00384 3
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ALGORITMOS DE REDUCCION EN LA TEORIA DE REPRESENTACIONES DE COALGEBRAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

JUAN BOZA CORDERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MEXICO, D.F. 1996

Algoritmos de reducción en la teoría representaciones de coálgebras

Resumen

Se establecen los algoritmos de la teoría de representaciones de bocses, para el contexto de las bigráficas diferenciales. Para cada algoritmo se describe la bigráfica que resulta al ser aplicado, y se demuestran las relaciones existentes entre las categorías de representaciones de las bigráficas inicial y final. Se analiza el comportamiento de la norma de una representación, así como la variación de la forma cuadrática de la bigráfica, ante cada algoritmo, obteniéndose resultados precisos en cada caso. Todo esto se aprovecha para describir lo que sucede cuando se aplica una secuencia finita de algoritmos.

Como primera aplicación de lo anterior, se estudian algunas características de la bigráficas "schurian". Tanbién se utiliza tal enfoque para examinar familias de representaciones inescindibles de una bigráfica diferencial, con vector dimensión dado.

Se demuestra una fórmula para la forma cuadrática del bocs de Drozd de una álgebra, que permite estudiar familias de representaciones inescindibles de álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado, utilizando los resultados mencionados para bigráficas diferenciales.

Reduction algorithms in the representation theory of coalgebras

Abstract

Here are established the known reduction algorithms for bocses, for the context of differential bigraphs. For each algorithm the resulting bigraph and the relationships between the initial and final categories of representations are studied. The behaviour of both the norm of a representation and the quadratic form of the bigraph under the action of each algorithm are established. As a consequence it is precisely described what happens when it is applied a sequence of algorithms.

A first application of the foregoing results is the study of certain properties of schurian bigraphs. They are also used for examining families of indecomposable representations of a differential bigraph with given dimension vector.

A formula is established for the quadratic form of Drozd's bocs of a finite dimensional algebra over an algebraically closed field, which permits to study certain families of representations of the algebra.

Contenido

Introducción

Los algoritmos de reducción son fundamentales en la teoría de representaciones de bocses. Se originaron al considerar ciertas operaciones en problemas matriciales, y fueron introducidos en la década de los setentas por Drozd, Kleiner y Roiter. Su aplicación es decisiva en la primera demostración del Teorema "manso-salvaje" de Drozd.

El presente trabajo partió de la consideración de que conocer el comportamiento de la forma cuadrática de un bocs, cuando al mismo se le aplica un algoritmo, podría ser útil para obtener información sobre la estructura de sus representaciones. En particular, se buscaba información sobre la familia de representaciones inescindibles en una dimensión fija. En esta dirección apuntan los resultados principales del Capítulo 3, referentes a bocses, y que se aplican en el Capítulo 4 a la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita.

La tarea empezó por un examen detallado de los algoritmos, determinando en cada caso el bocs obtenido por su aplicación, paso indispensable para calcular, por ejemplo, la forma cuadrática del nuevo bocs.

Como se sabe, los algoritmos se establecieron inicialmente en el contexto de las categorías diferenciales graduadas, y luego se formalizaron dentro de la teoría de representaciones de bocses. Para los objetivos del presente estudio, se tornó conveniente elaborar una presentación de los algoritmos en el contexto de las bigráficas diferenciales. Este punto de vista subyace en la literatura, y es muy utilizado en la práctica; pero aquí se desarrolla de manera explícita. Así, cada algoritmo se considera como una operación aplicada a una bigráfica, que produce otra bigráfica, estando las respectivas categorías de representaciones estrechamente vinculadas.

La descripción clara y detallada de la bigráfica resultante permite,por ejemplo, conocer el comportamiento de la norma de una representación, así como el de la forma cuadrática, frente a los algoritmos. Controlar la variación de la norma es útil para argumentar por recurrencia en diversas situaciones. Con respecto a la forma cuadrática, el hecho de que la misma no decrece, evidencia en cierta medida lo que sucede a una representación cuando es sometida reiteradamente a la acción de los algoritmos.

Lo anterior corresponde grosso-modo a los capítulos 1, 2 y parte del 3. En este último se utilizan los resultados hasta entonces obtenidos, para derivar algunas propiedades de las bigráficas "schurian".

Por un teorema de Ovsienko, $\dim_k End(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = \dim_k Ext^1_{\mathcal{B}}(M, M)$. El estudio previo de las formas cuadráticas se utiliza para examinar la variación del indicador $\Delta(M) = \dim_k End(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M)$ ante los algoritmos. Este se muestra como un instrumento útil para investigar familias de representaciones inescindibles en una bigráfica. Se obtienen resultados para familias de inescindibles con el Δ igual a 0 ó a 1.

En el Capítulo 4 se desarrollan aplicaciones de los resultados anteriores a la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Aquí se trabaja en el bocs de Drozd del álgebra dada, para el cual están a disposición los resultados del capítulo anterior. La transición entre el álgebra y su bocs es posible por la fórmula, que se demuestra ahí mismo,

$$\Delta(\underline{\varphi}) = \dim_k Hom_\Lambda(M, DtrM) - \dim_k Hom_\Lambda(topM, socDtrM) ,$$

en donde M es inescindible en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, Λ una $k-$álgebra, $\varphi : P \longrightarrow Q$ la presentación proyectiva mínima de M, y $\underline{\varphi}$ la representación del bocs de Drozd $\mathcal{D}$ de Λ, correspondiente al objeto $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

Dialéctica del escriba

El texto que empiezas a leer es la cristalización de esfuerzos de varias personas. El principal soporte para culminar este escrito han sido Raquel, mi compañera, y Sergio, Alejandra y Francisco, nuestros hijos. Buena parte del trabajo doctoral lo realicé cuando vivimos todos en México. Estancia aquella cargada de momentos gratos y de situaciones desgarradoras. Unos y otras, hoy lo siento, definitivamente integradas a nuestras historias personales. Fue entonces que juntos descubrimos, en proceso entreverado y contradictorio, el insustituible valor de la palabra para salir adelante en los momentos difíciles.

He sido afortunado al compartir el estimulante ambiente científico que ha ido generando el grupo mexicano de representaciones. Es aquí donde he captado las voces, frecuentemente tenues, que me traían noticias de problemas matriciales, de DGCs, de bocses, posets y bigráficas. Palabras dichas o escritas lejos y hace varias décadas, o aquí mismo y hace poco.

Me han llegado también ecos de aquellos que ansían decir y escuchar "la palabra verdadera"...

El esfuerzo del escriba ha encontrado su curso también por la feliz conjugación de gestos y acciones positivos de muchas personas, y la oportuna cancelación de obstáculos, algunos concientes, otros fortuitos. Fue importante el interés mostrado por el ex-rector de la Universidad de Costa Rica, Luis Garita Bonilla, en que yo iniciara mi doctorado. También la ex-directora de la Escuela de Matemática, Theodora Tsijli, me brindó su apoyo en el momento preciso. William Castillo, ex- director de mi escuela, superó realmente sus deberes como funcionario, y en momentos decisivos, se comportó como gran amigo. Ahora que pareciera que estoy realizando un balance, se me vienen a la memoria los esfuerzos inútiles de algún decano de mi universidad por obstaculizar mi proyecto en sus inicios, o la falta de comprensión, más reciente, de algún director, también de allá.

Trabajar con Raymundo ha sido gratificante. Inolvidable, el apoyo moral de Rudith. En Martha Takane he ganado, en fin, a una hermana.

México, D.F., noviembre de 1996

Capítulo 1

Bocses y representaciones

Los conceptos de bocs y de bigráfica diferencial son equivalentes, en un sentido que se explicitará más adelante. A un bocs se le asocia de manera natural una bigráfica diferencial, y se tiene también la construcción recíproca. Con esto se empieza. El trabajo posterior se realiza en el contexto de bigráficas. En la última parte se examina el cambio de anillos de base en una bigráfica, proceso útil para estudiar las relaciones entre bigráficas sobre k y $k(x)$.

Para las definiciones y propiedades básicas de los bocses, la referencia más completa es $[CB_1]$, cuyos detalles aparecen desarrollados en $[M]$.

1 Bigráficas y representaciones

1.1 Definición. Una bigráfica $\mathcal{B}$ es una gráfica orientada finita con dos tipos de flechas: de grado 0, dibujadas con un trazo continuo, $i \longrightarrow j$; y de grado 1, dibujadas con un trazo discontinuo, $i \dashrightarrow j$. Si k es un campo, el álgebra de caminos $k\mathcal{B}$ es un álgebra graduada con la graduación inducida por el grado de las flechas. Así:

$$k\mathcal{B} = (k\mathcal{B})_0 \oplus (k\mathcal{B})_1 \oplus \ \ldots$$

En algún caso se denotarán caminos de grado 1 por flechas discontinuas.

1.2 Definición ($[CB_2]$) Una bigráfica diferencial es un triple $(\mathcal{B},\delta,k)$, donde $\mathcal{B}$ es una bigráfica, k un campo y

$$\delta : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}$$

una transformación lineal, tal que:

(i) si a es homogéneo de grado i, $\delta(a)$ es homogéneo de grado $i+1$;
(ii) si a, b son homogéneos, $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{gr(a)}a\delta(b)$;
(iii) si e es un camino trivial, $\delta(e) = 0$;
(iv) $\delta^2 = 0$.

Si $\mathcal{B}$ es una bigráfica con diferencial δ como en la definición anterior, se denota con $\mathcal{B}_0$ el subcarcaj pleno de las flechas de grado 0 en $\mathcal{B}$, y el álgebra de caminos $k\mathcal{B}_0$ se denota por $A = k\mathcal{B}_0$. Obsérvese que el álgebra $k\mathcal{B}_0 = (k\mathcal{B})_0$, y $(k\mathcal{B})_1$, el espacio generado por las flechas de grado 1, es un $A-A$–bimódulo.

Por definición, las representaciones de la bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,k)$ son las representaciones del carcaj $\mathcal{B}_0$.

Si M, N son representaciones de la bigráfica diferencial $\mathcal{B}$, cuyos vértices son $1, 2, ..., n$, un morfismo $f : M \longrightarrow N$ está dado por una familia doble de transformaciones lineales:

$$f = (f_i^0 \ ; \ f^1(x)),$$

en donde $1 \leq i \leq n$, y x recorre el conjunto de las flechas de grado 1, tales que $f_i^0 : M_i \longrightarrow N_i$, y $f^1(x) : M_i \longrightarrow N_j$, si $x : i \dashrightarrow j$. Ha de cumplirse la siguiente condición para toda flecha de grado 0, $a : i \longrightarrow j$, con diferencial

$$\delta(a) = \sum_l b_l x_l c_l \quad , \tag{0.1}$$

con b_l, c_l caminos de grado 0, y x_l flechas de grado 1 :

$$f_j^0 M(a) - N(a) f_i^0 = \sum_l N(b_l) f^1(x_l) M(c_l) \tag{0.2}$$

Se acostumbra escribir $f^1(\delta(a)) = \sum_l N(b_l) f^1(x_l) M(c_l)$. De manera general, para un camino de grado 1 arbitrario, $\gamma = b_l x_l c_l$, se define la transformación lineal $f^1(\gamma) = N(b_l) f^1(x_l) M(c_l)$.

La composición de morfismos $f : L \longrightarrow M$, $g : M \longrightarrow N$, se define como $gf : L \longrightarrow N$, con

$$gf = ((gf)_i^0 \ ; \ (gf)^1(x)),$$

en donde $(gf)_i^0 = g_i^0 f_i^0$; y para $x : i \dashrightarrow j$, tal que $\delta(x) = \sum_s x_{s2} x_{s1}$, con las x_{s1}, x_{s2} caminos de grado 1,

$$(gf)^1(x) = g^1(x)f_i^0 + g_j^0 f^1(x) + \sum_s g^1(x_{s2})f^1(x_{s1}) \quad . \tag{0.3}$$

Para verificar que la composición de morfismos es un morfismo, sean g, f como antes, y sea $a : i \longrightarrow j$ con diferencial (0.1). Se tiene:

$$\begin{aligned} g_j^0 f_j^0 L(a) - N(a) g_i^0 f_i^0 &= g_j^0(M(a)f_i^0 + f^1(\delta(a))) - (g_j^0 M(a) - g^1(\delta(a)))f_i^0 \\ &= g_j^0 f^1(\delta(a)) + g^1(\delta(a))f_i^0 \\ &= (gf)^1(\delta(a)), \end{aligned}$$

puesto que $\delta^2 = 0$. Luego gf es morfismo.

Para toda representación M , el morfismo identidad, como se comprueba fácilmente, está dado por la familia doble $id_M = (id_{M_i} \; ; \; 0, ..., 0)$.

Para verificar la asociatividad de la composición de morfismos, sean

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} T$$

morfismos, y $x : i \dashrightarrow j$ flecha de grado 1, con diferencial

$$\delta(x) = \sum_s x_{s2}x_{s1}, \quad i \overset{x_{s1}}{\dashrightarrow} s_1 \overset{x_{s2}}{\dashrightarrow} j \quad .$$

Supóngase, además,

$$\delta(x_{s2}) = \sum_r x_{s2,r2}x_{s2,r1}, \quad s_1 \overset{x_{s2,r1}}{\dashrightarrow} r_1 \overset{x_{s2,r2}}{\dashrightarrow} j,$$

y

$$\delta(x_{s1}) = \sum_t x_{s1,t2}x_{s1,t1}, \quad i \overset{x_{s1,t1}}{\dashrightarrow} t_1 \overset{x_{s1,t2}}{\dashrightarrow} s_1 \, .$$

En primer lugar,

$$[h(gf)]^1(x) = h_j^0(gf)^1(x) + h^1(x)g_i^0 f_i^0 + \sum_s h^1(x_{s2})(gf)^1(x_{s1})$$

$$= h_j^0\left[g_j^0 f^1(x) + g^1(x) f_i^0 + \sum_s g^1(x_{s2}) f^1(x_{s1})\right] + h^1(x) g_i^0 f_i^0 +$$
$$+ \sum_s h^1(x_{s2})\left[g_{s1}^0 f^1(x_{s1}) + g^1(x_{s1}) f_i^0 + \sum_t g^1(x_{s1,t2}) f^1(x_{s1,t1})\right].$$

Haciendo un desarrollo parecido para $[(hg)f]^1(x)$, se ve que para obtener la igualdad $[h(gf)]^1(x) = [(hg)f]^1(x)$, basta verificar que

$$\sum_{s,t} h^1(x_{s2}) g^1(x_{s1,t2}) f^1(x_{s1,t1}) = \sum_{s.r} h^1(x_{s2,r2}) g^1(x_{s2,r1}) f^1(x_{s1}) \quad . \tag{0.4}$$

Para obtener (0.4), sea $\overline{V}(i,j)$ el espacio generado por las flechas $x : i - - \rightarrow j$. Se tienen transformaciones lineales

$$\begin{aligned} f^1 &: \overline{V}(i,j) \longrightarrow Hom(L_i, M_j), \\ g^1 &: \overline{V}(j,l) \longrightarrow Hom(M_j, N_l), \end{aligned}$$

con las cuales se define :

$$\overline{V}(j,l) \times \overline{V}(i,j) \longrightarrow Hom(L_i, N_j), \quad (y,x) \longmapsto g^1(y) \circ f^1(x).$$

Esta última aplicación es bilineal y entonces induce una transformación lineal:

$$g^1 \cdot f^1 : \overline{V}(j,l) \otimes_k \overline{V}(i,j) \longrightarrow Hom(L_i, N_j), \quad y \otimes x \longmapsto g^1(y) \circ f^1(x).$$

Es claro que vale la asociatividad: $\quad h^1 \cdot (g^1 \cdot f^1) = (h^1 \cdot g^1) \cdot f^1$.

Para continuar, de $\delta(x) = \sum_s x_{s2} x_{s1}$ se sigue :

$$0 = \delta^2(x) = \sum_s \delta(x_{s2}) x_{s1} - x_{s2} \delta(x_{s1}) \quad ,$$

luego:

$$\sum_s \delta(x_{s2}) x_{s1} = \sum_s x_{s2} \delta(x_{s1}) \quad , \tag{0.5}$$

y entonces
$$\sum_s (h^1 \cdot g^1)(\delta(x_{s2}))f^1(x_{s1}) = \sum_s h^1(x_{s2})(g^1 \cdot f^1)(\delta(x_{s1})),$$
que es la igualdad (0.4).

Se ha demostrado así la siguiente proposición.

1.3 Proposición. Si $(\mathcal{B},\delta,k)$ es una bigráfica diferencial, entonces la familia de sus representaciones constituye una categoría.

La categoría de las representaciones de $(\mathcal{B},\delta,k)$ se denota por $rep(\mathcal{B},\delta,k)$, o $rep(\mathcal{B})$, si no hay lugar para confusiones.

1.4 Definición. Una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,k)$, con t flechas de grado 0 se llama triangular si ellas están ordenadas como $a_1 < a_2 < ... < a_t$, de tal manera que para todo $i, 1 \leq i \leq t$, $\delta(a_i)$ se escribe como $\delta(a_i) = \sum_{j=1}^{r} b_j v_j c_j$, con los b_j , c_j caminos de grado 0, compuestos por flechas del conjunto $\{a_1, ..., a_{i-1}\}$. Se pide también que exista un orden entre las flechas de grado 1, de manera que para toda flecha x de grado 1, $\delta(x) = \sum_s x_{s2}x_{s1}$, tal que en los caminos x_{s1}, x_{s2}, aparecen únicamente flechas y de grado1, $y < x$. Una propiedad importante de las bigráficas triangulares es que un morfismo $f : L \longrightarrow M$, dado por $f = (f_i^0; f^1(x))$ es un isomorfismo si, y solamente si, los f_i^0 son isomorfismos.

2 Bocses y representaciones

2.1 Definición. Un bocs es un par (A, V) , en donde A es una k-categoría y V una $A-$coálgebra. Es decir, V es un $A - A-$ bimódulo , provisto de morfismos de bimódulos:
$$\begin{aligned} \varepsilon &: V \longrightarrow A, \\ \mu &: V \longrightarrow V \otimes_A V, \end{aligned}$$
que satisfacen:
$$\begin{aligned} (1 \otimes \mu)\mu &= (\mu \otimes 1)\mu \\ (\varepsilon \otimes 1)\mu &= 1 = (1 \otimes \varepsilon)\mu. \end{aligned} \tag{0.6}$$

El núcleo de ε se denota por $\overline{V}$.

Por definición, las representaciones del bocs (A, V) son las representaciones de la categoría A, es decir, los funtores $M : A \longrightarrow \operatorname{mod} k$. Para representaciones M , N , un morfismo $f : M \longrightarrow N$ está dado por un morfismo de A–módulos $f : V \otimes_A M \longrightarrow N$.

Para morfismos $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$, la composición $gf : M \longrightarrow L$ es el morfismo dado por la composición

$$V \otimes_A M \xrightarrow{\mu\otimes 1} V \otimes_A \otimes V \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes f} V_A \otimes_A N \xrightarrow{g} L.$$

Puede mostrarse [CB_1; M] que la composición es asociativa y que para la representación M , el morfismo $V \otimes M \longrightarrow M$, $v \otimes m \mapsto \varepsilon(v)m$, es la identidad de M. La categoría de las representaciones del bocs $\mathcal{A}$=(A, V) se denota por $rep(\mathcal{A})$

2.2 Definición. Un morfismo de bocses

$$(\theta_0, \theta_1) : (A, V) \longrightarrow (B, W)$$

está dado por un funtor $\theta_0 : A \longrightarrow B$, junto con un morfismo de $A - A$–bimódulos $\theta_1 : V \longrightarrow_A W_A$, en donde ${}_AW_A$ es el $A - A$– bimódulo obtenido de W por restricción a cada lado mediante θ_0 . Se pide que θ_0 preserve la estructura de coálgebra, es decir,

$$\begin{aligned} \theta_0(\varepsilon_V(v)) &= \varepsilon_W(\theta_1(v)) \quad ; \\ y \;\; si \;\; \mu(v) &= \sum_j v_{j2\otimes} v_{j1}, \quad \text{entonces} \;\; \mu_W(\theta_1(v)) = \sum_j \theta_1(v_{j2}) \otimes_B \theta_1(v_{j1}), \end{aligned}$$

para todo v en V.

2.3 Definición. Para cualquier k–categoría A , A es de manera trivial un A–A–bimódulo, y el par (A, A) posee una estructura de bocs, dada por $\varepsilon = 1_A : A \longrightarrow A$, $\mu : A \longrightarrow A \otimes_A A \cong A$, $f \mapsto f \otimes 1 \longleftrightarrow 1 \otimes f$. Este bocs se llama el bocs principal sobre A.

2.4 Definición. Dado un bocs (A, V), sea A' una subcategoría de A con los mismos objetos que A. Un "group-like" del bocs con respecto a A' es un morfismo de $A'-A'-$bimódulos

$$\omega : A' \longrightarrow {}_{A'}V_{A'}, \tag{0.7}$$

tal que el par $(\iota, \omega) : (A', A') \longrightarrow (A, V)$, donde $\iota : A' \longrightarrow A$ es la inclusión, es un morfismo de bocses.

Se demuestra que un morfismo ω como en (0.7) es un group-like si, y solamente si, satisface las dos condiciones siguientes, para todo vértice X:

$$\begin{aligned} \mu(\omega(1_X)) &= \omega(1_X) \otimes \omega(1_X), \\ \varepsilon(\omega(1_X)) &= 1_X \ . \end{aligned} \tag{0.8}$$

Para un bocs (A, V) con group-like ω relativo a A', existen morfismos de $A'-A'-$bimódulos δ_0, δ_1, tales que:

$$\begin{aligned} \delta_0 &: A \longrightarrow V, \quad a \mapsto \omega(1_Y)a - a\omega(1_X), \quad \text{si } a \in A(X,Y); \\ \delta_1 &: V \longrightarrow V \otimes_A V, \quad v \mapsto \mu(v) - v \otimes \omega(1_X) - \omega(1_Y) \otimes v, \quad \text{si } v \in V(X,Y). \end{aligned}$$

2.5 Observaciones. (1) Se demuestra $[CB_1, M]$que si $\overline{V}$ es el núcleo de ε, entonces :

$$\delta_0(A) \subset \overline{V}\ , \quad \delta_1(\overline{V}) \subset \overline{V} \otimes \overline{V}\ .$$

(2) El bimódulo ${}_AV_A$ se descompone en suma directa de subbimódulos :

$$V \cong \overline{V} \oplus A\ .$$

Es importante observar que $\delta_1\delta_0 = 0$.

Las consideraciones anteriores permiten describir de una manera cómoda los morfismos entre representaciones de un bocs con group-like ($[CB_1, M]$). En efecto, para un morfismo f :

$M \longrightarrow N$, dado por una transformación natural $f = (f_X)$, y para todo objeto X, se tiene una transformación lineal

$$f_X^0 : M(X) \longrightarrow N(X), \quad m \mapsto f_X(\omega(1_X) \otimes m) \;\; ;$$

asimismo, para toda $v \in V(X,Y)$, se tiene una transformación lineal

$$f^1(v) : M(X) \longrightarrow N(Y), \quad m \mapsto f_Y(v \otimes m) \;\; .$$

Queda entonces determinada una familia doble

$$f = (f_X^0 \; ; \; f^1(v)) \;\; , \tag{0.9}$$

con la propiedad de que para todo $a \in A(X,Y)$, si $\delta_0(a) = \sum_l b_l v_l c_l$ entonces se verifica

$$f_Y^0 M(a) - N(a) f_X^0 = \sum_l N(b_l) f^1(v_l) M(c_l) \;\; . \tag{0.10}$$

Recíprocamente, toda familia doble de transformaciones lineales (0.9) que verifique (0.10) para toda a, provee un morfismo $M \longrightarrow N$ ([M, 2.11]).

2.6 El funtor inducido. Si $\mathcal{A} = (A, V)$ es un bocs, y se tiene un funtor $\theta_0 : A \longrightarrow B$,para alguna categoría B , se considera el bocs inducido $\mathcal{A}^B = (B \; , \; {}^B V^B \;)$, para el $B-B-$bimódulo ${}^B V^B = B \otimes_A V \otimes_A B$, que resulta ser una coálgebra [CB_1] para la counidad y comultiplicación ε^B , μ^B siguientes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^B &= ({}^B V^B \longrightarrow {}^B A^B \cong B \otimes_A B \longrightarrow B), \\
\mu^B &= ({}^B V^B \longrightarrow {}^B V \otimes_A V^B \cong {}^B V \otimes_A A \otimes_A V^B \longrightarrow {}^B V \otimes_A B \otimes_A V^B \cong \\
&\cong \; {}^B V^B \otimes_B V^B).
\end{aligned}$$

Existe un morfismo de bocses $\theta = (\theta_0 \, , \, \theta_1)$, en donde :

$$\theta_1 = (\; V \cong A \otimes_A V \otimes_A A \longrightarrow_A B \otimes_A B_A).$$

Para toda representación N de $\mathcal{A}^B$, se pone $\theta^*(N) = N \circ \theta_0$; y para todo morfismo $f : N \longrightarrow N'$, se define

$$\theta^*(f) = (V \otimes_A ({}_AN) \longrightarrow_A ({}^BV^B)_A \otimes_A ({}_AN') \longrightarrow^B ({}_AN') \longrightarrow N') .$$

Estas fórmulas definen el funtor inducido θ^* , cuya importancia se establece a continuación.

