UNIVERSIDAD ANAHUAC DEL SUR

VINCE IN BONO MALUM

Universidad Anáhuac del Sur

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA DE INGENIERIA

T E S I S

MODELO MATEMATICO PARA LA OPTIMIZACION DE SISTEMAS DE CARGA

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA EN AREA INDUSTRIAL

P R E S E N T A:

SERGIO ALEJANDRO HUDSON ROMANO

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. RICARDO W. SKERTCHLY MOLINA

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mis Padres: Juan y Elsie

Por la educación y el ejemplo que siempre me han dado

A Fátima:

Por su amor y entrega
"..por eso deja el hombre a su padre y a su madre y se une a su mujer, y se hacen una sola carne." Gen. 2-24

A María Alejandra:

Porque ella es el reflejo de nuestro amor

A mi Hermano Juan Carlos:

"..porque de los que son como niños es el Reino de los Cielos." Lc 19-14

A mis Hermanos Héctor y Paco

A mis Familiares y Amigos que siempre me han apoyado

A Eugenio y a Javier

"HOMO SUM: HUMANI NIHIL A ME ALIENVM PVTO"
P.TERENTI AFRI
HEAVTONTIMORVMENOS 77

CONTENIDO

Introducción

Dadas las necesidades continuas que se tienen de optimizar los recursos utilizados en la prestación de cualquier servicio, resulta necesario contar con métodos adecuados de cálculo para lograr este objetivo. Los sistemas de transporte, en particular en la etapa de carga y descarga son críticos para la economía de la empresa. En principio, la necesidad de contar con un modelo para este tipo de sistema, es utilizable para dos propósitos de alto interés para la Gerencia: Para la simulación en la operación, y asi prever las posibles repercusiones que podría tener un cambio en el funcionamiento básico del sistema o de los parámetros de operación; y en segundo término para la posible estimación de óptimos operativos, ya sea en costo o en productividad.

Este trabajo pretende dar una solución general a los sistemas de carga de población finita, sin embargo las posibles aplicaciones a casos particulares, tendrán que ser revisadas y adecuadas para que el modelo trabaje con la mayor eficiencia y los resultados sean de máxima utilidad.

El presente trabajo se desarrolla en tres capítulos, los cuales corresponden a: I) los antecedentes, objetivos y supuestos iniciales; II) El desarrollo del modelo; III) Formas de optimizar los resultados y El análisis de un caso. Por último se dan las conclusiones generales del trabajo, así como dos anexos referentes a ciertos modelos complementarios usados en la solución del caso.

Capítulo 1

1.1.- Generalidades

Uno de los sistemas mas comúnmente usados en la industria y los servicios, es el de carga de vehículos para reparto o movimiento de materiales y mercancías. En particular el sistema de carga de vehículos, que en un periodo finito de tiempo completan su trabajo y regresan a ser cargados de nuevo.

1.2.- Objetivo

De lo anterior, podemos establecer el siguiente

Planteamiento:

Hacer un modelo matemático general, que describa la operación de un sistema de carga de vehículos con materiales o mercancías que llegan al lugar de carga por medio manual, los vehículos ya cargados, realizan el reparto o entrega de mercancía y posteriormente regresan a ser cargados para iniciar un nuevo ciclo, y sobre los resultados del modelo, hacer un análisis de costos para optimizar el sistema.

1.3.- Descripción General

Descripción del Sistema a Modelar

Se trata de un sistema en donde, ya sea la materia prima, el producto terminado o subproductos derivados de un proceso dado, son transportados mediante bandas o algún otro sistema de carga (manual, montacargas, etc.) y depositados a contenedores o camiones para que estos a su vez dispongan de su contenido en otro lugar, ya sea para su proceso, entrega o desecho.

El caso anterior muy bien puede describir lo que sucede en empresas mineras, en donde el mineral extraído y ya triturado se transporta mediante bandas hacia contenedores y de estos al proceso.

En general cualquier sistema de entrega de mercancías mediante vehículos de reparto.

Otro caso adicional es el de las plantas seleccionadoras de basura, en donde el rechazo se transporta en bandas hacia camiones de transferencia, estos van al tiradero y descargan, para luego regresar y ser cargados de nuevo.

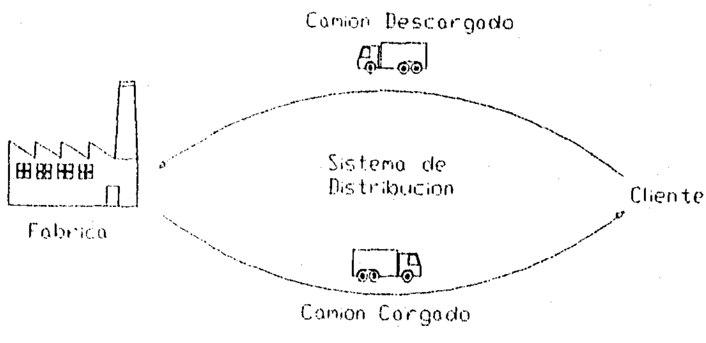
En particular, el ejemplo anterior se utilizará como base del modelo a desarrollar y como caso práctico para la optimización del problema.

Todos los residuos sólidos (basura) generada en la ciudad de México, son recolectados mediante el servicio domiciliario de recolección y luego llevados a estaciones de transferencia en donde camiones con cajas con capacidad de 20,000 kg los trasladan al relleno sanitario o a la planta de aprovechamiento y selección de subproductos.

En dicha planta los desechos arriban a granel mediante los camiones de transferencia antes mencionados. Una vez ahí, los desechos son conducidos por bandas transportadoras a sistemas de selección mecánica y manual, en donde aproximadamente el 15% del peso de los residuos que ingresan son seleccionados en el proceso.

En el lado opuesto de la planta, los residuos no seleccionados son cargados en camiones o contenedores mediante una banda y una tolva de carga y posteriormente llevados al relleno sanitario.

El siguiente croquis ilustra este movimiento:



El anteriores es solo uno de los casos prácticamente iguales que se pueden encontrar en la industria, ya que el sistema de carga a contenedor lo podemos encontrar en muchas otras formas. Por ejemplo:

- Bodegas que cargan vehiculos de reparto.
- Mantenimiento de hiladoras en el proceso textil (hilos rotos)
- Elevadores en edificios
- etc.

1.4.- Condiciones Iniciales del Problema:

I) El sistema de alimentación a los contenedores es continuo y aleatorio, con una tasa constante de transportación, esto es, la carga se hace sin parar durante la jornada laboral, transportando aproximadamente cargas iguales en tiempos iguales.

II) Un eventual paro en el sistema se deberia a falta de contenedores o camiones a cargar y esto puede ser descrito mediante una función de probabilidad.

III) La capacidad de almacenaje justo antes de la carga del contenedor o camión es mínima y solo cubre el lapso de tiempo entre la salida de un contenedor lleno y la llegada de uno vacío que previamente esté en cola.

IV) El total de contenedores del sistema de reparto es finito e igual a k

V) El tiempo entre dos cargas consecutivas de un mismo contenedor no es fijo, pero puede describirse mediante una función de probabilidad.

VI) Los k contenedores usados en el sistema tienen aproximadamente la misma capacidad.

VII) El tiempo que dura cada carga de camión no es fijo, pero puede ser descrito mediante una función de probabilidad.

VIII) La disciplina de servicio que se da en la cola de contenedores esperando carga, es: primero en llegar, primero en ser servido.

1.5.- Hipótesis Iniciales

a) El sistema básico de operación se puede describir mediante una o varias funciones de argumento tiempo.

b) La optimización en costo del sistema, está en función del factor de seguridad de operación, en otras palabras, podemos establecer una relación entre el costo y las condiciones mínimas de operación para realizar nuestro análisis.

c) En el proceso de recepción de carga se forma una cola de tamaño L_s en donde $L_s<k$.

Capítulo 2

2.1-. Desarrollo Conceptual del Modelo Operativo

2.1.1.- Definiciones

Definimos modelo como la representación y/o descripción de un sistema real, tal que está en forma simplificada y es manipulable.

Modelo operativo es la descripción de un sistema real dado, por medio de funciones matemáticas y representando únicamente su operación. El modelo a desarrollar es además dinámico dado que puede describir lo que sucede en el sistema en dos o mas momentos distintos, reflejando su estado de operación.

2.1.2.- Circunstancias de Operación

Si llamamos S al sistema dado y si aleatoriamente seleccionamos un momento *t* para observarlo, encontraremos las siguientes circunstancias:

1) El sistema lleva t_x unidades de tiempo (pueden ser horas, minutos, etc.) trabajadas desde el inicio de operaciones de ese día.

2) Se han despachado w toneladas o unidades de material y x contenedores cargados.

3) Se está cargando un contenedor o en caso contrario el sistema está parado por falta de contenedores.

4) Si hay un contenedor en carga pueden existir además n contenedores en cola para ser cargados.

