

01190

1
0
4

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

**ESTUDIO DEL EFECTO DE LA PRESIÓN
CAPILAR SOBRE LA ESTABILIDAD DE LA
EBULLICIÓN EN UN MEDIO POROSO.**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POR: ARMANDO GALLEGOS MUÑOZ

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAIME G. CERVANTES DE GORTARI

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CIUDAD UNIVERSITARIA

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedico con todo cariño este trabajo a mi esposa Ma. Elena, a
mis padres y especialmente a mi hija Viviana Pamela.*

Agradezco...

Al Dr. Jaime G. Cervantes de Gortari, todo el apoyo brindado para la culminación de este trabajo.

A los Drs. Alejandro Romero L., Fernando Samaniego, Francisco Solorio, Federico Méndez, José Luis Fernández Z. y Alejandro Ramírez, sus observaciones para mejorar la calidad del trabajo.

A la Sra. Milagros y Srita. Laura, la ayuda proporcionada en el trámite administrativo.

Y al CONACyT, por el apoyo otorgado para realizar el trabajo.

Abstract

An analysis of the effect of the capillary pressure on the stability of boiling in a porous medium, is presented. A liquid region overlying an isothermal two-phase region, which is dominated by countercurrent flow liquid-vapor, is considered. This structure is limited by an upper boundary, permeable and isothermal, and a bottom impermeable boundary, with impermeable and adiabatic lateral walls. The system is heated at the bottom and the saturation temperature of the liquid is reached. The study, which includes a linear stability analysis and some qualitative experiments, showed that the capillary pressure gives rise to more stability on the boiling process when the heating is increased. On the other hand, the thermal conduction through the porous medium increases as the liquid phase saturation and the movement in the two-phase region decrease. However, when the capillary pressure is zero this behavior is not present. In this case, the instability of boiling in the porous medium increases when the heat flow increases.

Resumen

Se investigó el efecto que tiene la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso. Para el análisis se consideró un sistema compuesto por una región de dos fases, donde existe un contraflujo de líquido y vapor, cubierta por una región de líquido. Esta estructura de capas está limitada por una frontera inferior impermeable y una frontera superior permeable e isotérmica, manteniendo la frontera vertical adiabática; el sistema se forma cuando se alcanza la temperatura de saturación al aplicar un flujo de calor en la frontera inferior, creándose sobre ésta, la región isotérmica de dos fases. En el estudio realizado, que comprende un análisis de estabilidad lineal y experimentos cualitativos, se estableció que el efecto de la presión capilar genera una mayor estabilidad de la ebullición conforme se incrementa el flujo de calor aplicado, ya que la saturación del líquido en la región de dos fases disminuye provocando que la presión capilar se incremente, obligando a la fase del líquido a tener menor movilidad ; se tiene, en estas condiciones, una mayor difusión térmica a través del medio poroso. Esto no se presentó para el caso donde se desprecia la presión capilar, en cuyo caso se observó que a mayor flujo de calor mayor inestabilidad.

Índice

Nomenclatura.

Introducción.

Capítulo 1: Antecedentes

- | | |
|---|----|
| 1.1.- Estudios que no consideran los efectos capilares. | 4 |
| 1.2.- Estudios que consideran los efectos capilares. | 6 |
| 1.3.- Estudios donde se aplica el análisis de estabilidad lineal. | 10 |
| 1.4.- Otros trabajos importantes. | 12 |
| 1.5.- Estudios preliminares realizados por el autor del presente trabajo. | 13 |
| 1.6.- Resumen de los estudios relacionados con la ebullición en medios porosos. | 16 |

Capítulo 2: Planteamiento del problema

- | | |
|---------------------------------------|----|
| 2.1.- Definición del problema. | 19 |
| 2.2.- Ecuaciones fundamentales. | 20 |
| 2.3.- Análisis de estabilidad lineal. | 23 |
| 2.3.1.- Estado básico. | 24 |
| 2.3.2.- Estado perturbado. | 25 |
| 2.4.- Presión capilar. | 26 |

Capítulo 3: Solución del problema

- | | |
|--|----|
| 3.1.- Solución del estado básico. | 30 |
| 3.2.- Solución del estado perturbado. | 38 |
| 3.2.1.- Sistema de ecuaciones que se resuelven para $p_c = 0$. | 41 |
| 3.2.2.- Sistema de ecuaciones que se resuelven para $p_c \neq 0$. | 45 |
| 3.2.3.- Condiciones de frontera y compatibilidad. | 48 |
| 3.2.4.- Método de solución. | 54 |

Capítulo 4: Resultados obtenidos

- | | |
|---|----|
| 4.1.- Resultados teóricos. | 57 |
| 4.2.- Resultados experimentales cualitativos. | 65 |
| 4.2.1.- Resultados preliminares. | 65 |
| 4.2.2.- Resultados finales. | 72 |

Capítulo 5: <u>Conclusiones</u>	87
<u>Referencias y bibliografía.</u>	89
<u>Apéndice A.</u>	94
Obtención de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía en un medio poroso por medio del Teorema del Promedio Volumétrico.	
<u>Apéndice B.</u>	105
Obtención de las ecuaciones gobernantes de las regiones del líquido y dos fases de los estados básico y perturbado.	
<u>Apéndice C.</u>	112
Aplicación del paquete de cómputo Mathematica y de los algoritmos de cálculo desarrollados para resolver el estado básico.	
<u>Apéndice D.</u>	126
Programas de cómputo para la solución del estado perturbado.	

Nomenclatura.

a_t	difusividad térmica.
c_p	calor específico.
\hat{e}	vector unitario.
g	aceleración de la gravedad.
H	altura de la cama porosa.
h_{fg}	entalpía de evaporación.
J	función de Leverett.
K	permeabilidad del medio poroso.
k_r	permeabilidad relativa.
k_e	conductividad térmica efectiva.
P	presión.
Q_b	flujo de calor adimensional, $Q_b = \frac{q_b H}{k_e (T_{sat.} - T_0)}$
q_b	flujo de calor aplicado.
Ra	número de Rayleigh de la región del líquido, $Ra = \frac{K H g \beta_t (T_{sat.} - T_0)}{v_l a_t}$
$Ra_{2\phi}$	número de Rayleigh de la región de dos fases, $Ra_{2\phi} = \frac{K H g (1 - \bar{\rho})}{v_l a_t}$
S	saturación del líquido.
T	temperatura.
t	tiempo.
u	componente de velocidad en x.
v	componente de velocidad en y.
W	flujo de calor adimensional, Ec. (47).
\bar{v}	vector de velocidad.
x	coordenada horizontal.
y	coordenada vertical.

Símbolos griegos.

α	rapidez de crecimiento de la perturbación.
β_t	coeficiente de expansión volumétrica.
γ	razón de las densidades, Ec. (77).
δ	posición de la interfaz.
Δ	amplitud de la perturbación de la interfaz.
η	coordenada espacial vertical transformada.
Θ	amplitud de la perturbación de la temperatura.

Nomenclatura

κ	número de onda de la perturbación.
λ	número de Jakob (entalpía de evaporación), Ref. 39, $\lambda = \frac{h_{fg}}{c_{pt}(T_{sat.} - T_0)}$
μ	viscosidad dinámica.
$\bar{\mu}$	relación de viscosidades.
ν	viscosidad cinemática.
Π	amplitud de la perturbación de la presión.
ρ	densidad.
$\bar{\rho}$	relación de densidades.
Σ	amplitud de la perturbación de la saturación.
σ	razón de capacidad de calor, $\sigma = \frac{\phi \rho_l c_{pl} + (1 - \phi) \rho_s c_{ps}}{\rho_l c_{pl}}$
τ	variable del tiempo transformado.
ϕ	porosidad.

Introducción.

La ebullición en medios porosos es un fenómeno que se presenta en situaciones importantes de la tecnología moderna, entre las que destacan el aprovechamiento de la energía geotérmica y el diseño y operación de dispositivos térmicos avanzados de control como son los caloriductos. Las dificultades que se presentan para la evaluación de la transferencia de calor radican en las interacciones que existen entre las propiedades físicas que identifican al medio poroso y las propiedades físicas que acompañan al proceso de cambio de fase. En la mayoría de los medios porosos que se estudian, las dimensiones del poro son pequeñas acentuando las dificultades para obtener datos experimentales de las principales variables que identifican el fenómeno de ebullición, las cuales son : presión de cada fase, geometría interfacial líquido-vapor, velocidad de cada fase en el poro, etc.

Debido a la complejidad de una estructura porosa y agregando a esto la presencia de un fluido en dos fases, como es el caso de la ebullición, es necesario considerar un análisis macroscópico del fenómeno microscópico, esto se logra usando el Teorema del Promedio Volumétrico [1]¹, que ha sido usado por varios autores [1-12].

Este trabajo considera el efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en medios porosos, efecto que no ha sido suficientemente estudiado. Se considera para ello, un sistema compuesto por una región de líquido cubriendo una región de dos fases, donde se tiene un contraflujo líquido-vapor, ver figura 1. Esta estructura de capas se logra cuando un sistema inicialmente saturado de líquido se calienta en la parte inferior, donde se tiene una frontera impermeable, y se enfría en la parte superior, donde se tiene una frontera permeable, alcanzándose la temperatura de saturación en el líquido. En esta estructura las regiones están separadas por una interfaz permeable que permite el flujo entre las regiones.

En el análisis de estabilidad se considera una perturbación lineal sobre las variables del sistema, tomando en cuenta las dos regiones y la interfaz. Como parte del análisis se consideran los modos normales, los cuales dan cuenta de la reacción de un sistema para cualquier pequeña perturbación, posteriormente se considera el principio de intercambio de estabilidad, válido para los estados marginales caracterizados por una estabilidad neutra.

El trabajo constituye una aportación en cuanto que:

1).- Se estableció, del análisis de estabilidad lineal, que los parámetros

¹ los números entre paréntesis rectangulares indican las referencias bibliográficas.

importantes son: el flujo de calor aplicado al sistema y el número de Rayleigh. El primero se relaciona con la altura de la región de dos fases y el segundo con el movimiento convectivo en cada región que compone el sistema.

2).- Se determinó que a mayor presión capilar se tiene más estabilidad del sistema debido a que se disminuye la movilidad de la fase líquida en la región de dos fases, provocando con esto una mayor difusión de calor en el medio poroso saturado.

3).- Se observó, del experimento cualitativo, un mayor efecto de la presión capilar sobre los procesos de condensación y evaporación en el medio poroso de menor permeabilidad, haciendo evidente una mayor expansión del volumen del fluido.

A continuación se describe el contenido de los capítulos de este trabajo de investigación.

En el capítulo 1 se resume la búsqueda bibliográfica llevada a cabo con los trabajos relacionados con el estudio de la ebullición en medios porosos, mencionando en primer término los trabajos que utilizaron un modelo unidimensional simple sin efectos capilares. Se consideran igualmente los trabajos donde los efectos capilares son tomados en cuenta, también para un modelo unidimensional; y finalmente se resumen los trabajos que consideran la estructura de capas mencionada anteriormente, haciendo hincapié en el análisis de estabilidad lineal en medios porosos.

En el capítulo 2 se plantea el problema a resolver, definiendo las ecuaciones fundamentales que se obtienen al aplicar el teorema del promedio volumétrico. Posteriormente se describe el análisis de estabilidad lineal, determinando las ecuaciones tanto para el estado básico como para el estado perturbado. También se define la ecuación que representa los efectos capilares en medios porosos y la relación que tiene con la saturación del medio, aspecto importante para la solución posterior del problema.

En el capítulo 3 se presenta la solución del problema, describiendo la metodología utilizada para obtener la solución del estado básico así como del estado perturbado. En la solución se consideran dos casos : uno donde la presión capilar es igual a cero y otro donde se toman en cuenta los efectos capilares. Para este último, se presenta la relación entre la presión capilar y la saturación del líquido en el medio poroso. Se presenta el método de solución para obtener la ecuación característica que surge del análisis de estabilidad lineal, así como el algoritmo para la solución de dicha ecuación.

En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos, tanto para el caso donde la presión capilar es cero como para el caso donde se consideran los efectos capilares. Los resultados obtenidos en el primer caso son comparados con los que existen en la literatura, comprobando la efectividad del algoritmo de cálculo. Los resultados para el segundo caso se analizan para determinar cómo influye la presión capilar en la estabilidad de la ebullición en un medio poroso. También se presentan los resultados obtenidos de un estudio experimental de visualización de una cama cilíndrica vertical, así como las mediciones de temperatura a lo largo del eje de simetría de la cama porosa. Estos resultados experimentales representan el aspecto cualitativo del fenómeno de ebullición en un medio poroso.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, haciendo énfasis en la aportación del trabajo y definiendo líneas de investigación para trabajos futuros.

CAPÍTULO 1

Antecedentes.

En la revisión bibliográfica de trabajos relacionados con la ebullición en medios porosos se pueden encontrar distintos puntos de vista en el estudio del problema, desde modelos muy simples hasta la aplicación de algoritmos numéricos muy complejos. Sin embargo, en ninguno de los trabajos se discute el problema del efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso. A continuación se presentan los trabajos relacionados con el estudio de la ebullición en medios porosos.

1.1.- Estudios que no consideran los efectos capilares.

Los trabajos importantes fueron realizados por Bau y Torrance [6, 13-17], quienes analizaron el fenómeno en una cama cilíndrica vertical inicialmente saturada de líquido, calentada de abajo y enfriada de arriba, manteniendo la pared vertical adiabática. Ellos realizaron un estudio experimental [6, 14-17] en un modelo unidimensional simple despreciando los efectos de capilaridad. El resultado principal que obtuvieron fue la formación de una cama porosa compuesta por una zona isotérmica de dos fases, cuando se alcanza la temperatura de saturación del líquido, cubierta por una capa de líquido, figura 1. Esta estructura de capas la determinaron experimentalmente al realizar mediciones de temperatura a lo largo de la línea central del modelo experimental, caracterizándose la región de dos fases por una línea a temperatura constante. También reportaron la presencia de oscilaciones de temperatura en la capa de líquido cuando la zona de dos fases alcanza un valor crítico establecido entre el 70-80 % de la altura total de la cama porosa. Las oscilaciones las atribuyen a la formación y desaparición de una capa de vapor cerca de la superficie caliente, asociando este fenómeno con el incremento en volumen que provoca un movimiento hacia arriba de la región de dos fases y de la región del líquido, lo cual sirve para liberar fluido caliente a través de la frontera superior permeable y, eventualmente el incremento de la presión del vapor, permitiendo que este fluya hacia arriba; se produce entonces un flujo de entrada de fluido frío en la superficie inferior y el proceso empieza de nuevo.

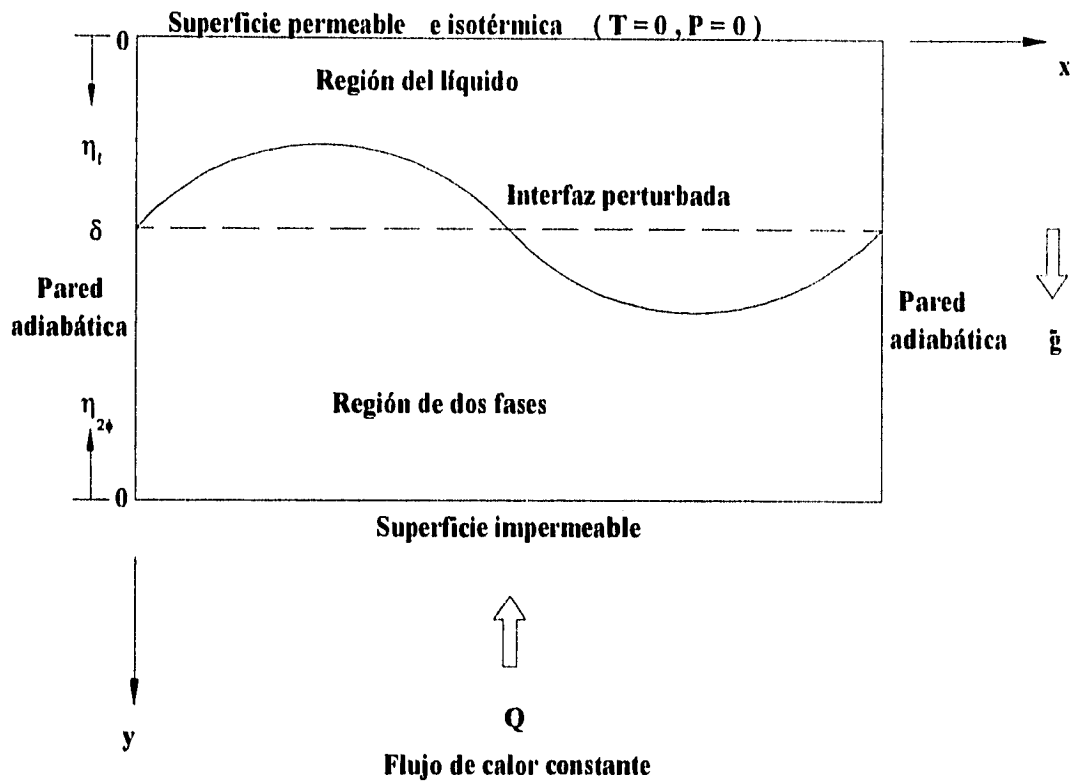


Figura 1. Esquema que representa el sistema de la estructura de capas.

Para complementar el estudio experimental de la ebullición, Torrance [17] presentó la interacción de la ebullición con los procesos de conducción y convección, tomando como parámetro principal el número adimensional de Rayleigh (Ra), que relaciona las fuerzas de expansión térmica con las de viscosidad. Torrance definió dos valores de Ra , uno que se refiere al número de Rayleigh crítico, Ra_{cr} , y otro definido como el número de Rayleigh donde inicia la ebullición en una cama porosa saturada de líquido y calentada de abajo, Ra_b . El primer valor lo determinó analítica y experimentalmente en un trabajo realizado con Bau [13], donde aplican la teoría de estabilidad lineal para encontrar Ra_{cr} . El valor, Ra_b , lo determinaron al aplicar una diferencia de temperaturas $\Delta T_s = T_{sat} - T_0$, donde T_{sat} es la temperatura de saturación del líquido que inicialmente satura el medio poroso y T_0 es una temperatura de referencia para condiciones estándar que se define previamente. La comparación de estos dos valores del número de Rayleigh establece el tipo de régimen que prevalece en la estructura de capas. Estos regímenes son :

1.- Para $Ra_b \ll Ra_{cr}$, el proceso de ebullición se identifica por una región de líquido conductiva cubriendo una región de dos fases. La ebullición inicia antes de la convección y la región del líquido permanece bajo un régimen conductivo. Este proceso fue observado por Bau y Torrance [14] para una cama porosa cilíndrica vertical, donde : la relación altura/diámetro de la cama , $H/D = 1.67$, la permeabilidad, $K = 8.5 \times 10^{-12} \text{ m}^2$, la porosidad $\phi = 0.37$ y el diámetro de la burbuja de vidrio que forma el medio poroso es, $d = 0.110 \text{ mm}$.

2.- Para $Ra_b < Ra_{cr}$, la convección no se presenta antes de la ebullición, pero se inicia inmediatamente después de la ebullición.

3.- Para $Ra_b > Ra_{cr}$, la convección de fase simple se presenta antes de que inicie la ebullición. Cuando se tiene la ebullición, se forma la región isotérmica de dos fases arriba de la superficie caliente. Este régimen fue observado en una cama porosa cilíndrica vertical formada por arena de Ottawa, donde : $H/D = 2.11$, $K = 1400 \times 10^{-12} \text{ m}^2$, $\phi = 0.42$ y $d = 1.06 \text{ mm}$. En esta cama porosa se presentó también un régimen conductivo en la región del líquido para flujos de calor altos en la presencia de ebullición.

Por último, para concluir con la revisión de los trabajos realizados por Bau y Torrance, se presenta el resultado que obtuvieron en el estudio que realizaron para determinar la estructura convectiva y el número de Rayleigh crítico de una cama cilíndrica vertical calentada de abajo y enfriada de arriba [13] al aplicar la teoría de estabilidad lineal. Para la obtención del número de Rayleigh crítico aplican el principio de intercambio de estabildades, donde el estado marginal es independiente del tiempo y las ecuaciones en estado permanente son aplicables. Del análisis de estabilidad lineal obtienen la ecuación característica para el número de Rayleigh en función de la razón de aspecto, $\gamma = D/2H$, entre el diámetro, D , y la altura, H , del cilindro. El resultado obtenido de la solución de la ecuación característica fue : para valores grandes de la razón de aspecto, el número de Rayleigh crítico se aproxima al valor correspondiente de una cama horizontal infinita con una frontera superior isotérmica y permeable y una frontera inferior con un flujo de calor constante e impermeable, donde $Ra_{cr} = 27.1$. También de la ecuación característica determinaron que este mismo valor del número de Rayleigh crítico se obtiene para un cilindro vertical con una frontera superior isotérmica e impermeable y una frontera inferior con un flujo de calor constante e impermeable. Por otra parte, determinaron que las paredes verticales provocan un efecto estabilizante para razones de aspecto bajas. En la tabla siguiente se muestran los valores del número de

Rayleigh crítico obtenidos en el estudio relacionado con el cilindro vertical para diferente tipo de material.

Material	Razón de aspecto, γ	Número de Rayleigh, Ra_{cr}
Arena sílica	0.219	88.6
Arena Ottawa	0.280	61.1
Arena Ottawa	0.238	77.7
Burbujas de vidrio	0.211	95.0

Como se puede observar en la tabla, a menor razón de aspecto mayor el número de Rayleigh crítico. En cuanto a la estructura convectiva de la cama porosa, determinaron que a menor razón de aspecto el número de celdas simples de convección se reducen. Por lo tanto, para razones de aspecto bajos, una celda simple se desarrolla y su eje coincide con el eje de simetría del cilindro.

Por otra parte, otros investigadores [18,19] realizaron estudios experimentales de un medio poroso saturado y calentado por la parte de abajo, determinando que existen áreas ocupadas por líquido y vapor sobre la superficie caliente y que el tamaño de esas áreas dependen del flujo de calor aplicado. También presentan el resultado experimental [19] donde un sistema de dos fases en un medio poroso, sujeto a un flujo de calor en la parte inferior, es estable si el número de Rayleigh es menor al número que corresponde para una convección de fase simple.

Posteriormente, otro trabajo que utilizó un modelo similar al de Bau y Torrance fué realizado por Ramesh [20], quién estudió el proceso de ebullición transitoria y oscilatoria de una cama porosa cilíndrica vertical calentada de abajo y enfriada de arriba usando un sistema unidimensional. De la ebullición transitoria determinó que la región de dos fases puede tratarse como cuasi-permanente con respecto a la región del líquido. En el estudio experimental observó tres regímenes sucesivos de la transferencia de calor, cuando el flujo de calor se incrementa, estos son : un régimen conductivo permanente antes del inicio de la ebullición, un régimen de ebullición permanente y un régimen de ebullición oscilatoria.

La ebullición oscilatoria se presentó cuando la altura de la zona de dos fases es más de las dos terceras partes de la altura total de la cama porosa coincidiendo con los resultados de Bau y Torrance [13-15], pero no definió claramente cual es el mecanismo

que origina ésta ebullición oscilatoria, solamente sugiere realizar estudios donde la zona de dos fases no sea homogénea. Las principales conclusiones del trabajo de Ramesh fueron:

1.- Las camas porosas de baja permeabilidad calentadas de abajo y enfriadas de arriba, presentan tres regímenes diferentes de transferencia de calor : conducción de fase simple antes del inicio de la ebullición, ebullición permanente y ebullición oscilatoria

2.- El régimen de ebullición permanente ($Nu < 3$) puede ser modelado por el análisis unidimensional de una región de líquido cubriendo una región de dos fases, donde las permeabilidades relativas cúbicas proporcionan una mejor estimación de la saturación en la región de dos fases.

3.- El régimen de ebullición oscilatoria ($Nu > 3$) se caracteriza por la oscilación de temperatura en la región del líquido y la fluctuación del nivel libre del agua arriba de la región del líquido.

4.- El grado de sobrecalentamiento en el fondo de la cama porosa permanece constante en el régimen de ebullición permanente, pero incrementa ligeramente con el número de Nusselt, Nu , en el régimen de ebullición oscilatoria.

5.- La convección celular libre posiblemente lleva a la interacción entre la región del líquido y la región de dos fases en $Nu = 7$, mostrando desviaciones de la teoría unidimensional a números de Nusselt altos.

Finalmente Ramesh realizó un experimento simple de visualización donde indica que las oscilaciones de temperatura pueden estar asociadas con la formación de "parches" o bolsas de vapor cerca del fondo de la cama porosa y la subsecuente condensación de dichas bolsas, aunque no define claramente el mecanismo que origina esta ebullición oscilatoria.

Continuando con el estudio de la ebullición donde la presión capilar es despreciable, Ramesh y Torrance [10] realizaron un análisis de estabilidad lineal de un sistema compuesto por una zona de dos fases cubierta por una capa de líquido, figura 1, determinando que existe inestabilidad convectiva debido a la acción de flotación en la región del líquido, para sistemas dominados por líquido, y para sistemas dominados por vapor, la inestabilidad se debe principalmente a la diferencia de densidad entre la región

de líquido y la región de dos fases, esto se relaciona con la inestabilidad gravitacional [5].

En este trabajo Ramesh muestran un diagrama donde los parámetros manejados son el número de Rayleigh, Ra , y el flujo de calor adimensional aplicado, Qb , definiendo cuatro posibles estructuras de capas para un sistema dominado por líquido, estas estructuras son :

- I.- Una región de líquido dominada por conducción.
- II.- Una región de líquido dominada por convección.
- III.- Una región de líquido conductiva cubriendo una región de dos fases.
- IV.- Una región de líquido convectiva cubriendo una región de dos fases.

Las primeras dos estructuras se refieren a un sistema saturado con un fluido en fase simple y las dos últimas se refieren a un sistema en capas formado con las dos regiones. Mayores detalles de este trabajo realizado por Ramesh y Torrance se presenta en otra sección posterior.

1.2.- Estudios que consideran los efectos capilares.

Otros trabajos importantes fueron presentados por K.S. Udell [21,22] quién realizó un estudio teórico-experimental de una cama porosa cilíndrica vertical, al igual que Bau y Torrance [6], pero esta cama se calienta de arriba y se enfría de abajo, donde se incluyen los efectos de capilaridad, fuerza de gravedad y cambio de fase. Estos efectos son comunes en dispositivos llamados calorí ductos o tubos de calor. El estudio que realizó Udell [21] se enfoca a un sistema unidimensional que está formado por arena, agua y vapor, encontrando que cuando el sistema se expone a un flujo de calor en su parte superior, se presentan tres regiones para el estado permanente, estas son : una región superior donde la transferencia de calor se lleva a cabo por conducción y los espacios vacíos contienen un vapor sobrecalentado estacionario, una región intermedia dominada por convección donde existe un flujo de líquido hacia arriba debido a fuerzas de capilaridad y un flujo de vapor hacia abajo debido a un gradiente de presión, y, por último, una región inferior dominada por conducción donde existe un líquido comprimido estacionario. En éste trabajo Udell analizó el estado termodinámico del fluido en la zona de dos fases y predijo la longitud de ésta zona en función del flujo de calor, propiedades del fluido y características del medio.

De las conclusiones importantes se tiene las siguientes:

1.- La transferencia de calor en la zona de dos fases se debe a una vaporización del líquido en la parte superior de la zona, fluyendo hacia abajo la fase de vapor debido a un gradiente de la presión del vapor. La condensación se lleva a cabo en la parte inferior y el líquido fluye hacia arriba debido a un gradiente de presión capilar.

2.- La longitud de la zona de dos fases se incrementa con una disminución del flujo de calor.

3.- Las fases del líquido y vapor, en la zona de dos fases, se encuentran en un estado termodinámico sobrecalentado, donde el líquido presenta un estado metaestable, el cual es incondicionalmente estable cuando el radio efectivo del menisco líquido-vapor dentro del poro es equivalente al radio de la burbuja formada [23].

En el otro trabajo Udell [22] analizó la transferencia de calor unidimensional en estado permanente, donde determinó un flujo de calor crítico para un calentamiento de la parte inferior. Este flujo de calor define la condición mínima para que exista una capa de vapor sobre la superficie caliente y así determinar una región de dos fases de longitud finita. También establece que para flujos de calor mucho mayores al flujo de calor crítico, los efectos gravitacionales pueden ser despreciables. Las conclusiones de este trabajo de Udell son:

1.- El efecto de capilaridad en un medio poroso saturado con las fases de líquido y vapor de un fluido simple se representa con el flujo en contracorriente de esas fases. Este flujo en contracorriente es un proceso de transferencia de calor altamente eficiente, similar al que se presenta en los tubos de calor o caloriductos.

2.- Para sistemas unidimensionales en estado permanente, la longitud de la región de dos fases es mayor para un calentamiento en la parte inferior que para un calentamiento en la parte superior.

3.- Para el calentamiento en la parte inferior, la longitud de la región de dos fases será infinitamente grande para flujos de calor menores al flujo de calor crítico establecido, W_{cr} .

4.- La diferencia de temperaturas a través de la región de dos fases se incrementa con un decrecimiento de la permeabilidad, y es mucho mayor la diferencia para un calentamiento de la parte inferior.

5.- La conductividad térmica efectiva de la región de dos fases es varias veces mayor que la conductividad de una región de fase simple, para medios porosos de alta permeabilidad. En el caso de medios porosos de baja permeabilidad ($K \leq 10^{-14} \text{ m}^2$) la conductividad será del mismo orden de magnitud para las regiones de fase simple y de dos fases.

Tomando en cuenta los estudios realizados tanto por Bau y Torrance, como por Udell, se puede decir que la ebullición en medios porosos se identifica por la estructura de capas que esta compuesta por una región de líquido cubriendo a una región de dos fases, esta misma estructura ha sido identificada por otros investigadores [24-35], estableciendo que los efectos capilares son importantes.

Recientemente para un sistema con calentamiento de la parte inferior , que es el proceso que identifica a la ebullición, otros investigadores [30-32] han realizado un análisis de un sistema unidimensional para determinar las condiciones del proceso que lleven a un contraflujo en estado permanente.

El estudio del contraflujo líquido-vapor en estado permanente realizado por Satik y colaboradores [30], analiza el proceso incluyendo capilaridad, conducción de calor y la ecuación de Kelvin. También en el caso de un calentamiento de la parte inferior establecen un flujo de calor crítico, donde una región de dos fases existe y su longitud decrece cuando el flujo de calor se incrementa. Aunque el resultado final de este trabajo no definió claramente las condiciones del proceso para el caso de la ebullición, si definió algunos aspectos importantes para el problema de tubos de calor que corresponde al caso analizado por Udell [21]. Dentro de estos aspectos mencionan que, para tubos de calor, la ecuación de Kelvin [22, 30], que representa una disminución de la presión del vapor, es importante en una capa límite en la frontera de la capa de vapor y la región de dos fases, pero son despreciables en la región de contraflujo líquido-vapor. También establecen un valor mínimo de permeabilidad que debe tener el medio poroso para que el contraflujo en estado permanente pueda existir, sin embargo, en otro trabajo [31] analizan más claramente el proceso de ebullición.

En otro trabajo importante Stubos, Satik y colaboradores [31] realizaron una interpretación física de los resultados presentados en un trabajo anterior [30], considerando la aplicación hacia la ebullición y la condensación, logrando así la

identificación para cada caso, es decir, determinaron que el caso de la ebullición se presenta cuando se considera un medio poroso lleno inicialmente de líquido, que después se convierte a un sistema líquido-vapor cuando se incrementa gradualmente la razón de calentamiento. Por otra parte, la condensación se presenta cuando el medio está inicialmente lleno de vapor y se convierte a un sistema líquido-vapor cuando se incrementa gradualmente la razón de enfriamiento. Para cada uno de los casos, se determinó una curva que muestra el comportamiento de la permeabilidad con respecto a un flujo de calor crítico, que determina la formación de la zona de dos fases, concluyéndose que el proceso de ebullición (calentamiento de abajo), semejante al drenado, es insensible a la permeabilidad y a la conducción de calor en el contraflujo. Por otra parte, el proceso de condensación (enfriamiento de arriba), que se asemeja a la imbibición, depende significativamente de las dos variables. Finalmente mencionan que un contraflujo en estado permanente debe ser determinado al conocer la historia (estado transitorio) del sistema.

Stubos y colaboradores [32] siguieron estudiando el contraflujo en estado permanente, principalmente en tubos de calor accionados por gravedad, donde su teoría dictamina que en sistemas homogéneos una zona de dos fases de longitud "infinita" y saturación constante se desarrolla si la razón de calentamiento es bastante baja (por debajo de un valor crítico, W_{cr}), así como también, determinaron una zona de dos fases "finita" para un flujo de calor igual o mayor a W_{cr} . También identificaron dos casos, uno que corresponde a una saturación baja de líquido, dominado por vapor (VD, enfriamiento por arriba), y otro con una saturación alta de líquido, dominado por líquido (LD, calentamiento de abajo), para cualquier caso se considera la capilaridad para conectar los perfiles de saturación constante con las regiones de líquido subenfriado (enfriamiento de arriba, condensación) o vapor seco (calentamiento de abajo, ebullición), en ambos casos la conducción es despreciable.

En éste trabajo consideran la heterogeneidad capilar del medio, esta heterogeneidad inducida por la variación de permeabilidad que actúa como una fuerza de cuerpo, incrementa o disminuye los efectos de gravedad en el tubo de calor. Determinaron que en muchos casos prácticos, los efectos capilares no deben despreciarse, particularmente cuando la permeabilidad disminuye en la dirección del flujo de líquido donde los efectos de gravedad, definidos por la teoría de los tubos de calor homogéneos, pueden ser sustancialmente alterados. También consideran que hay una estabilidad incondicional del sistema si existe una heterogeneidad de permeabilidad en la región de dos fases.

Para el caso de la ebullición el efecto de heterogeneidad es importante, pero no

definitivo, en la terminación de una zona de dos fases "infinita", es decir, la región de dos fases surge con una región "seca" en el fondo. Entonces la heterogeneidad influye en el régimen dominado por líquido, LD, ya que éste alcanza el "secado" (capa de vapor en el fondo) cuando existe un incremento o decremento repentino de permeabilidad. De acuerdo con lo anterior predijeron la secuencia siguiente, de arriba hacia abajo, para el proceso de ebullición: líquido subenfriado-LD-(discontinuidad)-región "seca". Por otro lado, para el proceso de condensación la secuencia es: líquido subenfriado-(discontinuidad)-VD-región "seca". Estas secuencias pueden ser útiles en la interpretación de sistemas geotérmicos.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se concluye que el fenómeno de ebullición en medios porosos se identifica claramente por la presencia de una capa de dos fases, cerca de la superficie caliente, cubierta por una capa de líquido, cerca de la superficie fría, cuando se alcanza la temperatura de saturación del líquido en el medio, al aplicar un flujo de calor en la parte inferior y que alcance un valor mínimo crítico.

1.3.- Estudios donde se aplica el análisis de estabilidad lineal.

Algunos autores [5, 10, 12, 33, 36-38] han considerado la aplicación de la estabilidad lineal para analizar el comportamiento del fluido dentro de un medio poroso, observando la influencia de los parámetros que surgen del análisis, como son el número de onda y la rapidez de crecimiento de la perturbación.

Schubert y Straus [5] estudiaron la estabilidad gravitacional de sistemas geotérmicos dominados por vapor, donde se tiene una región de agua cubriendo una región de vapor. Ellos determinaron, de acuerdo a un análisis de estabilidad lineal, que el sistema es estabilizado por la interfaz con cambio de fase y se muestra gravitacionalmente estable para permeabilidades menores a $K = 40 \times 10^{-12} \text{ m}^2$.

Eastwood y Spanos [12] estudiaron la estabilidad de un frente estacionario de agua-vapor en un medio poroso y determinaron que el sistema es estable cuando existe un cambio de fase al considerar una presión constante en la interfaz (frente). Este resultado coincide con los resultados de Schubert y Straus.

McGuinness y colaboradores [33] estudiaron la estructura de capas, definida anteriormente, dentro de un tubo de calor y establecieron condiciones de frontera de

presión y saturación en los extremos del modelo para obtener sistemas dominados por vapor o sistemas dominados por líquido. Para el primer caso establecen condiciones de presión y saturación constantes en la parte inferior del sistema, mostrando una solución estable y en el segundo caso establecen condiciones de presión y saturación en la parte superior, también mostrando una solución estable. Al invertir las condiciones de frontera la solución viene a ser inestable en ambos casos.

Hsu, Cheng y Homsy [36] estudiaron la inestabilidad de la convección libre sobre una placa horizontal colocada en un medio poroso y calentada de abajo, resolviendo el problema de capa límite. Con el análisis de estabilidad lineal determinaron que el número de Rayleigh y el número de onda sufren un incremento al incrementar la temperatura de la placa.

Para el estudio del efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso, se tomó en cuenta principalmente el trabajo realizado por Ramesh y Torrance [10], quienes consideraron la estructura de capas en un sistema bidimensional, figura 1. Ellos realizaron un análisis de estabilidad lineal donde se despreciaron los efectos capilares y obtuvieron un diagrama para un sistema donde la región de dos fases es dominada por líquido, observando distintos comportamientos de la capa del líquido, los cuales son:

a).- Una capa de líquido conductiva antes y después de iniciar la ebullición para números de Rayleigh, Ra , bajos ($Ra < 20$) en medios porosos de baja permeabilidad ($K = 11 \times 10^{-12} \text{ m}^2$).

b).- Una capa de líquido conductiva antes de iniciar la ebullición, pero convectiva inmediatamente después de iniciar la ebullición, para números de Rayleigh medios ($Ra = 20$) con permeabilidades medias ($K = 70 \times 10^{-12} \text{ m}^2$).

c).- Una capa de líquido convectiva antes y después de iniciar la ebullición para números de Rayleigh grandes ($Ra > 20$) con permeabilidades grandes ($K = 1600 \times 10^{-12} \text{ m}^2$). En este caso también observaron que la capa de líquido regresa a ser conductiva para flujos de calor altos.

También presentaron curvas de comportamiento al tener como coordenadas el número de onda y la rapidez de crecimiento de la perturbación y como parámetro de la

curva el número de Rayleigh. En estas gráficas se observa que para números de onda pequeños y grandes, se tiene un comportamiento estable para cualquier número de Rayleigh (el rango es de 10 a 50), esto significa que la rapidez de crecimiento de la perturbación es menor de cero. En cambio para números de onda medios, el comportamiento es inestable para cualquier valor de Rayleigh, esto se presenta en medios porosos de alta permeabilidad. En estas gráficas muestran que el comportamiento estable se debe a efectos de difusión térmica para perturbaciones de longitudes de onda corta y para perturbaciones de longitudes de onda larga se debe a efectos viscosos.

Otro resultado importante para una región de dos fases dominada por líquido son las curvas de comportamiento del número de Rayleigh al considerar una estabilidad neutra, rapidez de crecimiento de la perturbación igual a cero, ya que obtuvieron valores críticos del número de Rayleigh, los cuales se compararon con algunos que existen en la literatura [39], para sistemas de fase simple, y para este trabajo Ramesh y Torrance obtuvieron un $Ra_{cr.} = 23.17$, para un número de onda igual a π y un flujo de calor $Q_b = 1$.

En este trabajo también estudiaron la estabilidad de un sistema que tiene una región de dos fases dominada por vapor, presentándose una inestabilidad gravitacional y encontrando como resultado un sistema estable solamente para perturbaciones de longitudes de onda grandes. En estos sistemas el efecto estabilizante se debe al proceso de cambio de fase en la interfaz, resultado igual al de Schubert y Straus [5]. En este trabajo Ramesh y Torrance encontraron un valor crítico de Rayleigh, $Ra_{2\phi, cr.} = 18.95$, para un número de onda igual a π y un flujo de calor $Q_b = 1.4$

Por otra parte, estos mismos autores desarrollaron un algoritmo numérico [40] en donde resuelven la interacción dinámica entre la ebullición y la convección natural dentro del medio poroso, otra vez sin considerar los efectos capilares, mostrando solamente la capacidad del algoritmo para analizar la transferencia de calor al seguir la trayectoria de la interfaz entre las regiones del líquido y la de dos fases.

1.4.- Otros trabajos importantes.

Continuando con el estudio del fenómeno de ebullición, recientemente, otros autores [34, 35] analizaron el fenómeno de ebullición en un estado transitorio considerando efectos capilares, estudiando principalmente la región de dos fases. En ese trabajo desarrollan un modelo donde la región de dos fases se considera como una mezcla binaria. Con este modelo se logra reducir el número de ecuaciones gobernantes, pero no

muestran claramente cual es la influencia de los parámetros involucrados en el fenómeno de ebullición, ni tampoco realizan un análisis de estabilidad lineal. Los resultados que obtuvieron al estudiar la dinámica interactiva entre la ebullición y la convección natural de una estructura de capas igual a la que usaron Ramesh y Torrance fueron:

1.- Para $t = 3.2 \times 10^4$ s, la ebullición inicia y la región de dos fases ocupa la tercera parte del sistema. La interfaz permanece horizontal. El líquido en la región de dos fases se mueve hacia abajo, llenando de nuevo la superficie caliente, y el vapor se mueve hacia arriba llegando a la interfaz donde se condensa. La región del líquido tiene un desplazamiento hacia arriba debido a la expansión de la región de dos fases y la velocidad del líquido es muy pequeña (se considera región conductiva).

2.- Para $t = 5.2 \times 10^4$ s, la región de dos fases sigue expandiéndose y la interfaz sufre una ligera distorsión. En el sistema se observa una convección bidimensional, aunque el comportamiento del líquido y el vapor en la región de dos fases permanece igual que en el inciso anterior. El movimiento en la región del líquido se incrementa ligeramente.

3.- Para $t = 6.2 \times 10^4$ s, la convección térmica en la región del líquido se desarrolla completamente. La transferencia de calor por condensación en la interfaz se incrementa, provocando que la región de dos fases retroceda. En la región del líquido se forman dos celdas axisimétricas que penetran en la región de dos fases.

