

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**DESARROLLO DE UN METODO PARA ESTIMAR EL  
VOLUMEN ORIGINAL DE YACIMIENTOS DE ACEITE  
VOLATIL Y LOS PARAMETROS DEL ACUIFERO ASOCIADO**

**Por :**

**José Luis Pérez Hernández**

**Asesor**

**Dr. Fernando Samaniego Verduzco**

**Un trabajo propuesto y realizado de acuerdo a los requerimientos de la disciplina de Ingeniería Petrolera  
Ciudad Universitaria, D.F.  
México, Diciembre de 1996**



DEPFI

T. UNAM  
1996  
PER

## **DEDICATORIA**

**Dedico este trabajo a**

**Mi esposa : María del Socorro**

**Mi Hijo : Luis Arturo**

**Por ser la razón de mi vida.**

**A mis padres : Natalia y Ramón**

**Por la herencia que me han dejado**

**A mis hermanos : Sonia**

**Leticia**

**Ramón**

**Manuel**

**Angel**

**Fernando**

**Héctor**

**Por el apoyo que siempre me han brindado**

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a las personas de la empresa Petróleos Mexicanos que depositaron su confía en mí y que siempre creyeron que podría superar esta meta.

Agradezco a los profesores que imparten la maestría en Ingeniería Petrolera en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería por cederme sus conocimientos adquiridos durante muchos años de entrega y dedicación.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Rodolfo Camacho Velázquez, Dr. Fernando Rodríguez de la Garza y al Ing. Agustín Galindo Nava por todo lo me han dado, ya que sin ellos no hubiera sido posible alcanzar esta meta.

Agradezco también al M.I. Alfredo Leon Garcia y al Ing. Modesto Mercado Martínez por el gran apoyo que me brindaron y a mis compañeros de generación 93 - 95 por los momentos que pasamos los cuales siempre recordare.

Agradezco a todas las personas que de una u otra forma contribuyeron en la realización de este trabajo.

# CONTENIDO

Resumen

- I. Introducción
- II. Descripción de los yacimientos de aceite volátil.
- III. Descripción de los diferentes métodos para calcular el volumen original de hidrocarburos
- IV. Desarrollo de un método para estimar el volumen original de yacimientos de aceite volátil y los parámetros del acuífero asociado
- V. Validación y aplicación del método a un caso real.
- VI. Conclusiones.

Nomenclatura.

Referencias.

Apéndice A Optimización de la ecuación general de balance de materia

Apéndice B Programa de cómputo.

## Resumen

En este trabajo, se definen las características de los yacimientos de aceite volátil y su comportamiento de fases clásico en un diagrama presión-temperatura; posteriormente se presenta una descripción resumida de los diferentes métodos existentes en la literatura para el cálculo del volumen original de hidrocarburos y los parámetros del acuífero, estableciendo las suposiciones implícitas. Posteriormente con la información obtenida de un análisis experimental PVT composicional y la utilización de paquetes de cómputo comerciales, se valida el proceso de agotamiento a volumen constante, se caracteriza el fluido en cuestión utilizando una ecuación de estado (EDE), se clasifica adecuadamente y se obtienen factores de volumen y las relaciones gas-aceite.

Se presenta un método práctico para la cuantificación del volumen original del aceite (N) y los parámetros del acuífero ( $r_D, K_{rel}, C_{VEH}$ ) en yacimientos de aceite volátil, con entrada natural de agua, mediante un análisis de regresión aplicado en un proceso de optimización sobre la ecuación general de balance de materia (EGBM), con base en la extracción neta de fluidos del yacimiento (aceite + gas + agua) y la utilización del método de van Everdingen y Hurst para modelar un acuífero finito con flujo radial a presión constante en la frontera interna. Se elaboró un programa de cómputo que resuelve este proceso de optimización aplicando el método iterativo de Newton-Raphson, el cual permite la estimación de los parámetros anteriormente listados que intervienen en la ecuación de balance de materia. Finalmente con información obtenida de un ejemplo existente en la literatura, se validó el proceso de optimización. Adicionalmente se verificó la aplicación de este método empleando el programa elaborado para analizar el comportamiento del campo Paredón.

## 1.- Introducción

El objetivo de la ingeniería de yacimientos es obtener la recuperación máxima económicamente posible de hidrocarburos de un yacimiento petrolero. Para lograr este objetivo, el ingeniero de yacimientos emplea principios científicos para desarrollar modelos y métodos, que permitan predecir el comportamiento del yacimiento bajo diferentes alternativas de producción y recuperación de hidrocarburos.

Actualmente en la zona sureste de México se han encontrado yacimientos profundos con presiones y temperaturas muy altas, siendo estos del tipo de gas y condensado, aceite ligero y aceite volátil, los cuales presentan características y comportamientos diferentes a los de aceite negro.

Para el desarrollo integral de un campo, es muy importante conocer las reservas de hidrocarburos (volumen original) que se tienen en el yacimiento. Existen diversos métodos y técnicas que permiten cuantificar el volumen original y la predicción del comportamiento de este tipo de yacimientos, sin embargo, estos no son totalmente satisfactorios, debido básicamente a la simplificación de ciertos aspectos físicos.

Este trabajo tiene como objetivo presentar un método para cuantificar el volumen original y los parámetros del acuífero asociado en yacimientos de aceite volátil. Este método consiste en resolver la ecuación general de balance de material (EGBM), la cual considera la posibilidad de la variación de la composición de los fluidos contenidos en el yacimiento, a través de un proceso de optimización con base en la extracción del yacimiento (aceite+gas+agua), el cual permite estimar parámetros del sistema yacimiento-acuífero, tales como el volumen original de aceite  $N$ , la relación de la dimensión radial del acuífero relativa a la del yacimiento,  $r_{ra} = r_a / r_o$ , la constante de conversión del tiempo adimensional,  $k_{tr} = \beta_i k_a / \phi_a \mu_a c_{i_a} r_o^2$  y la constante de entrada de agua de van Everdingen y Hurst,

$$C_{VEH} = 2\pi r_o^2 h_a \phi_a c_{i_a}$$

## II. Descripción de los yacimientos de aceite volátil .

### (Aceite y gas disuelto de alto encogimiento).

Conforme los yacimientos encontrados son más profundos, se encontrarán presiones y temperaturas más altas, pudiendo contener fluidos cuya composición y comportamiento termodinámico caen en la parte intermedia entre el aceite negro y el gas seco. Los yacimientos que producen este tipo de fluidos son conocidos generalmente como de aceite volátil o de gas y condensado.

En este capítulo se analizarán los yacimientos de aceite volátil, describiendo primeramente su comportamiento de fases (diagrama de fases temperatura - presión).

La Fig.1 muestra el diagrama de fase típico de los yacimientos conocidos como de aceite y gas disuelto de alto encogimiento, o volátil<sup>1</sup>. En ella se observa que la temperatura del yacimiento, es menor, pero cercana, a la temperatura crítica de la mezcla de hidrocarburos que contiene, que su punto crítico está cerca del punto correspondiente a la presión cricondenbárica (máxima presión a la cual coexisten dos fases), y que las líneas de calidad están relativamente separadas de la línea de puntos de rocío.

La denominación de aceites volátiles se deriva de la característica particular de que la temperatura del yacimiento es cercana a la temperatura crítica de la mezcla de hidrocarburos que contiene, lo que hace que el equilibrio de fases sea poco estable y que cambios de pequeña magnitud en la presión o en la temperatura, produzcan modificaciones importantes en los volúmenes de líquido y gas coexistentes. Es, obvio, que para este tipo de yacimientos la proporción de gases y líquidos en la producción se verá fuertemente afectada por las condiciones de presión y temperatura de separación en la superficie, así como por el número de etapas que se empleen, condiciones que se situarán siempre, en la región de dos fases del diagrama presentado en la Fig. 1



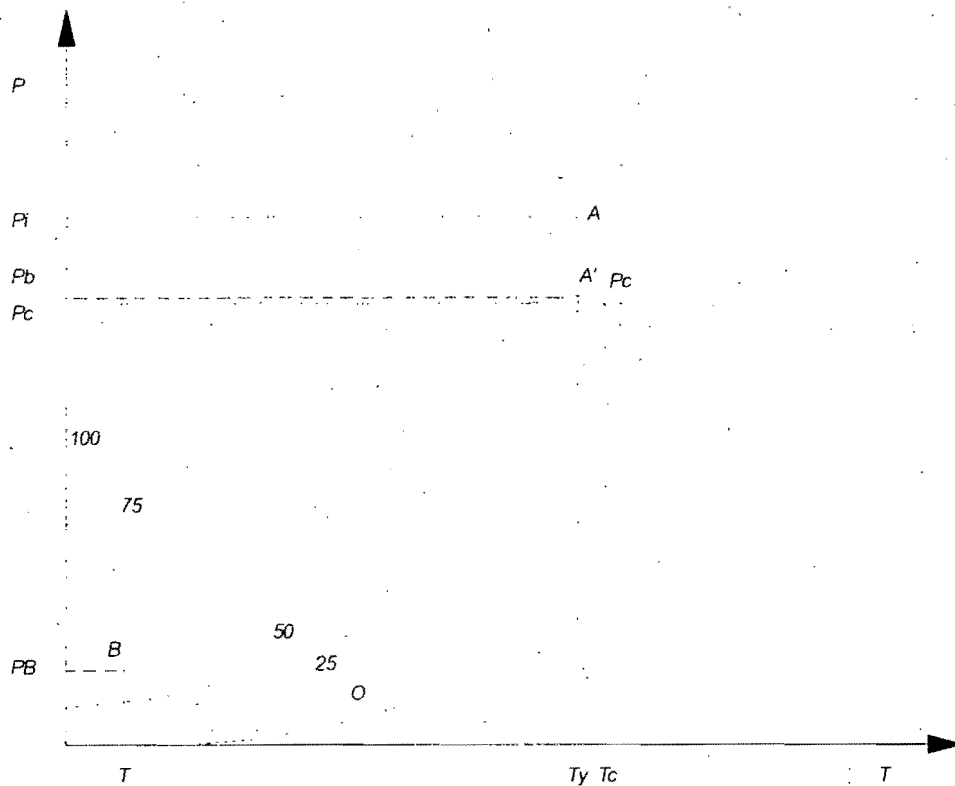


Fig. 1.- Yacimiento de aceite y gas disuelto de alto encogimiento.  
(Aceite Volatil)

Por lo general este tipo de yacimientos presenta relaciones gas-aceite del orden de 200 a 1000  $m^3 / m^3$ , y los líquidos en el tanque de almacenamiento presentan una coloración ligeramente obscura, con una densidad entre 0.85 y 0.75  $gr / cm^3$ ; el contenido de licuables en el gas depende de las condiciones y etapas de separación, pudiendo ser tan alto como  $70 B_{ce} / 10^6 p_{ce}^3$ . Estos yacimientos pueden ser bajosaturados o saturados, dependiendo de si la presión en el yacimiento es mayor, igual o menor que la presión de burbuja de sus fluidos.

Los fluidos contenidos en estos yacimientos deben ser analizados mediante experimentos de laboratorio (análisis PVT), que permitan simular apropiadamente su comportamiento termodinámico tanto a las condiciones de yacimiento como a las de superficie. Estos procedimientos de laboratorio involucrados en los análisis PVT son fundamentalmente cuatro :

- Agotamiento a composición constante (ACC).
- Agotamiento diferencial (AD).
- Agotamiento a volumen constante (AVC).
- Estudio de separadores en etapas (ESE).

El primer proceso simula el comportamiento de los fluidos iniciando a condiciones de presión mayor o igual a la presión de saturación, mientras que los dos siguientes a una presión igual a la presión de saturación y el último a condiciones superficiales. En cada uno de estos procesos se obtiene información que es de gran trascendencia en todos los estudios posteriores que se realicen tendientes a la mejor explotación de los yacimientos. La forma en que se lleven a cabo los procesos experimentales implicados en un análisis PVT y la información obtenida de éstos se encuentra referida en la literatura<sup>2</sup>.

### III. Descripción de los diferentes métodos para calcular el volumen original de hidrocarburos y tipo de acuífero asociado .

La ecuación de balance de materia ha sido rutinariamente utilizada durante muchos años en la Ingeniería Petrolera para estimar las reservas de hidrocarburos, la entrada natural de agua y predecir el comportamiento de los yacimientos de aceite y gas.

La ecuación de balance de materia es un modelo de dimensión cero basado en el principio de conservación de masa , el cual consiste esencialmente en un balance volumétrico a condiciones de yacimiento entre los fluidos contenidos inicialmente y los fluidos contenidos a un tiempo posterior, considerando que las producciones acumuladas de fluidos son el resultado de los efectos combinados de la expansión de los fluidos, la compactación del volumen poroso y la entrada de agua. La ecuación convencional de balance de materia (ECBM) fue presentada inicialmente por Schilthuis<sup>3</sup>.

A partir de esta ecuación convencional de balance de materia se desarrollaron diferentes métodos gráficos y de regresión que permiten evaluar de diferentes maneras el volumen original de aceite y gas , los parámetros del acuífero asociado, y predecir el comportamiento del yacimiento. Dentro de los métodos gráficos están los utilizados para yacimientos volumétricos con casquete de gas asociado<sup>4</sup>, yacimientos de aceite y gas con acuífero asociado<sup>5</sup>, y métodos de ajuste de presiones del yacimiento<sup>6,7</sup>. Así mismo, se han considerado varios modelos para cuantificar la entrada de agua como son, acuífero pequeño<sup>4</sup>, régimen permanente<sup>3</sup>, modelo simplificado de Hurst<sup>8</sup>, modelo de van Everdingen y Hurst<sup>9</sup> para acuífero lineal infinito, radial infinito y radial finito. Por otro lado se cuenta con los métodos de análisis de regresión con base en procesos de optimización de la ecuación convencional de balance de materia y un modelo de acuífero<sup>10,11,12</sup>, que definen en forma conjunta el volumen original de hidrocarburos y/o los parámetros del acuífero. Por último , se tienen programas de cómputo<sup>13</sup> que involucran los métodos de gráficos , y los iterativos (regresión) que permiten una mayor versatilidad en su aplicación .

Dentro de las consideraciones que se hacen en la ecuación convencional de balance de materia , una de ellas establece que el componente aceite que se recupera en la superficie a condiciones estándar  $N_p$  , existe solo en la fase de aceite en el yacimiento; sin embargo, esta consideración no es válida para los yacimientos de aceite volátil y gas y condensado, ya que en éstos el componente aceite existe en las dos fases y por lo tanto esta ecuación no es aplicable a ellos.

Unos de los primeros en observar esta limitación fueron Cook y cols.<sup>14</sup> , quienes desarrollaron un método de balance de materia composicional para predecir el comportamiento futuro y las recuperaciones de aceite en la superficie , con base en el análisis de laboratorio realizado a muestras de fluidos con la finalidad de cuantificar el volumen adicional de condensado proveniente de la fase de gas , que sería posible recuperar a diferentes etapas de presión . Los autores concluyeron que la composición de la fase de gas depende del rango de presión en donde ocurre la condensación retrograda ; por lo tanto ellos consideraron que el procedimiento que representa adecuadamente el comportamiento del fluido del yacimiento es una combinación de los procesos de agotamiento diferencial y expansión a composición constante (flash). El método se aplicó a un yacimiento de aceite volátil que se encontraba en una etapa muy avanzada de su vida productiva, pudiéndose constatar la importancia que tienen las características del fluido sobre la recuperación final , estimándose que aproximadamente el 35 % de condensado recuperado pertenecía a la fase de gas<sup>15</sup>.

Reudelhuber y cols.<sup>16</sup> analizaron tres procesos experimentales de laboratorio que se efectuaban regularmente a las muestras de aceite volátil , encontrando que tales procesos no simulaban correctamente el comportamiento del fluido, puesto que no consideraban los cambios de composición que experimenta la mezcla de hidrocarburos al fluir del yacimiento hacia la superficie . Con base en la conclusión anterior , estos autores desarrollaron un método de balance composicional basado en un proceso experimental de agotamiento a volumen constante , similar al utilizado en la predicción del comportamiento de yacimientos de gas y condensado . Casi al mismo tiempo Jacoby y Berry<sup>17</sup> observaron las mismas limitaciones que los autores anteriores , proponiendo un método que requería datos de permeabilidades relativas y datos de los componentes del fluido (mezcla), obtenidos a través de procesos flash , de tal forma de poder estimar las producciones acumuladas y las relaciones de aceite y gas en función de la presión del yacimiento , pudiendo constatar que los

valores obtenidos de éstas eran bastante diferentes de los obtenidos por métodos de balance de materia convencionales , calculando un valor dos veces y media mayor en las producciones acumuladas y un cuarto menor en el valor máximo de las relaciones gas - aceite.

Posteriormente Brinkley<sup>18</sup> realizó una combinación del método de balance de materia composicional y del método de balance volumétrico , derivando una ecuación volumétrica la cual reproducía los resultados obtenidos mediante el método de balance composicional de Reudelhuber y cols<sup>16</sup>.

Dentro de los trabajos más recientes se tiene el que presentó Vo y cols.<sup>19</sup> , quienes propusieron un método que generaliza la ecuación de balance de materia , basándose en una gráfica de presión media del yacimiento dividida entre el factor de compresibilidad de dos fases ,  $(\tilde{z}(\bar{p}))$  , contra la producción acumulada de aceite, estimándose con esta gráfica el volumen original de aceite. El cálculo del factor de compresibilidad de dos fases se lleva a cabo a través de los resultados de un proceso experimental de expansión a composición constante .

Posteriormente Walsh<sup>20,21</sup> , basado en formulaciones desarrolladas para simuladores composicionales numéricos<sup>22,23,24</sup> , desarrolló una ecuación general de balance de materia (EGBM) , aplicable a cualquier tipo de fluido , incluyendo aceite volátil y gas y condensado. La derivación de esta ecuación general , se basa en un balance de materia con respecto a los componentes de aceite y gas recuperados en la superficie, en donde la combinación de ambos permitió obtener la EGBM y así determinar los volúmenes iniciales de las fases de aceite y gas presentes en el yacimiento. Los autores consideran que el planteamiento importante, necesario para estudiar la ecuación general de balance de materia , es :

- Seleccionar el fluido contenido en el yacimiento.

- Utilizar una ecuación de estado que describa las propiedades de fluido , reproduciendo los procesos experimentales de laboratorio.

- Una vez satisfechos los dos puntos anteriores , aplicar la EGBM y determinar el volumen original de hidrocarburos. La ecuación resultante es la siguiente:

$$N_p \left[ \frac{B_o(1 - R_v R_p) + B_g(R_p - R_s)}{(1 - R_v R_p)} \right] = N_{fci} \left[ \frac{B_o - B_{oi} + B_g(R_{si} - R_s) - R_v(B_{oi} R_s - B_o R_{si})}{(1 - R_v R_s)} \right] +$$

$$G_{fgr} \left[ \frac{B_g - B_{gr} + B_o(R_{vi} - R_v) - R_s(B_{gi} R_v - B_o R_{vi})}{(1 - R_v R_s)} \right] + \Delta W + (N_{fci} B_{oi} + G_{fgr} B_{gr}) c_t \Delta \bar{p} \dots\dots\dots 1$$

Finalmente Walsh , Ansah y Raghavan<sup>25,26</sup> basándose en el trabajo anterior presentaron la ecuación general de balance de materia en forma de línea recta , graficando las producciones acumuladas de fluidos contra la expansión de los mismos para el caso de yacimientos volumétricos y no volumétricos , calculando por medio de este procedimiento el volumen original de hidrocarburos y los parámetros que involucran la entrada de agua.

#### **IV. Desarrollo de un método para estimar el volumen original de aceite y los parámetros del acuífero asociado.**

En este capítulo se presentan los aspectos relevantes relacionados con el cálculo del volumen original de aceite y los parámetros del acuífero asociado en yacimientos de aceite volátil con empuje hidráulico. Se conoce que este tipo de yacimientos presentan problemas de cambios de composición que ocurren en la formación productora, por lo tanto es necesario comprender claramente el comportamiento de los fluidos contenidos.

Los datos básicos, con base en los cuales se analiza el comportamiento de los fluidos, se obtienen en forma experimental a través de análisis PVT (presión-volumen-temperatura); debido a la complejidad que presentan estas mezclas de hidrocarburos, es necesaria la comprobación de dichos datos, de tal forma que se evite la pérdida de muchas horas de trabajo tratando de ajustarlos por medio de una ecuación de estado, o sea intentando caracterizar información inconsistente proveniente del análisis PVT. Por consiguiente, en este trabajo se incluyen estas dos etapas<sup>27,28</sup>.

