

112
24



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**MODELO ESTRUCTURA-SUELO-SEMIESPACIO
PARA ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL**

P R E S E N T A :

CESAR VAZQUEZ LORENZANA



MEXICO, D. F.

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-170/95

Señor
CESAR VAZQUEZ LORENZANA
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. JOSE LUIS URRUTIA-GALICIA**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"MODELO ESTRUCTURA-SUELO-SEMIESPACIO PARA ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS"

NOMENCLATURA

RESUMEN

INTRODUCCION

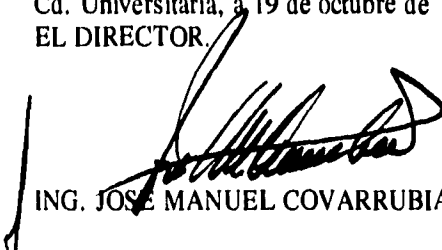
- I. REVISION BIBLIOGRAFICA**
 - II. FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO**
 - III. ANALISIS PARAMETRICO**
 - IV. CONCLUSIONES**
- REFERENCIAS**

APENDICE. PROGRAMA DE CALCULO

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 19 de octubre de 1995.
EL DIRECTOR.



ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/GMP*nl1



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-170/95

Señor
CESAR VAZQUEZ LORENZANA
Presente.

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **ING. JOSE LUIS URRUTIA-GALICIA**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"MODELO ESTRUCTURA-SUELO-SEMIESPACIO PARA ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS"

NOMENCLATURA

RESUMEN

INTRODUCCION

- I. REVISION BIBLIOGRAFICA**
 - II. FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO**
 - III. ANALISIS PARAMETRICO**
 - IV. CONCLUSIONES**
- REFERENCIAS**

APENDICE. PROGRAMA DE CALCULO

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 19 de octubre de 1995.
EL DIRECTOR.



ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS

JMCS/GMP*nll

A mis Padres, quien con su ejemplo de constancia, disciplina, honradez, dignidad y amor me han impulsado por el camino correcto de la vida y enseñado a ser hombre libre.

A mis hermanas por su paciencia y cooperación.

***A la mujer, que con su amistad apoyo y comprensión hizo posible el sueño de un hombre.... Amar.
A Edith Álvarez Flores.***

Este trabajo esta dedicado a todas aquellas personas que en algún momento han influido en mi para ser una mejor persona. A todos ustedes mil gracias.

Un especial agradecimiento al Instituto de Ingeniería de la UNAM por el apoyo que me brindó para la realización de esta Tesis, así como al Dr. Guadalupe Moisés Arroyo Contreras por haberme aceptado a trabajar con el y formar parte del equipo de trabajo del Dr. José Luis Urrutia Galicia, a quien le agradezco por todo su apoyo en la realización de esta tesis, paciencia de que asimilara sus conocimientos y por sus consejos que me servirán para superarme en lo personal y profesional.

ÍNDICE

NOMENCLATURA

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

CAPITULO 1	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	1
CAPÍTULO 2	FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	
2.1	FORMAS MODALES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES DE ANÁLISIS DINÁMICO	4
2.2	ECUACIONES CLÁSICAS DE MOVIMIENTO	6
2.3	FRECUENCIAS NATURALES	9
2.4	SOLUCIÓN GENERAL	13
2.5	SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER	14
2.6	FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL	16
	2.6.1 PARA MODOS DE CUERPO RÍGIDO	
	2.6.2 PARA MODOS SUPERIORES AL DE CUERPO RÍGIDO	
CAPITULO 3	ANÁLISIS PARAMÉTRICO	
3.1	CONSIDERACIONES GENERALES	22
	3.1.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO	
3.2	CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA ANALIZADO	24
	3.2.1 PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA	

3.2.2 PROPIEDADES DE LA ESTRATIGRAFÍA

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

27

3.3.1 REGISTRO DE CAMPO LIBRE

3.3.2 FRECUENCIAS NATURALES, ESTRUCTURA
SUELO SEMIESPACIO

3.3.3 DENSIDAD DE FRECUENCIAS, ESTRUCTURA
SUELO SEMIESPACIO

3.3.4 FORMAS MODALES, ESTRUCTURA SUELO
SEMIESPACIO

3.3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (FUNCIÓN DE
AMPLIFICACIÓN)

3.3.6 CÁLCULO DEL ESPECTRO DE LOS DEPÓSITOS
PROFUNDOS

3.3.7 ANÁLISIS DE CAMPO LIBRE

3.3.8 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN SUELO
ESTRUCTURA

3.3.9 INFLUENCIA DE LAS FORMAS MODALES EN EL
ANÁLISIS DINÁMICO

3.4 ANÁLISIS DINÁMICO TRADICIONAL DE INTERACCIÓN SUELO
ESTRUCTURA

43

3.4.1 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN
CONSIDERANDO LA ESTRATIGRAFÍA (REGISTROS DE
TERRENO DURO)

3.4.2 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN
CONSIDERANDO LA ESTRATIGRAFÍA (REGISTROS
DE CAMPO LIBRE)

CAPITULO 4 CONCLUSIONES

48

REFERENCIAS

APÉNDICE A NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

I

A.1 CONCEPTOS GENERALES

A.2 SISTEMAS VIBRATORIOS

A.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO

A.4 MOVIMIENTO PERIÓDICO

A.5 CÁLCULO TENSORIAL

A.6 ANÁLISIS DE FOURIER

APÉNDICE B PROGRAMA DE CÁLCULO PARA EL ANÁLISIS
DINÁMICO DE LA RESPUESTA DE UN MODELO
SEMIDEFINIDO

XVII

NOMENCALTURA

NOMENCLATURA

A_m, B_m Coeficientes de Fourier

C_n, A_0 Coeficientes de Fourier

C Matriz de amortiguamiento

f^n Componentes contravariantes

f_n Componentes covariantes

$\|\tilde{F}\|$ Norma de la función o vector

K Matriz de Rigideces

Rm Relación de masas

M Matriz de masas

M_E Masa del Semiespacio

S_n Coeficiente de carga

T Periodo

x Desplazamiento

x_E Desplazamiento del Semiespacio

\dot{x} Velocidad

\ddot{x} Aceleración

α, β Constantes de amortiguamiento proporcional

γ_k Amortiguamiento subcrítico

ξ_n Amortiguamiento viscoso

$\eta_n(t)$ Factor de participación covariante

$\eta^n(t)$ Factor de participación contravariante

$\tilde{\phi}_n$ Formas modales covariantes

$\tilde{\phi}^n$ Formas modales contravariantes

Φ_n Ángulo de fase

ω_k Valor de la función evaluada en ϕ_k

ω_n Frecuencia natural del sistema para el n-ésimo modo de vibrar

CAPÍTULO 1
REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Jennings y Bielak (1973) en este trabajo estudian el suelo modelado por un semiespacio elástico lineal. Analizan una respuesta sísmica y una respuesta senoidal. Suponen que la interacción de los sistemas poseen "n+2" frecuencias resonantes y presentan resultados donde la interacción disminuye el valor de las frecuencias resonantes pero los efectos son significativos solo para el modo fundamental para estructuras de "n" niveles. La excitación sísmica es típicamente idealizada como un momento sísmico vertical.

Bielak (1975) utiliza un método aproximado de análisis modal para calcular la respuesta sísmica de sistemas suelo-estructura de comportamiento lineal. Haciendo uso de las configuraciones modales de la superestructura apoyado sobre base rígida, expresa el amortiguamiento modal como una suma pesada de las fracciones del amortiguamiento crítico de la superestructura más un término adicional que representa la energía disipada por el suelo.

En otro trabajo estudia la respuesta dinámica de un sismo en edificios con cimentación sobre suelo flexible modelado por un medio elástico isotrópico, el sismo es aplicado en la base con una señal de campo libre.

Wolf (1985) desarrolla un modelo basado en desplazamientos totales donde la excitación se aplica a la base y el análisis conduce a desplazamientos totales de la estructura. En otro artículo el mismo autor divide el problema en interacción cinemática e inercial aplicando la excitación en los nodos de la superestructura, como una fuerza proporcional a la masa de cada nudo.

Wolf hace la aclaración que para el caso de cimentación flexible no se obtiene un gran beneficio al dividir al problema en dos partes, pues el problema es tan complejo como considerar los desplazamientos totales. Sin embargo, para el caso de cimentación rígida, el problema si se simplifica.

Luco (1986) comenta que es posible determinar experimentalmente las frecuencias y amortiguamientos modales del sistema completo estructura cimentación suelo, y que estos pueden ser muy diferentes de los obtenidos considerando exclusivamente la superestructura. El modelo lo considera de "n+1" grados de libertad para un edificio de "n" niveles. El acoplamiento del sistema suelo estructura lo hace a través de las funciones de transferencia.

Bárcena y Romo (1993) proponen una metodología, para determinar el periodo efectivo de estructuras desplantadas sobre base deformable, basada en el modelo de elementos finitos descrito en (Romo y Bárcena 1993). Obtienen funciones de amplificación (resultado de cocientes de espectros de respuesta) de las que observan características vibratorias de la estructura con base rígida, con base flexible y del sistema suelo estructura tales como es su periodo efectivo.

En este otro trabajo **Romo y Bárcena (1993)** presentan un procedimiento para analizar el problema de interacción dinámica suelo-estructura mediante un modelo de elementos finitos en el que la respuesta del campo libre se calcula primero y la del sistema suelo-estructura se obtiene posteriormente. Siguen tres pasos básicos del método donde a partir del espectro de diseño obtienen el espectro de potencia medio deconvolucionándolo para definir el espectro de potencia medio en la base del modelo y así calcular la respuesta del sistema suelo-estructura en términos de espectros de potencia medios.

