurar que el modelo de Kirpich trae tras de sí un esfuerzo considerable en dos sentidos: una extensa recopilación de información sobre las variables a correlacionar y, en segundo término, la labor estadística-matemática que genere el modelo deseado.

Es cierto también que la falta de información bajo la metodología descrita, se traducirá en la imposibilidad de obtener el modelo o en su defecto, en la generación de alguno poco confiable o limitado.

¿No existirá alguna forma de "mezclar" algunas variables (que sabemos se relacionan de alguna "extraña" manera) y tras "agitarlas" se obtenga, aun con escasa información, un modelo representativo de cierto fenómeno?

La respuesta es sí y, como demostraremos, la herramienta aplicable en estos casos es la modelación borrosa cuyos fundamentos surgen, obviamente, de la teoría de subconjuntos borrosos.

La serie de hipótesis que vertimos arriba, son la puerta de entrada a una muy usada técnica de razonamiento, conocida en la jerga física como **gedankenexperiment** o "experimentos pensados\*" (también llamados experimentos de escritorio). En las áreas de investigación, los experimentos pensados apoyados de la modelación borrosa ahorrarán tiempo, dinero y fructificarán en eficientar el trabajo de laboratorio.

Es también la razón anterior, un serio argumento para demostrar con este trabajo, que el potencial que ofrece la teoría de subconjuntos borrosos al área de la ingeniería hidráulica es en extremo amplio.

### 5.3.2 Tiempo de Concentración

Según Aparicio (1994):

*"El tiempo que transcurre entre el inicio de la lluvia y el establecimiento del gasto de equilibrio se denomina tiempo de concentración, y equivale al tiempo que tarda el agua en pasar del punto más alejado hasta la salida de la cuenca"*

En general, se sabe que el tiempo de concentración puede ser representado básicamente por dos variables: la longitud del cauce principal y su pendiente, simbolizadas por L y S respectivamente. Según la fórmula de Kirpich:

$$t_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}}$$

donde  $t_c$  representa el tiempo de concentración en [h], L es la longitud del cauce principal en [m] mientras S es la pendiente del cauce principal.

### 5.3.3 Establecimiento de los Universos de Discusión

La tabla 5.1 muestra la descripción de las variables de entrada y salida de un sistema borroso para la determinación de tiempos de concentración, así como los rangos de sus universos de discusión<sup>5</sup>.

Los rangos propuestos para las variables que asocia el modelo borroso, dependen principalmente de la extensión que se pretenda de éste. Al finalizar el presente trabajo resultará claro que los modelos borrosos son fácilmente extendidos a universos de discusión más amplios **Incluso**

\* Me permito invitarlo, por si no la ha hecho, a leer la portada de presentación de este capítulo en donde se hace una cita del Dr. Luis de la Peña al respecto de los *experimentos pensados*.

<sup>5</sup> Cotas extremas o rangos de variación para las variables que se considerarán en el sistema de control borroso o modelo borroso.

**desconociendo** el comportamiento de las variables en ciertos intervalos de los dominios de discusión.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	UNIDADES	RANGO	
			MÍNIMO	MÁXIMO
S	pendiente (entrada)	%	0	3
L	longitud (entrada)	km	0	500
t <sub>c</sub>	tiempo de concentración (salida)	h	0	120

Tabla 5.1: Variables del sistema y universos de discusión

Con base en información experta, pueden establecerse los subconjuntos borrosos relativos a cada variable, así como la caracterización de las funciones membresía en cada caso para las variables de entrada. Se ha mostrado en la literatura, que las funciones triangulares de membresía resultan bastante convenientes en las aplicaciones ingenieriles, debido, principalmente, a que simplifican las ya de por sí extensas operaciones lógicas y aritméticas de la modelación borrosa. En nuestro ejemplo, usaremos básicamente este tipo de funciones excepto en los extremos de los universos de discusión en donde tradicionalmente se utilizan funciones trapeciales con el fin de delimitar el rango con extremos constituidos por conjuntos parcialmente ordinarios.

En las tablas 5.2 y 5.3 se muestran los subconjuntos borrosos representativos a cada variable borrosa de entrada así como la asignación de las cotas de sus funciones membresía propuestas con base en información experta. El número de subconjuntos para cada variable depende de la extensión del universo respectivo, así como de la precisión que se desee en la respuesta del modelo. Por otra parte, la longitud, el espaciamiento y la forma de los subconjuntos en cada universo de discusión se rigen básicamente por el comportamiento de las variables.

PENDIENTE [%]		MEMBRESÍA		
SUBCON JUNTO	DESCRIPCIÓN	IZQUIERDA	CENTRO	DERECHA
MB	Muy Baja	0	0	0.1
B	Baja	0.1	0.3	0.5
M	Media	0.4	0.4	1.6
A	Alta	1.3	2.4	3.0

Tabla 5.2 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

LONGITUD [km]		MEMBRESÍA		
SUBCON JUNTO	DESCRIPCIÓN	IZQUIERDA	CENTRO	DERECHA
MC	Muy Corta	0	83	167
C	Corta	83	167	250
M	Media	167	250	333
G	Grande	250	333	416
MG	Muy Grande	333	416	500

Tabla 5.3 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

Las cotas izquierda, centro y derecha corresponden a los vértices de las funciones de membresía. Por otra parte, las figuras 5.2 y 5.3 muestran las funciones de membresía para los subconjuntos borrosos descritos. Observe que ángulos rectos en las bases de las funciones triangulares de membresía son indicativos de subconjuntos que tienen alguna de sus fronteras definida por un número ordinario. Al observar las figuras 5.2 y 5.3 puede intuirse, que el comportamiento de la variable "pendiente" ha sido considerado radicalmente diferente al comportamiento de la variable "longitud". La simetría geométrica de los subconjuntos de esta última variable, contrastan con la no uniformidad del universo "pendiente". En términos de experiencia, el diseño de este sistema presupone que la variable dominante en el modelo es "S", de manera que los subconjuntos correspondientes a este universo deben ser cuidadosamente establecidos<sup>6</sup> y modificados durante una etapa posterior de ajuste, mientras que por simpleza, se propone una distribución uniforme al universo de la variable "L".

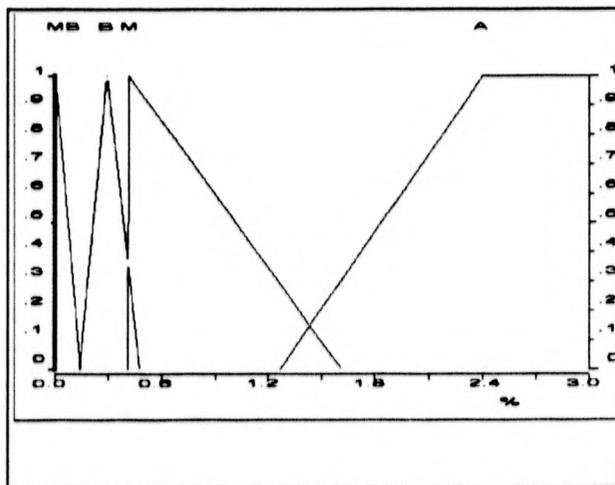


Figura 5.2

<sup>6</sup> Propuestos por el experto. En casos de desconocimiento del comportamiento funcional de la variable podrían sugerirse universos uniformes, los cuales se ajustarían al comportamiento real en la etapa de ajuste.

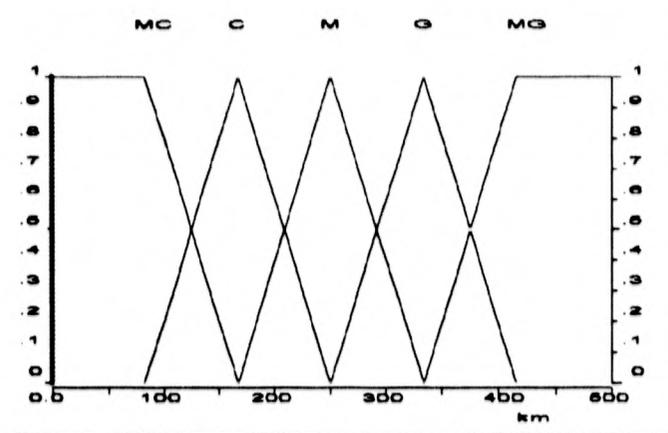


figura 5.3

En la etapa de ajuste se establecerán con precisión las funciones de membresía de la variable de salida, como ya veremos.

### 5.3.4 Establecimiento de la Base de Conocimiento Borroso

En este momento, llegamos a un punto crítico del planteamiento del sistema, al establecer las reglas lógicas que formarán nuestra base de conocimiento borroso.

Puede pensarse que la base de conocimiento borroso, representa el *alma* del modelo y su obtención es posible en cualquiera de dos sentidos:

- *Vía conocimiento experto*. Información obtenida de la experiencia cotidiana y traducida en términos borrosos a partir de argumentaciones verbales<sup>7</sup>.
- *Vía inferencia*. Basada en información estadística del fenómeno a reproducir<sup>8</sup>.

En cualquier caso, la base será determinada relacionando las variables<sup>9</sup> de entrada con la variable de salida. En este problema se decide clasificar la respuesta del sistema (tiempo de concentración) en los subconjuntos: muy pequeño (MP), pequeño (P), mediano (M), grande (G) y muy grande (MG). Las siguientes proposiciones borrosas establecerán el modelo borroso que nos ocupa.

<sup>7</sup> La base de conocimiento borroso correspondiente a esta aplicación fue obtenida bajo esta idea.

<sup>8</sup> Vea el capítulo seis de este trabajo, en donde se desarrolla una aplicación cuya base de conocimiento se infiere.

<sup>9</sup> Relaciones borrosas. Vea el capítulo tres.

- 
- **Como** la pendiente es muy baja **y** la longitud es muy corta, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
  - **Como** la pendiente es muy baja **y** la longitud es corta, **entonces** el tiempo de concentración es medio.
  - **Como** la pendiente es muy baja **y** la longitud es media, **entonces** el tiempo de concentración es medio.
  - **Como** la pendiente es muy baja **y** la longitud es grande, **entonces** el tiempo de concentración es grande.
  - **Como** la pendiente es muy baja **y** la longitud es muy grande, **entonces** el tiempo de concentración es muy grande.
  - **Como** la pendiente es baja **y** la longitud es muy corta, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
  - **Como** la pendiente es baja **y** la longitud es corta, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
  - **Como** la pendiente es baja **y** la longitud es media, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño medio.
  - **Como** la pendiente es baja **y** la longitud es grande, **entonces** el tiempo de concentración es medio.
  - **Como** la pendiente es baja **y** la longitud es muy grande, **entonces** el tiempo de concentración es muy grande.
  - **Como** la pendiente es media **y** la longitud es muy corta, **entonces** el tiempo de concentración es muy pequeño.
  - **Como** la pendiente es media **y** la longitud es corta, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
  - **Como** la pendiente es media **y** la longitud es media, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
  - **Como** la pendiente es media **y** la longitud es grande, **entonces** el tiempo de concentración es medio.
  - **Como** la pendiente es media **y** la longitud es muy grande, **entonces** el tiempo de concentración es medio.

- **Como** la pendiente es alta **y** la longitud es muy corta, **entonces** el tiempo de concentración es muy pequeño.
- **Como** la pendiente es alta **y** la longitud es corta, **entonces** el tiempo de concentración es muy pequeño.
- **Como** la pendiente es alta **y** la longitud es media, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
- **Como** la pendiente es alta **y** la longitud es grande, **entonces** el tiempo de concentración es pequeño.
- **Como** la pendiente es alta **y** la longitud es muy grande, **entonces** el tiempo de concentración es medio.

Las reglas anteriores se sintetizan en la tabla 5.4. Observe que el número de proposiciones borrosas corresponde al producto algebraico entre el número de subconjuntos de los universos de discusión de las variables de entrada.

L \ S	MB	B	M	A
MG	MG	G	M	M
G	G	M	M	P
M	M	M	P	P
C	M	P	P	MP
MC	P	P	MP	MP

Tabla 5.4 Base de conocimientos borrosos para caracterizar el tiempo de concentración.

### 5.3.5 Ajuste del Sistema

Establecida la base lógica de conocimiento, procedemos al ajuste del sistema, es decir, determinaremos adecuadamente los subconjuntos del universo correspondiente a la variable de salida "tiempo de concentración".

En nuestro caso, se ha utilizado información fisiográfica de algunos cuencas del país<sup>10</sup> y la ecuación de Kirpich (vea la tabla 5.5), para conseguir que el modelo la reproduzca adecuadamente.

<sup>10</sup> Solamente 7 puntos! suficientemente dispersos en los universos de discusión permitieron ajustar el modelo.

ESTACIÓN	LONGITUD [km]	PENDIENTE [%]	tc Kirpich [h]
CAZANATE	93	0.156	26
ZAPOTITLAN	440	0.342	64
BAMICORI	20	0.490	5
LAS CAÑAS	342	0.538	44
URIQUE	127	1.537	14
TOAHAYANA	131	1.130	16
BADIRAGUATO	59	2.118	7

Tabla 5.5 Datos usados en el ajuste del sistema de control borroso.

La tabla 5.6 muestra el universo de discusión sugerido para la variable de salida "tiempo de concentración" junto con las funciones de membresía de los subconjuntos que la integran.

T. DE CONCENTRACIÓN [h]		MEMBRESÍA		
SUBCONJUNTO	DESCRIPCIÓN	IZQUIERDA	CENTRO	DERECHA
MP	Muy pequeño	0	0	17
P	Pequeño	4.5	13	45
M	Medio	31	42	65
G	Grande	50	56	84
MG	Muy Grande	78	83	120

Tabla 5.6 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

También la figura 5.4 ilustra las funciones de membresía correspondientes.