##### **- Validación del análisis PVT**

El experimento de laboratorio estándar para análisis PVT composicional de yacimientos de aceite volátil y de gas y condensado, es el proceso de agotamiento a volumen constante<sup>29,30</sup> (AVC), cuya validación es un tema que se discutió inicialmente a principios de los años 80<sup>31</sup>. Existen varios métodos<sup>31,32,33,34</sup> para comprobar la validez de los datos experimentales obtenidos en este proceso (AVC), siendo el más importante, debido a que presenta sensibilidad máxima, el que consiste en graficar el logaritmo de las constantes de equilibrio ( $K_i$ ) contra las presiones de agotamiento. Si los datos experimentales son correctos, las curvas graficadas para cada uno de los componentes de la mezcla deben presentar una tendencia suave y paralelas entre sí; por el contrario si estas curvas presentan saltos, inflexiones y/o se cruzan, significa que se tienen errores en el proceso experimental realizado en el laboratorio. En nuestro caso se utilizó el programa de cómputo VALCO<sup>33</sup> (Validación Composicional), que es un método semiautomático, que consiste de los dos pasos principales siguientes:

a) Se hace una corrección automática de las inconsistencias principales, por medio de gráficas del logaritmo de las constantes de equilibrio ( $K_i$ ) calculadas por el programa contra las temperaturas de ebullición ( $T_e$ ), de cada componente de la mezcla, para las diferentes etapas de agotamiento. Estas gráficas deben presentar un comportamiento lineal indicando que no hay inconsistencia en los datos experimentales; si ocurre lo contrario se ajusta una línea recta a los valores  $K_i$  originales por medio del método de mínimos cuadrados, corrigiendo así las inconsistencias presentes.

b) Una vez realizada la primera etapa de ajuste, se verifica que la suma de los valores de la composiciones de la fase de gas sea igual a cien, para cada una de las etapas de agotamiento de presión, corrigiendo así las inconsistencias secundarias que pudieran provocarse durante el primer paso de este proceso.

#### **- Caracterización del fluido.**

Actualmente existen paquetes de cómputo basados en ecuaciones de estado que permiten caracterizar el fluido adecuadamente, habiéndose utilizado en este trabajo el paquete PVT del simulador COMP-IV<sup>35</sup>, el cual utiliza la ecuación de Peng Robinson<sup>36</sup>, por ser la que mejores resultados proporciona. La metodología de ajuste es la siguiente:

- Caracterizar adecuadamente la fracción pesada  $C_7^-$ , expandiéndola hasta  $C_{40}^+$ , calculando las propiedades de los nuevos componentes por medio de correlaciones y reglas de mezclado más adecuadas.

- Se agrupa la fracción pesada en pseudocomponentes y/o éstos con los componentes restantes, en pseudocomponentes finales.

- Se procede a utilizar la ecuación de estado y se realiza la predicción del comportamiento de fases, determinándose la presión de saturación, la cual por lo general no se ajusta.

- El ajuste de las propiedades del fluido y de su presión de saturación se obtiene por medio de un análisis de regresión no lineal aplicado sobre las variables de ajuste.

El procedimiento anterior termina cuando se obtiene un ajuste apropiado entre las propiedades proporcionadas por la ecuación de estado y las propiedades experimentales. Una vez caracterizado el fluido, se construye la envolvente de fases para visualizar la posición del punto crítico con respecto a la presión de saturación, definiendo además las curvas de burbujeo y rocío<sup>27,28</sup>. Posteriormente se calculan los factores de volumen y las relaciones gas - aceite combinando los diferentes procesos experimentales de laboratorio.



## Optimización de la ecuación general de balance de materia

En lo que respecta a la evaluación de los parámetros del sistema yacimiento - acuífero , se presenta un método que consiste en resolver la ecuación general de balance de materia (EGBM) , a través de un proceso de optimización basado en la extracción neta de fluidos (aceite + gas + agua) , el cual permite estimar el volumen original de aceite ( $N$ ) , y los parámetros del acuífero asociado , como son la relación de dimensión radial del acuífero a la del yacimiento  $r_D = r_a / r_o$  , la constante de conversión del tiempo adimensional  $K_{t_D} = \beta_i K_o / \phi_a \mu_o c_o r_o^2$  , y la constante de entrada de agua  $C_{VEH} = 2\pi r_o^2 h_a \phi_a c_{t_a}$  , para un acuífero radial limitado a presión constante en la frontera interna. propuesta por van Everdingen y Hurst.

Entonces a partir de la Ec. 1 , la ecuación general de balance de materia que incorpora el modelo de acuífero mencionado anteriormente , es la siguiente :

$$N_p \left[ \frac{B_o(1 - R_p R_s) + B_g(R_p - R_s)}{(1 - R_p R_s)} \right] + W_p B_w = N_{in} \left[ \frac{B_o - B_w + B_g(R_s - R_p) - R_s(B_w R_s - B_o R_p)}{(1 - R_p R_s)} + B_o c_t \Delta \bar{p} \right] + C_{VEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \left[ \frac{r_D^2 - 1}{2} - 2 \sum_{l=1}^7 \frac{e^{-\alpha_l^2 K_{t_D} t} J_1^2(\alpha_l r_D)}{\alpha_l^2 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right] \quad 2$$

El lado izquierdo de la Ec.1 representa la producción acumulada de fluidos a condiciones de yacimiento ( $RW$ ) , el primer término del lado derecho es el volumen original de aceite ( $N_{oi}$ ) y la expansión roca - fluidos ( $UE$ ) , el segundo término es la entrada de agua  $W_e$  , la cual es función de  $r_D, K_{t_D}, C_{VEH}$  , entonces de acuerdo con esta simbología , la Ec. 1 puede escribirse :

$$RW = (UE) N_{oi} + f(r_D, K_{t_D}, C_{VEH}) \quad 3$$

Considerando al volumen original de aceite y los parámetros que intervienen en el modelo de entrada de agua como incógnitas , se puede obtener la lista siguiente :

$$x_1 = N_{jot} \dots\dots\dots 4$$

$$x_2 = r_D \dots\dots\dots 5$$

$$x_3 = K_{iv} \dots\dots\dots 6$$

$$x_4 = C_{iEH} \dots\dots\dots 7$$

Entonces .

$$RW = (UE) x_1 + f(x_2, x_3, x_4) \dots\dots\dots 8$$

Si se optimiza la Ec. 8 con base en las producciones acumuladas de fluidos ( $RW$ ) , entonces el conjunto óptimo de  $x_j, j = 1,2,3,4$  , se obtiene al minimizar la función E siguiente :

$$E = \sum_{i=1}^n [RW_{oi} - (UE, x_1 + f(x_2, x_3, x_4))]^2 \dots\dots\dots 9$$

ó

$$E = \sum_{i=1}^n (RW_{oi} - RW_{ci})^2 \dots\dots\dots 10$$

en donde  $RW_{oi}$  representa la datos de producción observados ,  $RW_{ci}$  los datos de producción calculados , y n el número de observaciones.

Se requiere que la sumatoria de la diferencia al cuadrado entre los datos observados y los datos calculados sea mínima ; entonces :

$$\frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j=1,2,3,4 \dots\dots\dots 11$$

$$\frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} = F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_m - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \hat{\alpha}_j} = 0 \quad , j=1,2,3,4 \quad \dots \quad 12$$

Puesto que  $f(x_2, x_3, x_4)$  implícita en la  $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , es no-lineal, se debe emplear un método para la solución de ecuaciones no lineales; en este trabajo se utilizó el método de Newton-Raphson para linealizar la función descrita por esta ecuación. Se tienen cuatro ecuaciones no lineales definidas en  $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  y cuatro incógnitas  $x_j, j = 1,2,3,4$ , por lo tanto expandiendo la función en una Serie de Taylor truncada, como se muestra en la Ec. 13:

$$\left[ \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right]^{u-1} = \left[ \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right]^u + \sum_{k=1}^4 \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_k} \left( \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right) \right]^u \delta x_k^u = 0 \quad \dots \quad 13$$

ó

$$F_j^{u-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4) + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_k} \delta x_k^u = 0 \quad , j=1,2,3,4 \quad \dots \quad 14$$

donde  $\delta x_k^u = (x_k^{u-1} - x_k^u)$ ;  $k=1,2,3,4$ .

Para encontrar la aproximación siguiente, que corresponde a  $x_k^{u-1}$ ,  $k=1,2,3,4$ , la Ec. 14 se iguala a cero, obteniéndose la expresión siguiente:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_j^u \left[ (x_1, x_2, x_3, x_4) \right]_j^u}{\partial \hat{\alpha}_k} \delta x_k^u = -F_j^u \left[ (x_1, x_2, x_3, x_4) \right]_j^u \quad , j=1,2,3,4 \quad \dots \quad 15$$

Escribiendo esta expresión anterior en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha_4} \end{bmatrix}^{u-1} \begin{bmatrix} \delta \alpha_1 \\ \delta \alpha_2 \\ \delta \alpha_3 \\ \delta \alpha_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 16$$

El desarrollo matemático de las derivadas de las funciones que intervienen en el proceso de optimización se presentan en el Apéndice A de este trabajo.

El proceso de cálculo se inicia con una estimación inicial de las incógnitas  $x_1^u, x_2^u, x_3^u, x_4^u$ , determinándose las  $\delta_1^{u-1}, \delta_2^{u-1}, \delta_3^{u-1}, \delta_4^{u-1}$  con el método iterativo descrito por la ec. 16, obteniéndose los valores reales de las incógnitas, ó sea la solución cuando se cumple la condición de convergencia siguiente :

$$\left| \frac{\delta x_k^u}{x_k^u} \right| \leq \left| 0.005 x_k^u \right|, \quad k=1,2,3,4 \quad \dots\dots\dots 17$$

Por último , con la finalidad de calcular en forma más fácil y efectiva el volumen original de aceite y los parámetros del acuífero asociado , utilizando el lenguaje de programación FORTRAN 77, se elaboró un programa de cómputo que incluye el proceso de optimización descrito anteriormente . Este programa se lista en el Apéndice B.

## V. Validación y aplicación del método a un caso real.

### - Validación

Con el propósito de validar el método de optimización descrito en el capítulo IV, se tomó un ejemplo existente en la literatura<sup>4</sup> para el caso de un yacimiento de aceite negro saturado, sin casquete de gas y con empuje hidráulico. Las características generales, las propiedades PVT del fluido, y los datos de comportamiento presión - producción se presentan en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 respectivamente.

**Tabla 5.1 Características Generales.**

Temperatura del yacimiento, $T_y$	200 ° F
Presión inicial del yacimiento, $p_i$	2740 (lb/pg <sup>2</sup> )
Presión de burbujeo, $p_b$	2740 (lb/pg <sup>2</sup> )
Temperatura a c.e., $T_{ce}$	60 ° F
Presión a c.e., $p_{ce}$	14.7 (lb/pg <sup>2</sup> )
Volumen original de aceite a c.e. (Volumétrico), $N$	312 MMbbls
Fracción de volumen de la capa de gas, $G$	0.0
Compresibilidad de la formación, $c_f$	$3 \times 10^{-6}$ (lb/pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
Compresibilidad del agua de formación, $c_w$	$4 \times 10^{-6}$ (lb/pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
Saturación de agua congénita, $s_{wi}$	0.05 frac.
Permeabilidad del acuífero, $k_a$	200 md
Porosidad del acuífero, $\phi_a$	0.25 frac.
Espesor del acuífero, $h_a$	100 pies
Viscosidad del agua, $\mu_w$	0.55 cp
Radio externo del yacimiento, $r_o$	9200 pies
Angulo de intrusión del agua, $f$	140 °

**Tabla 5.2 Propiedades del fluido (PVT).**

$p$ (lb/pg <sup>2</sup> )	$B_0$ ( $B_{cy}/B_{ce}$ )	$B_g$ ( $B_{cy}/M_{pie^3_{ce}}$ )	$R_s$ ( $pie^3_{ce}/B_{ce}$ )
2740	1.404	0.930	650.0
2500	1.374	0.980	592.0
2290	1.349	1.070	545.0
2109	1.329	1.170	507.0
1949	1.316	1.280	471.0
1818	1.303	1.390	442.0
1720	1.294	1.500	418.0
1608	1.287	1.600	398.0

1535	1.280	1.700	383.0
1480	1.276	1.760	371.0
1440	1.273	1.820	364.0

**Tabla 5.3 Datos presión - producción**

t (años)	p (lb/pg <sup>2</sup> )	Np (MMB <sub>cc</sub> )	Gp (MMpies <sup>3</sup> <sub>cc</sub> )
0	2740	0.00	0.00
1	2500	7.88	5988.8
2	2290	18.42	15564.9
3	2109	29.15	26832.6
4	1949	40.69	39676.2
5	1818	50.15	51393.5
6	1720	58.42	62217.3
7	1608	65.39	71602.1
8	1535	70.74	79228.8
9	1480	74.54	85348.3
10	1440	77.43	89818.8

La primera etapa del método consistió en estimar los diferentes conjuntos de valores que intervienen en el proceso de cálculo :

- La primera variable a estimar es el volumen original de aceite , del cual por lo general siempre se tiene un valor aproximado , obtenido a partir de una estimación volumétrica , para este caso se dispone del valor de  $N = 312 \text{ MMB}_{cc}$ .

- Puesto que los intervalos de tiempo seleccionados están en años y los valores restantes en el S.I. , entonces , la constante de conversión del tiempo adimensional es :

$$K_{tp} = \frac{\beta_1 K_u}{\phi_o \mu_o c_o r_o^2} = \frac{(2.309)(200)}{(0.25)(0.55)(7 \times 10^{-6})(9200)^2} = 5.67 \text{ años}^{-1}$$

- Similarmente , el valor de la constante de entrada de agua será :

$$C_{VEH} = 1.119 f \phi_o c_i h_o r_w^2 = (1.119) \left( \frac{140}{360} \right) (0.25) (7. \times 10^{-6}) (100) (9200)^2 = 6446 \text{ B}_{cy} / (\text{lb} / \text{pg}^2)$$

En el análisis realizado para este ejemplo Dake concluye que los valores correctos del radio adimensional y la entrada de agua son  $r_D = 5.0$  y  $C_{VEH} = 6296 \text{ B}_{cy} / (\text{lb} / \text{pg}^2)$ , respectivamente.

Con este conjunto de valores se efectuó una corrida del programa de cómputo para verificar la validez del método de optimización propuesto, obteniéndose los resultados siguientes:

**Tabla 5.4 Comparación de los resultados obtenidos por los dos métodos.**

Variables	Valores calculados Dake	Estimación inicial método propuesto	Valores calculados método propuesto	Numero de iteraciones
$N$ , MMB <sub>cc</sub>	312.000	312.000	315.443	3
$r_D$	5.000	5.000	4.998	
$K_{rp}$ , años <sup>-1</sup>	5.670	5.668	5.651	
$C_{VEH}$ , B <sub>cy</sub> /(lb/pg <sup>2</sup> )	6296.000	6445.686	6364.880	

Se puede observar que los valores calculados por el método propuesto en este trabajo son similares a los obtenidos en el ejemplo de Dake, por lo tanto se confirma la validación. Sin embargo, se efectuaron corridas de sensibilidad modificando en ambos sentidos los parámetros iniciales observándose en la mayoría de los casos una aproximación aceptable, siendo el parámetro mas sensible el volumen original de hidrocarburos.

## - Aplicación a un caso real

Como ejemplo de aplicación se tomaron los datos del Campo Paredón, el cual se ha definido como un yacimiento de aceite volátil con empuje hidráulico; en forma similar a como se comentó previamente, siguiendo la secuencia de pasos descritos en el Capítulo IV, se presenta a continuación el procedimiento de cálculo. Las Tablas 5.5 a 5.10 muestran los datos PVT obtenidos en el laboratorio para el aceite de este campo Paredón.

**Tabla 5.5 Características Generales del Campo Paredón.**

Temperatura del yacimiento, $T_y$	279 ° F
Presión Inicial del yacimiento, $p_i$	9270.7 (lb/pg <sup>2</sup> )
Presión de burbujeo, $P_b$	5394.7 (lb/pg <sup>2</sup> )
Temperatura a c.e., $T_{cc}$	60 ° F
Presión a c.e., $p_{cc}$	14.7 (lb/pg <sup>2</sup> )
Volumen original de aceite a c.e. (Volumétrico) N	461 MMB <sub>cc</sub>
Area del yacimiento, A	26.35 Km <sup>2</sup>
Compresibilidad de la formación, $c_f$	$2.18 \times 10^{-6}$ (lb/pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
Compresibilidad del agua de formación, $c_w$	$2.00 \times 10^{-6}$ (lb/pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
Saturación de agua congénita, $s_{wi}$	0.13 frac.
Permeabilidad del acuífero, $k_a$	? md
Porosidad del acuífero, $\phi_a$	0.025 frac.
Espesor del acuífero, $h_a$	? pies
Viscosidad del agua, $\mu_w$	1.00 cp
Radio externo del yacimiento, $r_o$	27511 pies
Angulo de intrusión del agua, $f$	360 °

### Análisis PVT composicional del pozo Paredón 11<sup>37</sup>.

**Tabla 5.6 Composición original de la mezcla.**

COMPONENTE	% mol
N <sub>2</sub>	0.430
C <sub>1</sub>	61.700
CO <sub>2</sub>	2.160
C <sub>2</sub>	9.950
H <sub>2</sub> S	0.030
C <sub>3</sub>	4.960
I-C <sub>4</sub>	1.070
N-C <sub>4</sub>	2.040
I-C <sub>5</sub>	1.060
N-C <sub>5</sub>	1.020



C <sub>6</sub>	1.090
C <sub>7</sub>	14.490
-----	-----
TOTAL	100.000

**Tabla 5.7 Propiedades de la mezcla**

Pres. satur	RGA total	B <sub>o</sub> a P <sub>b</sub>
(lb/pg <sup>2</sup> )	(pie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )	(B <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )
5394.7	3164.0	2.9000

**Tabla 5.8 Expansión a Composición Constante**

Presión	Volumen
(lb/pg <sup>2</sup> )	Relativo
9514.7	0.8788
9014.7	0.8875
8014.7	0.9087
7014.7	0.9352
6014.7	0.9711
5514.7	0.9936
5394.7	1.0000
5264.7	1.0098
4014.7	1.1478
3014.7	1.3836
1414.7	2.7085
1089.7	3.5043

**Tabla 5.9 Expansión a Volumen Constante**

Componentes	aceite original		Composición reportada de la fase de gas en la celda				
	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
N <sub>2</sub>	0.430	0.510	0.550	0.560	0.560	0.520	0.460
C <sub>1</sub>	61.700	70.820	73.390	74.560	74.780	73.700	70.830
CO <sub>2</sub>	2.160	2.320	2.360	2.410	2.460	2.540	2.660
C <sub>2</sub>	9.950	10.230	10.370	10.540	10.860	11.310	12.130
H <sub>2</sub> S	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.040
C <sub>3</sub>	4.960	4.630	4.630	4.660	4.760	5.120	5.920
I-C <sub>4</sub>	1.070	0.970	0.920	0.900	0.910	0.990	1.200
N-C <sub>4</sub>	2.040	1.830	1.700	1.650	1.650	1.810	2.180

I-C <sub>5</sub>	1.060	0.820	0.750	0.720	0.720	0.800	1.000
N-C <sub>5</sub>	1.020	0.770	0.710	0.670	0.670	0.740	0.900
C <sub>6</sub>	1.090	0.760	0.650	0.590	0.570	0.600	0.700
C <sub>7</sub>	14.490	6.310	3.940	2.710	2.030	1.840	1.980
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
Peso molecular C <sub>7</sub>	191.000	142.000	130.000	121.000	115.000	111.000	204.000
Densidad relativa C <sub>7</sub>	0.828	0.791	0.778	0.770	0.764	0.759	0.758
Fact. de desviación de gas z	-	0.976	0.910	0.892	0.899	0.924	0.955
porcentaje de Gas removido acumulado	0.000	7.485	18.726	31.142	45.614	59.393	71.844
porcentaje volumen de la fase líquida	-	50.500	48.600	46.400	43.700	40.800	37.500

**Tabla 5.10 Estudio de Separadores en Etapas**

Presión (lb/pg <sup>2</sup> )	Temperatura (°F)	RGA (pies <sup>3</sup> /bl)	Den. rel del líq.
1014.7	176	2740.0	
184.7	176	290.0	
39.7	176	93.0	
14.7	176	41.0	0.8122

### Procedimiento de cálculo.

Como paso inicial se tomaron los datos experimentales del proceso de expansión a volumen constante del análisis PVT composicional del pozo Paredón 11, habiéndose efectuado con ellos el proceso de validación utilizando el programa de cómputo VALCO. Los resultados obtenidos se muestran en Tablas 5.11 a 5.18 y en la Figura 5.1:

- Validación del análisis PVT composicional del pozo Paredón 11

**Tabla 5.11 Composición de la Fase Gaseosa para la mezcla del pozo Paredón 11 , T=279° F**

COMPONENTE	Composición reportada de la fase libre en la celda						
	composición calculada a p <sub>b</sub>	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )					
		5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700
N <sub>2</sub>	0.441	0.510	0.550	0.560	0.560	0.520	0.460
C <sub>1</sub>	71.618	70.820	73.390	74.560	74.780	73.700	70.830
CO <sub>2</sub>	2.407	2.320	2.360	2.410	2.460	2.540	2.660
C <sub>2</sub>	10.009	10.230	10.370	10.540	10.860	11.310	12.130
H <sub>2</sub> S	0.029	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.040
C <sub>3</sub>	4.226	4.630	4.630	4.660	4.760	5.120	5.920
I-C <sub>4</sub>	0.978	0.970	0.920	0.900	0.910	0.990	1.200
N-C <sub>4</sub>	1.915	1.830	1.700	1.650	1.650	1.810	2.180
I-C <sub>5</sub>	0.773	0.820	0.750	0.720	0.720	0.800	1.000
N-C <sub>5</sub>	0.688	0.770	0.710	0.670	0.670	0.740	0.900
C <sub>6</sub>	0.726	0.760	0.650	0.590	0.570	0.600	0.700
C <sub>7</sub>	6.192	6.310	3.940	2.710	2.030	1.840	1.980
<b>TOTAL</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>	<b>100.000</b>

**Tabla 5.12 Composición Calculada de la Fase Líquida para la mezcla del pozo Paredón 11 , T=279° F**

COMPONENTE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	aceite original	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700
N <sub>2</sub>	0.430	0.327	0.241	0.179	0.106	0.064	0.026
C <sub>1</sub>	61.700	50.002	43.008	36.700	29.041	20.757	11.251
CO <sub>2</sub>	2.160	1.955	1.839	1.687	1.472	1.149	0.659
C <sub>2</sub>	9.950	9.591	9.288	8.874	8.072	6.846	4.738
H <sub>2</sub> S	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.018
C <sub>3</sub>	4.960	5.383	0.502	5.589	5.619	5.301	4.361
I-C <sub>4</sub>	1.070	1.198	1.306	1.394	1.475	1.484	1.347
N-C <sub>4</sub>	2.040	2.309	2.573	2.778	2.996	3.061	2.914
I-C <sub>5</sub>	1.060	1.368	1.555	1.721	1.915	2.059	2.123

N-C <sub>3</sub>	1.020	1.341	1.517	1.698	1.897	2.062	2.191
C <sub>6</sub>	1.090	1.513	1.791	2.051	2.364	2.707	3.102
C <sub>7</sub> <sup>-</sup>	14.490	24.982	31.349	37.296	45.012	54.480	67.270
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

**Tabla 5.13 Constantes de Equilibrio Originales Calculadas por el Programa VALCO , pozo Paredón 11 , T=279° F**

COMPONENTE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
N <sub>2</sub>	1.025	1.558	2.284	3.121	5.295	8.077	17.686
C <sub>1</sub>	1.161	1.416	1.706	2.032	2.575	3.551	6.295
CO <sub>2</sub>	1.114	1.187	1.283	1.428	1.671	2.210	4.036
C <sub>2</sub>	1.006	1.067	1.117	1.188	1.345	1.652	2.560
H <sub>2</sub> S	0.959	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	2.260
C <sub>3</sub>	0.852	0.860	0.842	0.834	0.847	0.966	1.358
I-C <sub>4</sub>	0.914	0.810	0.704	0.646	0.617	0.667	0.891
N-C <sub>4</sub>	0.939	0.792	0.661	0.594	0.551	0.591	0.748
I-C <sub>5</sub>	0.730	0.599	0.482	0.418	0.376	0.389	0.471
N-C <sub>5</sub>	0.674	0.574	0.468	0.395	0.353	0.359	0.411
C <sub>6</sub>	0.666	0.502	0.363	0.288	0.241	0.222	0.226
C <sub>7</sub> <sup>-</sup>	0.427	0.253	0.126	0.073	0.045	0.034	0.029
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

**Tabla 5.14 Propiedades Físicas Originales de la mezcla del pozo Paredón 11 , T=279° F**

VARIABLE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Peso mol. C <sub>7</sub> <sup>-</sup> del gas (Lab)	191000	142.000	130.000	121.000	115.000	111.000	110.000
Densidad rel. C <sub>7</sub> <sup>-</sup> del gas (Lab)	0.828	0.791	0.778	0.770	0.764	0.759	0.758
Factor z del gas (Lab)	*	0.976	0.910	0.892	0.899	0.924	0.955
Peso mol. del gas (Calc.)	----	30.041	26.393	24.684	23.925	24.051	25.048
Densidad del gas (Calc.)	----	17.521	13.219	9.821	6.761	4.315	2.364

Masa del gas (Calc.)	----	8.673	6.794	5.264	3.806	2.554	1.477
Peso mol. del líquido (Calc.)	48.080	71.218	82.979	94.036	108.599	126.552	150.565
Peso mol C <sub>7</sub> líquido (Calc.)	191.000	206.874	204.026	202.576	202.085	202.544	203.431
Densidad del líquido (Calc.)	28.500	36.622	38.301	39.500	40.580	41.717	43.331
Masa del líquido (Calc.)	28.500	18.494	18.614	18.328	17.733	17.021	16.249

\* Este valor no lo reporta el análisis PVT.

**Tabla 5.15 Composición Reportada para la Fase Gaseosa en la Celda , pozo Paredón 11 ,  
T=279° F**

COMPONENTE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
N <sub>2</sub>	0.608	0.550	0.564	0.559	0.545	0.516	0.453
C <sub>1</sub>	71.629	70.780	73.349	74.557	74.822	73.710	70.868
CO <sub>2</sub>	2.331	2.350	2.411	2.454	2.497	2.553	2.578
C <sub>2</sub>	9.987	10.230	10.370	10.540	10.860	11.310	12.184
H <sub>2</sub> S	0.029	0.030	0.031	0.031	0.032	0.034	0.037
C <sub>3</sub>	4.485	4.680	4.630	4.660	4.760	5.120	5.920
I-C <sub>4</sub>	0.926	0.960	0.920	0.900	0.910	0.990	1.200
N-C <sub>4</sub>	1.672	1.780	1.700	1.650	1.650	1.810	2.180
I-C <sub>5</sub>	0.787	0.830	0.757	0.720	0.719	0.800	1.000
N-C <sub>5</sub>	0.706	0.770	0.701	0.661	0.654	0.717	0.900
C <sub>6</sub>	0.662	0.730	0.627	0.558	0.521	0.600	0.700
C <sub>7</sub>	6.178	6.310	3.940	2.710	2.030	1.840	1.980
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

**Tabla 5.16 Composición Calculada para la Fase Gaseosa en la Celda , pozo Paredón 11 ,  
279° F**

COMPONENTE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
N <sub>2</sub>	0.430	0.276	0.213	0.167	0.112	0.059	0.025
C <sub>1</sub>	61.700	50.054	43.076	36.728	29.007	20.751	11.208
CO <sub>2</sub>	2.160	1.916	1.760	1.599	1.368	1.049	0.647

C <sub>2</sub>	9.950	9.591	9.288	8.874	8.072	6.846	4.672
H <sub>2</sub> S	0.030	0.030	0.029	0.028	0.026	0.022	0.015
C <sub>3</sub>	4.960	5.319	5.492	5.578	5.606	5.284	4.340
I-C <sub>4</sub>	1.070	1.211	1.308	1.397	1.478	1.487	1.352
N-C <sub>4</sub>	2.040	2.373	2.583	2.789	3.010	3.078	2.935
I-C <sub>5</sub>	1.060	1.355	1.543	1.716	1.911	2.053	2.115
N-C <sub>5</sub>	1.020	1.341	1.530	1.715	1.929	2.114	2.233
C <sub>6</sub>	1.090	1.552	1.829	2.113	2.470	2.777	3.190
C <sub>7</sub>	14.490	24.982	31.349	37.296	45.012	54.480	67.270
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

**Tabla 5.17 Constantes de Equilibrio Validadas por el programa VALCO , pozo Paredón 11**

COMPONENTE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
N <sub>2</sub>	1.413	1.992	2.650	3.347	4.860	8.690	18.189
C <sub>1</sub>	1.161	1.414	1.703	2.030	2.579	3.552	6.323
CO <sub>2</sub>	1.079	1.226	1.370	1.535	1.826	2.434	3.984
C <sub>2</sub>	1.004	1.067	1.117	1.188	1.345	1.652	2.608
H <sub>2</sub> S	0.964	1.023	1.060	1.110	1.231	1.535	2.470
C <sub>3</sub>	0.904	0.880	0.843	0.835	0.849	0.969	1.364
I-C <sub>4</sub>	0.866	0.793	0.703	0.644	0.616	0.666	0.888
N-C <sub>4</sub>	0.820	0.750	0.658	0.592	0.548	0.588	0.743
I-C <sub>5</sub>	0.742	0.613	0.491	0.420	0.376	0.390	0.473
N-C <sub>5</sub>	0.692	0.754	0.458	0.385	0.339	0.339	0.403
C <sub>6</sub>	0.607	0.470	0.343	0.264	0.211	0.216	0.219
C <sub>7</sub>	0.426	0.253	0.126	0.073	0.045	0.034	0.029
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000

**Tabla 5.18 Propiedades Físicas Validadas para la mezcla del pozo Paredón 11 , T=279° F**

VARIABLE	Presiones (lb/pg <sup>2</sup> )						
	5394.700	4514.700	3614.700	2814.700	2014.700	1314.700	714.700
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Peso mol. C <sub>7</sub> del gas (Lab)	191.000	142.000	130.000	121.000	115.000	111.000	110.000
Densidad rel. C <sub>7</sub> del gas (Lab)	0.828	0.791	0.778	0.770	0.764	0.759	0.758
Factor z del gas (Lab)	*	0.976	0.910	0.892	0.899	0.924	0.955

Peso mol. del gas							
(Calc.)	----	30.027	26.392	24.668	23.890	24.042	25.032
Den. del gas (Calc.)	----	17.513	13.218	9.815	6.751	4.313	2.362
Masa del gas (Calc.)	----	8.669	6.794	5.261	3.801	2.553	1.476
Peso mol. del liquido							
(Calc.)	48.080	71.235	82.983	94.062	108.663	126.600	150.636
Peso mol C <sub>7+</sub> liquido							
(Calc.)	191.000	206.874	204.026	202.576	202.085	202.544	203.431
Densidad del liquido							
(Calc.)	28.500	36.631	38.303	39.511	40.603	41.733	43.352
Masa del liq. (Calc.)	28.500						
		18.499	18.615	18.333	17.744	17.027	16.257

\* Este valor no lo reporta el análisis PVT.

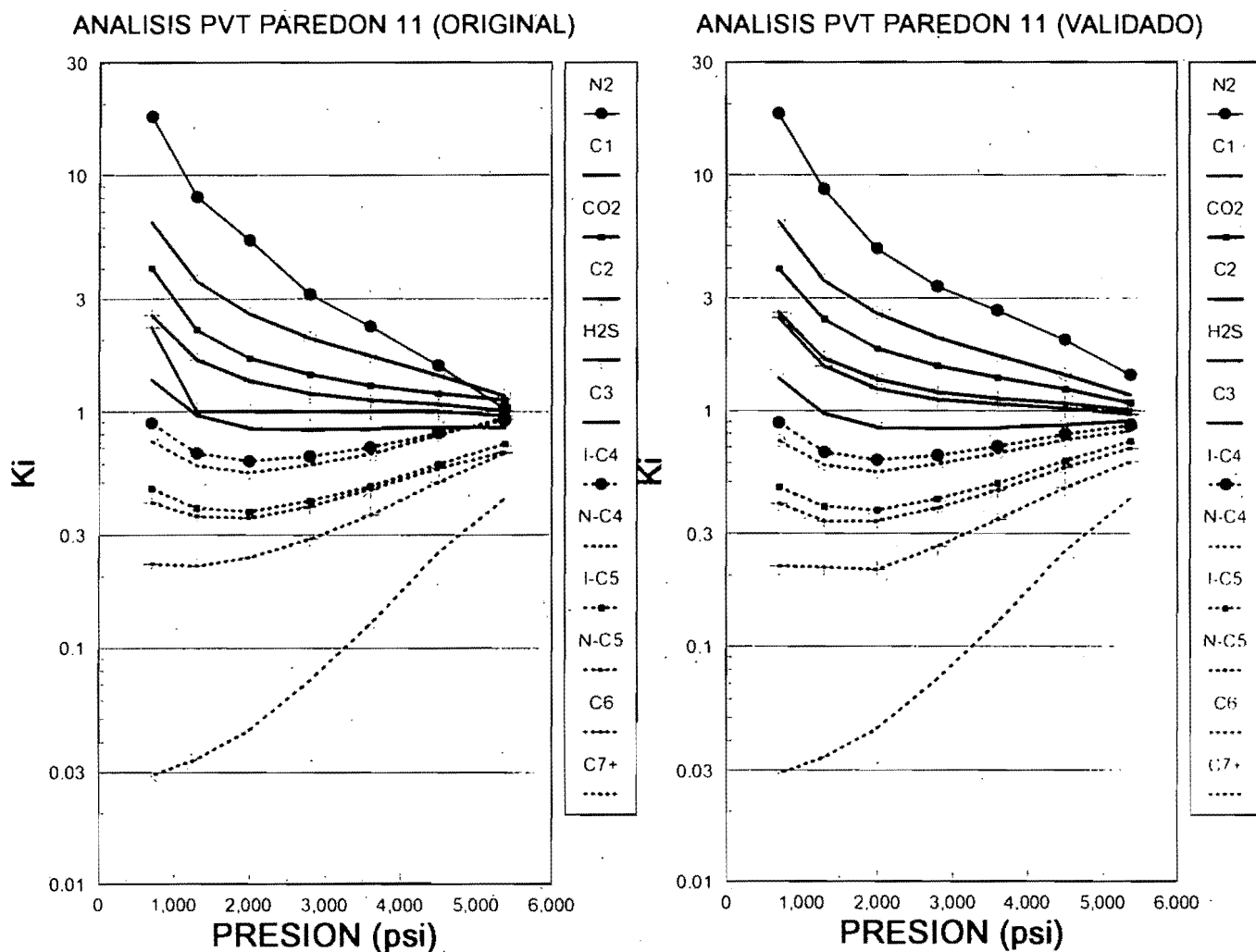


Fig. 5.1 Validación del análisis PVT composicional.

Posteriormente con la presión de saturación , la composición original del fluido y los procesos experimentales obtenidos del análisis PVT composicional del pozo Paredón 11 , se efectuó el proceso de caracterización del fluido utilizando la ecuación de estado de Peng - Robinson incluida en el programa PVT del simulador COMP IV<sup>35</sup>. Los resultados obtenidos se muestran en Tablas 5.19 a 5.23 y en la Figura 5.2 :

**- Caracterización del fluido del pozo Paredón 11**

**Tabla 5.19 Propiedades de la mezcla**

Pres. satur (lb/pg <sup>2</sup> )	Pres. satur (lb/pg <sup>2</sup> )	RGA total (pie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )	RGA total (pie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )	B <sub>o</sub> a p <sub>b</sub> (B <sub>cy</sub> /B <sub>cc</sub> )	B <sub>o</sub> a p <sub>b</sub> (B <sub>cy</sub> /B <sub>cc</sub> )
Observada	calculada	Observada	calculada	Observada	calculada
5394.7	5394.7	3164.0000	3141.1922	2.9000	2.9000

**Tabla 5.20 Expansión a Composición Constante**

Presión (psia)	Vol. Rel. (Obser)	Vol. Rel. (Calculado)
9514.7	0.8788	0.8688
9014.7	0.8875	0.9891
8014.7	0.9087	0.9029
7014.7	0.9352	0.9324
6014.7	0.9711	0.9703
5514.7	0.9936	0.9938
5394.7	1.0000	1.0000
5264.7	1.0098	1.0104
4014.7	1.1478	1.1540
3014.7	1.3836	1.3810
1414.7	2.7085	2.6298
1089.7	3.5043	3.4038

**Tabla 5.21 Expansión a Composición Constante**

Presión (lbs/pg <sup>2</sup> )	% Gas Rem. Observado	% Gas Rem. Calculado	% Sat. Líq. Observado	% Sat. Líq. Calculado	Fact. Comp Observado	Fact. Comp Calculado
5394.7	0.0000	0.0000	-	1.0000	-	0.0000
4514.7	0.0748	0.0816	0.5050	0.5629	0.9760	0.9993
3614.7	0.1873	0.1872	0.4860	0.4906	0.9100	0.9299
2814.7	0.3114	0.3031	0.4640	0.4475	0.8920	0.8916
2014.7	0.4561	0.4410	0.4370	0.4097	0.8990	0.8774
1314.7	0.5939	0.5774	0.4080	0.3778	0.9240	0.8890
714.7	0.7184	0.7022	0.3750	0.3488	0.9550	0.9202



**Tabla 5.22 Estudio de Separadores en Etapas**

Presión (lb/pg <sup>2</sup> )	Temperatura (°F)	RGA (pie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )	Dens. rel del liq.
1014.7	176	2740.0	
184.7	176	290.0	
39.7	176	93.0	
14.7	176	41.0	0.8122

ANALISIS COMPOSICIONAL PVT DEL POZO PAREDON 11  
 CARACTERIZACION DEL FLUIDO MEDIANTE LA ECUACION DE ESTADO DE PENG ROBINSON

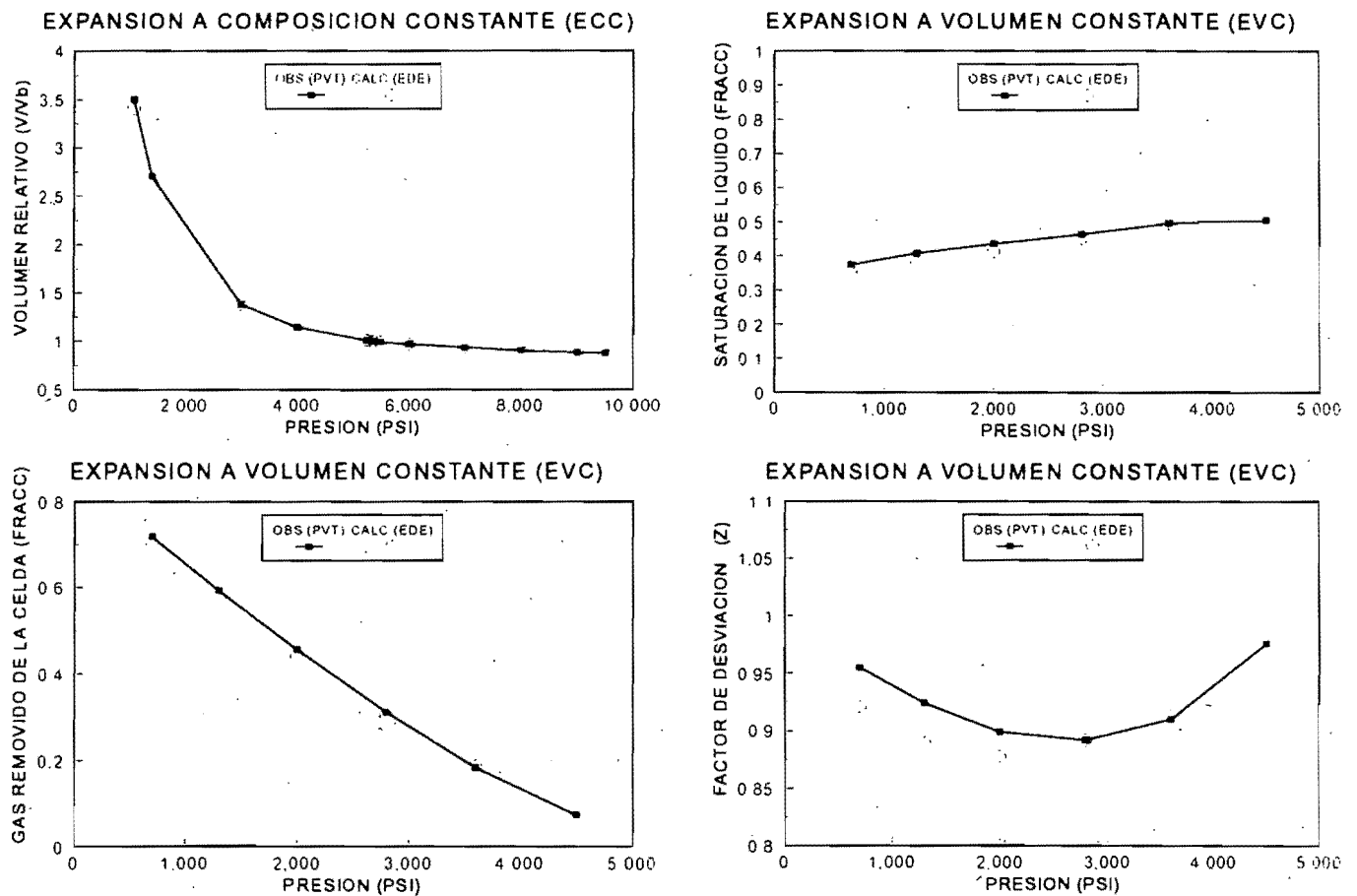


Fig. 5.2 Comparación de los resultados PVT experimentales y los obtenidos por medio de la EDE.