CFE Manual de Diseño de Obras Civiles (1993) en esta publicación utilizan un oscilador equivalente sobre base flexible, que representa a un edificio de cortante con N entresijos y múltiples grados de libertad generalizados que se apoya sobre un estrato homogéneo de suelo. Para la representación de la respuesta dinámica de la estructura utilizan un oscilador simple a partir de su periodo fundamental sobre base rígida. Manejan como movimiento de control el acelerograma medido en la dirección N00E de la estación CU, durante el sismo del 19 de septiembre de 1995.

Wen-Hwa y Allison (1995) presentan una metodología basada en el análisis modal desarrollado en el dominio de la frecuencia para obtener la respuesta estructural de un sistema con interacción suelo-estructura. Los efectos de interacción los representan usando un factor de modificación en el movimiento del terreno de campo libre obtenido para cada modo de vibrar y usado en la determinación de la respuesta estructural.

Urrutia, Arroyo y Vázquez (1996) proponen un modelo semidefinido que recibe la señal sísmica en un semiespacio móvil que aloja al depósito de suelo y a la estructura. La señal sísmica que consideran es de terreno duro y primero la aplican al semiespacio y suelo para encontrar la señal de campo libre para compararla con la señal obtenida del sistema completo.

Como se puede notar, existe una opinión similar para la solución del problema de interacción suelo estructura, la cual es el uso frecuente de la señal de campo libre inducida en la base de la estructura para después acoplarlo con la respuesta del suelo y así resolver el problema.

En los capítulos siguientes se presentan: el modelo matemático utilizado para el análisis sísmico, el ejemplo estudiado, un análisis paramétrico y las conclusiones obtenidas de los resultados.

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1 FORMAS MODALES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES DE ANÁLISIS DINÁMICO. Cuando las " n " formas modales covariantes y las " n " formas modales contravariantes (de análisis dinámico) se conocen, la teoría clásica de vibraciones adquiere una perspectiva más clara y general. La presentación de estas dos familias de formas modales da origen a la formulación de un nuevo esquema de análisis dinámico en coordenadas oblicuas, las cuales se aplican al análisis dinámico de sistemas estructurales con distribuciones arbitrarias de masa y rigidez y se aplican por igual a **medios discretos y continuos o a sistemas positivo definidos o semidefinidos**, utilizando para todos los análisis la misma álgebra.

Un análisis modal de vibraciones sigue cuatro pasos (Blevins, 1979):

1. Se identifica el sistema estructural con sus condiciones de frontera.
2. Se calculan las frecuencias y las formas modales.
3. Se definen las excitaciones que actúan sobre el sistema estructural.
4. Se aplican las cargas al modelo matemático y se obtiene la solución matemática.

Las herramientas con las que podemos hacer los análisis dinámicos son dos principalmente, **las frecuencias y la formas modales** en un número infinito si el sistema es continuo y, en el caso de sistemas discretos, las " n " frecuencias y " n " formas modales para " n " grados de libertad.

Se debe recordar además que, las formas modales son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez, mas no son ortogonales entre sí. Sin embargo estas formas modales generan un **espacio coordinado covariante** y de el se puede generar otro espacio **contravariante** (Urrutia, 1992a, 1992b).

El conocimiento de las formas modales covariantes y contravariantes permite hacer generalizaciones del análisis de funciones en coordenadas oblicuas y contienen al análisis de Fourier como un caso particular. Esto ayuda a su vez a establecer e identificar **un modelo de análisis dinámico invariante**, es decir, **tensorial**, aplicable tanto a **sistemas positivo definidos** (con apoyos fijos) como a **sistemas semidefinidos** (sin ningún punto fijo), que es el tipo de sistema utilizado en el modelo presentado en este trabajo.

Si existe un sistema elástico con masas y rigideces M y K que vibra a la frecuencias naturales ω_n y con las formas modales covariantes ϕ_n , linealmente independientes (pero no necesariamente ortogonales), entonces existe otro conjunto ϕ^n de formas modales contravariantes ortogonales a las primeras, de manera que dada una función arbitraria o una distribución de cargas F de norma $\|F\|$ se puede descomponer de la siguiente manera

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} f^n \phi_n \quad (2.1)$$

con bases covariantes ϕ_n y componentes contravariantes f^n , o en la forma

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi^n \quad (2.2)$$

con bases contravariantes ϕ^n y componentes covariantes f_n . Por tanto, si las ecuaciones 2.1 y 2.2 se conocen entonces la norma de la función (o vector) \tilde{F} se puede obtener como

$$\|\tilde{F}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f^n f_n} \quad (2.3)$$

donde para sistemas coordinados oblicuos es el complemento y constituye una generalización del teorema de Pitágoras usado en sistemas rectangulares.

Para el caso dinámico general de sistemas elásticos los más comunes incluyen configuraciones estructurales con distribuciones de masa y rigidez no uniformes. Las formas modales ϕ_n son ortogonales con respecto a los operadores de masa y rigidez M y K . Sin embargo, no obstante que no son ortogonales entre si, tienen capacidad para generar un espacio funcional oblicuo dentro del cual cualquier función arbitraria puede descomponerse.

Un caso particular ocurre cuando el sistema dinámico, continuo o discreto está constituido tanto por masas como rigideces iguales. Para este caso las formas modales covariantes ϕ_n son, a la vez, ortogonales y linealmente independientes entre sí. Las formas modales contravariantes ϕ^n son colineales con las formas modales ϕ_n , de modo que ϕ^n es idéntico a ϕ_n para todo "n". De la misma manera $f^n = f_n$ y, por tanto, de la ecuación 2.3 la norma de \tilde{F} es

$$\|\tilde{F}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2} \quad (2.4)$$

como corresponde a espacios lineales ortogonales donde f_n y f^n son el factor de carga covariante y contravariante respectivamente.

2.2 ECUACIONES CLÁSICAS DE MOVIMIENTO (Urrutia, 1992a, 1992b). La ecuación de equilibrio dinámico de una estructura elástica con distribuciones no uniformes de masa y rigidez y bajo la acción de una excitación arbitraria $g(r,t) = f(r)h(t)$ es

$$M_{ij}\ddot{x}_j + C_{ij}\dot{x}_j + K_{ij}x_j = f(r)h(t) \quad (2.5)$$

M_{ij} matriz de masas

C_{ij} matriz de amortiguamiento

K_{ij} matriz de rigidez

x_j vector de desplazamiento

$f(r)$ es la distribución de cargas en las masas.

donde se supone que es posible expresar la excitación mediante la separación de variables indicada. Cuando el amortiguamiento C y las fuerzas externas se anulan, resulta

$$M\ddot{x} = -Kx \quad (2.5a)$$

de la que se obtienen las formas modales covariantes ϕ_n y la frecuencias naturales ω_n . Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema positivo definido entonces ϕ_n satisface las condiciones de frontera impuestas en los soportes del sistema. Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema semidefinido, se pueden obtener funciones coordenadas, incluyendo el modo de cuerpo rígido a frecuencia cero. Por tanto, la excitación $f(r)h(t)$ se puede descomponer de dos maneras

$$\|\tilde{F}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2} \quad (2.4)$$

como corresponde a espacios lineales ortogonales donde f_n y f^n son el factor de carga covariante y contravariante respectivamente.

2.2 ECUACIONES CLÁSICAS DE MOVIMIENTO (Urrutia, 1992a, 1992b). La ecuación de equilibrio dinámico de una estructura elástica con distribuciones no uniformes de masa y rigidez y bajo la acción de una excitación arbitraria $g(r,t) = f(r)h(t)$ es

$$M_{ij}\ddot{x}_j + C_{ij}\dot{x}_j + K_{ij}x_j = f(r)h(t) \quad (2.5)$$

M_{ij} matriz de masas

C_{ij} matriz de amortiguamiento

K_{ij} matriz de rigidez

x_j vector de desplazamiento

$f(r)$ es la distribución de cargas en las masas.

donde se supone que es posible expresar la excitación mediante la separación de variables indicada. Cuando el amortiguamiento C y las fuerzas externas se anulan, resulta

$$M\ddot{x} = -Kx \quad (2.5a)$$

de la que se obtienen las formas modales covariantes ϕ_n y la frecuencias naturales ω_n . Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema positivo definido entonces ϕ_n satisface las condiciones de frontera impuestas en los soportes del sistema. Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema semidefinido, se pueden obtener funciones coordenadas, incluyendo el modo de cuerpo rígido a frecuencia cero. Por tanto, la excitación $f(r)h(t)$ se puede descomponer de dos maneras

$$f(r)h(t) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f^n \phi_{ni} \quad \text{con bases covariantes } \phi_n$$

$$f(r)h(t) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_i^n \quad \text{con bases contravariantes } \phi^n$$

(2.6)

luego, la solución tiene la forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n(t) \phi_{ni}(r) \quad (2.7)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi_i^n(r) \quad (2.8)$$

donde $\eta_n(t)$ y $\eta^n(t)$ son los **factores de participación covariantes y contravariantes**, respectivamente. Se hace notar que la determinación de las funciones de participación corresponde a un análisis formal de Fourier con coeficientes dependientes del tiempo. Al sustituir las ecuaciones 2.7 y 2.8 en la ecuación 2.5, se obtiene

$$M_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}^{(n)}(t) \phi_{nj}(r) + C_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\eta}^{(n)}(t) \phi_{nj}(r) + K_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(n)}(t) \phi_{nj}(r) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_i^n(r) \quad (2.9)$$