Dadas las circunstancias anteriores éstas podrían ser calculadas como siguen:

La circunstancia 1 se conoce si t_0 es la hora de inicio de labores, entonces el tiempo total que ha trabajado es $t_t = t - t_0$

La circunstancia 2 se puede calcular si se conoce t_t y dada la condición inicial I, la tasa de proceso es mas o menos fija e igual a P, entonces la cantidad total procesada CTP es:

$$CTP = t_t \cdot P$$

y si la capacidad de cada contenedor es c entonces el número total de contenedores *NTC* despachados al momento t es aproximadamente:

$$NTC = \frac{t_t \cdot P}{c} = \frac{(t - t_0) \cdot P}{c}$$

Sin embargo las circunstancias 3 y 4 no las podemos describir en función de lo que ha sucedido antes de t, es mas, en el momento t solo podemos tener una aproximación o una probabilidad de lo que está pasando en cuanto a esas circunstancias, esto significa que el sistema no tiene memoria para esa clase de eventos.

Por ejemplo, existen momentos en que no hay nadie cargando, existen momentos en que salen contenedores servidos y entran otros a cargar y la cola por tanto se reduce.

Debemos esperar que estos eventos se puedan describir de alguna forma y con respecto a t, si lo cumplimos habremos comprobado la Hipótesis a.

Para describir las circunstancias 3 y 4 procedamos a denominar las posibles situaciones del sistema S. Llamemos S_0 al estado del sistema en donde no hay nadie cargando, la carga está cerrada y el sistema se para a esperar la llegada de algún contenedor o camión al sistema y reanudar el trabajo. La probabilidad de que esto ocurra la llamaremos P_0

Llamemos ahora S_i (con $i=1,2,3,...k$) al estado del sistema en el que se encuentran i contenedores en la línea de espera y en carga. Así, S_1 es el estado del sistema en donde solamente hay un contenedor y este es el que se está cargando. De forma análoga S_2 será el estado del sistema con dos contenedores, uno en carga y otro en cola.

De la misma manera definimos S_3, S_4,...,S_k en donde k es el total de contenedores utilizados en el proceso. Adicionalmente a los estados del sistema le asociaremos una función P_i, tal que ésta sea la probabilidad de ocurrencia de cada estado. Dada la Hipótesis ésta será función del tiempo, esto es $P_i(t)$.

Llamaremos ahora λ a la tasa de llegada de los contenedores al sistema, esto es, el número de contenedores que llega por unidad de tiempo.

De la teoría básica de probabilidades sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{k} P_i = 1$$

y que la probabilidad de una llegada en un lapso pequeño de tiempo es $\lambda\Delta t$ y la probabilidad de dos o más llegadas es despreciable (Cohen 1992, pg.62), además se ve afectado por el número de clientes en cola de la siguiente forma (Taha 1991,pg. 630):

$$\lambda_n=(k-n)\lambda$$

La probabilidad la podemos expresar así

$$P_1(\Delta t)=(k-1)\lambda\cdot\Delta t$$

de lo anterior se desprende lo siguiente: la probabilidad de encontrar cero contenedores en el sistema en el lapso de tiempo de t a $t+\Delta t$, es igual a la probabilidad de encontrar cero contenedores en el momento t por la probabilidad de que no halla ninguna llegada. En expresiones algebraicas se puede representar como sigue:

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-k\lambda\Delta t)$$

desarrollando la ecuación anterior queda

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-k\lambda\Delta t\cdot P_0(t)$$

Agrupando adecuadamente

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-k\lambda\Delta t\cdot P_0(t)$$

y

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-k\lambda P_0(t)$$

si hacemos que el intervalo de tiempo Δt tienda a cero, en el primer miembro de la ecuación anterior tenemos una derivada

$$\underset{\Delta t\to\infty}{Lim}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=\frac{dP_0(t)}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-k\lambda P_0(t)$$

la ecuación diferencial anterior se puede resolver directamente

$$\int\frac{dP_0(t)}{P_0(t)}=-k\lambda\int dt$$

$$Ln|P_0(t)|=-k\lambda t+c$$

despejando $P_0(t)$

$$P_0(t)=e^{-k\lambda t}\cdot e^{c}$$

$$P_0(t)=c_1 e^{-k\lambda t}$$

Para calcular el valor c_1, podemos irnos a las condiciones iniciales de operación:

En el momento de inicio de operaciones ***t=0*** no hay ningún contenedor cargando, entonces en ***t=0***, ***$P_0(0)=1$***

sustituyendo

$$P_0(0)=e^{-k\lambda t}$$

$$1=e^{0}\cdot c_1$$

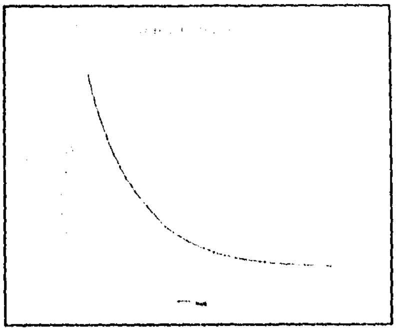
$$c_1=1$$

entonces

$$P_0(t)=e^{-k\lambda t}$$

La ecuación anterior significa que la probabilidad de cero llegadas en el momento t es igual a $e^{-k\lambda t}$

La gráfica siguiente muestra el comportamiento de esta probabilidad.



De la misma manera podemos desarrollar las ecuaciones para $P_1(t)$, $P_2(t)$, etc, entonces:

$$P_n(t+\Delta t)=(1-(k-n)\lambda\Delta t)\cdot P_n(t)+(k-(n-1))\lambda\Delta t\cdot P_{n-1}(t)$$

los términos P_n para $n>1$ se les agrega la probabilidad de estar en el estado $n-1$ y se produzca una llegada en el intervalo Δt..

Reagrupando

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-(k-n)\lambda P_n(t)+(k-(n-1))\lambda P_{n-1}(t)$$

y se llega a [1]

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(k-n)\lambda P_n(t) + (k-(n-1))\lambda P_{n-1}(t)$$

a las anteriores se les puede agregar

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -k\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t)$$

Las ecuaciones anteriores forman un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden, para resolverlas se puede proceder de la siguiente forma

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(k-1)\lambda P_1(t) + k\lambda P_0(t)$$

de donde

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(k-1)\lambda P_1(t) + k\lambda e^{-k\lambda t}$$

1 Estas ecuaciones son similares a las del modelo de nacimiento puro, sin embargo el modelo que aquí se presenta es con población finita y tasa individual de ocurrencia. Popoulis, pgs. 396-398

lo anterior es equivalente a tener una ecuación del tipo

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

cuya solución es equivalente a

$$y=ce^{-\int p(x)dx}$$

en donde la constante c es una función de x. Derivando la solución tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-cp(x)e^{-\int p(x)dx}$$

integrando la solución se tiene

$$c=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1$$

por lo tanto la solución general es

$$y=ce^{-\int p(x)dx}=c_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

sustituyendo adecuadamente los valores de la ecuación de interés en la solución general anterior se obtiene

$$P_1(t) = k e^{-k\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)$$

Procediendo de igual forma para las siguientes ecuaciones se puede verificar que la solución general del sistema es [2]:

$$P_n(t) = \binom{k}{n} e^{-k\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)^n$$

La anterior es una distribución de probabilidades que describe, en una población finita de tamaño **k** y que a cada elemento de esa población le ocurre un evento determinado con una tasa **λ**, la probabilidad de que en un tiempo determinado t existan exactamente n eventos.

La distribución anterior la llamaremos Distribución **H** con parámetros (**λ**, **k**), esto es **H**(**n**, t; **λ**, **k**). Es fácil demostrar que:

$$\sum_{n=0}^{k} P_n(t) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} e^{-k\lambda t}(e^{\lambda t} - 1)^n = 1$$

2 Los siguientes párrafos integran probablemente una de las aportaciones mas importantes de este trabajo, ya que parte de la solución problema resulta en un modelo probabilístico en el cual se puede profundizar mucho.

adicionalmente se puede demostrar que la función generatriz de momentos *m(y)*, así como su media y varianza son:

$$m(y)=\frac{(1-e^{y}+e^{\lambda(t+y)})^{k}}{e^{k\lambda t}}$$

$$E(n)=k(1-e^{-\lambda t})$$

$$var(n)=\frac{k(1-e^{\lambda t})}{e^{\lambda t}}$$

Sin embargo si k tiende a infinito, y tomamos λ como la tasa efectiva global de eventos por unidad de tiempo, la solución se puede aproximar de la siguiente forma (Saaty 1980,pg 26):

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

y definimos la siguiente función

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^{n}=P_0(t)+P_1(t)z+\ldots+P_n(t)z^{n}+\ldots$$

de donde podemos calcular $P_n(t)$ directamente si evaluamos $P(z,t)$ en su n-ésima derivada con respecto a z, dividimos entre $n!$ y damos a z valor cero.