Teorema. [BCS, CB_1] El funtor inducido $\theta^* : rep(\mathcal{A}^B) \longrightarrow rep(\mathcal{A})$ es fiel y pleno.

3 La bigráfica asociada a un bocs.

Sea (A, V) un bocs libre con group-like ω, y la categoría A libremente generada sobre la subcategoría A' por morfismos $a_1,...,a_n$, $A = A'(a_1, ..., a_n)$.

Por (2.5), el $A-A-$bimódulo $\overline{V}$ es proyectivo finitamente generado, y entonces se tiene una expresión :

$$\overline{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} Ae_{t(j)} \otimes_k Ae_{s(j)} \ ,$$

para ciertos idempotentes $e_{t(j)}, 1 \leq j \leq m$.

Para definir una bigráfica $\mathcal{B}$, se empieza por tomar los objetos X_i, Y_i , $1 \leq i \leq r$, como vértices. Para cada $i, 1 \leq i \leq n$, si $a_i \in A(X_i, Y_i)$, se define una flecha de grado 0 de X_i en Y_i, también denotada por $a_i : X_i \longrightarrow Y_i$. Para cada $j, 1 \leq j \leq m$, se define una flecha de grado 1, correspondiente al elemento $v_j = e_{t(j)} \otimes e_{s(j)} \in Ae_{t(j)} \otimes_k Ae_{s(j)}$, la cual también se denota por $v_j : X_{s(j)} - - \rightarrow X_{t(j)}$.

3.1 Proposición. En las condiciones anteriores, la bigráfica $\mathcal{B}$ posee una diferencial δ, y $(\mathcal{B}, \delta, k)$ es una bigráfica diferencial.

Demostración. Para definir una diferencial δ con las propiedades de la Definición (1.2), se utilizan las transformaciones δ_0 y δ_1 del bocs (A, V). Obsérvese que el álgebra graduada:

$$k\mathcal{B} \cong (k\mathcal{B})_0 \oplus \overline{V} \oplus (\overline{V} \otimes \overline{V}) \oplus ...$$

Para a homogéneo de grado 0, se pone $\delta(a) = \delta_0(a)$, y $\delta(v_i) = \delta_1(v_i)$. Para a, b homogéneos de grados 0 ó 1, se define $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{gr(a)} a\delta(b)$. Se extiende ahora δ por linealidad a $k\mathcal{B}$, quedando definida una transformación lineal $\delta : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}$, la cual verifica las propiedades de la definición (1.2). En efecto, (i) y (ii) se cumplen por definición de δ . Para (iii), obsérvese que $\delta(1_X) = \omega(1_X) - 1_X\omega(1_X) = 0$. Para (iv), basta tomar en cuenta que $\delta_1\delta_0 = 0$ □

Es claro que para la bigráfica diferencial asociada a un bocs con group-like, su categoría de representaciones es equivalente a la categoría de representaciones del bocs original. Asimismo, y como un adelanto al próximo apartado, al construirle a la bigráfica recién definida su correspondiente bocs, se recupera el bocs original.

4 El bocs asociado a una bigráfica.

Para una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,k)$, se define una k–categoría A , cuyos objetos son precisamente los vértices de la bigráfica; para objetos X, Y, $A(X,Y)$ es el espacio vectorial generado por las flechas de grado 0 de X en Y ; se toma $\overline{V}(X,Y)$ como el espacio generado por las flechas de grado 1 de X en Y . De esta manera se obtiene un $A-A$–bimódulo $\overline{V}$. Considérese ahora la suma de A–módulos derechos :

$$V = \overline{V} \oplus \omega A \quad ,$$

con ωA el A–módulo generado libremente por el símbolo ω.

Se define una estructura de A–módulo izquierdo sobre V, mediante:

$$\begin{aligned} a \cdot v &= av \quad , \\ a \cdot \omega &= \omega a + \delta(a). \end{aligned}$$

Es claro que V es $A-A$–bimódulo. A fin de hacer del par (A, V) un bocs, se definen transformaciones μ, ε

$$\begin{aligned} \mu &: V \longrightarrow V \otimes_A V, \quad \varepsilon : V \longrightarrow A, \quad \text{tales que:} \\ \mu(v) &= \omega \otimes v + v \otimes \omega + \delta(v), \ \ si \ \ v \in \overline{V}, \\ \mu(\omega a) &= \omega \otimes \omega a \ \ ; \\ \varepsilon(v) &= 0 \ , \ si \ \ v \in \overline{V} \ \ , \quad \varepsilon(a\omega) = a. \end{aligned}$$

4.1 Proposición. (A, V, μ, ε) , como ha sido definido, es un bocs con group-like.

Demostración. (1) Para ver que μ es morfismo de bimódulos, obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
(i) \quad \mu(a\omega a') &= \mu(\omega a a' + \delta(a)a') \\
&= \omega \otimes \omega a a' + \omega \otimes \delta(a)a' + \delta(a)a' \otimes \omega + \delta(\delta(a)a') \\
&= \omega \otimes \omega a a' + \omega \otimes \delta(a)a' + \delta(a) \otimes a' \cdot \omega - \delta(a)\delta(a') \\
&= \omega \otimes \omega a a' + \omega \otimes \delta(a)a' + \delta(a) \otimes \omega a' \quad ;
\end{aligned}
$$

por otra parte,

$$
\begin{aligned}
a\mu(\omega)a' &= a(\omega \otimes \omega)a' = (\omega a + \delta(a)) \otimes \omega a' \\
&= \omega a \otimes \omega a' + \delta(a) \otimes \omega a' \\
&= \omega \otimes a \cdot \omega a' + \delta(a) \otimes \omega a' \\
&= \omega \otimes (\omega a + \delta(a))a' + \delta(a) \otimes \omega a',
\end{aligned}
$$

y así, $\mu(a\omega a') = a\mu(\omega)a'$.

(ii) Sea ahora $v \in \overline{V}$,se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mu(ava') &= \omega \otimes ava' + ava' \otimes \omega + \delta(ava') \\
&= \omega a \otimes va' + av \otimes (\omega a' + \delta(a')) + \delta(a)va' + a\delta(v)a' - av\delta(a') \\
&= \omega a \otimes va' + av \otimes \omega a' + \delta(a)va' + a\delta(v)a' \quad ,
\end{aligned}
$$

y, por otra parte,

$$
\begin{aligned}
a\mu(v)a' &= a(\omega \otimes v + v \otimes \omega + \delta(v))a' \\
&= a \cdot \omega \otimes va' + av \otimes \omega a' + a\delta(v)a' \\
&= \omega a \otimes va' + \delta(a) \otimes va' + av \otimes \omega a' + a\delta(v)a' \quad ,
\end{aligned}
$$

y entonces $\mu(ava') = a\mu(v)a'$. De (i), (ii) se concluye que μ es morfismo de bimódulos. Fácilmente se comprueba que también ε es morfismo de bimódulos.

(2) Las igualdades de la Definición (2.1) no se comprobarán en su totalidad; como ilustración, se demostrará: $(1\otimes\mu)\mu(v) = (\mu\otimes 1)\mu(v)$, para $v\in\overline{V}$.

Supóngase

$$\begin{aligned}\delta(v) &= \sum_s v_{s2}\otimes v_{s1}\,,\\ \delta(v_{s2}) &= \sum_r v_{s2,r2}\otimes v_{s2,r1}\,,\quad \delta(v_{s1}) = \sum_t v_{s1,t2}\otimes v_{s1,t1}\,.\end{aligned}$$

La igualdad (0.5) de (1.2) se escribe en este caso como:

$$\sum_{s,t} v_{s2}\otimes v_{s1,t2}\otimes v_{s1,t1} = \sum_{s,r} v_{s2,r2}\otimes v_{s2,r1}\otimes v_{s1}\,.$$

Según la definición:

$$(1\otimes\mu)\mu(v) = \omega\otimes\mu(v) + v\otimes\mu(\omega) + (1\otimes\mu)\delta(v) \quad ;$$

asimismo,

$$\begin{aligned}(1\otimes\mu)(\delta(v)) &= \sum_s v_{s2}\otimes(\omega\otimes v_{s1} + v_{s1}\otimes\omega) + \sum_{s,t}(v_{s2}\otimes v_{s1,t2}\otimes v_{s1,t1})\\ &= \sum_s v_{s2}\otimes\omega\otimes v_{s1} + \delta(v)\otimes\omega + \sum_{s,t}(v_{s2}\otimes v_{s1,t2}\otimes v_{s1,t1})\quad .\end{aligned}$$

De manera parecida se obtiene :

$$(\mu\otimes 1)\delta(v) = \omega\otimes\delta(v) + \sum_s v_{s2}\otimes\omega\otimes v_{s1} + \sum_{s,r} v_{s2,r2}\otimes v_{s2,r1}\otimes v_{s1}\quad .$$

Con base en lo anterior se llega a :

$$\begin{aligned}(\mu\otimes 1)\mu(v) \;&=\; \omega\otimes v\otimes\omega + v\otimes\omega\otimes\omega + \delta(v)\otimes\omega + \omega\otimes\omega\otimes v +\\ &\quad +\omega\otimes\delta(v) + \sum_s v_{s2}\otimes\omega\otimes v_{s1} + \sum_{s,r} v_{s2,r2}\otimes v_{s2,r1}\otimes v_{s1}\end{aligned}$$

$$= (1 \otimes \mu)\mu(v) \ ,$$

como se quería demostrar.

(3) Para ver que el bocs posee un group-like, se considera la subcategoría A' de A, cuyos objetos inescindibles son los mismos de la categoría A, y con espacios de morfismos : $A'(X,X) = k1_X$, $A'(X,Y) = 0$, para $X \neq Y$. Se define :

$$\varpi : A' \longrightarrow_{A'} V_{A'} \ , \quad 1_X \mapsto \omega 1_X \ .$$

Entonces ϖ es morfismo de bimódulos, además es un group-like, pues

$$\begin{aligned}
\mu(\varpi(1_X)) &= \mu(\omega 1_X) = \omega \otimes \omega 1_X \ ; \\
\varpi(1_X) \otimes \varpi(1_X) &= \omega 1_X \otimes \omega 1_X = \omega \otimes (1_X \cdot \omega) 1_X \\
&= \omega \otimes (\omega 1_X + \delta(1_X)) 1_X = \omega \otimes \omega 1_X .
\end{aligned}$$

Finalmente, $\varepsilon(\varpi(1_X) = \varepsilon(\omega 1_X) = \varepsilon(1_X \omega) = 1_X$ .Así, ϖ cumple las condiciones de (0.8) □

Para terminar, obsérvese que las categorías de representaciones de la bigráfica diferencial original y la del bocs a ella asociado son equivalentes.

Asimismo, si al bocs obtenido a partir de la bigráfica se le construye la correspondiente bigráfica, se recupera la bigráfica original.

5 Cambio de anillos.

Sea $(\mathcal{B},\delta,R)$ una bigráfica diferencial, en donde R es un anillo conmutativo. Un homomorfismo de anillos conmutativos $\varphi : R \longrightarrow S$ induce un funtor

$$\underline{\varphi} : ModR \longrightarrow ModS \ ,$$

tal que $\underline{\varphi}(M) = S \otimes_R M$, y para $f : M \longrightarrow N$, $\underline{\varphi}(f) = id \otimes_R f : \underline{\varphi}(M) \longrightarrow \underline{\varphi}(N)$.

También se tiene un homomorfismo de anillos $\hat{\varphi} : R\mathcal{B} \longrightarrow S\mathcal{B}$, tal que

$\widehat{\varphi}(\sum_i r_i h_i) = \sum_i \varphi(r_i)h_i$, para $r_i \in R$, $h_i \in \mathcal{B}$.

Por definición, un morfismo R-lineal $F : R\mathcal{B} \longrightarrow R\mathcal{B}$ se llama homogéneo de grado s si $F((R\mathcal{B})_i) \subset (R\mathcal{B})_{i+s}$ para todo i. Es claro que si, además, $G : R\mathcal{B} \longrightarrow R\mathcal{B}$ es homogéneo de grado t, entonces GF es homogéneo de grado $s+t$.

Si $F : R\mathcal{B} \longrightarrow R\mathcal{B}$ es un homomorfismo homogéneo de grado s ,entonces $\underline{\varphi}(F) : S\mathcal{B} \longrightarrow S\mathcal{B}$ es homogéneo de grado s y además el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} R\mathcal{B} & \xrightarrow{F} & R\mathcal{B} \\ \widehat{\varphi}\downarrow & & \downarrow\widehat{\varphi} \\ S\mathcal{B} & \xrightarrow[\underline{\varphi}(F)]{} & S\mathcal{B} \end{array} .$$

5.1 Proposición. Si $(\mathcal{B},\delta,R)$ es bigráfica diferencial, y $\varphi : R \longrightarrow S$ es morfismo de anillos conmutativos, entonces $(\mathcal{B}, \underline{\varphi}(\delta),S)$ también es bigráfica diferencial.

Demostración. El $R-$morfismo $\delta : R\mathcal{B} \longrightarrow R\mathcal{B}$ es homogéneo de grado 1,y entonces $\underline{\varphi}(\delta) : S\mathcal{B} \longrightarrow S\mathcal{B}$ es homogéneo de grado 1. Para probar (ii) de (1.2) , es suficiente hacerlo para elementos de una $S-$base de $S\mathcal{B}$, por ejemplo, los caminos en $\mathcal{B}$. Sean entonces z, z' caminos en $\mathcal{B}$, $z, z' \in S\mathcal{B}$, entonces $z = \widehat{\varphi}(z)$, $z' = \widehat{\varphi}(z')$, siendo z, z' también caminos en $R\mathcal{B}$. Se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(\delta)(zz') &= \underline{\varphi}(\delta)\widehat{\varphi}(zz') = \widehat{\varphi}\delta(zz') = \widehat{\varphi}\left[\delta(z)z' + (-1)^{gr z}z\delta(z')\right] \\ &= \left[\underline{\varphi}(\delta)\widehat{\varphi}(z)\right]\widehat{\varphi}(z') + (-1)^{gr z}\widehat{\varphi}(z')\underline{\varphi}(\delta)(\widehat{\varphi}(z')) \\ &= (\underline{\varphi}(\delta)(z))z' + (-1)^{gr z}z\underline{\varphi}(\delta)(z') \ . \end{aligned}$$

Para un camino trivial e_i , $\underline{\varphi}(\delta)(e_i) = \widehat{\varphi}(e_i) = 0$. Finalmente, $\underline{\varphi}(\delta)\underline{\varphi}(\delta) = \underline{\varphi}(\delta^2) = 0$ □

Se denota $(\mathcal{B}, \underline{\varphi}(\delta),S)$=$(\mathcal{B},\delta,R)_\varphi$.

5.2 Definición. Si $\varphi : R \longrightarrow S$ es la inclusión y además para una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,S)$, para toda flecha γ en $\mathcal{B}$, se tiene $\delta(\gamma) \in R\mathcal{B}$, entonces es claro que se verifica : $(\mathcal{B},\delta,S)$=$(\mathcal{B},\delta,R)_\varphi$. En este caso se dice que $(\mathcal{B},\delta,S)$ está definida sobre R , o que $(\mathcal{B},\delta,S)$ es una extensión de $(\mathcal{B},\delta,R)$.

Un caso de interés es cuando se tiene una bigráfica $(\mathcal{B},\delta(x),k(x))$ sobre el campo $k(x)$, pues entonces, por ser $\mathcal{B}$ finita, tanto en vértices como en flechas, existe un polinomio $h(x) \in k[x]$, tal que $(\mathcal{B},\delta(x),k(x))$ es extensión de $(\mathcal{B},\delta(x),k[x]_{h(x)})$, para la inclusión $k[x]_{h(x)} \hookrightarrow k(x)$.

5.3 Proposición. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos conmutativos. Se tiene un funtor

$$E_{\varphi} : rep((\mathcal{B},\delta,R)) \longrightarrow rep((\mathcal{B},\delta,S)_{\varphi}) = rep((\mathcal{B},\underline{\varphi}(\delta),S)) ,$$

tal que :

$$\begin{aligned} M &\mapsto \underline{\varphi}(M) = S \otimes_R M \ ; \\ f &= (f_i^0; f^1(x)) \mapsto (\underline{\varphi}(f_i^0); \underline{\varphi}(f^1(x))). \end{aligned}$$

Demostración. Unicamente se demostrará que la imagen de un morfismo es un morfismo.

Sea $f : M \longrightarrow N$ en $rep((\mathcal{B},\delta,R))$, y $a : i \longrightarrow j$ flecha de grado 0, con $\delta(a) = \sum_t \lambda_t b_t x_t c_t$, con los $\lambda_t \in R$. Entonces $(\underline{\varphi}(\delta))(a) = \sum_t \varphi(\lambda_t) b_t x_t c_t$ y además,

$$\begin{aligned} E_{\varphi}(f)((\underline{\varphi}(\delta))(a)) &= \sum_t \varphi(\lambda_t)(E_{\varphi}N)(b_t)\underline{\varphi}(f^1(x_t))(E_{\varphi}M)(c_t) \\ &= \sum_t \varphi(\lambda_t)(1 \otimes N(b_t)(1 \otimes f^1(x_t))(1 \otimes M(c_t)) \\ &= \sum_t 1 \otimes \lambda_t N(b_t) f^1(x_t) M(c_t) \\ &= 1 \otimes \sum_t \lambda_t N(b_t) f^1(x_t) M(c_t) \\ &= 1 \otimes f(\delta(a)) \\ &= 1 \otimes (f_j^0 M(a) - N(a) f_i^0) \\ &= (1 \otimes f_j^0)(1 \otimes M(a)) - (1 \otimes N(a))(1 \otimes f_i^0) \\ &= E_{\varphi}(f_j^0) E_{\varphi}M(a) - E_{\varphi}N(a) E_{\varphi}(f_i^0) \ \square \end{aligned}$$

El siguiente tema se utilizará en el Capítulo 3.

Supóngase que se tienen una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,R)$ y en ella $\alpha : i \longrightarrow i$, lazo de grado 0, con $\delta(\alpha) = 0$, y sea $\lambda \in R$. Se considera el ideal J en $R\mathcal{B}$

, generado por $\alpha - \lambda e_i$. Entonces se tiene un ideal $I = J \cap (R\mathcal{B})_0$ en $A = (R\mathcal{B})_0$, generado por $\alpha - \lambda e_i$. De $\delta(J) \subset J$ se obtiene una diferencial $\delta_\lambda : \frac{R\mathcal{B}}{J} \longrightarrow \frac{R\mathcal{B}}{J}$. Se tiene también un isomorfismo de anillos $f : \frac{R\mathcal{B}}{J} \longrightarrow R\mathcal{B}_\alpha$, en donde la bigráfica $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B} \setminus \{\alpha\}$, el cual está dado por $f(\alpha) = \lambda e_i$ y $f(\gamma) = \gamma$, si γ es una flecha $\neq \alpha$. Se tiene entonces una bigráfica diferencial $(\mathcal{B}_\alpha, \delta_\lambda, R)$.

Para el bocs (V, μ, ε), asociado a la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta, R)$ considerada, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \frac{\overline{V}}{I\overline{V} + \overline{V}I + \delta(I)} \longrightarrow \frac{V}{IV + VI} \xrightarrow{\varepsilon_I} \frac{A}{I} \longrightarrow 0 ,$$

y además, $\frac{A}{I} \cong (R\mathcal{B}_\alpha)_0$, $\frac{\overline{V}}{IV+VI} \cong (R\mathcal{B}_\alpha)_1$.

5.4 Proposición. Los bocses $\mathcal{A}_I = (\frac{A}{I}, \frac{V}{IV+VI}, \mu_I, \varepsilon_I)$ y el bocs asociado a la bigráfica $(\mathcal{B}_\alpha, \delta_\lambda, R)$ son isomorfos.

Demostración. Se define un morfismo de $A - A$–bimódulos

$$\Psi : \frac{V}{IV + VI} \longrightarrow \frac{\overline{V}}{I\overline{V} + \overline{V}I},$$

tal que para $v \in V = \overline{V} \oplus \omega A$, $v = v' + \omega a$, $\Psi(v + IV + VI) = v' + I\overline{V} + \overline{V}I$. Su inverso está dado por $v' + I\overline{V} + \overline{V}I \mapsto v' + \omega + IV + VI$ □

La siguiente afirmación se demuestra sin dificultad.

5.5 Proposición. El siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} rep\mathcal{A}(\mathcal{B}_\alpha, \delta_\lambda, R) & \xrightarrow{F_R} & rep\mathcal{A}(\mathcal{B}, \delta, R) \\ E_\varphi \downarrow & & \downarrow E_\varphi \\ rep\mathcal{A}(\mathcal{B}, \underline{\varphi}(\delta), S) & \xrightarrow[F_S]{} & rep\mathcal{A}(\mathcal{B}_\alpha, \underline{\varphi}(\delta)_{\varphi(\lambda)}, S) \end{array} \qquad \square.$$

Capítulo 2

Algoritmos de reducción

Los algoritmos de reducción para bocses, introducidos por Kleiner, Roiter y Drozd, se originaron en ciertos problemas matriciales. Formulados en el contexto de las "categorías diferenciales graduadas" $[D_1, D_2, Ro, RK]$ en un inicio, fueron posteriormente formalizados para bocses $[BCS, CB_1, Ro]$. En este capítulo se estudian los algoritmos de reducción para bigráficas diferenciales.

Se realiza una descripción de cada uno de los algoritmos : regularización, eliminación de objetos, reducción de una flecha y "unravelling", es decir, se determina en cada caso la nueva bigráfica diferencial obtenida por su aplicación. Se estudia el comportamiento de la norma de una representación, frente a cada algoritmo, pues de aquí surge la posibilidad de argumentar inductivamente, una y otra vez y en diversas situaciones, al estilo de la demostración original del Teorema manso-salvaje de Drozd.

1 Norma y forma cuadrática

1.1 Definición. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$. Para cada par de vértices i , j , se denota con m_{ij} el número de flechas de grado 0 que hay entre ellos, en cualquier sentido; con n_{ij} se denota el número de flechas de grado 1 entre i y j . La norma de una representación M de $\mathcal{B}$ se define como :

$$\|M\| = \sum_{i,j=1}^{r} m_{ij} \dim M_i \dim M_j \quad .$$

1.2 Definición. Con las mismas notaciones de la Definición anterior, la forma cuadrática de la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta, k)$ se define como la aplicación

$$q_{\mathcal{B}} : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z} \,,$$

dada por

$$q_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i,j=1}^{r} m_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j=1}^{r} n_{ij}x_ix_j \ .$$

2 Primer algoritmo: regularización

2.1 Lema. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, \ldots, X_r$ y estratificación $(a_1, \ldots, a_n; v_1, \ldots, v_m)$. Supóngase que $\delta(a_1) = v_1$. Entonces para toda representación M de $\mathcal{B}$ existe una representación $\underline{M}$ de $\mathcal{B}$ y un isomorfismo $g : M \longrightarrow \underline{M}$, tal que $M'(a_1) = 0$. Además, para todo morfismo $f : M \longrightarrow M'$, existe un morfismo $\underline{f} : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}'$, tal que $(\underline{f})^1(v_1) = 0$ y el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ \underline{M} & \xrightarrow[\underline{f}]{} & \underline{M}' \end{array} .$$

Demostración. (i) Supóngase $a_1 : X_1 \longrightarrow X_2$, $v_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$. Para $M \in rep(\mathcal{B}, \delta, k)$ se construirán simultáneamente $\underline{M}$ y un isomorfismo $g : M \longrightarrow \underline{M}$, dado por $g = (g_i^0 \ ; \ g^1(v_j))$. En primer lugar, se toma $\underline{M}_i = M_i$, y $g_i^0 = id_{M_i}$. Además, se toma $\underline{M}(a_1) = 0$. Obsérvese que, de $\delta(a_1) = v_1$, se ha de tener $M(a_1) - \underline{M}(a_1) = g^1(v_1)$, así que se define : $g^1(v_1) = M(a_1)$.