Se hace notar que el índice i del operador K_{ij} solamente tiene efecto de sumatoria sobre la coordenada $\phi_{nj}(r)$ y no sobre el escalar $\eta^{(n)}(t)$, lo que se indica encerrando a n entre paréntesis. Bajo la misma hipótesis los índices para los amortiguamientos la matriz C_{ij} son presentados. Al multiplicar escalarmente la última ecuación por ϕ_{ni} se obtiene la ecuación clásica del movimiento

$$\ddot{\eta}^{(n)} + \frac{\langle \phi_{ni}, C_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \dot{\eta}^{(n)} + \frac{\langle \phi_{ni}, K_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \eta^{(n)} = \frac{f_n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.10)$$

Al hacer la siguiente definición

$$2\xi_n \omega_n = \frac{\langle \phi_{ni}, C_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle}$$

$$\omega_n^2 = \frac{\langle \phi_{ni}, K_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle}$$

la ecuación 2.10 se transforma en

$$\ddot{\eta}^{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}^{(n)} + \omega_n^2 \eta^{(n)} = \frac{f_n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.11)$$

con $f_n = \langle \phi_n, f(r) \rangle$. Los factores de participación covariante son

$$\ddot{\eta}_{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}_{(n)} + \omega_n^2 \eta_{(n)} = \frac{f^n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.12)$$

con $f^n = \langle \phi_n, f(r) \rangle$. Las ecuaciones 2.11 y 2.12 tienen la forma de las ecuaciones dinámicas de movimiento para cualquier sólido elástico continuo o discreto.

2.3 FRECUENCIAS NATURALES. Las frecuencias naturales se obtienen de la siguiente ecuación

$$M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j = 0 \quad (2.13)$$

Cuando la función de desplazamientos X_j se descompone en coordenadas covariantes se tiene

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{n=1}^N \eta^n \phi_{nj} \\ \dot{x}_j &= \sum_{n=1}^N \dot{\eta}^n \phi_{nj} \\ \ddot{x}_j &= \sum_{n=1}^N \ddot{\eta}^n \phi_{nj} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Supóngase ahora que $\eta^n = \text{sen}(\omega_n t)$ y ϕ_{nj} son respectivamente el factor de participación modal a la frecuencia natural ω_n y la forma modal respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \eta^n \phi_{nj} &= \text{sen}(\omega_n t) \phi_{nj} \\ \dot{\eta}^n \phi_{nj} &= \omega_n \cos(\omega_n t) \phi_{nj} \\ \ddot{\eta}^n \phi_{nj} &= -\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) \phi_{nj} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cuando se sustituye 2.15 en 2.14 para un modo arbitrario "n" se tiene que la ecuación 2.13 se puede expresar como

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) M_{ij} \phi_{nj} + \text{sen}(\omega_n t) K_{ij} \phi_{nj} &= 0 \\ \omega_n^2 M_{ij} \phi_{nj} &= K_{ij} \phi_{nj} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\left[K_{ij} - \omega_n^2 M_{ij} \right] \phi_{nj} = 0$$

que todavía representa a un vector (o función). Al multiplicar escalarmente dicha ecuación por ϕ_{ni} se obtiene

$$\omega_n^2 \phi_{ni} M_{ij} \phi_{nj} = \phi_{ni} K_{ij} \phi_{nj} \quad (2.17)$$

una ecuación escalar que ahora sí puede ser despejada para obtener

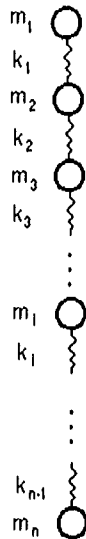
$$\omega_n^2 = \frac{\phi_{ni} K_{ij} \phi_{nj}}{\phi_{ni} M_{ij} \phi_{nj}} \quad (2.18)$$

esto es, el cuadrado de la frecuencia natural de un modo “ n ” es igual al cociente de la energía interna almacenada en el sólido, dividido entre la norma energética de la forma modal ϕ_{ni} con respecto a la matriz de masas.

Se hace notar que al dividendo y al divisor de la ecuación 2.18 se les denomina (Blevins, 1979) rigidez y masa generalizadas del modo “ n ” o se les denomina también rigidez y masa principales, sin embargo, para nosotros ellas son simplemente las normas energéticas de las formas modales con respecto a la matriz de rigideces y de masas respectivamente.

Para el cálculo de las frecuencias naturales se hace uso del **Método de Holzer**. El método de Holzer es un proceso de aproximaciones sucesivas, que evita las complicaciones analíticas. Se aplica para sistemas equivalentes de masas concentradas, con resortes en línea o ramificados. Se supone que el sistema está vibrando con una frecuencia natural y que se desprecian las pérdidas de energía por amortiguamiento y fricción.

Sea un sistema discreto de "n" grados de libertad con apéndices en las masas principales, como el mostrado en la figura 2.1.



Modelo semidefinido general

fig. 2.1

Al vibrar el sistema de una manera libre a cierta frecuencia natural ω , las únicas fuerzas que actúan son las de inercia de cada masa, las cuales son de la forma $m\dot{x}\omega^2$.

Para mantener el equilibrio dinámico estas fuerzas se transmiten a través de los resortes elásticos que unen las masas. Las fuerzas inerciales que se producen en cada nodo son las correspondientes a las diferencias de los desplazamientos entre cada dos masas consecutivas como se puede observar en ecuación 2.19.

$$m_i \ddot{X}_i + k_i (X_{i+1} - X_i) + k_i (X_i - X_{i+1}) = 0 \quad (2.19)$$

donde

$$X = x \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 x \operatorname{sen}(\omega t)$$

sustituyendo en la ecuación 2.19 queda

$$m_i x_i \omega^2 = k_i (x_{i+1} - x_i) + k_i (x_i - x_{i+1})$$

Al no existir más fuerzas que las de inercia se tiene que verificar, al estar el sistema vibrando con su frecuencia natural, que

$$\sum_{i=1}^n (m_i x_i) \omega^2 = 0 \quad (2.20)$$

donde

m_i masa principal

x_i desplazamiento de la masa principal

Las expresiones generales para la obtención de los desplazamiento de las masas principales m_i son

$$x_i = x_{i-1} + \frac{k_{i-2}(x_{i-1} - x_{i-2}) - m_{i-1}x_{i-1}\omega^2}{k_{i-1}}$$

De dichas expresiones, se ve que todos los desplazamientos se pueden expresar en función de los datos del problema m_i , k_i y de las cantidades desconocidas ω^2 y x_i . En general, para x_1 , que depende de la energía introducida en el sistema y de la disipada, se suele tomar, por

sencillez, el valor de 1, pues como se sabe que las ecuaciones del movimiento no nos dan los valores de las amplitudes, sino sus relaciones

$$x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1$$

2.4 SOLUCIÓN GENERAL. Debido a que el modelo presentado es semidefinido discreto, la primer forma modal desarrollada presenta un mismo desplazamiento en todas las masas sin existir desplazamientos relativos entre ellas asociado a una frecuencia natural de cero, a este modo se le denomina modo de cuerpo rígido.

La ecuación diferencial general para el modo de cuerpo rígido es

$$\ddot{\eta}^{(n)} + C\dot{\eta}^{(n)} = F_n(t) \quad (2.21)$$

siendo la solución general para el factor de participación del modo de cuerpo rígido, la siguiente

$$\eta^n(t) = \eta^n(0) + \dot{\eta}^n(0) \frac{1}{C} [1 - \exp^{-Ct}] + \int_0^t F_n(\tau) \frac{1}{C} [1 - \exp^{-C(t-\tau)}] d\tau \quad (2.22)$$

El superíndice con el valor de la unidad nos representa al modo de cuerpo rígido

La ecuación diferencial general para los modos superiores al de cuerpo rígido, cuando las frecuencias naturales son diferentes de cero, esta dada por

$$\ddot{\eta}^{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}^{(n)} + \omega_n^2 \eta^{(n)} = F_n(t) \quad (2.23)$$

Para el caso subcrítico, el amortiguamiento ($\xi_n < 1$) se define por la siguiente ecuación

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

al aplicar la transformada de Laplace en la ecuación 2.23, se tiene la solución para el factor de participación $\eta^{(n)}(t)$

$$\eta^{(n)}(t) = \exp^{-\xi_n \omega_n t} \left[\eta^{(n)}(0) \cos(\gamma_n t) + \left(\eta^{(n)}(0) \xi_n \omega_n + \dot{\eta}^{(n)}(0) \right) \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} \right] + \frac{1}{\gamma_n} \int_0^t F_n(\tau) \exp^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\gamma_n (t-\tau)] d\tau \quad (2.24)$$

Donde

$F_n(t) = S_n h(t)$ fuerza de excitación del modo n

$h(t)$ es la fuerza de excitación, y

$S_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n, f(r) \rangle}{\langle \tilde{\phi}_n, M_{ij} \tilde{\phi}_{nj} \rangle}$ coeficiente de carga.

2.5 SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER. Una gran variedad de modelos físicos simples que utilizan los ingenieros e investigadores aceptan una descripción matemática empleando una ecuación diferencial, como la ecuación 2.5 en donde $h(t)$ es una función de fuerza o excitación que no necesariamente tiene que ser periódica. En particular cuando $h(t)$ es una función seno, coseno o constante, la ecuación 2.5 se resuelve muy fácilmente.