Para un momento $t=0$, si hay i llegadas entonces $P_n(0)=0$ si $n \neq i$ y $P_n(0)=1$ si $n=i$, ahora

$$P(z,t)=P(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) z^n = z^i$$

Además

$$P(1,t)=\sum P_n(t)(1)^n = 1$$

y por definición

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)=1$$

ahora, la derivada parcial con respecto a t es

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n'(t)}{dt} z^n$$

como

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

podemos decir que

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=\lambda(z-1)P_n(z,t)$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}-\lambda(z-1)P_n(z,t)=0$$

entonces el sistema se reduce a una ecuación diferencial lineal parcial que se resuelve de igual forma que para $P_0(t)$, tenemos que

$$F(z,t)=c\cdot e^{\lambda(z-1)t}$$

ahora dado que el valor de C es 1, tenemos

$$F(z,t)=e^{\lambda(z-1)t}$$

y para obtener $P_n(t)$

$$P_n(t)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

entonces

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}$$
$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

que se conoce como distribución de Poisson con parámetro λ. Para hacerla mas sencilla tomemos la probabilidad de n llegadas en una unidad de tiempo

$$P_n(t)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Ahora la circunstancia 3 puede ser parcialmente resuelta ya que conocemos la probabilidad de n llegadas en el tiempo t, sin embargo esto no describe por completo la situación.

Para lo anterior debemos estimar las salidas que hay en el momento t y sus tiempos de carga.

Si llamamos μ a la tasa de servicio (número de unidades servidas por unidad de tiempo) entonces la probabilidad de completar un servicio en el intervalo Δt es $\mu\Delta t$ y la probabilidad de no completarlo es $1-\mu\Delta t$, por lo tanto

$$P_n(t+\Delta t)=(1-\mu\Delta t)P_n(t)$$

de lo anterior

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t)$$

y

$$F(t) = c \cdot e^{-\mu t}$$

Para calcular *c*, podemos decir que en algún momento *t*, cuando crece, se terminará el servicio, de lo anterior tenemos

$$\int_0^{\infty} c \cdot e^{-\mu t} dt = 1$$

de aquí calculamos que $c = \mu$ y por lo tanto

$$F(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Los resultados anteriores aún no describen completamente las circunstancias 3 y 4, pero nos dan aproximaciones y resultados muy importantes.

Las llegadas de los contenedores al sistema son aleatorias, con media λ y distribución de probabilidad $H(n, t; \lambda, k)$ y si $k \to \infty$ con distribución Poisson y parámetro global λ .

Los servicios (carga) son también aleatorios, con media μ y distribución exponencial.

Ahora se desea saber el tamaño de la cola y sus probabilidades de ocurrencia.

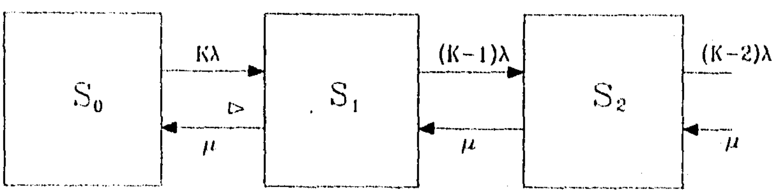
Sea $P_n(t)$ la probabilidad de que el sistema se encuentra en el estado S_n, entonces la probabilidad de mantenerse en ese estado, transcurrido un intervalo de tiempo Δt, es

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)[1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t]+P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t+P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t$$

$$\lambda_n\begin{cases}\lambda_n=(k-n)\lambda\\ \lambda_k=0\end{cases}$$

$$\mu_n=\mu$$

Lo anterior se puede explicar con el diagrama siguiente



La probabilidad de estar en el estado S_n en el periodo Δt es igual a la probabilidad de estar en el estado S_n al momento t por la probabilidad de ningún arribo ni ningún servicio completado en el periodo Δt.

$$P_n(t)\cdot[1-(\lambda_n+\mu)\Delta t]$$

mas la probabilidad de que estando en el estado S_{n-1} se produzca un arribo

$$P_{n-1}(t)\cdot\lambda_{n-1}\Delta t$$

mas la probabilidad de que estando en el estado S_{n+1} se produzca una salida

$$P_{n+1}(t)\cdot\mu\Delta t$$

igual que en los casos anteriores reagrupamos y hacemos que Δt tienda a cero, entonces tenemos

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-((k-n)\lambda+\mu)P_n(t)+(k-n+1)\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t)$$

ahora bien, como se menciona en las condiciones iniciales (IV) el número de contenedores es finito, digamos igual a k, entonces $P_k(t)$ sería la última ecuación ($k+1$-ésima ecuación) del sistema.

De forma igual a las anteriores, definimos $P_k(t)$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\mu P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

si decimos que $P_0(0)=1$ y $P_n(0)=0$ para $1<n<k$ y que

$$\sum_{n=0}^{k} P_n(t) = 1$$

Entonces lo anterior forma un sistema de ecuaciones lineales diferenciales homogéneas.

Como se mencionó anteriormente, para cierto momento dado t no podemos establecer relaciones sino con ayuda de un intervalo dado Δt, de lo anterior no resulta difícil comprender que cuando t crece las probabilidades $P_n(t)$ se hacen constantes.

Por lo que el sistema anterior se convierte en un sistema de ecuaciones lineales algebraicas porque las derivadas se hacen cero.

Las soluciones analíticas de este problema resultan complejas, pero tenemos algunos otros métodos de solución:

Método del Algebra Lineal:

Las ecuaciones dadas las podemos escribir en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_0(t) \\ \dot{P}_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{P}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\lambda & \mu & 0 & 0 & . & . & . \\ k\lambda & -((k-1)\lambda+\mu) & \mu & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \lambda & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ P_k(t) \end{bmatrix}$$

si, como es de esperarse, las soluciones son de la forma

$$P_n(t)=A_n e^{wt}$$

entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} wA_0 e^{wt} \\ wA_1 e^{wt} \\ \cdot \\ \cdot \\ wA_k e^{wt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\lambda & \mu & 0 & 0 & . & . & . \\ k\lambda & -((k-1)\lambda+\mu) & \mu & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \lambda & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 e^{wt} \\ A_1 e^{wt} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_k e^{wt} \end{bmatrix}$$

simplificando nos queda:

$$w\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\lambda & \mu & 0 & . & . & . \\ k\lambda & -((k-1)\lambda+\mu) & \mu & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \lambda & \mu \end{bmatrix}$$

en notación simplificada **wI=M** por lo tanto **0=M-wI**

El sistema tiene solución si y solo si el segundo miembro de la igualdad tiene el determinante igual a cero.

$$Det\,|M - wI| = 0$$

Este proceso nos lleva a encontrar los valores propios o eigenvalores de la matriz M y con ellos encontrar la solución.

En el apéndice A se muestra la solución por el método anterior de las ecuaciones del caso real

Solución por Análisis Numérico

Esta se hace mediante algún método de reticulación o diferencias y se soluciona numéricamente, si se conocen los valores de **λ**, **μ** y **k**. El método mas adecuado es el de Runge-Kutta de 4º orden. Lo usaremos también en la solución del caso real (en el apéndice B se muestra un programa para solucionar problemas mediante este método).

Solución para Condiciones de Estabilidad.

Se puede demostrar, que cuando $t \to \infty$ el sistema de ecuaciones diferenciales planteadas son estables y, de hecho, el periodo de transición (cuando las probabilidades no son constantes) puede ser realmente corto y resultar en una fracción de la unidad de tiempo.

Cuando las probabilidades se hacen estables, las derivadas se hacen cèro y tendremos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$0 = -k\lambda P_0 + \mu P_1$$
$$0 = -((k-1)\lambda + \mu)P_1 + k\lambda P_0 + \mu P_2$$

en general

$$0 = -((k-n)\lambda + \mu)P_n + (k-n+1)\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$$

sustituyendo

$$k\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$P_1 = k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0$$

si llamamos ρ al factor de utilización y lo definimos como

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
$$P_1 = k\rho P_0$$

sustituyendo en la segunda ecuación

$$((k-1)\lambda+\mu)\rho P_0=k\lambda P_0+\mu P_2$$

$$(k^2\rho^2-k\rho^2)P_0=P_2$$

$$k(k-1)\rho^2P_0=P_2$$

análogamente

$$P_n=\frac{k!}{(k-n)!}\rho^nP_0$$

Ahora para la última ecuación (de k)

$$P_k=k!\rho^kP_0$$

sabemos que

$$\sum_n P_n=1$$

esto es

$$P_0+P_1+P_2+\ldots+P_k=1$$

de lo anterior se desprende que (Taha 1991,pg 630)

$$P_0=\left(\sum_{n=0}^{k}\left[\frac{k!}{(k-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]\right)^{-1}$$

Para hallar el número medio de espera en cola y servicio (L_s) tomaremos este valor como la esperanza matemática según sus probabilidades

$$L_s = \sum_{n=0}^{k} nP_n = \sum_{n=1}^{k} nP_n$$

$$L_s = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + kP_k$$

$$L_s = k - \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_0) = k - \frac{(1 - P_0)}{\rho}$$

Ahora, por la fórmula de Little, sabemos que

$$L_s = \lambda W_s$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{k} (n-1)P_n$$

donde

L_s es la longitud esperada de la cola en el sistema

L_q es la longitud esperada de la cola antes de servicio

W_s es el tiempo promedio entre la llegada a la cola y la salida del servicio

W_q es el tiempo promedio en cola antes de ser servido

Sustituyendo

$$\sum_{n=1}^{k}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{k}nP_n-\sum_{n=1}^{k}P_n=L_s-(1-P_0)$$

reagrupando

$$L_q=L_s-1+P_0=k-\frac{\rho+1}{\rho}(1-P_0)$$

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

Con las fórmulas anteriores queda perfectamente resuelta la situación de las circunstancias 3 y 4.