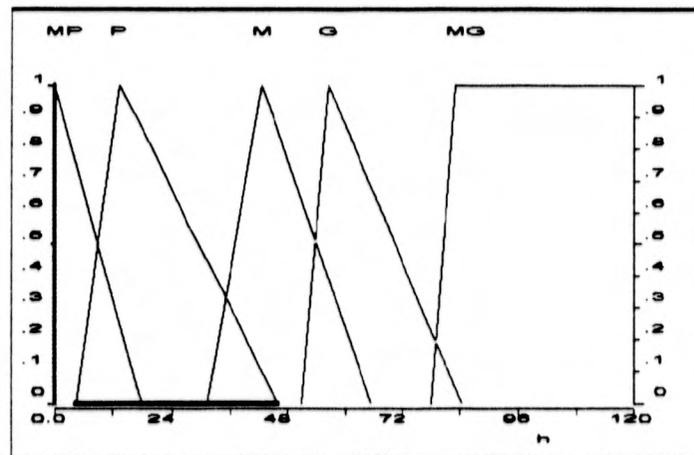


figura 5.4

Resulta conveniente mencionar que los universos de discusión mostrados en las tablas 5.2, 5.3 y 5.6, así como la base de conocimiento borroso tabla 5.4, corresponden a los valores obtenidos tras el ajuste. Las etapas intermedias se omiten en favor de claridad.

### **5.3.5.1 Consideraciones Previas al Ajuste**

La etapa de ajuste, representa el proceso culminante de la creación de un modelo borroso y cuantitativamente requiere una inversión de tiempo considerable previo a su puesta en operación. En general, como ya se dijo, el ajuste de nuestro modelo consiste en:

1. La determinación precisa de las cotas de las funciones de membresía de la variable o variables de salida.
2. El ajuste *fino* de las funciones de membresía de las variables de entrada así como de la base de conocimiento.

Para iniciar esta etapa, recordemos que:

1. Se han establecido los universos de discusión que integran el sistema o modelo borroso.
2. Se asignaron las cotas y forma de las funciones de membresía que componen al universo de discusión de las variables de entrada del modelo.
3. Se cuenta con una base de conocimiento borroso lo suficientemente confiable que asocia a las variables involucradas en el modelo<sup>11</sup>.
4. Se sugirieron las cotas y formas de las funciones de membresía que componen al universo de discusión de la o las variables de salida.

### **5.3.5.2 Consideraciones de Cálculo**

Inmersos en una lógica borrosa, las reglas de la base de conocimiento son aplicables hasta cierto grado, el cual queda determinado totalmente de acuerdo a su función de membresía asociada.

*"El valor de membresía determina el grado con el cual una regla se aplica"*

Puesto que el universo de discusión se encuentra constituido por diversos subconjuntos o funciones de membresía borrosa, entonces, diversas reglas

---

<sup>11</sup> Frecuentemente, el comportamiento de las variables se desconoce y por ende no existe una base de conocimiento lo suficientemente confiable. En estos casos, la determinación de ésta, forma parte de la etapa de calibración. Vea el capítulo 6 de este trabajo.

de la base de conocimiento pueden aplicar a la vez. Veamos un par de ejemplos.

**Ejemplo 1.** Suponga una longitud de 435 km y una pendiente del 2%. Esta longitud cae dentro del subconjunto **MG** (muy grande 333 a 500 km según tabla 5.3), mientras que para esta pendiente se cae en el subconjunto **A** (alta 1.3 a 3.0% según tabla 5.2). Usando estos valores, las figuras 5.2 y 5.3 y la base de conocimiento borroso, se establece que la regla lógica borrosa aplicable en este caso se escribe como:

*“Como el valor de membresía para una longitud MUY GRANDE es 1.0 y la membresía para la pendiente ALTA es 0.65, entonces, la regla que aplica sobre el tiempo de concentración (MEDIO<sup>12</sup>) tiene una membresía de 0.65”*

Si recuerda el capítulo tres de este trabajo, la estructura de la oración anterior corresponde al tipo conjuntivo:

**Como X es A y Y es B entonces Z es C.**

Sintéticamente  $P(AB \Rightarrow C)$ <sup>13</sup>. Note que A y B son conceptos borrosos dados (por ejemplo adjetivos), mientras que C es un concepto del mismo tipo aunque desconocido el cual es obtenido bajo inferencia. Zadeh propone una regla de inferencia titulada "regla compuesta de inferencia", la cual infiere C tomando la composición Max-Min<sup>14</sup> de A y la relación borrosa traducida desde la regla condicional borrosa.

Así, para nuestro ejemplo y según Zadeh,  $P(AB \Rightarrow C) = A \wedge B = 1.0 \wedge 0.65 = 0.65$ . Existen diversos métodos para interpretar el valor de membresía en términos de números ordinarios, en este trabajo se usa el **criterio del centroide**. Este criterio consiste en encontrar el centroide de la función de membresía de salida ajustada al alfa de corte correspondiente al grado con el cual la regla lógica se aplica; para nuestro ejemplo:

- Se modifica la función de membresía correspondiente a la respuesta del sistema usando un alfa de corte igual a 0.65, de manera que la función triangular se transforma en una función trapezoidal.
- Calcule la coordenada horizontal ( $\bar{x}$ ) del centro de gravedad o centroide de la función de membresía modificada usando:

<sup>12</sup> Vea tabla 5.4.

<sup>13</sup> "P" significa proposición borrosa.

<sup>14</sup> Composición disyunción-conjunción. Mamdani y Mizuto sugieren diversas reglas de interpretación de las proposiciones borrosas.

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x dx dy; \text{ donde } R \text{ representa la región de integración}$$

correspondiente a la función de respuesta modificada y A es su área. En nuestro caso la coordenada horizontal equivale al tiempo de concentración  $t_c = 46$  hrs.

**Ejemplo 2.** Suponga una longitud de 290 km y una pendiente del 1.5%. Esta longitud cae dentro del subconjunto **M** (media 167 a 333 km) y **G** (grande 250 a 416 km) mientras que para esta pendiente se cae en el subconjunto **M** (media 0.4 a 1.6%) y **A** (alta 1.3 a 3.0%). Usando estos valores, las figuras 5.2 y 5.3 y la base de conocimiento borroso, se establece que las reglas lógicas borrosas aplicables en este caso se escriben como:

1. *“Como el valor de membresía para una longitud MEDIA es 0.53 y la membresía para la pendiente MEDIA es 0.09, entonces, la regla que aplica sobre el tiempo de concentración (PEQUEÑO) tiene una membresía de 0.09”*
2. *“Como el valor de membresía para una longitud MEDIA es 0.53 y la membresía para la pendiente ALTA es 0.21, entonces, la regla que aplica sobre el tiempo de concentración (PEQUEÑO) tiene una membresía de 0.21”*
3. *“Como el valor de membresía para una longitud GRANDE es 0.47 y la membresía para la pendiente MEDIA es 0.09, entonces, la regla que aplica sobre el tiempo de concentración (MEDIO) tiene una membresía de 0.09”*
4. *“Como el valor de membresía para una longitud GRANDE es 0.47 y la membresía para la pendiente ALTA es 0.21, entonces, la regla que aplica sobre el tiempo de concentración (PEQUEÑO) tiene una membresía de 0.21”*

Para el conjunto anterior de proposiciones, según Zadeh, corresponde al tipo disyuntivo que puede interpretarse a través de la disyunción borrosa ( $\vee$ ):  $0.09 \vee 0.21 \vee 0.09 \vee 0.21 = 0.21$  (correspondiente a la función  $t_c$  pequeño).

Se modifica la función de membresía correspondiente a la respuesta  $t_c$  pequeño usando un alfa de corte igual a 0.21, de manera que la función triangular se transforma en una función trapezoidal.

Se calcula la coordenada horizontal ( $\bar{x}$ ) del centro de gravedad o centroide de la función de membresía modificada: En este caso la coordenada horizontal equivale al tiempo de concentración  $t_c = 26$  hrs.

La etapa de ajuste requiere de repetir las operaciones anteriormente descritas a lo largo del universo de discusión de las variables de entrada y ajustando, de ser preciso, sus funciones de membresía y en casos más drásticos, la propia base de conocimiento de manera que se produzca, bajo nuestro criterio, una respuesta aceptable del modelo.

### 5.3.6 La Superficie de Solución al Sistema

Una de las ventajas más grandes en el establecimiento de sistemas borrosos, es la concerniente a la facilidad con la que pueden generarse "superficies de solución" o lo que es lo mismo, gráficos que ayuden a comprender el comportamiento de las variables involucradas aun cuando éste sea muy complicado.

Para nuestro sistema, observamos que al existir dos variables de entrada, el dominio o base borrosa se encuentra en un plano, mientras que la salida o tiempo de concentración representa una tercera dimensión. Si nos proponemos generar una representación gráfica y continua en el universo de discusión, y bajo las reglas lógicas establecidas, construiremos una superficie como la mostrada en la figura 5.5. Este gráfico fue logrado usando un ordenador.

Los tonos de gris permiten asimilar con mayor facilidad la información que contiene.

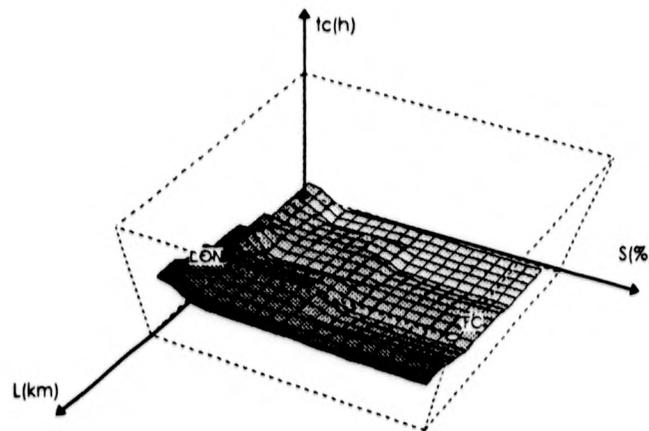


Figura 5.5 (A) Superficie de solución

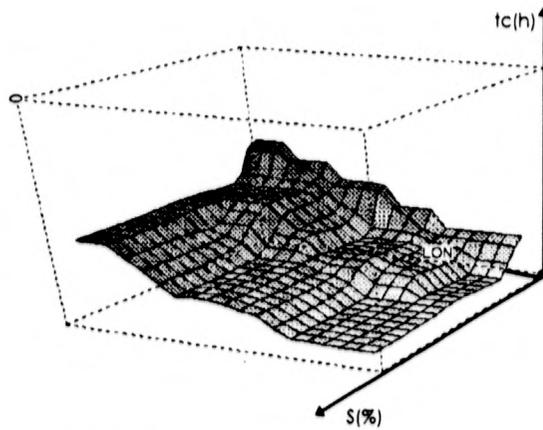


Figura 5.5 (B) Superficie de solución.

La figura 5.6 muestra la relación de cada variable de entrada (por medio de áreas) con respecto a la variable de salida para el caso particular en que la longitud es de 209 km. y la pendiente es del 1%.

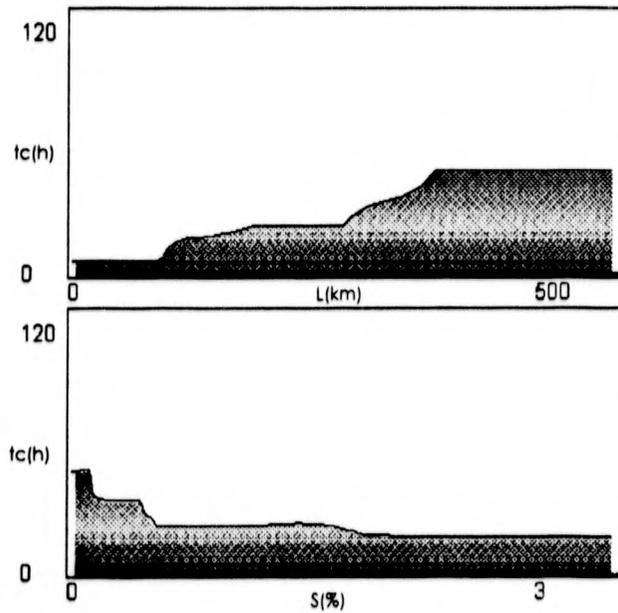


Figura 5.6

Finalmente, la figura 5.7 representa el comportamiento general de las tres variables en el modelo borroso.

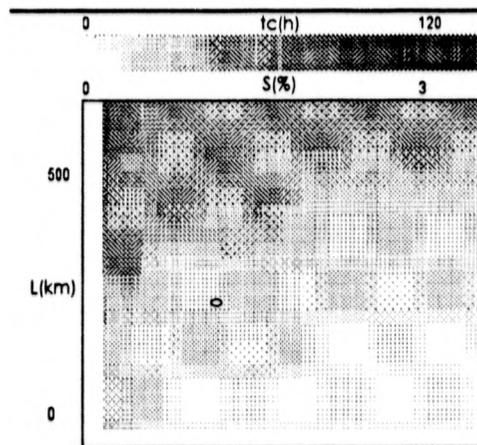


Figura 5.7

### 5.3.7 Conclusión

La tabla 5.7 compara los tiempos de concentración obtenidos para las características fisiográficas de la región hidrológica no. 10, tanto con la fórmula de Kirpich así como aquellos determinados con base en nuestro modelo borroso.

Recordemos que el ajuste del sistema se ha realizado exclusivamente con 7 puntos de 42 disponibles; de manera que se ha inferido el modelo de Kirpich con tan sólo el 16.6% de la información disponible, lo cual no resulta tan sorprendente comparado con el hecho de que el modelo de Kirpich involucró para su generación una cantidad de información comparativamente mucho más significativa que la usada aquí.