Este método de solución puede extenderse al incluir el caso más general en el que $h(t)$ sea cualquier suma de senos y cosenos. Por tanto, $h(t)$ puede expresarse como la serie trigonométrica finita

$$h(t) = A_0 + \sum_{m=1}^M A_m \cos\left(m \frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{m=1}^M B_m \text{sen}\left(m \frac{\pi t}{T}\right) \quad (2.25)$$

Donde A_0 , A_m y B_m se obtienen con la siguiente formulación, que puede ser utilizada para representar funciones continuas y discontinuas.

Asumiendo que tenemos una función periódica continua definida en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, dividiendo el intervalo $[0, 2\pi]$ en n partes iguales con $n+1$ puntos (Urrutia, 1979),

$t = \left(\frac{2i-1}{2} + c\right)\phi_n$, donde $\phi_n = \frac{2\pi}{n}$ e $i=0, 1, 2, \dots, n$. El objeto de la variable c es limitar y ubicar

los puntos divididos del intervalo de tal manera que cada uno inicia la división de cualquier punto en el dominio.

Tomando pequeños intervalos, en cualquier intervalo k el valor de la función $h(t)$ es igual al valor de la constante W_k , sin embargo, se supone que el valor de la serie de Fourier es igual a $h(t)$ solo en este intervalo

$$W_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_k dt + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} W_k \cos(mt) dt \cdot \cos(mt) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} W_k \sin(mt) dt \cdot \sin(mt)$$

dado que

$$W_k(t) = \begin{cases} W_k & \text{si } t_{k-1} < t < t_k \\ \frac{W_k}{2} & \text{si } t = t_{k-1} \\ \frac{W_k}{2} & \text{si } t = t_k \\ 0 & \text{si } t_{k-1} > t > t_k \end{cases}$$

si $h(t)$ es igual a $W_k(t)$ en el intervalo k , se puede establecer

$$h(t) = \sum_{k=1}^n W_k$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, y

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{t_{\phi_{k-1}}}^{t_k} W_k dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_k \cos(mt) dt \cdot \cos(mt) \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_k \operatorname{sen}(mt) dt \cdot \operatorname{sen}(mt)$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene la ecuación 2.25 antes mencionada, donde

$$A_0 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n W_k \\ A_m = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{m\pi} \left\{ \operatorname{sen} \left[m \left(\frac{2k-1}{2} + c \right) \phi_a \right] - \operatorname{sen} \left[m \left(\frac{2k-3}{2} + c \right) \phi_a \right] \right\} \quad (2.26) \\ B_m = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{m\pi} \left\{ \cos \left[m \left(\frac{2k-3}{2} + c \right) \phi_a \right] - \cos \left[m \left(\frac{2k-1}{2} + c \right) \phi_a \right] \right\}$$

Las constantes A_0 , A_m , y B_m definidas por 2.26 son los **coeficientes de Fourier** de $h_n(t)$.

2.6 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL. Dado que la fuerza de excitación de la ecuaciones diferenciales 2.21 y 2.23 se pueden suponer como una serie trigonométrica dada por la ecuación 2.25 y su solución respectiva por las ecuaciones 2.22, 2.24 y 2.26 cuando $F_n(t)$ es igual a las funciones constante, seno y coseno.

2.6.1 PARA MODO DE CUERPO RÍGIDO. ($K=0$)

i) Fuerza de excitación constante $F_1(t) = S1$

$$\eta^1_{cic}(t) = S1 \left[\frac{1}{c} t - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{cic}(t) = S1 \left[e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

ii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_1(t) = S1 \cos(\omega t)$

$$\eta^1_{\cos}(t) = S1 \left[-\frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{\cos}(t) = S1 \left[\omega^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) - \omega^2 \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + c^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

iii) Fuerza de excitación senoidal $F_1(t) = S1 \text{ sen}(\omega t)$

$$\eta^1_{\text{sen}}(t) = S1 \left[-\frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) - \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{c\omega} - \frac{\omega}{c(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{\text{sen}}(t) = S1 \left[\omega^2 \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \omega^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) - c^2 \frac{\omega}{c(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

2.6.2 PARA MODOS SUPERIORES AL DE CUERPO RÍGIDO

i) Fuerza de excitación constante $F_n(t) = S_n$

para $n > 1$

$$\eta^n_{\text{cte}}(t) = S_n \frac{1}{\gamma_n \omega_n} \left[\text{sen}(\Phi_n) - e^{-\xi_n \omega_n t} \text{sen}(\gamma_n t + \Phi_n) \right]$$

$$\ddot{\eta}^n_{\text{cte}}(t) = S_n \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n \omega_n} \left\{ 2\xi_n \omega_n \gamma_n \cos(\gamma_n t + \Phi_n) + [\gamma_n^2 - (\xi_n \omega_n)^2] \text{sen}(\gamma_n t + \Phi_n) \right\}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{\gamma_n}{\xi_n \omega_n} \right)$$

ii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_n(t) = S_n \cos(\omega t)$

$$\eta''_{\cos}(t) = S_n \frac{1}{A_{\cos}} \left\{ \frac{\text{sen}(\Phi_n)}{\gamma_n} \left[\xi_n \omega_n \cos(\omega t) + \omega \text{sen}(\omega t) \right] - \cos(\omega t) \cos(\Phi_n) \right. \\ \left. + \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n} \left[\gamma_n \cos(\Phi_n + \gamma_n t) - \xi_n \omega_n \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t) \right] \right\}$$

$$\ddot{\eta}''_{\cos}(t) = S_n \frac{1}{A_{\cos}} \left\{ \frac{\text{sen}(\Phi_n)}{\gamma_n} \left[-\omega^3 \text{sen}(\omega t) - \xi_n \omega_n \omega^2 \cos(\omega t) \right] + \omega^2 \cos(\omega t) \cos(\Phi_n) \right. \\ \left. - \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n} \left[\gamma_n^3 \cos(\Phi_n + \gamma_n t) + (\xi_n \omega_n)^3 \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t) \right. \right. \\ \left. \left. - 3(\xi_n \omega_n)^2 \gamma_n \cos(\Phi_n + \gamma_n t) \right. \right. \\ \left. \left. - 3\xi_n \omega_n \gamma_n^2 \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t) \right] \right\}$$

$$A_{\cos} = \omega_n^2 \sqrt{\left(2\xi_n^2 - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\frac{\xi_n \gamma_n}{\omega_n} \right)^2}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{2\frac{\xi_n \gamma_n}{\omega_n}}{2\xi_n^2 - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

iii) Fuerza de excitación senoidal $F_n(t) = S_n \text{sen}(\omega t)$

$$\eta^n_{\text{sen}}(t) = S_n \frac{1}{A_{\text{sen}}} \left\{ \text{sen}(\omega t - \Phi_n) + \frac{1}{\gamma_n} e^{-\xi_n \omega_n t} \left[(\xi_n \omega_n \text{sen}(\Phi_n) - \omega \cos(\Phi_n)) \text{sen}(\gamma_n t) + \gamma_n \text{sen}(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \right] \right\}$$

$$\ddot{\eta}^n_{\text{sen}}(t) = S_n \frac{1}{A_{\text{sen}}} \left\{ -\omega^2 \text{sen}(\omega t - \Phi_n) + e^{-\xi_n \omega_n t} \left[\text{sen}(\gamma_n t) \text{sen}(\Phi_n) \left[\frac{(\xi_n \omega_n)^3}{\gamma_n} + \xi_n \omega_n \gamma_n \right] + \text{sen}(\gamma_n t) \cos(\Phi_n) \left[\gamma_n - \frac{(\xi_n \omega_n)^2}{\gamma_n} \right] \omega + \text{sen}(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \left[-(\xi_n \omega_n)^2 - \gamma_n^2 \right] + \cos(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \left[2\xi_n \omega_n \omega \right] \right] \right\}$$

$$A_{\text{sen}} = \omega_n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\xi_n \omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{2 \frac{\xi_n \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

Por lo que la solución general a la ecuación 2.5 expresada en series de Fourier es

$$x = \sum_{n=1}^N \left[A_0 \eta^n \text{cte} + \sum_{m=1}^M A_m \eta^n \cos + \sum_{m=1}^M B_m \eta^n \text{sen} \right] \phi_n \quad (2.25)$$

$$\ddot{x} = \sum_{n=1}^N \left[A_0 \ddot{\eta}^n \text{cte} + \sum_{m=1}^M A_m \ddot{\eta}^n \cos + \sum_{m=1}^M B_m \ddot{\eta}^n \text{sen} \right] \phi_n \quad (2.26)$$

CAPÍTULO 3
ANÁLISIS PARAMÉTRICO

ANÁLISIS PARAMÉTRICO

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES. El problema básico de la interacción dinámica suelo estructura involucra la evaluación de la respuesta de una estructura en un sitio particular para un sismo determinado (sismo de diseño) especificado en el campo libre a una elevación específica (punto de control). El estudio completo del fenómeno de interacción incluye necesariamente dos etapas: **el análisis del terreno libre y el de interacción**. El primero consiste en determinar las variaciones espaciales y temporales de los movimientos de la superficie del terreno sin considerar el edificio y el segundo permite evaluar la respuesta de la estructura colocada en el medio sísmico (Estratigrafía).