Para definir $\underline{M}(a_{i+1})$, con $1 \leq i \leq n-1$, supóngase que ya se han definido $\underline{M}(a_1), \ldots, \underline{M}(a_i)$. Se tiene $\delta(a_{i+1}) = \sum_{j=1}^{m} b_jv_jc_j$, con los b_j, c_j caminos triviales o compuestos de flechas del conjunto $\{a_1, \ldots, a_i\}$. Se define $g^1(v_j) = 0$, para $j \geq 2$. Obsérvese que está bien definido $\underline{M}(b_j)$, $j \geq 2$. Ahora se define $\underline{M}(a_{i+1}) = M(a_{i+1}) - \sum_{j=1}^{m} \underline{M}(b_j)f^1(v_j)M(c_j) = M(a_{i+1}) - \underline{M}(b_1)M(a_1)M(c_1)$. Se obtiene así un morfismo

$$g = (g_i^0 = id_{M_i} \ ; \ g^1(v_1) = M(a_1), g^1(v_j) = 0, j \geq 2) : M \longrightarrow \underline{M} \ .$$

Para comprobar que g es morfismo, obsérvese que para la flecha a_1 vale :

$$M(a_1) - \underline{M}(a_1) = M(a_1) - 0 = g^1(v_1) = g^1(\delta(a_1)).$$

Continuando, para a_{i+1}, se tiene :

$$M(a_{i+1}) - \underline{M}(a_{i+1}) = \underline{M}(b_1)M(a_1)M(c_1) = g^1(\delta(a_{i+1})).$$

Finalmente, el morfismo g es un isomorfismo, con inverso

$$g^{-1} = (id_{M_i} \; ; \; (g^{-1})^1(v_1) = -M(a_1), (g^{-1})^1(v_j) = 0, j \geq 2).$$

(ii) Si se tiene un morfismo $f : M \longrightarrow M'$, sea $h = g'fg^{-1} : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}'$. De $\delta(a_1) = v_1$, se sigue $\delta(v_1) = 0$, y entonces : $(fg^{-1})^1(v_1) = f^1(v_1) - M(a_1)$, por lo cual $(g'fg^{-1})^1(v_1) = M'(a_1) + f^1(v_1) - M(a_1) = 0$, pues f es morfismo, y entonces $M(a_1) - M'(a_1) = f^1(v_1)$. Basta tomar entonces, $\underline{f} = g'fg^{-1}$. □

2.2 Regularización. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$. Supóngase que $\delta(a_1) = v_1$. Se describe a continuación la regularización.

Se define una bigráfica $\mathcal{B}'_{a_1,v_1}$, con los mismos vértices de $\mathcal{B}$. Sus flechas de grado 0 son $a_2, ..., a_n$; las de grado 1 son $v_2, ..., v_m$.

Se tiene la inclusión de los anillos $\iota : k\mathcal{B}'_{a_1,v_1} \longrightarrow k\mathcal{B}$. Además, se define un homomorfismo de anillos $t_0 : (k\mathcal{B})_0 \longrightarrow (k\mathcal{B}'_{a_1,v_1})_0$, poniendo en los generadores del primero :

$$t_0(e_i) = e_i \; ; t_0(a_1) = 0, \; t_0(a_i) = a_i \; , \; i \geq 2 \; .$$

Asimismo, se define un homomorfismo de $A-$bimódulos, con $A = (k\mathcal{B})_0$,
$t_1 : (k\mathcal{B})_1 \longrightarrow (k\mathcal{B}'_{a_1,v_1})_1$, poniendo en los generadores :

$$t_1(v_1) = 0, \; t_1(v_j) = v_j \; , \; j \geq 2 \, .$$

Se tiene entonces un homomorfismo de anillos $t : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}'_{a_1,v_1}$, inducido por (t_0, t_1). Se define $\delta' = t\delta\iota : k\mathcal{B}'_{a_1,v_1} \longrightarrow k\mathcal{B}'_{a_1,v_1}$, y entonces el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} k\mathcal{B} & \xrightarrow{\delta} & k\mathcal{B} \\ \iota \uparrow & & \downarrow t \\ k\mathcal{B}'_{a_1,v_1} & \xrightarrow{\delta'} & k\mathcal{B}'_{a_1,v_1} \end{array}$$

Sin mayor dificultad se comprueba que δ' es una diferencial sobre $\mathcal{B}'_{a_1,v_1}$. Se hará, a modo de ejemplo, únicamente la siguiente comprobación : $(\delta')^2 = t\delta(\iota t)\delta\iota = t(\delta\iota)\delta\iota = t\delta^2\iota = 0$.

Para cualquier flecha $a \neq a_1$ de grado 0 en $\mathcal{B}$, con

$$\delta(a) = \sum_j b_j v_j c_j,$$

un cálculo sencillo muestra que

$$\delta'(a) = \sum_{j \neq 1, b_j, c_j \notin \langle a_1 \rangle} b_j v_j c_j.$$

2.3 Proposición. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$, tal que $\delta(a_1) = v_1$.

Para la bigráfica $(\mathcal{B}', \delta', k)$ obtenida por regularización, se tiene una equivalencia

$$F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k) \ .$$

Demostración. Para $N \in rep(\mathcal{B}')$, se define $F(N) = M \in rep(\mathcal{B})$ así:

$$M_i = N_i \ ;$$
$$M(a_1) = 0 \ , \ M(a_j) = N(a_j) \ , \ j \geq 2 \ .$$

Para un morfismo $f' : N \longrightarrow N'$, dado por $f' = ((f')^0_i \ ; \ (f')^1(v_j), j \geq 2)$, se define $f = ((f')^0_i \ ; \ f^1(v_1) = 0 \ , \ f^1(v_j) = (f')^1(v_j), j \geq 2)$. Para toda $a : X_s \longrightarrow X_t$ de grado 0 en $\mathcal{B}$, se tiene : $f^0_t M(a) - M'(a) f^0_s = f^0_t N(a) - N'(a) f^0_s = f'(\delta'(a)) = f(\delta(a))$. Luego $f : F(N) \longrightarrow F(N')$ es morfismo. Se pone : $f = F(f')$. Es claro que se tiene un funtor $F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k)$.

Para ver que F es denso, sea $M \in rep(\mathcal{B})$. Por el Lema (2.1), existe $M' \in rep(\mathcal{B})$, tal que $M'(a_1) = 0$, $M' \cong M$. Se define $N \in rep(\mathcal{B}')$ así :

$$N_i = M'_i \ , \ 1 \le i \le r \ ;$$
$$N(a_j) = M'(a_j) \ , \ 2 \le j \le m \ .$$

Entonces $F(N) = M' \cong M$.

Para ver que F es pleno, sean $N, N' \in rep(\mathcal{B}')$, además, $M = F(N), M' = F(N')$.Puede suponerse que $M(a_1) = M'(a_1) = 0$. Si se tiene un morfismo $f : M \longrightarrow M'$ en $rep(\mathcal{B})$, también puede suponerse $f^1(v_1) = 0$. Se define la familia doble

$$f' = (f_i^o \ ; \ (f')^1(v_j) = f^1(v_j) \, , \, j \ge 2) \ .$$

Entonces $f' : N \longrightarrow N'$ es morfismo en $rep(\mathcal{B}')$. En efecto, sea $a : X_s \longrightarrow X_t$ una flecha de grado 0 en $\mathcal{B}'$, necesariamente $a \neq a_1$. De $M(a_1) = M'(a_1) = 0$, y $f^1(v_1) = 0$, se sigue que $f'(\delta'(a)) = f(\delta(a))$, por lo cual , tomando en cuenta que f es morfismo, $(f')^0_t N(a) - N'(a)(f')^0_s = f^0_t M(a) - M'(a) f^0_s = f(\delta(a)) = f'(\delta'(a))$.

Es fácil ver que F es fiel □

2.4 Proposición. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$, tal que $\delta(a_1) = v_1$. Si se regulariza, entonces para la equivalencia

$$F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$$

del Teorema (2.3) , se verifica :

(i) si $M \cong F(N)$, entonces : $\underline{\dim} N = \underline{\dim} M$;

(ii) si $a_1 : X_i \longrightarrow X_j$, y $M \cong F(N)$, entonces :

$$\|N\| = \|M\| - \dim M_i \dim M_j \ .$$

En particular si la representación M es sincera, $\|N\| < \|M\|$;

(iii) para las formas cuadráticas, si $M \cong F(N)$, entonces :

$$q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) = q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) \ .$$

Demostración. La afirmación (ii) resulta de que en $\mathcal{B}$ se elimina la flecha a , de grado 0. La afirmación (iii) es consecuencia de que se eliminan a_1, v_1 , con grados diferentes y los mismos extremos □

3 Segundo algoritmo : eliminación de objetos

3.1 Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$. Sea l arbitrario , $1 \leq l \leq r$. Se define la bigráfica $\mathcal{B}'_l$ con los mismos vértices de $\mathcal{B}$, menos el vértice X_l . Las flechas de $\mathcal{B}'_l$ son todas las de $\mathcal{B}$, excepto aquellas con algún extremo en l .

Sea C el conjunto de las flechas de grado 0 de $\mathcal{B}'_l$, y T el de sus flechas de grado 1.

El álgebra $A' = (k\mathcal{B}'_l)_0$ es subálgebra de $A = (k\mathcal{B})_0$ (aunque $1_{A'} \neq 1_A$) y se tiene una inmersión de A'−subbimódulos $(k\mathcal{B}'_l)_1 \subset (k\mathcal{B})_1$, los cuales inducen una inmersión de anillos $\iota : k\mathcal{B}'_l \hookrightarrow k\mathcal{B}$.

Se definirá ahora un homomorfismo de anillos $t : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}'_l$, inducido por (t_0 , t_1) , en donde $t_0 : (k\mathcal{B})_0 \longrightarrow (k\mathcal{B}'_l)_0$ es el homomorfismo de anillos, tal que

$$\begin{aligned} e_l &\mapsto 0 \ , \ e_i \mapsto e_i \ , i \neq l \ ; \\ a_i &\mapsto 0 \ , \ a_i \notin C \ , \ a_i \mapsto a_i \ , \ a_i \in C \ . \end{aligned}$$

El morfismo de A'−bimódulos $t_1 : (k\mathcal{B})_1 \longrightarrow (k\mathcal{B}'_l)_1$, se define por

$$v_i \mapsto 0 \ , \ v_i \notin T \ , \ v_i \mapsto v_i \ , \ v_i \in T \ .$$

Poniendo $\delta' = t\delta\iota$, el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} k\mathcal{B} & \xrightarrow{\delta} & k\mathcal{B} \\ \iota \uparrow & & \downarrow t \\ k\mathcal{B}'_l & \xrightarrow[\delta']{} & k\mathcal{B}'_l \end{array} .$$

De manera parecida a como se hizo para el algoritmo anterior, se comprueba que δ' es una diferencial en $\mathcal{B}'_l$. Para toda flecha de grado 0 en $\mathcal{B}'_l$, si

$$\delta(a) = \sum_j b_j v_j c_j \ ,$$

entonces

$$\delta'(a) = \sum_{b_j, c_j \in (C); v_j \in T} b_j v_j c_j \ .$$

Se hacen las siguientes observaciones :

(i) Para $M \in rep(\mathcal{B},\delta,k)$, tal que $M_l = 0$, se define $N \in rep(\mathcal{B}',\delta',k)$ así :

$$\begin{aligned} N_i &= M_i \ , \ i \neq l \ ; \\ N(a_i) &= M(a_i) \ , \ a_i \in C \ . \end{aligned}$$

En este caso, se escribe $M = F(N)$.

Para un morfismo $f : M \longrightarrow M'$en $rep(\mathcal{B},\delta,k)$, dado por $f = (f_i^0 \ ; \ f^1(v_j))$, se define

$$f' = (f_i^0 \ , \ i \neq l \ ; \ (f')^1(v_j) = f^1(v_j) \ , v_j \in T) \ .$$

Fácilmente se muestra que $f' : N \longrightarrow N'$, define un morfismo, debido a que : $f'(\delta')(a) = f(\delta(a))$. Se escribe $f = F(f')$.

(ii) Se define un funtor

$$F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k) \quad ,$$

tal que, para $N \in rep(\mathcal{B}',\delta',k)$, $F(N) = M$ está dado por :

$$M_i = N_i \ , i \neq l \ ; \quad M_l = 0 \ ;$$

y para $f' : N \longrightarrow N'$, dado por $f' = (((f')^0_i \ , i \neq l \ ; (f')^1(v_j) \ , v_j \in T)$, se toma $F(f') = ((f^0_i \ , i \neq l \ , f^0_l = 0 \ ; \ f^1(v_j) = (f')^1(v_j) \ , v_j \in T \ , f^1(v_j) = 0 \ , v_j \notin T))$. Entonces $F(f') : F(N) \longrightarrow F(N')$ es un morfismo en $rep(\mathcal{B},\delta,k)$.

3.2 Proposición. Sea $(\mathcal{B},\delta,k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1,...,X_r$ y estratificación $(a_1,...,a_n; v_1,...,v_m)$. Sea l arbitrario , $1 \leq l \leq n$. Si se elimina el vértice l , entonces el funtor

$$F : rep(\mathcal{B}',\delta',k) \longrightarrow rep(\mathcal{B},\delta,k) \ ,$$

de (3.1) establece una equivalencia entre $rep(\mathcal{B}',\delta',k)$ y la subcategoría plena de $rep(\mathcal{B},\delta,k)$ formada por las representaciones M , tal que $M_l = 0$. Además, si $M \cong F(N)$ se verifican las relaciones :

$$\begin{aligned} \|N\| &= \|M\| \ ; \\ q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N) &= q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) \ . \end{aligned}$$

Es claro que si se eliminan varios vértices de la bigráfica $\mathcal{B}$, sigue siendo válida la anterior proposición, con los cambios adecuados.

4 Tercer algoritmo : reducción de una flecha.

Sea $(\mathcal{B},\delta,k)$ una bigráfica diferencial triangular, con estratificación $(a_1,...,a_n; v_1,...,v_m)$. Supóngase que para una flecha de grado 0, $\alpha : X_i \longrightarrow X_j$, $X_i \neq X_j$, $\delta(\alpha) = 0$.

Renumerando los vértices en caso necesario, puede suponerse $X_i = X_1$, $X_j = X_2$, y que el conjunto de vértices es : $X_1, X_2, X_4, ..., X_r$ (no existe X_3).

4.1 Se definirá a continuación una nueva bigráfica $\mathcal{B}'$, para la cual se construirá después una diferencial δ'.

Los vértices de $\mathcal{B}'$ son : $X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_r$ (se introdujo X_3).

Se definen dos flechas de grado 1 en $\mathcal{B}'$: $X_1 \xleftarrow{x} - - X_3 \xleftarrow{y} - - X_2$.

Las flechas de grado 0 en $\mathcal{B}'$ son las siguientes : Toda flecha $a : X_p \longrightarrow X_q$ de grado 0 en $\mathcal{B}$, $a \neq \alpha$, determina 1, 2 ó 4 flechas de grado 0 en $\mathcal{B}'$, de acuerdo a la siguiente regla :

(1) si $p, q \neq 1, 2$, se tiene una flecha $a_{11} : X_p \longrightarrow X_q$;

(2.1) si $a : X_1 \longrightarrow X_q$, $q \neq 1, 2$, entonces se tienen 2 flechas : $a_{11} : X_1 \longrightarrow X_q$, $a_{12} : X_3 \longrightarrow X_q$;

(2.2) si $a : X_p \longrightarrow X_1$, $p \neq 1, 2$, se tienen : $a_{11} : X_p \longrightarrow X_1, a_{21} : X_p \longrightarrow X_3$;

(3.1) todo lazo $a : X_1 \longrightarrow X_1$ determina 4 flechas :

$$a_{11} : X_1 \longrightarrow X_1, a_{12} : X_3 \longrightarrow X_1, a_{21} : X_1 \longrightarrow X_3, a_{22} : X_3 \longrightarrow X_3;$$

(3.2) similarmente, todo lazo $a : X_3 \longrightarrow X_3$, define 4 flechas :

$$a_{11} : X_3 \longrightarrow X_3, a_{12} : X_2 \longrightarrow X_3, a_{21} : X_3 \longrightarrow X_2, a_{22} : X_2 \longrightarrow X_2;$$

(4.1) toda $a : X_1 \longrightarrow X_2, a \neq \alpha$, define 4 flechas :

$$a_{11} : X_1 \longrightarrow X_3, a_{12} : X_3 \longrightarrow X_3, a_{21} : X_1 \longrightarrow X_2, a_{22} : X_3 \longrightarrow X_2;$$

(4.2) similarmente, para $a : X_2 \longrightarrow X_1$, se tienen 4 flechas :

$$a_{11} : X_3 \longrightarrow X_1, a_{12} : X_2 \longrightarrow X_1, a_{21} : X_3 \longrightarrow X_3, a_{22} : X_2 \longrightarrow X_3.$$

Las flechas de grado 1 en $\mathcal{B}'$, además de las ya definidas x, y, se obtienen a partir de cada flecha $v : X_p - - \rightarrow X_q$, de grado 1 en $\mathcal{B}$, según la regla recién explicada para las flechas de grado 0.

Se utilizará de ahora en adelante la siguiente notación matricial para las flechas de $\mathcal{B}'$, según los casos anteriores :

(1) $A_a = (a_{11})$,

(2.1) $A_a = (a_{11}, a_{12})$, (2.2) $A_a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$,

(3.1, 3.2, 4.1, 4.2) $A_a = (a_{ij})\,, 1 \leq i,j \leq 2$.

Sea e_3 el idempotente en X_3 ; se define la matriz $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De la misma manera, se construye una matriz A_v, para cada flecha v de grado 1 en $\mathcal{B}$.

Para un camino $\gamma = \gamma_1 ... \gamma_s$ en $\mathcal{B}$, con gr$(\gamma_i) \in \{0,1\}$, se define la matriz $A_\gamma = A_{\gamma_1} ... A_{\gamma_s}$; y para una combinación lineal de caminos $u = \sum_i c_i\gamma_i$, se define la matriz : $A_u = \sum_i c_i A_{\gamma_i}$.

También se introduce, para todo vértice X_p en $\mathcal{B}$, la matriz Y_p, dada por :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ Y_p = 0, \ \text{si } p \neq 1,2.$$

Para una flecha a_s de grado 0 en $\mathcal{B}$, se utiliza también la notación matricial $A_{a_s} = (a_{ij}^{(s)})$, con los índices en los rangos adecuados.

Para matrices $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$ con entradas en $k\mathcal{B}'$, XY denotará el producto usual de matrices con entradas en dicho anillo. Una matriz $X = (x_{ij})$ con entradas en $k\mathcal{B}'$ se llama homogénea, si todas sus entradas x_{ij} tienen el mismo grado; en este caso se escribe : $grX = grx_{ij}$. También se define $grY_i = 1$, $i = 1,2$.

4.2 Definición. Para toda flecha $a : X_p \longrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, $gr(a)$=0, $a \neq \alpha$, se define la matriz

$$\delta'(A_a) = Y_q A_a - A_a Y_p + A_{\delta(a)}.$$

Asimismo, para $v : X_p \dashrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, gr(v)=1, se define la matriz

$$\delta'(A_v) = Y_q A_v + A_v Y_p + \sum_s A_{v_{s2}} A_{v_{s1}} \ ,$$

en donde $\delta(v) = \sum_s v_{s2} v_{s1}$.

También se define : $\delta'(A_\alpha) = 0$, $\delta'(Y_l) = Y_l^2$.

Para matrices homogéneas X, Y es válida la regla de Leibnitz, a saber,

$$\delta'(XY) = \delta'(X)Y + (-1)^{gr(X)} X \delta'(Y).$$

En efecto, para $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij})$, se tiene :

$$\begin{aligned}
(\delta'(X)Y + (-1)^{gr(X)} X\delta'(Y))_{ij} &= \sum_l \delta'(x_{il}) y_{lj} + \sum_l (-1)^{grx_{il}} x_{il} \delta'(y_{lj}) \\
&= \sum_l \delta'(x_{il}) y_{lj} + (-1)^{grx_{il}} x_{il} \delta'(y_{lj}) \\
&= \sum_l \delta'(x_{il} y_{lj}) = \delta'(\sum_l x_{il} y_{lj}) \\
&= \delta'((XY)_{ij}) = (\delta'(XY))_{ij}.
\end{aligned}$$

Se hace la observación de que en la anterior definición se tiene

$$\delta'(A_h) = Y_q A_h - (-1)^{grh} A_h Y_p + A_{\delta(h)} \ ,$$

para h flecha de p en q.

4.3 Lema. $(\delta')^2 = 0$.

Demostración. Por la regla de Leibnitz, es suficiente demostrar que $(\delta')^2(A_a) = 0, (\delta')^2(A_v) = 0$, con gr($a$)=0, gr($v$)=1.

(i) Para $a : X_p \longrightarrow X_q, a \neq \alpha$,

$$\begin{aligned}
(\delta')^2(A_a) &= \delta'(Y_q A_a - A_a Y_p + A_{\delta(a)}) \\
&= \delta'(Y_q)A_a - Y_q \delta'(A_a) - \delta'(A_a) Y_p -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -A_a\delta'(Y_p)+\delta'(A_{\delta(a)}) \\
= \ & (Y_qY_q)A_a - Y_q(Y_qA_a)+ \\
& +Y_qA_aY_p - Y_qA_{\delta(a)} - Y_qA_aY_p + \\
& +A_a(Y_pY_p) - A_{\delta(a)}Y_p - \\
& -A_aY_pY_p + \delta'(A_{\delta(a)}) \\
= \ & -Y_qA_{\delta(a)} - A_{\delta(a)}Y_p + \delta'(A_{\delta(a)}) \\
= \ & 0 \ ,
\end{aligned}
$$

puesto que de $\delta(\delta(a)) = 0$, se sigue que $\delta'(A_{\delta(a)}) = Y_qA_{\delta(a)} + A_{\delta(a)}Y_p$. Como esta última afirmación no es del todo inmediata, se demuestra a continuación.

Es suficiente hacerlo para el caso $\delta(a) = bvc$, y luego extenderlo por linealidad en general.

De $0 = \delta(bvc) = \delta(b)vc + b\delta(v)c - bv\delta(c)$, se tiene:

$$
0 = A_{\delta(b)}A_vA_c + A_bA_{\delta(v)}A_c - A_bA_vA_{\delta(c)} \ ,
$$

lo cual se utiliza en el siguiente desarrollo.

De $A_{\delta(a)} = A_bA_vA_c$, se sigue :

$$
\begin{aligned}
\delta'(A_{\delta(a)}) &= \delta'(A_b)A_vA_c + A_b\delta'(A_v)A_c - A_bA_v\delta'(A_c) \\
&= Y_qA_bA_vA_c + A_bA_vA_cY_p \\
&= Y_qA_{\delta(a)} + A_{\delta(a)}Y_p.
\end{aligned}
$$

(ii) Para $v : X_p \dashrightarrow X_q$, sean

$$
\begin{aligned}
\delta(v) &= \sum_s v_{s2}v_{s1}, \\
\delta(v_{s2}) &= \sum_r v_{s2,r2}v_{s2,r1}, \quad \delta(v_{s1}) = \sum_t v_{s1,t2}v_{s1,t1},
\end{aligned}
$$

en donde :

$$
X_p \overset{v_{s_1}}{\dashrightarrow} X_{s_1}, \quad X_p \overset{v_{s1,t1}}{\dashrightarrow} X_{t_1} \overset{v_{s1,t2}}{\dashrightarrow} X_{s_1},
$$

$$X_{s1} \overset{v_{s2}}{\dashrightarrow} X_q, \quad X_s \overset{v_{s2,r1}}{\dashrightarrow} X_{r_1} \overset{v_{s2,t2}}{\dashrightarrow} X_q.$$

Se tiene :

$$\begin{aligned}
(\delta')^2(A_v) &= Y_qY_qA_v - Y_qY_qA_v - Y_qA_vY_p - \\
&\quad - \sum_s Y_qA_{v1_{s2}}A_{v_{s1}} + Y_qA_vY_p + \\
&\quad + A_vY_pY_p + \sum_s A_{v_{s2}}A_{v_{s1}}Y_p - A_vY_pY_p + \\
&\quad + \sum_s \left[Y_qA_{v_{s2}} + A_{v_{s2}}Y_{s1} + \sum_r v_{s2,r2}v_{s2,r1} \right] A_{v_{s1}} - \\
&\quad - \sum_s A_{v_{s2}} \left[Y_{s1}A_{v_{s1}} + A_{v_{s1}}Y_p + \sum_t v_{s1,t2}v_{s1,t1} \right] \\
&= \sum_s A_{v_{s2}}Y_{s1}A_{vs1} + \sum_{s,r} A_{v_{s2},r2}A_{v_{s2},r1}A_{v_{s1}} - \\
&\quad - \sum_s A_{s2}Y_{s1}A_{vs1} - \sum_{s,t} A_{v_{s2}}A_{v_{s1},t2}A_{v_{s1},t1} \\
&= \sum_{s,r} A_{v_{s2},r2}A_{v_{s2},r1}A_{v_{s1}} - \sum_{s,t} A_{v_{s2}}A_{v_{s1},t2}A_{v_{s1},t1} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

la última igualdad obtenida por un argumento similar al de (0.4), Capítulo 1 □.

4.4 Definición. Las diferenciales de $a_{ij}^{(s)}$ y de $v_{ij}^{(t)}$ se definen como las entradas de las matrices $\delta'(A_{a_s})$, $\delta'(A_{v_t})$. Es decir,

$$\delta'(A_{a_s}) = (\delta'(a_{ij}^{(s)})), \ \delta'(A_{v_t}) = (\delta'(v_{ij}^{(t)})).$$

Obsérvese que de $Y_l^2 = 0$, se sigue $\delta'(Y_l) = 0$, y entonces : $\delta'(x) = \delta'(y) = 0$.

En los cálculos anteriores no se utilizó la relación $\delta'(Y_l) = 0$, que hubiera traído alguna simplificación, de manera intencional. La razón es que ellos aparecerán en el "unravelling", y no se desea repetirlos.