4.- Para $t = 8 \times 10^4$ s, el sistema alcanza el estado permanente y las dos celdas convectivas son simétricas.

El proceso ilustra una transición completa de una región de líquido conductiva antes de la ebullición a una región de líquido convectiva con la presencia de la ebullición, para una cama porosa con una permeabilidad media, $K = 70 \times 10^{-12} \text{ m}^2$. En este trabajo los autores establecen que el estado permanente para la estructura analizada, se alcanza después de alrededor de 22 horas.

1.5.- Estudios preliminares realizados por el autor del presente trabajo.

Dentro del estudio de la ebullición en medios porosos se llevaron a cabo algunos estudios que, en conjunto con la revisión bibliográfica, ayudaron a comprender el proceso de ebullición en un medio poroso. Estos estudios fueron :

a).- Ebullición sobre una superficie porosa sumergida en un líquido en reposo.

Este trabajo consistió en aprovechar el elemento calefactor de forma cilíndrica de un aparato de laboratorio, figura 2, que se utiliza para obtener la curva de ebullición ("pool boiling") del Freón-113, cubriéndolo con un medio poroso que se forma por canicas. El resultado obtenido fue la curva típica de flujo de calor vs. diferencia de temperatura.

El objetivo del trabajo fue comparar las curvas que se obtienen para una superficie sin capas porosas y con capas porosas. Para el caso de la superficie con capas porosas se observó que los diferentes regímenes de ebullición se presentaron a flujo de calor menores que los que se obtienen en el caso de la superficie libre. Este resultado concuerda con trabajos que se presentan en la literatura [41-44], donde se observó que el proceso de transferencia de calor se lleva a cabo de la ebullición nucleada a la ebullición pelicular sin pasar por un flujo de calor máximo, que siempre está presente en la ebullición sobre una superficie libre.

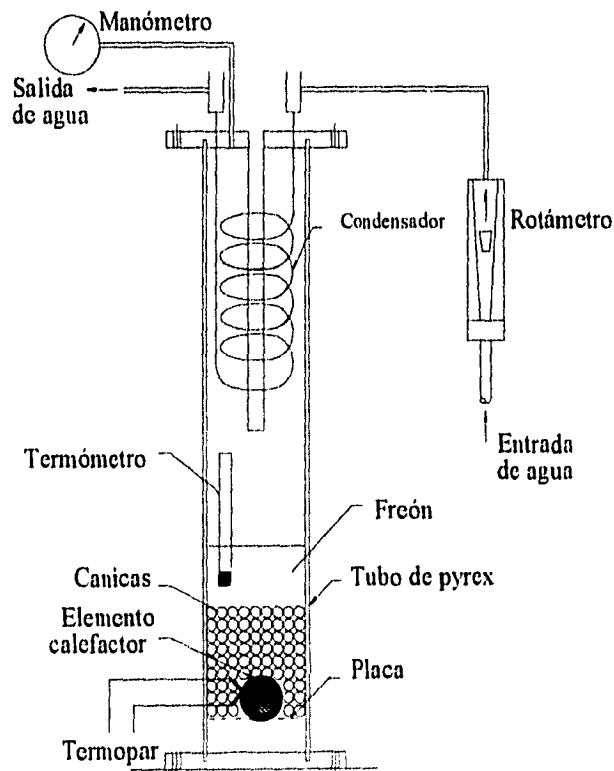


Figura 2. Esquema del equipo de laboratorio usado para obtener la curva flujo de calor vs. diferencia de temperatura de una superficie cubierta por capas porosas.

b).- Estudio del flujo unidimensional en contracorriente líquido-vapor en estado permanente dentro de un medio poroso.

Con este estudio teórico se buscó establecer el parámetro importante para la formación de la región de dos fases isotérmica, identificada en varios trabajos [6, 10, 13-17, 20-22, 30-32]. Para el estudio se consideró un sistema unidimensional en estado permanente con calentamiento en la parte inferior, figura 3. En el análisis se obtuvo una ecuación característica que relaciona el flujo de calor aplicado con las funciones que representan las permeabilidades relativas del líquido y vapor y la función de Leverett [21,22], que relaciona la presión capilar y la saturación del líquido, S , en la región de dos fases.

La ecuación característica es una ecuación diferencial de primer orden que relaciona el flujo de calor con la saturación del líquido y se resuelve al integrarla para el rango de saturación $0 \leq S \leq 1$. El resultado obtenido fue el valor del flujo de calor mínimo crítico, W_{cr} , para el cual la región isotérmica de dos fases existe en el sistema. Esta región disminuye al incrementar el flujo de calor y no se presenta para valores menores al flujo de calor crítico, comportamiento similar al presentado por Udell [22].

Finalmente cabe mencionar que el estudio del flujo unidimensional en contracorriente en estado permanente forma parte del estado básico que surge en el análisis de estabilidad lineal de la ebullición en un medio poroso.

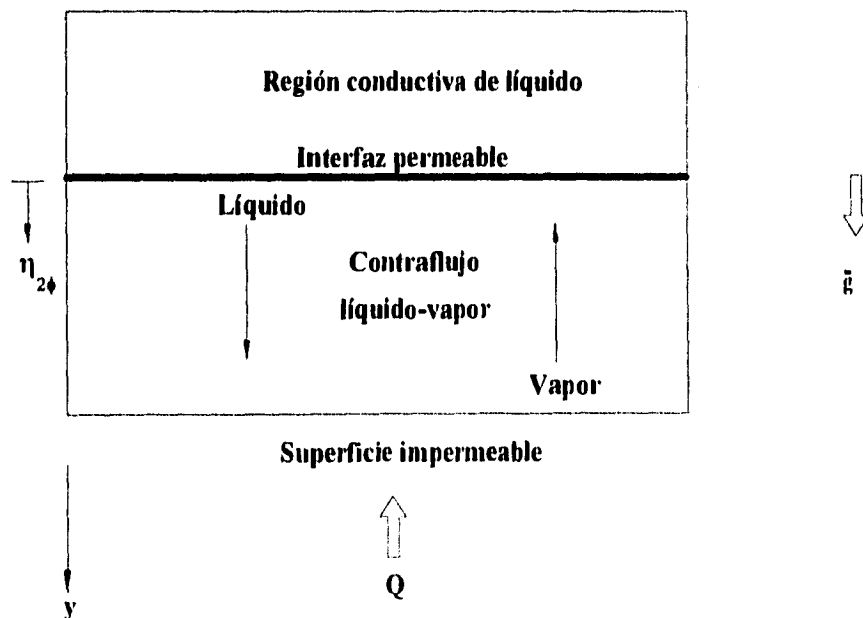


Figura 3. Esquema que representa al estado básico del sistema.

1.6.- Resumen de los estudios relacionados con la ebullición en medios porosos.

En la tabla siguiente se muestra de manera sintetizada y cronológicamente los principales trabajos relacionados con el estudio de la ebullición en medios porosos.

Autor (es)	Aportación
H. H. Bau y K. E. Torrance (1982-1986) (Refs. [6] y [13-17])	Realizaron un estudio teórico-experimental de un sistema unidimensional en estado permanente sin considerar el efecto de la presión capilar, estableciendo la estructura de capas.
K. S. Udell (1983-1985) (Refs. [21] y [22])	Realizó un estudio teórico-experimental de un sistema unidimensional donde el efecto de la presión capilar se tomó en cuenta, estableciendo un valor del flujo de calor mínimo crítico para que exista la región de dos fases en el sistema y se tenga la estructura de capas.
P. S. Ramesh (1986) (Ref. [20])	Para la estructura de capas definida por Bau y Torrance y bajo las mismas condiciones, determinó que existen tres regímenes importantes en la ebullición, los cuales dependen del flujo de calor aplicado, estos son : régimen conductivo, ebullición permanente y ebullición oscilatoria.

<p>P. S. Ramesh y K. E. Torrance (1990) (Ref. [10])</p>	<p>Realizaron un análisis de estabilidad lineal sobre la estructura de capas sin considerar los efectos de la presión capilar, determinando que el sistema es inestable para cualquier número de Rayleigh y números de onda medios, donde la inestabilidad incrementa al incrementar el flujo de calor aplicado.</p>
<p>C. Satik, M. Parlar y Y. C. Yortsos (1991) (Ref. [30])</p>	<p>Estudiaron el flujo unidimensional en contracorriente de la región de dos fases considerando la presión capilar y una permeabilidad variable, y establecieron un flujo de calor crítico para que exista la región de dos fases.</p>
<p>A. K. Stubos, C. Satik y Y. C. Yortsos (1993) (Refs. [31] y [32])</p>	<p>Analizaron el caso de un sistema inicialmente saturado con líquido y con calentamiento en la parte inferior, confirmando la existencia de un flujo de calor crítico. También analizaron la influencia de una permeabilidad variable, pero establecieron que la heterogeneidad no es definitiva en la formación de la región de dos fases.</p>
<p>C. Wang , C. Beckerman y C. Fan (1993) (Ref. [35])</p>	<p>Estudiaron la ebullición tomando en cuenta la presión capilar. Para el estudio establecieron un modelo donde la región de dos fases se consideró como una mezcla binaria, que reduce el número de ecuaciones, logrando identificar las etapas que se presentan desde un régimen conductivo hasta un régimen convectivo, pero sin realizar un análisis de estabilidad lineal para estudiar el efecto de la presión capilar.</p>

<p>A. Gallegos M. y J. Cervantes (1995) (trabajo por presentar)</p>	<p>Estudiaron el efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso, al considerar un sistema formado por capas, y determinaron que el sistema muestra mayor estabilidad cuando la presión capilar aumenta, debido a una disminución de la saturación de líquido en la región de dos fases.</p>
---	--

De los trabajos mencionados anteriormente, se concluye que la ebullición en medios porosos en estado permanente puede representarse mediante una estructura de capas formada por una región de líquido que cubre a una región isotérmica de dos fases, donde existe un flujo en contracorriente de líquido y vapor, y que de acuerdo a ciertos valores de las variables que caracterizan al medio poroso, con las condiciones de frontera aplicadas, tal estructura puede tener una región de líquido conductiva o convectiva. Para el último caso, se puede presentar una interacción entre la convección natural y la ebullición dentro del medio poroso. Por otra parte, se puede aplicar la teoría de estabilidad lineal para analizar la estructura, partiendo del estado permanente, y establecer los valores de los parámetros que influyen en la inestabilidad de la estructura al considerar los efectos capilares. El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de un sistema bidimensional formado por las capas de líquido y dos fases, determinando mediante el análisis de estabilidad lineal si el sistema es inestable, estable o permanece en su estado marginal que se representa por una estabilidad neutra.

CAPÍTULO 2

Planteamiento del problema.

2.1.- Definición del problema.

Este trabajo está dirigido al estudio del efecto de la presión capilar sobre la ebullición en un medio poroso, donde se considera un sistema bidimensional formado por dos regiones: una región isotérmica de dos fases cubierta por una región de líquido. Esta estructura de capas se logra al tener un sistema inicialmente saturado de líquido con un calentamiento en la parte inferior, manteniendo aislada la pared vertical, ver figura 1. Este sistema ha sido considerado para estudiar el problema donde existe un flujo en contracorriente líquido-vapor, que se forma cuando se alcanza la temperatura de saturación del líquido y las fases del fluido se consideran inmiscibles. Para este caso la presión capilar es importante en el movimiento de las fases dentro de la región isotérmica.

El estudio teórico consistirá en llevar a cabo un análisis de estabilidad lineal sobre la estructura de capas, tomando en cuenta una interfaz permeable entre las capas e introduciendo el efecto de la presión capilar en la región de dos fases. Este análisis de estabilidad comprende un estado básico, que considera un flujo unidimensional en contracorriente líquido-vapor en estado permanente dentro de la región isotérmica de dos fases y una región de líquido con régimen conductivo, y un estado perturbado, que se logra al introducir una perturbación lineal sobre el estado básico al considerar un sistema bidimensional.

Con este análisis se establecerá la influencia de la presión capilar sobre el movimiento de las fases en la región isotérmica, así como también, se determinará el valor de los parámetros que influyen en la inestabilidad del sistema de capas.

2.2.- Ecuaciones fundamentales.

Para obtener las ecuaciones fundamentales del sistema que comprende este trabajo de investigación se tomaron en cuenta las siguientes suposiciones:

- 1.- La matriz porosa es indeformable.
- 2.- El fluido y la matriz porosa están en equilibrio térmico.
- 3.- Es aplicable la ley de Darcy como ecuación de momento.
- 4.- Las propiedades físicas del fluido y de la matriz porosa se consideran constantes.
- 5.- Se supone válida la aproximación de Boussinesq para la fase del líquido.
- 6.- Se consideran inmiscibles las dos fases del fluido en la región donde existe el contraflujo líquido-vapor.

Considerando el problema de ebullición en un medio poroso donde se tiene una estructura de capas compuesta por una región de líquido que cubre a una región de dos fases, como se muestra en la figura 1, y aplicando el Teorema del Promedio Volumétrico [1-3], ver apéndice A, a las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, se tiene:

Región del líquido

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_l = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_l = -\frac{K}{\mu_l} [\nabla P_l - \rho_l \bar{\mathbf{g}}] \quad (2)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_l \cdot \nabla T = a_l \nabla^2 T \quad (3)$$

Región de dos fases

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi \rho_l S + \phi (1-S) \rho_v] + \nabla \cdot [\rho_l \bar{\mathbf{v}}_l + \rho_v \bar{\mathbf{v}}_v] = 0 \quad (4)$$

$$\bar{v}_l = -\frac{K k_{rl}}{\mu_l} [\nabla P_l - \rho_l \bar{g}] \quad (5)$$

$$\bar{v}_v = -\frac{K k_{rv}}{\mu_v} [\nabla P_v - \rho_v \bar{g}] \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (1-S) \rho_v h_{fg}] + \nabla \cdot [\rho_v \bar{v}_v h_{fg}] = 0 \quad (7)$$

Considerando las siguientes variables adimensionales :

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_{sat.} - T_0}, \quad \hat{x} = \frac{x}{H}, \quad \hat{y} = \frac{y}{H}, \quad \hat{t} = \frac{t}{H^2/a_t}$$

e introduciendo la aproximación de Boussinesq [2, 3] para el líquido, esto es

$$\rho_l = \rho_0 [1 - \beta_l (T - T_0)]$$

de las ecuaciones anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones adimensionales que son, respectivamente:

Región del líquido

$$\nabla \cdot \hat{v}_l = 0 \quad (8)$$

$$\hat{v}_l = -[\nabla \hat{P}_l + Ra \hat{T} \bar{e}_y] \quad (9)$$

$$\sigma \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{v}_l \cdot \nabla \hat{T} = \nabla^2 \hat{T} \quad (10)$$

Región de dos fases

$$\phi (1-\bar{\rho}) \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v}_l + \bar{\rho} \bar{v}_v) = 0 \quad (11)$$

$$\hat{v}_l = -k_n (\nabla \hat{P}_l + Ra \hat{e}_y) \quad (12)$$

$$\hat{v}_v = -\hat{\mu} k_{rv} (\nabla \hat{P}_v + Ra_{2\phi} \hat{e}_y) \quad (13)$$

$$\phi \frac{\partial(1-S)}{\partial \hat{t}} + \nabla \cdot (\hat{v}_v) = 0 \quad (14)$$

donde Ra es el número de Rayleigh para la región del líquido y $Ra_{2\phi}$ es el número de Rayleigh para la región de dos fases. La velocidad y la presión adimensionales quedan de la forma:

$$\hat{v} = \frac{v}{a_l / H}, \quad \hat{p} = \frac{P}{\mu_l a_l / K} \quad (15)$$

Las ecuaciones adimensionales se transforman de un marco de coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ a un marco de coordenadas (ζ, η, τ) , lo cual permitirá aplicar las condiciones que se establezcan en la interfaz permeable y que se conocen como condiciones de compatibilidad [10]. Esta transformación se logra con:

$$\eta_l = \frac{\hat{y}}{\delta_{(\hat{x}, \hat{t})}} \quad (16a)$$

$$\eta_{2\phi} = \frac{1 - \hat{y}}{1 - \delta_{(\hat{x}, \hat{t})}} \quad (16b)$$

y $\zeta = \hat{x}$, $\tau = \hat{t}$, donde δ indica la posición de la interfaz en la dirección vertical y es función de la coordenada horizontal y del tiempo. Para lograr la transformación se aplican en cada región las siguientes expresiones:

Región del líquido

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\eta_l}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta_l} \quad (17)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\eta_l}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \eta_l} \right) \hat{e}_x + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta_l} \hat{e}_y \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\eta_l}{\delta} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \zeta^2} - \frac{2\eta_l}{\delta^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial \eta_l} - \frac{2\eta_l}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta_l} \\ & + \left(\left(\frac{\eta_l}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta_l^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Región de dos fases

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta_{2\phi}} \quad (20)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \eta_{2\phi}} \right) \bar{\mathbf{e}}_x - \frac{1}{1-\delta} \frac{\partial}{\partial \eta_{2\phi}} \bar{\mathbf{e}}_y \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \zeta^2} + \frac{2\eta_{2\phi}}{(1-\delta)^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial \eta_{2\phi}} \\ & + \frac{2\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta_{2\phi}} + \left(\left(\frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{1}{(1-\delta)^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta_{2\phi}^2} \end{aligned} \quad (22)$$

al sustituir las ecuaciones (15)-(22) dentro de las ecuaciones (8)-(14) se obtienen ecuaciones de ambas regiones en el marco de coordenadas (ζ, η, τ), ver apéndice B.

2.3.- Análisis de estabilidad lineal.

En la teoría de estabilidad lineal se supone que las variables son afectadas por una pequeña perturbación, donde se desprecian los términos cuadráticos [3]. Con este análisis se trata de determinar si la perturbación provoca un sistema inestable, estable o sin cambio. Si el parámetro de la perturbación es positivo el sistema es inestable, si es negativo el sistema tiende a ser estable y si es igual a cero se tiene una estabilidad neutra.

En este trabajo se presentará el comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación con respecto al número de onda, tomando como parámetro de la curva el número adimensional de Rayleigh, para establecer cual es el efecto de la presión capilar sobre el crecimiento de la perturbación.

La aplicación de la teoría de estabilidad lineal se logra al sustituir las ecuaciones (17)-(22) en las ecuaciones (8)-(14) y aplicando una perturbación lineal a las variables de velocidad, temperatura, presión, saturación y a la posición de la interfaz de la forma :

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon v_1 \\ T &= T_0 + \varepsilon T_1 \\ P &= P_0 + \varepsilon P_1 \\ S &= S_0 + \varepsilon S_1 \\ \delta &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 \end{aligned} \tag{23}$$

obteniéndose las ecuaciones que representan el estado básico y el estado perturbado de cada región, para mayor detalle ver el apéndice B.

2.3.1.- Estado básico.

El sistema considerado para obtener las ecuaciones que representan el estado básico es unidimensional, en dirección vertical y en estado permanente, como se muestra en la figura 3. En este sistema se considera una capa de líquido conductiva y una capa isotérmica de dos fases donde existe el contraflujo líquido-vapor, divididas por una interfaz plana y permeable. Las ecuaciones adimensionales son:

Región del líquido

$$v_{l,0} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \tag{24}$$

$$\frac{dP_{l,0}}{d\eta_l} = -Ra \delta_0 J'_0 \quad (\text{Momento, Ec. de Darcy}) \tag{25}$$

$$\frac{d^2 T_0}{d\eta_l^2} = 0 \quad (\text{Energía}) \tag{26}$$

Región de dos fases

$$v_{l,0} + \hat{\rho} v_{v,0} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \tag{27}$$

$$v_{t,0} = k_{t,0} \left(\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra \right) \quad (28a)$$

(Momento, Ec. de Darcy)

$$v_{v,0} = \bar{\mu} k_{rv,0} \left(\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra_{2\phi} \right) \quad (28b)$$

$$\frac{dv_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} = 0 \quad (\text{Energía}) \quad (29)$$

2.3.2.- Estado perturbado.

Para obtener las ecuaciones del estado perturbado se considera un sistema bidimensional, donde la capa de líquido puede ser conductiva o convectiva y la capa de dos fases considera un flujo ascendente de vapor y un flujo descendente de líquido. Las ecuaciones adimensionales son:

Región del líquido

$$\frac{\partial u_{t,1}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial v_{t,1}}{\partial \eta_t} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \quad (30)$$

$$u_{t,1} = - \left(\frac{\partial P_{t,1}}{\partial \zeta} - \frac{\eta_t}{\delta_0} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_t} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right) \quad (31a)$$

(Momento, Ec. de Darcy)

$$v_{t,1} = - \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial P_{t,1}}{\partial \eta_t} + \frac{1}{\delta_0^2} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_t} \delta_1 - Ra T_1 \quad (31b)$$

$$\sigma \left[\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \frac{\eta_t}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_t} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_t} v_{t,1} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\eta_t}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_t} \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta_t^2} \quad (32)$$

(Energía)

Región de dos fases

$$\phi \left[\frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta_0} \frac{d S_0}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial u_{t,1}}{\partial \zeta} - \frac{1}{1-\delta_0} \frac{\partial v_{t,1}}{\partial \eta_{2\phi}} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \quad (33)$$

$$u_{t,1} = -k_{r,0} \left[\frac{\partial P_{t,1}}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta_0} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right] \quad (34a)$$

$$v_{t,1} = k_{r,0} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{\partial P_{t,1}}{\partial \eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} \delta_1 \right] + k_{r,1} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} - Ra \right] \quad (34b)$$

(Momento, Ec. de Darcy)

$$u_{v,1} = -\hat{\mu} k_{r,0} \left[\frac{\partial P_{v,1}}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta_0} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right] \quad (34c)$$

$$v_{v,1} = \hat{\mu} k_{r,0} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{\partial P_{v,1}}{\partial \eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} \delta_1 \right] + \hat{\mu} k_{r,1} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} - Ra_{2\phi} \right] \quad (34d)$$

$$\frac{\partial u_{v,1}}{\partial \zeta} - \frac{1}{1-\delta_0} \frac{\partial v_{v,1}}{\partial \eta_{2\phi}} = \phi \left[\frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta_0} \frac{d S_0}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] \quad (\text{Energía}) \quad (35)$$

donde $k_{r,1} = S_1$ y $k_{r,1} = -S_1$, son las funciones de las permeabilidades relativas lineales para cada fase.

2.4.- Presión capilar.

La presión capilar es el parámetro básico en el estudio del comportamiento de medios porosos que contienen dos o más fluidos, o fases de un mismo fluido, que son inmiscibles. Cuando los fluidos o fases están en contacto dentro de los espacios vacíos del medio poroso, existe una discontinuidad de presión a través de la interfaz que los separa. Esa discontinuidad de presión se define como la presión capilar, P_c , que depende de la energía interfacial entre los fluidos o fases de un fluido dentro del poro. A la energía interfacial se le conoce como la tensión interfacial, σ_{12} , para dos fluidos, o

tensión superficial para dos fases de un mismo fluido. La ecuación de Laplace [1] relaciona la presión capilar con la tensión superficial, y se representa por:

$$P_c = \frac{2 \sigma_{12}}{r^*} \quad (36)$$

donde r^* es el radio medio de curvatura de la interfaz y se define como

$$\frac{2}{r^*} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad (37)$$

Para este trabajo se considera a la presión capilar como la diferencia de presiones de las dos fases del fluido que saturan al medio poroso, esto es

$$P_c = P_v - P_l \quad (38)$$

donde la presión del vapor, P_v , representa a la fase que no-moja la superficie sólida (este término se refiere a una sustancia que no es absorbida por la superficie sólida de las partículas que compone el medio poroso) y la presión del líquido, P_l , representa a la fase que moja la superficie sólida (sustancia absorbida por la superficie) que se encuentran dentro de un mismo espacio vacío (poro).

La presión capilar puede determinarse experimentalmente al relacionarse con la saturación de líquido, S , contenida en el medio poroso. Esta relación se conoce como la función de la presión capilar [1, 45- 47] y se representa en la figura 4. Esta curva muestra dos procesos importantes que se presentan en un medio poroso donde coexisten las dos fases del fluido, estos procesos se conocen como drenado e imbibición. El proceso de drenado se refiere al desplazamiento que sufre una fase mojada, que inicialmente satura al medio poroso, por una fase no-mojada y el proceso de imbibición se refiere al desplazamiento de la fase no-mojada por la fase mojada. Estos procesos forman una curva o ciclo de histéresis donde aparecen otros términos importantes que son:

Saturación irreducible, S_{w0} : es la cantidad de la fase mojada que permanece en el medio poroso, aún cuando los valores de la presión capilar sean muy altos. Se llega a este punto al tener un proceso de drenado.

Saturación residual, S_{nwo} : es la cantidad de la fase no-mojada que permanece en el medio poroso para una presión capilar cero. Este punto se alcanza por medio de un proceso de imbibición.

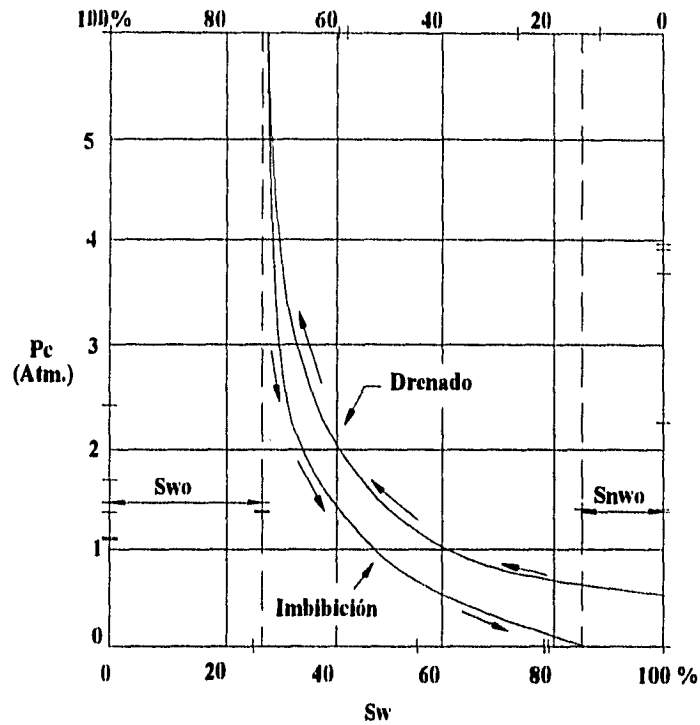


Figura 4. Curva típica de la presión capilar vs. saturación del líquido (curva de histéresis) Ref. [1].

La función de la presión capilar puede representarse mediante una ecuación semiempírica desarrollada por Leverett [1, 45 - 47] que tiene la forma :

$$J_{(s)} = \frac{P_c}{\sigma} \sqrt{\frac{k}{\phi}} \quad (39)$$

donde $J_{(s)}$ es la función de Leverett, σ la tensión superficial, k y ϕ la permeabilidad y porosidad del medio, respectivamente.

Las ecuaciones gobernantes del sistema que se estudia, para cada uno de los estados que surge del análisis de estabilidad lineal, se determinaron tomando en cuenta el modelo que considera un flujo para cada fase dentro del medio poroso [1, 10, 39, 45-47]. Esto significa que la fase pasa por canales que se forman en el medio poroso, y, para el caso de un fluido en dos fases, se tiene un canal ocupado por líquido y vapor, por lo tanto, es necesario introducir la presión capilar .

La función de Leverett depende del tipo de proceso que se lleve a cabo dentro del medio poroso y se puede obtener de la curva P_c vs. Saturación. En este trabajo se utiliza

dicha función al considerar un proceso de drenado de manera análoga a como la utilizó Wang [34].

Cabe mencionar que la función de la presión capilar no ha sido utilizada: anteriormente en el análisis de estabilidad lineal, para estudiar el comportamiento de la región isotérmica de dos fases .

Aplicando las ecuaciones (38) y (39) en la región de dos fases, tanto del estado básico como del estado perturbado, se obtienen ecuaciones que representan los efectos capilares sobre el análisis de estabilidad de la ebullición en medios porosos. En ambos estados del análisis de estabilidad se aplica la presión capilar en la diferencia de los gradientes de presión, sustituyendo posteriormente la función de Leverett que identifica a un proceso de drenado.

Finalmente se puede establecer que el conjunto de ecuaciones que representa al sistema de capas se compone de la siguiente manera: un estado básico, ecuaciones (24)-(29), que considera un sistema unidimensional en estado permanente y un estado perturbado, ecuaciones (30)-(35), al cual se le aplicará un modo de expansión normal donde se tiene un comportamiento exponencial en el tiempo y un comportamiento senoidal en el espacio. A este conjunto de ecuaciones se agregarán las condiciones de frontera y las condiciones definidas en la interfaz (condiciones de compatibilidad) para la solución del problema, que se presenta en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

Solución del problema.

Considerando la estructura de capas definida anteriormente y aplicando la teoría de estabilidad lineal, se procede a obtener la solución del problema que estudia el efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso. Primero se obtiene la solución del estado básico y posteriormente se resuelve el estado perturbado tomando en cuenta los resultados obtenidos en el estado básico.

3.1.- Solución del estado básico.

Antes de obtener la solución del estado perturbado y conocer cómo influye la presión capilar en la estabilidad de la ebullición en un medio poroso, es necesario encontrar la solución del estado básico para conocer como es el comportamiento de algunas variables. Para el estado básico se consideran las soluciones tanto de Bau y Torrance [13-17] para $P_{c,0} = 0$, como de Udell [21, 22] para $P_{c,0} \neq 0$.

Región de líquido: para el estado básico se considera una capa de líquido sin movimiento, por lo tanto, la velocidad vertical es igual a cero y la temperatura de la capa de líquido se obtiene al integrar la ecuación (26) y al considerar las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \eta_l = 0 & \quad ; \quad T = 0 \\ \eta_l = 1 & \quad ; \quad T = 1 \end{aligned} \tag{40}$$

Entonces la velocidad y temperatura de la capa de líquido son:

$$v_{l,0} = 0 \tag{41}$$

$$T_0 = \eta_l \tag{42}$$

Estas ecuaciones representan una transferencia de calor en la región del líquido por conducción y las isotermas son líneas horizontales.

Por otra parte, se obtiene un gradiente de presión en la capa del líquido al sustituir la expresión de la temperatura, ecuación (42), en la ecuación (25). Este gradiente toma la forma:

$$\frac{dP_{l,0}}{d\eta_l} = -Ra \delta_0 \eta_l \quad (43)$$

las ecuaciones (41)-(43) se utilizan en la solución del estado perturbado.

Región de dos fases: esta región se considera isotérmica [2, 3] y la transferencia de calor se lleva a cabo por medio de un flujo unidimensional en contracorriente líquido-vapor en estado permanente.

Para simplificar la solución del problema se consideran las siguientes suposiciones:

- 1.- Los gradientes de temperatura en la región de dos fases son pequeños.
- 2.- El flujo de las fases de líquido y vapor están dominados por fuerzas viscosas y se puede aplicar la ley de Darcy.
- 3.- Las propiedades del líquido y del vapor en la región de dos fases son constantes.
- 4.- Los procesos de evaporación y condensación se llevan a cabo en las fronteras de la región de dos fases.

La ecuación fundamental que surge del análisis de la transferencia de calor del flujo en contracorriente es [21, 22]:

$$\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{c,0}}{d\eta_{2\phi}} = Ra_{2\phi} - \frac{Q_b}{\lambda} \left(\frac{1}{k_{l,0}} + \frac{1}{\hat{\mu} \hat{\rho}} \frac{1}{k_{rv,0}} \right) \quad (44)$$

Esta ecuación se obtiene de la siguiente manera:

- 1.- Se despejan los gradientes de presión, para cada fase, de la ecuación de momento ecuaciones (28a) y (28b).
- 2.- De la ecuación de la energía, ecuación (29), se obtiene la velocidad de la fase de vapor al aplicar la siguiente condición de frontera para $\eta_{2\phi} = 0$:

$$v_{v,0} = -\frac{Q_b}{\bar{\rho} \lambda} \quad (45)$$

3.- De la ecuación de continuidad, ecuación (27), se obtiene la velocidad de la fase líquida al sustituir la ecuación (45), donde:

$$v_{l,0} = \frac{Q_b}{\lambda} \quad (46)$$

4.- Se sustituyen las ecuaciones (45) y (46) en los gradientes de presión de cada fase del inciso (1) y se aplica la ecuación de la presión capilar, ecuación (38).

La ecuación (44) puede resolverse para dos casos : cuando $P_{c,0} = 0$ o cuando $P_{c,0} \neq 0$. En el primer caso se obtiene una relación entre la saturación del estado básico, S_0 , y el flujo de calor adimensional aplicado, W , donde la saturación se considera constante en toda la región de dos fases [10], para un valor de W . En el segundo caso, se obtiene una relación entre la saturación y la coordenada adimensional vertical para un valor del flujo de calor aplicado, donde en el presente estudio, los efectos capilares se representan como una altura de succión capilar [21, 22], pero ahora la saturación varía a lo largo de la región.

En la ecuación (44) el flujo de calor adimensional aplicado se representa por:

$$W = \frac{Q_b}{Ra_{2\phi} \bar{\mu} \bar{\rho} \lambda} \quad (47)$$

Para $P_{c,0} = 0$ la ecuación (44) se reduce a la forma:

$$W \left(\frac{\bar{\mu} \bar{\rho}}{k_{n,0}} + \frac{1}{k_{rv,0}} \right) = 1 \quad (48)$$

donde las permeabilidades relativas toman los siguientes valores [34]

$$k_{n,0} = S_0 \quad \text{y} \quad k_{rv,0} = 1 - S_0 \quad (49)$$

y las relaciones de viscosidad, $\bar{\mu}$, y densidad, $\bar{\rho}$ se representan por:

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_l}{\mu_v} \quad ; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_v}{\rho_l} \quad (50)$$

Al sustituir las permeabilidades relativas, ecuación (49), en la ecuación (48) se obtiene una ecuación que es función de la saturación del líquido, S_0 , en el medio poroso y varía de acuerdo al valor del flujo de calor aplicado. La solución de la ecuación (48) se

obtiene al asignarle valores entre 0 y 1 a la saturación y obtener un valor del flujo de calor, esta solución se muestra en la figura 5, donde se tienen dos sistemas claramente definidos, estos son : un sistema dominado por vapor, valores del lado izquierdo partiendo del punto máximo de la curva, y un sistema dominado por líquido, valores del lado derecho. En el caso de la ebullición en medios porosos el proceso considera un sistema dominado por líquido. Entonces para el flujo de calor aplicado se obtiene de la gráfica el valor de la saturación correspondiente, este valor se utiliza en la solución del estado perturbado.

Para permeabilidades relativas lineales

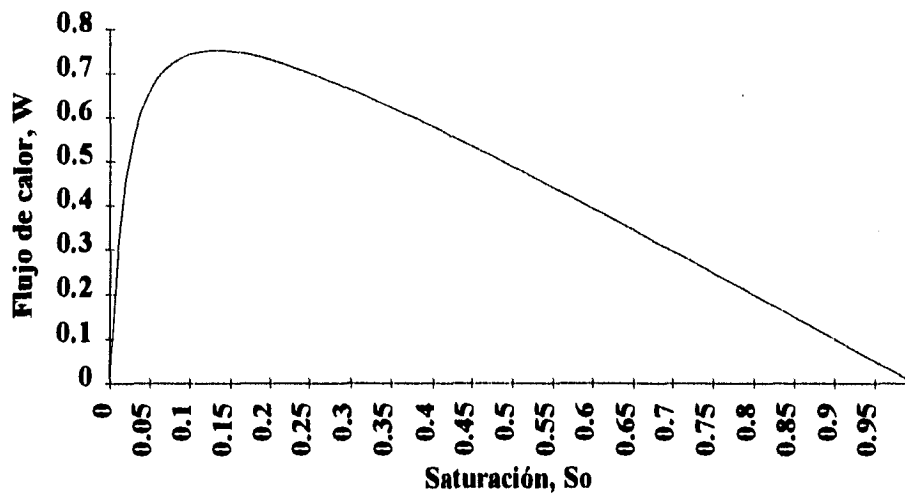


Figura 5. Valor de la saturación en el estado permanente para el caso de presión capilar igual a cero, ecuación (48).

La solución de la ecuación (48) se obtiene con el paquete de cómputo llamado Mathematica, ver apéndice C inciso (a).

Para $P_{c,0} \neq 0$ se necesita introducir la función de la presión capilar, función de Leverett [45-47], ecuación (39), en la ecuación (44), para obtener:

$$\frac{d \delta_{c,0}}{d S_0} = \frac{J'_{(s)} k_{r,l,0} k_{r,v,0}}{W(k_{r,l,0} + \beta k_{r,v,0}) - k_{r,l,0} k_{r,v,0}} \quad (51)$$

donde $J'_{(s)}$ representa la primera derivada de la función de Leverett, que depende solamente de la saturación. Esta función depende del proceso que se lleva a cabo en el medio poroso. Para el estudio presentado, se considera a la ebullición como un proceso

semejante al drenado en medios porosos, por lo tanto, la función y las permeabilidades relativas toman la forma [34]:

$$\begin{aligned}
 k_{r,0} &= S_0 \\
 k_{rv,0} &= 1 - S_0 \\
 J_{(s)} &= 0.48 + 0.036 \ln\left(\frac{1 - S_0}{S_0}\right) \\
 J'_{(s)} &= -\frac{0.036}{S_0(1 - S_0)}
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Por otra parte, en la ecuación (51) se considera la altura de la succión capilar, $\delta_{c,0}$, que se define como:

$$\delta_{c,0} = \frac{(\rho_l - \rho_v) g H K}{\mu_l a_l} \bar{y}
 \tag{53}$$

y β se define como: $\beta = \bar{\rho} \bar{\mu}$

La ecuación (51) se resuelve integrando para la condición $\delta_0(S_0=1) = 0$, ver Ref. [32], y se determina un flujo de calor crítico, W_{cr} , para el cual se asegura la existencia de la región de dos fases. Esta solución se obtiene aplicando el método de integración de la regla de Simpson [48] y se comprueba con el paquete de cómputo Mathematica, ver apéndice C inciso (b). En la figura 6 y 7, se muestran gráficas de $\delta_{c,0}$ con respecto al flujo de calor, W .

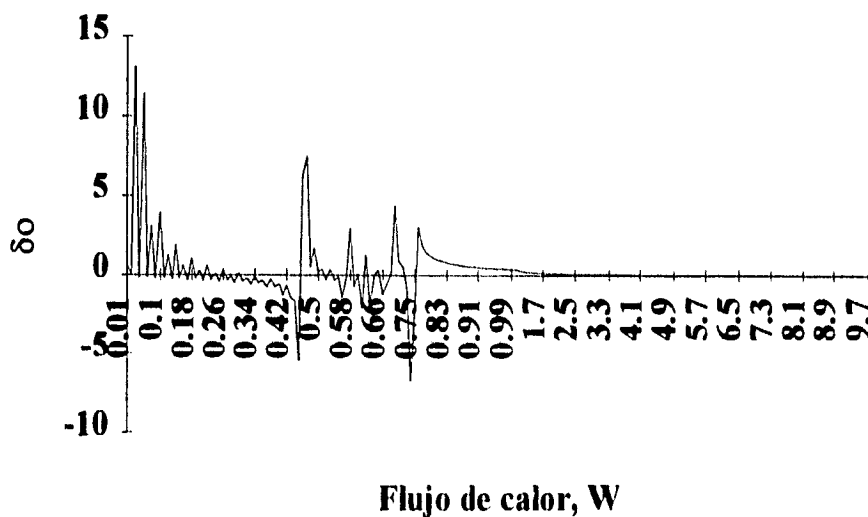


Figura 6. Valor de la altura de la región de dos fases, δ_0 , para el flujo de calor aplicado, considerando permeabilidades relativas lineales, ecuación (51).

Como se puede observar en la figura 6, existen valores del flujo de calor, W , donde no se define claramente la altura de la región isotérmica de dos fases. Esto significa que, para esos valores, la región de dos fases no se presenta en el sistema y no existe un flujo en contracorriente líquido-vapor. Este resultado es similar al que presenta Udell [22] para permeabilidades relativas cúbicas.

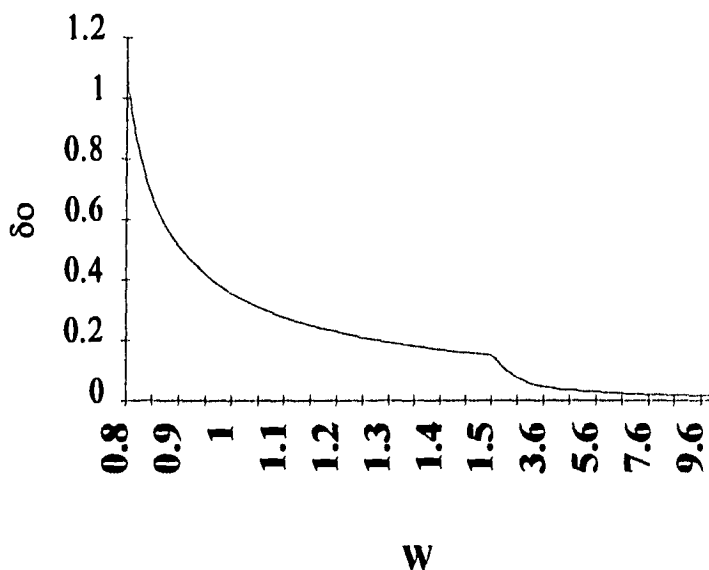


Figura 7. Valor de la altura de la región de dos fases, δ_0 , para el rango del flujo de calor mayor al flujo de calor crítico, $W_{cr.}$, ecuación (51).

La región isotérmica de dos fases se presenta en el sistema cuando se alcanza un flujo de calor mínimo, $W_{cr.}$, que depende de las funciones de permeabilidad relativa y de Leverett que se utilizan, para este trabajo se determinó un valor del flujo de calor crítico igual a $W_{cr.} = 0.8052$, el cual se obtiene para permeabilidades relativas lineales.