Adicionalmente con los resultados anteriores las Hipótesis a y c quedan demostradas, quedando únicamente por demostrar la Hipótesis b.

Ahora solo queda saber como optimizar el sistema. Supongamos que iniciamos nuestro análisis con k unidades de carga o contenedores, y con una eficiencia de operación mayor que η, esto es $P_0 \leq 1-\eta$.

Supongamos que el costo por unidad de tiempo por cada contenedor es igual a Qc.

El costo de tener ociosos los contenedores, sería el costo Qc por el tiempo ocioso, éste lo podemos tomar como el tiempo en cola Wq, entonces el costo total por contenedores ociosos es

$$L_q \cdot Q_c \cdot W_q = CTC$$

Llamemos Qp al costo de parar la Planta por unidad de tiempo. La planta la pararemos solo en caso de que no halla contenedores que cargar, esto es, P_0 es la probabilidad de que no halla contenedores en carga, entonces el costo total por paro por unidad de tiempo es

$$P_0 \cdot Q_p = CTP$$

Entonces el objetivo es minimizar $CPT+CTC$ con los parámetros y fórmulas anteriores.

Si $CTC > CTP$ podemos intentar reducir k en uno y recalcular para conocer las nuevas circunstancias.

Si $CTP > CTC$ tendremos que aumentar k en uno y recalcular.

Capitulo 3

Caso Práctico

3.1.- Planteamiento del Problema

Sea una planta de recuperación de residuos sólidos domiciliarios, a ella llega la basura recolectada de cierto sector de la ciudad y lo procesa, esto es, se separan los subproductos de los residuos que son susceptibles de comercialización. El residuo no seleccionado se llama rechazo, este es transportado mediante bandas hasta una tolva la cual vacía su contenido en camiones de transferencia y estos a su vez depositan el rechazo en un relleno sanitario, del cual regresan a la planta para volver a ser cargados.

Las condiciones cuantitativas bajo las que opera el sistema son las siguientes:

1.- La cantidad de rechazo que se produce cada hora es de 40 toneladas.

2.- La capacidad de cada camión de transferencia es de 20 toneladas.

3.- La duración del recorrido del camión de transferencia (tiempo promedio entre la salida de la zona de tolvas y la llegada al sistema) es de aproximadamente 66 minutos.

4.- Al inicio de operaciones están todos los transfers en la planta, por lo que la carga puede iniciar inmediatamente después de que se inician las labores.

5.- La jornada laboral es de 8 horas.

El administrador estima que cada hora de paro de planta es de aproximadamente N$1,200.-, y considera que iniciando la operación con tres camiones es suficiente.

El costo horario de cada camión de transferencia es de N$100.-.

Se persigue estimar si el número de transfers seleccionado es el adecuado para un menor costo de operación, y si no fuera así cuantos transfers son los adecuados.

3.2.- Propuesta de Solución:

En principió se desean conocer todos los parámetros necesarios para la simulación mediante el modelo descrito en el capítulo anterior.

Se conoce la tasa de servicio puesto que dada la capacidad del camión y la capacidad de la banda, por lo tanto la tasa de servicio es de 2 camiones/hora ($\lambda = 2$).

El número k, población total a ser servida, es en principio de 3.

Ahora para determinar las probabilidades de estado, necesitamos la tasa de llegadas. Dado que según las condiciones de operación todos los transfers están en la zona de carga al iniciar las labores, la tasa de llegadas será cero para ese momento. Sin embargo conforme salen camiones cargados y completan su recorrido la tasa se irá normalizando e igualando al tiempo de recorrido. Esto es, llegan 0.9 camiones por hora ó 1 camion cada 1.1 horas (μ = 0.9).

De lo anterior se desprende que en condiciones de estabilidad la intensidad de tráfico es igual a 0.45 (ρ = 0.45)

Analizando bajo las condiciones de estabilidad el sistema tenemos que las probabilidades de estado son las siguientes:

$$P_n = \frac{k!}{(k-n)!} \rho^n P_0$$

$$P_k = k! \rho^k P_0$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{k} \left[\frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \right)^{-1}$$

Por lo tanto, en condiciones de estabilidad la probabilidad de que no halla camiones cargando, o sea P_0 es

$$P_0=\left(\sum_{n=0}^{3}\left[\frac{3!}{(3-n)!}\left(\frac{0.9}{2}\right)^n\right]\right)^{-1}=0.2432$$

De igual forma calculamos todas las probabilidades:

$$P_1=0.3283$$

$$P_2=0.2955$$

$$P_3=0.1330$$

Ahora nos interesa saber si las condiciones de estabilidad se cumplen en un tiempo razonablemente corto, para que se puedan despreciar las condiciones transitorias.

Para hacer este análisis, el sistema de ecuaciones diferenciales que representan al sistema se deberán resolver. Dada la complejidad de las soluciones, se optó por resolverlas mediante análisis numérico y los resultados son los siguientes:

Tabulación de Probabilidades de Estado

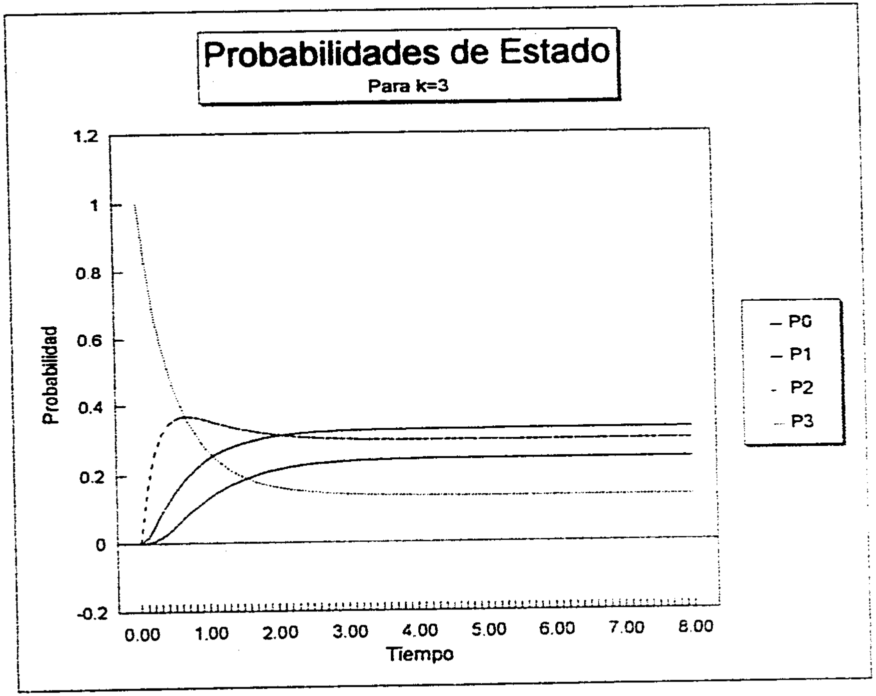
Para K=3

Hora	P0	P1	P2	P3	Suma
0.00	(0.0000)	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000
0.10	0.0010	0.0151	0.1580	0.8259	1.0000
0.20	0.0062	0.0465	0.2539	0.6935	1.0000
0.30	0.0161	0.0820	0.3108	0.5911	1.0000
0.40	0.0298	0.1161	0.3433	0.5108	1.0000
0.50	0.0460	0.1468	0.3602	0.4470	1.0000
0.60	0.0633	0.1735	0.3675	0.3957	1.0000
0.70	0.0809	0.1963	0.3688	0.3540	1.0000
0.80	0.0980	0.2156	0.3665	0.3199	1.0000
0 90	0.1141	0.2321	0.3622	0.2916	1.0000
1.00	0.1291	0.2459	0.3569	0.2681	1.0000
1.10	0.1428	0.2577	0.3512	0.2484	1.0000
1.20	0.1551	0.2677	0.3454	0.2317	1.0000
1.30	0.1661	0.2763	0.3399	0.2177	1.0000
1.40	0.1759	0.2835	0.3348	0.2057	1.0000
1.50	0.1846	0.2898	0.3301	0.1955	1.0000
1.60	0.1922	0.2951	0.3259	0.1868	1.0000
1.70	0.1989	0.2997	0.3221	0.1794	1.0000
1.80	0.2047	0.3036	0.3187	0.1730	1.0000
1.90	0.2098	0.3070	0.3157	0.1675	1.0000
2.00	0.2142	0.3099	0.3131	0.1628	1.0000
2.10	0.2181	0.3124	0.3108	0.1587	1.0000
2.20	0.2214	0.3146	0.3088	0.1552	1.0000
2.30	0.2244	0.3164	0.3070	0.1522	1.0000
2.40	0.2269	0.3180	0.3055	0.1496	1.0000
2.50	0.2291	0.3194	0.3042	0.1473	1.0000
2.60	0.2310	0.3206	0.3030	0.1454	1.0000
2.70	0.2326	0.3217	0.3020	0.1437	1.0000
2.80	0.2340	0.3226	0.3011	0.1422	1.0000
2.90	0.2353	0.3234	0.3004	0.1410	1.0000
3.00	0.2363	0.3240	0.2997	0.1399	1.0000
3.10	0.2373	0.3246	0.2991	0.1390	1.0000
3.20	0.2381	0.3251	0.2987	0.1382	1.0000
3.30	0.2388	0.3255	0.2982	0.1375	1.0000
3.40	0.2394	0.3259	0.2979	0.1369	1.0000
3.50	0.2399	0.3262	0.2975	0.1363	1.0000
3.60	0.2403	0.3265	0.2973	0.1359	1.0000
3.70	0.2407	0.3268	0.2970	0.1355	1.0000
3.80	0.2411	0.3270	0.2968	0.1351	1.0000
3.90	0.2413	0.3272	0.2966	0.1349	1.0000
4.00	0.2416	0.3273	0.2965	0.1346	1.0000

Tabulación de Probabilidades de Estado

Para K=3

Hora	P0	P1	P2	P3	Suma
4.10	0.2418	0.3275	0.2964	0.1344	1.0000
4.20	0.2420	0.3276	0.2962	0.1342	1.0000
4.30	0.2422	0.3277	0.2961	0.1340	1.0000
4.40	0.2423	0.3278	0.2961	0.1339	1.0000
4.50	0.2424	0.3278	0.2960	0.1338	1.0000
4.60	0.2425	0.3279	0.2959	0.1337	1.0000
4.70	0.2426	0.3280	0.2959	0.1336	1.0000
4.80	0.2427	0.3280	0.2958	0.1335	1.0000
4.90	0.2428	0.3281	0.2958	0.1334	1.0000
5.00	0.2428	0.3281	0.2957	0.1334	1.0000
5.10	0.2429	0.3281	0.2957	0.1333	1.0000
5.20	0.2429	0.3282	0.2957	0.1333	1.0000
5.30	0.2430	0.3282	0.2956	0.1332	1.0000
5.40	0.2430	0.3282	0.2956	0.1332	1.0000
5.50	0.2430	0.3282	0.2956	0.1332	1.0000
5.60	0.2430	0.3282	0.2956	0.1331	1.0000
5.70	0.2431	0.3282	0.2956	0.1331	1.0000
5.80	0.2431	0.3283	0.2956	0.1331	1.0000
5.90	0.2431	0.3283	0.2956	0.1331	1.0000
6.00	0.2431	0.3283	0.2955	0.1331	1.0000
6.10	0.2431	0.3283	0.2955	0.1331	1.0000
6.20	0.2431	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.30	0.2431	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.40	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.50	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.60	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.70	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.80	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
6.90	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.00	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.10	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.20	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.30	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.40	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.50	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.60	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.70	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.80	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
7.90	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
8.00	0.2432	0.3283	0.2955	0.1330	1.0000
Promedio	**0.2078**	**0.2956**	**0.3011**	**0.1955**	**1.0000**


Probabilidades de Estado
Para k=3
Probabilidad
Tiempo
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
P0
P1
P2
P3

De los resultados anteriores, nos damos cuenta que el período de transición es lo suficientemente largo como para despreciarlo, por lo que tomaremos los datos básicos de operación de los promedios de la tabla.

Promedios:

P_0= 0.2078

P_1= 0.2956

P_2= 0.3011

P_3= 0.1955

La suma de probabilidades, aún en los promedios, debe de sumar 1.

Del valor promedio de la probabilidad de cero camiones en el sistema, podemos calcular el tiempo de paro y su costo.

Tiempo Promedio de Paro = P_0 = 0.2078

Si el Costo de Paro por hora es de 1,200.- nuevos pesos, el costo total de paro es :

$$\text{Costo Total} = P_0 * CTP = 249.36$$

Ahora, para calcular el costo de tener camiones esperando en cola para ser servidos.

El tamaño de la cola antes de servicio es

$$L_q=\sum_{n=1}^{3}(n-1)P_n$$

De lo anterior resulta que la cola promedio es:

$$L_q=0.6921$$

Si el costo horario de cada transfer es de 100.- entonces el costo de la cola por hora es:

$$CTC=L_q*CH= 0.6921*100.- = 69.21$$

Dado que el costo de parar el sistema resulta mas alto que el de mantener la cola, entonces la determinación de usar tres camiones no es la mas adecuada. Por lo tanto la recomendación es incrementar el numero de camiones en uno y realizar el análisis de nuevo.

Si planteamos las ecuaciones para cuatro camiones, y mantenemos todos los parámetros de operación constantes, obtendremos los siguientes resultados.