De la regla de Leibnitz para matrices, se deduce que la misma es válida para flechas de $\mathcal{B}'$, es decir, si a, b son flechas en $\mathcal{B}'$, entonces

$$\delta'(ab) = \delta'(a)b + (-1)^{gra}b\,.$$

Utilizando dicha regla, se extiende δ' a caminos (finitos) en $k\mathcal{B}'$, y luego por linealidad a todo $k\mathcal{B}'$. Del Lema 4.3, se deduce que $\delta' : k\mathcal{B}' \longrightarrow k\mathcal{B}'$ verifica $(\delta')^2 = 0$. Se ha demostrado entonces la proposición siguiente.

4.5 Proposición. δ' define una diferencial en $\mathcal{B}'$.

A continuación se establecerá una equivalencia :

$$F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k).$$

Para un objeto $N \in rep(\mathcal{B}', \delta', k)$, dado por :

$$N = (N_i,\, i = 1, 2, 3, 4, ...r\ ;\ N(a_{ij}^{(s)}), s = 1, 2, ..., n),$$

se define la representación $M = F(N) \in rep(\mathcal{B}, \delta, k)$ así:

$$M_1 = N_1 \oplus N_3,\ M_2 = N_3 \oplus N_2,\ M_l = N_l, l \geq 4.$$

Además, se definen las transformaciones $M(\alpha) : M_1 \longrightarrow M_2$, $M(a_s)$ por las matrices :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & id_{N_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M(a_s) = (N(a_{ij}^{(s)})).$$

Si se tiene un morfismo $f : N \longrightarrow N'$ en $rep(\mathcal{B}', \delta', k)$, dado por :

$$f = (f_i^0, i = 1, 2, 3, ..., r;\ f^1(x), f^1(y), f^1(v_{ij}^{(s)}), s = 1, 2, ...m),$$

se define un morfismo $g : M = F(N) \longrightarrow F(N') = M'$ en $rep(\mathcal{B}, \delta, k)$, mediante la familia doble

$$g = (g_i^0, i = 1, 2, 4, ..., r; \; g^1(v_t)) \; ,$$

en donde :

$$\begin{aligned} g_1^0 &= \begin{pmatrix} f_1^0 & f^1(x) \\ 0 & f_3^0 \end{pmatrix}, \; g_2^0 = \begin{pmatrix} f_3^0 & f^1(y) \\ 0 & f_2^0 \end{pmatrix}, \\ g_l^0 &= f_l^0, l \geq 4, \; g^1(v_t) = (f^1(v_{ij}^{(t)})). \end{aligned}$$

4.6 Lema. g es un morfismo.

Demostración. Sea $a : X_p \longrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$. Se consideran dos casos :

(i) si $a = \alpha$, se tiene :

$$\begin{aligned} g_2^0 M(a) - M'(a) g_1^0 &= \begin{pmatrix} f_3^0 & f^1(y) \\ 0 & f_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^0 & f^1(x) \\ 0 & f_3^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & f_3^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & f_3^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = g^1(\delta(a)) \; , \end{aligned}$$

pues $\delta(a) = 0$.

(ii) Si $a \neq \alpha$, sea $\delta(a) = \sum_l b_l v_l c_l$, gr($b_l$)=gr($c_l$)=0, gr($v_l$)=1, entonces $A_{\delta(a)} = \sum_l A_{b_l} A_{v_l} A_{c_l}$ y de aquí, la componente ij de la matriz $A_{\delta(a)}$ está dada por :

$$(A_{\delta(a)})_{ij} = \sum_{l,r,s} b_{ir}^{(l)} v_{rs}^{(l)} c_{sj}^{(l)}.$$

Resulta entonces que

$$f((A_{\delta(a)})_{ij}) = \sum_{l,r,s} N'(b_{ir}^{(l)}) f^1(v_{rs}^{(l)}) N(c_{sj}^{(l)}).$$

Por otra parte, se tiene :

$$\begin{aligned} g(\delta(a)) &= g(\sum_l b_l v_l c_l) \\ &= \sum_l M'(b_l) g^1(v_l) M(c_l) \\ &= \sum_l (N'(b_{ij}^{(l)}))(f^1(v_{rs}^{(l)}))(N(c_{sj}^{(l)})), \end{aligned}$$

y entonces la componente ij de la matriz $g(\delta(a))$ está dada por :

$$g(\delta(a))_{ij} = \sum_{l,r,s} N'(b_{ir}^{(l)}) f^1(v_{rs}^{(l)}) N(c_{sj}^{(l)}).$$

Se ha demostrado así que :

$$g(\delta(a))_{ij} = f((A_{\delta(a)})_{ij}),$$

y de ahí la igualdad de las matrices :

$$g(\delta(a)) = (f((A_{\delta(a)})_{ij})).$$

De la definición de $\delta'(A_a)$, se obtiene :

$$A_{\delta(a)} = \delta'(A_a) - (Y_q A_a - A_a Y_p),$$

y de ahí,

$$f(A_{\delta(a)}) = f(\delta'(A_a)) - f(Y_q A_a - A_a Y_p).$$

Una comprobación directa por casos según a muestra que :

$$g_q^0 M(a) - M'(a) g_p^0 = f(\delta'(A_a)) - f(Y_q A_a - A_a Y_p),$$

obteniéndose finalmente la igualdad :

$$g_q^0 M(a) - M'(a) g_p^0 = g(\delta(a)) \quad \Box.$$

Sin mayor dificultad se puede demostrar que F es un funtor.

4.7 Proposición. F es una equivalencia de categorías.

Demostración. Para ver que F es denso, dada $M \in rep(\mathcal{B})$, la transformación lineal $M(\alpha) : M_1 \longrightarrow M_2$ induce descomposiciones :

$$\begin{aligned} M_1 &\cong \ker M(\alpha) \oplus imM(\alpha), \\ M_2 &= imM(\alpha) \oplus W, \end{aligned}$$

con $W \subseteq M_2$.

Se define $N \in rep(\mathcal{B}')$ mediante :

$$N_1 = \ker M(\alpha), N_3 = imM(\alpha), N_2 = W, N_l = M_l, l \geq 4;$$

además, toda $M(a_s)$ se expresa, con respecto a las descomposiciones en sumas directas anteriores, como una matriz

$$M(a_s) = (M_{ij}(a_s)),$$

de $1, 2$ ó 4 entradas. Para toda flecha $a_{ij}^{(s)}$ de grado 0 en $\mathcal{B}'$, se define la transformación lineal :

$$N(a_{ij}^{(s)}) = M_{ij}(a_s).$$

Se ha construido así una representación $N \in rep(\mathcal{B}')$, y fácilmente se comprueba que $M \cong F(N)$.

Para ver que F es pleno, sea $g : M \cong F(N) \longrightarrow F(N') \cong M'$ un morfismo, dado por :

$$g = (g_i^0, i = 1, 2, 4, ..., r\, ;\ g^1(v_t), t = 1, ..., m)\ .$$

Se tienen descomposiciones :

$$M_1 \ \cong\ \ker M(\alpha) \oplus imM(\alpha), M_2 = imM(\alpha) \oplus W,$$

$$M_1' \cong \ker M'(\alpha) \oplus imM'(\alpha), M_2' = imM'(\alpha) \oplus W',$$

con respecto a las cuales, como se prueba fácilmente, g_1^0, g_2^0 admiten expresiones matriciales :

$$g_1^0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \; g_2^0 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Además, de la condición $\delta(\alpha) = 0$, se deduce : $B_{11} = A_{22}$. Se introduce una nueva notación para las entradas de estas matrices :

$$g_1^0 = \begin{pmatrix} f_1^0 & f^1(x) \\ 0 & f_3^0 \end{pmatrix}, \; g_2^0 = \begin{pmatrix} f_3^0 & f^1(y) \\ 0 & f_2^0 \end{pmatrix}.$$

Se denota ahora por f la familia doble :

$$f = (f_1^0, f_3^0, f_2^0, f_l^0 = g_l^0, l \geq 4;\; f^1(x), f^1(y), f^1(v_{ij}^{(t)}), t = 1, ..., m),$$

en donde las $f^1(v_{ij}^{(t)})$ están definidas por : $g^1(v_t) = (f^1(v_{ij}^{(t)}))$.

Se demostrará que se tiene un morfismo $f : N \longrightarrow N'$. En efecto, para toda flecha de grado 0, $a : X_p \longrightarrow X_q$, en $\mathcal{B}$, $a \neq \alpha$, se tiene :

$$g_q^0 M(a) - M'(a) g_p^0 = g(\delta(a)).$$

Se sabe que :

$$g_q^0 M(a) - M'(a) g_p^0 = f(\delta'(A_a)) - f(Y_q A_a - A_a Y_p),$$

y además, se verifica :

$$(g_q^0 M(a) - M'(a) g_p^0 + f(Y_q A_a - A_a Y_p))_{ij} = f_e^0 N(a_{ij}) - N'(a_{ij}) f_s^0,$$

en donde $a_{ij} : X_s \longrightarrow X_e$.

Se tiene entonces :

$$f_e^0 N(a_{ij}) - N'(a_{ij}) f_s^0 = f(\delta'(a_{ij})),$$

así que f es morfismo. Es claro que $g = F(f)$.

Es fácil ver que el funtor F es fiel $\square$.

5 Cuarto algoritmo : "unravelling".

Sea $(\mathcal{B},\delta,k)$ una bigráfica diferencial triangular con vértices $X_1,...,X_t$ y estratificación $(a_1,...,a_n;v_1,...,v_m)$.

Supóngase que existe un lazo α de grado 0 en X_i , con $\delta(\alpha) = 0$. Se puede suponer que $i = 1$, así, $\alpha : X_1 \longrightarrow X_1$. Sean $\lambda \in k$, $r \geq 0$ entero, arbitrarios.

5.1 Se define a continuación una nueva bigráfica $(\mathcal{B}',\delta',k)$.

Los vértices de $\mathcal{B}'$ se toman como $Z_0, Z_1, ..., Z_r, X_2, ..., X_t$.

Las flechas de grado 0 en $\mathcal{B}'$ incluyen un lazo α' en Z_0, y las demás son determinadas por las flechas a de grado 0 en $\mathcal{B}$,$a \neq \alpha$, del modo que se explica a continuación. Primero se considera el conjunto

$$\Lambda = \{(i,k) : 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq k \leq i\} \cup \{(0,0)\},$$

ordenado de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} (0,0) &< (1,1) < (2,1) < (2,2) < (3,1) < (3,2) < (3,3) < ... \\ ... &< (r,1) < (r,2) < ... < (r,r). \end{aligned}$$

Se escribe $\beta = (i,k) \in \Lambda$, $d = 1 + 1 + 2 + 3 + ... + r$.

(i) Para toda $a : X_p \longrightarrow X_q$, con $p, q \neq 1$, se define una flecha $a : X_p \longrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}'$.

(ii) Para toda $a : X_p \longrightarrow X_1$; $p \neq 1$, se toman d flechas $a_{\beta 1} = a_{(i,k)1} : X_p \longrightarrow Z_i$, en donde $\beta = (i,k) \in \Lambda$. Así, se tienen una flecha $X_p \longrightarrow Z_0$, e i flechas $X_p \longrightarrow Z_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Similarmente, para $a : X_1 \longrightarrow X_p$, $p \neq 1$, se tienen d flechas $a_{1\beta} = a_{1(i,k)} : Z_i \longrightarrow X_p$,$1 \leq i \leq r$.

(iii) Todo lazo a en X_1, $a \neq \alpha$, determina d^2 flechas, denotadas por $a_{\beta\gamma}$, $\beta, \gamma \in \Lambda$, tales que si $\beta = (i,k), \gamma = (j,l)$, entonces $a_{\beta\gamma} = a_{(i,k)(j,l)} : Z_j \longrightarrow Z_i$.

Las flechas de grado 0 en $\mathcal{B}'$ se utilizan para definir matrices A_a, para a en $\mathcal{B}$, según los anteriores casos, así:

(i) $A_a = (a)$.

(ii) $A_a = (a_{\beta 1})_{\beta \in \Lambda}$, matriz $d \times 1$, si $a : X_p \longrightarrow X_1$, $p \neq 1$;

$A_a = (a_{1\beta})_{\beta \in \Lambda}$, matriz $1 \times d$, si $a : X_1 \longrightarrow X_p$, $p \neq 1$.

(iii) $A_a = (a_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma \in \Lambda}$, matriz $d \times d$.

(iv) A_α es la matriz $d \times d$, diagonal por bloques, denotados $B_{00} = (\alpha'), B_{ii} = (J_\lambda^i)e_i$, es decir,

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} \lambda e_i & e_i & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda e_i & e_i & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & e_i \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda e_i \end{pmatrix},$$

para $i \geq 1$, en donde e_i denota el idempotente en Z_i, $1 \leq i \leq r$.

Las flechas de grado 1 en $\mathcal{B}'$ son de dos clases:

(i) Para toda $v : X_p \dashrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, $gr(v) = 1$, se puede definir una matriz A_v, bajo el procedimiento ya explicado para construir la matriz $A_a, gr(a) = 0$, $a \neq \alpha$. Las entradas de $A_v = (v_{\beta\gamma})$ son las flechas de grado 1 del primer tipo.

(ii) (Flechas definidas por α). Sea $d' = 1 + 2 + ... + r$. Se define una matriz $d' \times d'$:

$$X' = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq r},$$

en donde X_{ij} es un bloque con i filas y j columnas, del siguiente estilo:

- si $i = j$,

$$X_{ii} = \begin{pmatrix} x_{ii}^1 & x_{ii}^2 & . & . & . & x_{ii}^i \\ 0 & x_{ii}^1 & x_{ii}^2 & . & . & \\ . & 0 & . & . & & \\ . & & & . & . & \\ . & & & 0 & . & x_{ii}^2 \\ 0 & . & . & . & 0 & x_{ii}^1 \end{pmatrix}$$

para ciertos $x_{ij}^l, 1 \leq l \leq i$ (así, X_{ii} posee i entradas distintas);

- si $i < j$, $j = i + t$, $X_{ij} = X_{i,i+t}$ tiene nulas sus primeras t columnas, y es de la forma :

$$X_{ij} = ((0, ..., 0), X_{ii}^{(ij)}),$$

con $X_{ii}^{(ij)}$ bloque $i \times i$ del tipo X_{ii} anteriormente introducido;

- si $i > j$, $i = j + t$, $X_{ij} = X_{j+t,j}$ tiene nulas sus últimas t filas, y es de la forma :

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} X_{jj}^{(ij)} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

con $X_{jj}^{(ij)}$ bloque $j \times j$ del tipo X_{jj}.

Por definición, las flechas de grado 1 en $\mathcal{B}'$ determinadas por α , se encuentran en correspondencia biyectiva con las entradas no nulas , distintas entre sí, y fuera de la diagonal principal de la matriz X' (o sea, no se toman en cuenta $x_{(11)(11)}, x_{(21)(21)}, x_{(22)(22)}, ...$) Estas flechas se denotan por las mismas letras de las entradas de X', y su orientación es como sigue :

- el bloque X_{ii} determina $i-1$ lazos :

$$x_{(i,1)(i,2)}, \ldots x_{(i,1)(i,i)} : Z_i \dashrightarrow Z_i \ ;$$

- para $i < j = i + t$, se tienen i flechas :

$$x_{(i,1)(j,t+1)}, \ldots, x_{(i,1)(j,j)} : Z_j \dashrightarrow Z_i \ ;$$

- para $j < i = j + t$, se tienen j flechas :

$$x_{(i,1)(j,1)}, \ldots, x_{(i,1)(j,j)} : Z_i \dashrightarrow Z_j \ .$$

Con esto se termina la descripción de las flechas de $\mathcal{B}'$.

Con la matriz X' se define una matriz X, de tamaño $d \times d$, $d = 1 + d'$, como:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X' \end{pmatrix}$$

Ahora se procede a definir la diferencial δ' para $\mathcal{B}'$, de manera semejante a como se hizo para el caso de la reducción de una flecha (tercer algoritmo).

Para todo vértice X_p de $\mathcal{B}$, se define una matriz Y_p así: $Y_p = 0$, si $p \neq 1$, Y_1 es la matriz obtenida de X al tomar nulas en ésta todas las entradas de la diagonal principal.

Procediendo formalmente como en el caso de la reducción de una flecha, Definición 4.2, Lema 4.3, los cálculos ahí efectuados conservan su validez en esta nueva situación, y tomando $\delta'(\alpha') = 0$, se obtiene una bigráfica diferencial $(\mathcal{B}',\delta', k)$.

A modo de ejemplo, obsérvese que : (i) para un lazo en X_1 , $a \neq \alpha$, en $\mathcal{B}$, las diferenciales $\delta'(a_{\beta\gamma})$ de las flechas $a_{\beta\gamma}$ en $\mathcal{B}'$, son las entradas de la matriz $\delta'(A_a) = Y_1 A_a - A_a Y_1 + A_{\delta(a)}$, es decir, $\delta'(A_a) = (\delta'(a_{\alpha\beta}))$; asimismo, (ii) para $a : X_1 \longrightarrow X_q, q \neq 1$, se tiene : $(\delta'(a_{1\alpha})) = \delta'(A_a) = -A_a Y_1 + A_{\delta(a)}$.

Ejemplo. Sea $\mathcal{B}$ la bigráfica con un sólo vértice X_1, dos lazos de grado 0, α, a, y un lazo z de grado 1, con $\delta(\alpha) = 0, \delta(a) = z\alpha, \delta(z) = 0$. Se realiza el "unravelling" de α , con respecto a $\lambda \in k$, para $r = 2$. La nueva bigráfica $\mathcal{B}'$ tiene tres vértices : Z_0, Z_1, Z_2. Aquí $\Lambda = \{(0,0), (1,1), (2,1), (2,2)\}$, las flechas de grado 0 son : $\alpha' : Z_0 \longrightarrow Z_0$, y las dieciséis flechas $a_{\beta\gamma}, \beta, \gamma \in \Lambda$. En este caso,

$$X' = \begin{pmatrix} x_{(1,1)(1,1)} & 0 & x_{(1,1)(2,2)} \\ x_{(2,1)(1,1)} & x_{(2,1)(2,1)} & x_{(2,1)(2,2)} \\ 0 & 0 & x_{(2,1)(2,1)} \end{pmatrix},$$

y entonces las flechas de grado 1 definidas por α son :

$$x_{(1,1)(2,2)} : Z_2 \dashrightarrow Z_1 \ , \ x_{(2,1)(1,1)} : Z_1 \dashrightarrow Z_2 \ , \ x_{(2,1)(2,2)} : Z_2 \dashrightarrow Z_2 \ .$$

Existen, además, dieciséis flechas de grado 1, correspondientes a las entradas de la matriz $A_z = (z_{\beta\gamma})$.

La matriz Y_1 es la siguiente :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{(1,1)(2,2)} \\ 0 & x_{(2,1)(1,1)} & 0 & x_{(2,1)(2,2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda e_2 \end{pmatrix}.$$

Las diferenciales $\delta'(a_{\beta\gamma})$ se leen de la matriz :

$$\delta'(A_a) = (\delta'(a_{\beta\gamma})) = Y_1 A_a - A_a Y_1 + A_z A_\alpha \ ;$$

y las diferenciales $\delta'(z_{\beta\gamma})$ son las entradas de la matriz :

$$\delta'(A_z) = (\delta'(z_{\beta\gamma})) = Y_1 A_z + A_z Y_1 .$$

Antes de pasar a otros asuntos, se hace la observación de que fórmulas similares a las que definen las matrices $\delta'(A_h)$ en los algoritmos anteriores, se verifican para bocses ([BZ]).

5.2 Para continuar con el "unravelling", se definirá un funtor :

$$F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k).$$

(i) Para un objeto $N \in rep(\mathcal{B}', \delta', k)$, se define $M = F(N) \in rep(\mathcal{B}, \delta, k)$, poniendo :

$$\begin{aligned} M_p &= N(X_p); \text{ si } p \neq 1; \\ M_1 &= N(Z_0) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} N(Z_i)^{(i)}, \end{aligned}$$

en donde

$$N(Z_i)^{(i)} = N(Z_i) \oplus \cdots \oplus N(Z_i), \quad i \text{ veces.}$$

Sea $a : X_p \longrightarrow X_q$ una flecha en $\mathcal{B}$.

Si $p, q \neq 1$, se pone $M(a) = N(a)$.

Si $a : X_p \longrightarrow X_1, p \neq 1$, $M(a)$ es la matriz $d \times 1$, $M(a) = (N(a_{\beta 1}))_{\beta \in \Lambda}$.
Similarmente, para $a : X_1 \longrightarrow X_p, p \neq 1$, $M(a) = (N(a_{1\beta}))_{\beta \in \Lambda}$.

Para un lazo $a : X_1 \longrightarrow X_1$, $a \neq \alpha$, se define $M(a) = (N(a_{\beta\gamma}))_{\beta,\gamma \in \Lambda}$.

Finalmente, $M(\alpha) : M_1 \longrightarrow M_1$ es la suma directa de matrices

$$M(\alpha) = N(\alpha') \oplus \overline{J}_\lambda^1 \oplus \ldots \oplus \overline{J}_\lambda^r,$$

en donde :

$$\overline{J}_{\lambda}^{i} = \begin{pmatrix} \lambda id_{N_i} & id_{N_i} & 0 & . & . & . & & 0 \\ 0 & \lambda id_{N_i} & 0 & . & . & . & & 0 \\ . & 0 & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ 0 & . & & . & . & 0 & \lambda id_{N_i} & id_{N_i} \\ 0 & . & & . & . & . & 0 & \lambda id_{N_i} \end{pmatrix}.$$

(ii) Para definir F en morfismos, sea $f : N \longrightarrow N'$ un morfismo en $\mathcal{B}'$, dado por :

$$f = (f_0^0, ..., f_r^0, \varphi_2^0, ..., \varphi_t^0;\ f^1(v), gr(v) = 1).$$

Se construye la familia doble :

$$g = (g_i^0,\ 1 \leq i \leq t\,;\ g^1(v_j)\,,\ 1 \leq j \leq m),$$

tomando g_1^0 como la matriz $d \times d$:

$$g_1^0 = \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 \\ 0 & X'' \end{pmatrix},$$

en donde la matriz X'' es la siguiente : X'' es $d' \times d'$, con estructura semejante a la anterior matriz de bloques X'. De hecho, se toma

$$X'' = (X''_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma \in \Lambda - \{(0,0)\}},$$

tal que :

$$\begin{aligned} X''_{(i,1)(i,1)} &= X''_{(i,2)(i,2)} = ... = X''_{(i,i)(i,i)} = f_i^0\ ,\ i = 1, ..., r; \\ X''_{\beta\gamma} &= f^1(x_{\beta\gamma})\ ,\ \text{ para } (\beta, \gamma) \text{ fuera de la diagonal principal ;} \end{aligned}$$

$$X''_{\beta\gamma} \;=\; 0\ ,\ \text{si no está definida la flecha } x_{\beta\gamma} \text{ en } \mathcal{B}'.$$

Obsérvese que los bloques X''_{ii} de la matriz X'' son de la forma :

$$X''_{ii} = \begin{pmatrix} f_i^0 & f^1(x_{ii}^2) & \cdot & \cdot & \cdot & f^1(x_{ii}^i) \\ 0 & f_i^0 & f^1(x_{ii}^2) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_i^0 & f^1(x_{ii}^2) \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & f_i^0 \end{pmatrix}.$$

5.3 Lema $g : M = F(N) \longrightarrow F(N') = M'$ es morfismo.

Demostración. Sea $a : X_p \longrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, se consideran dos casos:

(i) si $a = \alpha$, $\delta(a) = \delta(\alpha) = 0$. Sea $J = \overline{J}_\lambda^1 \oplus \ldots \oplus \overline{J}_\lambda^r$, se tiene :

$$g_1^0 M(\alpha) = \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 \\ 0 & X'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N(\alpha') & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^0 N(\alpha') & 0 \\ 0 & X''J \end{pmatrix},$$

además,

$$M'(\alpha) g_1^0 = \begin{pmatrix} N'(\alpha') & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 \\ 0 & X'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N'(\alpha') f_0^0 & 0 \\ 0 & JX'' \end{pmatrix}.$$

Pero $f_0^0 N(\alpha') = N'(\alpha') f_0^0$, por ser $\delta'(\alpha') = 0$, y además, $X''J = JX''$. Luego, se cumple : $g_1^0 M(\alpha) = M'(\alpha) g_1^0$.

(ii) Si $a \neq \alpha$, se procede como en el caso (ii) del Lema 4.6, Capítulo 2.

Fácilmente se demuestra que F es un funtor.

5.4 Proposición. El funtor $F : rep(\mathcal{B}', \delta', k) \longrightarrow rep(\mathcal{B}, \delta, k)$ induce una equivalencia

$$F : rep(\mathcal{B}', \delta', k)_{(Z_0, x-\lambda)} \xrightarrow{\sim} rep(\mathcal{B}, \delta, k)_{(\lambda, r)}\ ,$$

en donde $rep(\mathcal{B},\delta,k)_{(\lambda,r)}$ es la subcategoría plena de $rep(\mathcal{B},\delta,k)$, formada por las representaciones M de $\mathcal{B}$, tales que en la forma canónica de Jordan de $M(\alpha)$, el mayor λ–bloque tiene dimensión a lo sumo r, y $rep(\mathcal{B}',\delta',k)_{(Z_0,x-\lambda)}$ es la subcategoría plena de $rep(\mathcal{B}',\delta',k)$, constituida por las representaciones N, tales que $N(\alpha')-\lambda I$ es invertible, i.e. λ no es valor propio de $N(\alpha')$.