El comportamiento de la altura de la región de dos fases con respecto al flujo de calor aplicado, que debe ser mayor a $W_{cr.}$, se muestra mas claramente en la figura 7. Este comportamiento también es similar al presentado por Udell [22] para un calentamiento en la parte inferior.

También se determina una curva que relaciona la saturación con la coordenada de la región de dos fases, para diferentes valores de W , aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, ver apéndice C inciso (c). La curva se presenta en la figura 8. De esta curva se obtiene una relación saturación vs. coordenada vertical adimensional, figura 9, que se expresa en forma de ecuación, y se obtiene por medio de un polinomio de quinto grado. Esta ecuación se introduce en la solución del estado perturbado para conocer el

valor de saturación a través de la región de dos fases, contrario a la solución donde la saturación es constante en la región de dos fases [10].

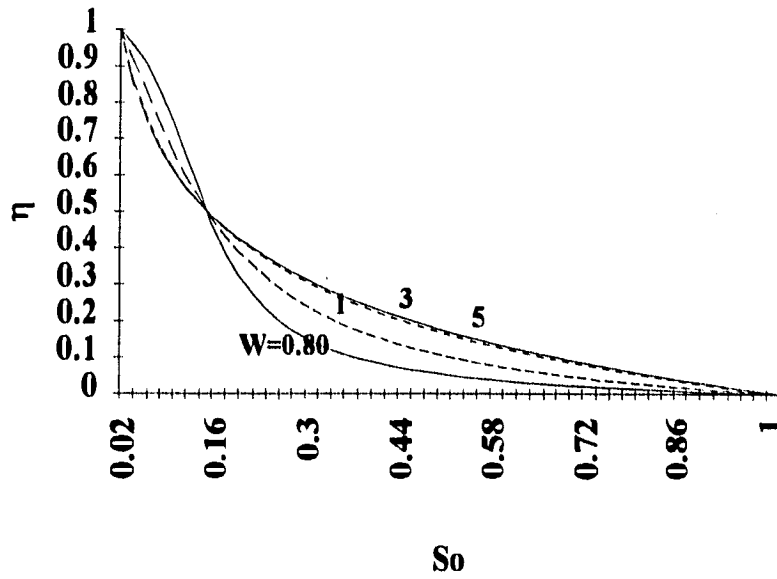


Figura 8. Relación entre la coordenada vertical adimensional de la región de dos fases y la saturación, para diferentes valores del flujo de calor, ecuación (51).

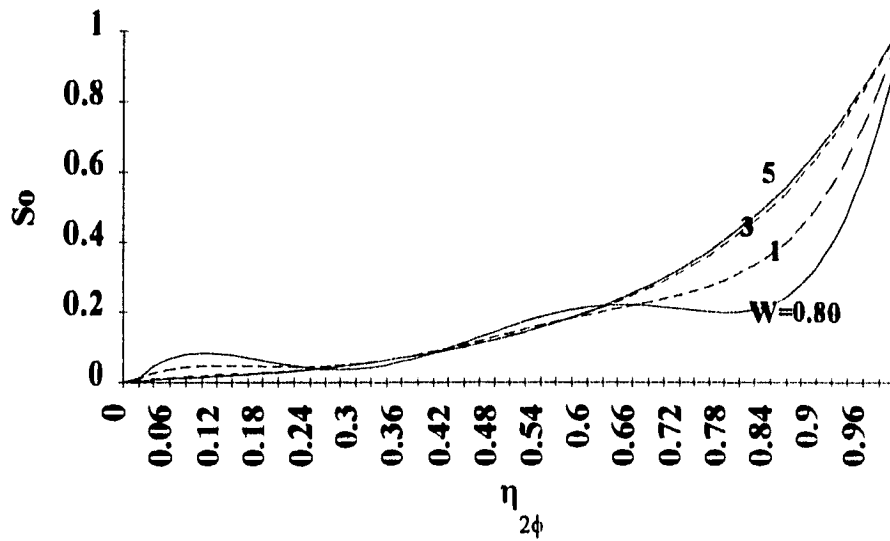


Figura 9. Comportamiento de la saturación con respecto a la coordenada vertical adimensional al tener un polinomio de quinto grado, ecuación (87).

Otras variables importantes son los gradientes de presión de cada fase, que se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d P_{t,0}}{d S_0} = \left(1 - W \left(\frac{\beta}{k_{rl,0}} \right) \right) \frac{d \delta_{c,0}}{d S_0} \quad (54)$$

$$\frac{d P_{v,0}}{d S_0} = \frac{W}{k_{rv,0}} \frac{d \delta_{c,0}}{d S_0} \quad (55)$$

Estas ecuaciones se obtienen al despejar los gradientes de presión de las ecuaciones de momento, ecuaciones (28a) y (28b), tomando en cuenta las ecuaciones (45)-(47) y (53) e introduciendo las siguientes variables adimensionales para la presión de cada fase:

$$\hat{P}_v = \frac{(P_v - P_0) K}{\mu_t a_t} \quad ; \quad \hat{P}_t = \frac{(P_t - P_0) K}{\mu_t a_t} \quad (56)$$

La solución de los perfiles de presión se obtienen al resolver con el paquete de cómputo Mathematica las ecuaciones (54) y (55), ver apéndice C inciso (d), y considerar la siguiente condición de frontera:

$$\hat{P}_t = \hat{P}_v = 0 \quad \text{para} \quad \delta_{c,0} = 0 \quad (57)$$

los perfiles se presentan en la figura 10, para un valor determinado de W .

Entonces conociendo los valores de saturación y presión del estado básico, se procede a la solución del estado perturbado.

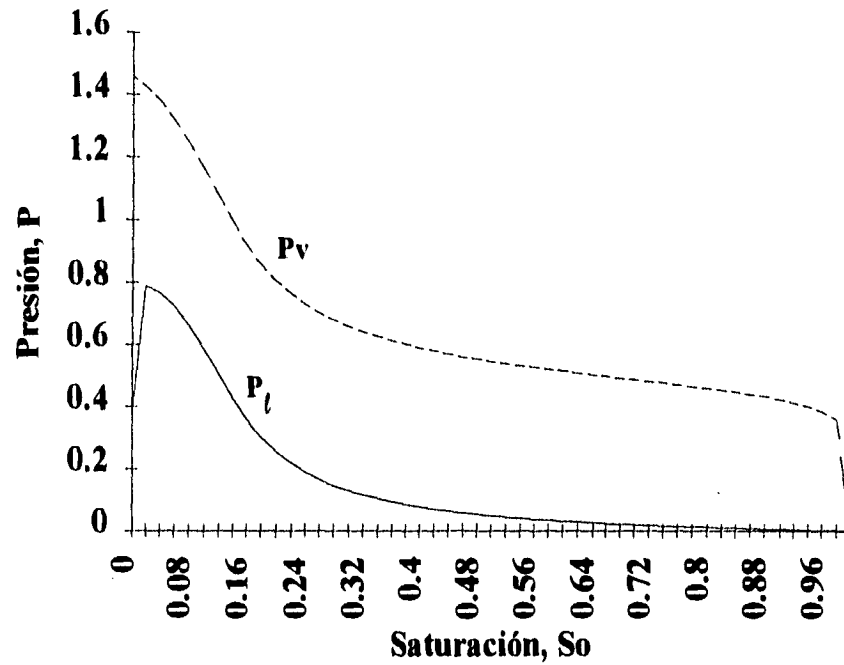


Figura 10. Presiones del líquido y vapor con respecto a la saturación en la región de dos fases, para un valor de $W = 0.8052$, ecuaciones (54) y (55).

3.2.- Solución del estado perturbado.

En la solución del estado perturbado se consideran las ecuaciones (30)-(35), a las cuales se les aplica un modo de expansión normal [49], que considera un comportamiento exponencial en el tiempo, τ , y un comportamiento senoidal en la coordenada horizontal, ζ . Este modo toma la forma:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \Theta_{(n)} e^{i\kappa\zeta + \alpha\tau} \\
 P_1 &= \Pi_{(n)} e^{i\kappa\zeta + \alpha\tau} \\
 S_1 &= \Sigma_{(n)} e^{i\kappa\zeta + \alpha\tau} \\
 \delta_1 &= \Delta_{(n)} e^{i\kappa\zeta + \alpha\tau}
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

donde $(i)^2 = -1$, κ es el número de onda y α es la rapidez de crecimiento de la perturbación. Las variables Θ , Π , Σ y Δ representan la amplitud de la perturbación de temperatura, presión, saturación y de la posición de la interfaz, respectivamente.

Las ecuaciones que se obtienen al sustituir el modo normal en las variables perturbadas y considerando δ_0 como la altura de la región de dos fases del estado básico, son:

Región del líquido

$$\frac{d}{d\eta_l} \left(\frac{d\Pi_l}{d\eta_l} \right) = -Ra \delta_0 \frac{d\Theta}{d\eta_l} + \delta_0^2 \kappa^2 \Pi_l + (Ra \eta_l^2 \delta_0^2 \kappa^2 - Ra) \Delta_l - Ra \eta_l \frac{d\Delta_l}{d\eta_l} \quad (59)$$

$$\frac{d}{d\eta_l} \left(\frac{d\Theta}{d\eta_l} \right) = -\frac{d\Pi_l}{d\eta_l} + (\alpha \sigma \delta_0^2 + \delta_0^2 \kappa^2 - Ra \delta_0) \Theta - (Ra \eta_l + \alpha \sigma \eta_l \delta_0 + \eta_l \delta_0 \kappa^2) \Delta_l \quad (60)$$

Región de dos fases

$$\frac{d}{d\eta_{2\phi}} \left(\frac{d\Pi_l}{d\eta_{2\phi}} \right) = \kappa^2 (1 - \delta_0)^2 \Pi_l + \frac{\alpha \phi (1 - \delta_0)^2}{k_{r,l,0}} \Sigma + \left[\frac{Ra(1 - \delta_0)}{k_{r,l,0}} - \frac{1}{k_{r,l,0}} \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} \right] \frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} \quad (61)$$

$$+ \left[\frac{\phi \eta_{2\phi} (1 - \delta_0) \alpha}{k_{r,l,0}} \frac{dS_0}{d\eta_{2\phi}} + \eta_{2\phi} (1 - \delta_0) \kappa^2 \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} \right] \Delta_{2\phi} - \frac{1}{1 - \delta_0} \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} \frac{d\Delta_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}}$$

$$\frac{d}{d\eta_{2\phi}} \left(\frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} \right) = \kappa^2 (1 - \delta_0)^2 \Pi_v - \frac{\alpha \phi (1 - \delta_0)^2}{\hat{\mu} k_{r,v,0}} \Sigma + \left[-\frac{Ra_{2\phi} (1 - \delta_0)}{k_{r,v,0}} + \frac{1}{k_{r,v,0}} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} \right] \frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} \quad (62)$$

$$- \left[\frac{\phi \eta_{2\phi} (1 - \delta_0) \alpha}{\hat{\mu} k_{r,v,0}} \frac{dS_0}{d\eta_{2\phi}} - \eta_{2\phi} (1 - \delta_0) \kappa^2 \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} \right] \Delta_{2\phi} - \frac{1}{1 - \delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} \frac{d\Delta_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}}$$

Las ecuaciones (59)-(62) se obtienen de las ecuaciones de continuidad y energía de cada región, sustituyendo previamente las ecuaciones de momento que corresponde a cada región. Los efectos capilares considerados en este trabajo se aplican en la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\eta_{2\phi}} \left[\frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} - \frac{d\Pi_l}{d\eta_{2\phi}} \right] &= (1-\delta_0)^2 \kappa^2 (\Pi_v - \Pi_l) - \left[\frac{1}{\hat{\mu}k_{rv,0}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \right] \alpha\phi (1-\delta_0)^2 \Sigma + \\
 \left[\frac{1}{k_{rv,0}} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} - (1-\delta_0) \left(\frac{Ra_{2\phi}}{k_{rv,0}} + \frac{Ra}{k_{rl,0}} \right) \right] \frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} &- \frac{1}{1-\delta_0} \left[\frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} \right] \frac{d\Delta_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} \\
 - \left[\phi\eta_{2\phi} (1-\delta_0) \alpha \left(\frac{1}{\hat{\mu}k_{rv,0}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \right) \frac{dS_0}{d\eta_{2\phi}} - \eta_{2\phi} (1-\delta_0) \kappa^2 \left(\frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} \right) \right] \Delta_{2\phi} & \quad (63)
 \end{aligned}$$

esta ecuación se obtiene al aplicar la ecuación (38) en las ecuaciones (61) y (62).

Para el caso donde los efectos capilares se desprecian y la región de dos fases se considera con una saturación constante, como es el caso considerado por Ramesh y Torrance [10], se tiene el sistema de ecuaciones compuesto por (59) y (60) para la región de líquido y para la región de dos fases se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\eta_{2\phi}} \left(\frac{d\Pi}{d\eta_{2\phi}} \right) &= (1-\delta_0)^2 \kappa^2 \Pi + \eta_{2\phi} (1-\delta_0) \kappa^2 \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} \Delta_{2\phi} \\
 &+ \frac{\alpha\phi \left[\frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} \left(1 - \frac{1}{\hat{\mu}} \right) - (1-\delta_0) \left(\frac{Ra_{2\phi}}{\hat{\mu}} - \frac{Ra}{\hat{\mu}} \right) \right]}{\frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} (k_{rl,0} + k_{rv,0}) - \frac{1}{(1-\delta_0)} (Ra_{2\phi} k_{rl,0} + Ra k_{rv,0})} \Sigma
 \end{aligned} \quad (64)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} = \frac{\alpha\phi \left(k_{rv,0} + \frac{k_{rl,0}}{\hat{\mu}} \right) \Sigma}{\frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} (k_{rl,0} + k_{rv,0}) - \frac{1}{1-\delta_0} (Ra_{2\phi} k_{rl,0} + Ra k_{rv,0})} \quad (65)$$

La ecuación (65) se obtiene al sustituir el modo normal de expansión en las ecuaciones de continuidad y energía, (33) y (35), eliminando términos comunes. Posteriormente se sustituye la ecuación (65) en la ecuación de continuidad, ecuación (33), para obtener la ecuación (64).

Para la solución de las ecuaciones en cada región, es necesario representarlas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se integran

posteriormente . A continuación se presenta la forma como se obtienen estos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para los casos donde la presión capilar es cero y para cuando es diferente de cero.

3.2.1.- Sistema de ecuaciones que se resuelven para $P_c = 0$, caso presentado por Ramesh y Torrance [10].

Para obtener la solución del caso donde $P_c = 0$, se considera el sistema de ecuaciones compuesto por (59),(60),(64) y (65) , que se pueden representar como dos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para la región del líquido, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se logra al agregar a las ecuaciones (59) y (60) las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d \Pi}{d \eta_t} = \frac{d \Pi}{d \eta_t} \tag{66}$$

$$\frac{d \Theta}{d \eta_t} = \frac{d \Theta}{d \eta_t} \tag{67}$$

$$\frac{d \Delta_t}{d \eta_t} = 0 \tag{68}$$

Entonces el sistema esta formado por cinco ecuaciones diferenciales de primer orden donde las variables son función de η_t , teniéndose que:

$$X_t = \begin{bmatrix} d \Pi / d \eta_t \\ d \Theta / d \eta_t \\ \Pi \\ \Theta \\ \Delta_t \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{d X_t}{d \eta_t} = \begin{bmatrix} d^2 \Pi / d \eta_t^2 \\ d^2 \Theta / d \eta_t^2 \\ d \Pi / d \eta_t \\ d \Theta / d \eta_t \\ d \Delta_t / d \eta_t \end{bmatrix} \tag{69}$$

donde el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden toma la siguiente forma matricial:

$$\frac{dX_t}{d\eta_t} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & a_4 & a_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Pi/d\eta_t \\ d\Theta/d\eta_t \\ \Pi \\ \Theta \\ \Delta_t \end{bmatrix} \quad (70)$$

donde:

$$a_1 = -Ra \delta_0$$

$$a_2 = \delta_0^2 \kappa^2$$

$$a_3 = Ra \eta_t^2 \delta_0^2 \kappa^2 - Ra$$

$$a_4 = \alpha \sigma \delta_0^2 + \delta_0^2 \kappa^2 - Ra \delta_0$$

$$a_5 = -Ra \eta_t - \alpha \sigma \eta_t \delta_0 - \eta_t \delta_0 \kappa^2$$

Finalmente el sistema se representa por:

$$\frac{dX_t}{d\eta_t} = F_t X_t \quad (71)$$

donde:

$$F_t = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & a_4 & a_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la región de dos fases el sistema de ecuaciones diferenciales se forma con las ecuaciones (64) y (65), a las cuales se agregan las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\Pi}{d\eta_{2\phi}} = \frac{d\Pi}{d\eta_{2\phi}} \quad (72)$$

$$\frac{d\Delta_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} = 0 \quad (73)$$

El sistema queda formado por cuatro ecuaciones donde:

$$X_{2\phi} = \begin{bmatrix} d\Pi/d\eta_{2\phi} \\ \Pi \\ \Sigma \\ \Delta_{2\phi} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{dX_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} = \begin{bmatrix} d^2\Pi/d\eta_{2\phi}^2 \\ d\Pi/d\eta_{2\phi} \\ d\Sigma/d\eta_{2\phi} \\ d\Delta_{2\phi}/d\eta_{2\phi} \end{bmatrix} \quad (74)$$

y el sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\frac{dX_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Pi/d\eta_{2\phi} \\ \Pi \\ \Sigma \\ \Delta_{2\phi} \end{bmatrix} \quad (75)$$

donde:

$$b_1 = (1-\delta_0)^2 \kappa^2$$

$$b_2 = \frac{\alpha \phi \left[\frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} \left(1 - \frac{1}{\bar{\mu}} \right) - (1-\delta_0) \left(Ra_{2\phi} - \frac{Ra}{\bar{\mu}} \right) \right]}{\frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} (k_{r,0} + k_{rv,0}) - \frac{1}{(1-\delta_0)} (Ra_{2\phi} k_{r,0} + Ra k_{rv,0})}$$

$$b_3 = \eta_{2\phi} (1-\delta_0)^2 \kappa^2 \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}}$$

$$b_4 = \frac{\alpha \phi \left[k_{rv,0} + \frac{k_{r,0}}{\bar{\mu}} \right]}{\frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} (k_{r,0} + k_{rv,0}) - \frac{1}{(1-\delta_0)} (Ra_{2\phi} k_{r,0} + Ra k_{rv,0})}$$

El sistema puede representarse por:

$$\frac{dX_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} = F_{2\phi} X_{2\phi} \quad (76)$$

donde:

$$F_{2\phi} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ecuaciones (71) y (76), se sustituyen los valores de las variables que identifican al medio poroso y al fluido, así como también, se asignan valores a las variables que surgen del análisis de estabilidad, como son el número de onda y la rapidez de crecimiento de la perturbación. Por otra parte, del estado básico se introducen las ecuaciones (42) y (43) para conocer la temperatura y el gradiente de presión en la región del líquido.

Para la región de dos fases es necesario introducir el valor de la saturación del líquido, que se obtiene de la gráfica mostrada en la figura 5, al asignar valores del flujo de calor Q_b y del número de Rayleigh, Ra , en la ecuación (47), donde los números de Rayleigh para ambas regiones se relacionan por el parámetro γ , que representa el cambio máximo de densidad en la región del líquido con la diferencia de densidades entre las fases en la región de dos fases y se escribe como [10]:

$$\gamma = \frac{Ra}{Ra_{2\phi}} = \frac{\beta_l (T_{sat.} - T_0)}{1 - \hat{\rho}} \quad (77)$$

donde β_l representa el coeficiente de expansión volumétrica del líquido.

Para determinar la altura de la región de dos fases, δ_0 , se considera una transferencia de calor por conducción a través del medio poroso saturado, esto es

$$Q_b = \frac{1}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_l}$$

donde al sustituir la ecuación (42) se obtiene:

$$\delta_0 = \frac{1}{Q_b}$$

Por otra parte, el gradiente de presión en la región de dos fases que se introduce del estado básico se obtiene de la ecuación (28a), la cual al sustituir la ecuación (46) se expresa como [10]:

$$\frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} = (1 - \delta_0) \frac{Q_b}{\lambda k_{r,0}} + (1 - \delta_0) Ra \quad (78)$$

3.2.2.- Sistema de ecuaciones que se resuelven para $P_c \neq 0$, caso considerado en este trabajo.

Para el caso donde los efectos capilares se consideran, $P_c \neq 0$, el sistema de ecuaciones que se resuelve esta compuesto por las ecuaciones (59)-(63), que también se representan en sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para la región del líquido no hay cambios y las ecuaciones que se consideran son las que se obtuvieron en la sección anterior. Entonces las únicas que cambian son las ecuaciones para la región de dos fases, Ecs. (61)-(63), y el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se obtiene al agregar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\Pi_l}{d\eta_{2\phi}} = \frac{d\Pi_l}{d\eta_{2\phi}} \tag{79}$$

$$\frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} = \frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} \tag{80}$$

$$\frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} = \frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} \tag{81}$$

$$\frac{d\Delta_{2\phi}}{d\eta_{2\phi}} = 0 \tag{82}$$

donde las variables del sistema se representan por:

$$X_{2\phi}^c = \begin{bmatrix} d\Pi_l/d\eta_{2\phi} \\ d\Pi_v/d\eta_{2\phi} \\ d\Sigma/d\eta_{2\phi} \\ \Pi_l \\ \Pi_v \\ \Sigma \\ \Delta_{2\phi} \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{dX_{2\phi}^c}{d\eta_{2\phi}} = \begin{bmatrix} d^2\Pi_l/d\eta_{2\phi}^2 \\ d^2\Pi_v/d\eta_{2\phi}^2 \\ d^2\Sigma/d\eta_{2\phi}^2 \\ d\Pi_l/d\eta_{2\phi} \\ d\Pi_v/d\eta_{2\phi} \\ d\Sigma/d\eta_{2\phi} \\ d\Delta_{2\phi}/d\eta_{2\phi} \end{bmatrix} \tag{83}$$

quedando el sistema en forma matricial como:

$$\frac{d \mathbf{X}_{2\phi}^c}{d\eta_{2\phi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 & c_8 \\ 0 & 0 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \Pi_t / d\eta_{2\phi} \\ d \Pi_v / d\eta_{2\phi} \\ d \Sigma / d\eta_{2\phi} \\ \Pi_t \\ \Pi_v \\ \Sigma \\ \Delta_{2\phi} \end{bmatrix} \quad (84)$$

donde:

$$c_1 = \frac{Ra(1-\delta_0)}{k_{n,0}} - \frac{1}{k_{rv,0}} \frac{d P_{t,0}}{d\eta_{2\phi}}$$

$$c_2 = \kappa^2(1-\delta_0)^2$$

$$c_3 = \frac{\alpha \phi(1-\delta_0)^2}{k_{n,0}}$$

$$c_4 = \frac{\phi \eta_{2\phi}(1-\delta_0)\alpha}{k_{n,0}} \frac{d S_0}{d\eta_{2\phi}} + \eta_{2\phi}(1-\delta_0)\kappa^2 \frac{d P_{t,0}}{d\eta_{2\phi}}$$

$$c_5 = \frac{1}{k_{rv,0}} \frac{d P_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{Ra_{2\phi}(1-\delta_0)}{k_{rv,0}}$$

$$c_6 = \kappa^2(1-\delta_0)^2$$

$$c_7 = \frac{\alpha \phi(1-\delta_0)}{\bar{\mu} k_{rv,0}}$$

$$c_8 = \eta_{2\phi}(1-\delta_0)\kappa^2 \frac{d P_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{\phi \eta_{2\phi}(1-\delta_0)\alpha}{\bar{\mu} k_{rv,0}} \frac{d S_0}{d\eta_{2\phi}}$$

$$\begin{aligned}
 c_9 &= \frac{1}{J'_{(s)}} \left[\frac{1}{k_{rv,0}} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \frac{d P_{l,0}}{d \eta_{2\phi}} - (1-\delta_0) \left(\frac{Ra_{2\phi}}{k_{rv,0}} + \frac{Ra}{k_{rl,0}} \right) \right] \\
 c_{10} &= \frac{1}{J'_{(s)}} \left[-(1-\delta_0)^2 \kappa^2 \right] \\
 c_{11} &= \frac{1}{J'_{(s)}} \left[(1-\delta_0)^2 \kappa^2 \right] \\
 c_{12} &= \frac{1}{J'_{(s)}} \left[- \left(\frac{1}{\bar{\mu} k_{rv,0}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \right) \alpha \phi (1-\delta_0)^2 \right] \\
 c_{13} &= \frac{1}{J'_{(s)}} \left[-\phi \eta_{2\phi} (1-\delta_0) \alpha \left(\frac{1}{\bar{\mu} k_{rv,0}} + \frac{1}{k_{rl,0}} \right) \frac{d S_0}{d \eta_{2\phi}} + \eta_{2\phi} (1-\delta_0) \kappa^2 \left(\frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} - \frac{d P_{l,0}}{d \eta_{2\phi}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

El sistema se puede representar por:

$$\frac{d X_{2\phi}^c}{d \eta_{2\phi}} = F_{2\phi}^c X_{2\phi}^c \tag{85}$$

donde:

$$F_{2\phi}^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 & c_6 & c_7 & c_8 \\ 0 & 0 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la ecuación para $\frac{d \Sigma}{d \eta_{2\phi}}$ se obtiene de la ecuación (63) al introducir:

$$\frac{d \Pi_c}{d \eta_{2\phi}} = \frac{d \Pi_v}{d \eta_{2\phi}} - \frac{d \Pi_l}{d \eta_{2\phi}} = \frac{d J_{(s)}}{d \eta_{2\phi}} \frac{d \Sigma_{(s)}}{d \Sigma_{(s)}} = J'_{(s)} \frac{d \Sigma_{(s)}}{d \eta_{2\phi}} \tag{86}$$

donde $J'_{(s)}$ se toma de la ecuación (52).

Para resolver el sistema de ecuaciones representadas por la ecuación (85) es necesario introducir los valores de las propiedades del medio poroso y del fluido, así como también, los valores de la saturación, permeabilidades relativas y gradientes de

presión de cada fase que surgen del estado básico. El valor de la saturación se obtiene de la figura 9 y se introduce al algoritmo de cálculo como un polinomio de quinto grado, que se representa como:

$$S_0 = 0.01168 + 1.278 \eta_{2\phi} - 9.6806 \eta_{2\phi}^2 + 30.578 \eta_{2\phi}^3 - 39.2411 \eta_{2\phi}^4 + 18.047 \eta_{2\phi}^5 \quad (87)$$

Las permeabilidades relativas toman el valor de la saturación según la ecuación (52) y los gradientes de presión de cada fase se obtienen de las ecuaciones (54) y (55).

En cuanto a la altura de la región de dos fases, δ_0 , se toma el valor de la gráfica que aparece en la figura 7, para un flujo de calor, W , definido.

Cabe mencionar que la saturación, figura 9, tiene poca variación con respecto al flujo de calor aplicado, por tanto, la ecuación (87) puede considerarse para cualquier valor de W .

3.2.3.- Condiciones de frontera y compatibilidad (interfaz).

Las condiciones de frontera aplicadas para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, tanto de la región del líquido como de la región de dos fases son:

En la región del líquido [10] se tiene:

para $\eta_l = 0$, donde $T = 0$ y $P = 0$:

$$\begin{aligned} \Theta &= 0 \\ \Pi &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

en forma matricial se tiene:

$$BC_1 X_l = 0 \quad (89)$$

donde X_l se toma de la ecuación (69) y la matriz de coeficientes tiene la forma:

$$BC_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (90)$$

para $\eta_{2\phi} = 0$, donde existe una frontera impermeable, la velocidad de cada fase es:

$$\begin{aligned} v_{l,i} &= 0 \\ v_{v,i} &= 0 \end{aligned} \quad (91)$$

estas condiciones se representan por:

$$k_{n,0} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d\Pi_t}{d\eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_{2\phi}} \Delta_{2\phi} \right] + \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra \right] \Sigma = 0 \quad (92)$$

$$k_{rv,0} \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} \Delta_{2\phi} \right] - \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra_{2\phi} \right] \Sigma = 0 \quad (93)$$

Estas ecuaciones se obtiene al sustituir el modo normal en las ecuaciones (34b) y (34d) e introducir $k_{n,1} = 1$ y $k_{rv,1} = -1$.

Para el caso donde la presión capilar es cero [10] se tiene: $\Pi_t = \Pi_v = \Pi$ y $P_{t,0} = P_{v,0} = P_0$, entonces las variables que aparecen en estas ecuaciones pertenecen al conjunto de variables representadas en la ecuación (74), por lo tanto, las ecuaciones (92) y (93) se pueden representar en la forma:

$$BC_2 X_{2\phi} = 0 \quad (94)$$

donde la matriz de los coeficientes toma la forma:

$$BC_2 = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_2 & f_3 \\ f_4 & 0 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} \quad (95)$$

donde:

$$f_1 = \frac{k_{n,0}}{1-\delta_0}$$

$$f_2 = \frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}} - Ra$$

$$f_3 = \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}}$$

$$f_4 = \frac{k_{rv,0}}{1-\delta_0}$$

$$f_5 = Ra_{2\phi} - \frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_0}{d\eta_{2\phi}}$$

$$f_6 = \frac{1}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}}$$

En la interfaz , $\eta_l = \eta_{2\phi} = 1$, se realizan balances de masa y de energía que representan condiciones de compatibilidad .

La ecuación del balance de masa en la interfaz se obtiene al considerar una frontera permeable y móvil que se desplaza a una velocidad vertical , v_i . De la ecuación de conservación de masa se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV + \sum_{\text{Sol.}} (\rho A \bar{v}) - \sum_{\text{Ent.}} (\rho A \bar{v}) = 0 \quad (96)$$

donde el primer término del lado izquierdo se puede representar por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = \rho_i v_i \quad (97)$$

y la densidad en la interfaz es:

$$\rho_i = \phi(1-S)(\rho_l - \rho_v) \quad (98)$$

Los otros dos términos representan los flujos másicos de entrada y salida en la interfaz. Entonces la ecuación que surge del balance de masa tiene la forma:

$$\phi(1-S)(\rho_l - \rho_v)v_i + \rho_l v_l^- - (\rho_l v_l + \rho_v v_v)^{(+)} = 0 \quad (99)$$

donde el signo (-) representa el lado de la región del líquido y el signo (+) el lado de la región de dos fases.

Considerando que la velocidad de la interfaz se puede expresar como:

$$v_i = \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (100)$$

entonces la ecuación (99) se adimensiona y se transforma al marco de coordenadas (ζ, η, τ), tomando la forma:

$$\phi(1-\hat{\rho})(1-S_0) \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} + (v_{l,l})^{(-)} - (v_{l,l} + \hat{\rho} v_{v,l})^{(+)} = 0 \quad (101)$$

Sustituyendo las ecuaciones (31b), (34b) y (34d), y el modo de expansión normal, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{1}{\delta_0} \frac{d\Pi_l}{d\eta_l} - \frac{Ra}{\delta_0} \Delta_l - Ra \Theta \right\}^{(-)} - \left\{ \frac{k_{n,0}}{1-\delta_0} \frac{d\Pi_l}{d\eta_{2\phi}} + \frac{\hat{\rho}\hat{\mu}k_{rv,0}}{1-\delta_0} \frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} \right\}^{(+)} \\
 & - \left\{ \left[\frac{k_{n,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} + \frac{\hat{\rho}\hat{\mu}k_{rv,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \phi(1-\hat{\rho})(1-S_0)\alpha \right] \Delta_{2\phi} \right\}^{(+)} \\
 & - \left\{ \left[\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{\hat{\rho}\hat{\mu}}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} + (\hat{\rho}\hat{\mu}Ra_{2\phi} - Ra) \right] \Sigma \right\}^{(+)} = 0
 \end{aligned} \quad (102)$$

Para el balance de energía se considera la siguiente ecuación de conservación:

$$q_n^* = q_s^* - q_e^* \quad (103)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 q_n^* &= \text{calor acumulado en la interfaz, } q_n^* = \phi(1-S)\rho_v h_{fg} v_i \\
 q_s^* &= \text{calor que sale de la interfaz, } q_s^* = k_l \nabla T^{(-)} \\
 q_e^* &= \text{calor que entra a la interfaz, } q_e^* = \rho_v h_{fg} v_v^{(+)}
 \end{aligned}$$

Considerando otra vez la velocidad de la interfaz, ecuación (100), adimensionando y transformando la ecuación del balance de energía se tiene:

$$\left[\frac{\partial T_l}{\partial \zeta} - \frac{\eta_l}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_l} \frac{\partial \delta_l}{\partial \zeta} + \frac{1}{\delta_0} \left(\frac{\partial T_l}{\partial \eta_l} - \frac{1}{\delta_0} \frac{dT_0}{d\eta_l} \delta_l \right) \right]^{(-)} + \hat{\rho}\lambda(v_{v,1})^{(+)} = \phi \hat{\rho}\lambda(1-S) \frac{\partial \delta_l}{\partial \tau} \quad (104)$$

Sustituyendo la ecuación (34d) y el modo normal de expansión se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{\delta_0} \frac{d\Theta}{d\eta_l} \right\}^{(-)} + \hat{\rho}\lambda \left\{ \frac{\hat{\mu}k_{rv,0}}{1-\delta_0} \frac{d\Pi_v}{d\eta_{2\phi}} - \left[\frac{\hat{\mu}}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \hat{\mu}Ra_{2\phi} \right] \Sigma \right\}^{(+)} \\
 & + \hat{\rho}\lambda \left\{ \left[\frac{\hat{\mu}k_{rv,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \phi(1-S_0)\alpha \right] \Delta_{2\phi} \right\}^{(+)}
 \end{aligned} \quad (105)$$

Otras condiciones de compatibilidad en la interfaz [10] son:

$$\begin{aligned}
 \Theta &= 0 \\
 \Pi_l^{(-)} &= \Pi_l^{(+)} \\
 \Delta_l &= \Delta_{2\phi}
 \end{aligned} \quad (106)$$

Las condiciones de compatibilidad, ecuaciones (102), (105) y (106), se agrupan en la siguiente forma matricial:

$$BC_3 \begin{bmatrix} X_t \\ X_{2\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (107)$$

donde X_t y $X_{2\phi}$ se toman de las ecuaciones (69) y (74) y la matriz de coeficientes tiene la forma:

$$BC_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{-\delta_0} & 0 & 0 & -Ra & \frac{-Ra}{\delta_0} & z_1 & 0 & z_2 & z_3 \\ 0 & \frac{1}{\delta_0} & 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 & z_5 & z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

donde:

$$z_1 = -\frac{k_{r,0}}{1-\delta_0} - \frac{\hat{\rho}\hat{\mu} k_{rv,0}}{1-\delta_0}$$

$$z_2 = -\frac{1}{1-\delta_0} \frac{dP_{1,0}}{d\eta_{2\phi}} + \frac{\hat{\rho}\hat{\mu}}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - (\hat{\rho}\hat{\mu} Ra_{2\phi} - Ra)$$

$$z_3 = -\frac{k_{r,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{t,0}}{d\eta_{2\phi}} - \frac{\hat{\rho}\hat{\mu} k_{rv,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \phi(1-\hat{\rho})(1-S_0)\alpha$$

$$z_4 = \hat{\rho}\hat{\lambda}\hat{\mu} \frac{k_{rv,0}}{1-\delta_0}$$

$$z_5 = -\frac{\hat{\rho}\hat{\lambda}\hat{\mu}}{1-\delta_0} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} + \hat{\rho}\hat{\lambda}\hat{\mu} Ra_{2\phi}$$

$$z_6 = \hat{\rho}\hat{\lambda} \frac{\hat{\mu} k_{rv,0}}{(1-\delta_0)^2} \frac{dP_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - \hat{\rho}\hat{\lambda}\phi(1-S_0)\alpha$$

Para el caso donde se considera el efecto de la presión capilar, $P_c \neq 0$, las condiciones de frontera y compatibilidad que cambian, con respecto a Ramesh y Torrance [10], son las que aparecen en las matrices BC_2 y BC_3 , ecuaciones (95) y (108).

En la frontera $\eta_{2\phi} = 0$ la condición que se agrega a las ecuaciones (92) y (93) es:

$$S = 0, \text{ entonces } \Sigma = 0$$

esta condición representa la presencia de una capa de vapor sobre la superficie caliente, coincidiendo con algunos autores [20, 21, 32] y se agrega a la ecuación (95), quedando la matriz de la forma:

$$BC_2^c = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_4 & 0 & 0 & 0 & f_5 & f_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Entonces tomando la $X_{2\phi}^c$ de la ecuación (83) se tienen las siguientes condiciones de frontera en la superficie inferior dentro de la región de dos fases:

$$BC_2^c X_{2\phi}^c = 0 \quad (110)$$

Para la interfaz, $\eta_{2\phi} = 1$, las condiciones que se agregan a las ecuaciones (102), (105) y (106), son:

$$\Pi_v^{(+)} - \Pi_l^{(+)} = 0 \quad (111)$$

$$\frac{d\Sigma}{d\eta_{2\phi}} = 0 \quad (112)$$

estas condiciones consideran una presión capilar cero en la interfaz y una saturación de líquido aproximadamente igual a uno. Sumando estas condiciones en la ecuación (108) se obtiene la siguiente matriz de condiciones:

$$BC_3^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\delta_0} & 0 & 0 & -Ra & \frac{-Ra}{\delta_0} & g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0 & g_3 & g_4 \\ 0 & \frac{1}{\delta_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & 0 & 0 & 0 & g_6 & g_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

donde:

$$g_1 = -\frac{k_{n,0}}{1-\delta_0} \quad \text{y} \quad g_2 = -\frac{\hat{\rho}\hat{\mu} k_{rv,0}}{1-\delta_0}$$

$$g_3 = z_2 \quad , \quad g_4 = z_3 \quad , \quad g_5 = z_4 \quad , \quad g_6 = z_5 \quad \text{y} \quad g_7 = z_6$$

Considerando las ecuaciones (69) y (83), las condiciones se representan por:

$$BC_3^c \begin{bmatrix} X_l \\ X_{2\phi}^c \end{bmatrix} = 0 \quad (114)$$

3.2.4. Método de solución.

El método de solución utilizado en este trabajo se deriva del método definido por Davey [50], donde se considera que los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden tienen un vector solución representado por las X's en cada región, los cuales para el rango de integración (0 a 1) se expresan como:

$$X_l^1 = B_l X_l^0 \quad (115)$$

para la región del liquido, y para la región de dos fases se tiene:

$$X_{2\phi}^1 = B_{2\phi} X_{2\phi}^0 \quad (116)$$

donde B_l y $B_{2\phi}$ representan las matrices de transferencia y son función solamente de los parámetros que surgen del análisis de estabilidad, como son: el número de onda y la rapidez de crecimiento de la perturbación, y de los parámetros que representan el comportamiento del proceso, como son: el número de Rayleigh y el flujo de calor

adimensional aplicado. Para el caso donde la presión capilar es cero, $P_c = 0$, los parámetros del proceso que se aplican son : Ra y Q_b . En el caso donde se considera la presión capilar , $P_c \neq 0$, los parámetros aplicados son: $Ra_{2\phi}$ y W .

Las matrices de transferencia se obtienen al sustituir secuencialmente los vectores base que se toman de las columnas de la matriz identidad, I , realizando la integración del sistema de ecuaciones de primer orden. Esta matriz identidad tiene el mismo tamaño que los vectores de solución utilizados, esto es : para X_t la matriz identidad utilizada es de 5×5 , para $X_{2\phi}$ la matriz es de 4×4 y para $X_{2\phi}^c$ la matriz es de 7×7 . Con la integración se obtienen los vectores transformados, los cuales forman las columnas de las matrices B .

La integración se lleva a cabo por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden con un esquema de 50 etapas.

Las matrices de transferencia se combinan con las matrices que representan las condiciones de frontera y de compatibilidad para formar la ecuación característica de la estabilidad.

Para el caso donde la $P_c = 0$ [10] la ecuación característica es:

$$J(Ra, Q_b, \alpha, \kappa) = 0 \tag{117}$$

donde:

$$J = \text{Det} \begin{bmatrix} BC_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_t & -I & 0 & 0 \\ 0 & BC_3 & & 0 \\ 0 & 0 & -I & B_{2\phi} \\ 0 & 0 & 0 & BC_2 \end{bmatrix} \tag{118}$$

este determinante se logra al agrupar las matrices representadas en (90), (95) y (108) con las matrices de transferencia que se obtiene con la integración. La matriz de este determinante tiene un tamaño de 18×18 .

Para el caso donde $P_c \neq 0$, el presente trabajo, la ecuación característica es:

$$J(Ra_{2\phi}, W, \alpha, \kappa) = 0 \tag{119}$$

donde:

$$J = \text{Det} \begin{bmatrix} BC_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_t & -I & 0 & 0 \\ 0 & BC_3^c & & 0 \\ 0 & 0 & -I & B_{2\phi}^c \\ 0 & 0 & 0 & BC_2^c \end{bmatrix} \tag{120}$$

el determinante se forma con las matrices (90), (109) y (113) y con las matrices de transferencia, donde $B_{2\phi}^c$ se obtiene al sustituir $X_{2\phi}^c$ en la ecuación (116). La matriz del determinante en la ecuación (120) tiene un tamaño de 24x24.

Un valor cero del determinante en las ecuaciones (117) y (119) significa que el sistema de ecuaciones del estado perturbado tiene una solución no trivial para los valores asignados a los parámetros de la ecuación, entonces el proceso a seguir para la solución es el siguiente:

- 1.- Se asignan valores a los parámetros que aparecen en la ecuación característica, dando un valor inicial a la rapidez de crecimiento de la perturbación, α .
- 2.- Para encontrar el valor de α que cumpla con la condición establecida, se considera un proceso iterativo utilizando la interpolación de Muller [48], donde se asigna un valor de tolerancia para la diferencia en α entre iteraciones menor a 10^{-6} . Esta tolerancia también se aplica al determinante calculado. El proceso iterativo se para cuando cualquiera de las dos tolerancias se cumple, entonces se determina el valor de α que aproxima a la solución no trivial.