Analizando la quinta y sexta columnas de la tabla 5.7 pueden destacarse algunos datos importantes:

- La desviación absoluta entre el modelo de Kirpich y la inferencia borrosa, vale en promedio 1 h.
- La desviación entre el modelo de Kirpich y la inferencia borrosa, vale en promedio 0 h (cero!)
- La desviación estándar correspondiente equivale a 1.15 h.
- Puede establecerse que **al menos el 75%** de las 42 inferencias borrosas se alejan **a lo más en el intervalo  $\pm 2.3$  h** con respecto a

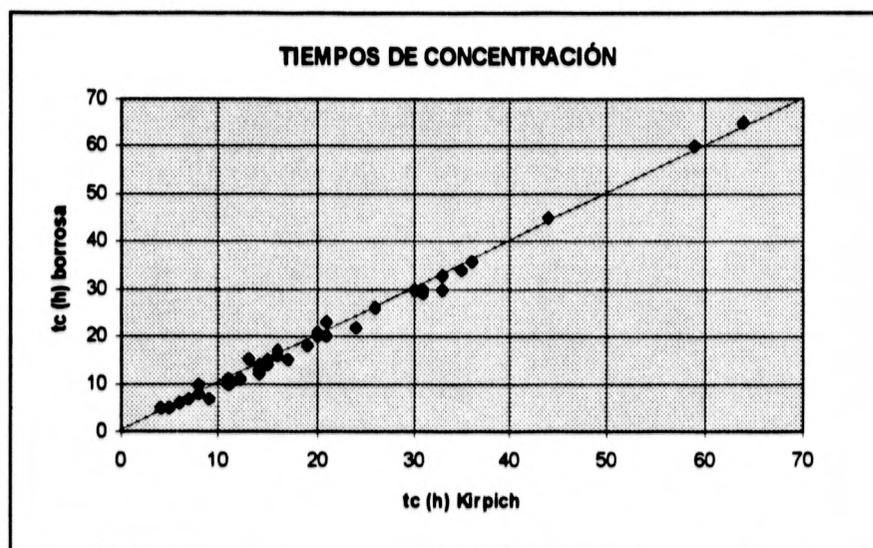
las correspondientes a Kirpich. En el mismo sentido, **al menos el 50%** de las 42 inferencias borrosas se alejan **a lo más en el intervalo  $\pm 1.6$  h** con respecto a las correspondientes a Kirpich.

- Puede verificarse que en promedio el error absoluto de la inferencia borrosa referida al modelo de Kirpich no excede el 6%.

NÚMERO	ESTACIÓN	LONGITUD [km]	PENDIENTE [%]	tc Kirpich [h]	tc sist borroso [h]
1*	ZAPOTILAN	440	0.342	64	65
2	SAN BLAS	402	0.353	59	60
3	LA TINA	30.3	0.413	8	10
4*	BAMICORI	20.2	0.490	5	5
5*	LAS CAÑAS	342	0.538	44	45
6	EL MAHONE	337	0.548	44	45
7	CHOIX	82	0.234	20	20
8	HUITES	267	0.685	33	33
9	PALO DULCE	184	1.028	21	23
10	CHINAPAS	131	1.449	14	12
11	SAN FRANCISCO	246	0.720	31	30
12	SAN IGNACIO	209	1.041	24	22
13	LA VERANERA	137	1.565	15	14
14*	URIQUE	127	1.537	14	14
15	GERACHIC	145	1.249	17	15
16	ALAMOS	124	0.184	31	29
17*	CAZANATE	93	0.156	26	26
18	JAINA	177	1.014	21	20
19*	TOAHAYANA	131	1.130	16	17
20	TECUSIAPA	90	1.504	11	11
21	LOS MOLINOS	35	2.159	4	5
22	NARANJO	107	0.760	16	16
23	ZOPILOTE	68	0.690	12	11
24	GUAMUCHIL	65	0.698	11	10
25	PERICOS	31	0.613	7	7
26	TIERRA BLANCA	276	0.603	36	36
27	PTE. S. PACIFICO	268	0.632	35	34
28	PALOS BLANCOS	256	0.649	33	30
29	EL VAREJONAL	233	0.680	30	30
30*	BADIRAGUATO	59	2.118	7	7
31	GUATENIPA	178	1.202	20	21
32	LA HUERTA	117	1.569	13	15
33	PTE. CAÑEDO	117	0.470	20	20
34	SANALONA	85	0.438	16	16
35	PICACHO	85	0.438	16	16
36	TAMAZULA	48	1.024	8	8
37	EL BLEDAL	31	0.799	6	6
38	SANTA CRUZ	180	1.267	19	18
39	ACATITAN	115	1.131	14	13
40	IXPALINO	174	1.310	19	18
41	PIAXTLA	142	1.689	15	15
42	EL QUELITE	42	0.579	9	7

Tabla 5.7 Comparación de tiempos de concentración entre la inferencia borrosa y el modelo de Kirpich.  
\*Estaciones usadas en el ajuste

Resulta conveniente reiterar que el modelo propuesto ha sido constituido a partir de tan sólo 7 puntos de los 42 disponibles, a pesar de lo cual y con base en los resultados obtenidos es posible afirmar, que nuestro sistema de control borroso es confiable en el universo sugerido y reproduce satisfactoriamente el modelo de Kirpich. La gráfica 5.1 muestra el comportamiento general del modelo en el universo sugerido.



gráfica 5.1

Puede pensarse ahora en modelar sistemas por medio de la teoría de los subconjuntos borrosos en donde la información disponible sea escasa o las relaciones entre las variables de entrada y salida sean complicadas, haciendo igualmente complicado establecer un modelo numérico como el de Kirpich. Pensemos por ejemplo en la predicción de tiempos pico y gastos pico a tiempo real usando información de gastos precedentes.

Queda abierta la puerta hacia el campo virgen de la hidrología y en general la Hidráulica bajo el enfoque de la teoría de los subconjuntos borrosos.

# Capítulo seis

.....

## Pronóstico Borroso de Avenidas a Tiempo Real usando Gastos Precedentes

**“Es mi intención consultar a la experiencia primero y mostrar después por razonamiento la causa por la que esa experiencia está obligada a actuar de esa manera. Antes de seguir adelante en un tema lo probaré primero por experimentación. Y ésta es la verdadera regla según la cual deben proceder todos aquellos que analizan los efectos de la naturaleza; aunque la naturaleza empieza con la causa y termina en la experiencia nosotros debemos seguir el camino opuesto, es decir: debemos empezar por la experiencia y por medio de ella investigar la causa.”**

- Leonardo da Vinci-

## **6.1 Introducción**

Como ya se ha mencionado, los sistemas de control borroso abarcan un campo de acción amplio definido desde el análisis de información ocurrida en el pasado hasta la predicción de eventos futuros. Es precisamente en esta última área en la que los sistemas borrosos resultan más sorprendentes debido, principalmente, al hecho de que para establecerlos no se precisa conocer la forma en que las variables se interrelacionan y, lo que es más, aun cuando esta forma de interrelación cambie a lo largo del dominio de discusión del fenómeno. Es en este ámbito en el que se desarrollará la parte culminante de este trabajo en la predicción de avenidas a tiempo real. Con esta intención se propone un sistema constituido por dos etapas borrosas trabajando en serie.

Posterior al análisis de los resultados obtenidos con el modelo propuesto, hacia el final de este capítulo, se resumen las bondades del mismo.

## **6.2 Pronóstico Borroso a Tiempo Real de Avenidas Máximas en la Estación Huites. (Sinaloa, Méx.)**

En el estado de Sinaloa, México, en la región hidrológica número 10 y a la salida de la parte alta de la cuenca del Río Fuerte, se encuentra ubicada la presa Huites<sup>1</sup>, construida con fines de generación eléctrica, riego y control de avenidas. Tiene una capacidad de almacenamiento de 4568 millones de m<sup>3</sup> al NAME y de 2908 millones de m<sup>3</sup> al NAMO; los gastos máximos de diseño son 30 000 m<sup>3</sup>/s de entrada al vaso y 22 445 m<sup>3</sup>/s de salida en el vertedor.



Figura 6.1.

<sup>1</sup> Oficialmente inaugurada a fines de 1995 con el nombre "Presa Luis Donaldo Colosio".

A la presa llegan dos afluentes del Río Fuerte, el Río Oteros y Río San Miguel. Aguas arriba de la presa no existen obras importantes de infraestructura hidráulica y el área correspondiente a su cuenca es de aproximadamente 26 020 km<sup>2</sup> mientras que la longitud de su cauce principal es de 267 km. La cuenca carece de áreas de inundación y los cauces de sus ríos son cañones de gran profundidad.

Según Toledo(1996), la precipitación anual promedio en la región es de 576 mm con una distribución porcentual como la mostrada en la tabla 6.1.

PERIODO DE PRECIPITACIÓN	PRECIPITACIÓN DEL PERIODO (%)
junio a octubre (lluvias de verano)	80%
noviembre a marzo (lluvias de invierno)	15%
abril y mayo	5%
Tabla 6.1. Distribución porcentual de precipitación anual en la cuenca de la Presa Huites.	

Agrega que las lluvias de verano son producidas por sistemas meteorológicos de origen tropical de poca extensión, a excepción de eventos ciclónicos de los meses de septiembre y octubre, mientras que las lluvias de invierno son originadas por frentes fríos de gran extensión. Las mayores avenidas registradas en esta cuenca desde 1942 ocurren de noviembre a principios de marzo; la excepción son aquellas lluvias ciclónicas del orden de las que producen las mayores avenidas de invierno pero que, tal vez debido a la evaporación, no producen el volumen de escurrimiento de aquellas. La evaporación en los meses de verano es, en promedio el triple de la de invierno.

Ya en dos ocasiones, 1960 y 1990, se han registrado en la cuenca de la presa Huites, avenidas extraordinarias cuyo volumen de escurrimiento sobrepasa la capacidad total de almacenamiento de la presa; el conocimiento anticipado de las avenidas extremas o extraordinarias en dicho sitio permitiría llevar al cabo eficientes y oportunas políticas de operación.

### 6.2.1 Registros Históricos de Escurrimientos en la Estación Huites

Se han recabado los registros históricos de los gastos medios diarios en la estación Huites durante el periodo que abarca del año 1942 a 1985 y se han separado las avenidas máximas correspondientes a cada año. Con base en la nomenclatura de la figura 6.2, en la tabla 6.2 se resume dicha información.

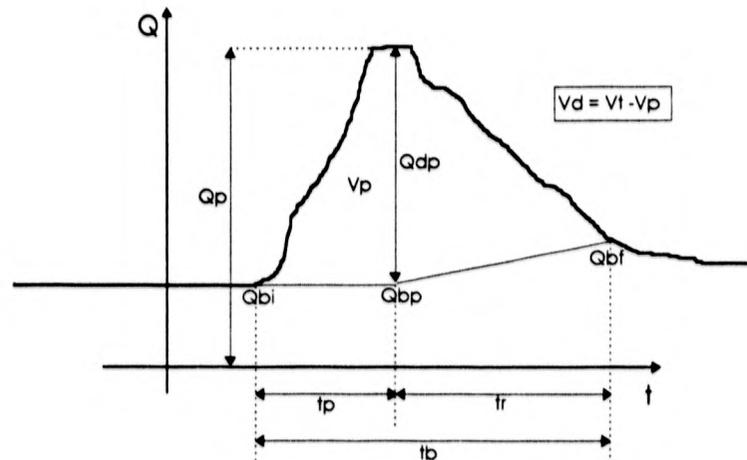


Figura 6.2

Con la información disponible intentaremos inicialmente encontrar una relación entre las variables, que permita establecer como depende el tiempo de pico " $t_p$ " con respecto a ellas. Acotemos estrictamente el problema en el sentido de que el modelo borroso formulado para la predicción del tiempo de pico, deberá trabajar con la menor información posible para lo cual establecemos la siguiente hipótesis:

- **Hipótesis uno:** Una vez iniciada la precipitación, la única información confiable corresponde al gasto base al inicio de la avenida " $Q_{bi}$ ". El tiempo de pico correspondiente se encuentra asociado a la "**memoria histórica del cauce**". El modelo borroso que se pretende, deberá ser capaz de extraer de dicha memoria la regla natural bajo la cual se rige el escurrimiento.

Año	tb (días)	tp (días)	tr (días)	Vp* (m <sup>3</sup> )	Vd* (m <sup>3</sup> )	Vt (m <sup>3</sup> )
1942	11	8	3	552,683,520	207,256,320	759,939,840
1943	5	2	3	736,560,000	1,104,840,000	1,841,400,000
1944	7	4	3	355,696,704	266,772,528	622,469,232
1945	11	6	5	324,025,920	270,021,600	594,047,520
1946	9	5	4	157,788,000	126,230,400	284,018,400
1947	7	4	3	126,524,160	94,893,120	221,417,280
1948	4	1	3	78,055,488	234,166,464	312,221,952
1949	9	6	3	1,744,138,656	872,069,328	2,616,207,984
1950	7	4	3	457,583,040	343,187,280	800,770,320
1951	6	3	3	59,811,696	59,811,696	119,623,392
1952	11	4	7	129,444,480	226,527,840	355,972,320
1953	12	8	4	219,815,424	109,907,712	329,723,136
1954	6	4	2	108,433,728	54,216,864	162,650,592
1955	4	2	2	340,355,520	340,355,520	680,711,040
1956	9	6	3	136,157,760	68,078,880	204,236,640
1957	12	6	6	86,863,104	86,863,104	173,726,208
1958	6	3	3	301,669,920	301,669,920	603,339,840
1959	6	3	3	206,347,824	206,347,824	412,695,648
1960	4	2	2	750,124,800	750,124,800	1,500,249,600
1961	10	6	4	332,369,568	221,579,712	553,949,280
1962	5	2	3	96,596,064	144,894,096	241,490,160
1963	7	3	4	322,439,616	429,919,488	752,359,104
1964	7	5	2	197,143,200	78,857,280	276,000,480
1965	8	5	3	264,492,000	158,695,200	423,187,200
1966	11	8	3	474,854,400	178,070,400	652,924,800
1967	5	2	3	187,049,952	280,574,928	467,624,880
1968	5	3	2	74,921,760	49,947,840	124,869,600
1969	7	4	3	151,562,880	113,672,160	265,235,040
1970	10	4	6	189,354,240	284,031,360	473,385,600
1971	5	2	3	168,666,624	252,999,936	421,666,560
1972	5	2	3	161,094,528	241,641,792	402,736,320
1973	5	2	3	495,102,240	742,653,360	1,237,755,600
1974	6	3	3	373,924,512	373,924,512	747,849,024
1975	5	2	3	47,347,200	71,020,800	118,368,000
1976	5	2	3	135,546,048	203,319,072	338,865,120
1977	6	2	4	75,280,320	150,560,640	225,840,960
1978	5	2	3	315,748,800	473,623,200	789,372,000
1979	4	1	3	182,377,440	547,132,320	729,509,760
1980	10	6	4	258,526,080	172,350,720	430,876,800
1981	9	7	2	912,561,552	260,731,872	1,173,293,424
1982	4	2	2	150,263,424	150,263,424	300,526,848
1983	5	2	3	555,442,272	833,163,408	1,388,605,680
1984	6	4	2	702,034,560	351,017,280	1,053,051,840
1985	6	2	4	208,647,360	417,294,720	625,942,080

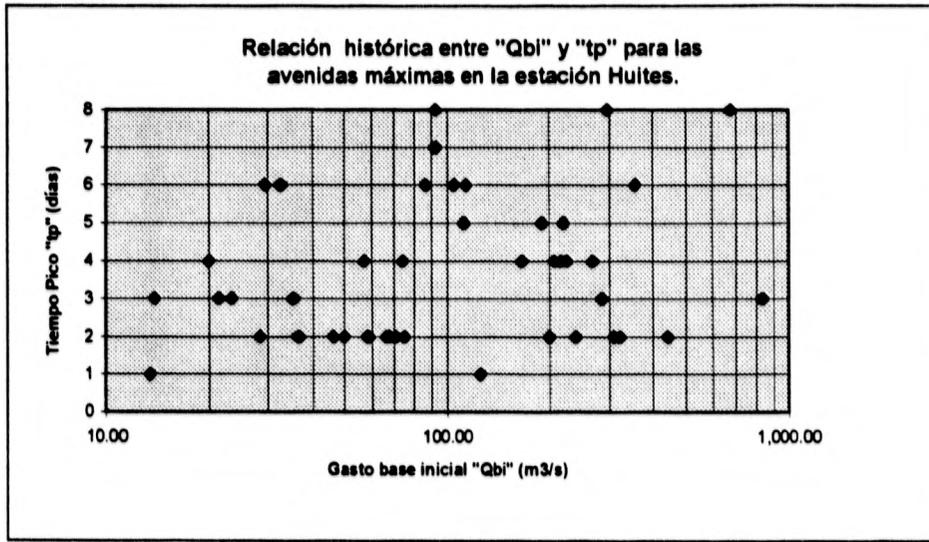
Tabla 6.2a. Registros históricos de avenidas máximas.  
\*Cálculo hecho para un hidrograma triangular.