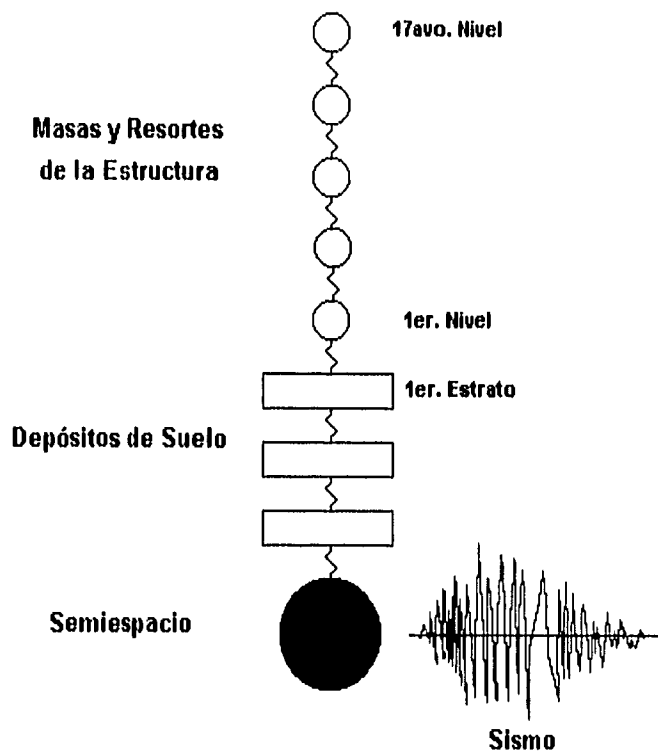
En este trabajo se sostiene la tesis de que el "Modelo Estructura Suelo Semiespacio" (E-S-SE) es un sistema semidefinido en donde la Estructura (E), el Suelo (S) y el Semiespacio (SE) están acoplados dinámicamente. Con este acoplamiento se hace primero el análisis de modos y frecuencias de la estratigrafía del edificio y del sistema Estructura Suelo Semiespacio, para ver posteriormente los cambios en las frecuencias y discutir el efecto de la densidad de frecuencias, concepto, este último, no muy discutido en la literatura actual y que se definirá más adelante.

El modelo, acepta la entrada de una señal sísmica en un Semiespacio móvil (o en la base del edificio si así se desea). La señal inducida en el Semiespacio puede ser una señal calibrada representativa de los depósitos profundos de la estratigrafía, que es una nueva forma de hacer el análisis de Interacción Suelo Estructura y que se desarrolla en este trabajo, o una señal característica de terreno firme, debido a que su espectro tiene una amplia gama de frecuencias con pocas alteraciones ocasionadas por las condiciones locales del terreno. De esta manera la señal elegida será filtrada por el depósito de suelo para transmitirla finalmente al edificio. Cuando la señal se induce en la base del edificio se utiliza el registro de campo libre debido a que se considera que la señal de superficie en campo libre es la que actúa en la base del edificio.

El sistema Estructura Suelo Semiespacio es sometido a las diferentes formas y tipos de señales para calcular la respuesta dinámica del edificio y compararlas contra la nueva forma de realizar el análisis de Interacción que aquí se propone.

3.1.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO.

- a) El modelo está basado en un sistema "**SEMIDEFINIDO DISCRETO**" de " n " grados de libertad.
- b) No considera apoyos en las fronteras. (Sistema libre-libre).
- c) Utiliza una masa infinita libre llamada "**SEMIESPACIO**" en una de sus fronteras, la cual permite que la señal sea transmitida a las demás masas del modelo.
- d) El sistema estructural está considerado como un sistema de **MASAS Y RESORTES**. En el que la masa en cada nivel se representa por la masa total de cada entrepiso y la rigidez de cada resorte está dada por la resistencia al desplazamiento de las columnas de cada entrepiso.
- e) La estructura se modela como un sistema de marcos planos regulares para la obtención de las propiedades de rigidez.
- f) Las frecuencias y formas modales para el análisis dinámico del modelo Estructura Suelo Semiespacio se obtienen utilizando el método de Holzer, el cual requiere que las formas modales del sistema satisfagan balance dinámico.
- g) El modelo propuesto en este trabajo es el mostrado en la fig. 3.1, en donde las masas superiores representan las masas y resortes de la estructura, las masas intermedias representan al depósito de suelo y la masa inferior el Semiespacio, al cual en adelante se hará referencia con la abreviatura SE, y que es libre de moverse de acuerdo a la señal que le sea inducida.
- h) El modelo supone que la cimentación de la estructura se comporta en forma acoplada con el suelo, de manera que los efectos producidos por la masa de cimentación y profundidad de desplante, se toman en cuenta en forma implícita en el análisis de interacción Suelo Estructura, es decir, no se consideran grados de libertad adicionales para medir la rotación en la base de cimentación.



Modelo Semidefinido
Estructura Suelo Semiespacio
fig. 3.1

3.2 CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA ANALIZADO

3.2.1 PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA. Para el análisis se utiliza un edificio de acero, que está considerado dentro del rango de edificios de mediana altura (17 niveles) desplantado sobre terreno blando característico de la Ciudad de México.

En la Tabla 1 se presentan las propiedades de inercia y de rigidez, así como las alturas desde el nivel de desplante (Juárez y Avilés, 1993).

No. de Nivel	Masa t-s ² /cm	Rigidez t/cm	Altura cm
17	0.412	61	6733
16	0.239	73	6218
15	0.455	125	5768
14	0.256	135	5383
13	0.252	143	4998
12	0.252	156	4613
11	0.252	159	4228
10	0.252	161	3843
9	0.252	172	3458
8	0.252	175	3073
7	0.252	175	2688
6	0.252	185	2297
5	0.255	192	1912
4	0.252	156	1527
3	0.300	222	1025
2	0.232	370	615
1	0.300	500	290

Tabla 1. Propiedades de inercia y rigidez del edificio analizado

Las características de este edificio son las correspondientes a la Torre administrativa del IMP (Instituto Mexicano del Petróleo), y que se encuentra desplantada en suelo de la zona de transición. Para fines de ejemplo y por falta de datos del sitio donde se desea ubicar al edificio se modificó la rigidez de la base y se considera desplantada sobre una estratigrafía de la zona del lago.

3.2.2 PROPIEDADES DE LA ESTRATIGRAFÍA. El valle de México está localizado en el centro de una zona volcánica donde han ocurrido erupciones durante diferentes épocas geológicas que han depositado grandes cantidades de toba, lava y brecha. Gran parte del área del valle estuvo cubierta por lagos someros desde la época diluvial hasta fines del siglo XIX: Este medio ambiente lacustre favoreció el desarrollo de colonias importantes de microorganismos de diferentes especies y la sedimentación de grandes cantidades de partículas finas de cenizas volcánicas que pasaron a formar los depósitos potentes de arcilla que existen en muchas áreas de la ciudad.

En este trabajo el edificio en estudio está desplantado sobre la estratigrafía del sitio de SCT, gráfica 1, correspondiente a la zona del lago. Esta zona está compuesta de una capa dura superficial de rellenos aluviales y eólicos, seguida de un estrato potente de arcilla blanda con intercalaciones de capas delgadas de arena, limo arenoso, vidrio volcánico y fósiles. Debajo de este

estrato de arcilla está la primera capa dura que es un estrato de arena limosa débilmente cementada. Subyaciendo a la primera capa dura está la formación arcillosa inferior compuesta por arcilla de mayor consistencia que la superior. Finalmente, se encuentran los depósitos profundos constituidos por secuencias de capas de arenas limosas y tobas con alto grado de cementación. Esta formación es la base de los suelos compresibles. Algunos datos promedio de las propiedades índice típicas de las arcillas son las siguientes: el contenido de agua varía de 200 a 500% como porcentaje del peso seco de la materia sólida; el límite líquido varía de 100 a 475% y el límite plástico de 13 a 50%. En muchos casos, el contenido natural de agua es mayor que el límite líquido, lo cual es característico de arcillas muy activas. La forma de las partículas de arcilla son de tipo escamoso dispuestas de acuerdo con una estructura tipo floculenta, la cual muestra una rigidez alta por el contenido de agua entre sus poros (Zeevaert, 1947). Esto permite la propagación de ondas de corte de grandes amplitudes sin causar modificaciones apreciables en su arreglo microestructural.

La estratigrafía sobre la cual se desplanta la estructura es la existente en la Secretaría de Comunicaciones y Transporte (SCT) y es característica de terreno blando ubicada en la zona del lago de la Ciudad de México. Sus propiedades se presentan en la Tabla 2 (Alberto, 1988).

de	a	h	γ	G	M	K
[m]	[m]	[m]	[T/m ³]	[T/m ²]	[T s ² /cm]	[T/cm]
0.0	5.3	5.3	1.35	1,300.00	0.7294	294.3396
5.3	10.2	4.9	1.13	320.00	0.5644	78.3673
10.2	15.1	4.9	1.13	320.00	0.5644	78.3673
15.1	20.0	4.9	1.13	320.00	0.5644	78.3673
20.0	25.7	5.7	1.19	480.00	0.6914	101.0526
25.7	30.0	4.3	1.19	960.00	0.5216	267.9070
30.0	33.2	3.2	1.46	11,420.00	0.4762	4,282.5000
33.2	36.4	3.2	1.46	11,420.00	0.4762	4,282.5000
36.4	39.5	3.1	1.25	3,770.00	0.3950	1,459.3548
39.5	43.0	3.5	1.46	45,000.00	0.5209	15,428.5714
43.0	46.5	3.5	1.46	45,000.00	0.5209	15,428.5714
46.5	50.0	3.5	1.46	45,000.00	0.5209	15,428.5714

Tabla 2. Propiedades del depósito de suelo

Donde

- h espesor del estrato
- γ peso volumétrico del suelo
- G módulo de rigidez dinámico
- M masa del suelo
- K rigidez del suelo

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS. Uno de los principales problemas del análisis dinámico de interacción Suelo Estructura es la selección de la señal de diseño, de entre las diferentes maneras de considerar a la señal excitadora, la más empleada es utilizar un registro de terreno firme. En este tipo de análisis se siguen dos pasos, primero se hace el análisis de la respuesta del terreno sin estructura para tratar de reproducir los movimientos de campo libre, y segundo se realiza el análisis completo del sistema considerando a la estructura.