Tabulación de Probabilidades de Estado

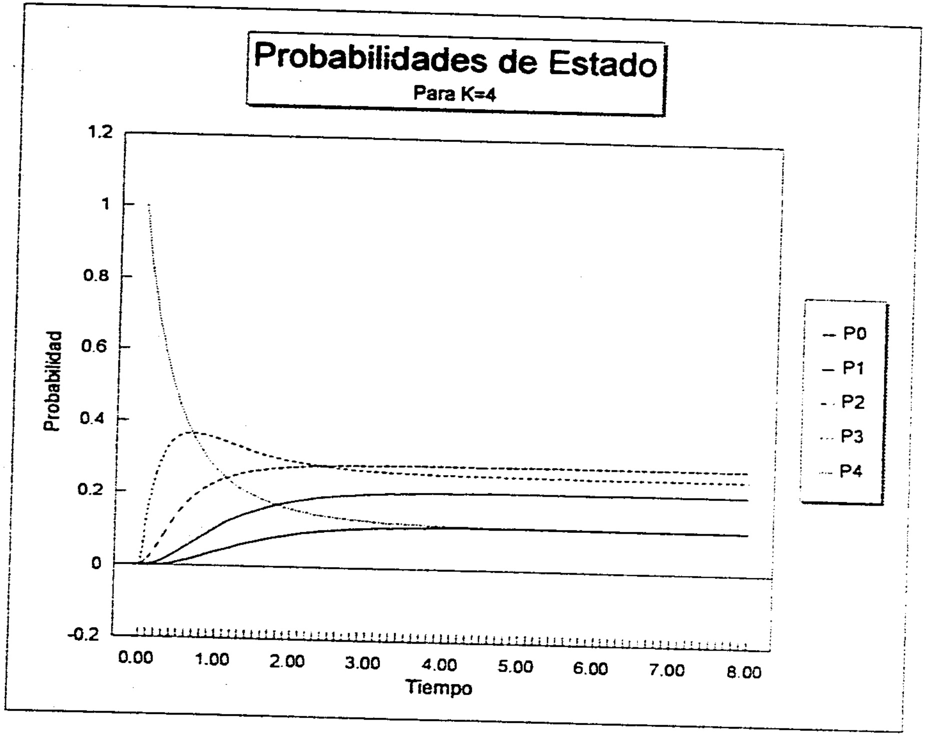
Para k=4

Hora	P0	P1	P2	P3	P4	Suma
0.00	0.0000	(0.0000)	(0.0000)	0.0000	1.0000	1.0000
0.10	0.0000	0.0010	0.0151	0.1580	0.8259	1.0000
0.20	0.0006	0.0057	0.0465	0.2539	0.6935	1.0000
0.30	0.0021	0.0144	0.0817	0.3108	0.5911	1.0000
0.40	0.0048	0.0259	0.1153	0.3432	0.5108	1.0000
0.50	0.0089	0.0392	0.1450	0.3599	0.4470	1.0000
0.60	0.0140	0.0532	0.1702	0.3669	0.3957	1.0000
0.70	0.0200	0.0672	0.1912	0.3677	0.3539	1.0000
0.80	0.0264	0.0808	0.2084	0.3647	0.3197	1.0000
0.90	0.0332	0.0936	0.2225	0.3595	0.2912	1.0000
1.00	0.0399	0.1056	0.2339	0.3530	0.2675	1.0000
1.10	0.0466	0.1167	0.2431	0.3461	0.2475	1.0000
1.20	0.0530	0.1268	0.2507	0.3390	0.2306	1.0000
1.30	0.0591	0.1360	0.2568	0.3320	0.2161	1.0000
1.40	0.0648	0.1443	0.2618	0.3253	0.2038	1.0000
1.50	0.0701	0.1518	0.2659	0.3191	0.1931	1.0000
1.60	0.0750	0.1585	0.2693	0.3133	0.1839	1.0000
1.70	0.0795	0.1645	0.2722	0.3079	0.1759	1.0000
1.80	0.0836	0.1700	0.2745	0.3030	0.1689	1.0000
1.90	0.0873	0.1748	0.2765	0.2985	0.1628	1.0000
2.00	0.0907	0.1791	0.2782	0.2945	0.1575	1.0000
2.10	0.0937	0.1830	0.2796	0.2909	0.1528	1.0000
2.20	0.0964	0.1864	0.2809	0.2876	0.1487	1.0000
2.30	0.0989	0.1895	0.2819	0.2846	0.1451	1.0000
2.40	0.1011	0.1923	0.2828	0.2820	0.1419	1.0000
2.50	0.1030	0.1947	0.2836	0.2796	0.1391	1.0000
2.60	0.1048	0.1969	0.2843	0.2775	0.1366	1.0000
2.70	0.1063	0.1988	0.2849	0.2756	0.1344	1.0000
2.80	0.1077	0.2005	0.2854	0.2739	0.1324	1.0000
2.90	0.1090	0.2020	0.2858	0.2724	0.1307	1.0000
3.00	0.1101	0.2034	0.2862	0.2711	0.1292	1.0000
3.10	0.1111	0.2046	0.2866	0.2699	0.1278	1.0000
3.20	0.1120	0.2057	0.2869	0.2688	0.1266	1.0000
3.30	0.1127	0.2066	0.2872	0.2679	0.1256	1.0000
3.40	0.1134	0.2075	0.2874	0.2671	0.1246	1.0000
3.50	0.1141	0.2082	0.2876	0.2663	0.1238	1.0000
3.60	0.1146	0.2089	0.2878	0.2656	0.1230	1.0000
3.70	0.1151	0.2095	0.2880	0.2651	0.1224	1.0000
3.80	0.1155	0.2100	0.2881	0.2645	0.1218	1.0000
3.90	0.1159	0.2105	0.2882	0.2641	0.1213	1.0000
4.00	0.1163	0.2109	0.2883	0.2636	0.1208	1.0000

Tabulación de Probabilidades de Estado

Para k=4

Hora	P0	P1	P2	P3	P4	Suma
4.10	0.1166	0.2113	0.2884	0.2633	0.1204	1.0000
4.20	0.1169	0.2116	0.2885	0.2629	0.1200	1.0000
4.30	0.1171	0.2119	0.2886	0.2627	0.1197	1.0000
4.40	0.1173	0.2122	0.2887	0.2624	0.1194	1.0000
4.50	0.1175	0.2124	0.2887	0.2622	0.1192	1.0000
4.60	0.1177	0.2126	0.2888	0.2620	0.1189	1.0000
4.70	0.1178	0.2128	0.2889	0.2618	0.1187	1.0000
4.80	0.1180	0.2130	0.2889	0.2616	0.1186	1.0000
4.90	0.1181	0.2131	0.2889	0.2615	0.1184	1.0000
5.00	0.1182	0.2132	0.2890	0.2613	0.1183	1.0000
5.10	0.1183	0.2133	0.2890	0.2612	0.1181	1.0000
5.20	0.1184	0.2134	0.2890	0.2611	0.1180	1.0000
5.30	0.1184	0.2135	0.2891	0.2610	0.1179	1.0000
5.40	0.1185	0.2136	0.2891	0.2610	0.1178	1.0000
5.50	0.1186	0.2137	0.2891	0.2609	0.1178	1.0000
5.60	0.1186	0.2138	0.2891	0.2608	0.1177	1.0000
5.70	0.1187	0.2138	0.2891	0.2608	0.1176	1.0000
5.80	0.1187	0.2139	0.2891	0.2607	0.1176	1.0000
5.90	0.1187	0.2139	0.2892	0.2607	0.1175	1.0000
6.00	0.1188	0.2139	0.2892	0.2606	0.1175	1.0000
6.10	0.1188	0.2140	0.2892	0.2606	0.1175	1.0000
6.20	0.1188	0.2140	0.2892	0.2606	0.1174	1.0000
6.30	0.1188	0.2140	0.2892	0.2605	0.1174	1.0000
6.40	0.1189	0.2141	0.2892	0.2605	0.1174	1.0000
6.50	0.1189	0.2141	0.2892	0.2605	0.1173	1.0000
6.60	0.1189	0.2141	0.2892	0.2605	0.1173	1.0000
6.70	0.1189	0.2141	0.2892	0.2605	0.1173	1.0000
6.80	0.1189	0.2141	0.2892	0.2604	0.1173	1.0000
6.90	0.1189	0.2141	0.2892	0.2604	0.1173	1.0000
7.00	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1173	1.0000
7.10	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.20	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.30	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.40	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.50	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.60	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.70	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.80	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
7.90	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
8.00	0.1190	0.2142	0.2892	0.2604	0.1172	1.0000
Promedio	**0.0959**	**0.1800**	**0.2636**	**0.2755**	**0.1849**	**1.0000**


Probabilidades de Estado
Para K=4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
Probabilidad
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
Tiempo
P0
P1
P2
P3
P4

De los resultados anteriores, nos damos cuenta, como en el caso anterior, que el período de transición es lo suficientemente largo como para despreciarlo, por lo que tomaremos los datos básicos de operación, como los promedios de la tabla.

Promedios:

P_0= 0.0959

P_1= 0.1800

P_2= 0.2636

P_3= 0.2755

P_4= 0.1849

La suma de probabilidades, aún en los promedios, debe de sumar 1.

Del valor promedio de la probabilidad de cero camiones en el sistema, podemos calcular el tiempo de paro y su costo.

Tiempo Promedio de Paro = P_0 = 0.0959

Si el Costo de Paro por hora es de 1,200.- nuevos pesos, el costo total de paro es :

$$\text{Costo Total} = P_0 * CTP = 115.08$$

Ahora, para calcular el costo de tener camiones esperando en cola para ser servidos.

El tamaño de la cola antes de servicio es

$$L_q = \sum_{n=1}^{4} (n-1)P_n$$

De lo anterior resulta que la cola promedio es:

$$L_q = 1.3693$$

Si el costo horario de cada transfer es de 100.- entonces el costo de la cola por hora es:

$$CTC = L_q * CH = 1.3693 * 100.- = 136.93.$$

Dado que el costo de parar el sistema es mas o menos igual que el de mantener la cola, entonces la determinación de usar cuatro camiones parece ser la mas adecuada. Sin embargo haremos el análisis para 5 camiones para verificar nuestro resultado.

Por lo tanto la recomendación es incrementar el número de camiones en uno y realizar el análisis de nuevo.

Si planteamos las ecuaciones para cinco camiones, y mantenemos todos los parámetros de operación constantes, obtendremos los siguientes resultados.