Demostración. (i) Sea $M\in rep(\mathcal{B},\delta,k)_{(\lambda,r)}$, entonces la forma canónica

$$M(\alpha)_{can}=L\oplus n_1J_\lambda^1\oplus\ldots\oplus n_rJ_\lambda^r,$$

con L matriz $l\times l$, $l\geq 0$, tal que λ no es valor propio de L ; $n_1,\ldots,n_r$ enteros ≥ 0. Se tiene

$$M_1=k^l\oplus k^{n_1}\oplus k^{2n_2}\oplus\ldots\oplus k^{rn_r}.$$

Se define una representación N de $\mathcal{B}'$, tal que :

$$\begin{aligned} N_0 &= k^l\ ,\ N_i=k^{n_i}\ ,\ i=1,2,\ldots r,\\ N_i &= M_i\ ,\ i=2,\ldots,t. \end{aligned}$$

Para definir $N(b)$, con b flecha de grado 0 en $\mathcal{B}'$, se pone :

- $N(\alpha')=L$;

- si $a:X_p\longrightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, $p,q\neq 1$, $N(a)=M(a)$;

- si $a:X_1\longrightarrow X_1$, $a\neq\alpha$, se escribe $M_1=\bigoplus_{\beta\in\Lambda}V_\beta$, con $V_{(0,0)}=k^d$, $V_{(i,k)}=k^{n_i}$, y entonces $M(a)=(T_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma}$, con $T_{\beta\gamma}=T_{(i,k)(j,l)}:V_\gamma=V_{(j,l)}\longrightarrow V_\beta=V_{(i,k)}$. Para la flecha $a_{\beta\gamma}=a_{(i,k)(j,l)}:Z_j\longrightarrow Z_i$, se toma : $N(a_{\beta\gamma})=T_{\beta\gamma}$.

Se procede de manera semejante para definir N en las flechas que provienen de flechas $X_1\longrightarrow X_q$, $X_q\longrightarrow X_1$, $q\neq 1$.

Obsérvese que $N\in rep(\mathcal{B}',\delta',k)_{(Z_0,x-\lambda)}$. Además, para la representación $F(N)$ se tiene :

$F(N)_1 = M_1, F(N)_i = N_i = M_i,\ (i \geq 2), F(N)(\alpha) = N(\alpha') \oplus J = L \oplus J = M(\alpha)_{can}$, de donde $F(N) \cong M$.

(ii) Para ver que F es pleno, sean $N, N' \in rep(\mathcal{B}', \delta', k)_{(Z_0, x-\lambda)}$, sean $M = F(N)$, $M = F(N)$, y considérese un morfismo :

$$\begin{aligned} g &: F(N) \longrightarrow F(N'), \\ g &= (g_i^0, i = 1, ..., t\,;\, g^1(v_s)\,, s = 1, ..., m). \end{aligned}$$

Se define un morfismo $f : N \longrightarrow N'$, tal que $g = F(f)$, de la siguiente manera :

Como $\delta(\alpha) = 0$, se tiene : $g_1^0 M(\alpha) = M'(\alpha) g_1^0$. Se tiene :

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= N(\alpha')_{l \times l} \oplus n_1 J_\lambda^1 \oplus n_2 J_\lambda^2 \oplus ... \oplus n_r J_\lambda^r , \\ M'(\alpha) &= N'(\alpha')_{f \times f} \oplus m_1 J_\lambda^1 \oplus m_2 J_\lambda^2 \oplus ... \oplus m_r J_\lambda^r . \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} J &= n_1 J_\lambda^1 \oplus n_2 J_\lambda^2 \oplus ... \oplus n_r J_\lambda^r , \\ J' &= m_1 J_\lambda^1 \oplus m_2 J_\lambda^2 \oplus ... \oplus m_r J_\lambda^r . \end{aligned}$$

De la igualdad de matrices :

$$g_1^0 \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} g_1^0 ,$$

y del hecho de que λ no es valor propio de $N(\alpha')$ ni de $N'(\alpha')$, se deduce que g_1^0 tiene una expresión matricial

$$g_1^0 = \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

con f_0^0 de tamaño $f \times l$. De la igualdad : $QJ = J'Q$, se colige que la matriz Q posee una estructura igual a la matriz anteriormente denotada por X' (cfr. 5.1).

Para $i = 1, ..., r$, se toma f_i^0 como el valor común de la diagonal del bloque X_{ii} de la matriz g_1^0. Para $i \geq 2$, $f_i^0 = g_i^0$.

Para las flechas de grado 1 en $\mathcal{B}'$ que provienen de α, y que han sido denotadas por $x_{\beta\gamma}$ (para ciertos $\beta, \gamma \in \Lambda$), se toma $f^1(x_{\beta\gamma}) = (g_0^1)_{\beta\gamma} = Q_{\beta\gamma}$.

Para $v_s : X_p - - \rightarrow X_q$ en $\mathcal{B}$, la matriz $g^1(v_s)$ se escribe en componentes como $g^1(v_s) = (g^1(v_{ij}^{(s)}))$, y permite definir : $f^1(v_{ij}^{(s)}) = g^1(v_{ij}^{(s)})$.

Se ha construido así una familia doble :

$$f = (f_0^0, ..., f_0^0, f_2^0, ..., f_t^0 ; f^1(x_{\beta\gamma}), f^1(v_{ij}^{(s)})),$$

y argumentando igual que en (ii) de la demostración de la Proposición (4.7), se demuestra que $f : N \longrightarrow N'$ es morfismo en $\mathcal{B}'$. Es claro que $g = F(f)$. Finalmente, es fácil ver que el funtor F es fiel $\square$.

6 La norma frente a los algoritmos

Se examinará el comportamiento de la norma de una representación, al reducir una flecha o efectuar un "unravelling".

6.1 Proposición. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_r$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$. Sea $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$,$X_1 \neq X_2$, flecha de grado 0, tal que $\delta(\alpha) = 0$. Se reduce la flecha α, obteniéndose $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$. Para $M \cong F(N)$, si

$$\underline{\dim} N = (x_1, x_3, x_2, x_4, ...) ,$$

entonces

$$\underline{\dim} M = (x_1 + x_3, x_3 + x_2, x_4, ...)$$

Además,

$$\|N\| = \|M\| - (x_1 + x_3)(x_3 + x_2) ,$$

de donde, $\|N\| \leq \|M\|$. En particular, si M es sincera, la desigualdad anterior es estricta.

Demostración. Solamente se demostrará la segunda afirmación. Para cada par de vértices i, j de $\mathcal{B}$, sea m_{ij} el número de flechas de grado 0 entre ellos. Se tiene :

$$\begin{aligned}\|M\| &= m_{12}(x_1+x_3)(x_3+x_2)+m_{11}(x_1+x_3)^2+\\ &\quad +m_{22}(x_3+x_2)^2+\sum_{p=4}^{n} m_{1p}(x_1+x_3)x_p+\\ &\quad +\sum_{p=4}^{n} m_{2p}(x_3+x_2)x_p+\sum_{p,q=4}^{n} m_{pq}x_px_q.\end{aligned}$$

Según la descripción de $\mathcal{B}'$, se tiene :

$$\begin{aligned}\|N\| &= (m_{12}-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2+x_3^2)+\\ &\quad m_{11}(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2)+m_{22}(x_3^2+2x_3x_2+x_2^2)\\ &\quad +\sum_{p=4}^{n} m_{1p}(x_1x_p+x_3x_{p)}+\sum_{p=4}^{n} m_{2p}(x_3x_p+x_2x_{p)}\\ &\quad +\sum_{p,q=4}^{n} m_{pq}x_px_q\\ &= \|M\|-(x_1+x_3)(x_3+x_2)\ \square\end{aligned}$$

6.2 Proposición. Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, ..., X_t$ y estratificación $(a_1, ..., a_n; v_1, ..., v_m)$. Sea $\alpha : X_1 \longrightarrow X_1$ un lazo de grado 0, $\delta(\alpha) = 0$, y considérese el "unravelling" con respecto a λ, r. Para $M \cong F(N)$, si

$$\underline{\dim} N = (z_0, z_1, ..., z_r ; x_2, ..., x_t),$$

entonces :

$$\underline{\dim} M = (z_0 + \sum_{i=1}^{r} i z_i, x_2, ..., x_t).$$

Además se verifica :

$$\|N\| = \|M\| - ((\dim M_1)^2 - z_0^2) \leq \|M\| .$$

En particular, si λ es valor propio de $M(\alpha)$, la desigualdad es estricta.

Demostración. Sólo resta demostrar la segunda afirmación . Si m_{ij} es el número de flechas de grado 0 entre i y j en B , entonces :

$$\|M\| = m_{11}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 + \sum_{p=2}^{t} m_{1p}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)x_p + \sum_{p,q=2}^{t} m_{pq}x_px_q \; .$$

Según la definición de B' se tiene :

$$\begin{aligned} \|N\| &= z_0^2 + (m_{11}-1)\left[z_0^2 + \sum_{i=1}^{r} i^2z_i^2 + \sum_{i=1}^{r} 2iz_0z_i + \sum_{i,j=1,i<j}^{r} ijz_iz_j\right] + \\ &\quad + \sum_{p=2}^{t} m_{1p}(z_0x_p + \sum_{i=1}^{r} iz_ix_p) + \sum_{p,q=2}^{t} m_{pq}x_px_q \\ &= z_0^2 + (m_{11}-1)(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 + \sum_{p=2}^{t} m_{1p}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i) + \\ &\quad \sum_{p,q=2t} m_{pq}x_px_q \; . \end{aligned}$$

En lo anterior se utilizó que :

$$(\sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} i^2z_i^2 + 2\sum_{i<j} ijz_iz_j = \sum_{i,j=1}^{r} ijz_iz_j,$$

y entonces

$$(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 = z_0^2 + \sum_{i=1}^{r} i^2z_i^2 + \sum_{i=1}^{r} 2iz_0z_i + \sum_{i,j=1,i<j}^{r} ijz_iz_j \; .$$

Se llega así a que :

$$\begin{aligned} \|M\| - \|N\| &= (z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 - z_0^2 = (\dim M_1)^2 - z_0^2. \\ \|N\| &= \|M\| - ((\dim M_1)^2 - z_0^2) \; . \end{aligned}$$

La última afirmación se sigue de :

$$(\dim M_1)^2 - z_0^2 = \sum_{i=1}^{r} i^2 z_i^2 + \sum_{i=1}^{r} 2iz_0 z_i + \sum_{i,j=1, i<j}^{r} ij\, z_i z_j \quad \square$$

Capítulo 3

Formas cuadráticas y algoritmos

Aquí se examina el comportamiento de la forma cuadrática al reducir una flecha o efectuar un "unravelling". Como consecuencia, se podrá afirmar que frente a cualquiera de los cuatro algoritmos estudiados, la forma cuadrática no decrece. Esto se aprovecha, en una primera instancia, para estudiar propiedades básicas de bigráficas "schurian".

Se estudian luego bigráficas con coeficientes en campos k y $k(x)$ y sus relaciones. También se afinan algunos aspectos de la regularización.

La consideración del indicador Δ ocupa el resto del capítulo, en donde se establecen relaciones entre el valor de $\Delta(M) = \dim_k End_{\mathcal{B}}(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M)$, para una representación inescindible M de una bigráfica diferencial, y la familia de representaciones con vector de dimensión $\underline{\dim} M$.

1 En el capítulo anterior se estableció el comportamiento de la forma cuadrática frente a los algoritmos de regularización y la eliminación de objetos. En ambos casos el valor de la forma se preserva. Se examinarán ahora los casos de la reducción de una flecha y el unravelling (cfr. Capítulo 2).

1.1 Proposición. Sea $(\mathcal{B}\, , \delta\, , k)$ una bigráfica diferencial con vértices $X_1\, , X_2\, , X_4\, , \ldots, X_n\, , \alpha : X_1 \longrightarrow X_2$ una flecha de grado 0 , tal que $\delta(\alpha) = 0$. Se reduce α, dando lugar a la bigráfica $(\mathcal{B}', \delta', k)$ y al funtor $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$. Para toda representación N de $\mathcal{B}'$, si $M = F(N)$, y además $\underline{\dim} N = (x_1\, , x_3\, , x_2\, , x_4\, , \ldots, x_n)$, $\underline{\dim} M = (x_1 + x_3\, , x_3 + x_2\, , x_4\, , \ldots x_n)$, se verifica

$$q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) = q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) + x_1 x_2\ .$$

Demostración. En primer lugar,

$$q_B(\underline{\dim}M) = (x_1 + x_3)^2 + (x_3 + x_2)^2 + \sum_{p=4}^{n} x_p^2 - \|M\| + q_B^{(1)}(\underline{\dim}M) \;,$$

en donde

$$\begin{aligned} q_B^{(1)}(\underline{\dim}M) \;&=\; n_{11}(x_1 + x_3)^2 + n_{22}(x_3 + x_2)^2 + \\ &\quad + n_{12}(x_1 + x_3)(x_3 + x_2) + \\ &\quad + \sum_{p=4}^{n} n_{1p}(x_1 + + x_3)x_p + \sum_{p=4}^{n} n_{2p}(x_3 + x_2)x_p + \\ &\quad + \sum_{p,q=4}^{n} n_{pq}x_p x_q \;. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$q_B(\underline{\dim}N) = \sum_{p=1}^{n} x_p^2 - \|N\| + q_{B'}^{(1)}(\underline{\dim}N) \;,$$

con

$$\begin{aligned} q_{B'}^{(1)}(\underline{\dim}N) \;&=\; x_1x_3 + x_3x_2 + n_{12}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2 + x_3^2) + \\ &\quad + n_{11}(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) + n_{22}(x_3^2 + 2x_3x_2 + x_2^2) + \\ &\quad + \sum_{p=4}^{n} n_{1p}(x_1x_p + x_3x_p) + \sum^{n} n_{2p}(x_3x_p + x_2x_p) + \\ &\quad + \sum_{p,q=4}^{n} n_{pq}x_p x_q \;. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce el resultado anunciado :

$$\begin{aligned} q_{B'}(\underline{\dim}N) - q_B(\underline{\dim}M) \;&=\; x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 - (x_1 + x_3)^2 - (x_3 + x_2)^2 + \\ &\quad + (\|M\| - \|N\|) + \\ &\quad + (q_{B'}^{(1)}(\underline{\dim}N) - q_B^{(1)}(\underline{\dim}M)) \\ &=\; (-x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + (x_1 + x_3)(x_3 + x_2) + \\ &\quad + (x_1x_3 + x_2x_3) \\ &=\; x_1x_2 \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Proposición. Sea $(\mathcal{B},\delta,k)$ una bigráfica diferencial triangular, con vértices $X_1, X_2, \dots, X_t$. Sea $\alpha : X_1 \longrightarrow X_1$, $\delta(\alpha) = 0$, un lazo y considérese el unravelling en α, con respecto a $\lambda \in k$, $r \geq 1$. Considérese el funtor $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$, y sea $F(N) = M$, con

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}N &= (z_0, z_1, \dots, z_r, x_2, \dots, x_t) , \\
\underline{\dim}M &= (z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i , x_2, \dots, x_t) .
\end{aligned}$$

Entonces se verifica:

$$q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) = \sum_{i=1}^{r} iz_i^2 + 2 \sum_{i,j=1;\, i<j}^{r} iz_iz_j .$$

Demostración. Para M se tiene :

$$q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) = (z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 + \sum_{p=2}^{t} x_p^2 - \|M\| + q_{\mathcal{B}}^{(1)}(\underline{\dim}M) ,$$

y para N vale :

$$q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N) = \sum_{i=0}^{r} z_i^2 + \sum_{p=2}^{t} x_p^2 - \|N\| + q_{\mathcal{B}'}^{(1)}(\underline{\dim}N) .$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
q_{\mathcal{B}}^{(1)}(\underline{\dim}M) &= n_{11}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 + \sum_{p=2}^{t} n_{1p}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)x_p + \sum_{p,q=2}^{t} n_{pq}x_px_q ; \\
q_{\mathcal{B}'}^{(1)}(\underline{\dim}N) &= \sum_{i=2}^{r}(i-1)z_i^2 + \sum_{i,j=1;\, i<j}^{r} 2iz_iz_j + \\
&\quad n_{11}(z_0^2 + \sum_{i=1}^{r} i^2z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{r} iz_0z_i + \sum_{i,j=1;\, i<j}^{r} 2ijz_iz_j) + \\
&\quad + \sum_{p=2}^{n} n_{1p}(z_ox_p + \sum_{i=1}^{r} iz_ix_p) + \sum_{p,q=2}^{n} n_{pq}x_px \\
&= \sum_{i=2}^{r}(i-1)z_i^2 + \sum_{i,j=1;\, i<j}^{r} 2iz_iz_j + n_{11}(z_0 + \sum_{i=1}^{r} iz_i)^2 +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{p=2}^{t} n_{1p}(z_0+\sum_{i=1}^{r} iz_i)x_p+\sum_{p,q=2}^{t} n_{pq}x_px_q \ ,$$

de donde

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N)-q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) &= \left[\sum_{i=0}^{r} z_i^2-(z_0+\sum_{i=1}^{r} iz_i)^2\right]+\left[(z_0+\sum_{i=1}^{r} iz_i)^2-z_0^2\right]+ \\ &\quad +\left[\sum_{i=2}^{r}(i-1)z_i^2+\sum_{i,j=1;\,i<j}^{r} 2iz_iz_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^{r} z_i^2+\sum_{i=2}^{r}(i-1)z_i^2+\sum_{i,j=1;\,i<j}^{r} 2iz_iz_j \\ &= z_1^2+\sum_{i=2}^{r} iz_i^2+\sum_{i,j=1;\,i<j}^{r} 2iz_iz_j \\ &= \sum_{i=1}^{r} iz_i^2+\sum_{i,j=1;\,i<j}^{r} 2iz_iz_j \ \square \end{aligned}$$

1.3 Corolario. Si $\mathcal{B}$ es una bigráfica diferencial, y se efectúa alguno de los algoritmos de regularización, reducción de una flecha, eliminación de objetos o unravelling, obteniendo en cada caso una bigráfica diferencial $\mathcal{B}'$, y un funtor $F: rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$, en esa situación , para $M=F(N)$, se verifica

$$q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N) \geq q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) \quad \square.$$

2 Bigráficas "schurian".

Si $(\mathcal{B},\delta,k)$ es una bigráfica diferencial y M una representación, todo $t \in k$ determina un endomorfismo $\bar{t}$ de M , dado por la familia doble

$$\bar{t}=(\bar{t}_i^0\,;\,0)\ ,$$

tal que $\bar{t}_i^0 : M_i \longrightarrow M_i$, $m \mapsto tm$. Para $a: i \longrightarrow j$, flecha de grado 0, es claro que $\bar{t}(\delta(a))=0$, y además,

$$(\bar{t}_j^0 M(a)-M(a)\bar{t}_i^0)(m)=0=\bar{t}(\delta(a)) \ , \ \text{para todo } m \in M_i \ ;$$

luego $\bar{t}$ es morfismo. Los morfismos de este tipo se llaman diagonales.

Interesa destacar el caso en que las representaciones inescindibles no poseen más endomorfismos que los diagonales.

2.1 Definición. Una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\delta,k)$ es de tipo " schurian " si para toda representación inescindible M, $End_{\mathcal{B}}(M) \cong k$.

Por ejemplo, para los "posets" (conjuntos parcialmente ordenados), los cuales son también bocses, vale la siguiente propiedad : un poset es de tipo de representación finito si, y solamente si, es schurian.

2.2 Lema. Una bigráfica schurian no posee lazos de ningún grado.

Demostración. (i) Por contradicción, si existe un lazo de grado 0, $\alpha : l \longrightarrow l$, se tiene una representación inescindible M_α, dada por

$$(M_\alpha)_l = k^2 \ , \ (M_\alpha)_i = 0 \ , \ i \neq l \ ,$$

y para toda flecha $a : i \longrightarrow j$,

$$(M_\alpha)(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ M_\alpha(a) = 0 \ , \ a \neq \alpha \ .$$

La familia doble $f = (f_i^0 \ ; \ f^1(x) = 0)$, con $f_1^0 : M_l \longrightarrow M_l$, $f_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_i^0 = 0$, si $i \neq l$, es un morfismo, como se comprueba fácilmente. Pero este morfismo no es escalar, imposible.

(ii) De nuevo por contradicción, si existe un lazo $x : l \dashrightarrow l$, de grado 1, considérese la representación simple S_l. Se define $\tilde{x} : S_l \longrightarrow S_l$ por

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^0 \ &: \ k \longrightarrow k \ , \ \tilde{x}_1^0 = id_k \ , \ \tilde{x}_i^0 = 0 \ , \ i \neq l \ ; \\ \tilde{x}^1(x) \ &= \ id_k \ , \ \tilde{x}^1(y) = 0 \ , \ y \neq x \ . \end{aligned}$$

Para ver que $\tilde{x}$ es morfismo, obsérvese que para toda flecha a de grado 0, $\tilde{x}(\delta(a)) = 0$. En efecto, si $\delta(a) = \sum_t b_t x_t c_t$, entonces $\tilde{x}(\delta(a)) = \sum_t \lambda_t S_l(b_t)\tilde{x}^1(x_t)S_l(c_t) = 0$, pues en cada sumando alguno de los tres factores es nulo. Puesto que $\tilde{x}$ no es morfismo escalar, se tiene una contradicción □

2.3 Lema. Sea S_l una representación simple de una bigráfica diferencial semisimple $\mathcal{B}$, y sean $x_1, \ldots, x_t$ la totalidad de los lazos de grado 1 en el vértice l. Entonces $\dim_k End_{\mathcal{B}}(S_l) = t+1$.

Demostración. Si $t = 0$, el resultado es claro. Si $t \geq 1$, sea $\tilde{x}_i$ el endomorfismo definido por x_i, según (ii) de la demostración de (2.2), $1 \leq i \leq t$. Se tiene entonces una k−base $\{id, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_t\}$. En efecto, un $f \in End_{\mathcal{B}}(S_l)$ está dado por una familia doble $f = (a_0; a_1, \ldots, a_t)$ los $a_i \in k$. Si $a_0 = 0$, $f = \sum a_i \tilde{x}_i$; si $a_0 \neq 0$, entonces $f = a_0^{-1} id + \sum_i a_0^{-1} a_i \tilde{x}_i$. Es clara la independencia lineal □

2.4 Lema . Si $\mathcal{B}$ es bigráfica diferencial triangular schurian y su forma cuadrática es débilmente positiva, entonces para toda representación inescindible M, $\underline{\dim} M$ es raíz positiva de $q_{\mathcal{B}}$, es decir, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = 1$. Además, toda representación inescindible está determinada por su vector dimensión. En consecuencia, $\mathcal{B}$ es de tipo de representación finito.

Demostración. (i) Sea M una representación inescindible. Se probará que $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = 1$, por inducción sobre $\|M\|$. Puede suponerse que M es sincera, sin pérdida de generalidad. Si $\|M\| = 0$, entonces la bigráfica $\mathcal{B}$ no posee flechas de grado 0, luego sus únicas representaciones inescindibles son las simples, así que M es simple. Si los vértices de $\mathcal{B}$ son $X_1, \ldots, X_n$, y dado que ella es schurian, su forma cuadrática es $q_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Luego, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = 1$.

Sea $\|M\| > 0$, y supóngase cierta la afirmación para toda representación inescindible N , en cualquier bigráfica, con $\|N\| < \|M\|$. Sea $a : i \longrightarrow j$ una flecha de grado 0, con $\delta(a)$ mínima. Necesariamente $i \neq j$.

Si $\delta(\alpha) = 0$, se reduce a , obteniéndose una bigráfica $\mathcal{B}'$ y una equivalencia $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$, y tomando $M = F(N)$, se tiene $\|N\| < \|M\|$. Entonces $q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) = 1$, y como $q_{\mathcal{B}}$ es débilmente positiva, $0 < q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) \leq q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) = 1$, luego $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = 1$.

Si $\delta(\alpha) \neq 0$, $\delta(\alpha) = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m$, con los c_i escalares y las v_i flechas de grado 1. Por medio de un cambio de base, puede suponerse $\delta(\alpha) = v_1$, y entonces regularizar. Se procede como antes, y se obtiene la conclusión.

(ii) Sea M inescindible, y supóngase que para una M' inescindible, $\underline{\dim}M' = \underline{\dim}M$. Se probará que entonces $M' \cong M$. Se realiza inducción sobre $\|M\|$, para lo cual puede suponerse s.p.g. que M es sincera. Si $\|M\| = 0$, la bigráfica es semisimple, y aquí es clara la conclusión.

Si $\|M\| > 0$, tómese $a : i \longrightarrow j$, con $\delta(a)$ mínima.