Una vez caracterizado el fluido se calculan los factores de volumen y las relaciones gas - aceite mediante las ecuaciones propuestas en el literatutra<sup>4,30</sup>

para  $p > p_b$  :

$$B_o = VR * B_{obj}$$

para  $p \leq p_b$  :

$$B_o = B_{nd} \left[ \frac{B_{obj}}{B_{obd}} \right]$$

$$B_g = 0.00502 \frac{zT}{p}$$

$$R_s = R_{sif} - (R_{sd} - R_{sd}) \left[ \frac{B_{obj}}{B_{obd}} \right]$$

$R_v$  se obtuvo a través de un proceso flash<sup>35</sup> llevado a cabo para la composición de la fase de gas a diferentes etapas de presión ; y el factor de volumen del agua  $B_w$  se obtuvo por medio de correlación.

**Tabla 5.23 Propiedades del fluido del pozo Paredón 11 (PVT).**

p (lb/pg <sup>2</sup> )	B <sub>o</sub> (B <sub>cy</sub> /B <sub>cc</sub> )	B <sub>g</sub> (B <sub>cy</sub> /Mpie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> )	R <sub>s</sub> (pie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> /B <sub>cc</sub> )	R <sub>v</sub> (B <sub>cy</sub> /Mpie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> )
9514.7	2.5977	---	3141.1922	0.3183
9014.7	2.6285	---	3141.1922	0.3183
8014.7	2.6997	---	3141.1922	0.3183
7014.7	2.7879	---	3141.1922	0.3183
6014.7	2.9012	---	3141.1922	0.3183
5514.7	2.9715	---	3141.1922	0.3183
5394.7	2.9900	---	3141.1922	0.3183

3614.7	1.4856	0.9553	860.8659	0.0508
2814.7	1.3095	1.1763	570.1931	0.0366
2014.7	1.1811	1.6172	354.8403	0.0258
1314.7	1.0883	2.5110	199.5503	0.0217
714.7	1.0137	4.7812	77.8523	0.0292

**Tabla 5.24 Datos presión - producción Campo Paredón**

t (años)	p (lb/pg <sup>2</sup> )	Np (MMB <sub>cc</sub> )	Gg (MMpie <sup>3</sup> <sub>cc</sub> )	Wp (MMB <sub>cc</sub> )
0	9327.70	0.00	0.00	0.00
1	9156.70	0.82	1852.00	0.00
2	8802.09	8.33	17431.00	0.00
3	8316.17	17.05	43544.00	0.00
4	7744.78	29.15	74198.00	0.00
5	7134.19	43.83	109360.00	0.80
6	6530.66	61.57	169598.00	5.26
7	5980.45	79.25	226010.00	43.24
8	5529.83	95.35	270567.00	63.07

Por último, con el conjunto de datos obtenido se estiman los parámetros involucrados en el cálculo del volumen original de hidrocarburos, además de los parámetros que definen la entrada de agua del acuífero al yacimiento.

**- Cálculo del Volumen Original de Hidrocarburos y Parámetros del Acuífero.**

$$1. \quad K_{ip} = \frac{\beta_i k_a}{\phi_a \mu_a c_{ia} r_o^2} = \frac{(2.309) K_a}{(0.034)(1.0)(4.18 \times 10^{-6})(27510)^2}$$

$$2. \quad C_{VEH} = 1.119 f \phi_a c_{ia} h_a r_o^2 = (1.119) \left( \frac{360}{360} \right) (0.034)(4.18 \times 10^{-6}) h_a (27510)^2$$

$k_i$ , (md)	60
$K_{ip}$ , (l/años)	1.28
$h_a$ , (pies)	500
$C_{VEH}$	
$(B_{cy}/(lb/pg^2))$	60177.8



Parámetros a estimarse	Parámetros calculados	Parámetros estimados
$N_v$ (MMB <sub>cc</sub> )	461.00	428.08
$r_e$	5.00	5.21
$K_{vy}$ (1/años)	1.28	0.85
$C_{178}$ (B <sub>cy</sub> /(lb/pg <sup>2</sup> ))	10799.80	10799.6
iteraciones		24

Por lo tanto tenemos que :

- a) El volumen original de aceite es : 428.08 MMB<sub>cs</sub>
- b) El radio del acuífero es : 143342.74 pies
- c) La permeabilidad del acuífero es : 39.34 md
- d) El espesor del acuífero es : 89.73 pies

Con la finalidad de mostrar la aproximación obtenida por este método se presenta en la Tabla 5.25 el conjunto de valores de las producciones acumuladas de fluidos observadas y calculadas.

**Tabla 5.25 Producciones acumuladas de fluidos observadas y calculadas.**

t (años)	Rw <sub>o</sub> (MMB <sub>cy</sub> )	Rw <sub>c</sub> (MMB <sub>cy</sub> )
1	2.148	5.991
2	22.021	21.558
3	45.664	45.824
4	79.390	79.945
5	121.73	122.552
6	175.03	174.327
7	230.03	228.489
8	283.13	284.696

## VI.- Conclusiones

En este trabajo se presenta un programa de cómputo que permite estimar el volumen original de aceite y los parámetros del acuífero asociado en yacimientos de aceite volátil con entrada natural de agua. Esta programa efectúa un análisis de regresión con base en un proceso de optimización aplicando el método iterativo de Newton - Raphson. Por lo tanto en función de los resultados obtenidos en este trabajo se pueden hacer las conclusiones siguientes :

1. Para obtener una evaluación confiable del comportamiento de los fluidos que presentan composición variable, es necesario que los datos básicos que se obtienen en forma experimental a través de un análisis composicional PVT sean validados antes de tratar de caracterizar dicho fluido por medio de una ecuación de estado. Solamente de esta forma se podrá disponer de información representativa de las propiedades de los fluidos contenidos en los yacimientos.

2. Una vez que obtiene un ajuste adecuado de las propiedades proporcionadas por la ecuación de estado y las propiedades experimentales determinadas, se deben calcular los factores de volumen y las relaciones gas - aceite a partir de una combinación de los diferentes procedimientos de laboratorio involucrados en el análisis PVT como son : ECC, EVC, ED, ESE.

3. Seleccionar la información más confiable del sistema yacimiento - acuífero, como son algunas características particulares (radios externos, espesores, etc), propiedades petrofísicas e historias de presión - producción. De la datos que no se conozcan (por ejemplo espesor del acuífero) es necesario hacer una estimación inicial en función de la experiencia del analista, los cuales después deberán corregirse al encontrar los valores correctos del ajuste del modelo de optimización.

4. Un punto muy importante y que se debe tener en cuenta es el volumen original de aceite obtenido a través de un método volumétrico; debido a que este valor es básico en el proceso de optimización, ya que de él dependerán los parámetros restantes y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

5. Se observa que el modelo de optimización es muy sensible a los valores iniciales de las incógnitas  $(N, F_D, K_{I_c}, C_{VEH})$ , por lo que es posible obtener soluciones múltiples. Si se tiene un error muy alto en la estimación inicial de los valores la solución que se obtenga estará muy alejada de la real, por lo se requiere de un análisis de sensibilidad para encontrar la estimación inicial que proporcione el error más pequeño posible. Dado que el volumen original de aceite es el parámetro más confiable que se tiene, se debe de modificar lo menos posible este parámetro en el análisis de sensibilidad realizado.

## Nomenclatura

$B_g$  = Factor de volumen del gas ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{pie}^3_{\text{ce}}$ )

$B_{gi}$  = Factor de volumen del gas inicial ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{pie}^3_{\text{ce}}$ )

$B_o$  = Factor de Volumen del aceite ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ )

$B_{oi}$  = Factor de Volumen del aceite inicial ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ )

$B_{ohd}$  = Factor de volumen del aceite a la presión de burbuja obtenido del proceso diferencial en el laboratorio ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ ).

$B_{ofl}$  = Factor de volumen del aceite a la presión de burbuja obtenido del proceso flash en el laboratorio ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ ).

$B_{od}$  = Factor de volumen del aceite a cualquier presión obtenido del proceso diferencial en el laboratorio ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ ).

$B_w$  = Factor de volumen del agua ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{bl}_{\text{ce}}$ ).

$C_f$  = Compresibilidad de la formación ( $\text{lb}/\text{pg}^2$ )<sup>-1</sup>

$C_{ta}$  = Compresibilidad total del acuífero ( $\text{lb}/\text{pg}^2$ )<sup>-1</sup>

$C_w$  = Compresibilidad del agua de formación ( $\text{lb}/\text{pg}^2$ )<sup>-1</sup>

$C_{VEH}$  = Constante de entrada de agua de van Everdingen y Hurst ( $\text{bl}_{\text{cy}}/\text{lb}/\text{pg}^2$ )

$e$  = Función exponencial (adimensional)

$f$  = Relación del ángulo de contacto que forman el acuífero y el yacimiento (adimensional)

$G_{fgi}$  = Volumen de la fase inicial de gas en el yacimiento ( $\text{pie}^3_{\text{cy}}$ )

$h_a$  = Espesor neto del acuífero (pie)

$J_0$  = Función Bessel de grado cero (adimensional)

$J_1$  = Función Bessel de grado uno (adimensional)

$k_a$  = Permeabilidad del acuífero (md)

$K_i$  = Constante de equilibrio (adimensional)

$K_{tD}$  = Constante de conversión del tiempo adimensional (años<sup>-1</sup>)

$N$  = Volumen de aceite ( $\text{bl}_{\text{ce}}$ )

$N_{foi}$  = volumen de la fase de aceite inicial ( $\text{bl}_{\text{ce}}$ )

$N_p$  = Producción acumulada de aceite (bls<sub>ce</sub>)

$P$  = Presión (lb/pg<sup>2</sup>)

$\bar{P}$  = Presión media (lb/pg<sup>2</sup>)

$P_b$  = Presión de burbuja (lb/pg<sup>2</sup>)

$P_i$  = Presión inicial (lb/pg<sup>2</sup>)

$r_a$  = Radio del acuífero (pies)

$r_o$  = Radio del yacimiento (pies)

$r_D$  = Relación de la dimensión radial acuífero - yacimiento (adimensional)

RGA = Relación gas - aceite (pie<sup>3</sup>/bls)

$R_p$  = Relación de producciones acumuladas de gas y aceite (pie<sup>3</sup>/bls)

$R_s$  = Relación de solubilidad del gas en el aceite (pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>/bls<sub>ce</sub>)

$R_{si}$  = Relación de solubilidad inicial del gas en el aceite (pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>/bls<sub>ce</sub>)

$R_{sd}$  = Relación de solubilidad del gas en el aceite obtenido del proceso diferencial en el laboratorio (pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>/bls<sub>ce</sub>)

$R_{sid}$  = Relación de solubilidad inicial del gas en el aceite obtenido del proceso diferencial en el laboratorio (pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>/bls<sub>ce</sub>)

$R_{sif}$  = Relación de solubilidad inicial del gas en el aceite obtenido del proceso flash en el laboratorio (pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>/bls<sub>ce</sub>)

$R_v$  = Relación de solubilidad del aceite en el gas (bls<sub>ce</sub>/pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>)

$R_{vi}$  = Relación de solubilidad inicial del aceite en el gas (bls<sub>ce</sub>/pie<sup>3</sup><sub>ce</sub>)

$T$  = Temperatura (°F)

$t$  = Tiempo (años)

VR = Volumen relativo (adimensional)

$W_e$  = Entrada de agua (bls)

$Y_0$  = Función Bessel de grado cero (adimensional)

$Y_1$  = Función Bessel de grado uno (adimensional)

$z$  = Factor de compresibilidad del gas (adimensional)



## Subíndices

a = Acuífero

ce = Condiciones estándar

cy = Condiciones de yacimiento

D = Adimensional

g = Gas

y = Índice de puntos observados

j = Índice de la incógnita

k = Índice de las derivadas de la función con respecto a la incógnita

l = Índice de raíz de la función Bessel

o = Aceite

w = Agua

## Superíndices

n = Numero de puntos

v = Nivel de iteración

## Griegas

$\Delta W$  = Variación de volumen de agua

$\Delta P$  = Variación de presión

$\beta_c$  = Constante de conversión de unidades

$\alpha$  = Raíces de la función Bessel

$\mu$  = Viscosidad

$\phi$  = Porosidad

## Referencias

1. Méndez L. T. y Teyssiers S. J.: "Caracterización de los Fluidos de Yacimientos Petroleros", Revista IMP, Vol. XI No. 4 (Octubre 1979) 55 - 70.
2. McCain W. D., Jr.: "The Properties of Petroleum Fluids", Penn Well Publishing Company, Tulsa (1990).
3. Schilthuis R. J.: "Active Oil and Reservoir Energy", Trans., AIME (1936) 118, 33-52.
4. Dake L. P.: "Fundamental of Reservoir Engineering", Elsevier Scientific Publishing Company (1978).
5. Havlena D. y Odeh A. S.: "The Material Balance as an Equation of Straight Line", J. Pet. Tech. (Agosto, 1963) 896 - 900.
6. McEwen C. R.: "Material Balance Calculations with Water Influx in the Presence of Uncertainty in Pressures", Soc. Pet. Eng. J. (Junio, 1962), 120 - 28; Trans., AIME 225.
7. Therani, D. H.: "An Analysis of Volumetric Balance Equation for Calculation of Oil in Place and Water Influx", J. Pet. Tech. (Septiembre, 1985) 1664 - 1670.
8. Hurst W.: "Water Influx into a Reservoir and Its Application to the Equation of Volumetric Balance", Trans., AIME (1943), 151 - 57.
9. van Everdingen A. F. y Hurst W.: "Application of the Laplace Transform to Flow Problems in Reservoir", Trans., AIME (1949) 186, 304 - 324.

10. Chatas A. T. : "The Estimation of Aquifer Properties from Reservoir Performance in Water - Drive Fields", artículo SPE 2970 , presentado en el 45th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME , Houston , Tex. Oct. 4-7 , 1970.
11. Miranda A. and Raghavan R. : "Optimization of The Material Balance Equation" , J. Can. Pet. Tech. (Oct. - Dic 1975) 54 - 61.
12. Rossen R. H. : "A Regression Approach to Estimating Gas In Place for Gas Fields" , J. Pet. Tech. (Oct. 1975) 1283 - 1289.
13. Wang B. , Litvak B. L. y Bowman G. W. : "OILWAT : Microcomputer Program for Oil Material Balance With Gascap and Water Influx" , artículo SPE 24437 , presentado en el 7th SPE Computer Conference , Houston Tex. (Jul. 1992) , 171 - 186.
14. Cook , A. B. , Spencer , G. B. y Bobrowski , F. P. : "Special Considerations in Predicting Reservoir Performance of Highly Volatile Type Oil Reservoirs".Trans. , AIME (1951), 192, 37.
15. Woods , R. W. : "Case History of Reservoir Performance of a Highly Type of Oil Reservoir". Trans. , AIME (1955), 204, 37.
16. Reudelhuber , F. O. y Richard , F. H. : " A Compositional Material Balance Method for Prediction of Recovery from Volatile Oil Depletion Drive Reservoir", Trans. , AIME (1957),Vol. 210 , pp. 19-26.
17. Jacoby , R. H. y Berry , V. J. , Jr. : "A Method for Predicting Depletion Performance of a Reservoir Producing Volatile Crude Oil", Trans. . AIME (1957), 210, 27.
18. Brinkley T. W. : "A Volumetric - Balance Applicable to the Spectrum of Reservoir Oils from Black Oils Through High Volatile Oils" , J. Pet Tech. (Junio , 1963) 589 - 594.

19. Vo T. D. , Jones J. R. , Camacho V. R. G. y Raghavan R. : "A Unified Treatment of Material Balance Computations" , artículo presentado en el International Technical Meeting Jointly Hosted by the Pet. Soc. of CIM and SPE , Calgary , Canada. (Junio , 1990) , 37-1 - 37-14
20. Walsh , M. P. : "A Generalized Approach to Reservoir Material Balance Calculations", J. Can. Pet. Tech. , Vol. 34 , No. 1 (Enero , 1995) 55 - 63.
21. Walsh M. P. : "New , Improved Equation Solves for Volatile Oil , Condensate Reserves" , Oil and Gas Journal (Agosto , 1994) 72 - 76.
22. Cook , R. E. , Jacoby , R. H. y Ramesh A. B.," A Beta Type Reservoir Simulator for Approximating compositional Effects During Gas Injection", SPEJ, (Julio , 1974) 471-481.
23. Spivak , A. y Dixon , T. N. : "Simulation of Gas Condense Reservoir", artículo SPE 4271 , presentado en el 3rd Numerical Simulation of Reservoir Performance Symposium of the SPE of AIME , Houston , Tex. , Enero 10 - 12 , 1973.
24. Coats , K. H. : "Simulation of Gas Condensate Reservoir Performance" , J. Pet. Tech. (Octubre , 1985) 1870 - 1885.
25. Walsh , M. P., Ansah , J. y Raghavan , R. : "The Generalized Material Balance As an Equation of a Straight Line: Part 1 - Applications to Undersaturated, Volumetric Reservoir " , artículo SPE 27684 , presentado en el 1994 SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference , celebrado en Midland, Texas , Marzo 16 - 18 , 1994.
26. Walsh M. P., Ansah J. y Raghavan R. : "The Generalized Material Balance As an Equation of a Straight Line: Part 2 - Applications to Undersaturated, Volumetric Reservoir " , artículo SPE 27684 , presentado en el 1994 SPE Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference , celebrado en Midland, Texas , Marzo 16 - 18 , 1994.

27. Fong A. J. L. : "Caracterización Composicional , la Importancia de la Discretización de la Información y Estudios PVT para la Simulación Matemática del Campo Jujo - Tecominoacan" , Tesis de Maestría , División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería , UNAM (1990)
28. Samaniego V. F. : "Explotación de Yacimientos de Gas , Gas y Condensado y Aceite Volátil" , trabajo de ingreso a la Academia Mexicana de Ingeniería , junio 18 , 1992.
29. Craft , B. C. y Hawkins , M. F. : "Applied Petroleum Reservoir Engineering" , Prentice - Hall , Inc. Englewood Cliffs , N. J. (1959)
30. Moses P. L. : "Engineering Applications of Phase Behavior of Crude Oil and Condensate Systems" , J. Pet. Tech. (Julio, 1986) 715 - 723
31. Bashbush , J. L. : "A Method to Determine K Values From Laboratory Data and Its Applications" , artículo SPE 10127 , presentado en el 56th Annual Fall Technical Conference , San Antonio Tex. , Oct. 5 - 7, 1981.
32. Whitson , C. H. y Torp , S. B. : "Evaluating Constant - Volume Depletion Data" , J. Pet. Tech. (Marzo 1983) , 610 - 620.
33. Mazariegos , U. C. E. : "Desarrollo de un Paquete de Cómputo para Determinar la Consistencia de un Análisis Composicional de Fluidos" , Tesis de Maestría , División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería , UNAM (1990).
34. Corona B. A. : "Validación Automatizada de Análisis PVT Composicionales" , Tesis de Maestría , División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería , UNAM (1993).
35. SSI . Fully Implicit Equation of State Composicional Reservoir Simulator with Dual Porosity Option , COMP IV , Version 3.1 , Junio 1990.

36. Peng D. Y. y Robinson D. B. : "A New Two - Constant Equation of State" , Ind. Eng. Chem. Fundam. v-15 , (1976) , 59 - 64.

37. Core Laboratories , Inc. : Reporte del Análisis PVT del pozo Paredón 11 , Dallas , Texas , junio 1980.

## Apéndice A

### Optimización de la ecuación general de balance de materia

En relación a la evaluación de los parámetros del sistema yacimiento - acuífero , se presenta un método que consiste en resolver la ecuación general de balance de materia (EGBM) , a través de un proceso de optimización basado en la extracción neta de fluidos (aceite + gas + agua) , el cual permite estimar el volumen original de aceite ( $N$ ) , además de los parámetros del acuífero asociado , como son la relación de dimensión radial del acuífero a la del yacimiento  $r_D = r_a / r_w$  , la constante de conversión del tiempo adimensional  $K_{tr} = \beta_1 K_a / \phi_a \mu_a c_{t_a} r_w^2$  , y la constante de entrada de agua  $C_{VEH} = 2\pi r_w^2 h_a \phi_a c_{t_a}$  , para un acuífero radial limitado a presión constante en la frontera interna, propuesto por van Everdingen y Hurst<sup>9</sup>.