Cuando se seleccionan registros de terreno duro como fuente de excitación en el análisis dinámico de edificios surge la siguiente pregunta "¿realmente el acelerograma seleccionado reproduce los movimientos de campo libre registrados en la estratigrafía, para que pueda estar seguro de que los resultados obtenidos de la respuesta de la estructura son confiables?". Si se conoce un registro de campo libre de la estratigrafía se puede hacer el análisis de campo libre y comparar con la respuesta obtenida del modelo. Si la respuesta de la estratigrafía no es la esperada se puede seleccionar otro acelerograma de excitación, con base a otro tipo de criterio.

En este trabajo se presenta la forma de encontrar el acelerograma de excitación que reproduce de manera casi exacta una señal real registrada en la estratigrafía. Con esta señal que se llamará Señal Calibrada se puede hacer el análisis de interacción dinámica obteniendo resultados más aproximados a los que desarrollaría la estructura desplantada en la estratigrafía considerada.

Para la obtención de la Señal Calibrada se requiere hacer la introducción de un concepto llamado Función de Transferencia. La Función de Transferencia es una curva continua invariante de un sistema que representa sus características dinámicas, más adelante se explican todas las características que se pueden obtener de la Función de Transferencia.

Para analizar el problema de interacción dinámica de un edificio desplantado sobre cualquier tipo de estratigrafía, se requiere conocer:

- Estratigrafía del lugar
- Registro de Campo Libre
- Propiedades de la Estructura

y se debe seguir el procedimiento que se resume en los siguientes pasos:

- a) Se calcula la Función de Transferencia de la estratigrafía donde se desplantará la estructura, cuando la excitación se aplica en el Semiespacio.
- b) Conocida la Función de Transferencia, se divide la señal de Campo Libre registrada en el sitio entre la Función de Transferencia, dando por resultado la señal que se utilizará como fuente de excitación en el Semiespacio.
- c) Con la señal calibrada utilizada como fuente de excitación, se realiza el análisis dinámico de la estratigrafía para comprobar que la señal obtenida en la superficie es la correspondiente al registro de Campo Libre del sitio en estudio.
- d) Una vez conocida la señal calibrada que se utilizará como fuente de excitación se procede a realizar el análisis dinámico del sistema Estructura Suelo Semiespacio.

3.3.1 REGISTRO DE CAMPO LIBRE. Una de las características de los efectos sísmicos de la Ciudad de México la constituyen las enormes diferencias en intensidad de movimiento del terreno que se producen en diferentes partes de la ciudad, se ha dicho que estas diferencias se deben a la alta amplificación de los movimientos sísmicos.

De los análisis de respuesta de los sitios donde se registró el sismo del 19 de septiembre de 1985 (Romo y Jaime, 1986), se observó que las características del movimiento del terreno dependen básicamente de las condiciones locales del suelo, más que de las características de la fuente del sismo, este registro se utiliza para estudiar la respuesta del sistema debido a su importancia. Cuando se registra el movimiento del terreno en sitios en donde no existe influencia alguna de cualquier tipo de construcción o excavación se le denomina de campo libre.

3.3.2 FRECUENCIAS NATURALES, ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO. En un sistema de "n" grados de libertad se tienen "n" frecuencias y "n" formas modales (sin considerar las "n" contravariantes). Para el modelo en estudio se calcularon las frecuencias de los siguientes tres sistemas: Suelo Semiespacio, Estructura Semiespacio y Estructura Suelo Semiespacio, lo que permite saber si las frecuencias del sistema Estructura Suelo Semiespacio se encuentran en el dominio de frecuencias de la señal inducida y determinar la influencia que el suelo tiene sobre la estructura en la respuesta total del sistema Estructura Suelo Semiespacio.

Frecuencias Naturales (Hz)			
	Suelo Semiespacio	Estructura Semiespacio	Estructura Suelo Semiespacio
ω_1	0.00000	0.00000	0.00000
ω_2	0.49800	0.36946	0.33571
ω_3	1.49189	1.03470	0.52662
ω_4	2.42607	1.64742	1.04362
ω_5	3.28280	2.22054	1.47790
ω_6	3.70370	2.89248	1.66782
ω_7	5.09659	3.59135	2.22332
ω_8	5.46205	4.13894	2.42859
ω_9	13.25343	4.48404	2.90383

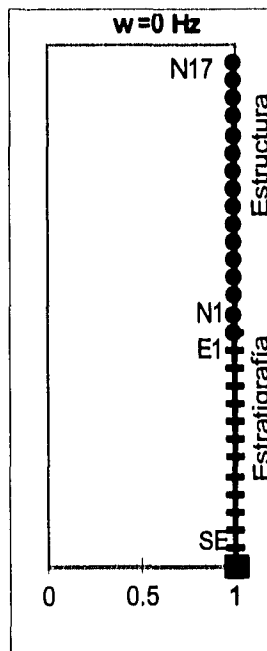
Tabla 3. Frecuencias Naturales

Al calcular las frecuencias naturales del sistema Estructura Suelo Semiespacio se puede observar que sus frecuencias son cercanas a las de los sistemas Suelo Semiespacio y Estructura Semiespacio intercalándose ascendentemente, de tal manera que la segunda frecuencia del sistema completo es próxima a la segunda frecuencia del sistema Estructura Semiespacio y la tercer frecuencia del sistema completo es cercana a la segunda del sistema Suelo Semiespacio, las frecuencias restantes se intercalan de manera similar.

3.3.3 DENSIDAD DE FRECUENCIAS (Urrutia 1989), ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO. El problema de densidad de frecuencias es un tema relativamente nuevo en ingeniería estructural. En el área de ingeniería mecánica se ha estudiado más intensamente, sin embargo debido a la relevancia en el fenómeno de interacción suelo estructura se hará una nueva mención de este problema. En la Tabla 3 se observa que las frecuencias naturales del Suelo Semiespacio y de la Estructura Semiespacio están relativamente separadas unas de otras, sin embargo las frecuencias naturales del modelo completo Estructura Suelo Semiespacio están en un grupo más compacto, con una mayor densidad de frecuencias, por ejemplo, de 0 a 2.42859 Hz; la segunda columna, del depósito de suelo, sólo presenta cuatro frecuencias naturales, la tercer columna muestra cinco frecuencias naturales del edificio, y el sistema completo, mostrado en la cuarta columna, exhibe ocho frecuencias naturales por lo que se dice que tiene la mayor densidad de frecuencias de los tres sistemas analizados, siendo este un efecto de la interacción suelo estructura. Se puede verificar que las nueve frecuencias señaladas en la cuarta columna de la Tabla 3 y otras más hasta 5.5 Hz del modelo completo están incluidas en el dominio de los espectros de las señales de excitación sísmica de las gráficas 6 y 23, donde la amplitud de las ordenadas de los espectros es considerable y por lo tanto susceptible a excitar al sistema estructural analizado, en incisos siguientes se explica como se obtienen las señales de excitación, aquí sólo se explica la influencia que tendrán las frecuencias naturales en la respuesta de la

estructura de acuerdo al tipo de excitación. También se puede ver que la segunda frecuencia natural del Suelo Semiespacio es de 2.0 seg. y el del Estructura Semiespacio es 2.7 seg., y al calcular las frecuencias del sistema Estructura Suelo Semiespacio se observa que el periodo aumenta a 3.0 seg. debido que el sistema completo tiene una mayor flexibilidad que el de la Estructura con base rígida, siendo esta un efecto más del fenómeno Interacción Suelo Estructura.

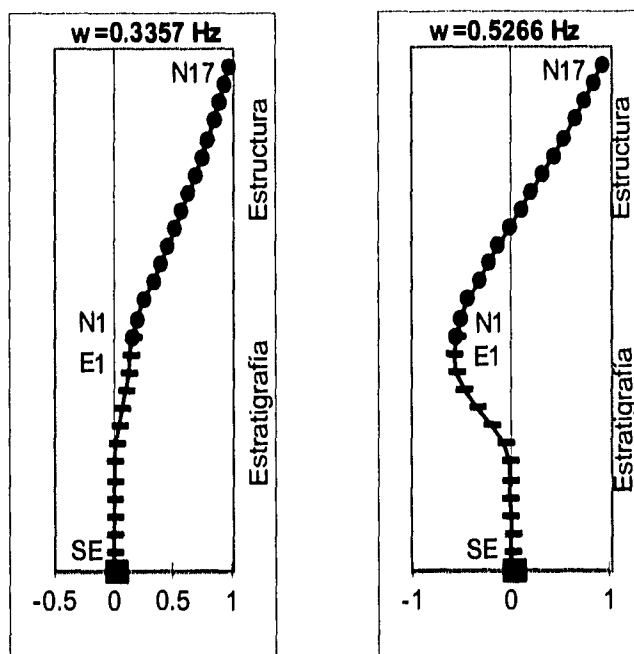
3.3.4 FORMAS MODALES, ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO. Si se aplica el método de Holzer al sistema completo en estudio, se obtienen las primeras cinco frecuencias y formas modales. En la fig. 3.2 la primer forma modal desarrollada es la correspondiente a la de cuerpo rígido, en donde todas las masas del sistema presentan un mismo desplazamiento sin existir desplazamientos relativos entre ellas, y está asociada a una frecuencia natural cero.