El método de Muller utiliza una interpolación cuadrática donde un polinomio de segundo grado encaja en tres puntos cerca de la raíz que se busca, usando el cero de la cuadratura como el valor estimado de la raíz.

Para obtener la solución del estado perturbado se desarrolló un programa de cómputo que encuentra primero las matrices de transferencia, después evalúa el determinante de la ecuación característica, y finalmente aplica la interpolación para encontrar el valor de la rapidez de crecimiento que cumpla con la solución no trivial. La expresión de cada determinante se encontró con el paquete de cómputo Mathematica, dando expresiones bastante extensas, por tanto, estas expresiones no se presentan en los algoritmos de cálculo, sino solamente las matrices (118) y (120).

El lenguaje de programación utilizado en el algoritmo de cálculo fue Turbobasic, como se detalla en el apéndice D.

Cabe mencionar que para encontrar el valor del determinante de la ecuación (120), la interpolación se llevo a cabo manualmente, asignándose los valores obtenidos en el algoritmo, esto se debe al tamaño tan grande del determinante, lo cual sobrepasó la memoria del editor en el Turbobasic y el encadenamiento del programa de interpolación con los otros programas no fue posible.

CAPÍTULO 4

Resultados obtenidos.

Los resultados del estado perturbado se obtuvieron al considerar un medio poroso saturado de agua donde los parámetros son: $T_{sat.} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $\phi = 0.35$, $\rho = 0.6005 \times 10^{-3}$, $\mu = 38.67$, $\gamma = 0.03663$ y $\lambda = 7.706$, y los rangos para cada uno de los parámetros involucrados en la ecuación característica son : $10 \leq Ra \leq 50$, $0.1 \leq Qb \leq 10$ y $0.01 \leq \kappa \leq 10$.

4.1.- Resultados teóricos.

Los resultados para el caso de $Pc = 0$ fueron obtenidos para hacer una comparación con los resultados que se presentan en la literatura [10] y comprobar la efectividad del algoritmo de cálculo desarrollado, lo cual se cumplió satisfactoriamente, ya que los valores fueron muy aproximados, figuras 11 . Los resultados de la figura 12, los cuales se obtuvieron con el algoritmo desarrollado en este trabajo, muestran los valores de la rapidez de crecimiento de la perturbación, α , con respecto al número de onda, κ , manteniendo como parámetro de la curva el número de Rayleigh, para un flujo de calor fijo ($Qb = 2$). En las figuras 12 y 13 se puede observar que para números de onda pequeños y grandes se tiene una estabilidad en la estructura de capas definida en el medio poroso, ya que $\alpha < 0$. Sin embargo, para números de onda medios se presenta inestabilidad de la estructura , $\alpha > 0$, aumentando esta para valores del número de Rayleigh mayores ($Ra \geq 20$).

La estabilidad para números de onda pequeños ($\kappa \leq 0.30$) se debe a los efectos viscosos y se presenta para cualquier valor del número de Rayleigh, dentro del rango de valores definido. Para el caso de números de onda grandes ($\kappa > 8$) la estabilidad se logra por efectos de difusión térmica y es mayor para números de Rayleigh pequeños, debido a que se tienen medios porosos de baja permeabilidad donde los espacios vacíos (poros) son más reducidos, amortiguando así los movimientos convectivos del fluido dentro de los poros y generando mayor difusión térmica.

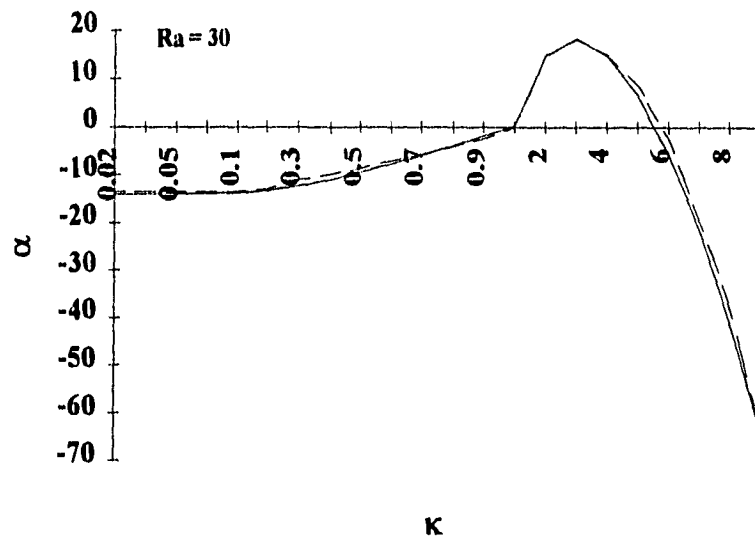


Figura 11. Comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con los resultados presentados por Ramesh y Torrance [10], para $P_c = 0$.

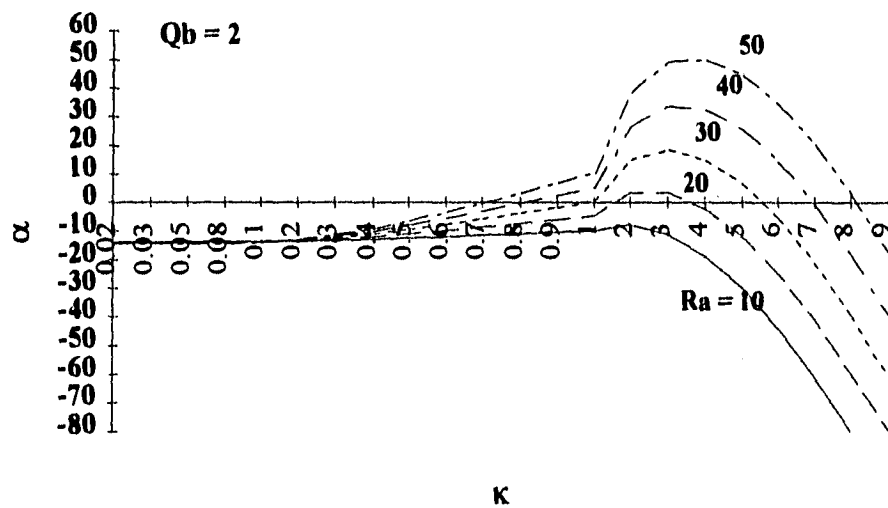


Figura 12. Comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación para una $P_c = 0$.

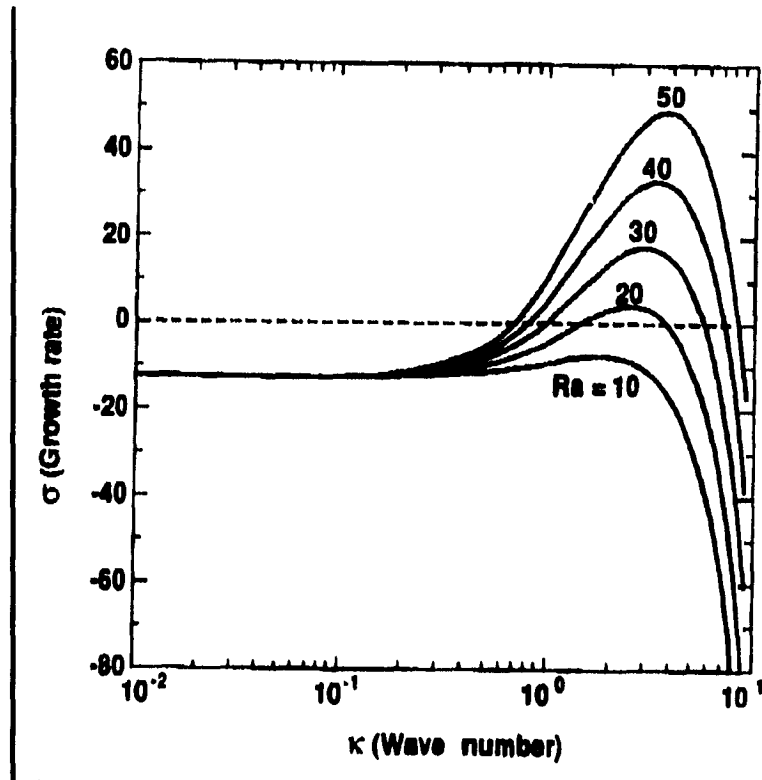


Figura 13. Comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación para $P_c = 0$, según datos obtenidos por Ramesh y Torrance [10].

La inestabilidad que se presenta y que se incrementa conforme aumenta el número de Rayleigh, se debe a que la permeabilidad del medio es mayor, lo cual proporciona espacios más grandes que permiten movimientos convectivos más libres. También se obtuvieron curvas de comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación para diferentes flujos de calor, figura 14, manteniendo el valor de Ra en 10 y 50. En ambos casos se tiene un incremento en la inestabilidad conforme se incrementa el flujo de calor.

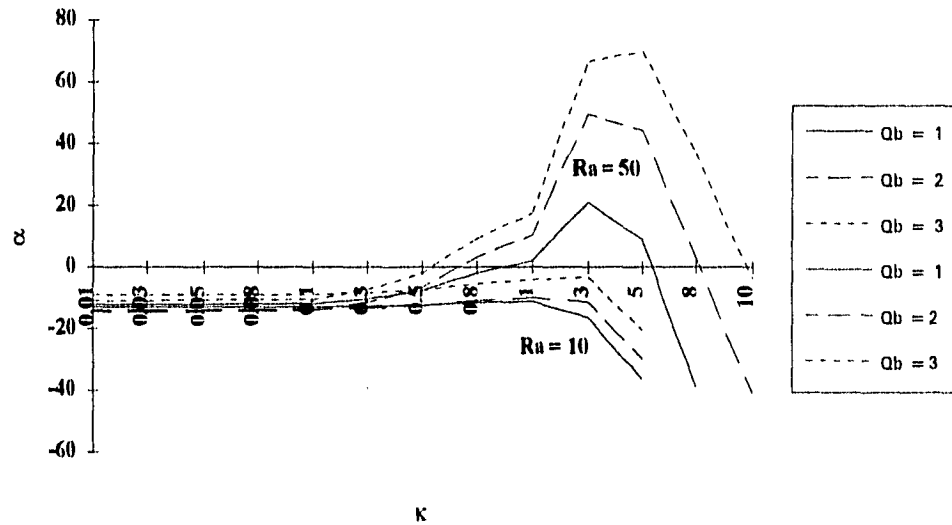


Figura 14. Comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación para dos valores de Ra y tres valores del flujo de calor.

Por otra parte, se encontraron valores para el caso de la estabilidad neutra (estado permanente), $\alpha = 0$, donde el número de Rayleigh es la variable que se determina para cumplir con la solución no-trivial de la ecuación característica, figura 15. En este caso se determina un valor mínimo de Ra , que representa el número crítico de Rayleigh, Ra_{cr} , donde valores menores a Ra_{cr} corresponde a medios porosos donde la transferencia de calor por conducción se conserva, y para valores mayores corresponde a medios porosos donde la inestabilidad se hace presente en forma de movimientos convectivos [51] con un número de onda horizontal igual a κ_c , el cual corresponde a Ra_{cr} . En la figura 15 se observa que para flujos de calor altos el número crítico de Rayleigh es menor, esto puede relacionarse con la cantidad de calor necesaria para alcanzar la temperatura de saturación del fluido en el medio poroso, donde el número de Rayleigh en función al flujo de calor es: $Ra_{f,cr} = Ra_{cr} \cdot Q_b$ (ver Nomenclatura). Entonces el número de Rayleigh crítico mínimo es el valor mínimo necesario para que aparezcan los movimientos convectivos en forma de celdas.

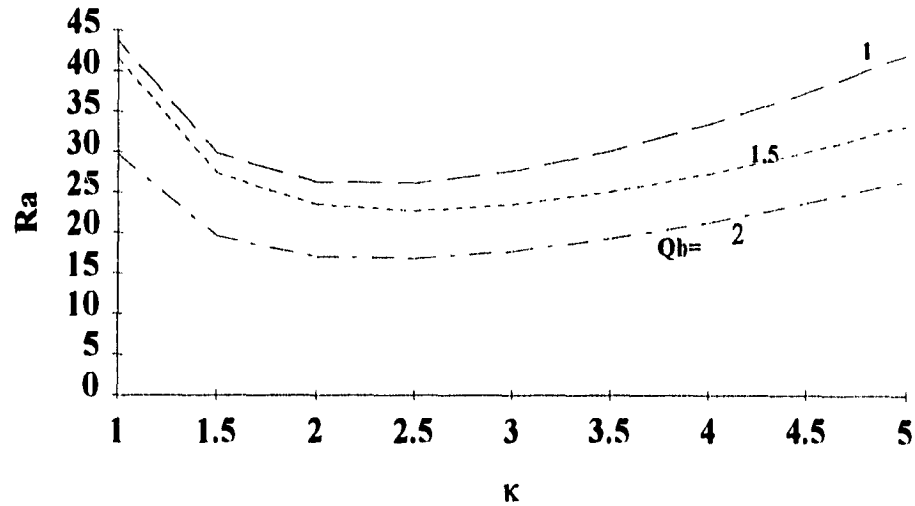


Figura 15. Resultados de la estabilidad neutra, para $P_c = 0$ y diferentes valores del flujo de calor.

En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos para el caso de estabilidad neutra, donde se pueden localizar los valores críticos de Ra y κ .

$\kappa \backslash Q_b$	Ra					
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1.0	36.9183	43.4377	41.5423	29.7054	22.1520	17.5600
1.5	26.5926	29.7697	27.3996	19.5746	14.6906	11.7888
2.0	25.3655	26.2780	23.4290	16.9951	13.0409	10.6626
2.5	27.5422	26.1848	22.7655	16.7945	13.1715	10.9478
3.0	31.5	27.7491	23.4204	17.6924	14.1680	11.9195
3.5	34.9907	30.3621	25.0423	19.2584	15.6769	13.3196
4.0	35.0805	33.7662	27.3103	21.2866	17.5498	15.0921
4.5	35.0637	37.8371	30.0793	23.6972	19.7399	17.1000
5.0	34.92	42.5096	33.2879	26.4306	22.1865	19.3364
5.5	34.8899	47.7470	36.8921	29.4584	24.8700	21.764

Comparando los valores críticos con los de la literatura [10, 13 y 39], se puede establecer una buena aproximación del algoritmo de cálculo desarrollado. Por ejemplo, el valor definido en [10] donde se realiza un análisis de estabilidad lineal de una estructura de capas igual a la definida en este trabajo el valor es: $Ra_{l,cr.} = 23.17$ para $\kappa = \pi$, teniendo un flujo de calor $Q_b = 1$, en [13] consideran un tubo de vidrio vertical donde la solución esta en función de la razón de aspecto (relación entre el radio y la altura del tubo, r/H),

encontrando que el valor de Ra_{cr} se aproxima al valor correspondiente de un medio poroso saturado que se encuentra entre placas horizontales de extensión infinita, teniendo un valor de $Ra_{cr} = 27.1$, donde κ no es definido. Finalmente en [39] se tienen los valores de Ra_{cr} y κ , que varían de acuerdo a las condiciones de frontera establecidas, donde el sistema analizado también se encuentra entre placas horizontales de extensión infinita. Para una frontera inferior impermeable a temperatura constante y una frontera superior permeable a temperatura constante los valores son: $Ra_{cr} = 27.1$ y $\kappa = 2.33$.

Entonces los valores obtenidos con el algoritmo desarrollado se aproxima a los valores antes mencionados, ya que para $Q_b = 1$ los valores son : $Ra_{cr} = 26.185$ y $\kappa = 2.5$. En el caso de los valores de la Ref. [39], la diferencia se establece en las condiciones de frontera, aunque esta no puede ser tan significativa ya que el flujo de calor se define en base a una diferencia de temperaturas constante.

En el estudio del efecto de la presión capilar sobre la estabilidad de la ebullición en un medio poroso, $P_c \neq 0$, se obtuvieron resultados del comportamiento de la rapidez de crecimiento con respecto al número de onda, figura 16, donde se puede observar que existe una menor inestabilidad para el caso de números de onda medios y el mismo rango de valores de Ra . Esto indica que el efecto capilar realiza una especie de amortiguamiento sobre la estabilidad de la ebullición de la estructura de capas analizada. Al comparar las figuras 12 y 16, como se muestra en la figura 17, se observa que la inestabilidad para $P_c \neq 0$ se presenta para un rango menor de valores del número de onda y del número de Ra , esto es: $1 \leq \kappa \leq 6$ y $40 \leq Ra \leq 50$. En cambio, para el caso de $P_c = 0$ los rangos son : $0.9 \leq \kappa \leq 8.5$ y $30 \leq Ra \leq 50$. Por otra parte, también se encontraron resultados para una estabilidad neutra, figura 18, donde el resultado del número de Rayleigh crítico mínimo es igual a $Ra_{cr} = 26.0290$ para un $\kappa = 2.5$, aproximándose a los valores que se presentan en [10, 13 y 39]. Cabe mencionar que los resultados anteriores corresponden a un flujo de calor $W = 0.805$, W_{cr} , donde la altura de la región de dos fases es $\delta_0 \cong 0.99$, según la figura 7.

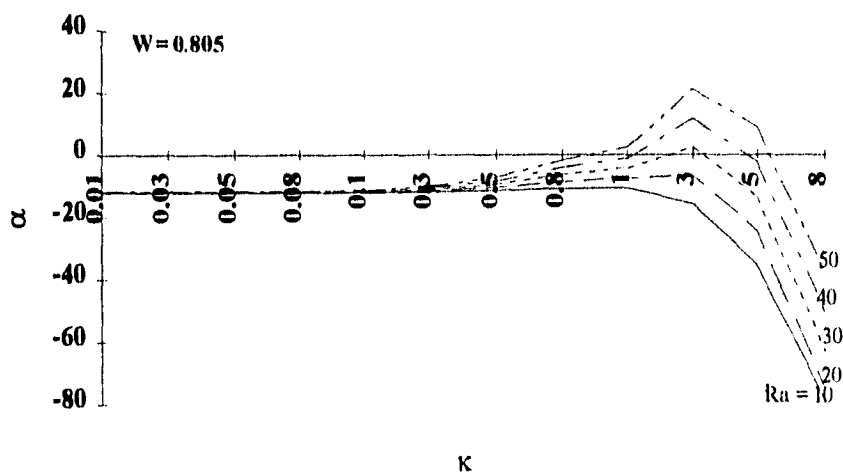


Figura 16. Comportamiento de la rapidez de crecimiento de la perturbación para una $P_c \neq 0$.

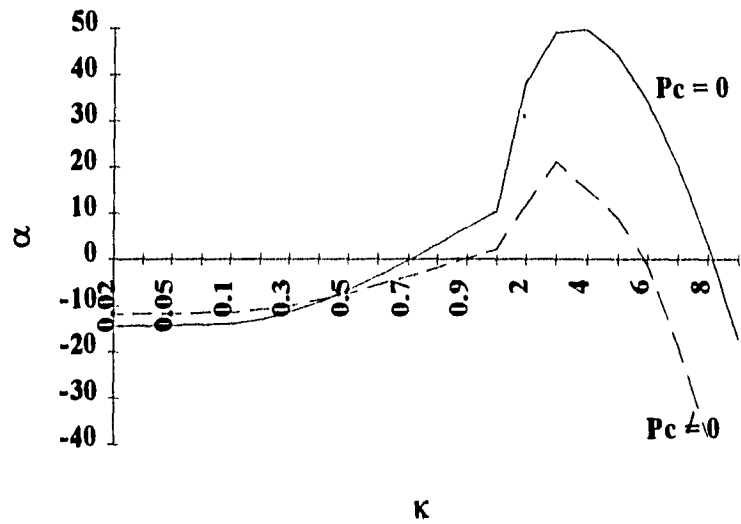


Figura 17. Comportamiento de la rapidez de crecimiento, α , para $P_c = 0$ y $P_c \neq 0$, teniendo un número de Rayleigh $Ra = 50$.

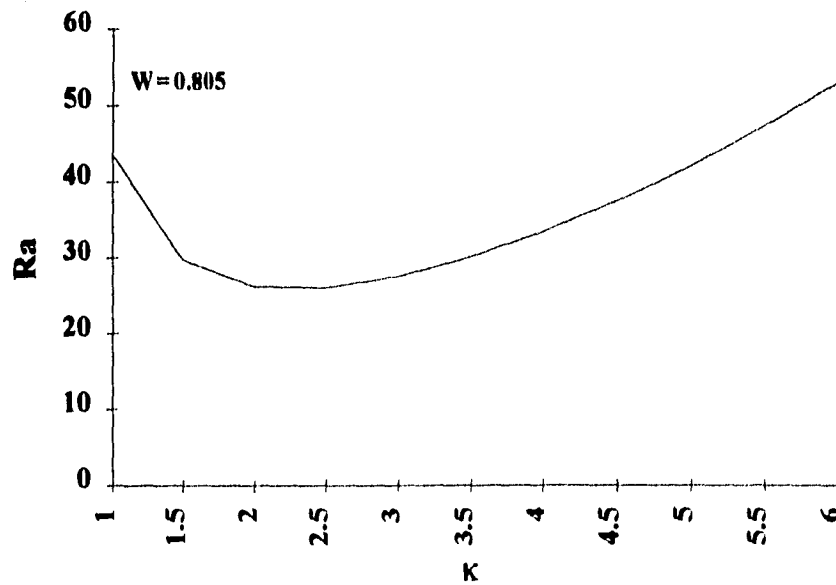


Figura 18. Resultados del número de Rayleigh con respecto al número de onda, para una estabilidad neutra y $P_c \neq 0$.

Para otros flujos de calor se obtuvieron curvas de comportamiento de α , figura 19, donde se cambió el parámetro de la curva de Ra a $Ra_{2\phi}$, debido a que la altura de la región de dos fases disminuye al incrementar el flujo de calor, originando una capa de dos fases con mayor cantidad de vapor. A continuación se presentan los valores del flujo de calor y el rango de valores que se asignaron al parámetro de la curva.

W	δ_0	Rango de $Ra_{2\phi}$
0.81	0.947	$0 < Ra_{2\phi} < 80$ ($0 < Ra < 3$)
0.83	0.783	$0 < Ra_{2\phi} < 15$ ($0 < Ra < .55$)
0.85	0.675	$0 < Ra_{2\phi} < 10$ ($0 < Ra < .36$)

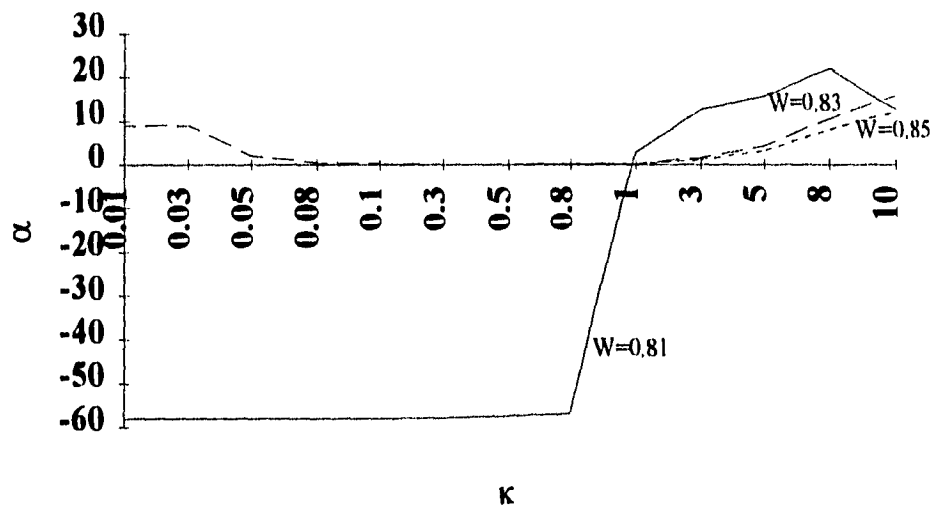


Figura 19. Comportamiento de α para diferentes flujos de calor y un $Ra_{2\phi} = 10$, en el caso de $P_c \neq 0$.

El valor común del parámetro de la curva, $Ra_{2\phi}$, en los tres rangos es de 10. La relación entre Ra y $Ra_{2\phi}$ está dada por la ecuación (77). Solamente se establecieron tres valores para W , ya que para valores mayores el rango de $Ra_{2\phi}$ se reduce demasiado y no se logra una buena comparación de las curvas de comportamiento de α . De acuerdo a la tabla anterior, se observa que para valores de $W > 0.805$, se deben asignar valores pequeños al número de Rayleigh, Ra , por tanto, se realizó el cambio al parámetro $Ra_{2\phi}$. Esto puede estar relacionado con un proceso que posiblemente se pueda presentar en la ebullición de medios porosos al incrementar el flujo de calor aplicado, y que se refiere a la transición de un sistema completamente dominado por líquido a un sistema que paulatinamente va a ser dominado por vapor.

En la figura 19, se observa que a mayor flujo de calor se tiene menor inestabilidad en el caso de números de onda grandes, y en el caso de números de onda pequeños el proceso cambia de inestable a estable con un valor aproximado a cero. En el caso de números de onda medios el comportamiento es inestable, pero con una tendencia a disminuir conforme incrementa el flujo de calor.

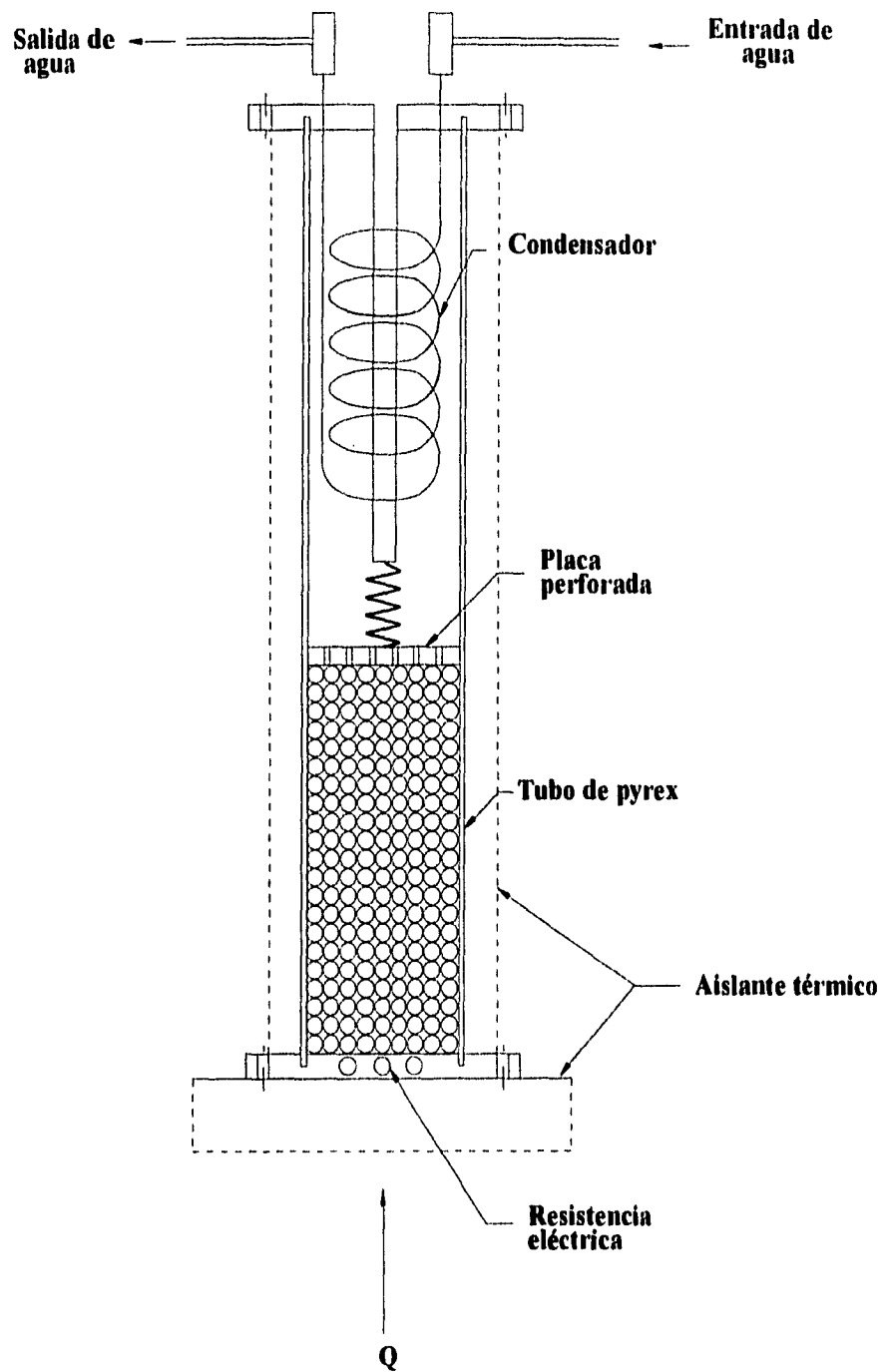
Para el caso de un flujo de calor cerca al valor crítico, $W = 0.81$, el comportamiento empieza muy estable, para números de onda pequeños, pasando por un estado inestable, números de onda medios, y terminando con una tendencia a ser estable para números de onda grandes.

Para el caso de estabilidad neutra, $\alpha = 0$, el valor de $Ra_{2\phi,cr}$ disminuye conforme se incrementa el flujo de calor, este resultado representa una mayor estabilidad del sistema.

4.2.- Resultados experimentales cualitativos.

4.2.1.- Resultados preliminares.

El estudio experimental se llevo a cabo para mostrar aspectos cualitativos del comportamiento de la ebullición en un medio poroso. Para este estudio se construyó un equipo experimental sencillo, el cual está compuesto principalmente por un tubo de pyrex, una placa de aluminio y un serpentín de acero inoxidable, figura 20. En la placa de aluminio, que sirve como base del tubo de pyrex, se tienen dos perforaciones donde se incrustan las resistencias eléctricas que proporcionan la potencia necesaria para provocar la ebullición del fluido que satura el medio poroso, el cual esta contenido dentro del tubo de pyrex. Para mantener la temperatura constante en la placa de aluminio se tiene un controlador electrónico que maneja un rango de temperaturas de 50-500 °C, esto permite realizar pruebas a diferentes temperaturas en la placa de aluminio. El serpentín, en la parte superior del tubo, se utiliza para mantener una temperatura constante en la capa de líquido que se encuentra sobre la cama porosa. La cama porosa se encuentra entre una frontera superior permeable e isotérmica y una frontera inferior impermeable e isotérmica.



Flujo de calor constante

Figura 20. Esquema del equipo experimental usado en el estudio de la ebullición en medios porosos.

Las pruebas se realizaron a tres diferentes temperaturas en la placa de aluminio, estas son: 80 °C, 100 °C y 120 °C. También se utilizaron tres tamaños diferentes de partículas para formar las camas porosas, estos son: 3 mm y 5 mm de canicas de pyrex y 1 mm aprox. de granos de arena. Entonces considerando una cama porosa cilíndrica vertical homogénea los resultados obtenidos fueron:

Caso I: Cama porosa formada por canicas de pyrex de 5 mm.

(1)- Para una temperatura $T = 80$ °C, el modo de transferencia de calor en la cama porosa, así como también, en la capa de líquido es por conducción.

(2)- Para una temperatura $T = 100$ °C, se presentan sitios de nucleación sobre la placa inferior caliente, cuya formación de burbujas provoca los movimientos convectivos en la capa superior de líquido. Se pudo observar que los sitios de nucleación coincidieron con las trayectorias de los movimientos convectivos, esquema de la figura 21.a1. La condensación de las burbujas de vapor se llevó a cabo dentro de la cama porosa, aunque algunas burbujas alcanzaban la capa superior de líquido, pero se condensaban inmediatamente. El nivel de la capa de líquido no sufrió cambios, es decir, no incrementó su nivel, ni tampoco presentó variaciones del mismo, lo que indica que los procesos de evaporación y condensación no se afectan significativamente por la presencia de una matriz porosa, es decir, no existen efectos de capilaridad relevantes. Para este caso, se puede pensar en la formación de una región de dos fases líquido-vapor, que alternativamente aparece y desaparece sin llegar a formarse claramente la estructura de capas. Lo anterior se debe probablemente a los espacios vacíos más grandes, que permiten mayor transferencia de calor entre fases.

(3)- Para una temperatura $T = 120$ °C, el proceso de formación de burbujas es más continua provocando una mayor cantidad de movimientos convectivos y un desplazamiento en el nivel de la capa de líquido, como se ilustra en el esquema de la figura 21.a2. Este desplazamiento se debe a la formación de columnas de burbujas o "bolsas" de vapor sobre la placa caliente que provocan las variaciones en el nivel de la capa de líquido debido a la formación y condensación de las columnas. Se puede decir, para esta temperatura, que los efectos capilares son significativos debido a que las columnas o "bolsas" de vapor ocupan mayor espacio en los huecos de la matriz porosa.

Caso II: Cama porosa formada por canicas de pyrex de 3 mm.

(1)- Para una temperatura $T = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$, se tiene una transferencia de calor por conducción a lo largo de la cama porosa saturada y en la capa de líquido, igual que el caso I.

(2)- Para una temperatura $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, sucede el mismo fenómeno que en la cama porosa del caso I, es decir, se tiene formación de burbujas y movimientos convectivos, esquema de la figura 21.b1, pero ahora se observan pequeñas columnas de burbujas que provoca variaciones en el nivel de la capa de líquido. Lo anterior puede atribuirse a los espacios (huecos) mas pequeños de la matriz porosa que provocan mayor efecto de capilaridad en el proceso de evaporación y condensación.

Cabe mencionar que el estado transitorio para esta prueba se identifica de la forma siguiente: la formación de las burbujas en la placa caliente es paulatina hasta quedar definida una región de sitios de nucleación, provocando casi inmediatamente, pero no al mismo tiempo, los movimientos convectivos en la capa de líquido, los cuales van incrementando también paulatinamente hasta alcanzar el estado permanente, donde los movimientos tienen trayectorias bien definidas en una región que coincide con los sitios de nucleación.

Para el estado permanente, las variaciones del nivel de la capa de líquido se relacionan con la intensidad de los movimientos convectivos, que a su vez dependen de la formación y condensación de las columnas de burbujas.

(3)- Para una temperatura $T = 120\text{ }^{\circ}\text{C}$, la intensidad de formación de burbujas y los movimientos convectivos es mayor, provocando así una formación de columnas de burbujas a lo largo de toda la cama porosa, y por lo tanto, una variación mayor del nivel de la capa de líquido.

En el estado permanente, el nivel de la capa de líquido sufre un incremento de 10 mm a partir del nivel original, como se ilustra en el esquema de la figura 21.b2, que se puede relacionar con la presencia de una capa de vapor sobre la placa caliente, provocando mayor efecto de capilaridad en una región cerca de la capa de vapor.

Comparando los casos I y II, se puede concluir que los efectos de capilaridad son mas significativos en el caso II.

Caso III: Cama porosa formada por granos de arena de 1 mm.

(1)- Para una temperatura $T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$, el comportamiento es igual a los casos I y II.

(2)- Para una temperatura $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, el proceso se caracteriza porque inmediatamente el nivel de la capa superior del líquido se va incrementando sin mostrar movimientos convectivos. Este incremento continua hasta que logra alcanzar 3 cm del nivel original. Cuando se alcanza el incremento final se presentan movimientos convectivos en la capa de líquido que están asociados con las variaciones del nivel, es decir, una atenuación en el movimiento provoca un descenso en el nivel. Este fenómeno de las variaciones puede asociarse con la formación y condensación de las columnas de burbujas que se observaron para el caso II, para esta prueba no fue posible observar a simple vista. La amplitud de las variaciones son mayores que las mostradas en el caso II, esto puede atribuirse al mayor efecto de capilaridad que tiene la cama porosa sobre los procesos de evaporación y condensación.

El fenómeno de las variaciones del nivel puede compararse con el movimiento del desplazamiento tipo "pistón", ya que el ascenso y descenso del nivel se debe a un empuje que surge de la parte inferior de la cama porosa. Cabe mencionar que el estado transitorio del fenómeno para esta prueba se caracteriza por la ausencia de movimientos convectivos, los cuales posteriormente acompañan al fenómeno.

(3)- Para una temperatura $T = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, el nivel de la capa de líquido sufre otro incremento hasta alcanzar un valor de 5 cm arriba del nivel original. Para ésta temperatura el proceso se caracteriza por el incremento del nivel y por los movimientos convectivos, ya que las variaciones del nivel prácticamente desaparecen. Para ésta prueba se puede pensar en la presencia de una capa de vapor permanente sobre la placa caliente que no sufre condensación, acentuando el efecto de capilaridad en una región próxima a la capa de vapor.

Un aspecto importante para los tres casos es el comportamiento unidimensional, en la dirección vertical, del proceso de formación de columnas de burbujas y de los movimientos convectivos en la capa de líquido.

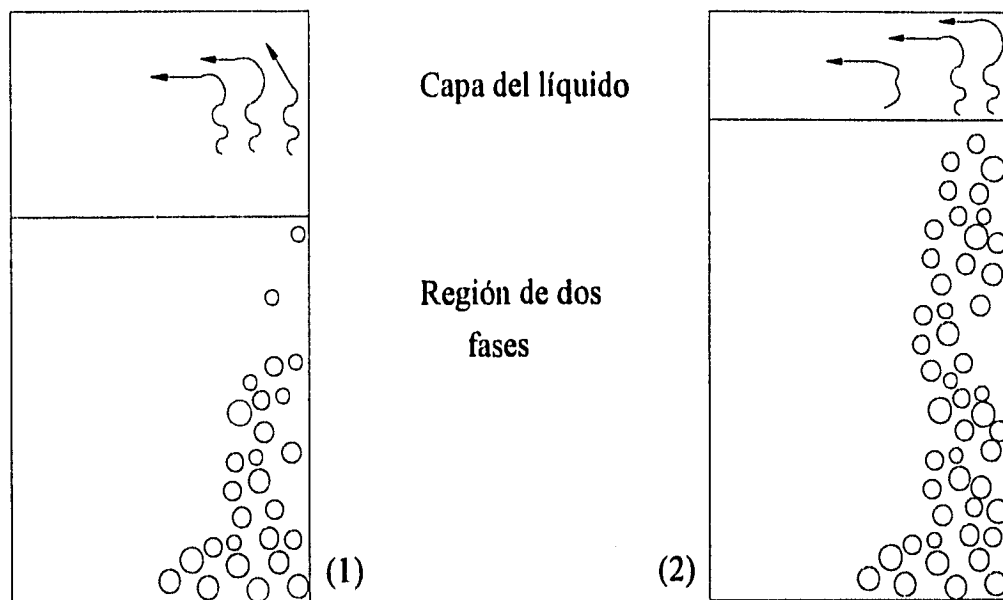


Figura 21.a. Proceso de ebullición en una cama porosa formada por canicas de vidrio de 5 mm.

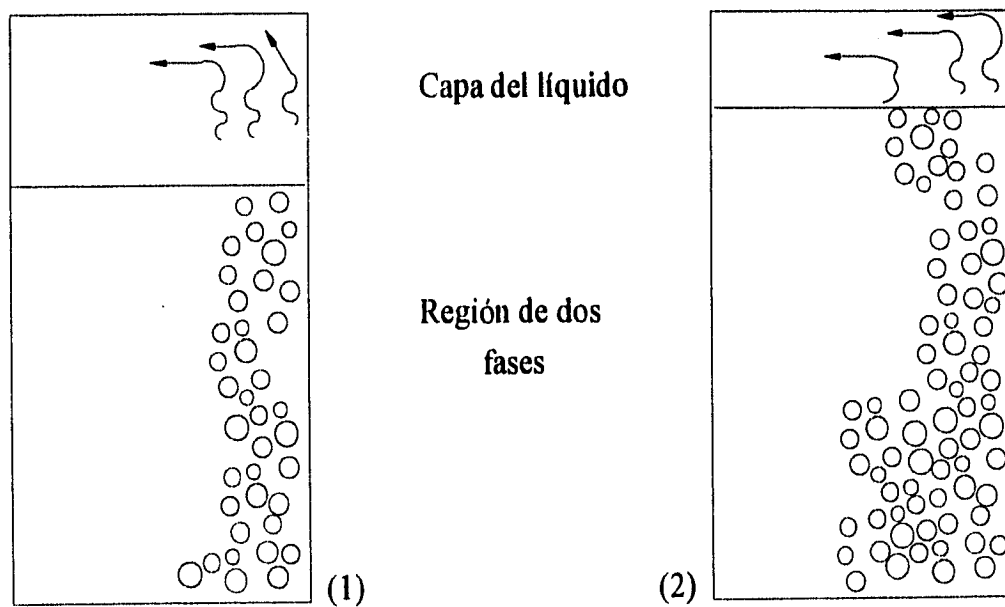


Figura 21.b. Proceso de ebullición en una cama porosa formada por canicas de vidrio de 3 mm.

Con este equipo experimental también se hicieron mediciones de temperatura a lo largo del eje de simetría de la cama porosa. Los valores de temperatura a lo largo del eje, para las tres camas porosas que se formaron, se tomaron para diferentes temperaturas en la placa inferior de aluminio, de 100 y 120 °C, figuras 22 y 23, respectivamente. En las figuras se presenta el comportamiento de la temperatura a lo largo del eje de simetría, tomando como punto inicial la placa inferior de aluminio y como punto final la capa superior de líquido que cubre a la cama porosa. Este comportamiento depende de la temperatura que se aplica en la placa de aluminio, en el caso de 100 °C, figura 22, se presentan variaciones de temperatura a lo largo del eje para las camas formadas por partículas de 5 y 3 mm, estas variaciones pueden ser por la continua formación y condensación de las burbujas de vapor dentro de la cama porosa. En cambio, para la cama porosa formada por los granos de arena (1 mm aproximadamente) las mediciones de temperatura muestran una región isotérmica, más acentuada para una temperatura de 120 °C en la placa inferior, figura 23, esta región isotérmica también fue identificada por otros autores [6, 10, 14, 17, 19, 21 y 22].