La ecuación general de balance de materia que incorpora el modelo de acuífero mencionado anteriormente , es la siguiente :

$$N_p \left[ \frac{B_o(1 - R_v R_p) + B_g(R_p - R_s)}{(1 - R_v R_p)} \right] + W_p B_w =$$

$$N_{foi} \left[ \frac{B_o - B_{oi} + B_g(R_w - R_s) - R_v(B_{oi} R_s - B_o R_{si})}{(1 - R_v R_p)} + B_{oi} c_{t_a} \Delta \bar{p} \right] \dots \dots \dots A.1$$

$$+ C_{VEH} \sum_{j=1}^{n-1} \Delta p_j q_D(t_{Dn} - t_{Dj})$$

donde

$$t_D = K_{tr} t \dots \dots \dots A.2$$

$$q_D = \left\{ \frac{r_D^2 - 1}{2} - 2 \sum_{l=1}^7 \frac{e^{-\alpha_l^2 t_D} J_0^2(\alpha_l r_D)}{\alpha_l^2 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\} \dots \dots \dots A.3$$

donde se han considerado siete términos en la sumatoria debido a que el valor calculado es similar al que se obtiene al agregar más términos.

El lado izquierdo de la Ec. A.1 representa la producción acumulada de fluidos a condiciones de yacimiento ( $RW$ ), el primer término del lado derecho representa el producto del volumen original de aceite ( $N_{joi}$ ) y la expansión del sistema roca - fluidos ( $U/E$ ), el segundo término la entrada de agua  $W_e$ , la cual es función de  $r_D$ ,  $K_{rp}$  y  $C_{IEH}$ ; entonces de acuerdo con esta simbología, la Ec. A.1 puede escribirse:

$$RW = (U/E) N_{joi} + f(r_D, K_{rp}, C_{IEH}) \dots\dots\dots A.4$$

Considerando al volumen original de aceite y los parámetros que intervienen en el modelo de entrada de agua como incógnitas, se pueden listar los parámetros a optimizarse siguientes:

$$x_1 = N_{joi} \dots\dots\dots A.5$$

$$x_2 = r_D \dots\dots\dots A.6$$

$$x_3 = K_{rp} \dots\dots\dots A.7$$

$$x_4 = C_{IEH} \dots\dots\dots A.8$$

Entonces, la Ec. A.4 puede expresarse:

$$RW = (U/E) x_1 + f(x_2, x_3, x_4) \dots\dots\dots A.9$$

Si se optimiza a la Ec. A.9 con base en las producciones acumuladas de fluidos ( $RW$ ), entonces el conjunto óptimo de  $x_j$ ,  $j = 1,2,3,4$ , se obtiene al minimizar la función E siguiente:



$$E = \sum_{i=1}^n \left[ RW_{oi} - (UE_i x_1 + f(x_2, x_3, x_4)) \right]^2 \quad \text{A.10}$$

ó

$$E = \sum_{i=1}^n (RW_{oi} - RW_{ci})^2 \quad \text{A.11}$$

en donde  $RW_{oi}$  representa la datos de producción observados ,  $RW_{ci}$  los datos de producción calculados , y  $n$  el número de observaciones.

Se requiere que la sumatoria de la diferencia al cuadrado entre los datos observados y los datos calculados sea mínima ; entonces :

$$\frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_j} = 0 \quad , j=1,2,3,4 \quad \text{A.12}$$

ó

$$\frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_j} = F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_{oi} - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_j} = 0 \quad , j=1,2,3,4 \quad \text{A.13}$$

Puesto que  $f(x_2, x_3, x_4)$  , implícita en la  $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es no-lineal , se debe emplear un método de solución de ecuaciones para este tipo de ecuaciones ; en este trabajo se usa el método de Newton - Raphson para resolver la función descrita por esta ecuación . Se tienen cuatro ecuaciones no lineales definidas en  $F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  y cuatro incógnitas  $x_j, j = 1,2,3,4$  , por lo tanto expandemos la función en una Serie de Taylor truncada :

$$\left[ \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right]_j^{u-1} = \left[ \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right]_j^u + \sum_{k=1}^4 \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_k} \left( \frac{\partial E(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \right) \right]_j^u \delta \hat{x}_k^u = 0 \quad \text{A.14}$$

ó

$$F_j^{u-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4) + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_j} \delta \hat{x}_k^u = 0 \quad j=1,2,3,4 \quad \text{A.15}$$

donde  $\delta \hat{x}_k^u = (x_k^{u-1} - x_k^u)$  ,  $k=1,2,3,4$  .

Para encontrar la aproximación siguiente , que corresponde a  $x_k^{u-1}$  ,  $k=1,2,3,4$  , la Ec. A.15 se iguala a cero , obteniéndose la expresión siguiente :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \hat{\alpha}_k} \delta \hat{x}_k^u = -F_j^u(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad j=1,2,3,4 \quad \text{A.16}$$

Escribiendo esta expresión anterior en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{\alpha}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{\alpha}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{\alpha}_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{\alpha}_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \hat{\alpha}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{\alpha}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{\alpha}_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{\alpha}_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \hat{\alpha}_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \hat{\alpha}_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \hat{\alpha}_3} & \frac{\partial F_3}{\partial \hat{\alpha}_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \hat{\alpha}_1} & \frac{\partial F_4}{\partial \hat{\alpha}_2} & \frac{\partial F_4}{\partial \hat{\alpha}_3} & \frac{\partial F_4}{\partial \hat{\alpha}_4} \end{bmatrix}^u \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1 \\ \delta \hat{x}_2 \\ \delta \hat{x}_3 \\ \delta \hat{x}_4 \end{bmatrix}^{u-1} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^u \quad \text{A.17}$$

en donde :

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_m - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{A.18}$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_m - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{A.19}$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_m - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{A.20}$$

$$F_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 \sum_{i=1}^n (RW_m - RW_{ci}) \frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_4} = 0 \quad \text{A.21}$$

puesto que  $RW_{ci}$  en su forma completa es :

$$RW_{ci} = (UE)_i N_{joi} + C_{VEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j q_D (I_{D_n} - I_{D_j}) \quad \text{A.22}$$

entonces :

$$\frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_1} = \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} = (UE)_i \quad \text{A.23}$$

$$\frac{\partial RW_{ci}}{\partial x_2} = \frac{\partial RW_{ci}}{\partial p_D} = C_{VEH} \sum_{l=1}^7 \Delta p_l \left\{ \left( \frac{\partial q_D}{\partial p_D} \right)_{a_l} - \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_l} \right)_{r_n} \left[ \frac{\left( \frac{\partial \delta}{\partial p_D} \right)_{a_l}}{\left( \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_l} \right)_{r_n}} \right] \right\} \quad \text{A.24}$$

donde :

$$\left(\frac{\partial q_D}{\partial r_D}\right)_{\alpha_i} = r_D - 4 \sum_{l=1}^7 \left\{ \frac{J_0^2(\alpha_l) J_1(\alpha_l r_D) \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] e^{-\alpha_l^2 r_D}}{\alpha_l \left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]^2} \right\} \quad \text{A.25}$$

$$\left(\frac{\partial q_D}{\partial \alpha_l}\right)_{r_D} = 4 \sum_{l=1}^7 \left\{ \frac{J_1^2(\alpha_l r_D) e^{-\alpha_l^2 r_D}}{\alpha_l^2 \left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]} \left[ \frac{(\alpha_l^2 r_D)}{\alpha_l} - \frac{J_0^2(\alpha_l)}{\left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]} \right] \right\} \quad \text{A.26}$$

$$\left. \frac{r_D \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{(\alpha_l r_D)} \right]}{J_1(\alpha_l r_D)} + \frac{J_1(\alpha_l)}{J_0(\alpha_l)} \right\}$$

$$S = J_1(\alpha_l r_D) Y_0(\alpha_l) - Y_1(\alpha_l r_D) J_0(\alpha_l) = 0 \quad \text{A.27}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r_D}\right)_{\alpha_l} = \alpha_l Y_0(\alpha_l) \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] - \alpha_l J_0(\alpha_l) \left[ Y_0(\alpha_l r_D) - \frac{Y_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] \quad \text{A.28}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_l}\right)_{r_D} = r_D Y_0(\alpha_l) \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] - J_1(\alpha_l r_D) Y_1 \alpha_l + Y_1(\alpha_l r_D) J_1 \alpha_l \quad \text{A.29}$$

$$- r_D J_0(\alpha_l) \left[ Y_0(\alpha_l r_D) - \frac{Y_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right]$$

$$\left(\frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_3}\right) = \left(\frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{iD}}\right) = C_{iVEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \rho_j \left\{ 2 \sum_{l=1}^7 \frac{J_l^2(\alpha_l r_D) e^{-\alpha_l^2 t_D}}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\} \quad \text{A.30}$$

$$\left(\frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_4}\right) = \left(\frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_{iEH}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \rho_j \left\{ \frac{r_D^2 - 1}{2} - 2 \sum_{l=1}^7 \frac{J_l^2(\alpha_l r_D) e^{-\alpha_l^2 t_D}}{\alpha_l^2 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\} \quad \text{A.31}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial N_{joi}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{oi} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial N_{joi}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_D} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{oi} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_D} \right) \right] = 0 \quad \text{A.33}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial K_{iD}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{oi} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial K_{iD}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{iD}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_4} = \frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_{iEH}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{oi} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial \alpha_{iEH}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_{iEH}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial N_{joi}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) = 0 \quad \text{A.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) = 0 \quad \text{A.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{K}_{I_p}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \mathcal{N}_{for}} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.38}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \mathcal{N}_{for}} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \mathcal{N}_{for}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_m - RW_a) \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{for}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) - \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \mathcal{N}_{for}} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.40}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_D} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_m - RW_a) \frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) - \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \mathcal{K}_{I_p}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_m - RW_a) \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}_{I_p}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) - \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \mathcal{K}_{I_p}} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.42}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_4} = \frac{\partial \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_{VEH}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_m - RW_a) \frac{\partial}{\partial \alpha_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) - \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_{VEH}} \right) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.43}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{for}} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial \alpha_D} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A.44}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial RW_a}{\partial r_D} \right) &= C_{VEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \left\{ \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{u_i} \right] - \left[ \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial r_D} \right)_{a_i}}{\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D}} \right] \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} - \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial r_D} \right)_{u_i}}{\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D}} \right] \right\}_{u_i} \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{a_i} \right] - \left[ \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial r_D} \right)_{a_i}}{\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D}} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} - \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial r_D} \right)_{a_i}}{\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D}} \right] \right\}_{r_D} \left[ \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial r_D} \right)_{u_i}}{\left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D}} \right] \end{aligned}$$

A.45

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{u_i} \right] &= 1 - 4 \sum_{i=1}^7 \frac{J_0^2(\alpha_i) e^{-\alpha_i^2 r_D}}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \left\{ \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right]^2 \left[ 1 + \frac{4J_1^2(\alpha_i r_D)}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \right] \right. \\ &\left. + J_1^2(\alpha_i r_D) \left[ \frac{1}{(\alpha_i r_D)^2} - 1 \right] - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{(\alpha_i r_D)} \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right] \right\} \end{aligned}$$

A.46

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} \right]_{a_i} = 4 \sum_{i=1}^7 \frac{e^{-\alpha_i^2 r_D}}{\alpha_i^2} \left\{ \frac{2J_1(\alpha_i r_D)(\alpha_i^2 r_D + 1) \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right]}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \left[ 1 + \frac{J_1^2(\alpha_i r_D)}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \right] \right\}$$

$$\frac{J_0^2(\alpha_i)}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]^2} \left[ \frac{J_1^2(\alpha_i r_D)}{(\alpha_i r_D)} + (\alpha_i r_D) \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right]^2 \left[ 1 + \frac{4J_1^2(\alpha_i r_D)}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \right] - (\alpha_i r_D) J_1^2(\alpha_i r_D) \right] \quad \text{A.47}$$

$$\frac{2\alpha_i J_1(\alpha_i r_D) J_1(\alpha_i) J_0(\alpha_i) \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right]}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]^2} \left[ 1 + \frac{2J_1^2(\alpha_i r_D)}{[J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D)]} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \frac{\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{a_1}}{\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D}} \right] = \frac{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{a_1} \right]_{a_1} - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{a_1} \right] \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]_{a_1}}{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]^2} \quad \text{A.48}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{a_1} \right]_{a_1} &= \left\{ \left[ 1 - (\alpha_1 r_D)^2 \right] \left[ \frac{Y_0(\alpha_1) J_1(\alpha_1 r_D)}{r_D^2} - \frac{J_0(\alpha_1) Y_1(\alpha_1 r_D)}{r_D^2} \right] - \frac{\alpha_1 Y_0(\alpha_1)}{r_D} \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_1 J_0(\alpha_1)}{r_D} \left[ Y_0(\alpha_1 r_D) - \frac{Y_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{A.49}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]_{a_1} &= \left\{ \left[ 1 - (\alpha_1 r_D)^2 \right] \left[ \frac{Y_0(\alpha_1) J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} - \frac{J_0(\alpha_1) Y_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D^2} \right] - \alpha_1 Y_1(\alpha_1) \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_1 J_1(\alpha_1) \left[ Y_0(\alpha_1 r_D) - \frac{Y_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{A.50}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{a_1} \right]_{r_D} &= -4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_l^2 t}}{\alpha_l \left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]^2} \left\{ \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right]^2 \left[ r_D J_0^2(\alpha_l) + \frac{4 r_D J_1^2(\alpha_l r_D) J_0^2(\alpha_l)}{\left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]} \right] \right. \\ &\quad \left. + J_1(\alpha_1 r_D) J_0(\alpha_l) \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \left[ \frac{4 J_1(\alpha_1 r_D) J_0^2(\alpha_l)}{\left[ J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D) \right]} - \frac{2 J_0(\alpha_l)}{\alpha_l} - 2 J_1(\alpha_l) - 2 \alpha_1 r_D J_0(\alpha_l) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{J_1^2(\alpha_1 r_D) J_0^2(\alpha_l)}{\alpha_1^2 r_D} \left[ 1 - (\alpha_1 r_D)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{A.51}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial y_D}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right] &= 4 \sum_{l=1}^{\infty} \left\langle \frac{(\alpha_l^2 l_D + 1) J_1(\alpha_l r_D) e^{-\alpha_l^2 l_D}}{\alpha_l^4 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\rangle \left\{ 2r_D \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] \left[ 1 + \frac{J_1^2(\alpha_l r_D)}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha_l l_D J_1(\alpha_l r_D) \left[ 1 + \frac{2}{\alpha_l^2 l_D} \right] + \frac{2J_1(\alpha_l r_D) J_1(\alpha_l) J_0(\alpha_l)}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} + \frac{2\alpha_l l_D J_1(\alpha_l r_D)}{(\alpha_l^2 l_D + 1)} \right\} \\
&\quad - \frac{J_1(\alpha_l r_D) J_0^2(\alpha_l) e^{-\alpha_l^2 l_D}}{\alpha_l^2 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]^2} \left\{ \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right] \left[ \frac{4r_D J_1(\alpha_l) J_0(\alpha_l)}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} - \frac{2r_D}{\alpha_l} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2r_D J_1(\alpha_l)}{J_0(\alpha_l)} - 2r_D \alpha_l l_D \right] + \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right]^2 \left[ \frac{4r_D^2 J_1(\alpha_l r_D)}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} - \frac{r_D^2}{J_1(\alpha_l r_D)} \right] \right\} \\
&\quad - \frac{J_1^2(\alpha_l r_D) J_0(\alpha_l) e^{-\alpha_l^2 l_D}}{\alpha_l^2 [J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]^2} \left\{ \frac{4J_1(\alpha_l) J_0(\alpha_l)}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} + \frac{4r_D J_1(\alpha_l r_D) \left[ J_0(\alpha_l r_D) - \frac{J_1(\alpha_l r_D)}{\alpha_l r_D} \right]}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\} \\
&\quad - \left. \frac{2}{\alpha_1} - \frac{J_1(\alpha_1)}{J_0(\alpha_1)} - 2\alpha_1 l_D + \frac{2r_D \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right]}{J_1(\alpha_1 r_D)} + \frac{\left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right]}{J_1(\alpha_1)} \right\}
\end{aligned}$$

A.52

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1}}{\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D}} \right]_{r_D} = \frac{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1} \right]_{r_D} - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]_{r_D}}{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]^2}$$

A.53

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1} \right]_{r_p} = \alpha_1 r_D \left\{ \left[ J_0(\alpha_1) Y_1(\alpha_1 r_D) - Y_0(\alpha_1) J_1(\alpha_1 r_D) \right] - \frac{Y_1(\alpha_1)}{r_D} \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \right. \\ \left. + \frac{J_1(\alpha_1)}{r_D} \left[ Y_0(\alpha_1 r_D) - \frac{Y_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] + \frac{1}{(\alpha_1 r_D)^2} \left[ Y_0(\alpha_1) J_1(\alpha_1 r_D) - J_0(\alpha_1) Y_1(\alpha_1 r_D) \right] \right\}$$

A.54

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right]_{r_p} = \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha_1^2} - r_D^2 \right] \left[ Y_0(\alpha_1) J_1(\alpha_1 r_D) - J_0(\alpha_1) Y_1(\alpha_1 r_D) \right] \right. \\ \left. + \left[ Y_0(\alpha_1 r_D) - \frac{Y_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \left[ \frac{r_D J_0(\alpha_1)}{\alpha_1} + 2r_D J_1(\alpha_1) \right] \right. \\ \left. - \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] \left[ \frac{r_D Y_0(\alpha_1)}{\alpha_1} + 2r_D Y_1(\alpha_1) \right] \right. \\ \left. + Y_1(\alpha_1 r_D) \left[ J_0(\alpha_1) - \frac{J_1(\alpha_1)}{\alpha_1} \right] \right\}$$

A.55

$$\frac{\partial}{\partial K_{1p}} \left( \frac{\partial RW_w}{\partial r_D} \right) = C_{TEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \left\{ \frac{\partial}{\partial K_{1p}} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1} \right] - \left[ \frac{\left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1}}{\left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_p}} \right] \frac{\partial}{\partial K_{1p}} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial \alpha_1} \right)_{r_p} \right] \right\}$$

A.56

$$\frac{\partial}{\partial K_{1D}} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \right)_{\alpha_1} \right] = 4 \sum_{i=1}^7 \left\{ \frac{J_1(\alpha_1 r_D) J_0^2(\alpha_1) \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right] e^{-\alpha_1^2 t_D} (\alpha_1 t_D)}{[J_0^2(\alpha_1) - J_1^2(\alpha_1 r_D)]^2} \right\} \dots\dots\dots \text{A.57}$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{1D}} \left[ \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_1} \right)_{r_D} \right] = 4 \sum_{i=1}^7 \left\{ \frac{J_1^2(\alpha_1 r_D) e^{-\alpha_1^2 t_D}}{\alpha_1 [J_0^2(\alpha_1) - J_1^2(\alpha_1 r_D)]} \left[ 2 - \alpha_1^2 t_D + \frac{\alpha_1 J_0^2(\alpha_1)}{[J_0^2(\alpha_1) - J_1^2(\alpha_1 r_D)]} \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{r_D \left[ J_0(\alpha_1 r_D) - \frac{J_1(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1 r_D} \right]}{J_1(\alpha_1 r_D)} + \frac{J_1(\alpha_1)}{J_0(\alpha_1)} \right] \right\} \dots\dots\dots \text{A.58}$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial r_D} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \frac{\partial q_D}{\partial r_D} \dots\dots\dots \text{A.59}$$

$$\frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial N_{joi}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{in} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial N_{joi}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{joi}} \right) \right] = 0 \dots\dots\dots \text{A.60}$$

$$\frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial r_D} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{in} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial r_D} \right) \right] = 0 \dots\dots\dots \text{A.61}$$

$$\frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial K_{1D}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{in} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial K_{1D}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{1D}} \right) \right] = 0 \dots\dots\dots \text{A.62}$$

$$\frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} = \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_{VEH}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{\alpha_i} - RW_{\alpha_i}) \frac{\partial}{\partial \alpha_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_{\alpha_i}}{\partial K_{i_p}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{\alpha_i}}{\partial K_{i_p}} \right) \left( \frac{\partial RW_{\alpha_i}}{\partial \alpha_{VEH}} \right) \right] = 0$$

..... A.63

$$\frac{\partial}{\partial N_{j_{ei}}} \left( \frac{\partial RW_{\alpha_i}}{\partial K_{i_p}} \right) = 0$$