Año	Qb (m <sup>3</sup> /s)			Qp (m <sup>3</sup> /s)	Qdp (m <sup>3</sup> /s)
	Qbi	Qbp	Qbf		
1942	295.50	295.50	586.55	1,894.70	1,599.20
1943	75.00	75.00	1,190.00	8,600.00	8,525.00
1944	57.07	57.07	531.00	2,115.50	2,058.43
1945	113.50	113.50	417.58	1,363.60	1,250.10
1946	112.00	112.00	242.15	842.50	730.50
1947	269.10	269.10	350.40	1,001.30	732.20
1948	13.36	13.36	302.60	1,820.20	1,806.84
1949	29.47	29.47	1,045.70	6,758.40	6,728.93
1950	74.35	74.35	397.00	2,722.40	2,648.05
1951	13.79	13.79	117.60	475.30	461.51
1952	166.60	166.60	246.70	915.70	749.10
1953	92.56	92.56	229.60	728.60	636.04
1954	226.09	226.09	363.40	853.60	627.51
1955	68.00	68.00	730.90	4,007.30	3,939.30
1956	104.40	104.40	206.55	629.70	525.30
1957	86.68	86.68	128.50	421.80	335.12
1958	285.40	285.40	630.80	2,613.10	2,327.70
1959	35.31	35.31	242.80	1,627.50	1,592.19
1960	309.80	309.80	1,856.50	8,991.80	8,682.00
1961	32.61	32.61	305.70	1,314.90	1,282.29
1962	58.09	58.09	327.10	1,176.10	1,118.01
1963	21.44	21.44	503.60	2,509.40	2,487.96
1964	221.20	221.20	435.30	1,133.90	912.70
1965	190.20	190.20	258.30	1,414.70	1,224.50
1966	676.50	676.50	914.80	2,050.50	1,374.00
1967	28.37	28.37	427.70	2,193.30	2,164.93
1968	833.70	833.70	1,046.60	1,411.80	578.10
1969	207.30	207.30	418.70	1,084.40	877.10
1970	216.90	216.90	350.30	1,312.70	1,095.80
1971	66.64	66.64	470.85	2,018.80	1,952.16
1972	46.38	46.38	417.90	1,910.90	1,864.52
1973	70.75	70.75	930.10	5,801.10	5,730.35
1974	23.38	23.38	609.40	2,908.60	2,885.22
1975	443.10	443.10	570.40	991.10	548.00
1976	58.88	58.88	314.40	1,627.70	1,568.82
1977	200.00	200.00	237.40	1,071.30	871.30
1978	322.60	322.60	911.10	3,977.10	3,654.50
1979	125.20	125.20	846.00	4,346.90	4,221.70
1980	354.50	354.50	576.75	1,351.90	997.40
1981	92.57	92.57	674.70	3,110.30	3,017.73
1982	36.54	36.54	324.70	1,775.70	1,739.16
1983	49.87	49.87	1,206.20	6,478.60	6,428.73
1984	20.00	20.00	946.10	4,082.70	4,062.70
1985	240.10	240.10	618.83	2,655.00	2,414.90

Tabla 6.2b. Registros históricos de avenidas máximas.

**6.2.2 Modelo Borroso para la Determinación de Tiempos Pico**

La gráfica 6.1 muestra el comportamiento histórico seguido entre las variables "Qbi" & "tp", permitiéndonos, además, establecer los universos de discusión correspondientes y los cuales se resumen en la tabla 6.3.



Gráfica 6.1

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	UNIDADES	RANGO	
			MÍNIMO	MÁXIMO
Qbi	Gasto base inicial (entrada)	m <sup>3</sup> /s	0	850
tp	tiempo pico (salida)	días	0	8

Tabla 6.3: Variables del sistema y universos de discusión

En el aparente caos sugerido por la gráfica 6.1, observe que una cantidad importante de puntos se encuentra en el intervalo (10, 400) m<sup>3</sup>/s. Una observación más detenida permite distinguir que los puntos históricos se agrupan en pequeños cúmulos los cuales permitirán definir los subconjuntos de los universos de discusión, así como la amplitud de las funciones de membresía correspondientes. En las tablas 6.4 y 6.5 se resumen las cotas de los subconjuntos correspondientes a nuestros universos de discusión.

GASTO BASE INICIAL [m³/s]		MEMBRESÍA		
SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO	DERECHA	
A	0	16	20	
B	19	25	29	
C	29	30	35	
D	35	43	54	
E	52	60	80	
F	77	89	103	
G	102	109	121	
H	119	127	160	
I	159	182	197	
J	197	210	220	
K	220	221	230	
L	230	251	260	
M	260	280	290	
N	289	300	305	
O	304	320	340	
P	335	355	400	
Q	395	449	550	
R	525	675	725	
S	711	779	850	

Tabla 6.4 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

TIEMPO PICO [días]		MEMBRESÍA		
SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO	DERECHA	
A	0	1	2	
B	1	2	3	
C	2	3	4	
D	3	4	5	
E	4	5	6	
F	5	6	7	
G	6	7	8	

Tabla 6.5 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

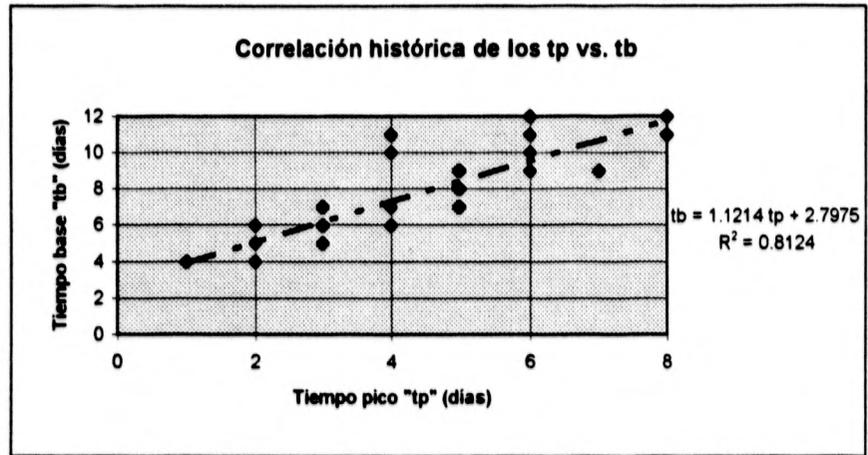
En la tabla 6.6 se muestra la base de conocimiento borrosa establecida en nuestro análisis.

Q <sub>bi</sub>	A	B	C	D	E	F	G	H	Y	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
t <sub>p</sub>	B	C	F	B	C	G	F	A	D	C	D	B	C	G	B	F	B	G	C

Tabla 6.6 Base de conocimientos borrosos para caracterizar del tiempo pico.

**6.2.2.1 Correlación Histórica de los Tiempos de Pico con Respecto a los Tiempos de Base**

Como complemento al modelo borroso para la determinación del tiempo pico, se propone correlacionar (ordinariamente) los tiempos de base históricos con sus correspondientes pico usando para ello un análisis de regresión lineal. En la gráfica 6.2 se muestra el resultado de dicho análisis.



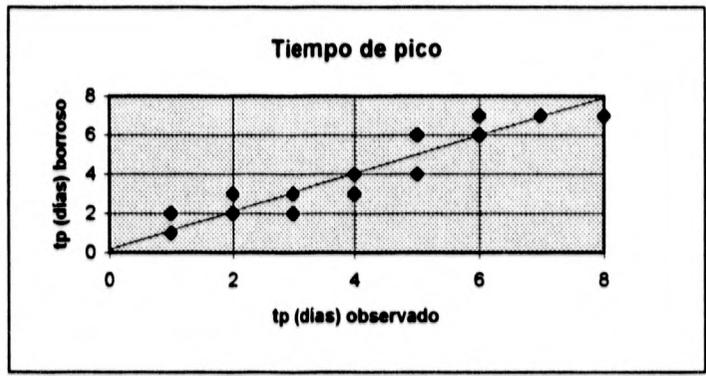
Gráfica 6.2

**6.2.2.2 Resultados de la Predicción de las Variables Temporales "tp", "tr" y "tb"**

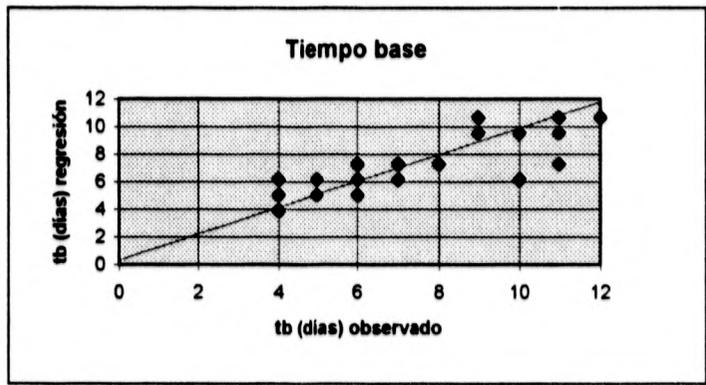
Usando consecutivamente el modelo borroso para la predicción de "tp" y el modelo de regresión lineal para la determinación de "tb" y puesto que ambas variables se asocian según:  $tb = tp + tr$ , en la tabla 6.7 se comparan los valores históricos de dichas variables respecto a sus inferencias; las gráficas 6.3, 6.4 y 6.5 presentan los mismos resultados. Cabe mencionar que en la tabla se marcan aquellos datos que formaron parte de la etapa de ajuste del modelo borroso y que, a la vez, permitieron establecer la base de conocimiento mostrada en la tabla 6.6.

Año	tp (días)	tp borroso (días)	error absoluto	tb (días)	tb regresión (días)	error absoluto	tr (días)	tr inferido (días)	error absoluto
1942*	8	7	1	11	11	0	3	4	1
1943*	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1944*	4	3	1	7	6	1	3	3	0
1945*	6	6	0	11	10	1	5	4	1
1946*	5	6	1	9	10	1	4	4	0
1947	4	3	1	7	6	1	3	3	0
1948*	1	2	1	4	5	1	3	3	0
1949	6	6	0	9	10	1	3	4	1
1950	4	3	1	7	6	1	3	3	0
1951*	3	2	1	6	5	1	3	3	0
1952	4	4	0	11	7	4	7	3	4
1953	8	7	1	12	11	1	4	4	0
1954	4	4	0	6	7	1	2	3	1
1955*	2	3	1	4	6	2	2	3	1
1956	6	6	0	9	10	1	3	4	1
1957*	6	7	1	12	11	1	6	4	2
1958	3	3	0	6	6	0	3	3	0
1959	3	2	1	6	5	1	3	3	0
1960*	2	2	0	4	5	1	2	3	1
1961	6	6	0	10	10	0	4	4	0
1962	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1963*	3	3	0	7	6	1	4	3	1
1964	5	4	1	7	7	0	2	3	1
1965*	5	4	1	8	7	1	3	3	0
1966	8	7	1	11	11	0	3	4	1
1967	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1968*	3	3	0	5	6	1	2	3	1
1969	4	3	1	7	6	1	3	3	0
1970*	4	3	1	10	6	4	6	3	3
1971	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1972	2	2	0	5	5	0	3	3	0
1973	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1974	3	3	0	6	6	0	3	3	0
1975	2	2	0	5	5	0	3	3	0
1976*	2	3	1	5	6	1	3	3	0
1977	2	3	1	6	6	0	4	3	1
1978	2	2	0	5	5	0	3	3	0
1979*	1	1	0	4	4	0	3	3	0
1980*	6	6	0	10	10	0	4	4	0
1981*	7	7	0	9	11	2	2	4	2
1982	2	2	0	4	5	1	2	3	1
1983	2	2	0	5	5	0	3	3	0
1984*	4	3	1	6	6	0	2	3	1
1985*	2	2	0	6	5	1	4	3	1
Error promedio absoluto en la inferencia borrosa de tp: 0.55 días			Error promedio absoluto de regresión para la inferencia de tb: 0.92 días			Error promedio absoluto en la inferencia ordinaria de tr: 0.67 días			
Tabla 6.7. Resultados de la predicción de "tp", "tb" y "tr". * Datos usados en el ajuste del sistema borroso									

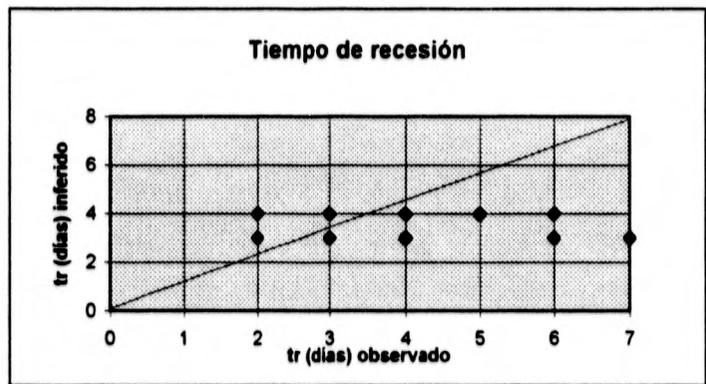
ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA



Gráfica 6.3



Gráfica 6.4



Gráfica 6.5

Concluida la predicción de las variables temporales y en particular el tiempo de pico, bajo la hipótesis hecha hacia el final de la sección 6.2.1, nos encontramos en condiciones de complementarla:

- **Hipótesis dos:** Una vez que se ha establecido un modelo que permita inferir un valor posible de "tp" podremos aventurar otro sobre "Qdp", siempre y cuando sepamos algo acerca de la tendencia que sigue el crecimiento del gasto a través del tiempo, una vez iniciada la avenida.