Primer forma modal
Modo de cuerpo rígido

fig. 3.2

En la fig. 3.3 se presentan la segunda y tercer formas modales del sistema completo, la fig. 3.3a representa la forma modal desarrollada por una frecuencia dominante cercana a la de la estructura, dado que su frecuencia es muy próxima a la del sistema Estructura Semiespacio cuyo valor es 0.36946 Hz, y la fig. 3.3b la forma modal desarrollada por una frecuencia natural cercana a la dominante del sistema Suelo Semiespacio de 0.4980 Hz.

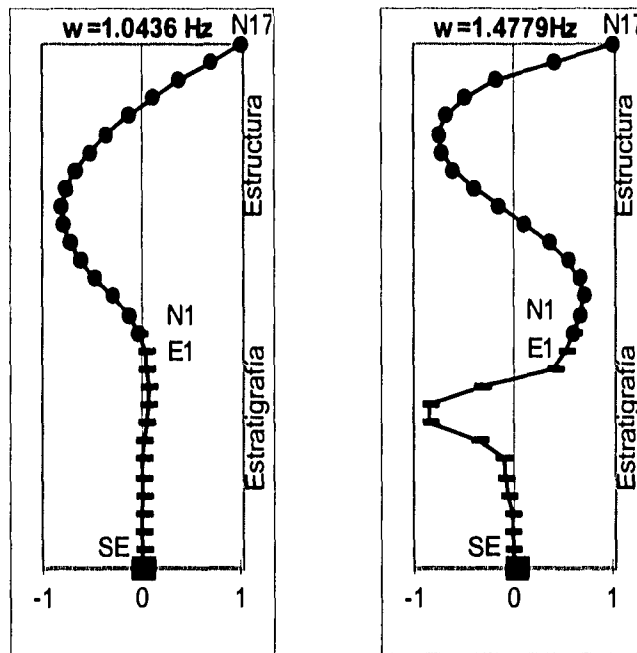


a) Segunda forma modal

b) Tercer forma modal

fig. 3.3

En la fig. 3.4 se presentan la cuarta y quinta formas modales del sistema completo. La fig. 3.4a representa la forma modal desarrollada por una frecuencia natural cercana a la de la estructura (1.0347 Hz) y la fig. 3.4b la desarrollada por una frecuencia natural cercana a la del suelo de 1.49189 Hz.



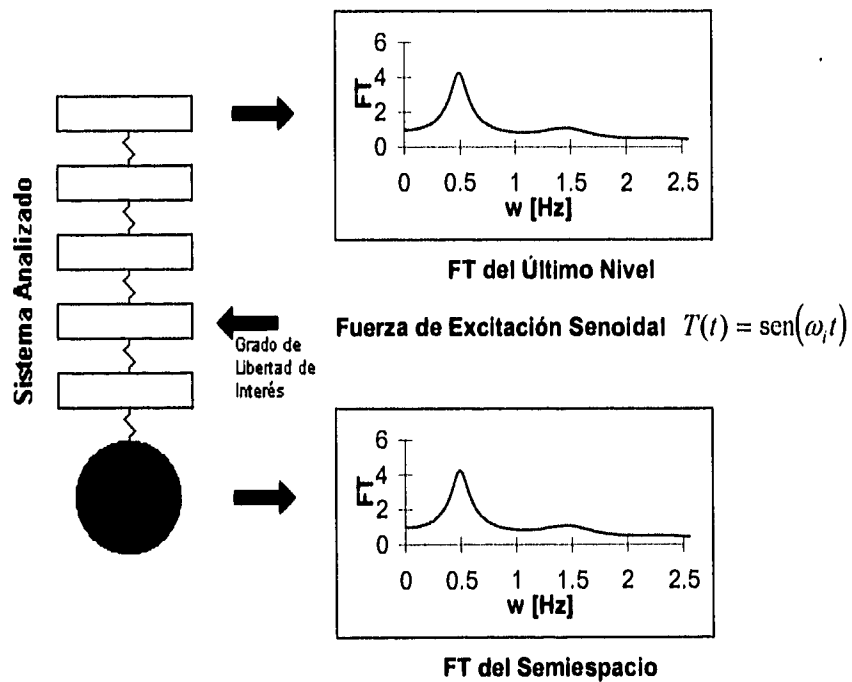
a) Cuarta forma modal

b) Quinta forma modal

fig. 3.4

3.3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA (FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN). Karnop, en 1963, presenta la Función de Transferencia para el sistema de un grado de libertad, y en este trabajo se generaliza para aplicarlo a sistemas de varios grados de libertad. Esta función define las características vibratorias de un sistema cualquiera, como son las frecuencias dominantes y la amplitud de amplificación para la frecuencia de excitación inducida

Para la obtención de la Función de Transferencia (FT) de un sistema Semidefinido se requiere excitar un grado de libertad de interés (donde a partir del cual se desea obtener la Función de Transferencia de los demás grados de libertad) con una función senoidal o cosenoidal de amplitud unitaria a diferentes frecuencias, siendo la Función de Transferencia una representación gráfica de la respuesta máxima absoluta contra la frecuencia de excitación dada, como se ilustra en la figura 3.5.



Obtención de la Función de Transferencia

fig. 3.5

Entre las características más importantes de la función de transferencia y que se verificaran posteriormente son:

- a) La FT de todos los grados de libertad se obtiene a partir de un grado de libertad específico del sistema (Semiespacio, 1er. Nivel, etc.).
- b) Se puede observar que las máximas amplificaciones para cada grado de libertad ocurren a diferentes frecuencias.
- c) Para un sistema cualquiera la FT se mantiene constante e independiente de la excitación que se le induzca.

Con estas características se pueden realizar de manera directa y a través de un simple producto entre espectros el análisis dinámico de un sistema cualquiera como se presenta en el siguiente inciso donde se encuentra una señal que produce en el sistema analizado una respuesta deseada.

3.3.6 CÁLCULO DEL ESPECTRO DE LOS DEPÓSITOS PROFUNDOS. Cuando se conoce un acelerograma registrado en campo libre surge la duda de saber que excitación inducida en los depósitos profundos de la estratigrafía es la que produce la respuesta en campo libre. Para dar respuesta a la pregunta se requiere conocer la Función de Transferencia para dicha estratigrafía.

Al realizar el análisis descrito en el inciso anterior, la Función de Transferencia de la estratigrafía analizada (Tabla 2) se muestra en la gráfica 2, donde se observa que la primer frecuencia dominante es de 0.49 Hz con una amplificación del primer estrato de 4.24. Para algunos estratos se tiene una mayor amplificación en otras frecuencias diferentes a la dominante, como puede verse en el quinto estrato donde en la frecuencia de 1.46 Hz su amplificación es 2.08.

El 19 de septiembre de 1985 se registró un sismo de magnitud 8.1 en la escala de Richter, en la superficie del terreno del sitio de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (gráfica 1) con dirección N90E que es considerado como un registro de campo libre. Este acelerograma presenta una aceleración máxima absoluta de 164.73 cm/s^2 , gráfica 3, y es comúnmente empleado en análisis dinámicos de estructuras debido a que es representativo de terreno blando y característico de la zona del lago de la Ciudad de México. En la gráfica 4 se presenta el espectro del acelerograma de SCT, donde se observa que la frecuencia dominante del sitio es de 0.5 Hz ($T=2 \text{ seg}$), con amplitud de $52.27 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ y una energía de $146,114.7 \text{ cm}^2/\text{s}^3$.

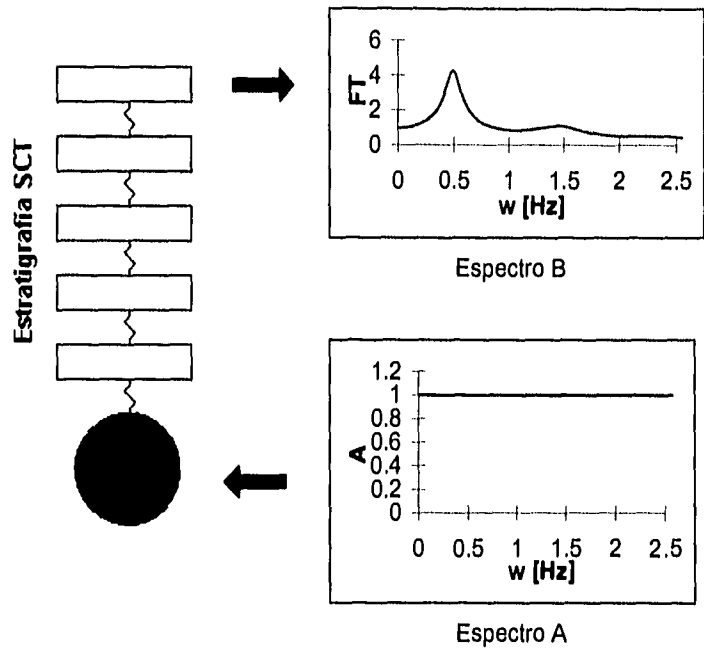
Debido a la característica de la Función Transferencia de mantenerse constante ante cualquier excitación, la obtención del acelerograma representativo de los depósitos profundos de la estratigrafía de SCT se reduce a una simple operación aritmética.