..... A.64

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_{\alpha_i}}{\partial K_{i_p}} \right) = C_{VEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \varphi_j \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial K_{i_p}} \right)_{\alpha_i} \right] - \frac{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_D} \right)_{\alpha_i} \right]}{\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_i} \right)_{r_D} \right]} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial K_{i_p}} \right)_{r_D} \right] \right\}$$

..... A.65

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial K_{i_p}} \right)_{\alpha_i} \right] = 4 \sum_{i=1}^7 \left\{ \frac{J_1(\alpha_i r_D) \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right] (\alpha_i r_D) e^{-\alpha_i^2 r_D}}{\left[ J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D) \right]^2} \right.$$

$$\left. \left[ \left[ J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D) \right] - J_1^2(\alpha_i r_D) \right] \right\}$$

..... A.66

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[ \left( \frac{\partial q_D}{\partial K_{i_p}} \right)_{r_D} \right] = 4 \sum_{i=1}^7 \left\langle \frac{J_1(\alpha_i r_D) e^{-\alpha_i^2 r_D}}{\left[ J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D) \right]^2} \left\{ r_D \left[ J_0(\alpha_i r_D) - \frac{J_1(\alpha_i r_D)}{\alpha_i r_D} \right] \right. \right.$$

$$\left. \left[ J_1^2(\alpha_i r_D) + \left[ J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D) \right] \right] - J_1(\alpha_i r_D) J_1(\alpha_i) J_0(\alpha_i) - J_1(\alpha_i r_D) (\alpha_i r_D) \left[ J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i r_D) \right] \right\}$$

..... A.67

$$\frac{\partial}{\partial K_{i_D}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{i_D}} \right) = C_{VEH} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \left\langle -2 \sum_{l=1}^7 \left\{ \frac{J_1^2(\alpha_l r_D) e^{-\alpha_l^2 i_D} (\alpha_l l)^2}{[J_0^2(\alpha_l) - J_1^2(\alpha_l r_D)]} \right\} \right\rangle \quad \text{A.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{i_D}} \right) = 0 \quad \text{A.69}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial N_{j_{in}}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{ci} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial N_{j_{in}}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial N_{j_{in}}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.70}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_D} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{ci} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_D} \right) \right] = 0 \quad \text{A.71}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial K_{i_D}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{ci} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial K_{i_D}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial K_{i_D}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.72}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha_4} = \frac{\partial \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial \alpha'_{VEH}} = -2 \sum_{i=1}^n \left[ (RW_{ci} - RW_{ci}) \frac{\partial}{\partial \alpha'_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) - \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) \right] = 0 \quad \text{A.73}$$

$$\frac{\partial}{\partial N_{j_{in}}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) = 0 \quad \text{A.74}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_D} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha'_{VEH}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta p_j \frac{\partial \alpha_D}{\partial \alpha_D} \quad \text{A.75}$$

$$\frac{\partial}{\partial K_{t_p}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_{VEH}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \varphi_j \frac{\partial q_D}{\partial K_{t_p}} \quad \text{A.76}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{VEH}} \left( \frac{\partial RW_{ci}}{\partial \alpha_{VEH}} \right) = 0 \quad \text{A.77}$$

## Apéndice B

Programa de cómputo empleado para estimar por medio del método iterativo de Newton - Raphson el volumen original de yacimientos de aceite volátil y los parámetros del acuífero asociado ; a continuación se presenta el listado del programa en lenguaje de programación FORTRAN 77.

```
PROGRAM MBENRM
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION T(0:20),P(0:20), PNP(0:20), WP(0:20), GP(0:20)
```

```
DIMENSION PPVT(12),BO(12),BW(12),BG(12),RS(12),RV(12)
```

```
DIMENSION BOC(12),BWC(12),BGC(12),RSC(12),RVC(12)
```

```
DIMENSION XS(4),DP(20),QD(20),QDX2(20),QDX3(20)
```

```
DIMENSION DX(4),UE(50),RWO(10),RWC(10)
```

```
DIMENSION A(4,4),INDX(50),B(4),ALF(10),AC(3,3),BC(3)
```

```
DIMENSION EX1(10),EX2(10),EX3(10),EX4(10),DRWX1(10),DRWX2(10)
```

```
DIMENSION DRWX3(10),DRWX4(10),DX2X2M(10),DX2X3M(10),DX2X4M(10)
```

```
DIMENSION DX3X2M(10),DX3X3M(10),DX3X4M(10),DX4X2M(10),DX4X3M(10)
```

```
DIMENSION DIFA(10),XSI(4)
```

```
CHARACTER TIT*80
```

```
C
```

```
OPEN (UNIT=5,FILE='ARCHEBM.DAT',STATUS='OLD')
```

```
OPEN (UNIT=7,FILE='ALFAS.DAT',STATUS='OLD')
```

```
OPEN (UNIT=6,FILE='EBMSAL.DAT',STATUS='UNKNOWN')
```

```
C
```

```
WRITE(6,*)'#####'
```

```
WRITE(6,*)'### CALCULO DEL VOLUMEN ORIGINAL DE ACEITE Y LOS ###'
```

```
WRITE(6,*)'### PARAMETROS DEL ACUIFERO ASOCIADO EN YACIMIENTOS###'
```

```
WRITE(6,*)'### DE ACEITE VOLATIL CON ENTRADA NATURAL DE AGUA ###'
```

```
WRITE(6,*)'#####'
```

```
WRITE(6,*)
```

```
C
```

```
C
```

```
'#####'
```

```
C
```

```
'## LECTURA DE DATOS DE LAS CARACT. PART. DEL SIST. YAC-ACUF.##'
```

```
C
```

```
'#####'
```

```
READ(5,100) TIT
```

```
READ(5,100) TIT
```

```
READ(5,102) TY
```

```
READ(5,102) PINI
```

```
READ(5,102) PB
```

```
READ(5,102) BOI
```

```
READ(5,102) RSI
```

```
READ(5,104) XS(1)
```

```
READ(5,104) CF
```

```
READ(5,104) CW
```

```
READ(5,102) SWI
```

```
READ(5,102) PERMAC
```

```
READ(5,102) PORAC
```

```
READ(5,102) ESPAC
```

```
READ(5,102) VISAC
```

```

READ(5.102) RO
READ(5.104) RA
READ(5.102) ANGLA
READ(5.100) TIT
C #####
C ## LECTURA DE LA TABLA DE DATOS PVT      ##
C #####
READ(5.106) NPVT
READ(5.100) TIT
READ(5.100) TIT
READ(5.100) TIT
DO 202 I=1,NPVT
  READ(5.*) PPVT(I).BO(I).BG(I).RS(I).RV(I)
202 CONTINUE
READ(5.100) TIT
C #####
C ## LECTURA DE LA TABLA DE DATOS DE LA PRES-PRODUC.##
C #####
READ(5.106) ND
READ(5.100) TIT
READ(5.100) TIT
READ(5.100) TIT
DO 204 I=0,ND
  READ(5.*) T(I).P(I).PNP(I).GP(I).WP(I)
204 CONTINUE
C
100 FORMAT(A80)
102 FORMAT(49X,F10.0)
104 FORMAT(49X,E12.3)
106 FORMAT(49X,I5)
C
C #####
C ## CALCULO DEL REL. DE LA DIM. RADIAL RD      ##
C #####
C
XS(2)=RA/RO
C
C #####
C ## CALCULO CTE. DE CONV. DEL TIEMPO ADIM. KTD ##
C #####
C
XX3A=(2.309*PERMAC)
XX3B=PORAC*VISAC*(CF+CW)*(RO**2.D0)
XS(3)=XX3A/XX3B
C
C #####
C ## CALCULO CTE. DE ENTRADA DE AGUA DE VEH CVEH ##
C #####
C
XS(4)=1.119*(ANGLA/360)*PORAC*(CF+CW)*ESPAC*(RO**2.D0)
C
WRITE(*.*)'VARIABLES INICIALES'
WRITE(*.*)XS(1).XS(2).XS(3).XS(4)

```





```

C  $$$$  COMIENZA EL PROCESO ITERATIVO  $$$$
C  $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
C
WRITE(*.*)'MANTENGO FIJA N SI=1 NO=0'
WRITE(*.*)
READ(*.*) NCON
3000 DO 70 KK=1,100
WRITE(*.*)'ITERACION'.KK
TER=XS(2)
CALL ALFAS(TER,ALF)
C DO 131 I=1,7
C WRITE(*.*)'ALF'.I,TER,ALF(I)
C131 CONTINUE
C
C #####
C ## CALCULO DE LA Fi(X1.X2.X3.X4) ##
C #####
C
SUF1 = 0.D0
SUF2 = 0.D0
SUF3 = 0.D0
SUF4 = 0.D0
C
DO 6 I=1,ND
SUMA = 0.D0
SUMB = 0.D0
SUMC = 0.D0
IH = 0
DO 5 K=1,I
IF( K .LT. 3 )THEN
DP(K) = (P(0) - P(K))/2.D0
ELSE
DP(K) = (P(K-2) - P(K))/2.D0
END IF
L = I - IH
TD = XS(3)*T(L)
RD = XS(2)
TH=T(L)
CALL CQD(RD,TD,ALF,WD)
CALL CX2(RD,TD,ALF,CFX2)
CALL CX3(RD,TD,TH,ALF,CFX3)
QD(L)=WD
QDX2(L)=CFX2
QDX3(L)=CFX3
SUMA = SUMA + (DP(K) * QD(L))
SUMB = SUMB + (DP(K) * QDX2(L))
SUMC = SUMC + (DP(K) * QDX3(L))
IH = IH + 1
5 CONTINUE
C
RWC(I) = (UE(I)*XS(1)) + (XS(4)*SUMA)
DIFA(I) = RWO(I)-RWC(I)
C

```

DRWX1(I)=UE(I)  
DRWX2(I)=XS(4)\*SUMB  
DRWX3(I)=XS(4)\*SUMC  
DRWX4(I)=SUMA

C

EX1(I)=DIFA(I)\*DRWX1(I)  
SUF1=SUF1+EX1(I)  
EX2(I)=DIFA(I)\*DRWX2(I)  
SUF2=SUF2 + EX2(I)  
EX3(I)=DIFA(I)\*DRWX3(I)  
SUF3=SUF3+EX3(I)  
EX4(I)=DIFA(I)\*DRWX4(I)  
SUF4=SUF4+EX4(I)

6

CONTINUE

C

C

FUNCIONES DE RESIDUOS YA CON EL SIGNO MENOS

C

B(1)=2.D0\*SUF1  
B(2)=2.D0\*SUF2  
B(3)=2.D0\*SUF3  
B(4)=2.D0\*SUF4

C

WRITE(6,\*)'FUNCION DE RESIDUOS'

C

WRITE(6,82)(B(J),J=1,4)

C

C

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE F1 CON RESPECTO A X1.X2.X3.X4

SRIC1=0.D0  
SRIC2=0.D0  
SRIC3=0.D0  
SRIC4=0.D0

C

DO 8 I=1,ND

C

SRIC1=SRIC1+(DRWX1(I)\*DRWX1(I))  
SRIC2=SRIC2+(DRWX1(I)\*DRWX2(I))  
SRIC3=SRIC3+(DRWX1(I)\*DRWX3(I))  
SRIC4=SRIC4+(DRWX1(I)\*DRWX4(I))

C

8

CONTINUE

C

A(1,1)=2.D0\*SRIC1  
A(1,2)=2.D0\*SRIC2  
A(1,3)=2.D0\*SRIC3  
A(1,4)=2.D0\*SRIC4

C

C

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE F2 CON RESPECTO A X1.X2.X3.X4

C

SR2C1=0.D0  
SR2C2=0.D0  
SR2C3=0.D0  
SR2C4=0.D0

C

DO 10 I=1,ND

C

SX2X2M=0.D0  
SX2X3M=0.D0  
SX2X4M=0.D0

C

IH = 0  
DO 9 K=1,I  
L = I - IH  
TD = XS(3)\*T(L)  
TH=T(L)  
RD=XS(2)

C

CALL CX2CX2(RD,TD,ALF,X2X2M)  
SX2X2M=SX2X2M + (DP(K) \* X2X2M)

C

CALL CX2CX3(RD,TD,TH,ALF,X2X3M)  
SX2X3M = SX2X3M + (DP(K) \* X2X3M)

C

CALL CX2(RD,TD,ALF,X2X4M)  
SX2X4M = SX2X4M + (DP(K) \* X2X4M)

C

IH = IH + 1

9 CONTINUE

C

DX2X2M(I)=(XS(4)\*SX2X2M)

C

DX2X3M(I)=(XS(4)\*SX2X3M)

C

DX2X4M(I)=SX2X4M

C

SR2C1=SR2C1+(-DRWX2(I)\*DRWX1(I))  
SR2C2=SR2C2+(((RWO(I)-RWC(I))\*DX2X2M(I))- (DRWX2(I)\*DRWX2(I)))  
SR2C3=SR2C3+(((RWO(I)-RWC(I))\*DX2X3M(I))- (DRWX2(I)\*DRWX3(I)))  
SR2C4=SR2C4+(((RWO(I)-RWC(I))\*DX2X4M(I))- (DRWX2(I)\*DRWX4(I)))

C

10 CONTINUE

C

A(2,1)=-2.D0\*SR2C1  
A(2,2)=-2.D0\*SR2C2  
A(2,3)=-2.D0\*SR2C3  
A(2,4)=-2.D0\*SR2C4

C

C CALCULO DE LAS DERIVADAS DE F3 CON RESPECTO A X1,X2,X3,X4

C

SR3C1=0.D0  
SR3C2=0.D0  
SR3C3=0.D0  
SR3C4=0.D0

C

DO 12 I=1,ND

C

SX3X2M=0.D0  
SX3X3M=0.D0  
SX3X4M=0.D0

```

C
  IH = 0
  DO 11 K=1,I
  L = I - IH
  TD = XS(3)*T(L)
  TH=T(L)
  RD = XS(2)
C
  CALL CX3CX2(RD,TD,TH,ALF,X3X2M)
  SX3X2M = SX3X2M + (DP(K) * X3X2M)
C
  CALL CX3CX3(RD,TD,TH,ALF,X3X3M)
  SX3X3M = SX3X3M + (DP(K) * X3X3M)
C
  CALL CX3(RD,TD,TH,ALF,X3X4M)
  SX3X4M = SX3X4M + (DP(K) * X3X4M)
C
  IH = IH + 1
11  CONTINUE
C
  DX3X2M(I)=(XS(4)*SX3X2M)
C
  DX3X3M(I)=(XS(4)*SX3X3M)
C
  DX3X4M(I)=SX3X4M
C
  SR3C1=SR3C1+(-DRWX3(I)*DRWX1(I))
  SR3C2=SR3C2+(((RWO(I)-RWC(I))*DX3X2M(I))-(DRWX3(I)*DRWX2(I)))
  SR3C3=SR3C3+(((RWO(I)-RWC(I))*DX3X3M(I))-(DRWX3(I)*DRWX3(I)))
  SR3C4=SR3C4+(((RWO(I)-RWC(I))*DX3X4M(I))-(DRWX3(I)*DRWX4(I)))
C
12  CONTINUE
C
  A(3,1)=-2.D0*SR3C1
  A(3,2)=-2.D0*SR3C2
  A(3,3)=-2.D0*SR3C3
  A(3,4)=-2.D0*SR3C4
C
C   CALCULO DE LAS DERIVADAS DE F4 CON RESPECTO A X1.X2.X3.X4
C
  SR4C1=0.D0
  SR4C2=0.D0
  SR4C3=0.D0
  SR4C4=0.D0
C
  DO 14 I=1,ND
C
  SX4X2M=0.D0
  SX4X3M=0.D0
C
  IH = 0
  DO 13 K=1,I
  L = I - IH

```

```

TD = XS(3)*T(L)
TH=T(L)
RD = XS(2)
CALL CX2(RD,TD,ALF,X4X2M)
SX4X2M = SX4X2M + (DP(K) * X4X2M)
C
CALL CX3(RD,TD,TH,ALF,X4X3M)
SX4X3M = SX4X3M + (DP(K) * X4X3M)
C
IH = IH + 1
13 CONTINUE
C
DX4X2M(I)=SX4X2M
C
DX4X3M(I)=SX4X3M
C
SR4C1=SR4C1+(-DRWX4(I)*DRWX1(I))
SR4C2=SR4C2+(((RWO(I)-RWC(I))*DX4X2M(I))-(DRWX4(I)*DRWX2(I)))
SR4C3=SR4C3+(((RWO(I)-RWC(I))*DX4X3M(I))-(DRWX4(I)*DRWX3(I)))
SR4C4=SR4C4+(-DRWX4(I)*DRWX4(I))
C
14 CONTINUE
C
A(4.1)=-2.D0*SR4C1
A(4.2)=-2.D0*SR4C2
A(4.3)=-2.D0*SR4C3
A(4.4)=-2.D0*SR4C4
C
82 FORMAT (4(IPE14.6))
83 FORMAT (3(IPE14.6))
C
IF (NCON.EQ. 1)THEN
DO 251 J=1.3
DO 252 IK=2.4
AC(J,IK-1)=A(J+1,IK)
252 CONTINUE
251 CONTINUE
DO 253 JI=1.3
BC(JI)=B(JI+1)
253 CONTINUE
N=3
C
C #####
C #### SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES ####
C #### JACOBIANO DE 3 X 3 (MATRIZ DE 3 X 3) ####
C #####
C
CALL LUDCAMPC(AC,N,INDX,D)
CALL LUBKSBC(AC,N,INDX,BC)
DO 631 J=1,N
DX(J+1) = BC(J)
631 CONTINUE
DX(1)=0.D0

```

```

N=4
GOTO 201
END IF
C #####
C #### SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES      ####
C #### JACOBIANO DE 4 X 4 (MATRIZ DE 4 X 4)   ####
C #####
N = 4
CALL LUDCAMP(A.N.INDX.D)
CALL LUBKSB(A.N.INDX.B)
C
DO 63 J=1,N
  DX(J) = B(J)
63 CONTINUE
C
201  KX = 0
  WRITE(*.82)(DX(J),J=1,N)
  WRITE(*.82)5.D-03*XS(1),5.D-03*XS(2),5.D-03*XS(3),5.D-03*XS(4)
  WRITE(6.82)(DX(J),J=1,N)
  WRITE(6.82)5.D-03*XS(1),5.D-03*XS(2),5.D-03*XS(3),5.D-03*XS(4)
C #####
C #### VERIFICA SI SE CUMPLE LA TOLERANCIA   ####
C #####
DO 64 J=1,N
  IF( ABS(DX(J)) .LE. ABS(5.D-03*XS(J)) )THEN
    KX = 1
  ELSE
    KX=0
    GO TO 200
  END IF
64 CONTINUE
200 DO 65 J = 1,N
  XS(J)=XS(J)+DX(J)
65 CONTINUE
C  WRITE(*.*)'NUEVAS XS.....'
  WRITE(*.82)(XS(J),J=1,N)
C  WRITE(6.*)'NUEVAS XS.....'
  WRITE(6.82)(XS(J),J=1,N)
  IF ( XS(1) .LE. 0.D0 )XS(1)=XSI(1)
  IF ( XS(2) .LE. 1.5D0 )XS(2)=XSI(2)
  IF ( XS(3) .LE. 0.D0 )XS(3)=XSI(3)
  IF ( XS(4) .LE. 0.D0 )XS(4)=XSI(4)
  IF( KX .EQ. 1 )GO TO 1000
70 CONTINUE
GOTO 1500
1000 WRITE(*.*)'LA CORRIDA A TERMINADO'
  WRITE(*.82)(XS(J),J=1,N)
  WRITE(*.*)'NUMERO DE ITERACIONES'.KK
  WRITE(*.*)'OK'
  IF (NCON .EQ. 1)THEN
  WRITE(*.*)'CALCULO PARA CUATRO VARIABLES SI=1 .NO=0'
  WRITE(*.*)

```

```

READ(*.*)JAC
  IF (JAC .EQ. 1)THEN
NCON=NCON+1
GOTO 3000
  END IF
  END IF
  GOTO 2500
1500 WRITE(*.*)'ALCANZO NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES'.KK
  WRITE(*.82)(XS(J),J=1,N)
2500 STOP
  END

```

```

C
C #####
C #### INTERPOLAR ALFAS #####
C #####

```

```

SUBROUTINE INTER(X.YP.NPVT.PRF.DNO.DOB)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H.O-Z)
DIMENSION X(50).YP(50)
DO 43 K = 2 . NPVT
  JJ = NPVT - K + 1
  IF (PRF.GE.X(JJ)) GOTO 110
43 CONTINUE
110 DOB = (YP(JJ + 1) - YP(JJ)) / (X(JJ + 1) - X(JJ))
  DNO = YP(JJ) + (PRF - X(JJ)) * DOB
  RETURN
  END