### 6.2.3 Modelo Borroso para la Determinación del Gasto de Pico "Qdp"

Tomando como referencia el gasto base inicial, en la tabla 6.8 se detallan los hidrogramas de escurrimiento directo para las avenidas máximas registradas en la estación Huites, hasta el tiempo pico.

Bajo la hipótesis planteada, el sistema borroso a desarrollar para la predicción del gasto "Qdp" funcionará bajo dos ideas fundamentales:

1. Si el evento en observación corresponde a una avenida extraordinaria, entonces tanto el tiempo pico inferido en términos borrosos como la tendencia observada por la avenida determinan el valor "Qdp".
2. La tendencia (  $\Delta Q/\Delta t$  ) quedará claramente establecida, lo suponemos así, cuando hallan transcurrido 0.5 días para avenidas cuyo "tp" inferido sea igual a uno y 1 día para avenidas cuyo "tp" inferido sea superior a uno<sup>2</sup>.

año	Día							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1942	138.4	118.30	153.60	241.10	797.10	1,337.90	1,580.30	1,599.20
1943	493.00	8,525.00						
1944	874.43	1,484.83	1,836.23	2,058.43				
1945	41.70	109.20	326.70	590.40	1,012.60	1,250.10		
1946	12.60	90.70	248.70	323.60	730.50			
1947	147.00	302.00	421.40	732.20				
1948	1,806.84							
1949	2,474.53	2,872.03	3,739.23	3,773.03	3,977.13	6,728.93		
1950	326.85	248.85	261.35	2,648.05				
1951	3.04	37.85	461.51					
1952	39.20	74.00	118.50	749.10				
1953	19.34	48.94	86.94	158.54	317.34	327.14	520.54	636.04
1954	121.74	252.17	415.31	627.51				

Tabla 6.8a. Hidrograma de escurrimiento directo hasta tiempo pico para las avenidas máximas en la estación Huites.

<sup>2</sup> Al observar la tabla 6.8, resulta claro que la tendencia observada por la avenida no responde a una ley lineal y, lo que es más, sea cual fuere dicha ley, ésta no es constante.

año	Día							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1955	1,119.70	3,939.30						
1956	73.43	154.00	241.72	463.40	483.10	525.30		
1957	17.52	137.02	165.72	250.42	243.32	335.12		
1958	118.40	743.50	2,327.70					
1959	62.81	319.99	1,592.19					
1960	1,929.50	8,682.00						
1961	152.69	598.79	839.39	845.69	852.09	1,282.29		
1962	30.29	1,118.01						
1963	201.46	1,777.36	2,487.95					
1964	90.60	240.40	396.70	855.30	912.70			
1965	8.20	241.70	202.50	992.60	1,224.50			
1966	15.50	524.70	485.60	476.60	538.20	608.70	1,057.80	1,374.00
1967	895.13	2,164.93						
1968	59.80	436.90	578.10					
1969	77.50	224.80	209.40	877.10				
1970	205.70	158.20	300.50	1,095.80				
1971	770.26	1,952.16						
1972	402.02	1,864.52						
1973	448.25	5,730.35						
1974	87.42	770.02	2,885.22					
1975	229.40	548.00						
1976	1,458.82	1,568.82						
1977	676.30	871.30						
1978	980.30	3,654.50						
1979	4,221.70							
1980	65.50	142.50	201.40	234.60	629.40	997.40		
1981	62.03	102.73	139.83	138.83	164.63	2,625.23	3,017.73	
1982	968.06	1,739.16						
1983	657.13	6,428.73						
1984	889.30	1,672.50	2,826.60	4,062.70				
1985	1,430.30	2,414.90						

Tabla 6.8b. Hidrograma de escurrimiento directo hasta tiempo pico para las avenidas máximas en la estación Huites.

Al observar la información contenida en la tabla 6.8 es posible establecer las cotas de los universos de discusión correspondientes al modelo que se pretende; vea resumida esta información en la tabla 6.9.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	UNIDADES	RANGO	
			MÍNIMO	MÁXIMO
Tendencia	Tendencia (entrada)	m <sup>3</sup> /s/día	0	5000
tp	tiempo pico (entrada)	días	0	9
Qdp	Gasto de pico (salida)	m <sup>3</sup> /s	0	9000

Tabla 6.9: Variables del sistema y universos de discusión

**6.2.3.1 Primera Etapa de Ajuste**

Para mostrar el efecto que provoca adicionar información al modelo, se propone una primera etapa de ajuste con tan sólo 16 de los 44 datos disponibles, aproximadamente un 37% del total. La tabla 6.10, 6.11 y 6.12 contienen la descripción de los subconjuntos borrosos correspondientes a cada universo de discusión.

<b>TENDENCIA [m³/s/día]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
MP (muy pequeña)	0	66	283	
P (pequeña)	179	525	1020	
M (media)	758	1379	2383	
G (grande)	2295	2766	3404	
MG (muy grande)	3337	4162	5000	

Tabla 6.10 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

<b>TIEMPO PICO [días]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
MP (muy pequeño)	0	0.3	1.3	
P (pequeño)	1.1	1.3	3.6	
M (medio)	3.2	4.2	5.3	
G (grande)	5.2	6	7.4	
MG (muy grande)	7.1	8.4	9	

Tabla 6.11 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

<b>GASTO PICO "Qdp" [días]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
EP (pequeño en extremo)	0	780	1567	
MP (muy pequeño)	847	1350	2512	
P (pequeño)	1890	3022	4155	
M (medio)	2970	4087	5212	
G (grande)	4912	5655	6720	
MG (muy grande)	5617	6750	7882	
EG (grande en extremo)	7747	8250	9000	

Tabla 6.12 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

En la tabla 6.13 se muestra la base de conocimiento borrosa establecida para esta primera etapa.

	TENDENCIA				
TIEMPO PICO	MP	P	M	G	MG
MG	MP	MP	MG	MG	MG
G	MP	P	MG	MG	MG
M	EP	MP	M	G	MG
P	EP	MP	P	G	EG
MP	EP	EP	MP	M	M

Tabla 6.13. Base de conocimientos borrosos para caracterizar el gasto pico.

**6.2.3.2 Resultados de la Predicción de "Qdp" en la Primera Etapa de Ajuste**

Procedemos al análisis de los resultados arrojados en la inferencia borrosa de Qdp. Como ya dijimos, el tiempo pico estimado (tp) y la tendencia representan las variables de entrada. Es importante recordar que la variable "tendencia" considerada para la modelación corresponde a la pendiente de la recta secante que une los puntos Qbi y Q(Δt), vea figura 6.3, en donde Δt (delta de tiempo) representa el tiempo que se supone suficiente para que quede claramente establecida dicha tendencia.

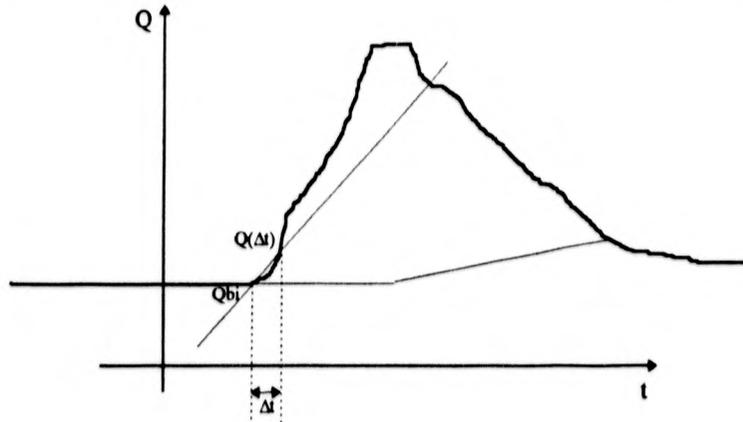


Figura 6.3

Puede observarse, en la tabla 6.14, que a pesar de lo pobre que resulta la información que alimenta al sistema para el primer Δt propuesto y el hecho en extremo importante de que una de las variables de entrada es a

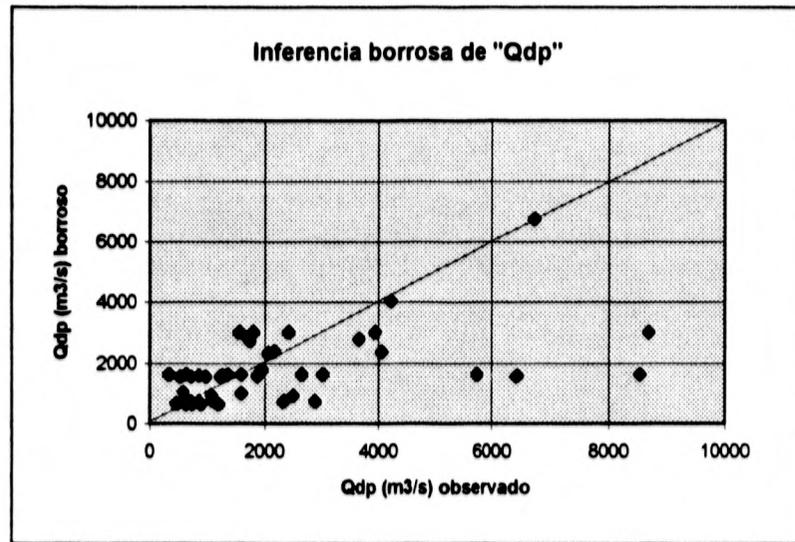
su vez una inferencia borrosa, el modelo responde satisfactoriamente en un porcentaje amplio de los casos estudiados.

Recuerde que durante el desarrollo del modelo no se han separado de los datos registrados aquellos que resulten extraños al comportamiento medio histórico, ni se ha cuestionado sobre algunos otros que posiblemente sean resultado de eventos superpuestos, pues la idea inicial ha sido la de crear un modelo de inferencia que funcione con información escasa.

Año	tp Inferido (días)	Tendencia (m <sup>3</sup> /s/día)	Qdp inferido (m <sup>3</sup> /s)	Qdp real (m <sup>3</sup> /s)	Error % (*)
1942	7	138	1635	1599	2
1943	3	493	1635	8525	81
1944	3	874	2332	2058	13
1945	6	41	1560	1250	25
1946	6	13	1560	730	114
1947	3	147	732	735	0
1948	2	1806	3022	1806	67
1949	6	2474	6750	6728	0
1950	3	326	1635	2648	38
1951	2	3	660	461	43
1952	4	39	637	749	15
1953	7	19	1635	636	157
1954	4	122	652	627	4
1955	3	1119	3022	3939	23
1956	6	73	1560	525	197
1957	7	18	1635	335	388
1958	3	118	735	2327	68
1959	2	63	1002	1592	37
1960	2	1930	3022	8682	65
1961	6	152	1590	1282	24
1962	3	30	760	1118	32
1963	3	201	922	2487	63
1964	4	91	637	912	30
1965	4	8	637	1224	48
1966	7	16	1635	1374	19
1967	3	895	2392	2164	11
1968	3	59	735	578	27
1969	3	77	735	877	16
1970	3	205	952	1095	13
1971	3	770	1785	1952	9
1972	2	402	1582	1864	15
1973	3	448	1635	5730	71
1974	3	87	735	2885	45
1975	2	229	1050	584	80
1976	3	1458	3022	1568	93
1977	3	676	1600	871	84
1978	2	980	2790	3654	24
1979	1	4221	4037	4221	4
1980	6	65	1560	997	56
1981	7	62	1635	3017	46
1982	2	968	2730	1739	57
1983	2	657	1575	6428	75
1984	3	889	2377	4062	41
1985	2	1430	3022	2414	25

Tabla 6.14. Resumen de resultados en la inferencia borrosa de Qdp.  
(\*) Error en la inferencia con respecto al valor real de Qdp.

La gráfica 6.6 ilustra los resultados obtenidos en la primera etapa de ajuste y que fueron presentados en la tabla 6.14.



Gráfica 6.6

De los resultados resumidos en la tabla anterior, puede destacarse que el 43% de las inferencias estiman un valor de "Qdp" con un error menor al 30% con respecto al valor observado, mientras que el 62% de las inferencias no sobrepasan el 50% de error en la predicción de dicho gasto.

Con la información obtenida hasta el momento, en la tabla 6.15 se comparan los volúmenes observados e inferidos, de pico y descarga.