Las mediciones de temperatura a lo largo del eje de simetría de la cama porosa se llevaron a cabo para identificar la región de dos fases isotérmica, y poder establecer la estructura de capas en el problema.

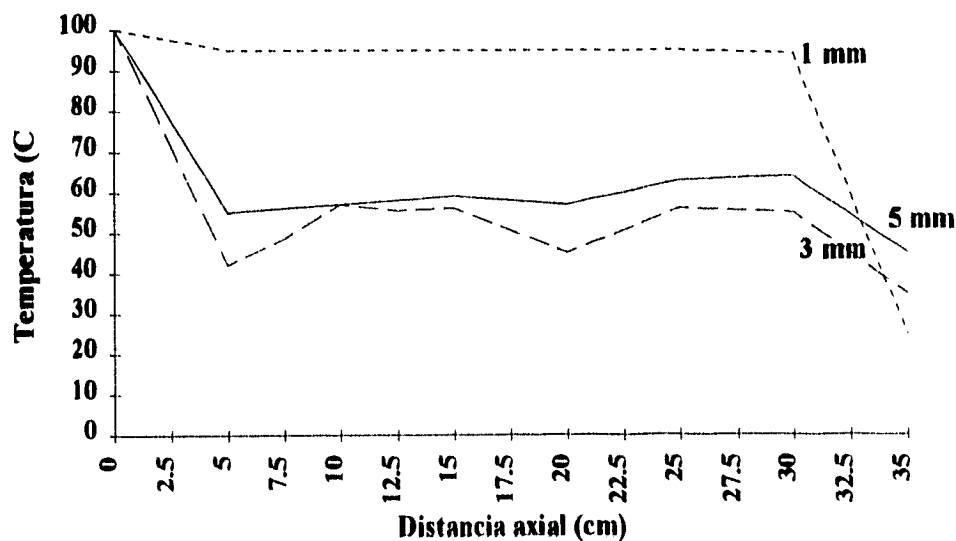


Figura 22. Comportamiento de la temperatura a lo largo del eje de simetría de las tres camas porosas, para una temperatura en la placa inferior de 100 °C.

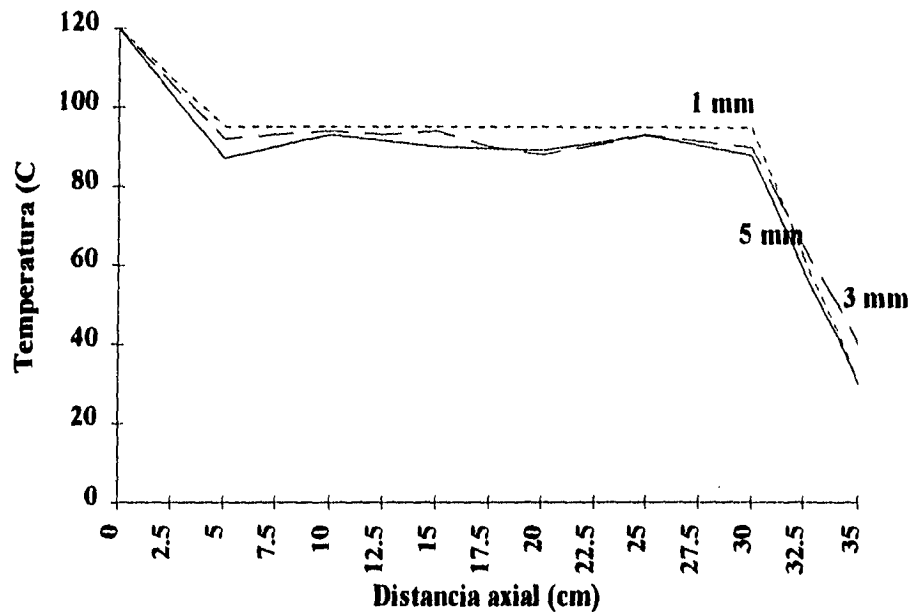


Figura 23. Comportamiento de la temperatura a lo largo del eje de simetría de las tres camas porosas, para una temperatura en la placa inferior de 120 °C.

4.2.2.- Resultados finales.

El equipo utilizado para realizar las pruebas consta principalmente de un tubo de pyrex de 50 cm. de longitud y 6.6 cm. de diámetro interior. El tubo se monta sobre una placa cuadrada de aluminio de 12 cm. por lado y 1.27 cm (1/2 pulg.) de espesor. En esta placa se tiene dos orificios donde se incrustan dos resistencias eléctricas, que proporcionan la potencia a la cama porosa. El equipo se sella en la parte superior con una placa de acero inoxidable que tiene montado un serpentín, el cual se utiliza para enfriar una capa de líquido que se encuentra sobre la cama porosa, ver esquema de la figura 20 y fotografías. Las pruebas se llevaron a cabo con una cama porosa de 33 cm. de altura que se formó con canicas de pyrex o granos de arena. En cada prueba se midieron temperaturas a lo largo del eje de simetría de la cama porosa (se colocaron seis termopares dentro de la cama porosa) empezando en la placa inferior caliente, T_p , y terminando en la capa superior de líquido, T_0 , y se grabó el evento con una videocámara. A cada cama porosa se le aplicaron diferentes flujos de calor en la placa inferior. La variación del flujo de calor se logró por medio de un autotransformador variable y el valor del flujo se determinó al medir voltaje y corriente.

Se realizaron pruebas en camas porosas formadas por canicas de pyrex de 5 mm, 3 mm o granos de arena de 1mm (aprox.). Para los dos primeros casos se aplicaron flujos de calor de 1.08, 3.318 y 10.58 kW/m^2 , en el caso de granos de arena se aplicaron 1.08, 3.318 y 6.77 kW/m^2 , esta última potencia fue la máxima para la cama porosa formada

por granos de arena, ya que a potencias mayores se presentó el problema de cementación sobre la placa caliente, provocando un incremento considerable en la temperatura de la placa.

Para cada una de las camas porosas se registraron los perfiles de temperatura para los diferentes flujos de calor. Con estos perfiles de temperatura se identificaron los distintos regímenes de transferencia de calor que se presentan en el sistema, determinándose valores para los parámetros importantes como el flujo de calor adimensional, Nu (Q_b) o W , y el número de Rayleigh, Ra . Estos parámetros se definen con las siguientes ecuaciones:

Flujo de calor adimensional (Q_b o Nu) definido por Bau y Torrance [6, 10, 13]

$$Nu = \frac{q_b H}{k_e (T_p - T_o)} \quad (121)$$

este parámetro adimensional relaciona el flujo de calor aplicado a la cama porosa entre el flujo de calor que se tiene en un régimen conductivo. Para $Nu = 1$ se tiene un régimen conductivo y para $Nu > 1$ se puede presentar un régimen convectivo o de ebullición.

Para camas porosas contenidas en tubos verticales el número de Rayleigh está definido por [13]:

$$Ra = \frac{\beta_l g K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) D^2}{v_l \left(\frac{k_e}{\rho_l c p_l} \right)} \quad (122)$$

donde $(\partial T / \partial z)$ es el gradiente de temperatura vertical y D es el diámetro del cilindro.

Por otra parte, en este trabajo se definió un flujo de calor adimensional, W , para introducir los efectos capilares en el análisis de transferencia de calor, que fue utilizado por Bau y Torrance [6, 14] para determinar el valor de la saturación en la región de dos fases y por Udell [21, 22] para encontrar el flujo de calor crítico, W_{cr} , que permite considerar la formación de la región de dos fases, este flujo de calor se define como:

$$W = \frac{Nu}{\bar{\mu} \bar{\rho} \lambda Ra_{2\phi}} \quad (123)$$

donde el número de Rayleigh, $Ra_{2\phi}$, se determinó al utilizar la relación γ definida por la ecuación (77). En el caso de tubos verticales ésta relación se define como

$$\gamma = \frac{\beta_l (T_p - T_o) \left(\frac{D}{H} \right)^2}{(1 - \bar{\rho})} = \frac{Ra}{Ra_{2\phi}} \quad (124)$$

donde el valor de la relación es igual a la que define Ramesh y Torrance [10] para una razón de aspecto $(D/H) = 1$ y $T_p = T_{sal}$. Para el estudio experimental el valor de $\gamma = 0.052$

En este trabajo experimental se usaron las siguientes propiedades físicas del fluido para una temperatura de 98° C y presión atmosférica, los valores son:

$$\beta_l = 7.1 \times 10^{-4} \text{ 1/K}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \nu_l = 2.95 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \rho_l = 958.4 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_v = 0.596 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 4.216 \times 10^3 \text{ J/kg-K}, \quad \mu_p = 0.0146 \text{ y } \lambda = 7.3738.$$

La permeabilidad de la cama porosa, K , se determinó con la ecuación de Kozeny-Carman [13], que se define como

$$K = \frac{d^2 \phi^3}{180 (1-\phi)^2} \tag{125}$$

donde d es el diámetro de la partícula y ϕ la porosidad de la cama, la cual se determinó como la relación del volumen de los poros entre el volumen total.

La conductividad térmica, k_e , se determinó al considerar el perfil de temperaturas que indica un régimen conductivo en la cama porosa, aplicando posteriormente la ley de Fourier, esto es,

$$k_e = \frac{q_b H}{\Delta T} \tag{126}$$

donde H es la altura de la cama porosa y ΔT es la diferencia de temperaturas a través de la cama porosa, para el régimen conductivo.

En la tabla 1 se presentan las diferentes propiedades de las camas porosas utilizadas en el experimento. La permeabilidad y conductividad térmica efectiva se calcularon con las ecuaciones (125) y (126), respectivamente.

Tabla 1. Propiedades de las camas porosas.

Material	Diámetro mm	Porosidad ϕ	Permeabilidad, m^2	Cond. térmica k_e (W/m-K)
Canicas de pyrex	5	0.37	1.3×10^{-8}	3.10
Canicas de pyrex	3	0.35	6.6×10^{-9}	3.80
Granos de arena	1	0.28	2.4×10^{-10}	4.88

Los resultados obtenidos para los parámetros definidos por las ecuaciones (121) y (122) para Nu y Ra, respectivamente, la ecuación (124) para $Ra_{2\phi}$ y la ecuación (123) para W, son:

Tabla 2. Resultados para una cama porosa formada por canicas de pyrex de 5 mm.

q_b , kW/m ²	Nu	Ra	$Ra_{2\phi}$	W
1.08	1.75	160.016	3433.82	4.73×10^{-3}
3.318	6.0	271.974	6601.31	8.43×10^{-3}
10.58	25.83	267.216	8647.76	0.011

Tabla 3. Resultados para una cama porosa formada por canicas de pyrex de 3 mm.

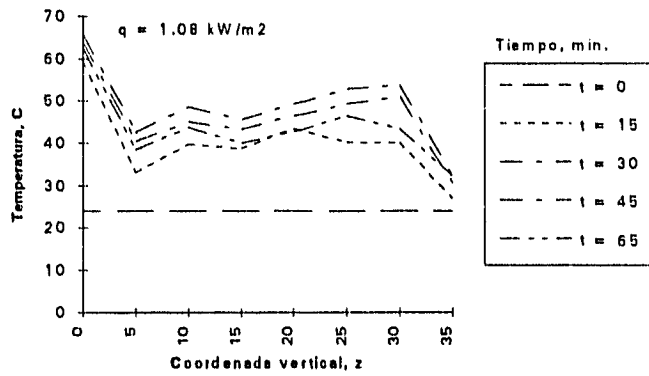
q_b , kW/m ²	Nu	Ra	$Ra_{2\phi}$	W
1.08	1.33	111.83	2245.74	5.5×10^{-3}
3.318	4.5	151.02	3326.60	0.0215
10.58	19.18	136.21	4006.23	0.0245

Tabla 4. Resultados para una cama porosa formada por granos de arena de 1 mm.

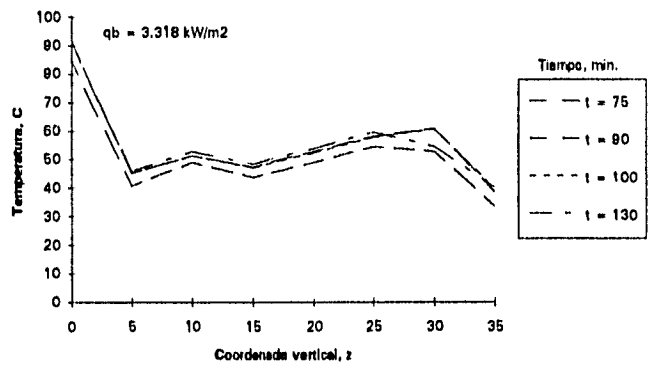
q_b , kW/m ²	Nu	Ra	$Ra_{2\phi}$	W
1.08	1.03	4.80	96	0.099
3.318	3.48	4.66	93.20	0.346
6.77	8.50	4.44	94.5	0.835

De acuerdo a los resultados mostrados en las tablas se puede concluir que para que exista una región isotérmica de dos fases, es necesario que la cama porosa tenga baja permeabilidad y que el flujo de calor aplicado tenga un valor que permita alcanzar la temperatura de saturación en la placa caliente.

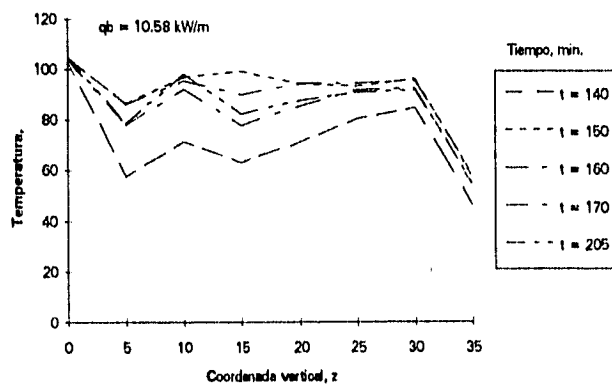
Los perfiles de temperatura permiten identificar los diferentes regímenes de transferencia de calor que se presentan y la relación que tienen con las características de la cama porosa.



(a)

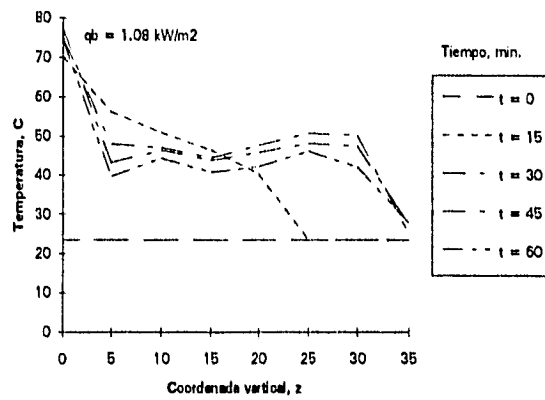


(b)

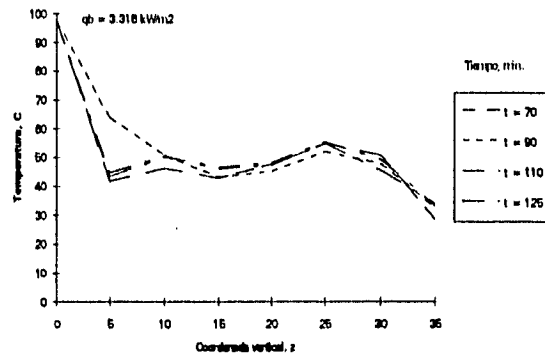


(c)

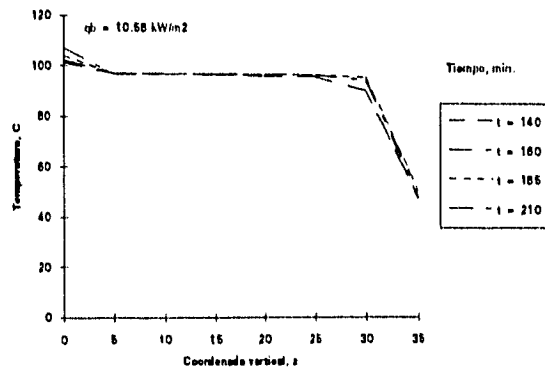
Figura 24. Perfiles de temperatura de una cama porosa formada por canicas de pyrex de 5 mm y con flujos de calor de (a) 1.08, (b) 3.318 y (c) 10.58 kW/m^2 .



(a)

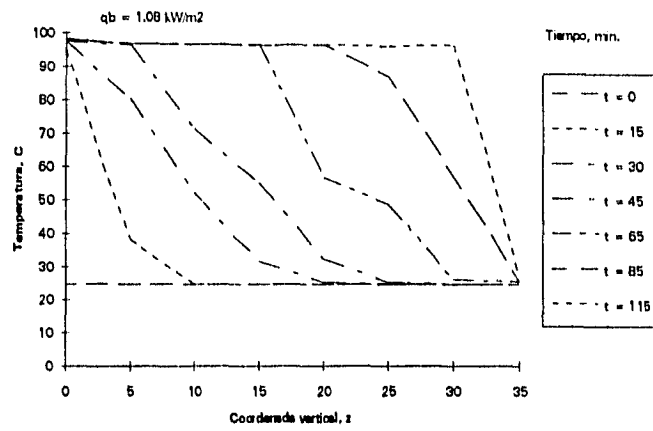


(b)

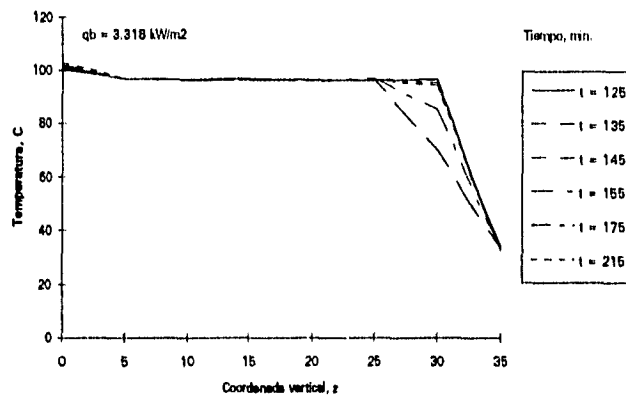


(c)

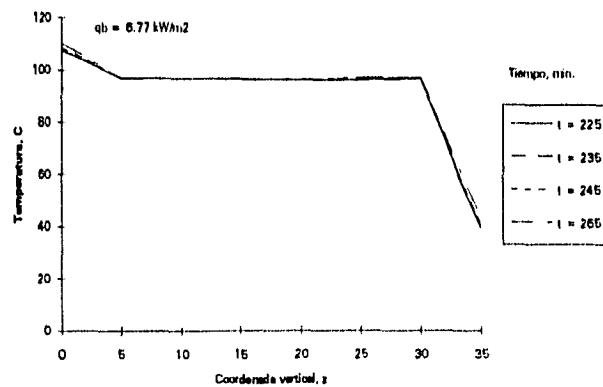
Figura 25. Perfiles de temperatura de una cama porosa formada por canicas de pyrex de 3 mm y flujos de calor de (a) 1.08, (b) 3.318 y (c) 10.58 kW/m^2 .



(a)



(b)



(c)

Figura 26. Perfiles de temperatura de una cama porosa formada por granos de arena de 1 mm y flujo de calor de (a) 1.08, (b) 3.318 y (c) 6.77 kW/m².

En la figura 24 se observa que el principal mecanismo de transferencia de calor que se presenta es por convección, para los tres flujos de calor aplicados, y por ebullición, figura 24c, que se determina por la formación de burbujas sobre la placa caliente. Existen procesos de ebullición y condensación dentro de la cama porosa, pero no se identifica una región isotérmica de dos fases. El nivel de agua de la capa superior de líquido sufre un incremento, pero no presenta fluctuaciones considerables, solamente movimientos convectivos muy intensos. Se observa la formación y condensación de una columna de burbujas (aproximadamente un tercio de la altura total de la cama porosa) dentro de la cama porosa.

En la cama porosa de la figura 25, se observan los tres mecanismos de transferencia de calor; por conducción, figura 25a, aunque en un período corto (15 min.) al inicio de la prueba, por convección, figuras 25a y 25b, donde el movimiento convectivo en la cama porosa se presenta antes de la formación de burbujas en la placa caliente y por ebullición, figura 25c, donde se observa la presencia de una región isotérmica que indica la formación de la región de dos fases. Cabe mencionar que para el último flujo de calor aplicado, figura 25c, se tienen variaciones del nivel de la capa superior de agua que dependen de la formación y condensación de las columnas de burbujas que se presentan a lo largo de toda la cama porosa. El incremento de nivel se relaciona con la formación de la columna de burbujas y una disminución con la condensación de la columna. El proceso es continuo y se asemeja a un "tren de formación de burbujas" a lo largo de la cama porosa que inicia en la placa caliente y termina en la capa superior de líquido.

En la última cama porosa, figura 26, que se utiliza en el experimento, se observa que existen principalmente dos mecanismos de transferencia de calor; por conducción, figura 26a, que tiene un periodo de permanencia mayor, 85 min. al inicio de la prueba, y por ebullición, que se identifica por tener una temperatura constante, figuras 26a, 26b y 26c, y se presenta para los tres flujos de calor aplicados. La característica del proceso es que existe una transición directa de conducción a ebullición. La convección se presenta al momento de iniciar la ebullición, figura 26b, pero los movimientos que se observan en la capa superior de líquido no son intensos. El proceso de ebullición se acompaña con un incremento considerable del nivel de agua y con movimientos convectivos en la capa de líquido, pero no presenta variaciones del nivel de agua. Entonces se puede establecer que existe la región isotérmica de dos fases cubierta por una capa de líquido con movimientos convectivos.

Como se puede observar, la permeabilidad de la cama porosa tiene influencia en la formación de los distintos regímenes de transferencia de calor, ya que para una cama porosa de permeabilidad alta (formada por canicas de pyrex de 5 mm y $K = 1.3 \times 10^{-8} \text{ m}^2$) se tiene preferentemente un régimen convectivo. El régimen conductivo tiene un período corto de permanencia en la cama y el régimen de ebullición se identifica solamente por la formación de burbujas sobre la placa caliente, pero no existe la formación de una región isotérmica de dos fases, figura 24.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Para una cama porosa formada por canicas de pyrex de 3mm, de permeabilidad media ($K = 6.6 \times 10^{-9} \text{ m}^2$), figura 25, se observan los tres regímenes de transferencia de calor; conductivo, convectivo y de ebullición, este último se identifica como una ebullición oscilatoria, ya que el nivel de la capa superior de líquido presenta fluctuaciones.

Finalmente para una cama porosa formada por granos de arena de 1 mm, de permeabilidad baja ($K = 2.4 \times 10^{-10} \text{ m}^2$), el régimen conductivo tiene mayor período de duración en la cama y existe una transición directa de un régimen conductivo a un régimen de ebullición, que se identifica por la formación de una región isotérmica de dos fases, figura 26.

Dentro del estudio experimental se tomaron fotografías que muestran el equipo y las distintas camas porosas formadas, así como algunas características de los procesos que se presentaron. Las figuras 27a y 27b muestran los componentes del equipo experimental, que son: el tubo de pyrex montado sobre la placa de aluminio y cubierto con un aislante térmico (lana cerámica), el serpentín de enfriamiento conectado a la alimentación de agua, el registrador de temperaturas que consta de 12 canales y el soporte universal para sujetar el tubo de pyrex. En la figura 27a se pueden observar los termopares colocados a lo largo del tubo de pyrex (en total fueron 8 termopares) y la figura 27b muestra el aislamiento térmico tanto en el tubo de pyrex como en la base que lo sostiene.

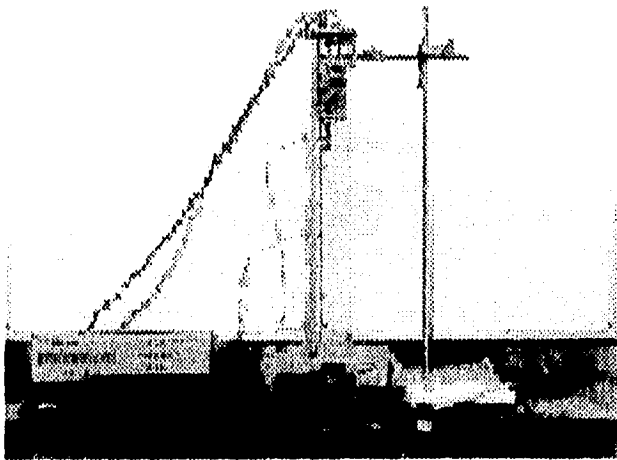


Figura 27a. Componentes del equipo experimental utilizado.

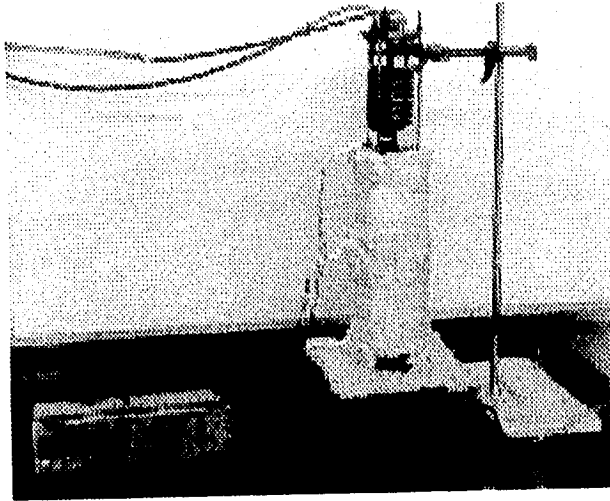


Figura 27b. Ilustración del equipo para la realización de las pruebas.

La figura 28 muestra el tamaño de las partículas que se usaron para formar las distintas camas porosas, estas son: canicas de pyrex de 5 y 3 mm de diámetro y granos de arena (parte superior de la ilustración) de 1 mm de diámetro.



Figura 28. Tamaño de las partículas usadas para formar las camas porosas.

En la figura 29 se puede observar la posición de los termopares colocados a lo largo del tubo de pyrex, de los cuales seis quedan dentro de la cama porosa, uno en la placa inferior de aluminio y el otro en la capa superior de agua.

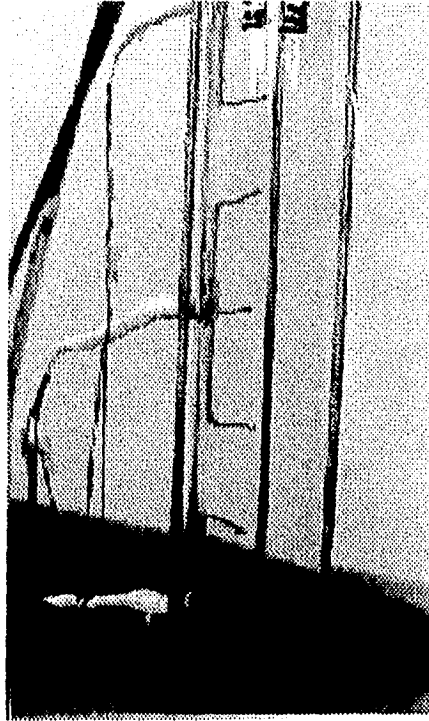


Figura 29. Posición de los termopares a lo largo del tubo de pyrex.

Las figuras 30a, 30b y 30c ilustran las distintas camas porosas formadas para cada prueba. Como se puede observar, solamente las camas formadas por las canicas de pyrex permiten tener un poco de visión sobre el proceso que se está presentando en cada prueba, esto es, permite observar la formación de burbujas sobre los sitios de nucleación, así como el movimiento de las burbujas a lo largo de la cama porosa. En el caso de la cama porosa formada por granos de arena la visión se reduce considerablemente.

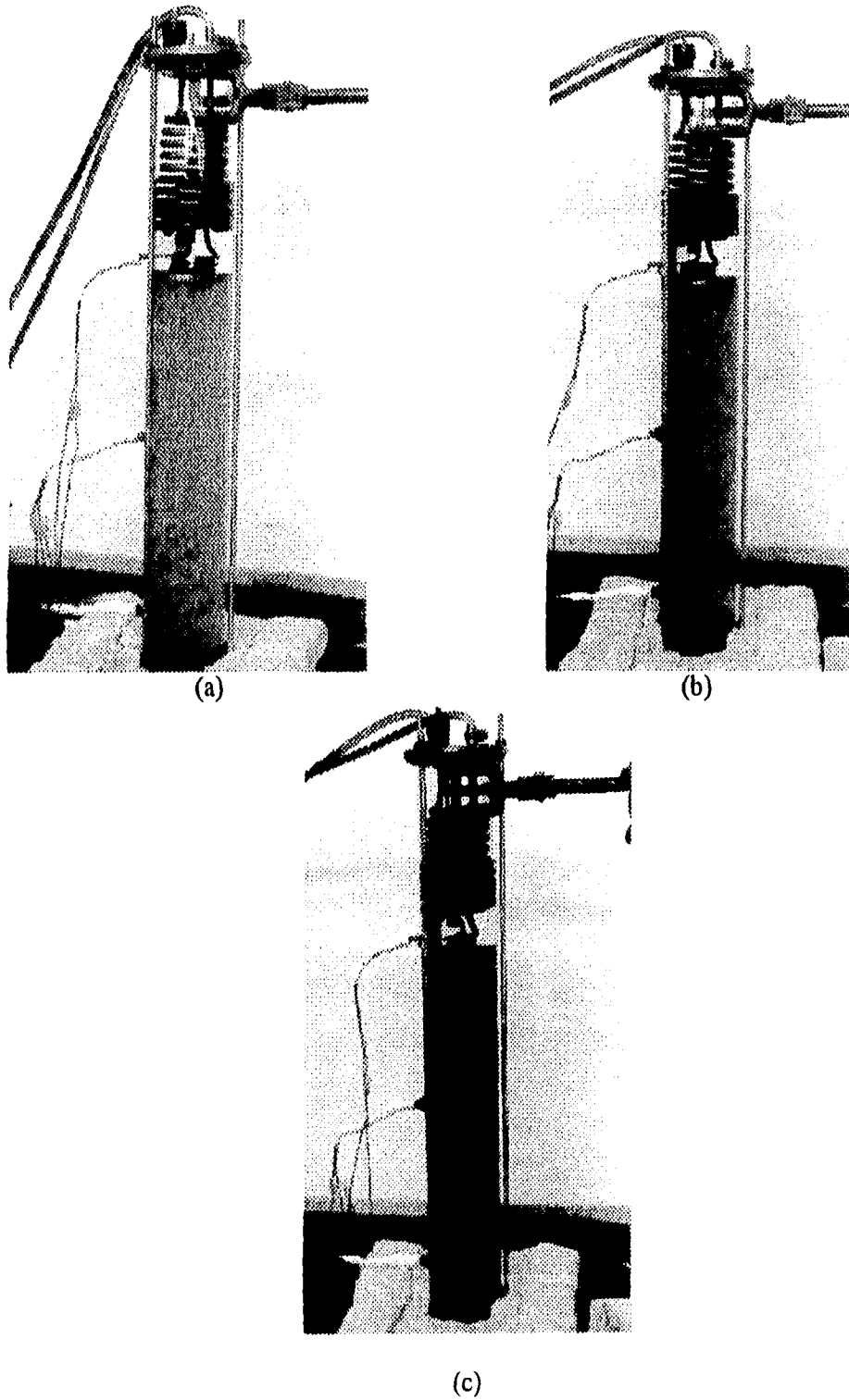


Figura 30. Camas porosas formadas por : (a) canicas de pyrex de 5 mm, (b) canicas de pyrex de 3 mm y (c) granos de arena de 1 mm.

Por último, las figuras 31 y 32 muestran el incremento que tiene el nivel del agua de la capa superior, para las camas formadas por canicas de pyrex de 5 mm y por granos de arena de 1 mm., respectivamente. Este incremento de nivel se puede interpretar como un incremento del volumen del fluido contenido en la cama porosa. Para el caso de una cama formada por granos de arena el incremento es considerable ya que alcanza hasta 8 cm. de su nivel original, que puede estar relacionado con la presencia de una capa de vapor sobre la superficie caliente, como se mencionó anteriormente, o el incremento del volumen específico del líquido con la temperatura. En el caso de la cama formada por canicas de pyrex de 5 mm el incremento es menor.

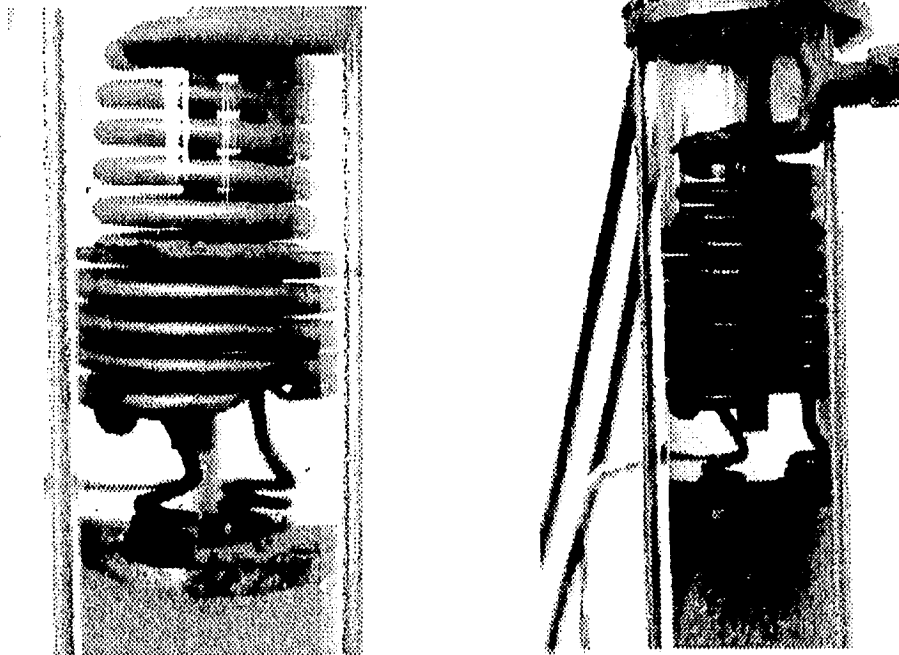


Figura 31. Incremento del nivel de la capa superior de agua en una cama porosa formada por canicas de pyrex de 5 mm.

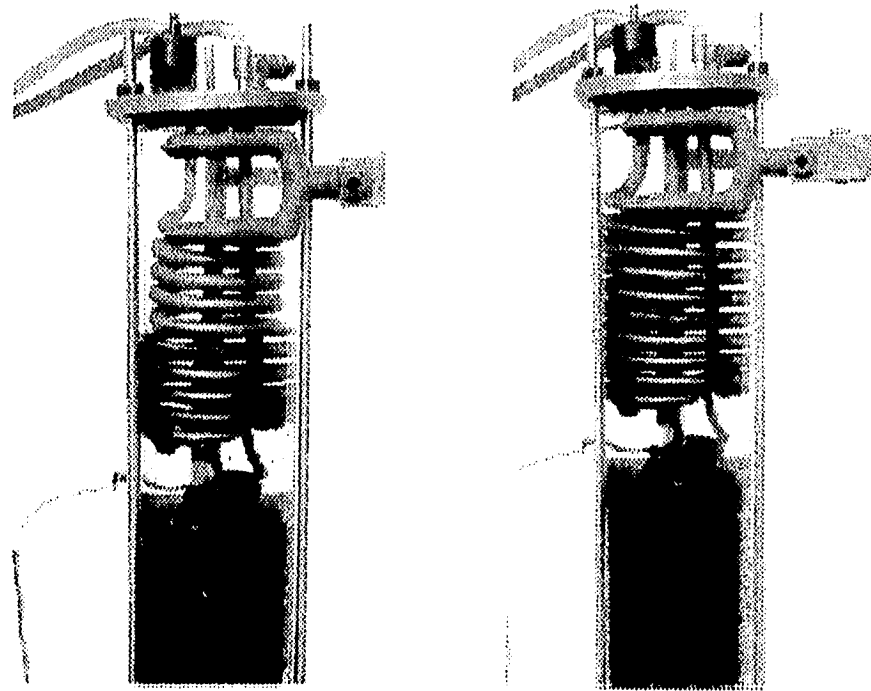


Figura 32. Incremento del nivel de la capa superior de agua en una cama porosa formada por granos de arena de 1 mm.

Las conclusiones que se pueden establecer de este estudio experimental, son:

- 1.- El experimento muestra claramente que la permeabilidad tiene una gran influencia sobre el comportamiento de la transferencia de calor en la cama porosa, esto significa que a mayor permeabilidad la transferencia de calor a lo largo de la cama porosa esta gobernada por convección. En el caso de menor permeabilidad se tiene una transición de conducción a ebullición, lo cual implica un mayor almacenamiento de calor en la cama porosa.
- 2.- Los valores obtenidos para el flujo de calor definido por W , que involucra los efectos capilares, indican que es necesario alcanzar un valor mínimo para que se forme la región isotérmica de dos fases, lo cual es más factible en medios porosos de baja permeabilidad, donde los efectos capilares son significativos. También se puede deducir que el número de Rayleigh, Ra , toma valores más pequeños que los que definió Ramesh y Torrance [10], coincidiendo con los valores asignados en el análisis de estabilidad lineal realizado en este trabajo, para el caso de $P_c \neq 0$.
- 3.- De acuerdo al comportamiento de temperatura mostrado por la cama porosa formada por granos de arena de 1 mm, se puede establecer que el sistema de menor permeabilidad muestra un comportamiento más estable, esto es, no presenta fluctuaciones del nivel de agua y, por lo tanto, no se tienen variaciones de temperatura en

la región de líquido. En cambio el sistema de mayor permeabilidad, cama formada por canicas de pyrex de 5 mm o 3 mm, se caracterizan por las fluctuaciones del nivel de agua.

4.- Es pertinente considerar el cambio del número de Rayleigh ($Ra_{2\phi}$ por Ra) en el caso de los sistemas que contiene mayor cantidad de vapor en la región de dos fases, ya que esto permite establecer el comportamiento de la ebullición en medios porosos de baja permeabilidad expuestos a flujos de calor altos. Para estos sistemas los efectos capilares son considerables.

5.- El sistema sufre mayor expansión de volumen (incremento del nivel de agua) en medios porosos de menor permeabilidad. Esto se puede relacionar con el tamaño de los espacios vacíos, los cuales presentan mayor resistencia al paso del flujo de cada fase provocando un mayor efecto capilar y una menor saturación de líquido en la región de dos fases.

CAPÍTULO 5

Conclusiones.

Con el análisis de estabilidad lineal de la ebullición en medios porosos donde los efectos capilares son considerados, se puede establecer que los parámetros importantes son: el flujo de calor aplicado y el número de Rayleigh. El primero determina la altura de la región de dos fases y define, en conjunto con el efecto capilar, si se tiene un sistema dominado por líquido o un sistema paulatinamente dominado por vapor. Con el segundo se determina cuáles son los efectos importantes en el comportamiento convectivo de las dos regiones que componen la estructura de capas. Un aspecto importante al introducir el efecto capilar en el estudio de la ebullición, es poder establecer una relación entre las propiedades características del medio poroso, permeabilidad y porosidad, y las propiedades importantes en el proceso de ebullición como son: la presión de cada fase y la saturación del líquido. En el análisis de estabilidad este efecto es más importante al incrementar la cantidad de calor, ya que el proceso tiende a ser más estable debido a que la presión capilar se incrementa cuando la saturación disminuye, originando que disminuya el movimiento de la fase líquida en la región de dos fases, así como también, en la región del líquido. También se puede establecer en este análisis, que un sistema inicialmente dominado por líquido, donde la movilidad es mayor, puede cambiarse a un sistema dominado por vapor, teniendo una menor movilidad, al considerar el efecto capilar. Este fenómeno no ocurre para el caso donde la presión capilar se desprecia, como se puede observar en la figura 14, donde a mayor flujo de calor se tiene mayor inestabilidad, sobre todo para números de Rayleigh altos.

Del estudio experimental cualitativo se puede establecer que a menor permeabilidad del medio, más significativos son los efectos capilares, con una gran influencia sobre los procesos de evaporación y condensación. En este experimento se observó que para temperaturas iguales o mayores a 100 °C se presenta una expansión de volumen del fluido contenido en la cama porosa, haciéndose más notoria la expansión para medios de baja permeabilidad. Otro aspecto importante relacionado con lo anterior es el desplazamiento tipo "pistón" que se presenta y que tiene un movimiento totalmente unidimensional.

Finalmente se puede concluir que el efecto capilar sobre la ebullición en medios porosos tiene mayor influencia en el movimiento de cada una de las fases que componen al fluido, ya que a menor permeabilidad más resistencia al flujo, por lo tanto, se tiene una mayor difusión de calor en el medio poroso saturado. Esto se puede establecer de acuerdo a los rangos del número de Rayleigh, $Ra_{2\phi}$, que se determinaron al incrementar el flujo de calor.

Entonces, de acuerdo a lo mencionado anteriormente, el algoritmo de cálculo desarrollado en este trabajo permite establecer que, la estructura de capas formada por una región isotérmica de dos fases que está cubierta por una región de líquido es más estable conforme se incrementa el flujo de calor aplicado en la parte inferior, ya que el efecto de la presión capilar es mayor debido a la disminución de la saturación del líquido en la región isotérmica, acentuándose más el efecto conforme se tenga menor permeabilidad del medio poroso.

Es conveniente mencionar que el trabajo de investigación realizado, solamente proporciona una parte del conocimiento que debe tenerse en el estudio del efecto capilar sobre la estabilidad de la ebullición en medios porosos, por tanto, se presentan algunas sugerencias para trabajos a futuro:

- 1.- Determinar una relación entre la presión capilar y la saturación para el modelo propuesto, así como también, las funciones de las permeabilidades relativas, ya que en este estudio se tomaron de la literatura existente, Wang [34], y no muestran realmente el comportamiento.
- 2.- Establecer una cama porosa heterogénea donde la permeabilidad sea variable con respecto a la coordenada espacial. Esto permitirá aproximar más a la geometría real de un medio poroso.
- 3.- Considerar un análisis de estabilidad no-lineal para determinar, posiblemente, diferentes modos convectivos, donde la convección dependa de las condiciones iniciales, ya que con el análisis de estabilidad lineal se obtienen modos convectivos en estado permanente.