```

```

C
C #####
C #### INTERPOLAR FACT. DE VOL. Y REL. GAS - AC. ####
C #####

```

```

SUBROUTINE INTERFV(X.YP.NPVT.PRF.DNO.DOB)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H.O-Z)
DIMENSION X(50).YP(50)
DO 43 K = 2 . NPVT
  JJ = NPVT - K + 1
  IF (PRF.LE.X(JJ)) GOTO 110
43 CONTINUE
110 DOB = (YP(JJ + 1) - YP(JJ)) / (X(JJ + 1) - X(JJ))
  DNO = YP(JJ) + (PRF - X(JJ)) * DOB
  RETURN
  END

```

```

C
C #####
C ####CALCULA EL GASTO INSTANTANEO ADIMENSIONAL DE AGUA qD ####
C #####

```

```

SUBROUTINE CQD(RD.TD.ALF.WD)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H.O-Z)
DIMENSION ALF(10)
SUM = 0.D0
DO 38 I = 1,7
  REF = ALF(I) * RD
  CALL JIW(REF. AJI)
  AIRDJI = AJI

```



```

TER = ALF(I)
CALL JOW(TER, AJ0)
AIJ0 = AJ0
EE = -(ALF(I)**2.D0)*TD
A1 = AIRDJI**2.D0*DEXP(EE)
A2 = (ALF(I)**2.D0) * ((AIJ0**2.D0) - (AIRDJI**2.D0))
SUM = SUM + (A1 / A2)
38 CONTINUE
WD = (((RD**2.D0)-1.D0)/2.D0)-(2.D0*SUM)
RETURN
END
C #####
C ##### CALCULA DERIV. DE qD CON RESPECTO DE rD #####
C #####
SUBROUTINE CX2(RD,TD,ALF,CFX2)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)
C
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7
TER = ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0 = AJ0
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJI = AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CIJ=(AIJ0**2.D0)-(AIRDJI**2.D0)
EE=-(ALF(I)**2.D0)*TD
A1=((AIJ0**2.D0)*AIRDJI)*DEXP(EE)
A2=(AIRDJ0-(AIRDJI/(ALF(I)*RD)))
A3=(A1*A2)/(ALF(I)*(CIJ**2.D0))
SUM=SUM + A3
39 CONTINUE
C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A RD PARA ALFA=CTE
C
DFRD=RD-(4.D0*SUM)
C
SUM=0.D0
DO 40 I=1,7
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJI=AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF,AY0)
AIRDY0=AY0
CALL YIW(REF,AY1)
AIRDY1=AY1
C
TER=ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)

```

```
AIJ0=AJ0
CALL JIW(TER.AJ1)
AIJ1=AJ1
CALL YOW(TER.AY0)
AIY0=AY0
CALL YIW(TER.AY1)
AIY1=AY1
```

C

```
CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE= -(ALF(I)**2.D0)*TD
B1=(AIRDJ1**2.D0)*DEXP(EE)
B2=(((ALF(I)**2.D0)*TD) + 1.D0)/ALF(I)
B3=(AIJ0**2.D0)/CIJ
B4=(RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))/AIRDJ1
B5=AIJ1/AIJ0
B6=B3*(B4 + B5)
B7=(B1*(B2 - B6))/((ALF(I)**2.D0) * CIJ)
```

C

```
C1=AIY0*ALF(I)*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
C2=AIJ0*ALF(I)*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
C3=C1-C2
```

C

```
D1=-AIRDJ1*AIY1
D2=AIY0*RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
D3=AIRDY1*AIJ1
D4=-AIJ0*RD*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
D5=D1+D2+D3+D4
```

C

```
CD=C3/D5
```

C

```
B8=B7*CD
```

C

```
SUM = SUM + B8
```

40

```
CONTINUE
```

C

```
DERIVADA DE QD CON RESPECTO A ALFA CON RD=CTE
```

```
DFALF=4.D0*SUM
```

C

```
CFX2 = DFRD - DFALF
```

```
RETURN
```

```
END
```

C

C

```
#####
```

C

```
#### CALCULA FUNCIONES BESSEL ORDEN 0 (J0) #####
```

C

```
#####
```

```
SUBROUTINE JOW(X,AJ0)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
SUMB=0.D0
```

```
DO 71 K=0,20
```

```
T3=((-1.D0)**K)*(X/2.D0)**(2.D0*K))
```

```
FK=FACTRL(K)
```

```
T4=T3/(FK*FK)
```

```
SUMB=SUMB+T4
```

71

```
CONTINUE
```

```

    AJ0=SUMB
RETURN
END
C
C #####
C #### CALCULA FUNCIONES BESSEL ORDEN 1 (J1) #####
C #####
SUBROUTINE JIW(X,AJ1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
SUMA=0.D0
DO 70 K=0,20
    T1=(-1.D0)**K*((X/2.D0)**(1.D0+2.D0*K))
    FK=FACTRL(K)
    FK1=FACTRL(K+1)
    T2=T1/(FK*FK1)
    SUMA=SUMA+T2
70  CONTINUE
    AJ1=SUMA
RETURN
END
C
C #####
C #### CALCULA FUNCIONES BESSEL ORDEN 0 (Y0) #####
C #####
SUBROUTINE YOW(X,AY0)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION FMU(20),DENO(20)
PI = DACOS(-1.D0)
DO 72 I=1,20
    SUMB=1.D0
    DO 73 K=1,I
        SUMB=SUMB*(2.D0*K)
73  CONTINUE
    DENO(I)=SUMB**2.D0
72  CONTINUE
    DO 74 I=1,20
SUMC=0.D0
    DO 75 K=1,I
        SUMC=SUMC+(1.D0/K)
75  CONTINUE
    FMU(I)=SUMC
74  CONTINUE
    SUMV=0.D0
    S=1.D0
DO 76 I=1,20
    EE=2.D0*I
    SUMV=SUMV+(S*(((X**EE)/DENO(I))*FMU(I)))
    S=-1.D0*S
76  CONTINUE
    GA=.5772156D0
    CALL JOW(X,AJ0)
    TI=(DLOG(X/2.D0)+GA)*AJ0
    AY0=((2.D0/PI)*TI)+((2.D0/PI)*SUMV)

```

RETURN  
END

C  
C #####  
C #####  
C #####  
C #####

SUBROUTINE YIW(X,AYI)  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
PI = DACOS(-1.D0)

SUMP=0.D0  
DO 77 K=0,20  
T1=(-1.D0)\*\*K  
SUMD=0.D0  
DO 78 KP=1,K  
SUMD=SUMD+(1.0D0/FLOAT(KP))

78 CONTINUE  
KK=1+K  
SUMF=0.D0  
DO 79 J=1,KK  
SUMF=SUMF+(1.D0/FLOAT(J))

79 CONTINUE  
T2=(X/2.D0)\*\*((2.D0\*K)+1.D0)  
FK=FACTRL(K)  
FK1=FACTRL(K+1)  
T3=T2/(FK\*FK1)  
T4=T1\*(SUMD+SUMF)\*T3  
SUMP=SUMP+T4

77 CONTINUE

C  
GA=.5772156D0  
CALL JIW(X,AJ1)  
T5=((2.D0/PI)\*(DLOG(X/2.D0)+GA))\*AJ1  
T6=(1.D0/PI)\*((X/2.D0)\*\*(-1.D0))  
AYI=T5-T6-((1.D0/PI)\*SUMP)  
RETURN  
END

C  
FUNCTION FACTRL(N)  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
DIMENSION A(33)  
DATA NTOP,A(1)/0,1.D0/  
IF (N.LT.0) THEN  
PAUSE 'negative factorial'  
ELSE IF (N.LE.NTOP) THEN  
FACTRL=A(N+1)  
ELSE IF (N.LE.32) THEN  
DO 11 J=NTOP+1,N  
A(J+1)=J\*A(J)  
11 CONTINUE  
NTOP=N  
FACTRL=A(N+1)  
ELSE  
FACTRL=DEXP(GAMMLN(N+1.))

```
ENDIF
RETURN
END
```

```
C
FUNCTION GAMMLN(XX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
REAL *8 COF(6),STP,HALF,ONE,FPF,X,TMP,SER
DATA COF,STP/76.18009173D0,-86.50532033D0,24.01409822D0,
* -1.231739516D0,.120858003D-2,-.536382D-5,2.50662827465D0/
DATA HALF,ONE,FPF/0.5D0,1.0D0,5.5D0/
X=XX-ONE
TMP=X+FPF
TMP=(X+HALF)*LOG(TMP)-TMP
SER=ONE
DO 11 J=1,6
  X=X+ONE
  SER=SER+COF(J)/X
11 CONTINUE
GAMMLN=TMP+LOG(STP*SER)
RETURN
END
```

```
C
C #####
C #### CALCULA DERIV. DE qD CON RESPECTO DE KiD #####
C #####
SUBROUTINE CX3(RD,TD,TH,ALF,CFX3)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)
```

```
C
SUM = 0.D0
DO 60 I=1,7
  TER = ALF(I)
  CALL JOW(TER,AJ0)
  AIJ0 = AJ0
  REF = ALF(I)*RD
  CALL JIW(REF,AJ1)
  AIRDJ1 = AJ1
  CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
  EE = -(ALF(I)**2.D0)*TD
  GGI = (AIRDJ1**2.D0)*DEXP(EE)*TH
  GG2 = (GGI/CIJ)
  SUM = SUM + GG2
60 CONTINUE
C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A K
C
CFX3 = 2.D0*SUM
RETURN
END
```

```
C
C #####
C #### RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 4 X 4 #####
C #####
SUBROUTINE LUBKSB(A,N,INDX,B)
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),INDX(50),B(4)
```

```
C
II=0
DO 50 I=1,N
  LL=INDX(I)
  SUM=B(LL)
  B(LL)=B(I)
  IF (II.NE.0)THEN
    DO 51 J=II,I-1
      SUM=SUM - A(I,J)*B(J)
51  CONTINUE
  ELSE IF (SUM.NE.0.D0) THEN
    II=I
  ENDIF
  B(I)=SUM
50  CONTINUE
DO 52 I=N,I-1
  SUM=B(I)
  IF (I.LT.N) THEN
    DO 53 J=I+1,N
      SUM=SUM - A(I,J)*B(J)
53  CONTINUE
  ENDIF
  B(I)=SUM/A(I,I)
52  CONTINUE
```

```
C
RETURN
END
```

```
C
C #####
C ##### RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 4 X 4 #####
C #####
SUBROUTINE LUDCAMP(A,N,INDX,D)
PARAMETER (NMAX=100,TINY=1.0E-20)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),INDX(50),VV(NMAX)
```

```
C
D=1.0
DO 54 I=1,N
  AAMAX=0.D0
  DO 55 J=1,N
    IF (ABS(A(I,J)).GT.AAMAX) AAMAX=ABS(A(I,J))
55  CONTINUE
  IF (AAMAX.EQ.0.D0) write(*,*) 'Matriz Singular'
  VV(I)=1.D0/AAMAX
54  CONTINUE
DO 56 J=1,N
  IF (J.GT.1) THEN
    DO 57 I=1,J-1
      SUM=A(I,J)
      IF (I.GT.1) THEN
        DO 58 K=1,I-1
```

```

    SUM=SUM-A(I.K)*A(K.J)
58  CONTINUE
    END IF
    A(I,J)=SUM
57  CONTINUE
    END IF
    AAMAX=0.D0
    DO 59 I=J,N
    SUM=A(I,J)
    IF (J.GT.1) THEN
    DO 60 K=I,J-1
    SUM=SUM-A(I.K)*A(K.J)
60  CONTINUE
    END IF
    A(I,J)=SUM
    DUM=VV(I)*ABS(SUM)
    IF (DUM.GE.AAMAX) THEN
    IMAX=I
    AAMAX=DUM
    ENDIF
59  CONTINUE
    IF (J.NE.IMAX) THEN
    DO 61 K=I,N
    DUM=A(IMAX,K)
    A(IMAX,K)=A(J,K)
    A(J,K)=DUM
61  CONTINUE
    D=-D
    VV(IMAX)=VV(J)
    ENDIF
    INDX(J)=IMAX
    IF (A(J,J).EQ.0.D0)A(J,J)=TINY
    IF (J.NE.N) THEN
    DUM=1.D0/A(J,J)
    DO 62 I=J+1,N
    A(I,J)=A(I,J)*DUM
62  CONTINUE
    ENDIF
56  CONTINUE
    RETURN
    END

```

```

C
C #####
C #### CÁLCULA EL VALOR DE LAS ALFAS EN FUNCION DE rD ####
C #####
SUBROUTINE ALFAS(RD,ALF)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION RDT(20),AF1(20),AF2(20),AF3(20),AF4(20),AF5(20),AF6(20)
DIMENSION AF7(20)
DIMENSION ALF(10)
C
    REWIND(7)
    READ(7,*)NA

```

```

DO 111 I=1,NA
READ(7,*)RDT(I),AF1(I),AF2(I),AF3(I),AF4(I),AF5(I),AF6(I),AF7(I)
111 CONTINUE
TER=RD
CALL INTER(RDT, AF1, NA, TER, AF1I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF2, NA, TER, AF2I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF3, NA, TER, AF3I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF4, NA, TER, AF4I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF5, NA, TER, AF5I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF6, NA, TER, AF6I,DALF)
CALL INTER(RDT, AF7, NA, TER, AF7I,DALF)
ALF(1)=AF1I
ALF(2)=AF2I
ALF(3)=AF3I
ALF(4)=AF4I
ALF(5)=AF5I
ALF(6)=AF6I
ALF(7)=AF7I
RETURN
END

```

```

C
C #####
C ##### RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 3 X 3 #####
C #####

```

```

SUBROUTINE LUBKSBC(AC,N,INDX,BC)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION AC(3,3),INDX(50),BC(3)

```

```

C
  II=0
  DO 50 I=1,N
    LL=INDX(I)
    SUM=BC(LL)
    BC(LL)=BC(I)
    IF (II.NE.0)THEN
      DO 51 J=II,I-1
        SUM=SUM - AC(I,J)*BC(J)
51    CONTINUE
      ELSE IF (SUM.NE.0,D0) THEN
        II=I
      ENDIF
    BC(I)=SUM
50  CONTINUE
    DO 52 I=N,I,-1
      SUM=BC(I)
      IF (I.LT.N) THEN
        DO 53 J=I+1,N
          SUM=SUM - AC(I,J)*BC(J)
53    CONTINUE
        ENDIF
      BC(I)=SUM/AC(I,I)
52  CONTINUE
C
RETURN

```



```

END
C
C #####
C #### RESUELVE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 3 X 3 ####
C #####
SUBROUTINE LUDCAMPC(AC,N,INDX,D)
PARAMETER (NMAX=100,TINY=1.0E-20)
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION AC(3,3),INDX(50),VV(NMAX)
C
D=1.0
DO 54 I=1,N
AAMAX=0.D0
DO 55 J=1,N
IF (ABS(AC(I,J)).GT.AAMAX) AAMAX=ABS(AC(I,J))
55 CONTINUE
IF (AAMAX.EQ.0.D0) write(*,*) 'Matriz Singular'
VV(I)=1.D0/AAMAX
54 CONTINUE
DO 56 J=1,N
IF (J.GT.1) THEN
DO 57 I=1,J-1
SUM=AC(I,J)
IF (I.GT.1) THEN
DO 58 K=1,I-1
SUM=SUM-AC(I,K)*AC(K,J)
58 CONTINUE
END IF
AC(I,J)=SUM
57 CONTINUE
END IF
AAMAX=0.D0
DO 59 I=J,N
SUM=AC(I,J)
IF (J.GT.1) THEN
DO 60 K=1,J-1
SUM=SUM-AC(I,K)*AC(K,J)
60 CONTINUE
END IF
AC(I,J)=SUM
DUM=VV(I)*ABS(SUM)
IF (DUM.GE.AAMAX) THEN
IMAX=I
AAMAX=DUM
ENDIF
59 CONTINUE
IF (J.NE.IMAX) THEN
DO 61 K=1,N
DUM=AC(IMAX,K)
AC(IMAX,K)=AC(J,K)
AC(J,K)=DUM
61 CONTINUE
D=-D

```

```

      VV(IMAX)=VV(J)
      ENDIF
      INDX(J)=IMAX
      IF (AC(J,J).EQ.0.D0)AC(J,J)=TINY
      IF (J.NE.N) THEN
      DUM=1.D0/AC(J,J)
      DO 62 I=J+1,N
      AC(I,J)=AC(I,J)*DUM
62  CONTINUE
      ENDIF
56  CONTINUE
      RETURN
      END

C
C #####
C #### CALC. DERIV. DE DERIV. qD/rD C/R KiD #####
C #####
SUBROUTINE CX2CX3(RD,TD,TH,ALF,X2X3M)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)

C
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7
TER = ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0 = AJ0

C
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1 = AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0

C
CIJ=(AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE=- (ALF(I)**2.D0)*TD
A1=((AIJ0**2.D0)*AIRDJ1)*ALF(I)*TH*DEXP(EE)
A2=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
A3=(A1*A2)/(CIJ**2.D0)
SUM=SUM + A3
39 CONTINUE
C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A RD PARA ALFA=CTE
C
DFRD2X3=4.D0*SUM

C
SUM=0.D0
DO 40 I=1,7
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1=AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF,AY0)
AIRDY0=AY0

```

CALL YIW(REF.AYI)  
AIRDYI=AYI

C

TER=ALF(I)  
CALL JOW(TER.AJ0)  
AIJ0=AJ0  
CALL JIW(TER.AJ1)  
AIJ1=AJ1  
CALL YOW(TER.AY0)  
AIY0=AY0  
CALL YIW(TER.AY1)  
AIY1=AY1

C

CIJ = (AIJ0\*\*2.D0)-(AIRDJ1\*\*2.D0)  
EE= -(ALF(I)\*\*2.D0)\*TD  
B1=(AIRDJ1\*\*2.D0)\*TH\*DEXP(EE)  
B2=B1/(ALF(I)\*CIJ)  
B3=-((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD)  
B4=((AIJ0\*\*2.D0)\*ALF(I))/CIJ  
B5=(RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))/AIRDJ1  
B6=AIJ1/AIJ0  
B7=B2\*(B3+(B4\*(B5 + B6)))

C

C1=AIY0\*ALF(I)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD))  
C2=AIJ0\*ALF(I)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD))  
C3=C1-C2

C

D1=-AIRDJ1\*AIY1  
D2=AIY0\*RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD))  
D3=AIRDY1\*AIJ1  
D4=-AIJ0\*RD\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD))  
D5=D1+D2+D3+D4

C

CD=C3/D5

C

B8=B7\*CD

C

SUM = SUM + B8

40 CONTINUE

C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A ALFA CON RD=CTE

C

DFALF2X3=4.D0\*SUM

C

X2X3M = DFRD2X3 - DFALF2X3

RETURN

END

C

C #####  
C #### CALC. DERIV. DE DERIV. qD/KtD C/R rD ####  
C #####  
SUBROUTINE CX3CX2(RD,TD,TH,ALF,X3X2M)  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
DIMENSION ALF(10)

C

```
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7
TER = ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0 = AJ0
```

C

```
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1 = AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
```

C

```
CIJ=(AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE=- (ALF(I)**2.D0)*TD
A1=(AIRDJ1)*ALF(I)*TH*DEXP(EE)
A2=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
A3=(A1*A2)/(CIJ**2.D0)
A4=A3*(CIJ+(AIRDJ1**2.D0))
SUM=SUM + A4
```

39 CONTINUE

C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A RD PARA ALFA=CTE

C

```
DFRD3X2=4.D0*SUM
```

C

```
SUM=0.D0
DO 40 I=1,7
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1=AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF,AY0)
AIRDY0=AY0
CALL YIW(REF,AY1)
AIRDY1=AY1
```

C

```
TER=ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0=AJ0
CALL JIW(TER,AJ1)
AIJ1=AJ1
CALL YOW(TER,AY0)
AIY0=AY0
CALL YIW(TER,AY1)
AIY1=AY1
```

C

```
CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE= -(ALF(I)**2.D0)*TD
B1=(AIRDJ1*DEXP(EE)*TH)/(CIJ**2.D0)
B2=(RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))*(CIJ+(AIRDJ1**2.D0))
B3=AIRDJ1*AIJ1*AIJ0
B4=AIRDJ1*ALF(I)*TD*CIJ
```

```

B7=B1*(B2 + B3 - B4)
C
C1=AIY0*ALF(I)*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
C2=AIJ0*ALF(I)*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
C3=C1-C2
C
D1=-AIRDJ1*AIY1
D2=AIY0*RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
D3=AIRDY1*AIJ1
D4=-AIJ0*RD*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
D5=D1+D2+D3+D4
C
CD=C3/D5
C
B8=B7*CD
C
SUM = SUM + B8
40 CONTINUE
C DERIVADA DE QD CON RESPECTO A ALFA CON RD=CTE
C
DALF3X2=4.D0*SUM
C
X3X2M = DFRD3X2 - DALF3X2
RETURN
END
C
C #####
C #### CALC. DERIV. DE DERIV. qD/KtD C/R KtD ####
C #####
SUBROUTINE CX3CX3(RD,TD,TH,ALF,X3X3M)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)
C
SUM = 0.D0
DO 60 I=1,7
TER = ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0 = AJ0
REF = ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1 = AJ1
CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE = -(ALF(I)**2.D0)*TD
GG1 = (AIRDJ1**2.D0)*DEXP(EE)*(ALF(I)**2.D0)*(TH**2.D0)
GG2 = (GG1/CIJ)
SUM = SUM + GG2
60 CONTINUE
C
X3X3M = -2.D0*SUM
RETURN
END
C
C #####