Tabulación de Probabilidades de Estado

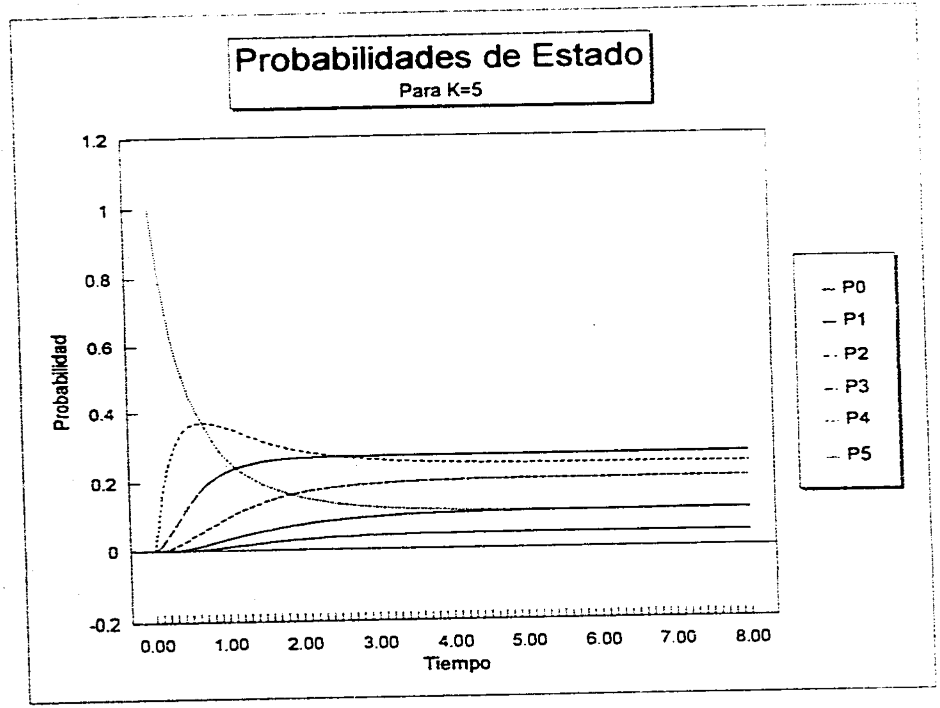
Para K=5

Hora	P0	P1	P2	P3	P4	P5	Suma
0.00	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	0.0000	1.0000	1.0000
0.10	0.0000	0.0000	0.0010	0.0151	0.1580	0.8259	1.0000
0.20	0.0000	0.0005	0.0057	0.0465	0.2539	0.6935	1.0000
0.30	0.0002	0.0019	0.0143	0.0817	0.3108	0.5911	1.0000
0.40	0.0006	0.0043	0.0258	0.1153	0.3432	0.5108	1.0000
0.50	0.0014	0.0079	0.0389	0.1449	0.3599	0.4470	1.0000
0.60	0.0025	0.0123	0.0526	0.1701	0.3669	0.3957	1.0000
0.70	0.0040	0.0174	0.0662	0.1909	0.3676	0.3539	1.0000
0.80	0.0058	0.0229	0.0792	0.2079	0.3646	0.3196	1.0000
0.90	0.0079	0.0286	0.0913	0.2217	0.3593	0.2912	1.0000
1.00	0.0101	0.0344	0.1025	0.2327	0.3527	0.2675	1.0000
1.10	0.0125	0.0402	0.1128	0.2415	0.3456	0.2475	1.0000
1.20	0.0149	0.0458	0.1220	0.2484	0.3383	0.2305	1.0000
1.30	0.0174	0.0511	0.1304	0.2540	0.3311	0.2160	1.0000
1.40	0.0198	0.0563	0.1379	0.2584	0.3241	0.2036	1.0000
1.50	0.0221	0.0611	0.1446	0.2618	0.3176	0.1928	1.0000
1.60	0.0243	0.0656	0.1507	0.2646	0.3114	0.1835	1.0000
1.70	0.0264	0.0698	0.1561	0.2667	0.3056	0.1754	1.0000
1.80	0.0284	0.0737	0.1609	0.2684	0.3003	0.1683	1.0000
1.90	0.0303	0.0772	0.1652	0.2698	0.2954	0.1621	1.0000
2.00	0.0320	0.0805	0.1691	0.2708	0.2909	0.1566	1.0000
2.10	0.0337	0.0835	0.1726	0.2716	0.2868	0.1518	1.0000
2.20	0.0352	0.0863	0.1757	0.2723	0.2830	0.1475	1.0000
2.30	0.0365	0.0888	0.1785	0.2728	0.2796	0.1437	1.0000
2.40	0.0378	0.0911	0.1810	0.2732	0.2765	0.1403	1.0000
2.50	0.0390	0.0932	0.1832	0.2735	0.2737	0.1373	1.0000
2.60	0.0400	0.0951	0.1853	0.2738	0.2712	0.1347	1.0000
2.70	0.0410	0.0968	0.1871	0.2740	0.2689	0.1323	1.0000
2.80	0.0419	0.0984	0.1887	0.2741	0.2668	0.1301	1.0000
2.90	0.0427	0.0998	0.1902	0.2743	0.2649	0.1282	1.0000
3.00	0.0434	0.1011	0.1915	0.2743	0.2632	0.1265	1.0000
3.10	0.0440	0.1022	0.1927	0.2744	0.2616	0.1250	1.0000
3.20	0.0446	0.1033	0.1938	0.2745	0.2602	0.1236	1.0000
3.30	0.0452	0.1042	0.1947	0.2745	0.2589	0.1224	1.0000
3.40	0.0457	0.1051	0.1956	0.2746	0.2578	0.1213	1.0000
3.50	0.0461	0.1059	0.1964	0.2746	0.2568	0.1203	1.0000
3.60	0.0465	0.1066	0.1971	0.2746	0.2558	0.1194	1.0000
3.70	0.0469	0.1072	0.1977	0.2746	0.2550	0.1186	1.0000
3.80	0.0472	0.1078	0.1983	0.2747	0.2542	0.1178	1.0000
3.90	0.0475	0.1083	0.1988	0.2747	0.2535	0.1172	1.0000
4.00	0.0478	0.1088	0.1993	0.2747	0.2529	0.1166	1.0000

Tabulación de Probabilidades de Estado

Para K=5

Hora	P0	P1	P2	P3	P4	P5	Suma
4.10	0.0480	0.1092	0.1997	0.2747	0.2524	0.1161	1.0000
4.20	0.0482	0.1096	0.2001	0.2747	0.2519	0.1156	1.0000
4.30	0.0484	0.1099	0.2004	0.2747	0.2514	0.1152	1.0000
4.40	0.0486	0.1102	0.2007	0.2747	0.2510	0.1148	1.0000
4.50	0.0488	0.1105	0.2010	0.2747	0.2506	0.1144	1.0000
4.60	0.0489	0.1107	0.2012	0.2747	0.2503	0.1141	1.0000
4.70	0.0490	0.1110	0.2014	0.2747	0.2500	0.1138	1.0000
4.80	0.0492	0.1112	0.2016	0.2747	0.2497	0.1136	1.0000
4.90	0.0493	0.1114	0.2018	0.2747	0.2495	0.1134	1.0000
5.00	0.0494	0.1115	0.2020	0.2747	0.2493	0.1131	1.0000
5.10	0.0495	0.1117	0.2021	0.2747	0.2491	0.1130	1.0000
5.20	0.0495	0.1118	0.2023	0.2747	0.2489	0.1128	1.0000
5.30	0.0496	0.1119	0.2024	0.2747	0.2487	0.1126	1.0000
5.40	0.0497	0.1120	0.2025	0.2747	0.2486	0.1125	1.0000
5.50	0.0497	0.1121	0.2026	0.2747	0.2484	0.1124	1.0000
5.60	0.0498	0.1122	0.2027	0.2747	0.2483	0.1123	1.0000
5.70	0.0498	0.1123	0.2028	0.2747	0.2482	0.1122	1.0000
5.80	0.0499	0.1124	0.2028	0.2747	0.2481	0.1121	1.0000
5.90	0.0499	0.1124	0.2029	0.2747	0.2480	0.1120	1.0000
6.00	0.0499	0.1125	0.2030	0.2747	0.2480	0.1119	1.0000
6.10	0.0500	0.1126	0.2030	0.2747	0.2479	0.1119	1.0000
6.20	0.0500	0.1126	0.2031	0.2747	0.2478	0.1118	1.0000
6.30	0.0500	0.1127	0.2031	0.2747	0.2478	0.1118	1.0000
6.40	0.0500	0.1127	0.2031	0.2747	0.2477	0.1117	1.0000
6.50	0.0501	0.1127	0.2032	0.2747	0.2477	0.1117	1.0000
6.60	0.0501	0.1128	0.2032	0.2747	0.2476	0.1116	1.0000
6.70	0.0501	0.1128	0.2032	0.2747	0.2476	0.1116	1.0000
6.80	0.0501	0.1128	0.2033	0.2747	0.2476	0.1116	1.0000
6.90	0.0501	0.1128	0.2033	0.2747	0.2475	0.1115	1.0000
7.00	0.0501	0.1129	0.2033	0.2747	0.2475	0.1115	1.0000
7.10	0.0501	0.1129	0.2033	0.2747	0.2475	0.1115	1.0000
7.20	0.0502	0.1129	0.2033	0.2747	0.2474	0.1115	1.0000
7.30	0.0502	0.1129	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.40	0.0502	0.1129	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.50	0.0502	0.1129	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.60	0.0502	0.1129	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.70	0.0502	0.1130	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.80	0.0502	0.1130	0.2034	0.2747	0.2474	0.1114	1.0000
7.90	0.0502	0.1130	0.2034	0.2747	0.2473	0.1114	1.0000
8.00	0.0502	0.1130	0.2034	0.2747	0.2473	0.1113	1.0000
Promedio	**0.0383**	**0.0892**	**0.1707**	**0.2531**	**0.2672**	**0.1815**	**1.0000**


Probabilidades de Estado
Para K=5
Probabilidad
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
Tiempo
P0
P1
P2
P3
P4
P5

Con los resultados, nos damos cuenta, como en los casos anteriores, que el periodo de transición es lo suficientemente largo como para despreciarlo, por lo que tomaremos los datos básicos de operación, como los promedios de la tabla.

Promedios:

P_0= 0.0383

P_1= 0.0892

P_2= 0.1707

P_3= 0.2531

P_4= 0.2672

P_5= 0.1815

La suma de probabilidades, aún en los promedios, debe de sumar 1.

Del valor promedio de la probabilidad de cero camiones en el sistema, podemos calcular el tiempo de paro y su costo.

Tiempo Promedio de Paro = P_0 = 0.0383

Si el Costo de Paro por hora es de 1,200. nuevos pesos, el costo total de paro es :

Costo Total= P_0*CTP = 45.96

Ahora, para calcular el costo de tener camiones esperando en cola para ser servidos.