Año	Vp (m³)	Vp (m³) inferido	Vd (m³)	Vd (m³) inferido	Vl (m³)	Vl (m³) inferido
1942	552,683,520	494,424,000	207,256,320	257,616,094	759,939,840	752,040,094
1943	736,560,000	211,896,000	1,104,840,000	223,317,194	1,841,400,000	435,213,194
1944	355,696,704	302,227,200	266,772,528	318,517,246	622,469,232	620,744,446
1945	324,025,920	404,352,000	270,021,600	237,617,453	594,047,520	641,969,453
1946	157,788,000	404,352,000	126,230,400	237,617,453	284,018,400	641,969,453
1947	126,524,160	94,867,200	94,893,120	99,980,542	221,417,280	194,847,742
1948	78,055,488	261,100,800	234,166,464	396,912,381	312,221,952	658,013,181
1949	1,744,138,656	1,749,600,000	872,069,328	1,028,152,440	2,616,207,984	2,777,752,440
1950	457,583,040	211,896,000	343,187,280	223,317,194	800,770,320	435,213,194
1951	59,811,696	57,024,000	59,811,696	86,685,034	119,623,392	143,709,034

Tabla 6.15a. Volúmenes inferidos y su comparación con los valores observados.

Año	Vp (m³)	Vp (m³) inferido	Vd (m³)	Vd (m³) inferido	Vt (m³)	Vt (m³) inferido
1952	129,444,480	110,073,600	226,527,840	90,345,659	355,972,320	200,419,259
1953	219,815,424	494,424,000	109,907,712	257,616,094	329,723,136	752,040,094
1954	108,433,728	112,665,600	54,216,864	92,473,108	162,650,592	205,138,708
1955	340,355,520	391,651,200	340,355,520	412,761,200	680,711,040	804,412,400
1956	136,157,760	404,352,000	68,078,880	237,617,453	204,236,640	641,969,453
1957	86,863,104	494,424,000	86,863,104	257,616,094	173,726,208	752,040,094
1958	301,669,920	95,256,000	301,669,920	100,390,298	603,339,840	195,646,298
1959	206,347,824	86,572,800	206,347,824	131,603,642	412,695,648	218,176,442
1960	750,124,800	261,100,800	750,124,800	396,912,381	1,500,249,600	658,013,181
1961	332,369,568	412,128,000	221,579,712	242,187,019	553,949,280	654,315,019
1962	96,596,064	98,496,000	144,894,096	103,804,934	241,490,160	202,300,934
1963	322,439,616	119,491,200	429,919,488	125,931,776	752,359,104	245,422,976
1964	197,143,200	110,073,600	78,857,280	90,345,659	276,000,480	200,419,259
1965	264,492,000	110,073,600	158,695,200	90,345,659	423,187,200	200,419,259
1966	474,854,400	494,424,000	178,070,400	257,616,094	652,924,800	752,040,094
1967	187,049,952	310,003,200	280,574,928	326,712,372	467,624,880	636,715,572
1968	74,921,760	95,256,000	49,947,840	100,390,298	124,869,600	195,646,298
1969	151,562,880	95,256,000	113,672,160	100,390,298	265,235,040	195,646,298
1970	189,354,240	123,379,200	284,031,360	130,029,339	473,385,600	253,408,539
1971	168,666,624	231,336,000	252,999,936	243,805,010	421,666,560	475,141,010
1972	161,094,528	136,684,800	241,641,792	207,781,399	402,736,320	344,466,199
1973	495,102,240	211,896,000	742,653,360	223,317,194	1,237,755,600	435,213,194
1974	373,924,512	95,256,000	373,924,512	100,390,298	747,849,024	195,646,298
1975	47,347,200	90,720,000	71,020,800	137,908,008	118,368,000	228,628,008
1976	135,546,048	391,651,200	203,319,072	412,761,200	338,865,120	804,412,400
1977	75,280,320	207,360,000	150,560,640	218,536,704	225,840,960	425,896,704
1978	315,748,800	241,056,000	473,623,200	366,441,278	789,372,000	607,497,278
1979	182,377,440	174,398,400	547,132,320	509,051,490	729,509,760	683,449,890
1980	258,526,080	404,352,000	172,350,720	237,617,453	430,876,800	641,969,453
1981	912,561,552	494,424,000	260,731,872	257,616,094	1,173,293,424	752,040,094
1982	150,263,424	235,872,000	150,263,424	358,560,821	300,526,848	594,432,821
1983	555,442,272	136,080,000	833,163,408	206,862,012	1,388,605,680	342,942,012
1984	702,034,560	308,059,200	351,017,280	324,663,591	1,053,051,840	632,722,791
1985	208,647,360	261,100,800	417,294,720	396,912,381	625,942,080	658,013,181

Tabla 6.15b. Volúmenes inferidos y su comparación con los valores observados.

### 6.2.3.3 Segunda Etapa de Ajuste

En una segunda etapa, se propone realizar el ajuste del modelo con 32 de los 44 datos disponibles, aproximadamente un 73% del total. La tabla 6.16, 6.17 y 6.18 contienen la descripción de los subconjuntos borrosos correspondientes a cada universo de discusión.

<b>TENDENCIA [m³/s/día]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
A	0	0	8.3	
B	8.3	20	66	
C	66	75	83	
D	83	95	150	
E	150	158	412	
F	412	433	666	
G	666	683	845	
H	845	870	975	
I	975	1050	1125	
J	1125	1200	1900	
K	1900	2000	2400	
L	2400	3000	3500	
M	3500	4000	5000	

Tabla 6.16 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

<b>TIEMPO PICO [días]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
A	0	1	1.5	
B	1.3	2	2.5	
C	2.3	3	3.5	
D	3.3	4	4.5	
E	4.3	5	5.5	
F	5.3	6	6.5	
G	6.3	7	7.5	
H	7.3	8	9	

Tabla 6.17 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

<b>GASTO PICO "Qdp" [días]</b>		<b>MEMBRESÍA</b>		
<b>SUBCONJUNTO</b>	<b>IZQUIERDA</b>	<b>CENTRO</b>	<b>DERECHA</b>	
EP (pequeño en extremo)	0	510	930	
MP (muy pequeño)	577	712	2010	
P (pequeño)	2010	2062	3075	
M (medio)	3007	3052	4695	
G (grande)	3930	4117	6022	
MG (muy grande)	5955	6750	8250	
EG (grande en extremo)	7800	8385	9000	

Tabla 6.18 Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía.

En la tabla 6.19 se muestra la base de conocimiento borrosa establecida para esta segunda etapa.

TIEMPO PICO	Tendencia									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
H	*	MP	*	MP	*	*	*	*	*	*
G	*	P	*	MP	*	*	*	*	*	*
F	*	MP	EP	*	MP	*	*	*	*	*
E	*	EP	*	MP	*	*	*	*	*	*
D	*	MP	MP	EP	MP	*	*	G	*	*
C	EP	EP	MP	P	P	EG	P	P	*	*
B	*	MP	*	*	*	EG	MP	P	M	*
A	*	*	*	*	*	*	MP	*	*	G

Tabla 6.19. Base de conocimientos borrosos para caracterizar el gasto pico.  
\* no conocida con certeza

### 6.2.3.4 Resultados de la Predicción de "Qdp" en la Segunda Etapa de Ajuste

En la tabla 6.20 puede observarse el resultado de la inferencia borrosa sobre el valor de "Qdp" usando el 73% de la información total disponible y se aprecian notables mejoras.

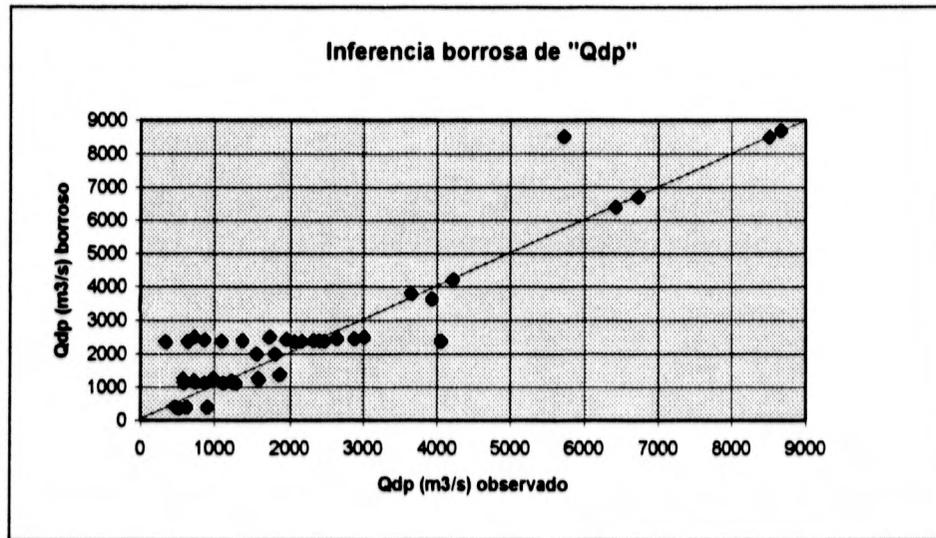
Año	tp inferido (días)	Tendencia (m3/s/día)	Qdp inferido (m3/s)	Qdp real (m3/s)	Error % (*)
1942	7	138	1230	1599	23
1943	3	493	8497	8525	0
1944	3	874	2370	2058	15
1945	6	41	1147	1250	8
1946	6	13	1200	730	64
1947	3	147	2512	735	242
1948	2	1806	2000	1806	11
1949	6	2474	6700	6728	0
1950	3	326	2452	2648	7
1951	2	3	412	461	11
1952	4	39	1132	749	51
1953	7	19	2370	636	273
1954	4	122	405	627	35
1955	3	1119	3637	3939	8
1956	6	73	367	525	30
1957	7	18	2370	335	607
1958	3	118	2407	2327	3
1959	2	63	1260	1592	21
1960	2	1930	8690	8682	0
1961	6	152	1115	1282	13
1962	3	30	1117	1118	0
1963	3	201	2377	2487	4
1964	4	91	397	912	56
1965	4	8	1200	1224	2

Tabla 6.20a. Resumen de resultados en la inferencia borrosa de Qdp.  
(\*) Error en la inferencia con respecto al valor real de Qdp.

Año	tp inferido (días)	Tendencia (m3/s/día)	Qdp inferido (m3/s)	Qdp real (m3/s)	Error % (*)
1966	7	16	2400	1374	75
1967	3	895	2385	2164	10
1968	3	59	1237	578	114
1969	3	77	1115	877	27
1970	3	205	2377	1095	117
1971	3	770	2430	1952	24
1972	2	402	1382	1864	26
1973	3	448	8520	5730	49
1974	3	87	2460	2885	15
1975	2	229	1117	584	91
1976	3	1458	2010	1568	28
1977	3	676	2422	871	178
1978	2	980	3802	3654	4
1979	1	4221	4220	4221	0
1980	6	65	1260	997	26
1981	7	62	2512	3017	17
1982	2	968	2512	1739	44
1983	2	657	6400	6428	0
1984	3	889	2390	4062	41
1985	2	1430	2400	2414	1

Tabla 6.20b. Resumen de resultados en la inferencia borrosa de Qdp.  
 (\*) Error en la inferencia con respecto al valor real de Qdp.

La gráfica 6.7 ilustra los resultados obtenidos en la segunda etapa de ajuste y que fueron presentados en la tabla 6.20.



gráfica 6.7

De los resultados resumidos en la tabla anterior, puede destacarse que para este caso, el 64% de las inferencias estiman un valor de "Qdp" con un error menor al 30% con respecto al valor observado mientras que el 80% de las inferencias no sobrepasan el 50% de error en la predicción de dicho gasto.

Al igual que en la primera etapa de ajuste, en la tabla 6.21 se comparan los volúmenes observados e inferidos de pico y descarga.

Año	Vp (m³)	Vp (m³) inferido	Vd (m³)	Vd (m³) inferido	Vt (m³)	Vt (m³) inferido
1942	552,683,520	371,952,000	207,256,320	193,802,933	759,939,840	565,754,933
1943	736,560,000	1,101,211,200	1,104,840,000	1,160,566,484	1,841,400,000	2,261,777,684
1944	355,696,704	307,152,000	266,772,528	323,707,493	622,469,232	630,859,493
1945	324,025,920	297,302,400	270,021,600	174,709,755	594,047,520	472,012,155
1946	157,788,000	311,040,000	126,230,400	182,782,656	284,018,400	493,822,656
1947	126,524,160	325,555,200	94,893,120	343,102,625	221,417,280	668,657,825
1948	78,055,488	172,800,000	234,166,464	262,681,920	312,221,952	435,481,920
1949	1,744,138,656	1,736,640,000	872,069,328	1,020,536,496	2,616,207,984	2,757,176,496
1950	457,583,040	317,779,200	343,187,280	334,907,499	800,770,320	652,686,699
1951	59,811,696	35,596,800	59,811,696	54,112,476	119,623,392	89,709,276
1952	129,444,480	195,609,600	226,527,840	160,551,469	355,972,320	356,161,069
1953	219,815,424	716,688,000	109,907,712	373,425,163	329,723,136	1,090,113,163
1954	108,433,728	69,984,000	54,216,864	57,441,118	162,650,592	127,425,118
1955	340,355,520	471,355,200	340,355,520	496,761,245	680,711,040	968,116,445
1956	136,157,760	95,126,400	68,078,880	55,901,029	204,236,640	151,027,429
1957	86,863,104	716,688,000	86,863,104	373,425,163	173,726,208	1,090,113,163
1958	301,669,920	311,947,200	301,669,920	328,761,154	603,339,840	640,708,354
1959	206,347,824	108,864,000	206,347,824	165,489,610	412,695,648	274,353,610
1960	750,124,800	750,816,000	750,124,800	1,141,352,942	1,500,249,600	1,892,168,942
1961	332,369,568	289,008,000	221,579,712	169,835,551	553,949,280	458,843,551
1962	96,596,064	144,763,200	144,894,096	152,565,936	241,490,160	297,329,136
1963	322,439,616	308,059,200	429,919,488	324,663,591	752,359,104	632,722,791
1964	197,143,200	68,601,600	78,857,280	56,306,478	276,000,480	124,908,078
1965	264,492,000	207,360,000	158,695,200	170,195,904	423,187,200	377,555,904
1966	474,854,400	725,760,000	178,070,400	378,152,064	652,924,800	1,103,912,064
1967	187,049,952	309,096,000	280,574,928	325,756,274	467,624,880	634,852,274
1968	74,921,760	160,315,200	49,947,840	168,956,189	124,869,600	329,271,389
1969	151,562,880	144,504,000	113,672,160	152,292,766	265,235,040	296,796,766
1970	189,354,240	308,059,200	284,031,360	324,663,591	473,385,600	632,722,791
1971	168,666,624	314,928,000	252,999,936	331,902,619	421,666,560	646,830,619
1972	161,094,528	119,404,800	241,641,792	181,513,207	402,736,320	300,918,007

Tabla 6.21a. Volúmenes inferidos y su comparación con los valores observados.