Si $\delta(\alpha) = 0$, se reduce α y entonces existen representaciones inescindibles N, N' de $\mathcal{B}'$ con $M = F(N)$, $M' = F(N')$, $\|N\| < \|M\|$, $\|N'\| < \|M'\|$. Si $\underline{\dim}N = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $\underline{\dim}N' = (x'_1, x'_2, x'_3, \ldots)$, se sabe que

$$x_1 x_2 = q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim}N) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) = 1 - 1 = 0 \ ;$$

igualmente se llega a : $x'_1 x'_2 = 0$. Se prueba , por una combinación de los casos : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, que $\underline{\dim}N' = \underline{\dim}N$, y entonces, por la hipótesis inductiva, $N' \cong N$, de donde $M = F(N) \cong F(N') = M'$.

Si $\delta(\alpha) \neq 0$, se puede regularizar, después de un cambio de base adecuado, y obtener $M = F(N)$, $M' = F(N')$, $\|N\| < \|M\|$, $\|N'\| < \|M'\|$, para los cuales se cumple : $\underline{\dim}N = \underline{\dim}M = \underline{\dim}M' = \underline{\dim}N'$, luego $N \cong N'$ y de aquí, $M \cong M'$.

Para concluir, obsérvese que por ser $q_{\mathcal{B}}$ forma cuadrática débilmente positiva, por el Lema de Drozd $[Ri, p.3]$, ella posee sólo un número finito de raíces positivas. Luego el número de vectores dimensión de inescindibles es finito, y como en cada dimensión hay solamente una clase de isomorfía, la bigráfica es de tipo de representación finito□

Es sabido ($[RK]$) que toda bigráfica diferencial de tipo finito tiene forma cuadrática débilmente positiva. Así, la Proposición anterior es un recíproco parcial a tal afirmación.

2.5 Lema. Si $\mathcal{B}$ es una bigráfica diferencial schurian, entonces para toda representación inescindible M, existe únicamente un número finito de clases de isomorfía de representaciones inescindibles N, tales que $\underline{\dim}N = \underline{\dim}M$.

Demostración. Sea M representación inescindible. Se procede por inducción sobre $\|M\|$.

Si $\|M\| = 0$, y dado que se puede suponer spg que M es sincera, entonces la bigráfica $\mathcal{B}$ es semisimple, y en este caso, se verifica la afirmación.

Para continuar, sea $\|M\| > 0$, y supóngase cierta la afirmación para toda representación inescindible N, tal que $\|N\| < \|M\|$. Existe $a : i \longrightarrow j$, de grado 0, con $\delta(a)$ mínima. Por hipótesis, $i \neq j$,y se dan dos casos.

Si $\delta(a) = 0$, se reduce a, y para el funtor F, $M = F(N)$. Hay que demostrar que hay sólo un número finito de inescindibles M', tales que $\underline{\dim}M' = \underline{\dim}M$. Sea $M' = F(N')$. Fácilmente se concluye que $\underline{\dim}N' = \underline{\dim}N$, entonces para N' hay sólo un número finito de posibilidades , luego para $M' = F(N')$ hay sólo un número finito de posibilidades, y se ha concluido.

Si $\delta(a) \neq 0$, se regulariza y se llega fácilmente a la conclusión $\square$

2.6 Proposición. Si $\mathcal{B}$ es bigráfica diferencial triangular schurian y su forma cuadrática es débilmente positiva, entonces para toda representación inescindible M, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim}M) = 1$, es decir, $\underline{\dim}M$ es raíz positiva de $q_{\mathcal{B}}$. Además, existe una biyección entre la familia de las clases de isomorfía de representaciones inescindibles y el conjunto de las raíces positivas de la forma cuadrática $q_{\mathcal{B}}$, dada por $M \leftrightarrow \underline{\dim}M$.

Demostración. Por la Proposición (2.4) , la aplicación $M \mapsto \underline{\dim}M$ está bien definida y es inyectiva.

Para la sobreyectividad, obsérvese que existe una secuencia finita de bigráficas

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(0)} \sim \mathcal{B}^{(1)} \sim \mathcal{B}^{(2)} \sim \cdots \sim \mathcal{B}^{(s)} \ ,$$

tales que $\mathcal{B}^{(i)}$ se obtiene de $\mathcal{B}^{(i-1)}$ por regularización o por reducción de una flecha, y además, $\mathcal{B}^{(s)}$ es semisimple. Se tienen entonces equivalencias

$$rep(\mathcal{B}^{(s)}) \xrightarrow{\sim} rep(\mathcal{B}^{(s-1)}) \xrightarrow{\sim} \cdots rep(\mathcal{B}^{(1)}) \xrightarrow{\sim} rep(\mathcal{B}) \ .$$

Se efectúa inducción sobre $s - i$.

Si $s-i = 0$, entonces $i = s$, y si $\mathcal{B}^{(s)}$ tiene m vértices, entonces $q_{\mathcal{B}^{(s)}}(x_1 \, , \, ..., \, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, así las raíces de $q_{\mathcal{B}^{(s)}}$ corresponden biyectivamente a las clases de isomorfía de inescindibles.

Para continuar, es suficiente demostrar que si la afirmación es cierta para $\mathcal{B}^{(s-i)}$

entonces lo es para $\mathcal{B}^{(s-i-1)}$. Hay dos casos.

Si $F : rep(\mathcal{B}^{(s-i)}) \xrightarrow{\sim} rep(\mathcal{B}^{(s-i-1)})$ corresponde a una regularización, sea $\underline{d}$ tal que $q_{\mathcal{B}^{(s-i-1)}}(\underline{d}) = 1$. Entonces $q_{\mathcal{B}^{(s-i)}}(\underline{d}) = 1$, y por hipótesis, existe N inescindible de $\mathcal{B}^{(s-i)}$,tal que $\underline{d} = \underline{\dim}N$; para $M = F(N)$ se tiene entonces $\underline{\dim}M = \underline{\dim}N = \underline{d}$.

Si F corresponde a la reducción de una flecha, sea $\underline{d} = (d_1, d_2, d_4, ...)$, con $q_{\mathcal{B}^{(s-i-1)}}(\underline{d}) = 1$ .Se construye una raíz $\underline{d}'$ para $q_{\mathcal{B}^{(s-i)}}$ así : si $d_1 > d_2$, sea $\underline{d}' = (d_1 - d_2, d_2, 0, d_4, ...)$; si $d_1 = d_2$, sea $\underline{d}' = (0, d_1, 0, ...)$ y si $d_1 < d_2$ sea $\underline{d}' = (d_2 - d_1, d_1, 0, ...)$. Se cumple $q_{\mathcal{B}^{(s-i)}}(\underline{d}') = q_{\mathcal{B}^{(s-i-1)}}(\underline{d}) + 0 = q_{\mathcal{B}^{(s-i-1)}}(\underline{d})$. Por hipótesis inductiva, existe un inescindible N , tal que $\underline{d}' = \underline{\dim}N$, y entonces el inescindible $M = F(N)$ verifica $\underline{d} = \underline{\dim}M$ □

Regularización, de nuevo.

Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial triangular, y supóngase que existe un automorfismo $\Phi' : (k\mathcal{B})_1 \longrightarrow (k\mathcal{B})_1$ de $(k\mathcal{B})_0-(k\mathcal{B})_0-$bimódulos, el cual se extiende entonces a un automorfismo homogéneo de álgebras $\Phi : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}$, tal que $\Phi \mid_{(k\mathcal{B})_0} = id$, $\Phi \mid_{(k\mathcal{B})_1} = \Phi'$.

3.1 Lema . La aplicación

$$\delta^{\Phi} = \Phi\delta\Phi^{-1} : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B} \ ,$$

es una diferencial sobre la bigráfica $\mathcal{B}$.

Demostración. Para elementos homogéneos z, z' en $k\mathcal{B}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi\delta\Phi^{-1}(zz') &= \Phi\delta(\Phi^{-1}(z)\Phi^{-1}(z')) \\
&= \Phi\left[\delta(\Phi^{-1}(z))\Phi^{-1}(z') + (-1)^{grz}\Phi^{-1}(z)\delta(\Phi^{-1}(z'))\right] \\
&= (\Phi\delta\Phi^{-1})(z)z' + (-1)^{grz}z(\Phi\delta\Phi^{-1}(z')).
\end{aligned}$$

Además, $(\Phi\delta\Phi^{-1})^2 = \Phi\delta^2\Phi^{-1} = 0$ □

3.2 Proposición. Sean (V, μ, ε) el bocs asociado a la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta, k)$, y $(\widetilde{V}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\varepsilon})$ el bocs asociado a la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta^{\Phi}, k)$. Entonces estos bocses son isomorfos.

Demostración. Por definición, $V = \overline{V} \oplus \omega A$, $\widetilde{V} = \overline{V} \oplus \widetilde{\omega} A$. Se define $\Phi : V \longrightarrow \widetilde{V}$, por $\Phi(v + \omega a) = \Phi(v) + \widetilde{\omega} a$. Entonces Φ es morfismo de $A - A-$bimódulos. En efecto, Φ es claramente morfismo de $A-$módulos derechos. Para el lado izquierdo, se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi(b(v+\omega a)) &= \Phi(bv + b\cdot\omega a) = \Phi(bv + (\omega b + \delta(b))a) \\
&= b\Phi(v) + \widetilde{\omega} ba + \Phi(\delta(b)a) \\
&= b\Phi(b) + \delta^{\Phi}(b)a + \widetilde{\omega} ba \\
&= b(\Phi(v+\omega a)) .
\end{aligned}$$

Se mostrará ahora que el siguiente diagrama es conmutativo :

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\mu} & V \otimes_A V \\
\Phi \downarrow & & \downarrow \Phi\otimes\Phi \\
\widetilde{V} & \xrightarrow[\widetilde{\mu}]{} & \widetilde{V} \otimes_A \widetilde{V}
\end{array}$$

(i) $(\Phi\otimes\Phi)\mu(\omega a) = (\Phi\otimes\Phi)(\omega\otimes\omega)a = \widetilde{\omega}\otimes\widetilde{\omega}a = \mu\Phi(\omega a)$;

(ii) para $v \in \overline{V}$,

$$\begin{aligned}
(\Phi\otimes\Phi)\mu(v) &= (\Phi\otimes\Phi)(\omega\otimes v + v\otimes\omega + \delta(v)) \\
&= \widetilde{\omega}\otimes\Phi(v) + \Phi(v)\otimes\widetilde{\omega} + \Phi\delta(v) .
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}\Phi(v) &= \widetilde{\omega}\otimes\Phi(v) + \Phi(v)\otimes\widetilde{\omega} + \delta^{\Phi}\Phi(v) \\
&= \widetilde{\omega}\otimes\Phi(v) + \Phi(v)\otimes\widetilde{\omega} + \Phi\delta(v) \\
&= (\Phi\otimes\Phi)\mu(v) \ \square.
\end{aligned}$$

3.3 Corolario. Existe una equivalencia

$$F : rep(\mathcal{B},\delta^{\Phi},k) \longrightarrow rep(\mathcal{B},\delta,k) .$$

Demostración. Se define F como la identidad en los objetos, y para morfismos se pone

$$F_{M,N} = Hom(\Phi \otimes id_M, id_N) : Hom_A(\widetilde{V} \otimes M, N) \xrightarrow{\sim} Hom_A(V \otimes M, N) \ \square$$

Sean ahora $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica diferencial, y $\alpha : i \longrightarrow j$ una flecha de grado 0, con $\delta(\alpha) = v$, en donde v es una flecha de grado 1. En $k\mathcal{B}$ se considera el ideal $J = \langle \alpha, v \rangle$, generado por α y v. Entonces $\frac{k\mathcal{B}}{J} = k\mathcal{B}_{\alpha,v}$, en donde $\mathcal{B}_{\alpha,v} = \mathcal{B} \setminus \{\alpha, v\}$. Además, $\delta(J) \subset J$. Se tiene entonces una diferencial inducida por δ :

$$\overline{\delta} : k\mathcal{B}_{\alpha,v} \longrightarrow k\mathcal{B}_{\alpha,v} \ .$$

Sean (V, μ, ε) el bocs correspondiente a la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta, \varepsilon)$, $A = k\mathcal{B}_0$, $\overline{V} = (k\mathcal{B})_1$, y considérese la aplicación $\eta : A \longrightarrow \frac{A}{(\alpha)} = B$. Si $I = (\alpha)$, entonces

$$^{B}V^{B} = B \otimes_A V \otimes_A B = \frac{V}{IV + VI} \ .$$

Para $^{B}V^{B}$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \frac{\overline{V}}{I\overline{V} + \overline{V}I + \delta(I)} \longrightarrow \frac{\overline{V}}{IV + VI} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \frac{A}{I} \longrightarrow 0 \ .$$

Se tiene

$$\begin{aligned} I\overline{V} + \overline{V}I + \delta(I) &= AvA + \sum_{v_i \neq v} Iv_iA + \sum_{v_i \neq v} Av_iI \ , \\ \overline{V} &= AvA \oplus \amalg_{v_i \neq v} Av_iA \ . \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\overline{V}}{I\overline{V} + \overline{V}I} &= \amalg_{v_i \neq v} \frac{A}{I} v_i \frac{A}{I} = \frac{(k\mathcal{B})_1}{\langle v \rangle} \ , \\ \frac{A}{I} &= \frac{k\mathcal{B}_0}{(\alpha)} \ . \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene el siguiente resultado.

3.4 Lema. El bocs $(\frac{V}{JV+VJ},\overline{\mu},\overline{\varepsilon})$ y el bocs asociado a la bigráfica $(\mathcal{B}_{\alpha,v},\overline{\delta},k)$ son isomorfos.

3.5 Proposición. Existe una equivalencia

$$R : rep(\mathcal{B}_{\alpha,v},\overline{\delta},k) \longrightarrow rep(\mathcal{B},\delta,k) \ .$$

El funtor R se llama regularización. Para un objeto M, $R(M) = M$.

Supóngase ahora que para una flecha de grado 0, $\alpha : i \longrightarrow j$, $\delta(\alpha) = c_1v_1 + \cdots + c_sv_s$, $c_i \in k$, $c_1 \neq 0$,y las $v_j : i - - \rightarrow j$, flechas de grado 1. Se tiene un automorfismo de $A - A$–bimódulos Φ':$\overline{V} \longrightarrow \overline{V}$, dado por $\Phi'(c_1v_1 + \cdots + c_sv_s) = v_1$, $\Phi'(v_j) = v_j$, $j \neq 1$. El mismo se extiende a un automorfismo $\Phi : k\mathcal{B} \longrightarrow k\mathcal{B}$, y entonces puede considerarse la bigráfica $(\mathcal{B},\delta^{\Phi},k)$. Obsérvese que $\delta^{\Phi}(\alpha) = \Phi\delta\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi\delta(\alpha) = v_1$. Así, la regularización es la composición

$$rep(\mathcal{B}'_{\alpha,v},(\delta^{\Phi})',k) \rightleftarrows rep(\mathcal{B},\delta^{\Phi},k) \rightleftarrows rep(\mathcal{B},\delta,k) \ .$$

4 Bigráficas sobre k y $k(x)$

Si k es un campo, $k[x]$ denota el anillo de polinomios y $k(x)$ el campo de fracciones racionales con coeficientes en k .

Para una bigráfica diferencial $(\mathcal{B},\ \delta(x),k(x))$ dada, se estudiarán ciertas bigráficas diferenciales sobre k , obtenidas de la original.

Por el procedimiento de cambio de anillos, (Capítulo1), la inclusión $\iota : k[x]_{h(x)} \hookrightarrow k(x)$, para un cierto $h(x) \in k[x]$, determina un funtor

$$E_{\iota} : rep(\mathcal{B},\delta(x),k(x)) \longrightarrow rep(\mathcal{B},\delta(x),k[x]_{h(x)}) \ .$$

Asimismo, para un $\lambda \in k$, tal que $h(\lambda) \neq 0$, la evaluación $\varphi_{\lambda} : k[x]_{h(x)} \longrightarrow k$, $q(x) \mapsto q(\lambda)$ determina una bigráfica diferencial sobre k , la "evaluación en λ", denotada por $(\mathcal{B},\delta(\lambda),k)$. Se tiene un funtor

$$E_{\lambda} : rep(\mathcal{B},\delta(x),k[x]_{h(x)}) \longrightarrow rep(\mathcal{B},\delta(\lambda),k) \ .$$

Con referencia a la regularización del final de la sección anterior, se tienen las siguientes propiedades.

4.1 Propiedades.

Sea $(\mathcal{B}, \delta(x), k(x))$ una bigráfica, y supóngase que para una flecha α de grado 0, $\delta(\alpha) = a_1(x)v_1 + \cdots + a_s(x)v_s$, $a_i(x) \in k(x)$, $a_1(x) \neq 0$. Si $\Phi(x) : (k(x)\mathcal{B})_1 \longrightarrow (k(x)\mathcal{B})_1$ es el automorfismo tal que $\Phi(x)(a_1(x)v_1 + \cdots + a_s(x)v_s) = v_1$, entonces :

(i) $\Phi(x) : k(x)\mathcal{B} \longrightarrow k(x)\mathcal{B}$ provee un automorfismo $\Phi(x) : k[x]_{h(x)}\mathcal{B} \longrightarrow k[x]_{h(x)}\mathcal{B}$, para cierto $h(x) \in k[x]$.

(ii) Si $h(\lambda) \neq 0$, se tiene un automorfismo de $k\mathcal{B}$, tal que $\varphi_\lambda(\Phi(x)) = \Phi(\lambda)$.

(iii) Si $(\mathcal{B}, \delta(x), k(x))$ está definida sobre $(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{h(x)})$, para cierto $h(x)$, entonces $(\mathcal{B}'_{\alpha,v_1}, (\delta(x)^{\Phi(x)})', k(x))$, está definida sobre $k[x]_{h(x)g(x)}$, para cierto $g(x)$.

(iv) $(\mathcal{B}'_{\alpha,v_1}, (\delta(x)^{\Phi(x)})', k[x]_{h(x)g(x)})\varphi_\lambda = (\mathcal{B}'_{\alpha,v_1}, (\delta(\lambda)^{\Phi(\lambda)})', k)$, para λ, tal que $h(\lambda)g(\lambda) \neq 0$.

(v) Si $\delta(\alpha) = 0$, α de grado 0, $\alpha : i \longrightarrow j$, $i \neq j$, entonces $(\mathcal{B}'_\alpha, \delta(x)', k[x]_{h(x)})\varphi_\lambda = (\mathcal{B}'_\alpha, \delta', k)$, para cierto $h(x) \in k[x]$.

Las siguientes proposiciones se demuestran fácilmente. En ambos diagramas, las flechas verticales hacia arriba son inclusiones.

4.2 Proposición. El siguiente diagrama es conmutativo, para cierto $f(x) \in k[x]$:

$$\begin{array}{ccc}
rep(\mathcal{B}'_{\alpha,v}, (\delta(x)^{\Phi(x)})', k(x)) & \xrightarrow{R} & rep(\mathcal{B}, \delta(x), k(x)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
rep(\mathcal{B}'_{\alpha,v}, (\delta(x)^{\Phi(x)})', k[x]_{f(x)}) & \longrightarrow & rep(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{f(x)}) \\
\downarrow E_\lambda & & \downarrow E_\lambda \\
rep(\mathcal{B}'_{\alpha,v}, (\delta(\lambda)^{\Phi(\lambda)})', k) & \xrightarrow{R} & rep(\mathcal{B}, \delta(\lambda), k)
\end{array}$$

4.3 Proposición. El siguiente diagrama es conmutativo, para cierto

$h(x) \in k[x]$, y para todo $\lambda \in k$, $h(\lambda) \neq 0$:

$$\begin{array}{ccc} rep(\mathcal{B}'_\alpha, \delta(x)', k(x)) & \xrightarrow{R} & rep(\mathcal{B}, \delta(x), k(x)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ rep(\mathcal{B}'_\alpha, \delta(x)', k[x]_{h(x)}) & \longrightarrow & rep(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{h(x)}) \\ \downarrow E_\lambda & & \downarrow E_\lambda \\ rep(\mathcal{B}'_\alpha, \delta(\lambda)', k) & \xrightarrow{R} & rep(\mathcal{B}, \delta(\lambda), k) \end{array}$$

5 El indicador Δ.

Por el Teorema 5.8, $\dim_k End_{\mathcal{B}}(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = \dim_k Ext^1_{\mathcal{B}}(M)$. En este apartado se estudia la expresión $\Delta(M) = \dim_k End_{\mathcal{B}}(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M)$, especialmente su variación frente a los algoritmos.

5.1 Definición. Si $(\mathcal{B}, \delta, k)$ es una bigráfica diferencial, para toda representación inescindible M de $\mathcal{B}$, se define

$$\Delta(M) = \dim_k End_{\mathcal{B}}(M) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) \ .$$

5.2 Observación. Si se aplica alguno de los cuatro algoritmos estudiados, y $M = F(N)$, entonces :

$$\begin{array}{lrcl} (i) & \Delta(N) & \leq & \Delta(M) \ , \\ (ii) & \Delta(M) - \Delta(N) & = & q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) \ . \end{array}$$

En efecto, (i) es consecuencia inmediata del Corolario (1.3); y para (ii), basta observar que $End_{\mathcal{B}}(M) \cong End_{\mathcal{B}'}(N)$.

5.3 Proposición. $\Delta(M) \geq 0$.

Demostración. Si M no es sincera, se eliminan los vértices l, con $M_l = 0$, obteniéndose una bigráfica $\mathcal{B}'$, y un funtor fiel y pleno $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$, tal que existe N sincera con

$M = F(N)$. Se tiene $\|N\| = \|M\|$, $q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) = q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M)$, y entonces $\Delta(N) = \Delta(M)$. Así, puede suponerse que M es sincera.

Se efectúa inducción sobre $\|M\|$.

Si $\|M\| = 0$, la bigráfica $\mathcal{B}$ es semisimple; sea $M = S_l$; y supóngase que en el vértice l hay exactamente t lazos de grado 1. Es claro que $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = t + 1 = \dim End_{\mathcal{B}}(M)$, por el Lema (2.3) , luego $\Delta(M) = 0$.

Para continuar, asúmase que $\|M\| > 0$, y que la afirmación es cierta para toda representación N , de cualquier bocs, con $\|N\| < \|M\|$. Sea $a : i \longrightarrow j$, de grado 0 y con $\delta(a)$ mínima. Hay dos casos.

(i) Si $\delta(a) \neq 0$, se regulariza, y para $M = F(N)$, se tiene $\|N\| < \|M\|$. Luego $0 \leq \Delta(N) = \Delta(M)$.

(ii) Si $\delta(a) = 0$, hay dos subcasos :

$(\text{ii})_1$ si $i \neq j$, se reduce a , y para el inescindible $N \in rep(\mathcal{B}')$, con $M = F(N)$, $\|N\| < \|M\|$, y entonces $0 \leq \Delta(N) \leq \Delta(M)$;

$(\text{ii})_2$ si $i = j$, sea $r = \|M\|$, y efectúese el unravelling del lazo a con respecto a los primeros r bloques de Jordan. Para la nueva bigráfica y el funtor correspondiente, existe N , tal que $M = F(N)$, y de $\|N\| < \|M\|$ se sigue $0 \leq \Delta(N) \leq \Delta(M)$ □

La anterior proposición es en general falsa en álgebras. En efecto, si Λ es la k-álgebra dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[d, "\gamma"] & & \circ \\ \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r, "\beta"] & \circ \arrow[r, "\alpha"] & \circ \arrow[u] \arrow[d] \\ & \circ \arrow[u] & & \circ \end{tikzcd} \quad , \quad \alpha\beta\gamma = 0,$$

para el módulo $X = \begin{pmatrix} & 1 & & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ & 1 & & 1 \end{pmatrix}$, $\dim_k End(X) = 1$, $q_\Lambda(\underline{\dim} X) = 2$ (Observación y ejemplo de J. A. de la Peña).

5.4 Proposición. Sean $(\mathcal{B},\delta,k)$ una bigráfica diferencial triangular y $a : X_1 \longrightarrow X_2$ una flecha de grado 0 $(X_1 \neq X_2)$, con $\delta(a) = 0$. Se reduce a , obteniéndose una bigráfica diferencial trangular $\mathcal{B}'$, y una equivalencia $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$. Sean M, M', $M = F(N)$, $M' = F(N')$, tales que $\underline{\dim}M = \underline{\dim}M'$, y además, $\Delta(M) - \Delta(N) = \Delta(M') - \Delta(N')$. Entonces, $\underline{\dim}N = \underline{\dim}N'$.

Demostración. De acuerdo con las hipótesis, y tomando en cuenta la Observación (3.2), si $\underline{\dim}N = (x_1, x_3, x_2, x_4, ...)$ y $\underline{\dim}N' = (x_1', x_3', x_2', x_4, ...)$ se tiene $x_1 x_2 = x_1' x_2'$. También de la hipótesis se sigue que $x_1 + x_3 = x_1' + x_3'$, $x_3 + x_2 = x_3' + x_2'$, y entonces se tiene que $x_i' = x_i$, $i = 1, 2, 3$. En efecto, si, por ejemplo, $x_1 \neq x_1'$ y $x_1 < x_1'$, entonces $x_2 < x_2'$, luego $x_3 > x_3'$, de donde $x_1' < x_1'$, imposible. Para los otros casos se procede igual. □

En lo que sigue, $(\mathcal{B},\delta,k)$ es una bigráfica diferencial triangular. Para una representación inescindible M de $\mathcal{B}$, se pone $e(M) = \dim_k End_{\mathcal{B}}(M)$, y además, $\underline{t}(M) = (\underline{\dim}M, e(M))$.