El tamaño de la cola antes de servicio es

$$L_q = \sum_{n=1}^{5} (n-1) P_n$$

De lo anterior resulta que la cola promedio es:

$$L_q = 2.2045$$

Si el costo horario de cada transfer es de 100.- entonces el costo de la cola por hora es:

$$CTC = L_q * CH = 2.2045 * 100.- = 220.45$$

Ahora el costo de parar resultó ser menor al costo de mantener a los camiones ociosos haciendo cola, por lo que esta opción (5 camiones) no fue mejor que la anterior.

3.3.- Solución Optima del Modelo

Para comprobar los resultados calcularemos los costos totales, como la suma de los costos de paro y los costos de mantener camiones en cola:

C_3= 249.36+69.21 = 318.57

C_4= 115.08+136.93 = 252.01

C_5= 45.96+220.45 = 266.41

Como en los análisis anteriores la opción con 4 camiones resulta la menos costosa.

Ahora dado que el sistema es óptimo con cuatro camiones de transferencia, calcularemos en base a este dato algunos parámetros de interés (en el estado estable):

$$L_s=\sum_{n=0}^{4} nP_n=0\cdot 0.09+1\cdot 0.18+2\cdot 0.26+3\cdot 0.27+4\cdot 0.18=1.6274$$

Esto es la cola promedio esperada en el sistema es de menos de dos camiones de transferencia, podriamos decir uno en servicio y algunas veces otro en cola. Adicionalmente se puede intuir que 2.3726 camiones en promedio están en recorrido.

El tiempo promedio de estancia en el sistema (W_s) es de: 1.8082
El tamaño promedio de la cola en el sistema (L_q) es de: 2.2045 transfers
El tiempo promedio de estancia en cola (W_q) es de: 2.4494 horas

Se puede calcular, adicionalmente, la tasa global o efectiva de llegadas, utilizando la expresión de λ_n dada anteriormente.

$$\lambda_n=(k-n)\lambda$$

Si n es el promedio en el sistema lo anterior queda

$$\lambda_{eff}=(k-L_s)\lambda= 2.1353$$

Conclusiones

El trabajo presentado aquí, ha cumplido sus pretenciones al desarrollarse un modelo matemático que ayude a la toma de decisiones. Dado que el modelo es general, para sistemas congruentes, es de esperarse que cada caso particular tenga variantes, algunas sustanciales, dependiendo del tipo de proceso.

Sin embargo esta primera aproximación resulta importante ya que es punto de partida, o señal de camino para trabajos similares.

Tal vez un punto importante a desarrollar en un futuro sea el modelo considerando a las variables con una distribución arbitraria y no solamente Poisson o exponencial; ó tal vez un modelo no recursivo con resultados de decisión inmediatos.

El trabajo queda ahí, para retomarlo, modificarlo, superarlo y lo mas importante hacerlo crecer para cubrir casos mas generales..

Anexo A

Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas por Matrices

Como se mostró en el capítulo 2, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se pueden reducir a la expresión:

$$X' = M \cdot X$$

$$\lambda \cdot X = M \cdot X$$

$$0 = X \cdot (M - \lambda I)$$

donde

X = el vector de variables

M = la matriz de términos de las ecuaciones diferenciales

λ = un parámetro arbitrario

I = la matriz identidad

Como desechamos la solución trivial, donde X sería el vector nulo, entonces el sistema anterior solo tiene solución si el miembro $(M-\lambda\ I)$ tiene determinante igual a cero.

El determinante es cero si λ toma los valores de las raices del polinomio generado. Dicho polinomio se llama polinomio caracteristico y sus raices se llaman valores caracteristicos, propios o eigenvalores.

Si sustituimos los eigenvalores en la matriz M y resolvemos el sistema homogêneo encontraremos los términos que satisfacen las ecuaciones diferenciales originales, sin embargo hacen falta encontrar, por un lado las constantes de integración (mediante las condiciones iniciales del problema) y por otro lado los vectores de solución o eigenvectores.

Como ejemplo resolvamos las ecuaciones que se generan cuando k=3 y se tiene una tasa global de llegadas igual a uno y una tasa de servicio también igual a uno

$$\frac{dP_0}{dt}=-\lambda P_0+\mu P_1$$

$$\frac{dP_1}{dt}=\lambda P_0-(\lambda+\mu)P_1+\mu P_2$$

$$\frac{dP_2}{dt}=\lambda P_1-(\lambda+\mu)P_2+\mu P_3$$

$$\frac{dP_3}{dt}=\lambda P_2-\mu P_3$$

si

$$\lambda = \mu = 1$$

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i'$$

entonces

$$P_0' = -P_0 + P_1$$

$$P_1' = P_0 - 2P_1 + P_2$$

$$P_2' = P_1 - 2P_2 + P_3$$

$$P_3' = P_2 - P_3$$

En matrices:

$$\begin{bmatrix} P_0' \\ P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Si la solución es de la forma $P_i=a_ie^{rt}$

$$\begin{bmatrix} ra_0e^{rt} \\ ra_1e^{rt} \\ ra_2e^{rt} \\ ra_3e^{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0e^{rt} \\ a_1e^{rt} \\ a_2e^{rt} \\ a_3e^{rt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - r \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0e^{rt} \\ a_1e^{rt} \\ a_2e^{rt} \\ a_3e^{rt} \end{bmatrix} = 0$$

Desechando la solución trivial, entonces:

$$\begin{bmatrix} (-1-r) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (-2-r) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (-2-r) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & (-1-r) \end{bmatrix} = 0$$

Esto es, solo si su determinante es igual a cero:

$$r^4+6r^3+10r^2+4r=0$$

Las raices del polinomio son:

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = -2$$

$$r_3 = -2 + \sqrt{2}$$

$$r_4 = -2 - \sqrt{2}$$

Sustituyendo cada solución en las matrices anteriores, obtenemos los valores a_i para cada solución:

$$r_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = -2 + \sqrt{2} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} + 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = -2 - \sqrt{2} \rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

La solución general, dadas las condiciones iniciales ($P_0(0)=0$; $P_1(0)=0$; $P_2(0)=0$; $P_3(0)=1$):

$$\begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{(-2+\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_4 e^{(-2-\sqrt{2})t} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$$

con:

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = -\frac{1}{4}$$

$$c_3 = \frac{-(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$$

$$c_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Anexo B

Descripción del Método de Runge-Kutta de cuarto orden para la solución numérica de ecuaciones diferenciales

si $f(x,y)$ es una función en derivadas parciales de x e y, podemos dar la siguiente aproximación:

$$y(x+h)=y(x)+(1/6)*(k1+2k2+2k3+k4)$$

$$k1=hf(x,y(x))$$

$$k2=hf(x+(1/2)h,y(x+(1/2)k1))$$

$$k3=hf(x+(1/2)h,y(x+(1/2)k2))$$

$$k4=hf(x+h,y(x+k3))$$

De esta manera la fórmula recursiva $y(x+h)$ se puede desarrollar tantas veces como sea necesario hasta alcanzar el valor deseado de la variable independiente $x+kh$.

A continuación se muestra un programa sencillo de computadora en BASIC para la resolución de ecuaciones diferenciales por el método de Runge-Kutta

```
10  DIM X(100),Y(100)
20  CLS
30  INPUT "valor inicial de x";X(0)
40  INPUT "valor final de x";VF
50  INPUT"Tamaño del paso";H
60  INPUT "Valor de y(0)";Y(0)
70  I=0
80  YY=Y(0)
90  FOR J=0 TO VF+H STEP H
100 GOSUB 290
110 K1=H*G
120 XX=X(I)+.5*H
130 YY=Y(I)+.5*K1
140 GOSUB 290
150 K2=H*G
160 YY=Y(I)+.5*K2
170 GOSUB 290
180 K3=H*G
190 XX=X(I)+H
200 YY=Y(I)+K3
210 GOSUB 290
220 K4=H*G
230 Y(I+1)=Y(I)+(1/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4)
240 PRINT USING "##.##";X(I),:PRINT USING "##.####";Y(I)
250 I=I+1
260 X(I)=X(I-1)+H
270 NEXT
280 STOP
290 " Ecuación Dierencial" G=-YY+SIN(X)
300 RETURN
```

Bibliografia

Hamdy M. Taha. Operations Research, An introduction. 4th Ed. McMillan, New York 1991

Thomas L. Saaty. Qeueing Theory. Dover Publications, New York, 1980.

Sheldom Ross. First Course in Probability. 1st Ed. McMillan New York, 1990.

J.W. Cohen. The Single Server Queue. 2nd Ed. North-Holland, Amsterdam, 1992.

D.R. Cox y Walter L. Smith. Estudio Matemático de las Colas. 1ª Ed. UTEHA, México, 1964.

J.C. Jaeger. Introducción a la Transformada de Laplace. 1ª Ed. UTEHA, México, 1966.

Elena S. Ventsel. Investigación de Operaciones. Mir, Moscú, 1983.

Alkis Constantinides. Applied Numerical Methods with Personal Computers. McGraw-Hill, New York, 1988.

F.B. Hildebrand. Introduction to Numerical Analisis. 2nd Ed. Dover, New York, 1987.

Donald A. Pierre. Optimization Theory with Applications. Dover, New York, 1986.