Referencias y bibliografía.

- 1.- Bear, J., Dynamics of fluids in porous media, Dover Publications Inc., New York, 1988.
- 2.- Whitaker, S. , " Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media : a theory of drying ", in *Advances in Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 119-203, Academic Press, New York, 1977.
- 3.- Cheng, P. , " Heat transfer in geothermal systems ", in *Advances in Heat Transfer*, Vol.14, Ed. by T.F. Irvine Jr. and J.P. Hartnett, pp. 1-105, Academic Press, New York, 1978.
- 4.- Faust, C.R., J.W. Mercer, " Geothermal reservoir simulation, 1. Mathematical models for liquid and vapor dominated hydrothermal systems ", *Water Resources Research*, Vol. 15, No.1, 1979.
- 5.- Schubert, G. y J.M. Strauss, " Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal systems ", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 85, pp. 6505-6512, 1980.
- 6.- Torrance, K., " Boiling in porous media ", *ASME/JSME Thermal Eng. Joint Conf. Pro.*, Vol. 2, pp. 593-606, 1983.
- 7.- Nasrallah, S.B. y P. Perre, " Detailed study of a model of heat and mass transfer during convective drying of porous media ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, No. 5, pp. 957-967, 1988.
- 8.- Shonnard, D.R. y S. Whitaker, " The effective thermal conductivity for a point-contact porous medium : an experimental study ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, pp. 503-512, 1989.
- 9.- Vafai, K, H.C. Tien, " A numerical investigation of phase change effects in porous materials ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 32 No. 2, pp. 1261-1277, 1989.
- 10.- Ramesh, P.S. y K.E. Torrance, " Stability of boiling in porous media ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No.9, pp. 1895-1908, 1990.
- 11.- Grangeot, G., M. Quintard y M. Combarous, " Heat transfer in packed beds at both pore scale and macroscopic level ", 9th. IHTC, Jerusalem, 1990.

- 12.- Eastwood, J.E. y T.J.T. Spanos, " Stability of a stationary steam-water front in a porous media ", *Transport in Porous Media*, Vol. 14, pp. 1-21, 1994.
- 13.- Bau, H.H. y K.E. Torrance, " Low Rayleigh number thermal convection in a vertical cylinder filled with porous materials and heated from below ", *Journal of Heat Transfer, Transc. of ASME*, Vol. 104, 1982.
- 14.- Bau, H.H. y K.E. Torrance, " Boiling in low-permeability porous materials ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 25, No. 1, pp. 45-55, 1982.
- 15.- Bau, H.H. y K.E. Torrance, " Thermal convection and boiling in a porous medium ", *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol. 9, pp. 431-441, 1982.
- 16.- Bau, H.H. y K.E. Torrance, " Thermal convection and boiling in a porous medium ", 81-WA/HT-18, ASME, 1982.
- 17.- Torrance, K.E., " Phase-change heat transfer in porous media ", 8th. IHTC, Vol. 1, 1986.
- 18.- Cornwell, K, B.G. Nair y T.D. Patten, " Observation of boiling in porous media ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 236-238, 1976.
- 19.- Sondergeld, C.H. y D.L. Turcotte, " An experimental study of two-phase convection in a porous medium with applications to geological problems ", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 82, No. 14, 1977.
- 20.- Ramesh, P.S., " A one-dimensional study of boiling heat transfer in low-permeability, water-saturated porous media ", M.S. Thesis, Cornell University, Ithaca, N. Y., 1986.
- 21.- Udell, K.S., " Heat transfer in porous media heated from above with evaporation, condensation and capillarity effects ", *Journal of Heat Transfer, ASME*, Vol. 105, 1983.
- 22.- Udell, K.S., " Heat transfer in porous media considering phase change and capillarity- the heat pipe effect ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, No. 2, pp. 485-495, 1985.
- 23.- Udell, K.S., " The thermodynamics of evaporation and condensation in porous media ", SPE-10779, AIME, 1982.
- 24.- Smirnov, G.F., " Approximate theory of heat transfer with boiling on surfaces covered with capillarity-porous structures ", *Teploenergetika*, pp. 55-58, 1977 (24).
- 25.- Hardee, H.C. y R.H. Nilson, " Natural convection in porous media with heat generation ", *Science and Engineering*, Vol. 63, pp. 119-132, 1977.

- 26.- Faust, C.R. y J.W. Mercer, " Geothermal reservoir simulations, numerical solution techniques for liquid and vapor-dominated hydrothermal systems ", Water Resources Research, Vol. 15, No.1, 1979.
- 27.- Baum, A.J. y P.K. Greaney, " An experimental and analytical investigation of boiling heat transfer in porous bodies ", ASME/AICHE, 81-HT-44, 1982.
- 28.- Chuah, Y.K. y V.P. Carey, " Analysis of boiling heat transfer and two-phase flow in porous media with non-uniform porosity ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 28, No. 1, pp. 147-154, 1985.
- 29.- Singh, B.S. y R.M. Shaubach, " Boiling and two-phase flow in the capillarity porous structure of a heat pipe ", Multiphase Transport in porous media, FED-Vol. 60/ HTD-Vol. 91, 1987.
- 30.- Satik, C., M. Parlar y Y.C. Yortsos, " A study of steady-state steam-water counterflow in porous media ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 34, No. 7, pp. 1755-1771, 1991.
- 31.- Stubos, A.K., C. Satik y Y.C. Yortsos, " Critical heat flux hysteresis in vapor-liquid counterflow in porous media ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 1, pp. 227-231, 1993.
- 32.- Stubos, A.K., C. Satik y Y.C. Yortsos, " Effect of capillarity heterogeneity on vapor-liquid counterflow in porous media ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 4, pp. 967-976, 1993.
- 33.- McGuinness, M.J., M. Blakeley, K. Pruess y M.J. O'Sullivan, " Geothermal heat pipe stability : solution by upstreaming and boundary conditions ", Transport in Porous Media, Vol. 11, pp. 71-100, 1993.
- 34.- Wang, C y C. Beckermann, " A two-phase mixture model of liquid-gas flow and heat transfer in capillarity porous media : formulation ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 36, No. 11, pp. 2747-2758, 1993.
- 35.- Wang, C., C. Beckermann y C. Fan, " A new approach to two-phase transport in porous media : the two-phase mixture model ", Multiphase Transport in Porous Media, FED-Vol. 173/ HTD-Vol. 265, ASME, 1993.
- 36.- Hsu, C.T., P. Cheng y G.M. Homsy, " Instability of free convection flow over a horizontal impermeable surface in a porous medium ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 21, pp. 1221-1228, 1978.
- 37.- Yortsos, Y.C. y M. Zeybek, " Dispersion driven instability in miscible displacement in porous media ", Phis. Fluids, Vol. 31, December, 1988.

- 38.- Chen, F. y C.F. Chen, " Experimental investigation of convective stability in a superposed fluid and porous layer when heated from below ", J. Fluid Mech. Vol. 207, pp. 311-321, 1989.
- 39.- Nield, D.A. y A. Bejan, Convection in porous media, Springer-Verlag, New York, 1992.
- 40.- Ramesh, P.S. y K.E. Torrance, " Numerical algorithm for problems involving boiling and natural convection in porous materials ", Numerical Heat Transfer, Part. B, Vol. 17, pp. 1-24, 1990.
- 41.- Fukusako, S., N. Seki y T. Komoriya, " An experimental study of boiling heat transfer in water-saturated porous bed ", ASME - JSME, Thermal Eng. J. Conf. Proc., Ed. Y. Mori and W.J. Yang, Honolulu, Hawaii, pp. 167-173, 1983.
- 42.- Afgan, N.H., L.A. Jovic, S.A. Kovalev y V.A. Lenykov, " Boiling heat transfer from surfaces with porous layers ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 28, No. 2, pp. 415-422, 1985.
- 43.- Fukusako, S., T. Komoriya y N. Seki, " An experimental study of transition and film boiling heat transfer in liquid-saturated porous bed ", Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, Vol. 108, Feb., pp. 117-124, 1986.
- 44.- Fand, R.M., T. Zheng y P. Cheng, " The general characteristics of boiling heat transfer from a surface embedded in a porous medium ", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 30, No. 6, pp. 1231-1235, 1987.
- 45.- Marle, C.M., Multiphase flow in porous media, Gulf Publishing Co., Technip, Paris, 1981.
- 46.- Kaviany, M., Principles of heat transfer in porous media, Springer-Verlag, Mechanical Eng. Series, New York, 1991.
- 47.- Dullien, F.A.L., Porous media : fluid transport and pore structure, Academic Press, New York, 1979.
- 48.- Gerald, C.F., Análisis Numérico, Alfaomega, México, 1991.
- 49.- Chandrasekhar, S., Hydrodynamics and hydromagnetic stability, Dover Publications Inc., New York, 1981.
- 50.- Davey, A., " A simple numerical method for solving Orr-Sommerfeld problems ", Q.J. Mech. Appl. Math., Vol. 26, pp. 401-411, 1973.
- 51.- Bejan, A., Convection heat transfer, John Wiley and Sons, New York, 1984.

52.- Slattery, J.C., Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 1972.

Apéndice A

OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE MASA, MOMENTO Y ENERGÍA EN UN MEDIO POROSO POR MEDIO DEL TEOREMA DEL PROMEDIO VOLUMÉTRICO [1].

Debido a la complejidad de la geometría interfacial entre una matriz porosa y un fluido o las fases de un fluido simple es difícil obtener una definición microscópica de cualquier proceso que ocurra en esa geometría, por lo tanto, es necesario tener una descripción macroscópica del proceso. Esto se logra por medio de la aplicación del teorema del promedio volumétrico [1].

El teorema considera un volumen representativo, V , en un medio poroso saturado con líquido y vapor, como se muestra en la figura A.1, donde la longitud característica del volumen, l , es tal que $d < l < L$, donde L define una longitud característica macroscópica y d una longitud característica microscópica, sobre la cual ocurren variaciones significativas de las cantidades físicas. El volumen representativo está ocupado por las tres fases, esto es

$$V = V_v + V_l + V_m \quad (\text{a.1})$$

donde los subíndices v , l y m representan el vapor, líquido y la matriz porosa, respectivamente.

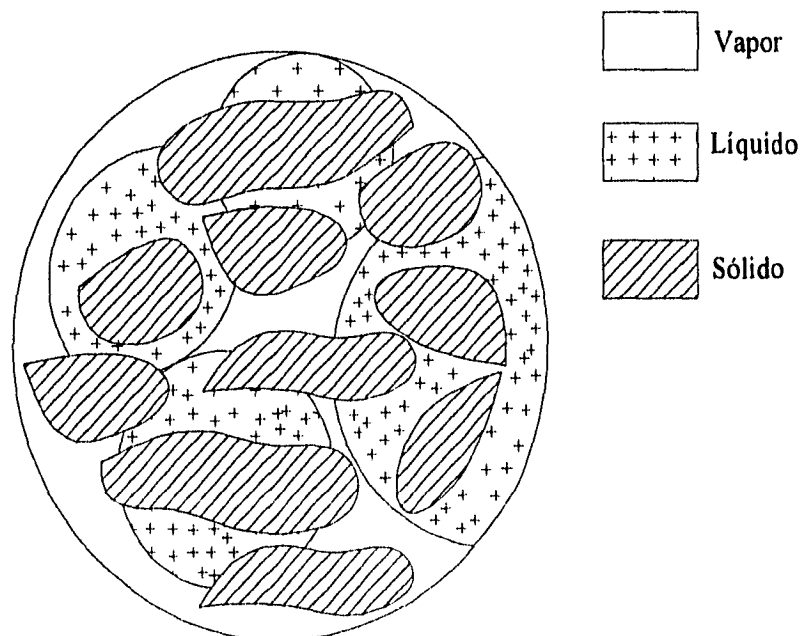


Figura A.1. Volumen representativo de un medio poroso saturado con líquido y vapor.

Para la aplicación del teorema se definen algunos conceptos dentro de un volumen representativo, como son:

El promedio de fase de cualquier cantidad, ψ_α :

$$\langle \psi_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_V \psi_\alpha dV \quad (a.2)$$

donde ψ_α es el valor de ψ en la fase α (α puede ser el líquido, vapor o sólido) y toma el valor de cero en cualquier otra fase. Un ejemplo del promedio de fase es la velocidad de Darcy.

Y el promedio de fase intrínseca:

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \psi_\alpha dV \quad (a.3)$$

donde la integración se lleva a cabo solamente sobre una fase.

Muchas cantidades físicas, tales como: presión, temperatura y densidad que pueden medirse experimentalmente en un medio poroso, son cantidades promedio de fase intrínseca. La ecuación (a.3) resulta:

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \psi_\alpha dV \quad (a.4)$$

Combinando las ecuaciones (a.2) con (a.4), se tiene:

$$\langle \psi_\alpha \rangle = \epsilon_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \quad (a.5a)$$

donde:

$$\epsilon_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} \quad (a.5b)$$

es la fracción del volumen total ocupado por la fase α . Por otra parte, el producto promedio de dos cantidades puede expresarse en términos del promedio del producto al aplicar las relaciones siguientes:

$$\langle \psi_\alpha \chi_\alpha \rangle^\alpha = \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \langle \chi_\alpha \rangle^\alpha + \langle \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\chi}_\alpha \rangle^\alpha \quad (a.6a)$$

$$\langle \psi_\alpha \chi_\alpha \rangle = \epsilon_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \langle \chi_\alpha \rangle^\alpha + \langle \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\chi}_\alpha \rangle \quad (a.6b)$$

donde:

$$\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha - \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \quad (\text{a.6c})$$

$$\tilde{\chi}_\alpha = \chi_\alpha - \langle \chi_\alpha \rangle^\alpha \quad (\text{a.6d})$$

que definen las desviaciones de una cantidad con respecto a su promedio de fase. Además, cuando se integran las ecuaciones diferenciales microscópicas sobre un volumen elemental, es necesario aplicar los siguientes teoremas:

Teorema del promedio.

$$\langle \nabla \psi_\alpha \rangle = \nabla \langle \psi_\alpha \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \psi_\alpha \bar{n}_\alpha dS \quad (\text{a.7})$$

Teorema del promedio modificado.

$$\langle \nabla \psi_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha \nabla \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha + \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \tilde{\psi}_\alpha \bar{n}_\alpha dS \quad (\text{a.8})$$

Teorema del transporte.

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_\alpha \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \psi_\alpha \bar{w}_\alpha \cdot \bar{n}_\alpha dS \quad (\text{a.9})$$

donde A_α es la interfaz entre la fase α y las otras fases, \bar{w}_α es el vector velocidad de las interfases, \bar{n}_α es un vector unitario normal a la interfaz y S es la superficie del volumen elemental. Estos teoremas en conjunto con las ecuaciones (a.2)-(a.6) sirven para la derivación de ecuaciones macroscópicas.

Conservación de masa

La ecuación microscópica de continuidad para la fase del líquido es:

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \bar{v}_l) = 0 \quad (\text{a.10})$$

que puede integrarse con respecto a un volumen elemental dando:

$$\left\langle \frac{\partial \rho_l}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_l \bar{v}_l) \rangle = 0 \quad (\text{a.11})$$

donde ρ_l y \bar{v}_l son la densidad y velocidad del líquido. Aplicando el teorema del transporte al primer término de la ecuación (a.11), el teorema del promedio al segundo término y la ecuación (a.6b) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_l \langle \rho_l \rangle' + \nabla \cdot \left(\langle \rho_l \rangle' \langle \bar{v}_l \rangle \right) + \langle \bar{\rho}_l \bar{v}_l \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{lv}} \rho_l (\bar{v}_l - \bar{w}_{lv}) \cdot \bar{n}_l dS \\ & + \frac{1}{V} \int_{A_{lm}} \rho_l (\bar{v}_l - \bar{w}_{lm}) \cdot \bar{n}_l dS = 0 \end{aligned} \quad (a.12)$$

donde A_{lv} y A_{lm} son las interfaces de líquido-vapor y líquido-matriz sólida que se mueven con velocidades \bar{w}_{lv} y \bar{w}_{lm} , respectivamente.

La primera integral representa la transferencia de masa debido a la evaporación del agua. La segunda integral desaparece porque no hay transferencia de masa en la interfaz líquido-matriz y el término dispersivo $\langle \bar{\rho}_l \bar{v}_l \rangle$, que relaciona la distribución de concentración de la fase con la distribución de velocidad en el medio poroso [1], generalmente es pequeño y puede despreciarse, simplificándose la ecuación (a.12) a la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_l \langle \rho_l \rangle' + \nabla \cdot \left(\langle \rho_l \rangle' \langle \bar{v}_l \rangle \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{lv}} \rho_l (\bar{v}_l - \bar{w}_{lv}) \cdot \bar{n}_l dS = 0 \quad (a.13)$$

De forma similar se determinan las ecuaciones macroscópicas de continuidad para el vapor y la matriz sólida y son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v \langle \rho_v \rangle^v + \nabla \cdot \left(\langle \rho_v \rangle^v \langle \bar{v}_v \rangle \right) + \frac{1}{V} \int_{A_{lv}} \rho_v (\bar{v}_v - \bar{w}_{lv}) \cdot \bar{n}_v dS = 0 \quad (a.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_m \langle \rho_m \rangle^m \right) + \nabla \cdot \left(\langle \rho_m \rangle^m \langle \bar{v}_m \rangle \right) = 0 \quad (a.15)$$

Notando que la masa ganada por vaporización en la fase vapor, es igual a la masa perdida por la misma razón en la fase líquida, entonces las integrales de superficie de las ecuaciones (a.13) y (a.14) son iguales en magnitud, pero de signo opuesto. Sumando las tres ecuaciones anteriores (a.13)-(a.15) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_v \langle \rho_v \rangle^v + \epsilon_l \langle \rho_l \rangle' + \epsilon_m \langle \rho_m \rangle^m \right) + \nabla \cdot \left(\langle \rho_v \rangle^v \langle \bar{v}_v \rangle^v + \langle \rho_l \rangle' \langle \bar{v}_l \rangle' + \langle \rho_m \rangle^m \langle \bar{v}_m \rangle^m \right) = 0 \quad (a.16)$$

que se reduce a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_v \langle \rho_v \rangle^v + \phi S_t \langle \rho_t \rangle^t + (1-\phi) \langle \rho_m \rangle^m) \\ & + \nabla \cdot (\langle \rho_v \rangle^v \langle \bar{v}_v \rangle^v + \langle \rho_t \rangle^t \langle \bar{v}_t \rangle^t + \langle \rho_m \rangle^m \langle \bar{v}_m \rangle^m) = 0 \end{aligned} \quad (\text{a.17})$$

donde ϕ es la porosidad, S_t y S_v son las saturaciones volumétricas del líquido y vapor en el medio poroso, definidas como:

$$\phi \equiv \frac{(V_v + V_t)}{V} \quad (\text{a.18a})$$

$$S_v \equiv \frac{V_v}{(V_v + V_t)} \quad (\text{a.18b})$$

$$S_t \equiv \frac{V_t}{(V_v + V_t)} \quad (\text{a.18c})$$

donde:

$$S_v + S_t = 1 \quad (\text{a.19a})$$

$$\varepsilon_v = \phi S_v, \quad \varepsilon_t = \phi S_t \quad \text{y} \quad \varepsilon_m = (1 - \phi) \quad (\text{a.19b})$$

Balance de momento

La ecuación microscópica de momento para la fase líquida se representa por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_t \bar{v}_t) + \nabla \cdot (\rho_t \bar{v}_t \bar{v}_t) + \nabla P_t - \nabla \cdot \bar{\Gamma}_t + \rho_t \bar{f} = 0 \quad (\text{a.20})$$

donde P_t , $\bar{\Gamma}_t$ y \bar{f} son la presión, el tensor de esfuerzos y la fuerza de cuerpo por unidad de masa de líquido, respectivamente. Si la fuerza gravitacional es la única fuerza de cuerpo, esta se puede expresar en términos de una función potencial Φ en la forma:

$$\bar{f} = -\bar{g} = -\nabla \Phi \quad (\text{a.21})$$

donde g es la aceleración gravitacional. Sustituyendo la ecuación (a.21) en la ecuación (a.20), integrando sobre un volumen elemental y aplicando el teorema del transporte al primer término, el teorema del promedio al segundo, tercero y cuarto término y finalmente usando la ecuación (a.6b), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[\varepsilon_t \langle \rho_t \rangle' \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{v}_t \rangle' + \frac{1}{V} \int_{\Lambda_k} \rho_t \bar{v}_t (\bar{v}_t - \bar{w}_N) \cdot \bar{n}_t \, dS + \varepsilon_t \langle \rho_t \rangle' \langle \bar{v}_t \rangle' \cdot \nabla \langle \bar{v}_t \rangle' + \nabla \cdot \left(\langle \rho_t \rangle' \langle \bar{v}_t \bar{v}_t \rangle' \right) \right] \\
 & + \varepsilon_t \nabla \langle P_t \rangle' + \varepsilon_t \langle \rho_t \rangle' \nabla \langle \Phi_t \rangle' + \frac{1}{V} \int_{\Lambda_m} (\bar{P}_t + \langle \rho_t \rangle' \bar{\Phi}_t) \cdot \bar{n}_t \, dS + \frac{1}{V} \int_{\Lambda_k} (\bar{P}_t + \langle \rho_t \rangle' \bar{\Phi}_t) \cdot \bar{n}_t \, dS \\
 & - \mu \nabla^2 \langle \bar{v}_t \rangle - \frac{1}{V} \int_{\Lambda_k} \bar{n}_t \cdot \bar{\Gamma}_t \, dS - \frac{1}{V} \int_{\Lambda_m} \bar{n}_t \cdot \bar{\Gamma}_t \, dS = 0
 \end{aligned} \tag{a.22}$$

donde los gradientes de la densidad a nivel microscópico son pequeños comparados con los gradientes de velocidad correspondientes. Los términos de inercia de la ecuación (a.22) están dentro del parentésis rectangular.

Para un medio isótropo se tiene que:

$$\frac{1}{V} \int_{\Lambda_k} \bar{n}_t \cdot \bar{\Gamma}_t \, dS + \frac{1}{V} \int_{\Lambda_m} \bar{n}_t \cdot \bar{\Gamma}_t \, dS = \mu \varepsilon_t \mathbf{B} \left[\langle \bar{v}_m \rangle^m - \langle \bar{v}_t \rangle' \right] \tag{a.23}$$

$$\frac{1}{V} \int_{\Lambda_m} (\bar{P}_t + \langle \rho_t \rangle' \bar{\Phi}_t) \cdot \bar{n}_t \, dS + \frac{1}{V} \int_{\Lambda_k} (\bar{P}_t + \langle \rho_t \rangle' \bar{\Phi}_t) \cdot \bar{n}_t \, dS = \mathbf{F} \left[\nabla \langle P_t \rangle' + \langle \rho_t \rangle' \nabla \langle \Phi_t \rangle' \right] \tag{a.24}$$

donde \mathbf{B} y \mathbf{F} son constantes que dependen de la naturaleza del medio isótropo. Sustituyendo las ecuaciones (a.23) y (a.24) en la ecuación (a.22) y despreciando los términos de inercia y el término $\mu \nabla^2 \langle \bar{v}_t \rangle$, que representa la divergencia del esfuerzo en el promedio volumétrico y se desprecia de acuerdo a las ordenes de magnitud que se manejan en un medio poroso [52], se tiene:

$$\langle \bar{v}_t \rangle' - \langle \bar{v}_m \rangle^m = - \frac{k_{mt} \mathbf{K}}{\mu \varepsilon_t} \left[\nabla \langle P_t \rangle' + \langle \rho_t \rangle' \nabla \langle \Phi_t \rangle' \right] \tag{a.25}$$

donde $k_{mt} \mathbf{K} \equiv \varepsilon_t (1 + \mathbf{F}) / \mathbf{B}$, con \mathbf{K} definiendo la permeabilidad intrínseca del medio poroso y k_{mt} la permeabilidad relativa del medio poroso saturado con agua.

Similarmente para la fase de vapor donde se desprecian los términos de inercia y el término $\mu \nabla^2 \langle \bar{v}_v \rangle$, se obtiene:

$$\langle \bar{v}_v \rangle^v - \langle \bar{v}_m \rangle^m = - \frac{k_{mv} \mathbf{K}}{\mu \varepsilon_v} \left[\nabla \langle P_v \rangle^v + \langle \rho_v \rangle^v \nabla \langle \Phi_v \rangle^v \right] \tag{a.26}$$

donde k_{mv} define la permeabilidad relativa del medio poroso saturado de vapor. Las ecuaciones (a.25) y (a.26) son la ley de Darcy para una mezcla líquido-vapor de agua en un medio poroso isótropo.

Conservación de la energía

La ecuación microscópica de la energía en términos de la entalpía de la fase líquida es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l h_l) + \nabla \cdot (\rho_l h_l \bar{v}_l - k_l \nabla T_l) - \left(\frac{\partial P_l}{\partial t} + \bar{v}_l \cdot \nabla P_l \right) = 0 \quad (a.27)$$

donde h_l y k_l son la entalpía y la conductividad térmica del líquido. En esta ecuación se desprecian la disipación viscosa, la generación de energía interna y la radiación térmica. Integrando la ecuación (a.27) sobre un volumen elemental, y aplicando el teorema del transporte al primer y cuarto término, el teorema del promedio y la ecuación (a.6b) al segundo término, el teorema del promedio modificado al tercer término y la ecuación (a.6b) al quinto término, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_l \langle \rho_l \rangle' \langle h_l \rangle') - \left[\epsilon_l \frac{\partial}{\partial t} \langle P_l \rangle' + \langle \bar{v}_l \rangle \cdot \nabla \langle P_l \rangle' \right] + \nabla \cdot (\langle \rho_l \rangle' \langle h_l \rangle' \langle \bar{v}_l \rangle) \\ + Q_v + Q'_v + Q'_{bn} - \nabla \cdot (\epsilon_l k_l^* \nabla \langle T_l \rangle') = 0 \end{aligned} \quad (a.28)$$

donde k_l^* es la conductividad térmica efectiva del agua en la presencia de una matriz sólida y se representa como la suma de la conductividad térmica de estancamiento k'_l (debida a la difusión molecular) y el coeficiente de dispersión térmica k''_l (debido a la dispersión mecánica), esto es:

$$k_l^* = k'_l + k''_l \quad (a.29)$$

que se definen como:

$$-(\epsilon_l k'_l \nabla \langle T_l \rangle') = -\langle k_l \rangle' \left(\epsilon_l \nabla \langle T_l \rangle' + \frac{1}{V} \int_{A_w} \bar{T}_l \bar{n}_l dS + \frac{1}{V} \int_{A_{bn}} \bar{T}_l \bar{n}_l dS \right) \quad (a.29b)$$

$$-\nabla \cdot (\epsilon_l k''_l \nabla \langle T_l \rangle') = \nabla \cdot (\rho_l \bar{h}_l \bar{v}_l) + \frac{1}{V} \int_{A_w} \bar{P}_l \bar{v}_l \bar{n}_l dS + \frac{1}{V} \int_{A_{bn}} \bar{P}_l \bar{v}_l \bar{n}_l dS - \langle \bar{v}_l \cdot \nabla \bar{P}_l \rangle \quad (a.29c)$$

donde las integrales en la ecuación (a.29b) se conocen como vectores de tortuosidad, y se toman en cuenta para el cambio en la difusión térmica debido a la microestructura de la matriz sólida. Los términos Q_N , Q'_N y Q'_{in} en la ecuación (a.28) se definen como:

$$Q_N = \frac{1}{V} \int_{A_k} (\rho_l h_l - \bar{P}_l) (\bar{v}_l - \bar{w}_N) \cdot \bar{n}_l dS$$

$$\cong \frac{1}{V} \int_{A_k} \rho_l h_l (\bar{v}_l - \bar{w}_N) \cdot \bar{n}_l dS \quad (a.30a)$$

$$Q'_N = \frac{1}{V} \int_{A_k} \bar{q} \cdot \bar{n}_l dS \quad (a.30b)$$

$$Q'_{in} = \frac{1}{V} \int_{A_m} q \cdot \bar{n}_l dS \cong \frac{A_m h_l}{V} (T_m - T_l) \quad (a.30c)$$

donde \bar{q} en las ecuaciones (a.30b,c) son los flujos de calor conductivos a través de las interfaces, y h_l es definido como el coeficiente de transferencia de calor promedio del volumen local entre la interfaz líquido-sólido, y depende de las propiedades físicas del líquido y su razón de flujo. Los términos dentro del paréntesis rectangular de la ecuación (a.28) representa el trabajo hecho por compresión.

Similarmente, la ecuación de la energía para la fase vapor y fase sólida son:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_v \langle \rho_v \rangle^v \langle h_v \rangle^v) - \left[\epsilon_v \frac{\partial}{\partial t} \langle P_v \rangle^v + \langle \bar{v}_v \rangle \cdot \nabla \langle P_v \rangle^v \right] + \nabla \cdot (\langle \rho_v \rangle^v \langle h_v \rangle^v \langle \bar{v}_v \rangle)$$

$$+ Q_{vN} + Q'_{vN} + Q'_{vm} - \nabla \cdot (\epsilon_v k_v^* \nabla \langle T_v \rangle^v) = 0 \quad (a.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_m \langle \rho_m \rangle^m \langle h_m \rangle^m) - \left[\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_m \langle P_m \rangle^m + \langle \bar{v}_m \rangle \cdot \nabla \langle P_m \rangle^m \right] + \nabla \cdot (\langle \rho_m \rangle^m \langle h_m \rangle^m \langle \bar{v}_m \rangle)$$

$$+ Q'_{mv} + Q'_{mN} - \nabla \cdot (\epsilon_m k_m^* \nabla \langle T_m \rangle^m) = 0 \quad (a.32)$$

donde k_v^* es la conductividad térmica efectiva del vapor en la presencia de la matriz sólida y k_m^* es la conductividad térmica de la matriz sólida en la presencia del fluido, ambas son la suma de la conductividad térmica de estancamiento y el coeficiente de dispersión térmica. Además se tiene que:

$$Q_{vN} = -Q_N \quad (a.33a)$$

$$Q'_{vN} = -Q'_N \quad (a.33b)$$

$$Q'_{ml} = -Q'_{lm} \quad (\text{a.33c})$$

$$Q'_{vm} = \frac{1}{V} \int_{A_{im}} \bar{q} \cdot \bar{n}_v dS \equiv \frac{A_{vm} h_v}{V} (T_m - T_v) = Q'_{mv} \quad (\text{a.33d})$$

donde h_v es el coeficiente de transferencia de calor entre las interfaces matriz sólida-vapor.

Para un equilibrio térmico entre vapor, líquido y sólido, se tiene:

$$\langle T_v \rangle^v = \langle T_l \rangle^l = \langle T_m \rangle^m = \langle T \rangle \quad (\text{a.34})$$

Sumando las ecuaciones (a.28), (a.31) y (a.32) bajo la suposición de un equilibrio termodinámico y agregando las ecuaciones (a.33), se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_l \langle \rho_l \rangle^l \langle h_l \rangle^l + \phi S_v \langle \rho_v \rangle^v \langle h_v \rangle^v + (1-\phi) \langle \rho_m \rangle^m \langle h_m \rangle^m) \\ & + \nabla \cdot (\langle \rho_l \rangle^l \langle h_l \rangle^l \langle \bar{v}_l \rangle + \langle \rho_v \rangle^v \langle h_v \rangle^v \langle \bar{v}_v \rangle + \langle \rho_m \rangle^m \langle h_m \rangle^m \langle \bar{v}_m \rangle) \\ & - \nabla \cdot (k \nabla \langle T \rangle) - \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle P \rangle + (\langle \bar{v}_l \rangle + \langle \bar{v}_v \rangle + \langle \bar{v}_m \rangle) \cdot \nabla \langle P \rangle \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{a.35})$$

donde:

$$k = \phi S_l k_l^* + \phi S_v k_v^* + (1-\phi) k_m^* \quad (\text{a.36})$$

es la conductividad térmica efectiva del medio poroso saturado con vapor y líquido en equilibrio térmico local.

Para un medio poroso indeformable saturado por un fluido en una sola fase (líquido), las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, Ecs. (a.17), (a.25), (a.26) y (a.35), sustituyendo $dh = c_p dT$ para el líquido y la matriz porosa, y eliminando la notación $\langle \rangle$, tienen forma:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (\text{a.37})$$

$$\bar{v} = -\frac{K}{\mu} [\nabla P - \rho \bar{g}] \quad (\text{a.38})$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{a.39})$$

donde \bar{v} es el vector de la velocidad de Darcy, σ es la razón de capacidad de calor de la formación rocosa saturada con líquido y α es la difusividad térmica efectiva de la formación rocosa, estos dos últimos términos se definen como:

$$\sigma \equiv \frac{\phi (\rho c_p)_l + (1-\phi)(\rho c_p)_m}{(\rho c_p)_l} \quad (\text{a.40})$$

$$\alpha \equiv \frac{k}{(\rho c_p)_l} \quad (\text{a.41})$$

A las ecuaciones de conservación, Ecs. (a.37), (a.38) y (a.39), se agrega una ecuación de estado que supone una fuerza de cuerpo, donde la densidad es función de la temperatura (aproximación de Boussinesq), esto es:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_l (T - T_0)] \quad (\text{a.42})$$

donde β_l es el coeficiente de expansión térmica del líquido y el subíndice 0 indica una condición de referencia.

Para un medio poroso indeformable saturado con un fluido en dos fases (líquido-vapor), las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía toman la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi (1-S)\rho_v + \phi S \rho_l) + \nabla \cdot (\rho_v \bar{v}_v + \rho_l \bar{v}_l) = 0 \quad (\text{a.43})$$

$$\bar{v}_l = -\frac{k_{rl} K}{\mu_l} [\nabla P_l - \rho_l \bar{g}] \quad (\text{a.44a})$$

$$\bar{v}_v = -\frac{k_{rv} K}{\mu_v} [\nabla P_v - \rho_v \bar{g}] \quad (\text{a.44b})$$

en el caso de la ecuación de la energía se sustituyen las siguientes entalpías:

$$\begin{aligned} h_m &= c_m T \\ h_l &= c_l T \\ h_v &= c_v T + [(c_l - c_v) T_{\text{sat.}} + h_{fg}] \end{aligned} \quad (\text{a.45})$$

y se sustituye la ecuación de continuidad, Ec. (a.43). Para una región isotérmica $T=T_{\text{sat.}}$ la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (1-S) \rho_v h_{fg}] + \nabla \cdot [\rho_v h_{fg} \bar{v}_v] = 0 \quad (\text{a.46})$$

donde S es la saturación del líquido.

Como se mencionó anteriormente en este apéndice, es difícil obtener las ecuaciones que representan el comportamiento microscópico de un fluido en un medio poroso, sobre todo del proceso de ebullición, por lo tanto, es necesario recurrir al teorema del promedio volumétrico, el cual también presenta cierta dificultad debido al tamaño del volumen representativo donde es necesario aplicar conceptos y teoremas para realizar la integración de las ecuaciones del volumen representativo.

Apéndice B

OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS REGIONES DEL LÍQUIDO Y DOS FASES DE LOS ESTADOS BÁSICO Y PERTURBADO.

Para obtener las ecuaciones adimensionales en el marco de coordenadas (ζ, η, τ) se consideran componentes \bar{x} y \bar{y} del vector velocidad de la forma:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{v} \quad (b.1)$$

donde \bar{u} es la velocidad en la dirección de \bar{x} , y \bar{v} es la velocidad en la dirección \bar{y} . Eliminando la barra superior de las ecuaciones adimensionales y aplicando la transformación, las ecuaciones para cada región del sistema son:

Región del líquido

$$\frac{\partial u_i}{\partial \zeta} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_i}{\partial \eta_i} = 0 \quad (b.2)$$

$$u_i = - \left(\frac{\partial P_i}{\partial \zeta} - \frac{\eta_i}{\delta} \frac{\partial P_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right) \quad (b.3a)$$

$$v_i = - \frac{1}{\delta} \frac{\partial P_i}{\partial \eta_i} - Ra T \quad (b.3b)$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\eta_i}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right] + u_i \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{\eta_i}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \right) + v_i \frac{1}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial \zeta^2} - \frac{\eta_i}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \zeta^2} \\ & + \frac{2\eta_i}{\delta^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial \eta_i} - \frac{2\eta_i}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta \partial \eta_i} + \left(\frac{\eta_i}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta_i^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta_i^2} \end{aligned} \quad (b.4)$$

Región de dos fases

$$\begin{aligned} & \phi(1-\bar{\rho}) \left[\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta_0} \frac{\partial S}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial u_l}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial u_l}{\partial \eta_{2\phi}} - \frac{1}{1-\delta} \frac{\partial v_l}{\partial \eta_{2\phi}} \\ & + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_v}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial u_v}{\partial \eta_{2\phi}} - \frac{1}{1-\delta} \frac{\partial v_v}{\partial \eta_{2\phi}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (b.5)$$

$$u_l = -k_{rl} \left[\frac{\partial P_l}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial P_l}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right] \quad (b.6a)$$

$$v_l = -k_{rl} \left[-\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial P_l}{\partial \eta_{2\phi}} + Ra \right] \quad (b.6b)$$

$$u_v = -\hat{\mu} k_{rv} \left[\frac{\partial P_v}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial P_v}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \right] \quad (b.6c)$$

$$v_v = -\hat{\mu} k_{rv} \left[-\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial P_v}{\partial \eta_{2\phi}} + Ra_{2\phi} \right] \quad (b.6d)$$

$$\phi \left[\frac{\partial(1-S)}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial(1-S)}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial u_v}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial u_v}{\partial \eta_{2\phi}} - \frac{1}{1-\delta} \frac{\partial v_v}{\partial \eta_{2\phi}} = 0 \quad (b.7)$$

Al sustituir la perturbación lineal en las variables de velocidad, presión, saturación y posición de la interfaz de las ecuaciones anteriores, se obtiene:

Región del líquido

$$\frac{\partial(u_{l,0} + \varepsilon u_{l,1})}{\partial \zeta} + \frac{1}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial(v_{l,0} + \varepsilon v_{l,1})}{\partial \eta_l} = 0 \quad (b.8)$$

$$u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1} = - \left(\frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \zeta} \frac{\eta_i}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \eta_i} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \right) \quad (b.9a)$$

$$v_{i,0} + \varepsilon v_{i,1} = - \frac{1}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \eta_i} - Ra (T_0 + \varepsilon T_1) \quad (b.9b)$$

$$\begin{aligned} & \sigma \left[\frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \tau} \frac{\eta_i}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \tau} \right] \\ & + (u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1}) \left(\frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \zeta} \frac{\eta_i}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i} \right) \\ & + (v_{i,0} + \varepsilon v_{i,1}) \frac{1}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i} = \\ & \frac{\partial^2 (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \zeta^2} \frac{\eta_i}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i} \frac{\partial^2 (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta^2} \\ & + \frac{2\eta_i}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)^2} \left(\frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i} - \frac{2\eta_i}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \zeta \partial \eta_i} \\ & + \left(\frac{\eta_i}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} \right)^2 \left(\frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial^2 (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i^2} + \frac{1}{(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)^2} \frac{\partial^2 (T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial \eta_i^2} \quad (b.10) \end{aligned}$$

Región de dos fases

$$\begin{aligned} & \phi (1-\hat{\rho}) \left[\frac{\partial (S_0 + \varepsilon S_1)}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (S_0 + \varepsilon S_1)}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \tau} \right] \\ & + \frac{\partial (u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1})}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial (u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1})}{\partial \eta_{2\phi}} \\ & - \frac{1}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (v_{i,0} + \varepsilon v_{i,1})}{\partial \eta_{2\phi}} + \hat{\rho} \left(\frac{\partial (u_{v,0} + \varepsilon u_{v,1})}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \tag{b.11}$$

$$+ \hat{\rho} \left(\frac{\eta_{2\phi}}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial (u_{v,0} + \varepsilon u_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} - \frac{1}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (v_{v,0} + \varepsilon v_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} \right) = 0$$

$$u_{i,0} + \varepsilon u_{i,1} = -(k_{r,i,0} + \varepsilon k_{r,i,1}) \left[\frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \right] \tag{b.12a}$$

$$v_{i,0} + \varepsilon v_{i,1} = -(k_{r,i,0} + \varepsilon k_{r,i,1}) \left[-\frac{1}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (P_{i,0} + \varepsilon P_{i,1})}{\partial \eta_{2\phi}} + Ra \right] \tag{b.12b}$$

$$u_{v,0} + \varepsilon u_{v,1} = -\hat{\mu} (k_{r,v,0} + \varepsilon k_{r,v,1}) \left[\frac{\partial (P_{v,0} + \varepsilon P_{v,1})}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (P_{v,0} + \varepsilon P_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \right] \tag{b.12c}$$

$$v_{v,0} + \varepsilon v_{v,1} = -\hat{\mu} (k_{r,v,0} + \varepsilon k_{r,v,1}) \left[-\frac{1}{1-(\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (P_{v,0} + \varepsilon P_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} + Ra_{2\phi} \right] \tag{b.12d}$$

$$\begin{aligned} & \phi \left[\frac{\partial (1 - (S_0 + \varepsilon S_1))}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (1 - (S_0 + \varepsilon S_1))}{\partial \eta_{2\phi}} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial (u_{v,0} + \varepsilon u_{v,1})}{\partial \zeta} \\ & + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial \zeta} \frac{\partial (u_{v,0} + \varepsilon u_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} - \frac{1}{1 - (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} \frac{\partial (v_{v,0} + \varepsilon v_{v,1})}{\partial \eta_{2\phi}} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(b.13)$$

Para la obtención de las ecuaciones que representan los estados básico y perturbado se introducen las siguientes series:

$$\frac{1}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} = \frac{1}{\delta_0} \left(1 - \varepsilon \frac{\delta_1}{\delta_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} \right)^2 - \dots\dots \right) \quad (b.14)$$

$$\frac{1}{1 - (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} = \frac{1}{1 - \delta_0} \left(1 + \varepsilon \frac{\delta_1}{1 - \delta_0} - \varepsilon^2 \left(\frac{\delta_1}{1 - \delta_0} \right)^2 + \dots\dots \right) \quad (b.15)$$

las cuales se reducen al despreciar los términos cuadráticos y mayores, quedando las ecuaciones de la forma:

$$\frac{1}{\delta_0 + \varepsilon \delta_1} = \frac{1}{\delta_0} - \varepsilon \frac{\delta_1}{\delta_0^2} \quad (b.16)$$

$$\frac{1}{1 - (\delta_0 + \varepsilon \delta_1)} = \frac{1}{1 - \delta_0} + \varepsilon \frac{\delta_1}{(1 - \delta_0)^2} \quad (b.17)$$

Entonces para el estado básico, subíndice 0, el sistema es unidimensional y permanente, donde las derivadas con respecto al tiempo y a la coordenada en la dirección horizontal se eliminan, y sustituyendo las series (b.16) y (b.17), se obtiene:

Región del líquido

$$\frac{d v_{t,0}}{d \eta_t} = 0 \quad (b.18)$$

$$v_{t,0} = - \frac{1}{\delta_0} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_t} - Ra T_0 \quad (b.19)$$

$$\frac{d^2 T_0}{d\eta_l^2} = 0 \quad (b.20)$$

Región de dos fases

$$v_{l,0} + \hat{\rho} v_{v,0} = 0 \quad (b.21)$$

$$v_{l,0} = k_{n,0} \left(\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d P_{l,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra \right) \quad (b.22a)$$

$$v_{v,0} = \hat{\mu} k_{rv,0} \left(\frac{1}{1-\delta_0} \frac{d P_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} - Ra_{2\phi} \right) \quad (b.22b)$$

$$\frac{d v_{v,0}}{d\eta_{2\phi}} = 0 \quad (b.23)$$

Para el estado perturbado, subíndice 1, se considera un sistema bidimensional donde los términos cuadráticos de ϵ se desprecian y se aplican los modos normales del análisis de estabilidad, quedando las ecuaciones de la forma:

Región del líquido

$$\frac{\partial u_{l,1}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial v_{l,1}}{\partial \eta_l} = 0 \quad (b.24)$$

$$u_{l,1} = - \left(\frac{\partial P_{l,1}}{\partial \zeta} - \frac{\eta_l}{\delta_0} \frac{d P_{l,0}}{d \eta_l} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right) \quad (b.25a)$$

$$v_{l,1} = - \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial P_{l,1}}{\partial \eta_l} + \frac{1}{\delta_0^2} \frac{d P_{l,0}}{d \eta_l} \delta_1 - Ra T_1 \quad (b.25b)$$

$$\sigma \left[\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \frac{\eta_t}{\delta_0} \frac{d T_0}{d \eta_t} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{\delta_0} \frac{d T_0}{d \eta_t} v_{t,1} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\eta_t}{\delta_0} \frac{d T_0}{d \eta_t} \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta_t^2} \quad (\text{b.26})$$

Región de dos fases

$$\phi (1 - \hat{\rho}) \left[\frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - \delta_0} \frac{d S_0}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial u_{t,1}}{\partial \zeta} - \frac{1}{1 - \delta_0} \frac{\partial v_{t,1}}{\partial \eta_{2\phi}} = 0 \quad (\text{b.27})$$

donde $\hat{\rho} \ll 1$

$$u_{t,1} = -k_{r,0} \left[\frac{\partial P_{t,1}}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - \delta_0} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right] \quad (\text{b.28a})$$

$$v_{t,1} = k_{r,0} \left[\frac{1}{1 - \delta_0} \frac{\partial P_{t,1}}{\partial \eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1 - \delta_0)^2} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} \delta_1 \right] + k_{r,1} \left[\frac{1}{1 - \delta_0} \frac{d P_{t,0}}{d \eta_{2\phi}} - Ra \right] \quad (\text{b.28b})$$

$$u_{v,1} = -\hat{\mu} k_{rv,0} \left[\frac{\partial P_{v,1}}{\partial \zeta} + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - \delta_0} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \right] \quad (\text{b.28c})$$

$$v_{v,1} = \hat{\mu} k_{rv,0} \left[\frac{1}{1 - \delta_0} \frac{\partial P_{v,1}}{\partial \eta_{2\phi}} + \frac{1}{(1 - \delta_0)^2} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} \delta_1 \right] + \hat{\mu} k_{rv,1} \left[\frac{1}{1 - \delta_0} \frac{d P_{v,0}}{d \eta_{2\phi}} - Ra_{2\phi} \right] \quad (\text{b.28d})$$

$$\frac{\partial u_{v,1}}{\partial \zeta} - \frac{1}{1 - \delta_0} \frac{\partial v_{v,1}}{\partial \eta_{2\phi}} = \phi \left[\frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{\eta_{2\phi}}{1 - \delta_0} \frac{d S_0}{d \eta_{2\phi}} \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} \right] \quad (\text{b.29})$$

donde: $k_{r,1} = S_1$ y $k_{rv,1} = -S_1$, son las funciones lineales de la permeabilidad relativa para cada fase.