```

```

C   #### CALC. TERMINO 1  DERV.  qD/rD C/R rD   ####
C   #####
SUBROUTINE D2X2T1(RD,TD,ALF,X2T1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)

C
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7

C
TER = ALF(I)
CALL JOW(TER,AJ0)
AIJ0 = AJ0

C
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1 = AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0

C
CIJ=(AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE=-((ALF(I)**2.D0)*TD
CC=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))

C
A1=((AIJ0**2.D0)*DEXP(EE))/(CIJ**2.D0)
A2=(CC**2.D0)*(1.D0+((4.D0*(AIRDJ1**2.D0))/CIJ))
A3=(AIRDJ1**2.D0)*((1.D0/((ALF(I)*RD)**2.D0))-1.D0)
A4=(AIRDJ1/(ALF(I)*RD))*CC
A5=A1*(A2 + A3 - A4)
SUM=SUM + A5
39  CONTINUE

C
X2T1=1.D0-(4.D0*SUM)

C
RETURN
END

C
C   #####
C   #### CALC. TERMINO 2  DERV.  qD/rD C/R rD   ####
C   #####
SUBROUTINE D2X2T2(RD,TD,ALF,X2T2)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)

C
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7

C
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1=AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF,AY0)
AIRDY0=AY0

```

CALL YIW(REF.AY1)  
AIRDY1=AY1

C

TER=ALF(I)  
CALL JOW(TER.AJ0)  
AIJ0=AJ0  
CALL JIW(TER.AJ1)  
AIJ1=AJ1  
CALL YOW(TER.AY0)  
AIY0=AY0  
CALL YIW(TER.AY1)  
AIY1=AY1

C

CIJ=(AIJ0\*\*2.D0)-(AIRDJ1\*\*2.D0)  
EE=-(ALF(I)\*\*2.D0)\*TD  
CC=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))

C

A1=DEXP(EE)/(ALF(I)\*\*2.D0)  
A2=(2.D0\*AIRDJ1\*(((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD)+1.D0)\*CC)/CIJ  
A3=1.D0+((AIRDJ1\*\*2.D0)/CIJ)  
A4=(AIRDJ1\*(AIJ0\*\*2.D0))/(CIJ\*\*2.D0)  
A5=(AIRDJ1/(RD\*ALF(I)))-(RD\*ALF(I)\*AIRDJ1)  
A6=(RD\*ALF(I)\*(AIJ0\*\*2.D0))/(CIJ\*\*2.D0)  
A7=(1.D0+((4.D0\*(AIRDJ1\*\*2.D0)/CIJ))\*(CC\*\*2.D0))  
A8=(2.D0\*ALF(I)\*AIRDJ1\*AIJ1\*AIJ0\*CC)/(CIJ\*\*2.D0)  
A9=1.D0+((2.D0\*(AIRDJ1\*\*2.D0)/CIJ)  
A10=(A2\*A3)-(A4\*A5)-(A6\*A7)-(A8\*A9)  
A11=A1\*A10

C

#####  
C1=AIY0\*ALF(I)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
C2=AIJ0\*ALF(I)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD)))  
C3=C1-C2

C

D1=-AIRDJ1\*AIY1  
D2=AIY0\*RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
D3=AIRDY1\*AIJ1  
D4=-AIJ0\*RD\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD)))  
D5=D1+D2+D3+D4

C

CD=C3/D5

C

#####  
A12=A11\*CD

C

SUM = SUM + A12

C

39 CONTINUE

C

DERIVADA DE QD CON RESPECTO A RD PARA ALFA=CTE

C

X2T2=(4.D0\*SUM)

C

RETURN  
END

C

```

C #####
C ### CALÇ. TERMINO 3 DERV. qD/rD C/R rD      ###
C #####
SUBROUTINE D2X2T3(RD.TD.ALF.X2T3)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)

C
SUM=0.D0
DO 40 I=1,7
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF.AJ1)
AIRDJ1=AJ1
CALL JOW(REF.AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF.AY0)
AIRDY0=AY0
CALL YIW(REF.AY1)
AIRDY1=AY1

C
TER=ALF(I)
CALL JOW(TER.AJ0)
AIJ0=AJ0
CALL JIW(TER.AJ1)
AIJ1=AJ1
CALL YOW(TER.AY0)
AIY0=AY0
CALL YIW(TER.AY1)
AIY1=AY1

C
CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
EE= -(ALF(I)**2.D0)*TD
B1=(AIRDJ1**2.D0)*DEXP(EE)
B2=((ALF(I)**2.D0)*TD + 1.D0)/ALF(I)
B3=(AIJ0**2.D0)/CIJ
B4=(RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD))))/AIRDJ1
B5=AIJ1/AIJ0
B6=B3*(B4 + B5)
B7=(B1*(B2 - B6))/((ALF(I)**2.D0) * CIJ)

C
D1=-AIRDJ1*AIY1
D2=AIY0*RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
D3=AIRDY1*AIJ1
D4=-AIJ0*RD*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
D5=D1+D2+D3+D4

C
E1=1.D0-((ALF(I)*RD)**2.D0)
E2=((AIY0*AIRDJ1)-(AIRDY1*AIJ0))/(RD**2.D0)
E3=((ALF(I)*AIY0)*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))/RD
E4=((ALF(I)*AIJ0)*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))/RD
E5=(E1*E2)-E3+E4

C
C1=AIY0*ALF(I)*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
C2=AIJ0*ALF(I)*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))

```



C3=C1-C2

C

F1=1.D0-((ALF(I)\*RD)\*\*2.D0)  
F2=((AIY0\*AIRDJ1)-(AIRDY1\*AIJ0))/(ALF(I)\*RD)  
F3=(ALF(I)\*AIY1)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
F4=(ALF(I)\*AIJ1)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD)))  
F5=(F1\*F2)+F4-F3

C

CD=((D5\*E5)-(C3\*F5))/(D5\*\*2.D0)

C

B8=B7\*CD

C

SUM = SUM + B8

40

CONTINUE

C

X2T3=4.D0\*SUM

C

RETURN

END

C

#####  
C #### CALC. TERMINO 4 DERIV. qD/rD C/R rD ####  
C #####

SUBROUTINE D2X2T4(RD,TD,ALF,X2T4)  
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
DIMENSION ALF(10)

C

SUM = 0.D0  
DO 39 I=1,7

C

REF=ALF(I)\*RD  
CALL JIW(REF,AJ1)  
AIRDJ1=AJ1  
CALL JOW(REF,AJ0)  
AIRDJ0=AJ0  
CALL YOW(REF,AY0)  
AIRDY0=AY0  
CALL YIW(REF,AY1)  
AIRDY1=AY1

C

TER=ALF(I)  
CALL JOW(TER,AJ0)  
AIJ0=AJ0  
CALL JIW(TER,AJ1)  
AIJ1=AJ1  
CALL YOW(TER,AY0)  
AIY0=AY0  
CALL YIW(TER,AY1)  
AIY1=AY1

C

CIJ=(AIJ0\*\*2.D0)-(AIRDJ1\*\*2.D0)  
EE=-((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD  
CC=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))

```

C
A1=DEXP(EE)/(ALF(I)*(CIJ**2.D0))
A2=RD*(AIJ0**2.D0)
A3=(4.D0*RD*(AIRDJ1**2.D0)*(AIJ0**2.D0))/CIJ
A4=AIRDJ1*AIJ0*CC
A5=(4.D0*AIJ1*(AIJ0**2.D0))/CIJ
A6=-((2.D0*AIJ0)/ALF(I))-(2.D0*AIJ1)-(2.D0*ALF(I)*TD*AIJ0)
A7=((AIRDJ1**2.D0)*(AIJ0**2.D0))/((ALF(I)**2.D0)*RD)
A8=1.D0-((ALF(I)**2.D0)*(RD**2.D0))
A9=(CC**2.D0)*(A2+A3)
A10=A4*(A5+A6)
A11=A1*(A9+A10+(A7*A8))

```

```

C
C #####

```

```

C1=AIY0*ALF(I)*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
C2=AIJ0*ALF(I)*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
C3=C1-C2

```

```

C
D1=-AIRDJ1*AIY1
D2=AIY0*RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
D3=AIRDY1*AIJ1
D4=-AIJ0*RD*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
D5=D1+D2+D3+D4

```

```

C
CD=C3/D5

```

```

C #####
A12=A11*CD

```

```

C
SUM = SUM + A12

```

```

39 CONTINUE

```

```

C
X2T4=-4.D0*SUM

```

```

C
RETURN
END

```

```

C
C #####
C #### CALC. TERMINO 5 DERIV. qD/rD C/R rD ####
C #####

```

```

SUBROUTINE D2X2T5(RD,TD,ALF,X2T5)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)

```

```

C
SUM = 0.D0
DO 39 I=1,7

```

```

C
REF=ALF(I)*RD
CALL JIW(REF,AJ1)
AIRDJ1=AJ1
CALL JOW(REF,AJ0)
AIRDJ0=AJ0
CALL YOW(REF,AY0)
AIRDY0=AY0

```

CALL YIW(REF.AY1)  
AIRDY1=AY1

C

TER=ALF(I)  
CALL JOW(TER.AJ0)  
AIJ0=AJ0  
CALL JIW(TER.AJ1)  
AIJ1=AJ1  
CALL YOW(TER.AY0)  
AIY0=AY0  
CALL YIW(TER.AY1)  
AIY1=AY1

C

CIJ=(AIJ0\*\*2.D0)-(AIRDJ1\*\*2.D0)  
EE=-((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD  
CC=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
DD=((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD)+1.D0

C

A1=(AIRDJ1\*DD\*DEXP(EE))/((ALF(I)\*\*4.D0)\*CIJ)  
A2=(2.D0\*RD\*CC)\*(1.D0+((AIRDJ1\*\*2.D0)/CIJ))  
A3=(2.D0\*ALF(I)\*TD\*AIRDJ1)\*(1.D0+(2.D0/((ALF(I)\*\*2.D0)\*TD)))  
A4=(2.D0\*AIRDJ1\*AIJ1\*AIJ0)/CIJ  
A5=(2.D0\*ALF(I)\*TD\*AIRDJ1)/DD  
A7=A1\*(A2-A3+A4+A5)

C

B1=(AIRDJ1\*(AIJ0\*\*2.D0)\*DEXP(EE))/((CIJ\*ALF(I))\*\*2.D0)  
B2=(4.D0\*RD\*AIJ0\*AIJ1)/CIJ  
B3=-((2.D0\*RD)/ALF(I))-((2.D0\*RD\*AIJ1)/AIJ0)-(2.D0\*RD\*ALF(I)\*TD)  
B4=((4.D0\*(RD\*\*2.D0)\*AIRDJ1)/CIJ)+((RD\*\*2.D0)/AIRDJ1)  
B5=(CC\*(B2+B3))+((CC\*\*2.D0)\*B4)  
B6=AIRDJ1/(ALF(I)\*\*2.D0)  
B7=(RD\*\*2.D0)\*AIRDJ1  
B8=(RD/ALF(I))\*CC  
B9=B1\*(B5+B6-B7-B8)

C

AB1=((AIRDJ1\*\*2.D0)\*AIJ1\*AIJ0\*DEXP(EE))/((CIJ\*ALF(I))\*\*2.D0)  
AB2=(4.D0\*AIJ1\*AIJ0)/CIJ  
AB3=(4.D0\*RD\*AIRDJ1\*CC)/CIJ  
AB4=(2.D0\*RD\*CC)/AIRDJ1  
AB5=(AIJ0-(AIJ1/ALF(I)))/AIJ1  
AB6=AB2+AB3-(2.D0/ALF(I))-(AIJ1/AIJ0)-(2.D0\*ALF(I)\*TD)+AB4+AB5  
AB7=AB1\*AB6

C

FG=A7-B9-AB7

C

C #####

C1=AIY0\*ALF(I)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
C2=AIJ0\*ALF(I)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)\*RD)))  
C3=C1-C2

C

D1=-AIRDJ1\*AIY1  
D2=AIY0\*RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)\*RD)))  
D3=AIRDY1\*AIJ1

```
D4=-AIJ0*RD*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(1)*RD)))
D5=D1+D2+D3+D4
```

```
C
CD=C3/D5
```

```
C #####
ABCD=FG*(CD**2.D0)
```

```
C
SUM = SUM + ABCD
```

```
39 CONTINUE
```

```
C
X2T5=4.D0*SUM
```

```
C
RETURN
```

```
END
```

```
C #####
```

```
C #### CALC. TERMINO 6 DERV. qD/rD C/R rD ####
```

```
C #####
```

```
SUBROUTINE D2X2T6(RD,TD,ALF,X2T6)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION ALF(10)
```

```
C
SUM=0.D0
```

```
DO 40 I=1,7
```

```
REF=ALF(I)*RD
```

```
CALL JIW(REF,AJ1)
```

```
AIRDJ1=AJ1
```

```
CALL JOW(REF,AJ0)
```

```
AIRDJ0=AJ0
```

```
CALL YOW(REF,AY0)
```

```
AIRDY0=AY0
```

```
CALL YIW(REF,AY1)
```

```
AIRDY1=AY1
```

```
C
TER=ALF(I)
```

```
CALL JOW(TER,AJ0)
```

```
AIJ0=AJ0
```

```
CALL JIW(TER,AJ1)
```

```
AJ1=AJ1
```

```
CALL YOW(TER,AY0)
```

```
AIY0=AY0
```

```
CALL YIW(TER,AY1)
```

```
AIY1=AY1
```

```
C
CIJ = (AIJ0**2.D0)-(AIRDJ1**2.D0)
```

```
EE= -(ALF(I)**2.D0)*TD
```

```
CC=(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))
```

```
DD=(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(I)*RD)))
```

```
C
P1=(AIRDJ1**2.D0)*DEXP(EE)
```

```
P2=(((ALF(I)**2.D0)*TD) + 1.D0)/ALF(I)
```

```
P3=(AIJ0**2.D0)/CIJ
```

```
P4=(RD*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(I)*RD)))/AIRDJ1
```

P5=AIJ1/AIJ0  
P6=P3\*(P4 + P5)  
P7=(P1\*(P2 - P6))/((ALF(1)\*\*2.D0) \* CIJ)

C

D1=-AIRDJ1\*AIY1  
D2=AIY0\*RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(1)\*RD)))  
D3=AIRDY1\*AIJ1  
D4=-AIJ0\*RD\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(1)\*RD)))  
D5=D1+D2+D3+D4

C

B1=(AIRDY1\*AIJ0)-(AIY0\*AIRDJ1)  
B2=(AIY1/RD)\*CC  
B3=(AIJ1/RD)\*DD  
B4=((AIRDJ1\*AIY0)-(AIJ0\*AIRDY1))/((RD\*ALF(1))\*\*2.D0)  
B5=(ALF(1)\*RD)\*(B1-B2+B3+B4)

C

C1=AIY0\*ALF(1)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(1)\*RD)))  
C2=AIJ0\*ALF(1)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(1)\*RD)))  
C3=C1-C2

C

F1=(1.D0/(ALF(1)\*\*2.D0))-(RD\*\*2.D0)  
F2=(AIRDJ1\*AIY0)-(AIRDY1\*AIJ0)  
F3=DD\*(((RD\*AIJ0)/ALF(1))+(2.D0\*RD\*AIJ1))  
F4=CC\*(((RD\*AIY0)/ALF(1))+(2.D0\*RD\*AIY1))  
F5=AIRDY1\*(AIJ0-(AIJ1/ALF(1)))  
F6=AIRDJ1\*(AIY0-(AIY1/ALF(1)))  
F7=(F1\*F2)+F3-F4+F5-F6

C

CD=((D5\*B5)-(C3\*F7))/(D5\*\*2.D0)

C

C#####  
CC1=AIY0\*ALF(1)\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(1)\*RD)))  
CC2=AIJ0\*ALF(1)\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(1)\*RD)))  
CC3=CC1-CC2

C

DC1=-AIRDJ1\*AIY1  
DC2=AIY0\*RD\*(AIRDJ0-(AIRDJ1/(ALF(1)\*RD)))  
DC3=AIRDY1\*AIJ1  
DC4=-AIJ0\*RD\*(AIRDY0-(AIRDY1/(ALF(1)\*RD)))  
DC5=DC1+DC2+DC3+DC4

C

CECF=CC3/DC5

C

C#####

ABC=P7\*CD\*CECF

C

SUM = SUM + ABC

C

40 CONTINUE

C

X2T6=4.D0\*SUM

C

RETURN  
END

```

C
C #####
C #### CALCULA DERIV. DE qD/rD C/R rD #####
C #####
SUBROUTINE CX2CX2(RD,TD,ALF,X2X2M)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALF(10)
C
CALL D2X2T1(RD,TD,ALF,X2T1)
CALL D2X2T2(RD,TD,ALF,X2T2)
CALL D2X2T3(RD,TD,ALF,X2T3)
CALL D2X2T4(RD,TD,ALF,X2T4)
CALL D2X2T5(RD,TD,ALF,X2T5)
CALL D2X2T6(RD,TD,ALF,X2T6)
C
X2X2M=X2T1-X2T2-X2T3-X2T4+X2T5+X2T6
C
RETURN
END

```

Archivo de datos de entrada

CAMPO DAKE  
CARACTERISTICAS PARTICULARES DEL SISTEMA YACIMI. - ACUIF.

Temperatura del yacimiento (oF) = 200  
Presion inicial del yacimiento (psia) = 2740  
Presion de saturacion (psia) = 2740  
Factor de volumen del aceite inicial (bls/bls) = 1.404  
Rel. de solub. del gas en el ac. inic. (p3/bls) = 650  
Vol. orig. de aceite volumetrico (Bl) = 3.120E+08  
Compresibilidad de la formacion (1/psia) = 3.000E-06  
Compresibilidad del agua de formacion (1/psia) = 4.000E-06  
Saturacion de agua congenita (frac.) = 0.05  
Permeabilidad del acuífero (md) = 200  
Porosidad del acuífero (frac.) = 0.25  
Espesor del acuífero (pies) = 300  
Viscosidad del acuífero (cp) = 0.55  
Radio externo del yacimiento (pies) = 9200  
Radio externo del acuífero (pies) = 3.680E+04  
Angulo de intrusion del agua (o) = 140

C  
NUMERO DE DATOS DE LA TABLA PVT = 11

PROPIEDADES PVT DEL FLUIDO

P	Bo	Bg	Rs	Rv
(psia)	(bls/bls)	(bls/p3)	(p3/bls)	(bls/p3)
2740.0	1.404	0.930D-03	650.0	0.000
2500.0	1.374	0.980D-03	592.0	0.000
2290.0	1.349	1.070D-03	545.0	0.000
2109.0	1.329	1.170D-03	507.0	0.000
1949.0	1.316	1.280D-03	471.0	0.000
1818.0	1.303	1.390D-03	442.0	0.000
1720.0	1.294	1.500D-03	418.0	0.000
1608.0	1.287	1.600D-03	398.0	0.000

1535.0	1.280	1.700D-03	383.0	0.000
1480.0	1.276	1.760D-03	371.0	0.000
1440.0	1.273	1.820D-03	364.0	0.000

C

NUMERO DE DATOS DE LA TABLA PRESION - PRODUC. = 10

DATOS PRESION - PRODUCCION

T	P	Np	Gp	Wp
(anos)	(psia)	(bls)	(p3)	(bls)
0.0	2740.0	0.00	0.0	0.0
1.0	2500.0	7.88D+06	5988.0D+06	0.0
2.0	2290.0	18.42D+06	15564.9D+06	0.0
3.0	2109.0	29.15D+06	26832.6D+06	0.0
4.0	1949.0	40.69D+06	39676.2D+06	0.0
5.0	1818.0	50.15D+06	51393.5D+06	0.0
6.0	1720.0	58.42D+06	62217.3D+06	0.0
7.0	1608.0	65.39D+06	71602.1D+06	0.0
8.0	1535.0	70.74D+06	79228.8D+06	0.0
9.0	1480.0	74.54D+06	85348.3D+06	0.0
10.0	1440.0	77.43D+06	89818.8D+06	0.0