Si la bigráfica $\mathcal{B}$ es de tipo de representación finito, existe una secuencia finita de bigráficas diferenciales $\mathcal{B}^{(i)}$, $1 \leq i \leq s$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(0)}$, como la de la demostración de la Proposición (2.6), tales que $\mathcal{B}^{(i)}$se obtiene de $\mathcal{B}^{(i-1)}$ por una regularización o una reducción, y además, $\mathcal{B}^{(s)}$ es semisimple. Los funtores $F_i : rep(\mathcal{B}^{(i)}) \longrightarrow rep(\mathcal{B}^{(i-1)})$ son entonces equivalencias . Para toda representación inescindible M de $\mathcal{B}$, se consideran los inescindibles $M_{i-1} = F_i(M_i)$, $M = M_0$, $i = 1, 2, ...s$. Si $\|M_i\| = \|M_{i-1}\|$ entonces $q_{\mathcal{B}^{(i)}}(\underline{\dim}M_i) = q_{\mathcal{B}^{(i-1)}}(\underline{\dim}M_{i-1})$ luego, si $q_{\mathcal{B}^{(i)}}(\underline{\dim}M_i) \neq q_{\mathcal{B}^{(i-1)}}(\underline{\dim}M_{i-1})$, $\|M_i\| > \|M_{i-1}\|$.

Se toma $S_0 = \{i : \|M_i\| > \|M_{i-1}\|\}$, entonces $cardS_0 \leq s$. Para cada $i \in S_0$, sean

$$\begin{aligned} d_i(M) &= q_{\mathcal{B}^{(i)}}(\underline{\dim}M_i) - q_{\mathcal{B}^{(i-1)}}(M_{i-1}) \ , \\ \underline{s}(M) &= (d_1(M), ..., d_s(M)) \ , \\ \underline{\sigma}(M) &= (\underline{\dim}M, e(M), \underline{s}(M)) \ . \end{aligned}$$

Obsérvese que s_0 es precisamente el número de reducciones aplicadas,y que $d_j(M) = 0$ si i no está en S_0 .

5.5 Lema. Si M, M' son inescindibles en $rep(\mathcal{B})$, y $\underline{\sigma}(M) = \underline{\sigma}(M')$ entonces $M \cong M'$.

Demostración. Se efectúa inducción sobre s.

En el caso $s = 0$, $\mathcal{B}$ es semisimple, y es cierta la conclusión.

Sea $s > 0$, y la conclusión cierta para todo $s' < s$. Sean M, M' como en el enunciado, entonces $M = F_1(N), M' = F_1(N')$. Si F_1 es una regularización, $\underline{\dim}N = \underline{\dim}N'$, y fácilmente se ve que $\underline{\sigma}N = \underline{\sigma}N'$, luego $N \cong N'$ y de aquí, $M \cong M'$.

Si F_1 es una reducción, se cumplen las hipótesis de la Proposición (3.4) para N, N', luego $\underline{\sigma}(N) = \underline{\sigma}(N')$, $N \cong N'$ y entonces $M \cong M'$. □

Obsérvese que para $\underline{\dim}M$ y $e(M)$ fijos, $\underline{\sigma}(M)$ queda determinada por la sucesión $d_1(M), ..., d_{s_0}(M)$. Además, $d_1(M) + ... + d_{s_0}(M) = \Delta(M)$. El número de tales sucesiones, para $\|M\| > 1$ y $s_0 \geq 1$ está dado por

$$\begin{pmatrix} s_0 - 1 + \Delta(M) \\ \Delta(M) \end{pmatrix} = \frac{(s_0 + \Delta(M) - 1)!}{(s_0 - 1)!\Delta(M)!} \leq \begin{pmatrix} \|M\| - 1 + \Delta(M) \\ \Delta(M) \end{pmatrix}.$$

Se ha demostrado entonces la siguiente proposición.

5.6 Proposición. Sean $\mathcal{B}$ una bigráfica diferencial triangular y M una representación inescindible de $\mathcal{B}$, $\|M\| \geq 1$. Si $\mathcal{B}$ es de tipo de representación finito, entonces el número de clases de isomorfía de representaciones N, tales que $\underline{\dim}N = \underline{\dim}M$ y $e(N) = e(M)$, es a lo sumo

$$\begin{pmatrix} \|M\| - 1 + \Delta(M) \\ \Delta(M) \end{pmatrix}.$$

En particular, si $\Delta(M) = 0$, de las relaciones : $\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$ y $e(M) = e(N)$, se sigue que $M \cong N$.

Para representaciones inescindibles M de $\mathcal{B}$, con $\Delta(M) = 0$, se tiene un resultado más general, independiente del tipo de rpresentación.

5.7 Proposición. Sea $\mathcal{B}$ una bigráfica diferencial triangular, y sea M una representación inescindible, tal que $\Delta(M) = 0$. Si N es una representación inescindible, y $\underline{\dim}N = \underline{\dim}M$, $e(N) = e(M)$, entonces $N \cong M$. Además, para toda flecha de grado 0, $a : i \longrightarrow j$, con $\delta(a) = 0$, $M(a) : M_i \longrightarrow M_j$ es sobreyectiva o inyectiva.

Demostración. (i) Se efectúa inducción sobre $\|M\|$. El caso $\|M\| = 0$ es claro.

Supóngase ahora que la conclusión es cierta para las N inescindibles con $\|N\| < \|M\|$. Puede asumirse que M es sincera.

Si $\Delta(M) = 0$ y N es inescindible con $\underline{\dim} N = \underline{\dim} M$ y $e(N) = e(M)$, entonces $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) = q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M)$ y de aquí, $\Delta(N) = \Delta(M) = 0$.Sea $a : i \longrightarrow j$ con diferencial mínima.

Si $\delta(a) \neq 0$, se regulariza y la conclusión se obtiene fácilmente.

Si $\delta(a) = 0$, obsérvese que $i \neq j$, pues si no, podría realizarse un unravelling , el cual baja efectivamente el valor de $\Delta(M) = 0$, imposible. Entonces se reduce a y se obtiene fácilmente la conclusión.

(ii) Si se tiene $a : i \longrightarrow j$, con $\delta(a) = 0$, y $\Delta(M) = 0$, como necesariamente $i \neq j$, se reduce a. Sea $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$ el correspondiente funtor, y $M = F(N)$. Se tiene $0 \leq \Delta(N) \leq \Delta(M)$, luego $0 = \Delta(M) - \Delta(N) = q_{\mathcal{B}'}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = \dim \ker M(a) \dim co\ker M(a)$, y entonces $\dim \ker M(a) = 0$ o $\dim co\ker M(a) = 0$, es decir, $M(a)$ es sobreyectiva o inyectiva $\square$

Para obtener una aplicación interesante de la anterior proposición a las álgebras de dimensión finita, se requiere el siguiente resultado.

5.8 Teorema (Ovsienko [O]). Sea $(\mathcal{B}, \delta, k)$ una bigráfica, k un campo, y considérese el correspondiente bocs, $\mathcal{A} = (A, V, \mu, \varepsilon)$. Para toda representación M de $\mathcal{A}$, se tiene :

$$\dim_k End_{\mathcal{A}}(M) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M) = \dim_k Ext^1_A(V \otimes_A M, M) .$$

Demostración. Denotando, para toda flecha de grado 1, $v_i : s(i) \dashrightarrow t(i)$, se tiene :

$$\overline{V} = \ker \varepsilon = \coprod_i Ae_{t(i)} \otimes_k Ae_{s(i)} .$$

y entonces $\overline{V}$ es un $A-$módulo derecho proyectivo. De la sucesión exacta corta :

$$0 \to \overline{V} \longrightarrow V \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} 0 ,$$

se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \overline{V} \otimes_A M \longrightarrow V \otimes_A M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \,,$$

y de aquí, la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow Hom_A(M,M) \longrightarrow Hom_A(V \otimes_A M, M) \longrightarrow \\ &\longrightarrow Hom_A(\overline{V} \otimes_A M, M) \longrightarrow Ext^1_A(M,M) \longrightarrow \\ &\longrightarrow Ext^1_A(V \otimes_A M, M) \longrightarrow 0 \,. \end{aligned}$$

Se tiene entonces :

$$\begin{aligned} &\dim_k Hom_A(V \otimes_A M, M) - \dim_k Ext^1_A(V \otimes_A M, M) = \\ = &\dim_k Hom_A(M,M) - \dim_k Ext^1_A(M,M) + \\ &+ \dim_k Hom_A(\overline{V} \otimes_A M, M). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \dim_k Hom_A(M,M) - \dim_k Ext^1_A(M,M) &= \sum \dim_k (e_i M)^2 - \\ &- \sum_{i \longrightarrow j} \dim_k e_i M \cdot \dim_k e_j M \,. \end{aligned}$$

Además,

$$\dim_k Hom_A(\overline{V} \otimes_A M, M) = \sum_{v_i : s(i) \longrightarrow t(i)} \dim_k e_{s(i)} M \cdot \dim_k e_{t(i)} M \,.$$

De aquí se obtiene la conclusión □

5.9 Corolario. Sea $A = kQ$, en donde Q es un carcaj finito sin ciclos orientados. Si M, N son $A-$módulos inescindibles de dimensión finita sobre k , tales que $Ext^1_A(M,M) = Ext^1_A(N,N) = 0$ y $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$, entonces $M \cong N$. Además, para toda flecha $a : i \longrightarrow j$, $i \neq j$, $M(a)$ es sobreyectiva o inyectiva.

Demostración. El carcaj Q se puede considerar como una bigráfica diferencial $\mathcal{B}$ sin flechas de grado 1, y con la diferencial nula. Así, $rep(\mathcal{B}) \approx \text{mod}\, A$. Las formas cuadráticas de $\mathcal{B}$ y de A son la misma, luego $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} M) = \dim_k End(M) - \dim_k Ext^1_A(M, M) = \dim_k End(M) \geq 0$. Por $[Ka]$ $q(\underline{\dim} M) = 1$, y entonces $\dim_k End_{\mathcal{B}}(M) = 1$. Por la misma razón, $\dim_k End_{\mathcal{B}}(N) = 1$. Así, $\Delta(M) = \Delta(N) = 0$, y dado que $e(M) = e(N)$ y $\underline{\dim} M = \underline{\dim} N$ se concluye : $M \cong N$, aplicando la Proposición 5.7.

Para la segunda conclusión se argumenta como en (ii) de la demostración de la Proposición 5.7. □

5.10 Proposición. Sea $(\mathcal{B}, \delta(x), k(x))$ una bigráfica diferencial triangular que es extensión de $(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{h(x)})$. Supóngase que para alguna dimensión $\underline{d}$ fija, y para un número infinito de $\lambda \in k$, con $h(\lambda) \neq 0$, existe una representación inescindible $M_\lambda \in rep(\mathcal{B}, \delta(\lambda), k)$, tal que $\underline{\dim} M_\lambda = \underline{d}$ y $\Delta(M_\lambda) = 0$. Entonces existe una representación inescindible $M(x) \in rep(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{k(x)})$, tal que $\underline{\varphi}_\lambda M(x) = M_\lambda$ para casi todos los λ.

Demostración. Puede suponerse que $\underline{d}$ es una dimensión sincera. Si $\|\underline{d}\| = 0$, $\mathcal{B}$ posee un único vértice l , con algunos lazos de grado 1 pero sin lazos de grado 0. Una representación inescindible M de $(\mathcal{B}, \delta(x), k[x]_{h(x)})$ está dada entonces por $M_l = k[x]_{h(x)}$. Así, para todo $\lambda \in k$, con $h(\lambda) \neq 0$, está definida la bigráfica $(\mathcal{B}, \delta(\lambda), k)$, y en ella los inescindibles están dados por $M_l = k$. Es claro que para casi todos los $\lambda \in k$, $\underline{\varphi}_\lambda M = M_\lambda$, i.e. basta tomar $M(x) = M$.

Sea ahora $\|\underline{d}\| > 0$, y supóngase el resultado cierto para todo $\underline{d'}$ con $\|\underline{d'}\| < \|\underline{d}\|$. En $(\mathcal{B}, \delta(x), k(x))$, existe una $\alpha : i \longrightarrow j$ con diferencial mínima. No se puede tener $i = j$, si $\delta(x)(\alpha) = 0$; en efecto, en caso contrario, para casi todos los λ , en $(\mathcal{B}, \delta(\lambda), k)$ se tendría $\delta(\lambda)(\alpha) = 0$, y entonces para infinitos λ , existiría una inescindible M_λ , con $\underline{\dim} M_\lambda = \underline{d}$ y $\Delta(M_\lambda) = 0$, imposible.

(i) Si $\delta(x)(\alpha)=0$, se reduce α en $(\mathcal{B},\delta(x),k(x))$, y se tiene el diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc}
rep(\mathcal{B}',\delta(x)',k(x)) & \xrightarrow{E} & rep(\mathcal{B},\delta(x),k(x)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
rep(\mathcal{B}',\delta(x)',k[x]_{h(x)}) & \xrightarrow{E} & rep(\mathcal{B},\delta(x),k[x]_{h(x)}) \\
\underline{\varphi}_\lambda \downarrow & & \downarrow \underline{\varphi}_\lambda \\
rep(\mathcal{B}',\delta(\lambda)',k) & \xrightarrow{E_\lambda} & rep(\mathcal{B},\delta(\lambda),k)
\end{array}$$

Para infinitos λ , se tiene por hipótesis una representación inescindible $M_\lambda \in rep(\mathcal{B},\delta(\lambda),k)$ con $\underline{\dim} M_\lambda=\underline{d}$ y $\Delta(M_\lambda)=0$. Para esos λ , existen inescindibles $M'_\lambda \in rep(\mathcal{B}',\delta(\lambda)',k)$, con $E_\lambda(M'_\lambda)\cong M_\lambda$. Se tiene entonces $\Delta(M'_\lambda)=0$ y $\|\underline{\dim} M'_\lambda\|<\|\underline{d}\|$.

Por hipótesis inductiva, existe una $M(x)'\in rep(\mathcal{B}',\delta(x)',k[x]_{h(x)})$, para cierto $h(x)$, tal que para casi todos los M'_λ , $\underline{\varphi}_\lambda(M'_\lambda)\cong M_\lambda$. Sea $M(x)=EM(x)'\in rep(\mathcal{B},\delta(x),k[x]_{h(x)})$. Entonces

$$\underline{\varphi}_\lambda M(x)=\underline{\varphi}_\lambda EM(x)'=E_\lambda\underline{\varphi}_\lambda M(x)'\cong E_\lambda M'_\lambda\cong M_\lambda \ ,$$

para casi todos los M_λ.

(ii) Si $\delta(x)(\alpha)\neq 0$, puede asumirse que $\delta(x)(\alpha)=a_1(x)v_1+\ldots+a_s(x)v_s$, con los v_i flechas de grado 1, $a_1(x)\neq 0$, y v_1 máxima entre las v_i. Existe un automorfismo $\Phi: k(x)\mathcal{B}\longrightarrow k(x)\mathcal{B}$, tal que $\delta(x)^\Phi(\alpha)=v_1$. Para casi todos los λ , se tiene el diagrama de (5.2) . Entonces, para casi todos los λ , existe un M'_λ con $F(M'_\lambda)\cong M_\lambda$, $\Delta(M_\lambda)=0$, $\underline{\dim} M'_\lambda=\underline{d}'_0$, $\|\underline{d}'_0\|<\|\underline{d}\|$. Por la hipótesis inductiva, existe una inescindible $M(x)'\in rep(\mathcal{B}'_{\alpha,v},\delta^\Phi(x),k[x]_{h(x)})$, para cierto $h(x)$ tal que

$$E_\lambda M(x)=E_\lambda FM(x)'=FE_\lambda M(x)'\cong FM'_\lambda\cong M_\lambda \ ,$$

para casi todos los M_λ $\square$

6 El caso $\Delta(M)=1$

6.1 Definición. Una familia $\mathcal{F}$ de representaciones inescindibles de una bigráfica diferencial triangular $(\mathcal{B},\delta,k)$, con k algebraicamente cerrado, se llama mansa si para cada dimensión $\underline{d}$, existe una familia finita de $A-k[x]_{f_i(x)}$ −bimódulos L_i $(1\leq i\leq s, A=k\mathcal{B}_0)$, finitamente generados como $k[x]_{f_i(x)}$ −módulos, tales que :

(i) si $\lambda \in k$, $f_i(\lambda) \neq 0$, entonces $L_i \otimes_{k[x]_{f_i(x)}} \frac{k[x]}{x-\lambda}$ está en $\mathcal{F}$;

(ii) para todas las clases de isomorfía $\{X\}$, excepto para un número finito, con X en $\mathcal{F}$, existen ciertos $i,\lambda \in k$, tales que $X \cong L_i \otimes_{k[x]_{f_i(x)}} \frac{k[x]}{x-\lambda}$.

El menor número s se denota $\mu_{\underline{d}}$.

En este apartado $(\mathcal{B},\delta,k)$ será una bigráfica diferencial triangular, k un campo algebraicamente cerrado. Se denota por $\mathcal{F}$ la familia de las representaciones inescindibles M de $\mathcal{B}$, tales que $\Delta(M) = 1$. Para una dimensión fija $\underline{d}$, $\mathcal{F}_{\underline{d}}$ denota el conjunto de las $M \in \mathcal{F}$ tales que $\underline{\dim} M = \underline{d}$.

6.2 Proposición. La familia $\mathcal{F}$ es de tipo de representación manso. De hecho, si para alguna dimensión $\underline{d}$ hay un número infinito de $M_i \in \mathcal{F}_{\underline{d}}$, no isomorfos, entonces existe un $A - k[x]_{h(x)}$ −bimódulo $M(x)$, en donde $A = (k\mathcal{B})_0$, tal que para casi todas las clases de isomorfía $\{M\}$, con $M \in \mathcal{F}_{\underline{d}}$,

$$M \cong M(x) \otimes_{k[x]_{h(x)}} \frac{k[x]}{(x-\lambda)},$$

para algún $\lambda \in k$, $h(\lambda) \neq 0$.

Demostración. Puede suponerse que $\underline{d}$, es sincera, y partir de que en $\mathcal{F}_{\underline{d}}$ hay un número infinito de objetos inescindibles. Entonces $\|\underline{d}\| \geq 1$.

(i) Si existe algún lazo $\alpha : i \longrightarrow i$, $\delta(\alpha) = 0$, sea $F : rep(\mathcal{B}') \longrightarrow rep(\mathcal{B})$ un unravelling de α, tal que para $M \in rep(\mathcal{B})$, con $\underline{\dim} M = \underline{d}$, existe un $N \in rep(\mathcal{B}')$, con $M \cong F(N)$. Por hipótesis, $\Delta(M) = 1$; además, para el unravelling, $\Delta(M) - \Delta(N) \geq 1$, luego $\Delta(N) = 1$, y $\Delta(M) - \Delta(N) = 1$. De aquí, $\dim_k M_i = 1$, y entonces $M(\alpha) = \lambda id$, para algún $\lambda \in k$.

Se tiene un diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} rep(\mathcal{B}',\delta(x)_x, k[x]_{h(x)}) & \xrightarrow{F_x} & rep(\mathcal{B},\delta(x), k[x]_{h(x)}) \\ {\scriptstyle E_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E_\lambda} \\ rep(\mathcal{B}',\delta(\lambda)_\lambda, k) & \xrightarrow[F_\lambda]{} & rep(\mathcal{B},\delta(\lambda), k) \end{array}.$$

Existe algún inescindible $N_\lambda \in rep(\mathcal{B}',\delta(\lambda)_\lambda,k)$, tal que $F_\lambda(N_\lambda) \cong M \cong M_\lambda$. Así, para infinitos λ , existe un inescindible $N_\lambda \in rep(\mathcal{B}',\delta(\lambda)_\lambda,k)$. Por (5.10) existe un inescindible $N(x) \in rep(\mathcal{B}',\delta(x)_x,k)$, tal que para casi todos los N_λ , $E_\lambda N'(x) \cong N_\lambda$. Para $M(x) = F_x N'(x)$ se tiene

$$E_\lambda M(x) = E_\lambda F_x N'(x) = F_\lambda E_\lambda N'(x) = F_\lambda N'(x) \cong M(x) ,$$

lo cual prueba el resultado en este caso.

(ii) Ahora se realiza inducción sobre $\|\underline{d}\|$. Si $\|\underline{d}\| = 1$, entonces $\mathcal{B}$ posee un único vértice Z, y un lazo $\alpha : Z \longrightarrow Z$, con $\delta(\alpha) = 0$. En este caso, la conclusión se desprende de las consideraciones previas.

Si $\|\underline{d}\| > 1$, y la conclusión es cierta para las $\underline{d}'$,con $\|\underline{d}'\| < \|\underline{d}\|$, supóngase que existe una flecha mínima $\alpha : i \longrightarrow i$. Por lo anterior, puede suponerse $\delta(\alpha) \neq 0$, y entonces $\delta(\alpha) = a_1 v_1 + ... + a_s v_s$, $a_1 \neq 0$, v_1 mínima entre las v_i.

Existe un automorfismo $\Phi : \overline{V} \longrightarrow \overline{V}$, $\overline{V} = \ker \varepsilon$, con $\delta^\Phi(a_1) = v_1$. Como se ha visto, Φ se extiende a un automorfismo $\Phi(x)$ de $k(x)\mathcal{B}$. Para casi todos los $\lambda \in k$ se tiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} rep(\mathcal{B}_{\alpha,v_1}, \delta^{\Phi(x)}, k\,[x]_{h(x)}) & \xrightarrow{F} & rep(\mathcal{B},\delta(x), k\,[x]_{h(x)}) \\ \downarrow E_\lambda & & \downarrow E_\lambda \\ rep(\mathcal{B}_{\alpha,v_1}, \delta^\Phi_\alpha, k) & \xrightarrow[F]{} & rep(\mathcal{B},\delta, k) \end{array} .$$

Así, para $M \in \mathcal{F}_{\underline{d}}$, existe una inescindible $N \in rep(\mathcal{B}_{\alpha,v_1}, \delta^\Phi_\alpha, k)$, con $\underline{\dim} N = \underline{d}'$, $\|\underline{d}'\| < \|\underline{d}\|$. Se tiene $0 \leq \Delta(N) \leq \Delta(M)$, y en $rep(\mathcal{B}_{\alpha,v_1}, \delta^\Phi_\alpha, k)$ existe un número infinito de clases de isomorfía de inescindibles N , con $F(N) \in \mathcal{F}_{\underline{d}}$. Luego, $\Delta(N) = 1$. Por inducción existe inescindible $M'(x) \in rep(\mathcal{B}_{\alpha,v_1}, \delta^{\Phi(x)}_\alpha, k\,[x]_{h(x)})$, tal que $E_\lambda M'(x) \cong N$, para algún λ , y para casi todas las clases de isomorfía de N. Para $M(x) = FM'(x)$, se tiene

$$M \cong F(N) \cong FE_\lambda M'(x) = E_\lambda F M'(x) = E_\lambda M(x),$$

para casi todas las clases de isomorfía de M en $\mathcal{F}_{\underline{d}}$. Queda entonces demostrada la afirmación en este caso.

Si $\delta(\alpha) = 0$, entonces $i \neq j$, se reduce α y se procede de manera parecida, para terminar $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones a álgebras

Los teoremas para bocses obtenidos en páginas anteriores, especialmente los del Capítulo 3, se aplicarán ahora a la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Para una $k-$álgebra Λ con tales características, se considera el correspondiente bocs $\mathcal{D}$ de Drozd, así como la categoría $\mathcal{P}_1$, para los cuales se tiene una equivalencia : $\mathcal{P}_1 \approx rep\mathcal{D}$.

La transición entre las categorías $\mathrm{mod}\,\Lambda$ y $rep\mathcal{D}$ es posible por la fórmula :

$$\Delta(\underline{\varphi}) = \delta(M) \ ,$$

en donde, para un inescindible M en $\mathrm{mod}\,\Lambda$,

$$\delta(M) = \dim_k Hom_\Lambda(M, DtrM) - \dim_k Hom_\Lambda(topM, socDtrM) \ ;$$

y para la presentación proyectiva mínima de M, $(P \xrightarrow{\varphi} Q) \in \mathcal{P}_1$, correspondiente a la representación $\underline{\varphi}$ del bocs $\mathcal{D}$ bajo la equivalencia señalada,

$$\Delta(\underline{\varphi}) = \dim_k End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi}) - q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim\varphi}) \ .$$

1 Preliminares

Sea Λ una $k-$álgebra de dimensión finita, con el campo k algebraicamente cerrado. La categoría de los $\Lambda-$módulos finitamente generados se denota por $\mathrm{mod}\,\Lambda$. Se considera un sistema completo $P_1, ..., P_r$, de las clases de isomorfía de los $\Lambda-$módulos proyectivos inescindibles en $\mathrm{mod}\,\Lambda$.