Apéndice C

APLICACIÓN DEL PAQUETE DE CÓMPUTO *MATHEMATICA* Y DE LOS ALGORITMOS DE CÁLCULO DESARROLLADOS PARA RESOLVER EL ESTADO BÁSICO.

(a).- La ecuación en la región de dos fases que surge del estado básico al considerar una presión capilar igual a cero, $P_{c,0} = 0$, y sustituir las relaciones de las permeabilidades relativas lineales, puede expresarse como:

$$W \left(\frac{\hat{\mu} \hat{\rho}}{S_0} + \frac{1}{1-S_0} \right) = 1 \quad (c.1)$$

donde $\hat{\mu} \hat{\rho} = 0.0232$ para un sistema que contiene agua y vapor de agua en la región de dos fases. Entonces la ecuación puede representarse como:

$$W \left(\frac{0.0232}{S_0} + \frac{1}{1-S_0} \right) = 1 \quad (c.2)$$

o también:

$$W = \frac{S_0(1-S_0)}{0.0232(1-S_0) + S_0} \quad (c.3)$$

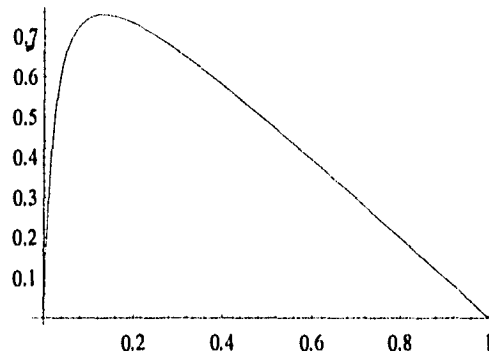
donde S_0 varía de 0 a 1.

En el paquete de cómputo *Mathematica* la solución se obtiene al graficar la expresión en función de S_0 , para $x = S_0$ se tiene:

$$\text{Plot} \left[\left(\frac{x*(1-x)}{0.0232*(1-x)+x} \right), \{x,0,1\} \right]$$

la solución se presenta en la siguiente hoja.

Plot[(x*(1-x))/(0.0232*(1-x)+x),{x,0,1}]



-Graphics-

Table[(x*(1-x))/(.0232*(1-x)+x),{x,0,1,.05}]

{0, 0.659356, 0.74454, 0.751237, 0.732064, 0.701197,
 0.664053, 0.623151, 0.579822, 0.534834, 0.488663, 0.441617,
 0.393908, 0.345682, 0.297047, 0.248082, 0.198847, 0.149388,
 -16
 0.0997429, 0.049939, -2.22045 10 }

(b).- Para integrar la ecuación (51) se aplica la regla de integración de Simpson y la ecuación se expresa en la forma:

$$\delta_{c,0} = \int_1^0 \frac{J'_{(s)} k_{r,0} k_{rv,0}}{W (k_{r,0} + \beta k_{rv,0}) - k_{r,0} k_{rv,0}} d S_0 \quad (c.4)$$

sustituyendo las permeabilidades relativas y la función de Leverett definida en la ecuación (52), se tiene la integral como una función de la saturación, S_0 , esto es:

$$\delta_{c,0} = \int_1^0 \frac{-0.036}{W (S_0 + 0.0232 (1 - S_0)) - S_0 (1 - S_0)} d S_0 \quad (c.5)$$

entonces para cada valor de W corresponde un valor de $\delta_{c,0}$.

En el paquete de cómputo Mathematica la integración, para $x = S_0$, se lleva a cabo con la expresión:

$$\text{NIntegrate} \left[-0.036 / (W (x + 0.0232 (1 - x)) - x (1 - x)), \{x, 1, 0\} \right]$$

en las siguientes hojas se muestran el programa para realizar la integración con la regla de Simpson y el resultado obtenido con el Mathematica.

PROGRAMA UTILIZADO PARA ENCONTRAR EL FLUJO DE CALOR QUE PERMITA LA FORMACIÓN DE UNA REGIÓN DE DOS FASES.

CLS

REM PROGRAMA TESI : CONSIDERA UNA FUNCION $J'(s) = -.036(1/S(1-S))$
 REM LA CUAL CORRESPONDE A LOS DATOS DE DRENADO

REM ESTE PROGRAMA CONSIDERA LAS PERMEABILIDADES RELATIVAS
 REM LINEALES K_{rl} Y K_{rv} DEL TRABAJO DE C. Y. WANG (1993).

REM LA EVALUACION DE LA INTEGRAL SE REALIZA MEDIANTE LA
 REM REGLA DE SIMPSON
 REM CON ESTA INTEGRACION SE GENERARA UNA CURVA
 REM FLUJO DE CALOR VS. ALTURA DE DOS FASES

DIM D(200)

INPUT "INTERVALO, X1 Y X2"; X1, X2

INPUT "NO. DE DIVISIONES, N"; N

INPUT "DESEA ABRIR UN ARCHIVO PARA GRAFICAR, AR"; AR

IF AR = 0 THEN GOTO ARCHIVO

OPEN "O", #1, "A:TES2.dat"

ARCHIVO:

FOR w = 1.1 TO 10 STEP .1

GOSUB INTEG

D(w) = S

D = D(w)

IF AR = 0 THEN GOTO PANT

PRINT USING "#.#####"; w; D(w)

WRITE #1, w, D(w)

PANT:

PRINT "W="; w; "D("; w; ")="; D

 NEXT w

GOTO FIN

INTEG:

REM SUBROUTINA PARA EVALUAR LA INTEGRAL

DEF FNY (x) = -0.036 / (-x * (1 - x) + w * (.0232 * (1 - x) + x))

 H = (X2 - X1) / N

 S = FNY(X1) + FNY(X2)

 FOR x = X1 + H TO X2 - H / 2 STEP 2 * H

 S = S + 4 * FNY(x)

 NEXT x

 FOR x = X1 + 2 * H TO X2 - 3 * H / 2 STEP 2 * H

 S = S + 2 * FNY(x)

 NEXT x

 S = H * S / 3

 RETURN

FIN:

END

In[1]:=

```
NIntegrate[-(.036)/(8052*(x+.0232*(1-x))-  
x*(1-x)),{x,1,0}]
```

Out[1]=

1.00021

(c).- La curva de la saturación de líquido vs. la coordenada de la región de dos fases, se obtiene al aplicar el método de Runge-Kutta de cuarto orden a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, definida por la ecuación (51). Tomando como $y = \delta_{c,0}$, y $x = S_0$ la ecuación se expresa como:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{-0.036}{W(x + 0.0232(1-x)) - x(1-x)} \quad (c.6)$$

donde la condición inicial es $y[1] = 0$. Esta ecuación se resuelve para distintos valores del flujo de calor, figura 8.

También con el paquete de cómputo Mathematica se resuelve la ecuación al tener la expresión:

$$\text{NDSolve} \left[\left\{ y'[x] == -0.036 / (W(x + 0.0232(1-x)) - x(1-x)), y[1] == 0 \right\}, y, \{x, 1, 0\} \right]$$

en las hojas siguientes se presenta el programa para resolver la ecuación con el método de Runge-Kutta y con el Mathematica.

PROGRAMA UTILIZADO PARA ENCONTRAR LA SATURACIÓN DEL LÍQUIDO EN LA REGIÓN DE DOS FASES.

```

CLS

REM  PROGRAMA:TESIS2
REM  EN ESTE PROGRAMA SE APLICA LA FUNCION Y PERMEABILIDADES
REM  RELATIVAS USADAS POR C. Y. WANG (1993)
REM  LA INTEGRACION DE LA ECUACION SE REALIZA
REM  USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

INPUT "DESEA ARCHIVAR RESULTADOS:NO=0, S1=1"; AR

      IF AR = 0 THEN GOTO 34

OPEN "O", #1, "a:TES9.dat"

REM  SE OBTIENE UNA TABLA DE RESULTADOS DE LA VARIABLE
REM  DEPENDIENTE (X) Y DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE (S)
REM  DONDE LOS INTERVALOS SON 50

34 : L = 50

INPUT "CUANTAS ECUACIONES CONFORMAN EL SISTEMA, N1"; N1
DIM Y(N1), YO(N1), Y1(N1), G(N1), B1(N1), B2(N1), B3(N1), A(L, N1)

INPUT "FLUJO DE CALOR, W"; w
INPUT "RANGO DE INTEGRACION PARA LA VARIABLE INDEP.,XO,XN"; XO,
XN

REM      CALCULO DEL INCREMENTO EN LA VARIABLE INDEP. E
REM      INICIACION DE LAS VARIABLES INDEP. Y DEP.

      D = (XN - XO) / L
      x = XO
      A(0, 0) = XO

REM  CICLO PARA ASIGNAR LOS VALORES INICIALES A LA VARIABLE
REM  DEPENDIENTE

      FOR K = 1 TO N1

          PRINT "VALOR INICIAL Y("; K; ")": INPUT YO(K)

```

```
Y(K) = YO(K)
A(0, K) = YO(K)

NEXT K

REM  SUBROUTINA PARA REALIZAR LA INTEGRACION DE LA FUNCION

FOR J2 = 1 TO L

FOR K2 = 1 TO N1: Y1(K2) = Y(K2): NEXT K2

X1 = x: GOSUB 4000

FOR K2 = 1 TO N1: B1(K2) = G(K2): NEXT K2

x = X1 + D / 2: GOSUB 4000

FOR K2 = 1 TO N1: B2(K2) = G(K2): NEXT K2

x = X1 + D: GOSUB 4000

FOR K2 = 1 TO N1: B3(K2) = G(K2): NEXT K2

FOR K2 = 1 TO N1

Y(K2) = Y1(K2) + D * (B1(K2) + 4 * B2(K2) + B3(K2)) / 6

A(J2, K2) = Y(K2)

NEXT K2

A(J2, 0) = x

NEXT J2

SUM = A(L, 1)

REM  BLOQUE PARA IMPRIMIR LOS RESULTADOS

PRINT
PRINT
PRINT "          TABLA DE RESULTADOS"
PRINT
```

```

PRINT
PRINT "VAR. INDEP., SO", "VAR. DEP., DO"
PRINT
PRINT

    FOR J2 = 0 TO L

        DEL = A(J2, 1) / SUM

PRINT
PRINT
PRINT USING "###.####"      ", A(J2, 0); DEL

        IF AR = 0 THEN GOTO 360

        WRITE #1, A(J2, 0), DEL

360 : NEXT J2

    CLOSE

END

4000 :

REM  SUBROUTINA PARA CALCULAR LA FUNCION QUE SE ESTA
REM  INTEGRANDO

G(1) = -.036 / (-x * (1 - x) + w * (.0232 * (1 - x) + x))

RETURN

```

In[4]:=

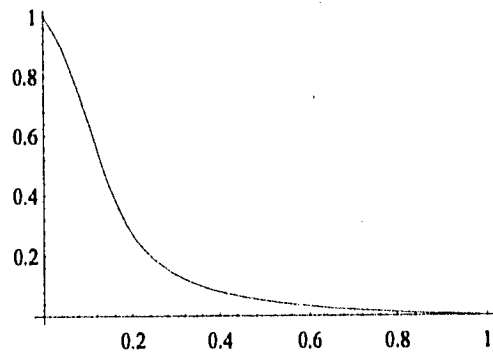
```
NDSolve[{y'[x]==-0.036/(0.8052*(x+.0232*(1-x))-x*(1-x)),y[1]==0}
,y,{x,1,0}]
```

Out[4]=

```
{{y -> InterpolatingFunction[{0., 1.}, <>]}}
```

In[5]:=

```
Plot[Evaluate[y[x]/.%,{x,1,0}]
```



Out[5]=

-Graphics-

(d).- Los perfiles de presión para cada fase se obtienen al considerar la ecuación en función de la saturación, esto es:

$$\frac{d P_{i,0}}{d S_0} = \left[1 - W \left(\frac{\beta}{S_0} \right) \right] \frac{-0.036}{W (S_0 + 0.0232 (1 - S_0)) - S_0 (1 - S_0)} \quad (c.7)$$

$$\frac{d P_{i,0}}{d S_0} = \left[\frac{W}{(1 - S_0)} \right] \frac{-0.036}{W (S_0 + 0.0232 (1 - S_0)) - S_0 (1 - S_0)} \quad (c.8)$$

estas ecuaciones se resuelven en el paquete de cómputo Mathematica , para $y = P_{i,0}$ ó $P_{v,0}$ y $x = S_0$ donde las expresiones son:

$$\text{NDSolve} \left[\left\{ \begin{aligned} & y'[x] == -0.036 * (1 - W * .0232 / x) / (W(x + 0.0232 * (1 - x)) - x(1 - x)), y[1] == 0 \end{aligned} \right\}, y, \{x, 1, 0.0000001\} \right]$$

$$\text{NDSolve} \left[\left\{ \begin{aligned} & y'[x] == -0.036 * (W(1 - x)) / (W(x + 0.0232 * (1 - x)) - x(1 - x)), y[1] == 0 \end{aligned} \right\}, y, \{x, 0.999999, 0\} \right]$$

en las siguientes hojas se muestran los resultados obtenidos al resolver (c.7) y (c.8).

In[1]:=

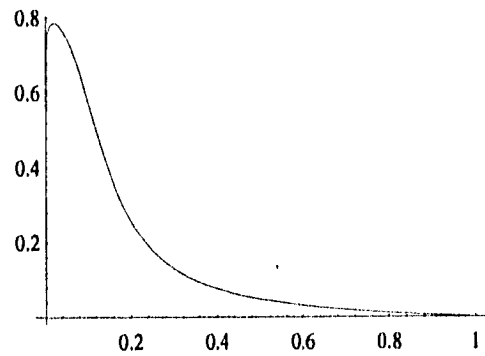
```
NDSolve[{y'[x]==-0.036*(1-.8052*.0232/x)/(-x*(1-x)+
.8052*(.0232*(1-x)+x)),
y[1]==0},y,{x,1,.0000001}]
```

Out[1]=

```
-7
{{y -> InterpolatingFunction[{{1. 10 , 1.}, <>]}}
```

In[2]:=

```
Plot[Evaluate[y[x]/.%,{x,.0000001,1}]
```

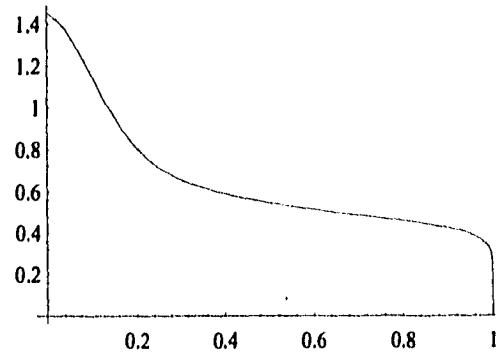


Out[2]=

-Graphics-

```
NDSolve[{y'[x]==(-0.036*.8052/(1-x))/(-x*(1-x)+
.8052*(.0232*(1-x)+x)),y[.999999]==0},y,{x,0.999999,0}]
{{y -> InterpolatingFunction[{{0., 0.999999}}, <>]}}
```

```
Plot[Evaluate[y[x]/.%, {x,0,999999}]
```



-Graphics-

Apéndice D

PROGRAMAS DE CÓMPUTO PARA LA SOLUCIÓN DEL ESTADO PERTURBADO.

(A).- Programa para encontrar el valor de la rapidez de crecimiento de la perturbación que cumpla con la solución no-trivial de la matriz 18x18. Este caso corresponde a una presión capilar igual a cero.

```
REM  LOS PARÁMETROS QUE SE MANEJAN SON : NÚMERO DE
REM  RAYLEIGH,RA, FLUJO DE CALOR,QB, NÚMERO DE ONDA, KO,
REM  RAPIDEZ DE CRECIMIENTO DE LA PERTURBACIÓN ALFA, Y
REM  PARA LA REGIÓN DE DOS FASES TAMBIEN SE DEFINE
REM  LA SATURACIÓN, SO
```

```
INPUT "NÚMERO DE RAYLEIGH, RA="; RA
INPUT "FLUJO DE CALOR, QB="; QB
INPUT "NÚMERO DE ONDA, KO="; KO
INPUT "SATURACIÓN DE LIQUIDO, SO="; SO
```

```
REM  PARA UN ESQUEMA DONDE SE TIENEN 50 ETAPAS EN LA
REM  INTEGRACIÓN, SE TIENE UN INCREMENTO H = 1/50,
REM  PARA EL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA.
```

```
REM  ALGUNAS VARIABLES EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES PARA
REM  CADA REGION DEPENDEN DEL NÚMERO DE ETAPA, POR TANTO ES
REM  NECESARIO DIMENSIONARLAS
```

```
DIM NL(100), N2F(100), A1(100), A2(100), A3(100), B1(100), B2(100), B3(100)
DIM C1(100), C2(100), C3(100), C4(100), XL(10), BL(10, 10), XBL(10)
DIM K1(10, 10), X2F(10), B2F(10, 10), XBF(10), K2(10, 10)
DIM Y(10)
```

```
INPUT "VALOR INICIAL DE LA RAPIDEZ DE CRECIMIENTO DE LA
      PERTURBACION, ALFA="; ALFA
```

```
REM  LOS PARÁMETROS USADOS EN EL MÉTODO DE INTERPOLACIÓN DE
REM  MULLER SON: DESPLAZAMIENTO DE ALFA PARA LOS CALCULOS, HI,
REM  TOLERANCIA PARA LOS VALORES DE ALFA Y DETF, XTOL Y FTOL, Y
```

```
REM EL NÚMERO DE ITERACIONES PARA REALIZAR LA INTERPOLACIÓN,  
REM NLIM  
HI = .1  
XTOL = .00001  
FTOL = .00001  
NLIM = 50  
GOSUB INTER
```

```
REM SE IMPRIMEN LOS RESULTADOS OBTENIDOS DESPUÉS DE LA  
REM INTERPOLACIÓN.
```

```
CLS  
PRINT  
PRINT  
PRINT "PARA RA="; RA, "QB="; QB, "KO="; KO, "SO="; SO, "Y ALFA="; XR  
PRINT  
PRINT "EL DETERMINANTE ES DETF="; FR  
PRINT  
PRINT "CON EL NO. DE ITER. PARA LA INTERPO.NITER="; NITER  
PRINT  
PRINT "DELX="; DELX, "FR="; FR  
PRINT  
INPUT "DESEA VER LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA"; EO
```

```
IF EO = 0 THEN GOTO 4000
```

```
REM BLOQUE PARA PRESENTAR LOS RESULTADOS DE LA REGION  
REM DEL LIQUIDO EN FORMA DE MATRIZ
```

```
PRINT  
PRINT "LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA REGIÓN DEL LÍQUIDO ES:"  
PRINT
```

```
FOR I = 1 TO 5  
PRINT BL(I, 1); BL(I, 2); BL(I, 3); BL(I, 4); BL(I, 5)  
NEXT I
```

```
REM BLOQUE PARA PRESENTAR LOS RESULTADOS DE LA REGION  
REM DE DOS FASES EN FORMA DE MATRIZ
```

```
PRINT  
PRINT "LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA REGION DE DOS FASES ES:"  
PRINT  
PRINT
```

```

FOR I = 1 TO 4
PRINT B2F(I, 1); B2F(I, 2); B2F(I, 3); B2F(I, 4)
NEXT I

INPUT "DESEA VER EL VALOR DE LOS COEF. DE LAS MAT. CONDICION"; FO

IF FO = 0 THEN GOTO 4000

PRINT
PRINT "EL VALOR DE LOS COEFICIENTES SON :."
PRINT
PRINT "F1="; f1; "F2="; f2; "F3="; f3; "F4="; f4; "F5="; f5; "F6="; f6
PRINT
PRINT "L1="; l1; "L2="; l2; "L3="; l3; "L4="; l4; "L5="; l5; "L6="; l6
PRINT
PRINT "H1="; h1; "H2="; h2; "H3="; h3; "H4="; h4; "H5="; h5

4000 :
END

INTER:

REM PARA ENCONTRAR EL VALOR DE LA RAPIDEZ DE
REM CRECIMIENTO DE LA PERTURBACIÓN, ALFA, DONDE
REM EL DETERMINANTE, DETF, SE APROXIMA A CERO
REM SE APLICA LA INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA O
REM DE MULLER. ESTA INTERPOLACIÓN UTILIZA TRES PUNTOS

REM BLOQUE PARA INTERPOLAR Y ENCONTRAR UN VALOR DE "ALFA"
REM QUE HAGA EL "DETF" SE APROXIME A CERO
REM SE ASIGNAN VALORES INICIALES A LOS TRES PUNTOS

Y(1) = ALFA - HI
Y(2) = ALFA
Y(3) = ALFA + HI

REM POSTERIORMENTE SE CALCULAN LOS VALORES DE LOS
REM DETERMINANTES EN CADA PUNTO.

ALFA = Y(1)
GOSUB DETER
FI1 = DETF

ALFA = Y(2)
GOSUB DETER

```

FI2 = DETF

ALFA = Y(3)
 GOSUB DETER
 FI3 = DETF

REM SE EMPIEZAN LAS ITERACIONES PARA LA INTERPOLACION.

20: FOR J = 1 TO NLIM

HI1 = Y(2) - Y(1)
 HI2 = Y(3) - Y(2)
 GI = HI1 / HI2

AI = (FI3 * GI - FI2 * (1 + GI) + FI1) / (HI1 * (HI1 + HI2))
 BI = (FI3 - FI2 - AI * HI2 * HI2) / HI2
 CI = FI2

DISC = SQR(BI ^ 2 - 4 * AI * CI)

IF BI < 0 THEN DISC = -DISC

DELX = -2 * CI / (BI + DISC)
 XR = Y(2) + DELX

ALFA = XR
 GOSUB DETER
 FR = DETF

IF ABS(DELX) < XTOL THEN GOTO 50
 IF ABS(FR) < FTOL THEN GOTO 50

REM BLOQUE DONDE SE SELECCIONAN LOS TRES PUNTOS PARA
 REM UNA NUEVA ITERACION

REM SI DELX > 0 SE ESCOGEN Y(2), Y(3) Y XR PARA LA INTERPOLACION
 REM SI DELX < 0 SE ESCOGEN Y(1), Y(2) Y XR PARA LA INTERPOLACION

IF DELX < 0 THEN GOTO 70

Y(1) = Y(2)
 FI1 = FI2

IF DELX < HI2 THEN GOTO 60

```

Y(2) = Y(3)
FI2 = FI3
Y(3) = XR
FI3 = FR

GOTO 20

60: Y(2) = XR
FI2 = FR

GOTO 20

70: Y(3) = Y(2)
FI3 = FI2

IF ABS(DELX) > HI1 THEN GOTO 80

Y(2) = XR
FI2 = FR

GOTO 20

80: Y(2) = Y(1)
FI2 = FI1
Y(1) = XR
FI1 = FR

NEXT J

50: NITER = J

RETURN

DETER:

REM EN ESTE BLOQUE SE ENCUENTRA EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ
REM DE 18X18.

REM PRIMERO SE CALCULAN LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA Y LOS
REM COEFICIENTES DE LAS MATRICES DE LAS CONDICIONES DE
REM FRONTERA Y DE COMPATIBILIDAD

GOSUB RUNGEK

REM SE ASIGNAN LOS VALORES DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA

```

$$\begin{aligned} b_{11} &= BL(1, 1); b_{12} = BL(1, 2); b_{13} = BL(1, 3); b_{14} = BL(1, 4); b_{15} = BL(1, 5) \\ b_{21} &= BL(2, 1); b_{22} = BL(2, 2); b_{23} = BL(2, 3); b_{24} = BL(2, 4); b_{25} = BL(2, 5) \\ b_{31} &= BL(3, 1); b_{32} = BL(3, 2); b_{33} = BL(3, 3); b_{34} = BL(3, 4); b_{35} = BL(3, 5) \\ b_{41} &= BL(4, 1); b_{42} = BL(4, 2); b_{43} = BL(4, 3); b_{44} = BL(4, 4); b_{45} = BL(4, 5) \\ b_{51} &= BL(5, 1); b_{52} = BL(5, 2); b_{53} = BL(5, 3); b_{54} = BL(5, 4); b_{55} = BL(5, 5) \\ d_{11} &= B2F(1, 1); d_{12} = B2F(1, 2); d_{13} = B2F(1, 3); d_{14} = B2F(1, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21} &= B2F(2, 1); d_{22} = B2F(2, 2); d_{23} = B2F(2, 3); d_{24} = B2F(2, 4) \\ d_{31} &= B2F(3, 1); d_{32} = B2F(3, 2); d_{33} = B2F(3, 3); d_{34} = B2F(3, 4) \\ d_{41} &= B2F(4, 1); d_{42} = B2F(4, 2); d_{43} = B2F(4, 3); d_{44} = B2F(4, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1; f_2 = f_2; f_3 = f_3; f_4 = f_4; f_5 = f_5; f_6 = f_6 \\ l_1 &= l_1; l_2 = l_2; l_3 = l_3; l_4 = l_4; l_5 = l_5; l_6 = l_6 \\ h_1 &= h_1; h_2 = h_2; h_3 = h_3; h_4 = h_4; h_5 = h_5 \end{aligned}$$

REM SE CALCULA EL DETERMINANTE EN VARIAS PARTES

$$DE1 = b_{15} * b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1 - b_{12} * b_{25} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1 - b_{15} * b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1$$

$$DE2 = b_{11} * b_{25} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1 + b_{12} * b_{21} * b_{45} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1 - b_{11} * b_{22} * b_{45} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_1$$

$$DE3 = -b_{15} * b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1 + b_{12} * b_{25} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1 + b_{15} * b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1$$

$$DE4 = -b_{11} * b_{25} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1 - b_{12} * b_{21} * b_{45} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1 + b_{11} * b_{22} * b_{45} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_1$$

$$DE5 = -b_{12} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_2 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_2 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_2 * l_1$$

$$DE6 = -b_{11} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_2 * l_1 + b_{15} * b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{35} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1$$

$$DE7 = -b_{15} * b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{35} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{31} * b_{45} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1$$

$$DE8 = -b_{11} * b_{32} * b_{45} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{14} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{14} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1$$

$$DE9 = b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{24} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{24} * f_2 * f_4 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{13} * d_{22} * f_3 * f_4 * h_3 * l_1$$

$$DE10 = -b_{11} * b_{42} * d_{13} * d_{22} * f_3 * f_4 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{23} * f_3 * f_4 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{23} * f_3 * f_4 * h_3 * l_1$$

$$DE11 = -b_{15} * b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{35} * b_{41} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 + b_{15} * b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1$$

$$DE12 = -b_{11} * b_{35} * b_{42} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{31} * b_{45} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{32} * b_{45} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1$$

$$DE13 = b_{12} * b_{41} * d_{14} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{14} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{24} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1$$

$$DE14 = b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{24} * f_1 * f_5 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{21} * f_3 * f_5 * h_3 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{21} * f_3 * f_5 * h_3 * l_1$$

$$DE15 = -b_{12} * b_{41} * d_{11} * d_{22} * f_3 * f_5 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{11} * d_{22} * f_3 * f_5 * h_3 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{13} * d_{22} * f_1 * f_6 * h_3 * l_1$$

$$DE16 = b_{11} * b_{42} * d_{13} * d_{22} * f_1 * f_6 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{23} * f_1 * f_6 * h_3 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{23} * f_1 * f_6 * h_3 * l_1$$

$$DE17 = -b_{12} * b_{41} * d_{12} * d_{21} * f_2 * f_6 * h_3 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{12} * d_{21} * f_2 * f_6 * h_3 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{11} * d_{22} * f_2 * f_6 * h_3 * l_1$$

$$DE18 = -b_{11} * b_{42} * d_{11} * d_{22} * f_2 * f_6 * h_3 * l_1 + b_{15} * b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{35} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1$$

$$DE19 = -b_{15} * b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{35} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{31} * b_{45} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1$$

$$DE20 = -b_{11} * b_{32} * b_{45} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{24} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{24} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1$$

$$DE21 = -b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{34} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{34} * f_2 * f_4 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{23} * d_{32} * f_3 * f_4 * h_4 * l_1$$

$$DE22 = b_{11} * b_{42} * d_{23} * d_{32} * f_3 * f_4 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{33} * f_3 * f_4 * h_4 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{33} * f_3 * f_4 * h_4 * l_1$$

$$DE23 = -b_{15} * b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{35} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{15} * b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1$$

$$DE24 = -b_{11} * b_{35} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{31} * b_{45} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{32} * b_{45} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1$$

$$DE25 = -b_{12} * b_{41} * d_{24} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{24} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{34} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1$$

$$DE26 = -b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{34} * f_1 * f_5 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{31} * f_3 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{31} * f_3 * f_5 * h_4 * l_1$$

$$DE27 = b_{12} * b_{41} * d_{21} * d_{32} * f_3 * f_5 * h_4 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{21} * d_{32} * f_3 * f_5 * h_4 * l_1 + b_{12} * b_{41} * d_{23} * d_{32} * f_1 * f_6 * h_4 * l_1$$

$$DE28 = -b_{11} * b_{42} * d_{23} * d_{32} * f_1 * f_6 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{33} * f_1 * f_6 * h_4 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{33} * f_1 * f_6 * h_4 * l_1$$

$$DE29 = b_{12} * b_{41} * d_{22} * d_{31} * f_2 * f_6 * h_4 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{22} * d_{31} * f_2 * f_6 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{21} * d_{32} * f_2 * f_6 * h_4 * l_1$$

$$DE30 = b_{11} * b_{42} * d_{21} * d_{32} * f_2 * f_6 * h_4 * l_1 - b_{12} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_5 * l_1 + b_{11} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_5 * l_1$$

$$DE31 = b_{12} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_5 * l_1 - b_{11} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_5 * l_1 + b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_3$$

$$DE32 = -b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_3 - b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_3 + b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_3$$

$$DE33 = b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_3 - b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_3 - b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_3$$

$$DE34 = b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_3 + b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_3 - b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_3$$

$$DE35 = -b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_3 + b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_3 - b_{25} * b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4$$

$$DE36 = b_{22} * b_{35} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{25} * b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 - b_{21} * b_{35} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4$$

$$DE37 = -b_{22} * b_{31} * b_{45} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{21} * b_{32} * b_{45} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{22} * b_{41} * d_{14} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4$$

$$DE38 = -b_{21} * b_{42} * d_{14} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 - b_{22} * b_{41} * d_{12} * d_{24} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{21} * b_{42} * d_{12} * d_{24} * f_2 * f_4 * h_1 * l_4$$

$$DE39 = -b_{22} * b_{41} * d_{13} * d_{22} * f_3 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{21} * b_{42} * d_{13} * d_{22} * f_3 * f_4 * h_1 * l_4 + b_{22} * b_{41} * d_{12} * d_{23} * f_3 * f_4 * h_1 * l_4$$

$$DE40 = -b21 * b42 * d12 * d23 * f3 * f4 * h1 * l4 + b25 * b32 * b41 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4 - b22 * b35 * b41 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4$$

$$DE41 = -b25 * b31 * b42 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4 + b21 * b35 * b42 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4 + b22 * b31 * b45 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4$$

$$DE42 = -b21 * b32 * b45 * d12 * f1 * f5 * h1 * l4 - b22 * b41 * d14 * d22 * f1 * f5 * h1 * l4 + b21 * b42 * d14 * d22 * f1 * f5 * h1 * l4$$

$$DE43 = b22 * b41 * d12 * d24 * f1 * f5 * h1 * l4 - b21 * b42 * d12 * d24 * f1 * f5 * h1 * l4 - b22 * b41 * d12 * d21 * f3 * f5 * h1 * l4$$

$$DE44 = b21 * b42 * d12 * d21 * f3 * f5 * h1 * l4 + b22 * b41 * d11 * d22 * f3 * f5 * h1 * l4 - b21 * b42 * d11 * d22 * f3 * f5 * h1 * l4$$

$$DE45 = b22 * b41 * d13 * d22 * f1 * f6 * h1 * l4 - b21 * b42 * d13 * d22 * f1 * f6 * h1 * l4 - b22 * b41 * d12 * d23 * f1 * f6 * h1 * l4$$

$$DE46 = b21 * b42 * d12 * d23 * f1 * f6 * h1 * l4 + b22 * b41 * d12 * d21 * f2 * f6 * h1 * l4 - b21 * b42 * d12 * d21 * f2 * f6 * h1 * l4$$

$$DE47 = -b22 * b41 * d11 * d22 * f2 * f6 * h1 * l4 + b21 * b42 * d11 * d22 * f2 * f6 * h1 * l4 - b32 * b41 * d12 * f2 * f4 * h2 * l4$$

$$DE48 = b31 * b42 * d12 * f2 * f4 * h2 * l4 + b32 * b41 * d12 * f1 * f5 * h2 * l4 - b31 * b42 * d12 * f1 * f5 * h2 * l4$$

$$DE49 = b32 * b41 * d14 * d32 * f2 * f4 * h4 * l4 - b31 * b42 * d14 * d32 * f2 * f4 * h4 * l4 - b32 * b41 * d12 * d34 * f2 * f4 * h4 * l4$$

$$DE50 = b31 * b42 * d12 * d34 * f2 * f4 * h4 * l4 - b32 * b41 * d13 * d32 * f3 * f4 * h4 * l4 + b31 * b42 * d13 * d32 * f3 * f4 * h4 * l4$$

$$DE51 = b32 * b41 * d12 * d33 * f3 * f4 * h4 * l4 - b31 * b42 * d12 * d33 * f3 * f4 * h4 * l4 - b32 * b41 * d14 * d32 * f1 * f5 * h4 * l4$$

$$DE52 = b31 * b42 * d14 * d32 * f1 * f5 * h4 * l4 + b32 * b41 * d12 * d34 * f1 * f5 * h4 * l4 - b31 * b42 * d12 * d34 * f1 * f5 * h4 * l4$$

$$DE53 = -b32 * b41 * d12 * d31 * f3 * f5 * h4 * l4 + b31 * b42 * d12 * d31 * f3 * f5 * h4 * l4 + b32 * b41 * d11 * d32 * f3 * f5 * h4 * l4$$

$$DE54 = -b31 * b42 * d11 * d32 * f3 * f5 * h4 * l4 + b32 * b41 * d13 * d32 * f1 * f6 * h4 * l4 - b31 * b42 * d13 * d32 * f1 * f6 * h4 * l4$$

$$DE55 = -b32 * b41 * d12 * d33 * f1 * f6 * h4 * l4 + b31 * b42 * d12 * d33 * f1 * f6 * h4 * l4 + b32 * b41 * d12 * d31 * f2 * f6 * h4 * l4$$

$$DE56 = -b31 * b42 * d12 * d31 * f2 * f6 * h4 * l4 - b32 * b41 * d11 * d32 * f2 * f6 * h4 * l4 + b31 * b42 * d11 * d32 * f2 * f6 * h4 * l4$$

$$DE57 = -b32 * b41 * d12 * f2 * f4 * h5 * l4 + b31 * b42 * d12 * f2 * f4 * h5 * l4 + b32 * b41 * d12 * f1 * f5 * h5 * l4$$

$$DE58 = -b31 * b42 * d12 * f1 * f5 * h5 * l4 - b25 * b32 * b41 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5 + b22 * b35 * b41 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5$$

$$DE59 = b25 * b31 * b42 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5 - b21 * b35 * b42 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5 - b22 * b31 * b45 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5$$

$$DE60 = b21 * b32 * b45 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5 - b22 * b41 * d24 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5 + b21 * b42 * d24 * d32 * f2 * f4 * h1 * l5$$

$$DE61 = b22 * b41 * d22 * d34 * f2 * f4 * h1 * l5 - b21 * b42 * d22 * d34 * f2 * f4 * h1 * l5 + b22 * b41 * d23 * d32 * f3 * f4 * h1 * l5$$

$$DE62 = -b21 * b42 * d23 * d32 * f3 * f4 * h1 * l5 - b22 * b41 * d22 * d33 * f3 * f4 * h1 * l5 + b21 * b42 * d22 * d33 * f3 * f4 * h1 * l5$$

$$DE63 = b25 * b32 * b41 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 - b22 * b35 * b41 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 - b25 * b31 * b42 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5$$

$$DE64 = b21 * b35 * b42 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 + b22 * b31 * b45 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 - b21 * b32 * b45 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5$$

$$DE65 = b22 * b41 * d24 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 - b21 * b42 * d24 * d32 * f1 * f5 * h1 * l5 - b22 * b41 * d22 * d34 * f1 * f5 * h1 * l5$$

$$DE66 = b21 * b42 * d22 * d34 * f1 * f5 * h1 * l5 + b22 * b41 * d22 * d31 * f3 * f5 * h1 * l5 - b21 * b42 * d22 * d31 * f3 * f5 * h1 * l5$$

$$DE67 = -b22 * b41 * d21 * d32 * f3 * f5 * h1 * l5 + b21 * b42 * d21 * d32 * f3 * f5 * h1 * l5 - b22 * b41 * d23 * d32 * f1 * f6 * h1 * l5$$

$$DE68 = b21 * b42 * d23 * d32 * f1 * f6 * h1 * l5 + b22 * b41 * d22 * d33 * f1 * f6 * h1 * l5 - b21 * b42 * d22 * d33 * f1 * f6 * h1 * l5$$

$$DE69 = -b22 * b41 * d22 * d31 * f2 * f6 * h1 * l5 + b21 * b42 * d22 * d31 * f2 * f6 * h1 * l5 + b22 * b41 * d21 * d32 * f2 * f6 * h1 * l5$$

$$\begin{aligned}
 DE70 &= -b_{21} * b_{42} * d_{21} * d_{32} * f_2 * f_6 * h_1 * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 \\
 &\quad * h_2 * l_5 + b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_2 * l_5 \\
 DE71 &= b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_2 * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_2 \\
 &\quad * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{14} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_3 * l_5 \\
 DE72 &= b_{31} * b_{42} * d_{14} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_3 * l_5 + b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{34} * f_2 \\
 &\quad * f_4 * h_3 * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{34} * f_2 * f_4 * h_3 * l_5 \\
 DE73 &= b_{32} * b_{41} * d_{13} * d_{32} * f_3 * f_4 * h_3 * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{13} * d_{32} * f_3 \\
 &\quad * f_4 * h_3 * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{33} * f_3 * f_4 * h_3 * l_5 \\
 DE74 &= b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{33} * f_3 * f_4 * h_3 * l_5 + b_{32} * b_{41} * d_{14} * d_{32} * f_1 \\
 &\quad * f_5 * h_3 * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{14} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_3 * l_5 \\
 DE75 &= -b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{34} * f_1 * f_5 * h_3 * l_5 + b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{34} \\
 &\quad * f_1 * f_5 * h_3 * l_5 + b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{31} * f_3 * f_5 * h_3 * l_5 \\
 DE76 &= -b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{31} * f_3 * f_5 * h_3 * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{11} * d_{32} \\
 &\quad * f_3 * f_5 * h_3 * l_5 + b_{31} * b_{42} * d_{11} * d_{32} * f_3 * f_5 * h_3 * l_5 \\
 DE77 &= -b_{32} * b_{41} * d_{13} * d_{32} * f_1 * f_6 * h_3 * l_5 + b_{31} * b_{42} * d_{13} * d_{32} * \\
 &\quad f_1 * f_6 * h_3 * l_5 + b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{33} * f_1 * f_6 * h_3 * l_5 \\
 DE78 &= -b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{33} * f_1 * f_6 * h_3 * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{12} * d_{31} * \\
 &\quad f_2 * f_6 * h_3 * l_5 + b_{31} * b_{42} * d_{12} * d_{31} * f_2 * f_6 * h_3 * l_5 \\
 DE79 &= b_{32} * b_{41} * d_{11} * d_{32} * f_2 * f_6 * h_3 * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{11} * d_{32} * f_2 \\
 &\quad * f_6 * h_3 * l_5 - b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_5 * l_5 \\
 DE80 &= b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_5 * l_5 + b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_5 \\
 &\quad * l_5 - b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_5 * l_5 \\
 DE81 &= b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 * l_6 - b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_2 * f_4 * h_1 \\
 &\quad * l_6 - b_{22} * b_{41} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_6 \\
 DE82 &= b_{21} * b_{42} * d_{22} * f_1 * f_5 * h_1 * l_6 + b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 \\
 &\quad * l_6 - b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_2 * f_4 * h_3 * l_6 \\
 DE83 &= -b_{32} * b_{41} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 * l_6 + b_{31} * b_{42} * d_{12} * f_1 * f_5 * h_3 \\
 &\quad * l_6 + b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_6 \\
 DE84 &= -b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_2 * f_4 * h_4 * l_6 - b_{32} * b_{41} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 \\
 &\quad * l_6 + b_{31} * b_{42} * d_{32} * f_1 * f_5 * h_4 * l_6
 \end{aligned}$$

DET1 = DE1 + DE2 + DE3 + DE4 + DE5 + DE6 + DE7 + DE8 + DE9 + DE10

DET2 = DE11 + DE12 + DE13 + DE14 + DE15 + DE16 + DE17 + DE18 + DE19 +
DE20

DET3 = DE21 + DE22 + DE23 + DE24 + DE25 + DE26 + DE27 + DE28 + DE29 +
DE30

DET4 = DE31 + DE32 + DE33 + DE34 + DE35 + DE36 + DE37 + DE38 + DE39 +
DE40

DET5 = DE41 + DE42 + DE43 + DE44 + DE45 + DE46 + DE47 + DE48 + DE49 +
DE50

DET6 = DE51 + DE52 + DE53 + DE54 + DE55 + DE56 + DE57 + DE58 + DE59 +
DE60

DET7 = DE61 + DE62 + DE63 + DE64 + DE65 + DE66 + DE67 + DE68 + DE69 +
DE70

DET8 = DE71 + DE72 + DE73 + DE74 + DE75 + DE76 + DE77 + DE78 + DE79 +
DE80

DET9 = DE81 + DE82 + DE83 + DE84

DETF = DET1 + DET2 + DET3 + DET4 + DET5 + DET6 + DET7 + DET8 + DET9

RETURN

RUNGEK:

REM SUBROUTINA PARA ENCONTRAR LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA
REM USANDO EL METODO DE RUNGE-KUTTA.