Año	Vp (m <sup>3</sup> )	Vp (m <sup>3</sup> ) inferido	Vd (m <sup>3</sup> )	Vd (m <sup>3</sup> ) inferido	Vt (m <sup>3</sup> )	Vt (m <sup>3</sup> ) inferido
1973	495,102,240	1,104,192,000	742,653,360	1,163,707,949	1,237,755,600	2,267,899,949
1974	373,924,512	318,816,000	373,924,512	336,000,182	747,849,024	654,816,182
1975	47,347,200	96,508,800	71,020,800	146,707,852	118,368,000	243,216,652
1976	135,546,048	260,496,000	203,319,072	274,536,734	338,865,120	535,032,734
1977	75,280,320	313,891,200	150,560,640	330,809,936	225,840,960	644,701,136
1978	315,748,800	328,492,800	473,623,200	499,358,330	789,372,000	827,851,130
1979	182,377,440	182,304,000	547,132,320	532,127,146	729,509,760	714,431,146
1980	258,526,080	326,592,000	172,350,720	191,921,789	430,876,800	518,513,789
1981	912,561,552	759,628,800	260,731,872	395,799,160	1,173,293,424	1,155,427,960
1982	150,263,424	217,036,800	150,263,424	329,928,492	300,526,848	546,965,292
1983	555,442,272	552,960,000	833,163,408	840,582,144	1,388,605,680	1,393,542,144
1984	702,034,560	309,744,000	351,017,280	326,439,202	1,053,051,840	636,183,202
1985	208,647,360	207,360,000	417,294,720	315,218,304	625,942,080	522,578,304

Tabla 6.21b. Volúmenes inferidos y su comparación con los valores observados.

#### 6.2.4. Comentarios Finales sobre el Pronóstico Borroso de Avenidas.

1. A la fecha, no existen reportados en la literatura relacionada a la matemática borrosa y sus aplicaciones, trabajos en el área de la Hidráulica. En el caso de la Hidrología, existen un par de ellos (Fujita & Nakao, 1992) relativos al pronóstico de avenidas a tiempo real usando información de la distribución temporal y espacial de lluvias y con auxilio de un Sistema de Información Geográfica, GIS. Por lo anterior, el modelo descrito en este trabajo no ha podido ser comparado con algún otro semejante en la misma área de conocimiento, aunque un par de aplicaciones de las redes neuronales (Toledo, 1996) con propósitos muy parecidos a los discutidos aquí, permitirán establecer parámetros comparativos.
2. Iniciemos por recordar que la inferencia borrosa sugerida, se dividió en dos etapas principales. En la primera de ellas, se determinan los valores posibles de las variables temporales "tp", "tb" y "tr" suponiendo que el tiempo pico se encuentra ligado a una memoria histórica la cual puede interpretarse en términos del gasto que escurre al inicio de la tormenta (Qbi)<sup>3</sup>. Se establece un modelo de regresión para la inferencia del tiempo base. En la matemática ordinaria y en concepciones más sofisticadas como las redes neuronales, resultaría bastante difícil disociar las variables temporales del resto como se ha conseguido aquí con relativa facilidad.
3. En una segunda etapa<sup>4</sup>, se establece una metodología para inferir el gasto de pico, "Qdp", especulando sobre la relación de éste con

<sup>3</sup> Vea la hipótesis hecha hacia el final de la sección 6.2.1.

<sup>4</sup> Vea la hipótesis hecha hacia el final de la sección 6.2.2.2.

respecto a la tendencia seguida por la avenida en cierto periodo de tiempo. Observe que tan sólo en una primera aproximación<sup>5</sup>, el modelo predice satisfactoriamente el gasto antes mencionado en el 80% de los casos y haciendo uso de sólo el 73% de la información disponible. Las dos etapas consecutivas de ajuste demuestran la congruencia matemática del modelo al alimentarse de mayor información. La predicción puede complementarse al establecer etapas de inferencia ulteriores y posteriores con periodos de tiempo más reducidos. A diferencia de la modelación ordinaria, la modelación borrosa "aprende" al extender y perfeccionar la base de conocimiento sin necesidad de modificar la estructura fundamental o de ciclos de retroalimentación como en el caso del **entrenamiento** de una red neuronal.

4. Tal como se comentó en la sección 6.2.3.2., la modelación borrosa hace muy pocas preguntas acerca de la naturaleza de los eventos que pretende reproducir. Particularmente, recuérdese que el modelo establecido intenta predecir avenidas máximas independientemente del periodo de precipitación en que se suceden<sup>6</sup>, haciendo a este tipo de modelación mucho más general. La capacidad que tiene la matemática borrosa para manejar problemas conceptualmente más complejos, radica en pensar que toda variable relacionada a los eventos en estudio, tiene algún grado de participación. En la matemática ordinaria, la participación o influencia de las variables existe o no existe.
5. La modelación e inferencia borrosa es versátil. En la sección 5.3.4. se comentó acerca de los dos sentidos de razonamiento que permiten establecer el alma del modelo borroso<sup>7</sup>. En aquel capítulo se usó la idea de que existía cierto conocimiento de la relación que guardan las variables involucradas en el fenómeno de estudio. En este capítulo la base de conocimiento se estableció vía inferencia; lo anterior resulta evidente al observar los espacios vacíos de la tabla 6.19. A modo de comparar, digamos por ejemplo, que la modelación en las redes neuronales se plantea, exclusivamente, bajo la técnica de caja negra.
6. En el mismo sentido de versatilidad, de acuerdo a la forma en la que se ha ajustado el modelo de inferencia borrosa, éste puede atenuar la desviación absoluta con respecto a los valores observados, o lo que es más, podría condicionarse su respuesta en dos sentidos: optimista o pesimista; en donde estos conceptos se encuentran ligados al tipo de fenómeno que se estudia y al propósito de la inferencia.
7. Bajo las ideas vertidas en la sección 6.2.1 puede verificarse en la tabla 6.7 que para el caso de las variables temporales, éstas pueden inferirse aceptablemente para avenidas con tiempos pico mayores a dos días.

<sup>5</sup> Usando un periodo de observación ( $\Delta t$ ) que no excede de 0.5 días y 1.0 días para avenidas con tiempo pico de un día y más de un día respectivamente.

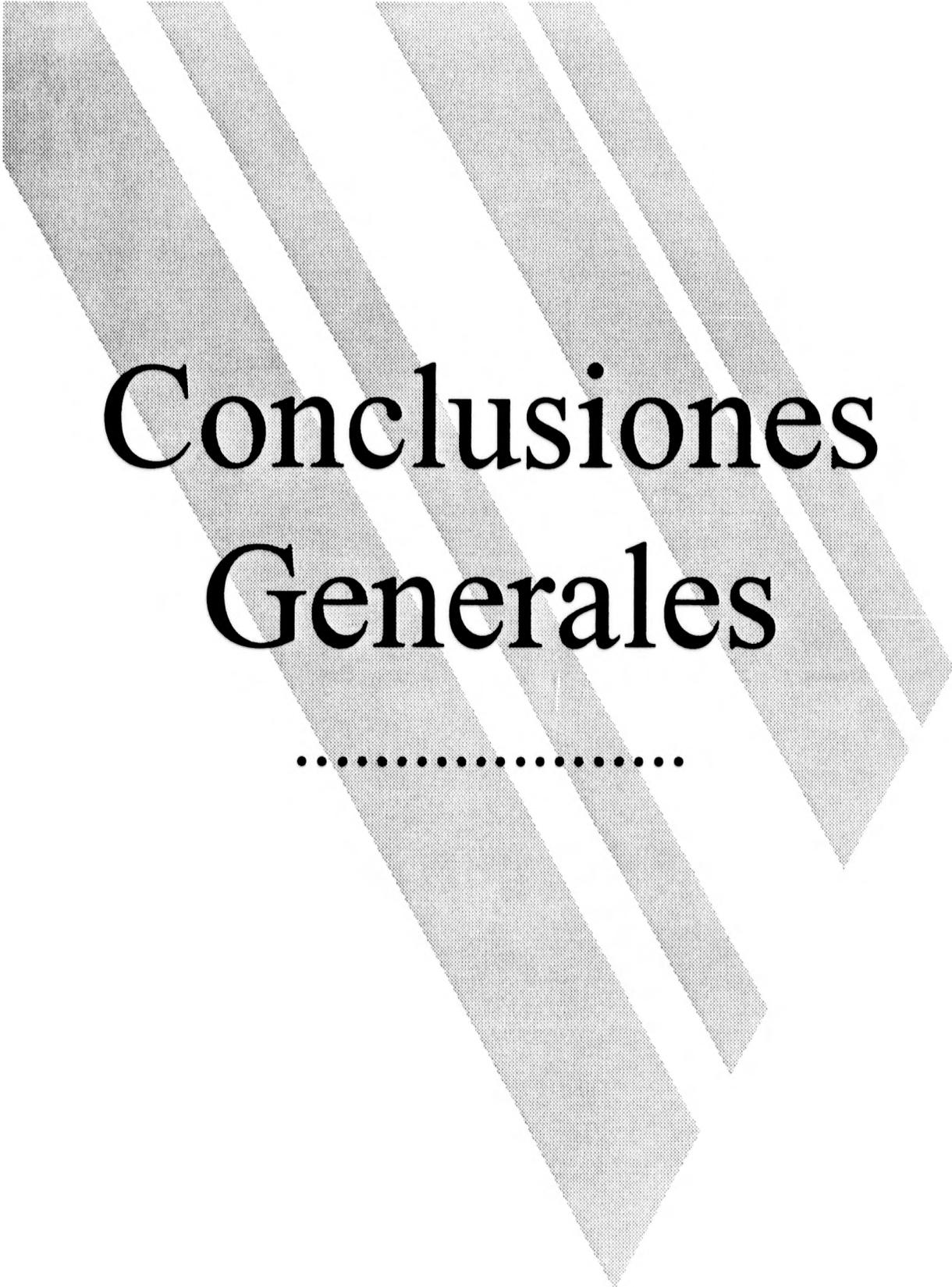
<sup>6</sup> Vea la tabla 6.1.

<sup>7</sup> Representada por la base de conocimientos borrosos.

---

La anticipación de dicho tiempo es en estos casos de al menos 1 día y hasta de 6 días para tiempos pico iguales dos y a ocho respectivamente.

8. Como se ha mencionado los resultados obtenidos, en la estimación de "Qdp", hacen pensar que series consecutivas de inferencias bajo la misma estructura de conocimiento y para deltas de tiempo más pequeños permitirían llevar la efectividad del modelo fácilmente a niveles mayores del noventa por cien de los casos tratados. Observe que la implementación del sistema no requeriría **ninguna** modificación a la estructura actual de monitoreo, pues unas pocas centrales serían capaces de llevar el control de las inferencias en puntos críticos de forma casi automatizada, usando para ello información obtenida vía telefónica y de manera en extremo económica si se compara con la implementación de un sistema GIS.
9. Puede observarse que el modelo propuesto queda sustentado en dos hipótesis fundamentales que aunque simples en su enunciado, tienen serias implicaciones. Debe tenerse presente que el modelo presupone que la avenida en estudio corresponde a una del tipo máximo. En otro caso, y adicionalmente a lo comentado en el punto 8, la presente modelación deberá complementarse con un criterio que establezca si la tormenta iniciada se traducirá en un avenida máxima, o en su defecto, prevenga sobre las limitaciones del presente modelo. Dicho criterio podría formularse en términos borrosos.



# Conclusiones Generales

.....

---

## **Conclusiones Generales**

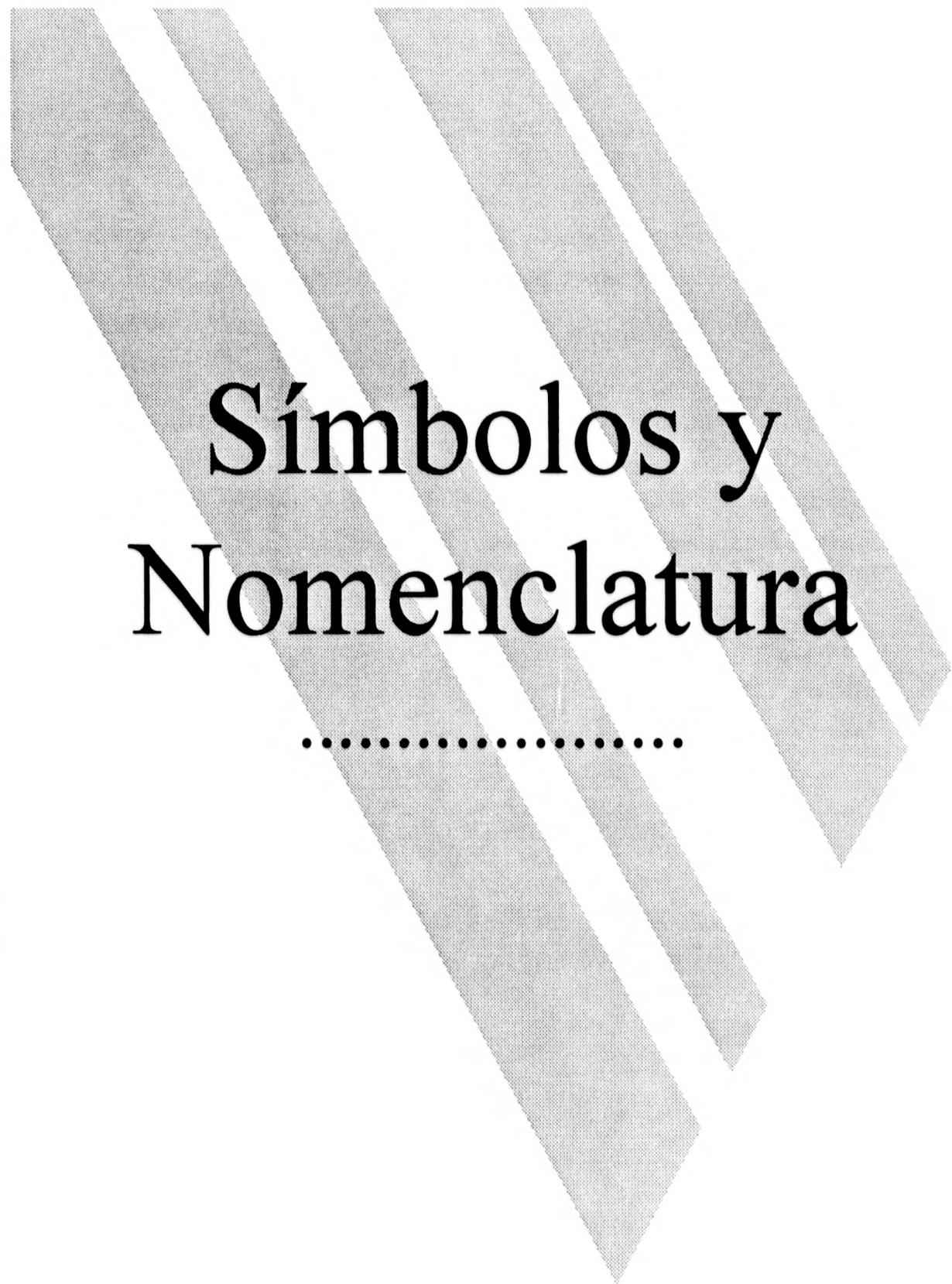
Como ya dijimos, en general, las aplicaciones de la Teoría de subconjuntos borrosos a la Hidráulica son prácticamente nulas; de ahí que las posibilidades de desarrollo en estos ámbitos sean en extremo amplias, pero sobre todo en aquellas áreas relativas a:

- Determinaciones posibilísticas de eventos que ordinariamente (y erróneamente) se estudian bajo ideas estrictamente probabilísticas, inclusive cuando el tipo de ambigüedad relacionada al fenómeno no permita su cuantificación en estos términos. Pensemos por ejemplo en la cantidad de propiedades intrínsecas a fenómenos hidráulicos dadas en términos de adjetivos en donde ordinariamente, y por conveniencia, se cuantifican y acotan a sabiendas de que sus fronteras no se encuentran del todo definidas. Recordemos la idea de "confiabilidad" asociada a los sistemas de control, desarrollada en el capítulo cuatro de este trabajo, en donde con base en argumentaciones meramente verbales es posible acotarla en un ambiente borroso.
- La emulación y modelación borrosa de eventos en donde, ya bien se conoce la forma en que las variables interactúan entre sí para obtener cierta respuesta, o tan sólo conocemos las causas y efectos relacionados a dicho evento. En el capítulo cinco un modelo borroso reproduce satisfactoriamente (aunque éste se consiguió con escasa información) la ecuación de Kirpich para la determinación del tiempo de concentración. En su momento se destacaron las ventajas que dicha modelación trae consigo; resulta conveniente resaltar la posibilidad de extender los dominios de discusión de dichos modelos, con relativa facilidad, incluso cuando dichas extensiones correspondan a regiones cuyos comportamientos difieran de la ley original que forma la base del modelo, así los modelos borrosos son conceptualmente más completos que los equivalentes a la modelación ordinaria y pueden significar un complemento de la etapa experimental.
- El establecimiento de normas y políticas de operación para la explotación y aprovechamiento de recursos hidráulicos con base en el conocimiento anticipado de eventos con connotaciones posibilísticas. Vimos en el capítulo seis cómo los modelos borrosos pueden constituir células independientes que, interconectadas y trabajando en conjunto, permiten dilucidar la naturaleza de cierto fenómeno bajo la idea de que dicha naturaleza se encuentra determinada por la memoria histórica

registrada, aunque ésta sea escasa. Resulta entonces que la inferencia borrosa de eventos representa una de los potenciales más llamativos de teoría de subconjuntos borrosos.

- Aun cuando no se mencionó del todo, a lo largo de este trabajo es posible percatarse de que, debido principalmente al hecho de que la matemática borrosa (al igual que la ordinaria) trabaja con unas cuantas reglas básicas, es posible implantar, sin muchos problemas, modelos borrosos haciendo uso de herramientas computacionales adecuadas, de manera que la operación de dichos modelos no requiera de una capacitación o capacidad extraordinarias ni de inversiones imposibles.

Debido primordialmente al optimismo que nos dejan los resultados conseguidos en este trabajo, resulta una buena oportunidad invitar al lector a indagar sobre otras áreas igualmente importantes de la teoría de subconjuntos borrosos, cuya aplicación a la Hidráulica y líneas de conocimiento a fin sería, casi con seguridad, beneficiosa para todos.



# Símbolos y Nomenclatura

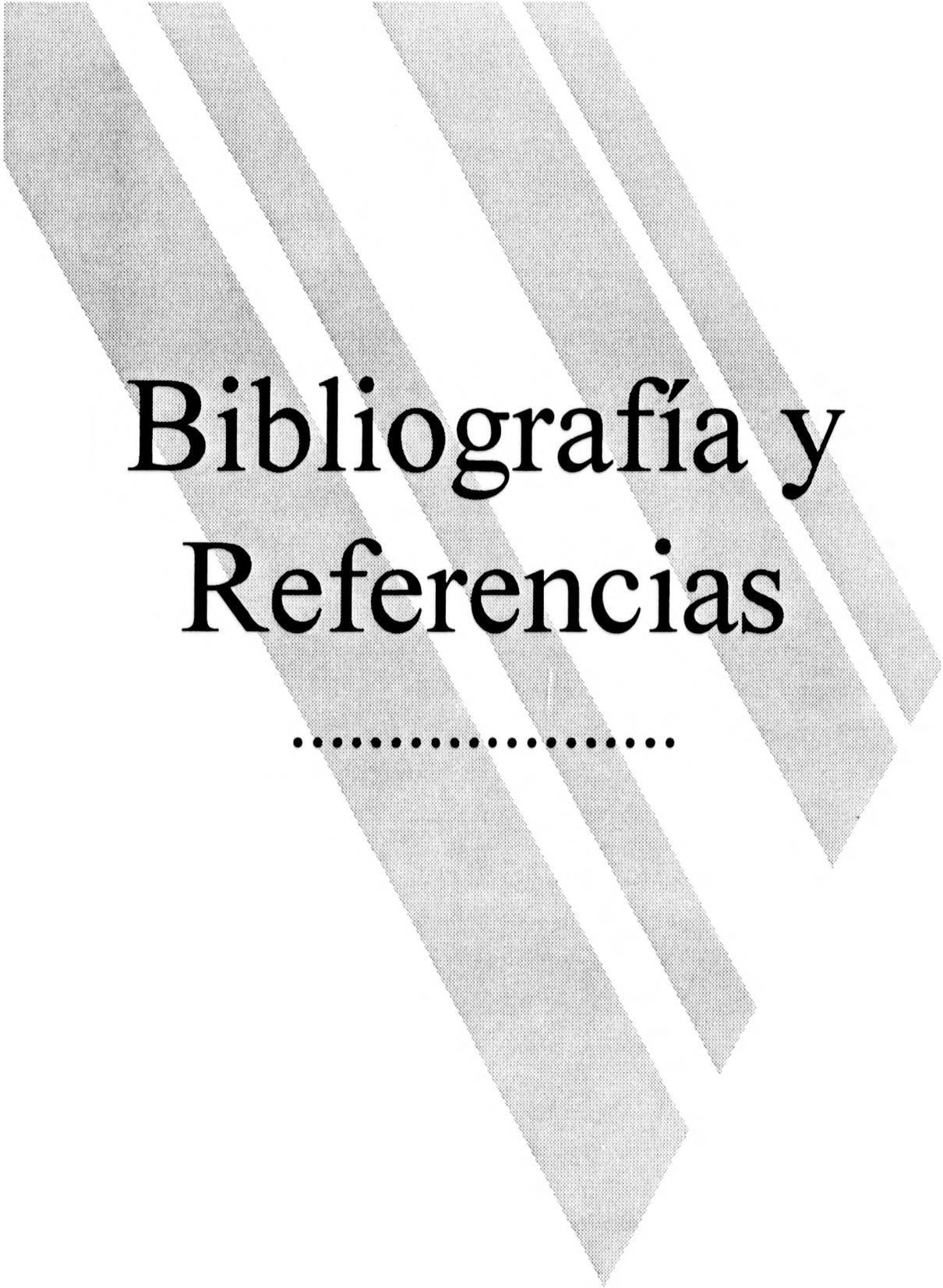
.....

---

## Símbolos y Nomenclatura

Nota: Existe una importante simplificación de nomenclatura al inicio de la sección 2.3.1.

$\alpha$	alfa de corte
$\bar{A}$	complemento de A
$\wp(E)$	conjunto de los posibles subconjuntos de E
$\emptyset$	conjunto nulo o vacío
$\subset$	contenido
$\neq$	diferente o no equivalente
exp	exponencial
$\Delta$	familia
$\mu_A(x)$	función característica del subconjunto ordinario A
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	función de membresía del subconjunto borroso A
=	igualdad o equivalencia
$\Rightarrow$	implicación
MAX	máximo
$\vee$	máximo (símbolo de disyunción lógica)
$\geq$	mayor o igual
$\leq$	menor o igual
MIN	mínimo
$\wedge$	mínimo (símbolo de conjunción lógica)
$\notin$	no pertenece
$\times$	operación conjunto producto
$\cap$	operación intersección
$\cdot$	operación producto boleano
$+$	operación suma boleana
$\cup$	operación unión
$\forall$	para todo
$\in$	pertenece
pr(x)	probabilidad de x
$\mathfrak{R}$	relación borrosa o conjunto de los números reales
$\tilde{A}$	subconjunto borroso A
A	subconjunto ordinario A
$A_\alpha$	subconjunto ordinario de nivel alfa



# Bibliografía y Referencias

.....

## **Artículos**

Bárdossy, A. (1990). Note on fuzzy regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 65-75.

Cai, K., Wen, Ch. (1990). Streeting-lighting lamps replacement: a fuzzy viewpoint. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 161-172.

Cai, K., Wen, Ch y Zhang, M. (1991). Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context. *Fuzzy Sets and Systems*, 42, 145-172.

Cai, K., Wen, Ch y Zhang, M. (1991). Posbist reliability behavior of typical systems with two types of failure. *Fuzzy Sets and Systems*, 43, 17-32.

Chang, T.C. (1990). An algorithm for solving expected possibility and its application in construction resource allocation. *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 157-171.

Cheng, Ch., Mon, D. (1993). Fuzzy system reliability analysis by confidence interval. *Fuzzy Sets and Systems*, 56, 29-35.

Cheng, Ch., Mon, D. (1993). Fuzzy system reliability analysis by interval of confidence. *Fuzzy Sets and Systems*, 56, 29-35.

Chiu, Ch., Park, Ch. (1994). Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion. *The Engineering Economist*, 39, 113-138.

Delgado, M., Verdegay, J., Vila, M. (1990). Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 33-42.

Fujita, M., Zhu, M. y Nakao, T. (1992). An application of fuzzy set theory to runoff prediction. *Sixth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics*, Taipei, 727-734.

Gil, P., Menendez, M.L., Pardo, L. (1990). Connections Between some criteria to compare fuzzy information systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 183-192.

Inuiguchi, M., Ichihasaki, H. y Kume, Y. (1990). A solution algorithm for fuzzy linear programming with piecewise linear membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 15-31.

- Kanagawa, A., Ohta, H. (1990). A design for single sampling attribute plan based on fuzzy sets theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 173-181.
- Li, B. (1990). Fuzzy bags and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 61-71.
- Niculescu, S. (1992). A comparison between two fuzzy estimators for the mean. *Fuzzy Sets and Systems*, 48, 341-350.
- Orlovski, S.A. (1990). Decomposition of properties and definition of fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 53-63.
- Pedrycz, W. (1990). Fuzzy set framework for development of a perception perspective. *Fuzzy Sets and Systems*, 37, 123-137.
- Shafai, B., Sotirov, G. (1990). Uniqueness of solution in FLP under parameter perturbations. *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 179-186.
- Singer, D. (1990). A fuzzy set approach to fault tree and reliability analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 34, 145-155.
- Toledo, V. (1996). Emulación de dos modelos hidrológicos clásicos con redes neuronales. *Por publicarse*.
- Toledo, V. (1996). Predicción de escurrimientos usando redes neuronales. *Por publicarse*.
- Toledo, V. (1996). Redes neuronales en modelado hidrológico: predicción de avenidas en la presa Huites. *Tesis de maestría, DEPFI, UNAM*.
- Zadeh, L. H. (1983). The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 11, 199-227.

## **Libros**

- Ang, A., Tang, W. (1984). *Probability Concepts in engineering planning and design, vol. II: Decision, risk and reliability*. John Wiley & Sons, New York.
- Aparicio, F. (1994). *Fundamentos de hidrología de superficie*. LUMUSA, México.
- Dubois, D., Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and*

*applications*. Academic Press. New York.

Etter, D.M. (1993). *Engineering problem solving with MATLAB*. Prentice Hall. New Jersey.

Kacprzyk, J., Orlovski, S.A. (1987). *Optimization models using fuzzy sets and possibility theory*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Kaufmann, A. (1982). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos para el uso de ingenieros, vol. I, Elementos teóricos de base*. CECSA. México.

Mc Neill, D., Freiberger, P. (1993). *Fuzzy logic*. Simon & Schuster. New York.

Slowinski, R., Teghem, J. (editores)(1990). *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Terano, T., Asai, K., Sugeno, M. (1987). *Fuzzy systems theory and its applications*. Academic Press. Boston.

Yager, R., Zadeh, L. (editores)(1992). *An introduction to fuzzy logic applications in intelligent systems*. Kluwer Academic Publishers. Boston.

### **Direcciones electrónicas**

Datapro Gopher Server: *gopher://datapro.mgh.com/*

Quadralay inc., Autin Texas, Foro de discusión de conjuntos borrosos: *webmistress@quadralay.com*

Fuzzy Logic inc., La Jolla: *fuzzyli@crash.cts.com*