El bocs de Drozd de Λ corresponde a una bigráfica diferencial, también denotada $\mathcal{D}$, con $2r$ vértices :

$1,\ 2,\ ...,\ r, 1', 2', ..., r'$ $[K_2]$. El número de flechas de grado 0 de i en j', es igual a n_{ij} = $\dim_k radHom_\Lambda(P_i, P_j)$. Asimismo, se definen n_{ij} flechas de grado 1 de i en j, y n_{ij} flechas de grado 1 de i' en j'. Como el interés principal en considerar esta bigráfica es su forma cuadrática, no se hará referencia a su diferencial.

Se utilizará también la categoría $\mathcal{P}_1$, cuyos objetos son los morfismos $P \xrightarrow{\varphi} Q$, tales que $\operatorname{Im}\varphi \subset radQ$, P, Q proyectivos en $\operatorname{mod}\Lambda$. Los morfismos de $P \xrightarrow{\varphi} Q$ en $P' \xrightarrow{\varphi'} Q'$, están dados por pares de morfismos (u, v), $u : Q \longrightarrow Q'$, $v : P \longrightarrow P'$, tales que $\varphi' v = u\varphi$.

Para M inescindible en $\operatorname{mod}\Lambda$, se considera una presentación proyectiva mínima de M :

$$P_1(M) \xrightarrow{\varphi} P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ .$$

Se tienen descomposiciones

$$P_1(M) = \amalg_{i=1}^{r} m_i P_i \quad , \quad P_0(M) = \amalg_{i=1}^{r} n_i P_i \ .$$

El morfismo φ, que también se denotará por $\varphi(M)$, es entonces un objeto de la categoría $\mathcal{P}_1 \approx rep\mathcal{D}$, $\varphi \mapsto \underline{\varphi}$. Obsérvese que $\underline{\dim}\underline{\varphi} = (m_1, ..., m_r; n_1, ..., n_r)$.

Se utiliza la notación :

$$\underline{c}(M) = (m_1, ..., m_r; n_1, ..., n_r) \ .$$

A continuación se establecen algunos resultados que permiten hallar una expresión adecuada para $\Delta_\mathcal{D}(\underline{\varphi}) = \dim_k End_\mathcal{D}(\underline{\varphi}) - q_\mathcal{D}(\underline{\dim}\underline{\varphi})$.

Por comodidad, de ahora en adelante se escribirá, para M, Z en $\operatorname{mod}\Lambda$:

$$\langle M, Z\rangle = \dim_k Hom_\Lambda(M, Z) \ .$$

Por $[ARS$, Corolario 4.3, p.129] se tiene :

$$\langle M, Z\rangle - \langle Z, DtrM\rangle = \langle P_0(M), Z\rangle - \langle P_1(M), Z\rangle \ .$$

En particular, para $Z = M$, se tiene

$$\langle M,M\rangle - \langle M, DtrM\rangle = \langle P_0(M), M\rangle - \langle P_1(M), M\rangle \quad . \tag{3.1}$$

De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega M \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad ,$$

se obtienen las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Hom_\Lambda(P_i, \Omega M) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_i, P_0) \longrightarrow Hom_\Lambda(P_i, M) \longrightarrow 0 \quad ,$$

para $i = 0, 1$, y de ellas las relaciones

$$\langle P_i(M), \Omega(M)\rangle - \langle P_i(M), P_0(M)\rangle + \langle P_i(M), M\rangle = 0 \quad , \tag{3.2}$$

para $i = 0, 1$.

De manera parecida, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow P_1(M) \longrightarrow \Omega(M) \longrightarrow 0 \quad ,$$

se obtienen las relaciones

$$\left\langle P_i(M), \Omega^2(M)\right\rangle - \langle P_i(M), P_1(M)\rangle + \langle P_i(M), \Omega(M)\rangle = 0 \quad , \tag{3.3}$$

para $i = 0, 1$.

También se tiene la siguiente relación :

$$\langle P_1(M), P_0(M)\rangle = \dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) + \sum_i m_i n_i \quad . \tag{3.4}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) &= \bigoplus_{i\neq j} m_i n_j Hom_\Lambda(P_i, P_j) \oplus \\ & \bigoplus_{i=1}^{r} m_i n_i End_\Lambda(P_i) \quad , \end{aligned}$$

y entonces

$$\langle P_1(M), P_0(M)\rangle = \sum_{i\neq j} m_i n_j \langle P_i, P_j\rangle + \sum_i m_i n_i \dim_k End_\Lambda(P_i) \quad ,$$

y como $\dim_k End_\Lambda(P_i) = 1 + \dim_k radEnd_\Lambda(P_i)$, se obtiene :

$$\begin{aligned} \langle P_1(M), P_0(M)\rangle &= \sum_{i\neq j} m_i n_j \langle P_i, P_j\rangle + \\ & + \sum_i m_i n_i \dim_k radEnd_\Lambda(P_i) + \sum_i m_i n_i \quad . \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) &= \bigoplus_{i,j} radHom_\Lambda(P_i, P_j) \\ &\cong \bigoplus_{i\neq j} Hom_\Lambda(P_i, P_j) \oplus \\ & \bigoplus_i m_i n_i radEnd_\Lambda(P_i) \quad , \end{aligned}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) &= \sum_{i\neq j} m_i n_j \langle P_i, P_j\rangle + \\ & + \sum_i m_i n_i \dim_k radEnd_\Lambda(P_i) \\ &= \langle P_1(M), P_0(M)\rangle - \sum_i m_i n_i \quad . \end{aligned}$$

De aquí se obtiene (3.4)

También se tienen las relaciones siguientes, obtenidas de manera parecida a lo anterior :

$$\langle P_0, P_0\rangle = \dim_k radEnd_\Lambda(P_0) + \sum_i n_i^2 \quad ,$$

$$\langle P_1, P_1\rangle = \dim_k radEnd_\Lambda(P_1) + \sum_i m_i^2 \ . \tag{3.5}$$

1.1 Proposición.

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\varphi) &= \langle P_1(M), P_1(M)\rangle + \langle P_0(M), P_0(M)\rangle - \\ &\quad - \dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) \ . \end{aligned}$$

Demostración. Utilizando (3.4) y (3.5) , se tiene.:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\varphi) &= q_{\mathcal{D}}(m_1, ..., m_r; n_1, ..., n_r) \\ &= \sum_i m_i^2 + \sum_i n_i^2 - \sum_{i,j} m_i n_j \dim_k radHom_\Lambda(P_i, P_j) + \\ &\quad + \sum_{i,j} m_i m_j \dim_k radHom_\Lambda(P_i, P_j) + \\ &\quad + \sum_{i,j} n_i n_j \dim_k radHom_\Lambda(P_i, P_j) \\ &= \langle P_1(M), P_1(M)\rangle + \langle P_0(M), P_0(M)\rangle - \\ &\quad - \dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) \quad \square \end{aligned}$$

El funtor

$$\mathcal{P}_1 \longrightarrow \operatorname{mod}\Lambda \ ,$$

tal que $(P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0) \mapsto \operatorname{coker}\varphi =: M$, induce un epimorfismo de álgebras :

$$F : End_{\mathcal{P}_1(\Lambda)}(\varphi) \longrightarrow End_\Lambda(M) \ ,$$

tal que si $(u, v) \in End_{\mathcal{P}_1(\Lambda)}(\varphi)$, $F(u, v)$ es el único homomorfismo que hace conmutar el diagrama :

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{\varphi} & Q & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\ u\downarrow & & v\downarrow & & \downarrow F(u,v) & & \\ P & \xrightarrow{\varphi} & Q & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \ .$$

El núcleo de F se denotará por $K(\varphi)$.

1.2 Lema. Para cualquier M en $\mathrm{mod}\,\Lambda$ existe un epimorfismo

$$\Phi : Hom_\Lambda(P_0(M), P_1(M)) \times Hom_\Lambda(P_1(M), \Omega^2(M)) \longrightarrow K(\varphi) \; .$$

Demostración. Se define $\Phi(s,\lambda) = (-\lambda + s\varphi, \varphi s)$. Es claro que $\Phi(s,\lambda) \in End_{\mathcal{P}_1(\Lambda)}(\varphi)$ y además, $F\Phi(s,\lambda) = 0$.

Para la sobreyectividad, sea $(u,v) \in K(\varphi) \subset End_{\mathcal{P}_1(\Lambda)}(\varphi)$; entonces existe $s : P_0(M) \longrightarrow P_1(M)$, tal que $\varphi s = v$. Obsérvese que $\varphi(u - s\varphi) = \varphi u - \varphi s \varphi = v\varphi - v\varphi = 0$. De aquí que $\mathrm{Im}(u - s\varphi) \subset \ker\varphi \subset \Omega^2(M)$. Entonces, para $\lambda = -u + s\varphi : P_1(M) \longrightarrow \Omega^2(M)$ se verifica $\Phi(s,\lambda) = (-\lambda + s\varphi, \varphi s) = (u,v)$ □

1.3 Lema.

$$\ker\Phi \cong Hom_\Lambda(P_0(M), \Omega^2(M)) \; .$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \ker\Phi &= \left\{(s, s\varphi),\ s \in Hom_\Lambda(P_0(M), \Omega^2(M))\right\} \\ &\subset Hom_\Lambda(P_0(M), P_1(M)) \times Hom_\Lambda(P_1(M), \Omega^2(M)) \; . \end{aligned}$$

De hecho, $\Phi(s,\lambda) = 0$ si, y solamente si, $\lambda = s\varphi$, $\varphi s = 0$. Pero esto implica $ims \subset \Omega^2(M)$. Entonces s puede ser considerada como aplicación $P_0(M) \longrightarrow \Omega^2(M)$. Es claro que la aplicación

$$Hom_\Lambda(P_0(M), \Omega^2(M)) \longrightarrow \ker\Phi \; , \; s \longmapsto (s, s\varphi)$$

es un isomorfismo □

Los dos lemas anteriores, junto con la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker\Phi \longrightarrow Hom_\Lambda(P_0(M), P_1(M)) \times Hom_\Lambda(P_1(M), \Omega^2(M)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow K(\varphi) \longrightarrow 0 \; , \end{aligned}$$

de la cual se deduce que

$$\begin{aligned}\dim K(\varphi) &= \langle P_0(M), P_1(M)\rangle + \left\langle P_1(M), \Omega^2(M)\right\rangle - \left\langle P_0(M), \Omega^2(M)\right\rangle \\ &= \langle P_0(M), \Omega(M)\rangle + \left\langle P_1(M), \Omega^2(M)\right\rangle \ ,\end{aligned}$$

demuestran la siguiente proposición.

1.4 Proposición.

$$\begin{aligned}\dim_k End_{\mathcal{P}_1}(\varphi) &= \langle M, M\rangle + \langle P_0(M), \Omega(M)\rangle + \\ &\quad + \left\langle P_1(M), \Omega^2(M)\right\rangle \ .\end{aligned}$$

1.5 Proposición. Sea $\mathcal{D}$ el bocs de Drozd. Entonces

$$\Delta_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi}) = \langle M, DtrM\rangle - \langle topM, SocDtrM\rangle \ .$$

Demostración. Se utiliza que $End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi}) \cong End_{\mathcal{P}_1}(\varphi)$. En el siguiente cálculo se aplican sucesivamente las relaciones : (3.3), (3.2), (3.1), (3.2), (3.4); se abrevia : $P_i(M) = P_i,\ i = 0, 1$.

$$\begin{aligned}-\Delta_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi}) &= q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\varphi) - \dim_k End_{\mathcal{P}_1}(\varphi) \\ &= \left[\langle P_1, P_1\rangle - \left\langle P_1, \Omega^2(M)\right\rangle\right] + \\ &\quad + [\langle P_0, P_0\rangle - \langle P_0, \Omega(M)\rangle] - \\ &\quad - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0) - \dim_k End_\Lambda(M) \\ &= \langle P_1, \Omega(M)\rangle + \langle P_0, M\rangle - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0) - \\ &\quad - \dim_k End_\Lambda(M) \\ &= [\langle P_0, M\rangle - \dim_k End_\Lambda(M)] + \langle P_1, \Omega(M)\rangle - \\ &\quad - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0) \\ &= \langle P_1, M\rangle - \langle M, DtrM\rangle + \langle P_1, \Omega(M)\rangle - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0) \\ &= \langle P_1, M\rangle + \langle P_1, \Omega(M)\rangle - \langle M, DtrM\rangle - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0)\end{aligned}$$

$$= [\langle P_1, P_0\rangle - \dim_k radHom_\Lambda(P_1, P_0)] - \langle M, DtrM\rangle$$
$$= \sum_i m_i n_i - \langle M, DtrM\rangle \quad \square$$

1.6 Lema.

$$\langle topM, socDtrM\rangle = \sum_{i=1}^{r} m_i n_i \quad .$$

Demostración. De la presentación proyectiva mínima de M, se obtiene ([*Ri*]) la presentación inyectiva mínima de $DtrM$:

$$0 \longrightarrow DtrM \longrightarrow \amalg_{i=1}^{r} m_i D(P_i^*) \longrightarrow \amalg_{i=1}^{r} n_i D(P_i^*) \longrightarrow 0 \ ,$$

y entonces : $socDtrM \cong \amalg_{i=1}^{r} m_i S_i$, en donde $S_i = \frac{P_i}{radP_i}$. $\square$

1.7 Observación.

$$\begin{aligned} (i) \quad \underline{\dim}\underline{\varphi} &= \underline{c}(M) \ , \\ (ii) \quad \left\|\underline{\varphi}\right\|_{\mathcal{D}} &= \sum_{i,j} n_{ij} m_i n_j = \sum_{i,j} m_i n_j \dim_k rad(P_i, P_j) \\ &= \dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(M)) \ . \end{aligned}$$

2 Teoremas para álgebras.

En este apartado Λ denota una $k-$álgebra de dimensión finita , k es un campo algebraicamente cerrado, y $\mathcal{D}$ es el bocs de Drozd de Λ .

Para un inescindible M en mod Λ , se pone

$$\delta(M) = \Delta_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi}) \ .$$

2.1 Teorema. Sean M, N inescindibles en mod Λ. Si $\underline{c}(M) = \underline{c}(N)$, y además, $\delta(M) = \delta(N) = 0$, entonces $M \cong N$.

Demostración. De $\underline{c}(M) = \underline{c}(N)$ se sigue que en el bocs de Drozd, $\underline{\dim}\underline{\varphi(M)} = \underline{\dim}\underline{\varphi(N)}$, y entonces $q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\underline{\varphi(M)}) = q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\underline{\varphi(N)})$. Además, de

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(M) = \dim_k End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi(M)}) - q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\underline{\varphi(M)}) \\ 0 &= \delta(N) = \dim_k End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi(N)}) - q_{\mathcal{D}}(\underline{\dim}\underline{\varphi(N)}) \ , \end{aligned}$$

se sigue : $e(M) = \dim_k End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi(M)}) = \dim_k End_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi(N)}) = e(N)$. Aplicando (5.7) del Capítulo 3, se obtiene $\underline{\varphi(M)} \cong \underline{\varphi(N)}$, y entonces $M \cong N$ □

2.2 Observación. De (2.1) se obtiene otra demostración del siguiente teorema :

Teorema [*ARS*, Teorema 4.7, p.331]. Sean M, N inescindibles en mod Λ, tales que $P_i(M) \cong P_i(N)$, $i = 0, 1$. Si ni M ni N son el inicio de cadenas cortas, entonces $M \cong N$.

Demostración. Por definición, una cadena corta es una sucesión de morfismos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} DTrX$, con X inescindible y $f \neq 0$, $g \neq 0$. Es suficiente mostrar que $\delta(M) = \delta(N) = 0$. Para ello, supóngase que $Hom_\Lambda(M, DtrM) \neq 0$, y sea $0 \neq g \in Hom_\Lambda(M, DtrM)$. Se tiene entonces una cadena corta que empieza en M , $M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{g} DTr\ M$, contradicción. Luego, $0 \leq \Delta(\underline{\varphi}) = \delta(M) = -\sum m_i n_i \leq 0$, es decir, $\delta(M) = 0$. Igualmente se demuestra que $\delta(N) = 0$.□

Obsérvese que el Teorema (2.1) es más general que el Teorema anterior, puesto que puede tenerse $Hom_\Lambda(M, DtrM) \neq 0$ y $\delta(M) = 0$.

2.3 Corolario. Si $\delta(M) = 0$ para todo inescindible M en mod Λ , entonces Λ es de tipo de representación finito.

Demostración. Supóngase, por contradicción, que Λ es de tipo de representación infinito. Por Brauer-Thrall II existe alguna dimensión d , para la cual hay una familia infinita $\{M_j,\ j \in J\}$, de inescindibles no isomorfos, con $\dim_k M_j = d$, para todo j . Para cada M_j , considérese su presentación proyectiva mínima : $P_{1j} \longrightarrow P_{0j} \longrightarrow M_j \longrightarrow 0$; y sea $\underline{c}(M_j) = (m_{ij}; n_{ij})$, con $1 \leq i \leq r$ (no confundir estos m_{ij}, n_{ij} con los m_{ij}, n_{ij} de la sección de Preliminares).

Se tiene $topM_j \cong topP_{0j}$ y entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} n_{ij} &= \dim(\amalg_{i=1}^{r} n_{ij} S_i) = \dim(topP_{0j}) \\ &= \dim(topM_j) \leq \dim M_j = d\ .\end{aligned}$$

Entonces hay únicamente un número finito de vectores (n_{ij}). Por lo cual también hay sólo un número finito de módulos P_{0j} , para $j \in J$, y entonces los P_{1j} existen únicamente en número finito.Luego hay sólo un número finito de vectores (m_{ij}). Se ha demostrado que $\underline{c}(M_j)$ es constante para casi todos los M_j ; y como por hipótesis $0 = \delta(M_j)$, por el Teorema (2.1) se tiene $M_j \cong M_i$, para casi todos los M_j . Es decir, existe a lo sumo un número finito de M_j , imposible □

2.4 Teorema. Sea M inescindible en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, con Λ de tipo de representación finito y $\|M\| \geq 1$. Entonces existen a lo sumo

$$\binom{\|M\| - 1 + \delta(M)}{\delta(M)} = \frac{(\|M\| - 1 + \delta(M))!}{(\|M\| - 1)!\delta(M)!}$$

distintas clases de isomorfía de inescindibles N en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, tales que $\underline{c}(N) = \underline{c}(M)$ y $\delta(N) = \delta(M)$.

Demostración. Para N, M como en el enunciado, considérense los correspondientes $\underline{\varphi(N)}$, $\underline{\varphi(M)}$ en $rep\mathcal{D}$. Entonces $\underline{\dim}\underline{\varphi(N)} = \underline{\dim}\underline{\varphi(M)}$ y $e(\underline{\varphi(N)}) = e(\underline{\varphi(M)})$, y así, en el bocs de Drozd, por el Teorema (2.1) se tiene $\underline{\varphi(N)} \cong \underline{\varphi(M)}$ y de aquí, $N \cong M$ □

2.5 Definición. Una familia $\mathcal{F}$ de inescindibles M en $\mathrm{mod}\,\Lambda$ se llama mansa, si para cada dimensión $\underline{d}$, existe una familia finita de $\Lambda - k\,[x]_{f_i(x)}$ –bimódulos L_i ,$1 \leq i \leq s$, finitamente generados como $k\,[x]_{f_i(x)}$ –módulos, tales que :

(i) para $\lambda \in k$, si $f_i(\lambda) \neq 0$, entonces $L_i \otimes_{k[x]_{f_i(x)}} \frac{k[x]}{(x-\lambda)}$ está en $\mathcal{F}$;

(ii) para todas las clases de isomorfía $\{X\}$, con X en $\mathcal{F}$, excepto para un número finito, existen i y $\lambda \in k$, $h(\lambda) \neq 0$, tales que $X \cong L_i \otimes_{k[x]_{f_i(x)}} \frac{k[x]}{(x-\lambda)}$.

2.6 Teorema. La familia $\mathcal{F}$ de todos los inescindibles M en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, tales que $\delta(M) = 1$, es una familia mansa.

Demostración. Por definición, $\delta(M) = \Delta_{\mathcal{D}}(\underline{\varphi(M)})$. Se escribirá $\underline{M} = \underline{\varphi(M)}$. Considérese una dimensión fija $\underline{d}$, tal que en $\mathcal{F}_{\underline{d}} = \{M \in \mathcal{F}, \underline{\dim} M = \underline{d}\} \subset \mathrm{mod}\,\Lambda$, existe una familia infinita de módulos no isomorfos. En $rep\mathcal{D}$, sea $\underline{\mathcal{F}}$ la correspondiente familia de representaciones inescindibles, es decir,

$$\underline{\mathcal{F}} = \{\underline{M}\ ,\ \underline{M} \text{ es inescindible en } rep(\mathcal{D})\ , \text{y } \Delta(\underline{M}) = 1\}\ .$$

Entonces $\underline{\mathcal{F}}_{\underline{d}}$ corresponde a $\mathcal{F}_{\underline{d}}$, y en $\underline{\mathcal{F}}_{\underline{d}}$ existe una familia de inescindibles no isomorfos. Por el Teorema (6.2) del Capítulo 3, existe un $A - k\,[x]_{h(x)}$ −bimódulo L, en donde $A = (k\mathcal{D})_0$, tal que para casi todas las clases de isomorfía $\{\underline{M}\}$, $\underline{M} \in \underline{\mathcal{F}}_{\underline{d}}$, existe un $\lambda \in k$, con $h(\lambda) \neq 0$, para el cual

$$\underline{M} \cong L \otimes_{k[x]_{h(x)}} \frac{k\,[x]}{(x-\lambda)}\ .$$

Se tienen funtores

$$rep(\mathcal{D}) \xrightarrow{S} \mathcal{P}_1(\Lambda) \xrightarrow{C} \mathrm{mod}\,\Lambda\ ,$$

tales que $G = CS$ está dado en objetos por $G(Z) = T \otimes_A Z$, con ${}_{\Lambda}T_A = G(A)$. Entonces, para casi todas las clases de isomorfía $\{\underline{M}\}$, con M en $\mathcal{F}_{\underline{d}}$, se tiene

$$M \cong G(\underline{M}) \cong G(L \otimes_{k[x]_{h(x)}} \frac{k\,[x]}{(x-\lambda)}) \cong (T \otimes_A L) \otimes_{k[x]_{h(x)}} \frac{k\,[x]}{(x-\lambda)}\ ,$$

para algún $\lambda \in k$, en donde $T \otimes_A L$ es un $\Lambda - k\,[x]_{h(x)}$ −bimódulo, libre y finitamente generado como $k\,[x]_{h(x)}$ −módulo □

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del Teorema anterior.Recuérdese que $\mu_{\underline{d}}$ denota el menor número de bimódulos L_i de la Definición 2.5.

2.7 Teorema. En el anterior Teorema, $\mu_{\underline{d}} \leq 1$, para toda $\underline{d}$.

Referencias

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo. "Representation Theory of Artin Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[BCS] R. Bautista, L. Colavita, L. Salmerón. "On adjoint funtors in representation theory", Representations of Algebras, Lecture Notes in Mathematics 903, Springer, 1981, p. 9-25.

[BM] R. Bautista, R. Martínez-Villa. "Representations af partially ordered sets and 1-Gorenstein Artin algebras", Proc. Antwerp Conf., Marcel Dekker, 1979, 385-433.

[BK] R. Bautista, M. Kleiner."Almost split sequences for relatively projective modules", J. Algebra, vol. 135, 19-56, nov. 1990.

[BZ] R. Bautista, R. Zuazúa. "Morita equivalence and reduction algorithms for representations of coalgebras", Canadian Math. Soc.,Conference Proc., Vol. 18, 1996, p. 51-80.

[CB_1] W.W. Crawley-Boevey. "On tame algebras and bocses", Proc. London Math. Soc. (3)56 (1988), 451-483.

[CB_2] W.W. Crawley-Boevey. "Matrix problems and Drozd's theorem", Topics in Algebra, Banach Center Publ., Vol. 26, Part 1, Warsaw, 1990.

[D_1] Y. A. Drozd. "Tame and wild matrix problems", Representation Theory II, Lecture Notes in Mathematics 832, Springer, 1980, p. 242-258.

[D_2] Y. A. Drozd. "Tame and wild matrix problems",Amer. Math. Soc. Transl.(2), Vol. 128(1986), p. 31-55

[Ka] V. G. Kac. "Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory", Invent. Math. 58 (1980), 57-92.

[K_1] M. Kleiner. "Induced modules and comodules and representations of bocs's " and DGC's", Lecture Notes in Mathematics 903, Springer, 1981, p. 168-185.

[K_2] M. Kleiner."Matrix problems and representations of finite dimensional algebras", Proceed. IV-ICRA, Carleton Univ., Ottawa, 1984.

[M] G. Montaño. "Caracterización de bocses de dimensión finita de tipo manso", Tesis de Maestría, UNAM, México, 1993.

[O] S. A. Ovsienko. "Generic representations of free bocses", Preprint 93-03, Universität Bielefeld, 28 p.

[Ri] C. M. Ringel. "Tame Algebras and Integral Quadratic Forms", Lecture Notes in Mathematics, 1099, Springer, 1984.

[Ro] A. V. Roiter. "Matrix problems and representations of bocs's", Lecture Notes in Mathematics 831, Springer, 1980, p. 288-324

[RK] A. V. Roiter, M. Kleiner. "Representations of differential graded categories", Lecture Notes in Mathematics 488, Springer, 1975, p. 316-339.