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR EL VALOR DE LOS COEFICIENTES
REM A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3,C4 QUE DEPENDEN DE LA COORDENADA

H = 1 / 50

FOR N = 0 TO 50

NL(N) = H * N
N2F(N) = H * N

$$A1(N) = -RA / QB$$

$$A2(N) = KO ^ 2 / QB ^ 2$$

$$A3(N) = (RA * KO ^ 2 / QB ^ 2) * NL(N) ^ 2 - RA$$

$$B1(N) = -1$$

$$B2(N) = (ALFA * .7283 / QB ^ 2) + (KO ^ 2 / QB ^ 2) - (RA / QB)$$

$$B3(N) = -RA * NL(N) - (ALFA * .7283 * NL(N) / QB) - (KO ^ 2 * NL(N) / QB)$$

$$C1(N) = ((QB - 1) / QB) ^ 2 * KO ^ 2$$

$$C2(N) = ((QB - 1) * RA * 6.7) / (RA * QB * ((1 - SO) + 27.3 * SO) - QB ^ 2 * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB))$$

$$C3(N) = (N2F(N) * (QB - 1) ^ 2 / QB) * KO ^ 2 * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB)$$

$$C4(N) = -(.255 * (QB - 1)) / (QB * RA * ((1 - SO) + 27.3 * SO) - QB ^ 2 * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB))$$

NEXT N

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA
REM REGIÓN DEL LÍQUIDO.

FOR I = 1 TO 5

FOR J = 1 TO 5

XL(J) = 0

NEXT J

XL(I) = 1

GOSUB RUNGE1

FOR J = 1 TO 5

BL(J, I) = XBL(J)

NEXT J

NEXT I

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA
 REM REGIÓN DE DOS FASES.

FOR I = 1 TO 4

FOR J = 1 TO 4

X2F(J) = 0

NEXT J

X2F(I) = 1

GOSUB RUNGE2

FOR J = 1 TO 4

B2F(J, I) = XBF(J)

NEXT J

NEXT I

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR LOS COEFICIENTES DE LAS MATRICES
 REM DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA Y DE COMPATIBILIDAD

f1 = QB * SO

f2 = (QB - 1) * (QB * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB) - RA)

f3 = QB ^ 2 * SO * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB)

f4 = QB * (1 - SO)

f5 = (QB - 1) * (27.3 * RA - QB * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB))

f6 = QB ^ 2 * (1 - SO) * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB)

l1 = -QB * (QB - 1)

l2 = -RA * (QB - 1)

l3 = -RA * QB * (QB - 1)

l4 = -(QB * SO + .0234 * (1 - SO) * QB)

l5 = -(QB - 1) * (QB * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB) * .9765 - .36 * RA)

l6 = -(((1 / 7.706 * SO) + RA / QB) * QB ^ 2 * (SO + .0234 * (1 - SO)) + .35 * (1 - SO)
 * (QB - 1) * ALFA)


```

h1 = QB * (QB - 1) ^ 2
h2 = -QB ^ 2
h3 = .18 * (1 - SO) * QB * (QB - 1)
h4 = .18 * (QB - 1) ^ 2 * (27.3 * RA - QB * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB))
h5 = (QB - 1) ^ 2 * (.18 * QB ^ 2 * ((1 / 7.706 * SO) + RA / QB) * (1 - SO) - .00021 *
(1 - SO) * ALFA)

```

RETURN

RUNGE1:

REM APLICACION DEL MÉTODO PARA INTEGRAR EL SISTEMA DE
REM ECUACIONES DE LA REGIÓN DEL LÍQUIDO

```

G1 = XL(1)
G2 = XL(2)
G3 = XL(3)
G4 = XL(4)
G5 = XL(5)

```

REM EN ESTE BLOQUE SE OBTIENEN LOS VALORES DE LAS K1'S Y DE LOS
REM VECTORES TRANSFORMADOS.

FOR N = 0 TO 50

```

K1(1, 1) = H * (A1(N) * G2 + A2(N) * G3 + A3(N) * G5)
K1(2, 1) = H * (B1(N) * G1 + B2(N) * G4 + B3(N) * G5)
K1(3, 1) = H * G1
K1(4, 1) = H * G2
K1(5, 1) = 0

```

```

K1(1, 2) = H * (A1(N) * (G2 + .5 * K1(2, 1)) + A2(N) * (G3 + .5 * K1(3, 1)) + A3(N) *
(G5 + .5 * K1(5, 1)))
K1(2, 2) = H * (B1(N) * (G1 + .5 * K1(1, 1)) + B2(N) * (G4 + .5 * K1(4, 1)) + B3(N) *
(G5 + .5 * K1(5, 1)))
K1(3, 2) = H * (G1 + .5 * K1(1, 1))
K1(4, 2) = H * (G2 + .5 * K1(2, 1))
K1(5, 2) = 0

```

```

K1(1, 3) = H * (A1(N) * (G2 + .5 * K1(2, 2)) + A2(N) * (G3 + .5 * K1(3, 2)) + A3(N) *
(G5 + .5 * K1(5, 2)))
K1(2, 3) = H * (B1(N) * (G1 + .5 * K1(1, 2)) + B2(N) * (G4 + .5 * K1(4, 2)) + B3(N) *
(G5 + .5 * K1(5, 2)))
K1(3, 3) = H * (G1 + .5 * K1(1, 2))
K1(4, 3) = H * (G2 + .5 * K1(2, 2))

```

$$K1(5, 3) = 0$$

$$K1(1, 4) = H * (A1(N + 1) * (G2 + K1(2, 3)) + A2(N + 1) * (G3 + K1(3, 3)) + A3(N + 1) * (G5 + K1(5, 3)))$$

$$K1(2, 4) = H * (B1(N + 1) * (G1 + K1(1, 3)) + B2(N + 1) * (G4 + K1(4, 3)) + B3(N + 1) * (G5 + K1(5, 3)))$$

$$K1(3, 4) = H * (G1 + K1(1, 3))$$

$$K1(4, 4) = H * (G2 + K1(2, 3))$$

$$K1(5, 4) = 0$$

REM BLOQUE DONDE SE ASIGNAN LOS NUEVOS VALORES AL VECTOR

$$G1 = G1 + (K1(1, 1) + 2 * K1(1, 2) + 2 * K1(1, 3) + K1(1, 4)) / 6$$

$$G2 = G2 + (K1(2, 1) + 2 * K1(2, 2) + 2 * K1(2, 3) + K1(2, 4)) / 6$$

$$G3 = G3 + (K1(3, 1) + 2 * K1(3, 2) + 2 * K1(3, 3) + K1(3, 4)) / 6$$

$$G4 = G4 + (K1(4, 1) + 2 * K1(4, 2) + 2 * K1(4, 3) + K1(4, 4)) / 6$$

$$G5 = G5 + (K1(5, 1) + 2 * K1(5, 2) + 2 * K1(5, 3) + K1(5, 4)) / 6$$

NEXT N

REM BLOQUE DONDE SE ASIGNAN LOS VALORES AL VECTOR
REM TRANSFORMADO

$$XBL(1) = G1$$

$$XBL(2) = G2$$

$$XBL(3) = G3$$

$$XBL(4) = G4$$

$$XBL(5) = G5$$

RETURN

RUNGE2:

REM APLICACIÓN DEL MÉTODO PARA INTEGRAR EL SISTEMA DE
REM ECUACIONES DE LA REGIÓN DE DOS FASES.

$$G1 = X2F(1)$$

$$G2 = X2F(2)$$

$$G3 = X2F(3)$$

$$G4 = X2F(4)$$

REM EN ESTE BLOQUE SE DETERMINAN LOS VALORES DE LAS K2'S Y LOS
REM DEL VECTOR TRANSFORMADO.

FOR N = 0 TO 50

$$K2(1, 1) = H * (C1(N) * G2 + C2(N) * G3 + C3(N) * G4)$$

$$K2(2, 1) = H * G1$$

$$K2(3, 1) = H * (C4(N) * G3)$$

$$K2(4, 1) = 0$$

$$K2(1, 2) = H * (C1(N) * (G2 + .5 * K2(2, 1)) + C2(N) * (G3 + .5 * K2(3, 1)) + C3(N) * (G4 + .5 * K2(4, 1)))$$

$$K2(2, 2) = H * (G1 + .5 * K2(1, 1))$$

$$K2(3, 2) = H * (C4(N) * (G3 + .5 * K2(3, 1)))$$

$$K2(4, 2) = 0$$

$$K2(1, 3) = H * (C1(N) * (G2 + .5 * K2(2, 2)) + C2(N) * (G3 + .5 * K2(3, 2)) + C3(N) * (G4 + .5 * K2(4, 2)))$$

$$K2(2, 3) = H * (G1 + .5 * K2(1, 2))$$

$$K2(3, 3) = H * (C4(N) * (G3 + .5 * K2(3, 2)))$$

$$K2(4, 3) = 0$$

$$K2(1, 4) = H * (C1(N + 1) * (G2 + K2(2, 3)) + C2(N + 1) * (G3 + K2(3, 3)) + C3(N + 1) * (G4 + K2(4, 3)))$$

$$K2(2, 4) = H * (G1 + K2(1, 3))$$

$$K2(3, 4) = H * (C4(N + 1) * (G3 + K2(3, 3)))$$

$$K2(4, 4) = 0$$

REM SE ASIGNAN LOS NUEVOS VALORES AL VECTOR

$$G1 = G1 + (K2(1, 1) + 2 * K2(1, 2) + 2 * K2(1, 3) + K2(1, 4)) / 6$$

$$G2 = G2 + (K2(2, 1) + 2 * K2(2, 2) + 2 * K2(2, 3) + K2(2, 4)) / 6$$

$$G3 = G3 + (K2(3, 1) + 2 * K2(3, 2) + 2 * K2(3, 3) + K2(3, 4)) / 6$$

$$G4 = G4 + (K2(4, 1) + 2 * K2(4, 2) + 2 * K2(4, 3) + K2(4, 4)) / 6$$

NEXT N

REM VALORES DEL VECTOR TRANSFORMADO

$$XBF(1) = G1$$

$$XBF(2) = G2$$

$$XBF(3) = G3$$

$$XBF(4) = G4$$

RETURN

LA MATRIZ DEL DETERMINANTE 18X18 ES :

0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B'_{11}	B'_{12}	B'_{13}	B'_{14}	B'_{15}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B'_{21}	B'_{22}	B'_{23}	B'_{24}	B'_{25}	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B'_{31}	B'_{32}	B'_{33}	B'_{34}	B'_{35}	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B'_{41}	B'_{42}	B'_{43}	B'_{44}	B'_{45}	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	l_1	0	0	l_2	l_3	l_4	0	l_5	l_6	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	h_1	0	0	0	h_2	0	h_3	h_4	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	$B2\phi_{11}$	$B2\phi_{12}$	$B2\phi_{13}$	$B2\phi_{14}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	$B2\phi_{21}$	$B2\phi_{22}$	$B2\phi_{23}$	$B2\phi_{24}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	$B2\phi_{31}$	$B2\phi_{32}$	$B2\phi_{33}$	$B2\phi_{34}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	f_1	0	f_2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	f_4	0	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	f_4	0	f_6

En esta matriz se cambiaron algunas variables, por conveniencia, de las matrices de las condiciones de compatibilidad, estos cambios son:

$$l_1 = -\frac{1}{\delta_0}, \quad l_2 = -Ra, \quad l_3 = -\frac{Ra}{\delta_0}$$

$$l_4 = z_1, \quad l_5 = z_2, \quad l_6 = z_3$$

$$h_1 = \frac{1}{\delta_0}, \quad h_2 = z_4, \quad h_3 = z_5, \quad h_4 = z_6$$

(B).- Programa para encontrar el valor del determinante de la matriz 24x24, para el caso de una presión capilar diferente de cero.

```
REM LA SOLUCIÓN SE OBTIENE AL ENCADENAR CUATRO PROGRAMAS
REM DENTRO DEL LENGUAJE DE TURBOBASIC. LOS PROGRAMAS SON :
REM CADENA.EXE, CDEF1.TBC, CDEF2.TBC Y
REM CDEF3.TBC.
```

```
REM PROGRAMA CADENA : ENCADENAMIENTO DE LOS PROGRAMAS
REM CDEF1.TBC, CDEF2.TBC Y CDEF3.TBC.
REM PARA EL ENCADENAMIENTO SE NECESITA DEFINIR LAS VARIABLES
REM COMUNES ENTRE LOS PROGRAMAS.
```

```
COMMON RA,KO,ALFA,DEF1,DEF2,DEF3
```

```
REM LOS PARÁMETROS DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA QUE SE
REM INTRODUCEN AL PROGRAMA SON :
```

```
INPUT "NÚMERO DE RAYLEIGH, RA=";RA
PRINT
INPUT "NÚMERO DE ONDA, KO=";KO
PRINT
INPUT "TAMAÑO DE LA PERTURBACIÓN,ALFA=";ALFA
PRINT
PRINT"PARA RA=";RA,"KO=";KO,"ALFA=";ALFA
PRINT
```

```
REM EL FLUJO DE CALOR Y LA ALTURA DE LA REGIÓN DE DOS FASES SE
REM DEFINEN EN EL PROGRAMA CDEF1.TBC .
```

```
REM EL ENCADENAMIENTO SE INICIA AL DEFINIR EL PROGRAMA
REM PRINCIPAL COMO UN PROGRAMA AUTÓNOMO (.EXE).
REM POSTERIORMENTE SE UTILIZA EL COMANDO CHAIN.
```

```
CHAIN "CDEF1.TBC"
```

```
END
```

REM CDEF1.TBC: PROGRAMA CADENA PARA ENCONTRAR
 REM LAS MATRICES M2022, MP2016 Y M2021, AL CONSIDERAR LOS
 REM EFECTOS CAPILARES.

REM LOS PARÁMETROS QUE SE MANEJAN SON : NÚMERO DE
 REM RAYLEIGH, RA, FLUJO DE CALOR, W, NÚMERO DE ONDA, KO,
 REM RAZÓN DE CRECIMIENTO DE LA PERTURBACIÓN, ALFA,
 REM Y PARA LA REGIÓN DE DOS FASES SE DEFINE UNA ECUACIÓN
 REM PARA LA SATURACIÓN, SO, Y UN VALOR DE LA ALTURA
 REM DE DOS FASES, D0.

COMMON RA,KO,ALFA,DEF1,DEF2,DEF3

W = 3.0
 RA20 = RA/.03663
 D0 = .9999

REM VALORES DE LOS COEFICIENTES QUE COMPONEN LA ECUACIÓN DE
 REM LA SATURACIÓN EN LA REGIÓN DE DOS FASES.

A = .01163
 B = 1.278
 C = -9.6806
 D = 30.578
 E = -39.2411
 F = 18.047

REM PARA UN MÉTODO DONDE SE TIENEN 50 ETAPAS EN LA
 REM INTEGRACIÓN SE TIENE UN INCREMENTO H = 1/50.
 REM ALGUNAS VARIABLES EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES PARA
 REM CADA REGIÓN DEPENDEN DEL NÚMERO DE ETAPA, POR TANTO ES
 REM NECESARIO DIMENSIONARLAS.

DIM NL(100), N2F(100), A1(100), A2(100), A3(100), B1(100), B2(100), B3(100)
 DIM C1(100), C2(100), C3(100), C4(100), XL(10), BL(10, 10), XBL(10)
 DIM K1(10, 10), X2F(10), B2F(10, 10), XBF(10), K2(10, 10)
 DIM D1(100), D2(100), D3(100), D4(100), E1(100), E2(100), E3(100), E4(100)
 DIM SO(100), SPO(100), PLO(100), PVO(100), JPO(100), PCO(100)

REM EN ESTA SUBROUTINA SE ENCUENTRA EL DETERMINANTE DEF1

GOSUB RUNGEK

REM SE ASIGNAN LOS VALORES DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA

b11 = BL(1, 1): b12 = BL(1, 2): b13 = BL(1, 3): b14 = BL(1, 4): b15 = BL(1, 5)
 b21 = BL(2, 1): b22 = BL(2, 2): b23 = BL(2, 3): b24 = BL(2, 4): b25 = BL(2, 5)
 b31 = BL(3, 1): b32 = BL(3, 2): b33 = BL(3, 3): b34 = BL(3, 4): b35 = BL(3, 5)
 b41 = BL(4, 1): b42 = BL(4, 2): b43 = BL(4, 3): b44 = BL(4, 4): b45 = BL(4, 5)
 b51 = BL(5, 1): b52 = BL(5, 2): b53 = BL(5, 3): b54 = BL(5, 4): b55 = BL(5, 5)

d11 = B2F(1, 1): d12 = B2F(1, 2): d13 = B2F(1, 3): d14 = B2F(1, 4): d15 = B2F(1, 5):
 d16 = B2F(1, 6): d17 = B2F(1, 7)
 d21 = B2F(2, 1): d22 = B2F(2, 2): d23 = B2F(2, 3): d24 = B2F(2, 4): d25 = B2F(2, 5):
 d26 = B2F(2, 6): d27 = B2F(2, 7)
 d31 = B2F(3, 1): d32 = B2F(3, 2): d33 = B2F(3, 3): d34 = B2F(3, 4): d35 = B2F(3, 5):
 d36 = B2F(3, 6): d37 = B2F(3, 7)
 d41 = B2F(4, 1): d42 = B2F(4, 2): d43 = B2F(4, 3): d44 = B2F(4, 4): d45 = B2F(4, 5):
 d46 = B2F(4, 6): d47 = B2F(4, 7)
 d51 = B2F(5, 1): d52 = B2F(5, 2): d53 = B2F(5, 3): d54 = B2F(5, 4): d55 = B2F(5, 5):
 d56 = B2F(5, 6): d57 = B2F(5, 7)
 d61 = B2F(6, 1): d62 = B2F(6, 2): d63 = B2F(6, 3): d64 = B2F(6, 4): d65 = B2F(6, 5):
 d66 = B2F(6, 6): d67 = B2F(6, 7)
 d71 = B2F(7, 1): d72 = B2F(7, 2): d73 = B2F(7, 3): d74 = B2F(7, 4): d75 = B2F(7, 5):
 d76 = B2F(7, 6): d77 = B2F(7, 7)

REM SE CALCULA EL DETERMINANTE EN VARIAS PARTES APLICANDO LA
 REM METASENTENCIA \$INCLUDE PARA LAS MATRICES M2022,MP2016 Y
 REM M2021

\$INCLUDE "M2022.INC"
 \$INCLUDE "MP2016.INC"
 \$INCLUDE "M2021.INC"

DETF1 = -DM2022 + f1 * DMP2016 - f3 * DM2021

PRINT "DETF1=";DETF1

CHAIN "CDETF2.TBC"

END

RUNGEK:

REM SUBRUTINAS PARA ENCONTRAR LAS MATRICES DE
 TRANSFERENCIA REM USANDO EL MÉTODO RUNGE-KUTTA

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR EL VALOR DE LOS COEFICIENTES
 REM A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3,C4,D1,D2,D3,D4 Y E1,E2,E3,E4 QUE
 REM DEPENDEN DE LA COORDENADA.

$$H = 1 / 50$$

FOR N = 0 TO 50

$$NL(N) = H * N$$

$$N2F(N) = H * N$$

$$A1(N) = -RA * D0$$

$$A2(N) = KO ^ 2 * D0 ^ 2$$

$$A3(N) = (RA * KO ^ 2 * D0 ^ 2) * NL(N) ^ 2 - RA$$

$$B1(N) = -1$$

$$B2(N) = (ALFA * .7283 * D0 ^ 2) + (KO ^ 2 * D0 ^ 2) - (RA * D0)$$

$$B3(N) = -RA * NL(N) - (ALFA * .7283 * NL(N) * D0) - (KO ^ 2 * NL(N) * D0)$$

$$SO(N) = A + B * N2F(N) + C * N2F(N) ^ 2 + D * N2F(N) ^ 3 + E * N2F(N) ^ 4 + F * N2F(N) ^ 5$$

$$SPO(N) = B + 2 * C * N2F(N) + 3 * D * N2F(N) ^ 2 + 4 * E * N2F(N) ^ 3 + 5 * F * N2F(N) ^ 4$$

$$PLO(N) = SPO(N) * (1 - .0234 * W / SO(N)) * .036 / (W * (.0234 * (1 - SO(N)) + SO(N)) - SO(N) * (1 - SO(N)))$$

$$PVO(N) = SPO(N) * (.036 * W / (1 - SO(N))) / (W * (.0234 * (1 - SO(N)) + SO(N)) - SO(N) * (1 - SO(N)))$$

$$JPO(N) = -.036 / (SO(N) * (1 - SO(N)))$$

$$PCO(N) = PVO(N) - PLO(N)$$

$$C1(N) = (1 - D0) ^ 2 * KO ^ 2$$

$$C2(N) = (.35 * ALFA * (1 - D0) ^ 2) / SO(N)$$

$$C3(N) = (.03663 * RA20 * (1 - D0) - PLO(N)) / SO(N)$$

$$C4(N) = ((.35 * N2F(N) * (1 - D0) * ALFA * SPO(N)) / SO(N)) + N2F(N) * (1 - D0) * KO ^ 2 * PLO(N)$$

$$D1(N) = C1(N)$$

$$D2(N) = (-.35 * ALFA * (1 - D0) ^ 2) / (38.67 * (1 - SO(N)))$$

$$D3(N) = (PVO(N) - RA20 * (1 - D0)) / (1 - SO(N))$$

$$D4(N) = N2F(N) * (1 - D0) * KO ^ 2 * PVO(N) - (.00905 * N2F(N) * (1 - D0) * ALFA * SPO(N)) / (1 - SO(N))$$


```

E1(N) = C1(N) / JPO(N)
E2(N) = -((1 / SO(N)) + (.0258 / (1 - SO(N)))) * .35 * ALFA * (1 - D0) ^ 2 / JPO(N)
E3(N) = (1 / JPO(N)) * ((PVO(N) / (1 - SO(N))) + (PLO(N) / SO(N)) - (1 - D0) * RA20
      * ((.03663 / SO(N)) + (1 / (1 - SO(N)))))
E4(N) = (1 / JPO(N)) * (N2F(N) * (1 - D0) * KO ^ 2 * PCO(N) - .35 * N2F(N) * (1 -
      D0) * ALFA * SPO(N) * ((1 / SO(N)) + (.0258 / (1 - SO(N)))))

```

NEXT N

REM BLOQUE PARA CALCULAR EL VALOR DE LOS COEFICIENTES DE LAS
 REM MATRICES DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA Y DE
 REM COMPATIBILIDAD.

```

f1 = SO(50) / (1 - D0)
f2 = 1 / (1 - D0) - RA
f3 = SO(50) * PLO(50) / (1 - D0) ^ 2
f4 = (1 - SO(50)) / (1 - D0)
f5 = RA20 - PVO(50) / (1 - D0)
f6 = (1 - SO(50)) * PVO(50) / (1 - D0) ^ 2

```

```

h1 = -1 / D0
h2 = -RA
h3 = -RA / D0
h4 = 1 / D0

```

```

g1 = SO(50) / (1 - D0)
g2 = .023465 * (1 - SO(50)) / (1 - D0)
g3 = SO(50) * PLO(50) / (1 - D0) ^ 2 + .023465 * (1 - SO(50)) * PVO(50) / (1 - D0) ^ 2
      + .35 * (1 - SO(50)) * ALFA
g4 = PLO(50) / (1 - D0) - .023465 * PVO(50) / (1 - D0) + .023465 * RA20 - RA
g5 = .18 * (SO(50)) / (1 - D0)
g6 = .18 * (1 - SO(50)) * PVO(50) / (1 - D0) ^ 2 - .0016366 * ALFA * (1 - SO(50))
g7 = .18 * (RA20 - PVO(50) / (1 - D0))

```

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA
 REM REGIÓN DEL LÍQUIDO.

FOR I = 1 TO 5

FOR J = 1 TO 5

XL(J) = 0

NEXT J

```
XL(I) = 1

GOSUB RUNGE1

FOR J = 1 TO 5

BL(J, I) = XBL(J)

NEXT J

NEXT I

REM BLOQUE PARA ENCONTRAR LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE LA
REM REGIÓN DE DOS FASES

FOR I = 1 TO 7

FOR J = 1 TO 7

X2F(J) = 0

NEXT J

X2F(I) = 1

GOSUB RUNGE2

FOR J = 1 TO 7

B2F(J, I) = XBF(J)

NEXT J

NEXT I

RETURN

RUNGE1:

REM APLICACIÓN DEL MÉTODO PARA INTEGRAR EL SISTEMA DE
REM ECUACIONES DE LA REGIÓN DEL LÍQUIDO

GG1 = XL(1)
GG2 = XL(2)
GG3 = XL(3)
```

$$GG4 = XL(4)$$

$$GG5 = XL(5)$$

REM EN ESTE BLOQUE SE OBTIENEN LOS VALORES DE LAS K1'S Y DE LOS
REM LOS VECTORES TRANSFORMADOS.

FOR N = 0 TO 50

$$K1(1, 1) = H * (A1(N) * GG2 + A2(N) * GG3 + A3(N) * GG5)$$

$$K1(2, 1) = H * (B1(N) * GG1 + B2(N) * GG4 + B3(N) * GG5)$$

$$K1(3, 1) = H * GG1$$

$$K1(4, 1) = H * GG2$$

$$K1(5, 1) = 0$$

$$K1(1, 2) = H * (A1(N) * (GG2 + .5 * K1(2, 1)) + A2(N) * (GG3 + .5 * K1(3, 1)) + A3(N) * (GG5 + .5 * K1(5, 1)))$$

$$K1(2, 2) = H * (B1(N) * (GG1 + .5 * K1(1, 1)) + B2(N) * (GG4 + .5 * K1(4, 1)) + B3(N) * (GG5 + .5 * K1(5, 1)))$$

$$K1(3, 2) = H * (GG1 + .5 * K1(1, 1))$$

$$K1(4, 2) = H * (GG2 + .5 * K1(2, 1))$$

$$K1(5, 2) = 0$$

$$K1(1, 3) = H * (A1(N) * (GG2 + .5 * K1(2, 2)) + A2(N) * (GG3 + .5 * K1(3, 2)) + A3(N) * (GG5 + .5 * K1(5, 2)))$$

$$K1(2, 3) = H * (B1(N) * (GG1 + .5 * K1(1, 2)) + B2(N) * (GG4 + .5 * K1(4, 2)) + B3(N) * (GG5 + .5 * K1(5, 2)))$$

$$K1(3, 3) = H * (GG1 + .5 * K1(1, 2))$$

$$K1(4, 3) = H * (GG2 + .5 * K1(2, 2))$$

$$K1(5, 3) = 0$$

$$K1(1, 4) = H * (A1(N + 1) * (GG2 + K1(2, 3)) + A2(N + 1) * (GG3 + K1(3, 3)) + A3(N + 1) * (GG5 + K1(5, 3)))$$

$$K1(2, 4) = H * (B1(N + 1) * (GG1 + K1(1, 3)) + B2(N + 1) * (GG4 + K1(4, 3)) + B3(N + 1) * (GG5 + K1(5, 3)))$$

$$K1(3, 4) = H * (GG1 + K1(1, 3))$$

$$K1(4, 4) = H * (GG2 + K1(2, 3))$$

$$K1(5, 4) = 0$$

REM BLOQUE DONDE SE ASIGNAN LOS NUEVOS VALORES AL VECTOR

$$GG1 = GG1 + (K1(1, 1) + 2 * K1(1, 2) + 2 * K1(1, 3) + K1(1, 4)) / 6$$

$$GG2 = GG2 + (K1(2, 1) + 2 * K1(2, 2) + 2 * K1(2, 3) + K1(2, 4)) / 6$$

$$GG3 = GG3 + (K1(3, 1) + 2 * K1(3, 2) + 2 * K1(3, 3) + K1(3, 4)) / 6$$

$$GG4 = GG4 + (K1(4, 1) + 2 * K1(4, 2) + 2 * K1(4, 3) + K1(4, 4)) / 6$$

$$GG5 = GG5 + (K1(5, 1) + 2 * K1(5, 2) + 2 * K1(5, 3) + K1(5, 4)) / 6$$

NEXT N

REM BLOQUE DONDE SE ASIGNAN LOS VALORES AL VECTOR
REM TRANSFORMADO.

XBL(1) = GG1
XBL(2) = GG2
XBL(3) = GG3
XBL(4) = GG4
XBL(5) = GG5

RETURN

RUNGE2:

REM APLICACIÓN DEL MÉTODO PARA INTEGRAR EL SISTEMA DE
REM ECUACIONES DE LA REGIÓN DE DOS FASES.

GG1 = X2F(1)
GG2 = X2F(2)
GG3 = X2F(3)
GG4 = X2F(4)
GG5 = X2F(5)
GG6 = X2F(6)
GG7 = X2F(7)

REM EN ESTE BLOQUE SE DETERMINAN LOS VALORES DE LAS K2'S Y LOS
REM VALORES DEL VECTOR TRANSFORMADO.

FOR N = 0 TO 50

K2(1, 1) = H * (C1(N) * GG4 + C2(N) * GG6 + C3(N) * GG3 + C4(N) * GG7)
K2(2, 1) = H * (D1(N) * GG5 + D2(N) * GG6 + D3(N) * GG3 + D4(N) * GG7)
K2(3, 1) = H * (E1(N) * GG5 - E1(N) * GG4 + E2(N) * GG6 + E3(N) * GG3 + E4(N) *
GG7)
K2(4, 1) = H * GG1
K2(5, 1) = H * GG2
K2(6, 1) = H * GG3
K2(7, 1) = 0

K2(1, 2) = H * (C1(N) * (GG4 + .5 * K2(4, 1)) + C2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 1)) +
C3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 1)) + C4(N) * (GG7 + .5 * K2(7, 1)))

$$\begin{aligned}
 K2(2, 2) &= H * (D1(N) * (GG5 + .5 * K2(5, 1)) + D2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 1)) + \\
 &\quad D3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 1)) + D4(N) * (GG7 + .5 * K2(7, 1))) \\
 K2(3, 2) &= H * (E1(N) * (GG5 + .5 * K2(5, 1)) - E1(N) * (GG4 + .5 * K2(4, 1)) + \\
 &\quad E2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 1)) + E3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 1)) + E4(N) * (GG7 \\
 &\quad + .5 * K2(7, 1))) \\
 K2(4, 2) &= H * (GG1 + .5 * K2(1, 1)) \\
 K2(5, 2) &= H * (GG2 + .5 * K2(2, 1)) \\
 K2(6, 2) &= H * (GG3 + .5 * K2(3, 1)) \\
 K2(7, 2) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K2(1, 3) &= H * (C1(N) * (GG4 + .5 * K2(4, 2)) + C2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 2)) + \\
 &\quad C3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 2)) + C4(N) * (GG7 + .5 * K2(7, 2))) \\
 K2(2, 3) &= H * (D1(N) * (GG5 + .5 * K2(5, 2)) + D2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 2)) + \\
 &\quad D3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 2)) + D4(N) * (GG7 + .5 * K2(7, 2))) \\
 K2(3, 3) &= H * (E1(N) * (GG5 + .5 * K2(5, 2)) - E1(N) * (GG4 + .5 * K2(4, 2)) + \\
 &\quad E2(N) * (GG6 + .5 * K2(6, 2)) + E3(N) * (GG3 + .5 * K2(3, 2)) + E4(N) * (GG7 \\
 &\quad + .5 * K2(7, 2))) \\
 K2(4, 3) &= H * (GG1 + .5 * K2(1, 2)) \\
 K2(5, 3) &= H * (GG2 + .5 * K2(2, 2)) \\
 K2(6, 3) &= H * (GG3 + .5 * K2(3, 2)) \\
 K2(7, 3) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K2(1, 4) &= H * (C1(N + 1) * (GG4 + K2(4, 3)) + C2(N + 1) * (GG6 + K2(6, 3)) + C3(N \\
 &\quad + 1) * (GG3 + K2(3, 3)) + C4(N + 1) * (GG7 + K2(7, 3))) \\
 K2(2, 4) &= H * (D1(N + 1) * (GG5 + K2(5, 3)) + D2(N + 1) * (GG6 + K2(6, 3)) + D3(N \\
 &\quad + 1) * (GG3 + K2(3, 3)) + D4(N + 1) * (GG7 + K2(7, 3))) \\
 K2(3, 4) &= H * (E1(N + 1) * (GG5 + K2(5, 3)) - E1(N + 1) * (GG4 + K2(4, 3)) + E2(N \\
 &\quad + 1) * (GG6 + K2(6, 3)) + E3(N + 1) * (GG3 + K2(3, 3)) + E4(N + 1) * \\
 &\quad (GG7 + K2(7, 3))) \\
 K2(4, 4) &= H * (GG1 + K2(1, 3)) \\
 K2(5, 4) &= H * (GG2 + K2(2, 3)) \\
 K2(6, 4) &= H * (GG3 + K2(3, 3)) \\
 K2(7, 4) &= 0
 \end{aligned}$$

REM SE ASIGNAN LOS NUEVOS VALORES AL VECTOR

$$\begin{aligned}
 GG1 &= GG1 + (K2(1, 1) + 2 * K2(1, 2) + 2 * K2(1, 3) + K2(1, 4)) / 6 \\
 GG2 &= GG2 + (K2(2, 1) + 2 * K2(2, 2) + 2 * K2(2, 3) + K2(2, 4)) / 6 \\
 GG3 &= GG3 + (K2(3, 1) + 2 * K2(3, 2) + 2 * K2(3, 3) + K2(3, 4)) / 6 \\
 GG4 &= GG4 + (K2(4, 1) + 2 * K2(4, 2) + 2 * K2(4, 3) + K2(4, 4)) / 6 \\
 GG5 &= GG5 + (K2(5, 1) + 2 * K2(5, 2) + 2 * K2(5, 3) + K2(5, 4)) / 6 \\
 GG6 &= GG6 + (K2(6, 1) + 2 * K2(6, 2) + 2 * K2(6, 3) + K2(6, 4)) / 6 \\
 GG7 &= GG7 + (K2(7, 1) + 2 * K2(7, 2) + 2 * K2(7, 3) + K2(7, 4)) / 6
 \end{aligned}$$

NEXT N

REM VALORES DEL VECTOR TRANSFORMADO

XBF(1) = GG1

XBF(2) = GG2

XBF(3) = GG3

XBF(4) = GG4

XBF(5) = GG5

XBF(6) = GG6

XBF(7) = GG7

RETURN

REM CDEF2.TBC: PROGRAMA CADENA PARA ENCONTRAR
REM LAS MATRICES M3P2016 Y M2020, DONDE SE CONSIDERAN LOS
REM EFECTOS CAPILARES.

COMMON RA,KO,ALFA,DEF1,DEF2,DEF3

REM SE CALCULA EL DETERMINANTE EN VARIAS PARTES APLICANDO LA
REM METASENTENCIA \$INCLUDE PARA LAS MATRICES M3P2016 Y M2020

\$INCLUDE "M3P2016.INC"

\$INCLUDE "M2020.INC"

DEF2 = - f1 * f4 * DM3P2016 - f3 * f4 * DM2020

PRINT "DEF2=";DEF2

CHAIN "CDEF3.TBC"

END

```
REM CDEF3.TBC: PROGRAMA CADENA PARA ENCONTRAR  
REM LAS MATRICES MP2021 Y M2222, DONDE SE CONSIDERAN LOS  
REM EFECTOS CAPILARES.
```

```
COMMON RA,KO,ALFA,DEF1,DEF2,DEF3  
REM SE CALCULA EL DETERMINANTE EN VARIAS PARTES APLICANDO LA  
REM METASENTENCIA $INCLUDE PARA LAS MATRICES MP2021,M2222
```

```
$INCLUDE "MP2021.INC"  
$INCLUDE "M2222.INC"
```

```
DEF3 = - f4 * DMP2021 + f6 * DM2222
```

```
PRINT "DEF3=";DEF3
```

```
DEF=DEF1+DEF2+DEF3
```

```
PRINT  
PRINT"EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ 24x24 ES : DEF=";DEF
```

```
END
```

EN LOS PROGRAMAS DEF2.TBC Y DEF3.TBC SE REPITEN LOS BLOQUES DONDE SE ASIGNAN LOS VALORES A LOS COEFICIENTES DE LAS MATRICES DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA Y DE COMPATIBILIDAD, ASÍ COMO TAMBIÉN, EL BLOQUE DE LA SUBROUTINA RUNGEK, POR TANTO, NO SE ESCRIBEN EN LOS PROGRAMAS.

POR OTRA PARTE, LA EXPRESIÓN DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ DE 24X24 NO SE INCLUYE DEBIDO A SU GRAN TAMAÑO, PERO ESTA REPRESENTADA POR TODAS LAS MATRICES QUE TIENE LA METASENTENCIA \$INCLUDE (.INC), DENTRO DE LOS PROGRAMAS. EN LA SIGUIENTE HOJA SE PRESENTA LA MATRIZ 24X24.