Como ya se sabe, un acelerograma se puede descomponer en una serie de Fourier, donde los coeficientes son A_m que multiplica a la función coseno y B_m a la función seno como se ve en la ecuación 3.25, esta descomposición de un acelerograma se representará de la siguiente forma (A_m, B_m) . Con los coeficientes de Fourier de un acelerograma se puede obtener el espectro de Fourier graficando A vs w , donde $A = A_m^2 + B_m^2$, pero con la definición de A se nota que si se cambian arbitrariamente los signos de los coeficientes A_m y B_m se llega al mismo espectro de Fourier, pero no así al acelerograma de donde se obtuvieron originalmente los coeficientes, por eso cuando se habla de alguna operación entre espectros de Fourier la operación se realiza con los respectivos coeficientes de Fourier de los acelerogramas.

En la figura 3.6a se representa la estratigrafía de SCT a la que se le induce una excitación del tipo A , con coeficientes (a, a) , en el Semiespacio (gráfica 5) y su respuesta B , con coeficientes (C_m, C_m) , en el 1er. estrato (gráfica 2).

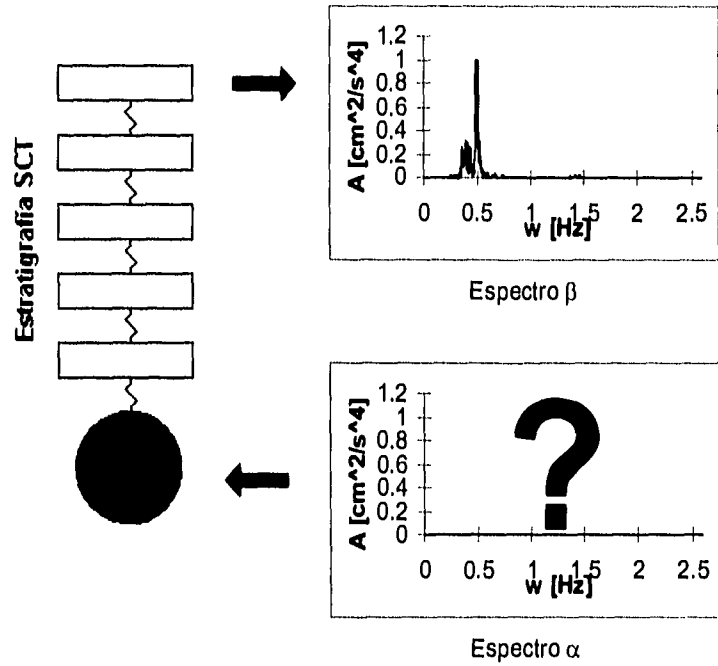
En la figura 3.6b se le induce la señal α (a_m, b_m) en los depósitos profundos representados por el Semiespacio y que presenta una respuesta del tipo β (A_m, B_m) (gráfica 4), espectro que corresponde al acelerograma de la gráfica 3.

El espectro A de la gráfica 3.6a tiene coeficientes de Fourier senoidales y cosenoidales unitarios en todo el rango de frecuencias, estos coeficientes son unitarios debido a que se desea conocer la FT del sistema, por esta razón se presentan sus coordenadas de Fourier con una constante a . El espectro de respuesta B tiene coeficientes C_m senoidales iguales a los coeficientes cosenoidales para la misma frecuencia, por la razón de que la máxima amplitud absoluta es idéntica cuando se aplica un excitación senoidal o cosenoidal ante una misma frecuencia de excitación. El subíndice m indica que el coeficiente varía con respecto a la frecuencia.



Obtención de la señal calibrada

fig. 3.6a



Obtención de la señal calibrada

fig. 3.6b

Para conocer las características vibratorias de la estratigrafía de SCT se requiere conocer la Función de Transferencia que se puede obtener realizando el cociente B / A que es por invariancia igual a β / α . Ya que las señales A y B se conocen del análisis dinámico y que β es el espectro objetivo registrado en el sitio, se deduce la siguiente expresión

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha} = FT$$

Debido a que el espectro A es unitario la relación B / A , que es igual a la Función de Transferencia (FT), se deduce que B es igual a la Función de Transferencia, por lo tanto, al despejar el espectro incógnita, α , se tiene

$$\alpha = \frac{\beta}{B} = \frac{\beta}{FT}$$

que expresando en términos de los coeficientes de Fourier se tiene

$$am = \frac{Am}{Cm}$$

$$bm = \frac{Bm}{Cm}$$

$$cm = am^2 + bm^2$$

y graficando cm vs w se tiene α el espectro buscado, el cual es característico de los depósitos profundos de la estratigrafía de SCT para el sismo analizado.

Con este tipo de analogía se puede realizar el análisis dinámico de un sistema cualquiera, realizando la siguiente operación una vez conocida la señal de excitación en el Semiespacio o cualquier otro grado de libertad.

$$B = A * FT$$

$$\beta = \alpha * FT$$

con lo que se simplifica el análisis dinámico al calcular la Función de Transferencia y multiplicarla por la señal de excitación correspondiente, reduciendo así el tiempo de cálculo.

3.3.7 ANÁLISIS DE CAMPO LIBRE. Este análisis se hace para comparar la respuesta de la estratigrafía ante una excitación sísmica calibrada, con la respuesta registrada sobre la estratigrafía y comprobar que la excitación sísmica calibrada es la representativa de los depósitos profundos de la estratigrafía que provocará aceleraciones cercanas a las registradas en el sitio.

Para verificar que el espectro calculado α (gráficas 6) y su señal correspondiente (gráfica 7), es la representativa de los depósitos profundos que al excitar a la estratigrafía provoca una respuesta en campo libre igual a la registrada en el sitio en 1985, se requiere hacer el análisis dinámico de la estratigrafía ante el acelerograma de la gráfica 7 y cuyo espectro se ha calculado en la gráfica 6. Realizado el análisis dinámico se puede comprobar que el espectro de respuesta (gráfica 8) es muy parecido al espectro registrado en SCT (gráfica 4). Comparando los espectros de las gráficas 4 y 8, se puede observar que la amplitud máxima del registro original es $52.27 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ y la del simulado $52.39 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ siendo el error de 0.23%. Los valores de las energías por otro lado, son de $146,114.70 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ para el registro original y de $145,782.30 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ del simulado con un error de 0.23%. En cuanto al acelerograma del registro original, gráfica 3, y el del simulado de la gráfica 9, se observa una gran similitud de la respuesta, donde las aceleraciones máximas correspondientes son $164.73 \text{ cm}/\text{s}^2$ y $159.07 \text{ cm}/\text{s}^2$ con un error de 3.44%. Con estos datos puede decirse que el espectro calculado y el acelerograma calibrado son representativos de los depósitos profundos de la estratigrafía de SCT, ya que reproduce con una precisión mayor del 96% al espectro y acelerogramas reales registrados en el sitio. en 1985.

Con estos resultados se comprueba que cuando un acelerograma registrado en campo libre se puede determinar la excitación que, inducida en los depósitos profundos de la estratigrafía, produce la respuesta conocida en campo libre.

3.3.8 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA. Una vez calculada la señal que será inducida en el Semiespacio de la estratigrafía ahora se coloca la estructura en estudio sobre el medio sísmico.

Como se explicó anteriormente, el análisis dinámico de un sistema se puede calcular a través de la Función de Transferencia. Para realizar el análisis dinámico del sistema Estructura Suelo Semiespacio se requiere ahora conocer primero la Función de Transferencia de este sistema, y que se encuentra en la gráfica 10. En ella se observa que la máxima amplitud de 7.48 se presenta en 0.34 Hz y corresponde al último nivel del edificio, en el primer estrato del suelo la máxima amplitud es 3.6 para la frecuencia de 0.53 Hz. También se puede observar que en las masas correspondientes a la estratigrafía la máxima amplitud se presenta en una frecuencia cercana a 0.50 Hz que corresponde a la segunda frecuencia del sistema Semiespacio Suelo y para las masas

de la estructura cerca de 0.37 Hz, correspondiente a la segunda frecuencia natural del sistema Semiespacio Estructura

Induciendo la señal calibrada en el Semiespacio del sistema Estructura Suelo Semiespacio, los resultados de este análisis dinámico muestran en la gráfica 11 el espectro de la respuesta para el primer estrato del Suelo que presenta una amplitud de $26.16 \text{ cm}^2/\text{s}^4$ y una energía de $78,828.71 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ y que comparado con el de Campo Libre, gráfica 8, que tiene una amplitud de $52.39 \text{ m}^2/\text{s}^4$ y una energía de $145,782.30 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ se observa que existe una disminución del 50% en la amplitud máxima del espectro y 46% en energía debido a la influencia del edificio desplantado sobre el terreno impidiendo que el suelo desarrolle aceleraciones mayores a las de registro de Campo Libre, como la presentada en el acelerograma de campo libre, gráfica 9, donde la aceleración es $159.07 \text{ cm}/\text{s}^2$ y en el acelerograma del primer estrato de suelo con interacción, gráfica 12, la aceleración máxima es $113.59 \text{ cm}/\text{s}^2$.

Como ya se demostró en el inciso 3.3.6 el análisis dinámico de un sistema cualquiera se puede obtener con el producto de la FT de un sistema con el espectro de la señal de excitación. Al realizar el análisis dinámico del sistema Estructura Suelo Semiespacio, es decir, al multiplicar la FT obtenida a partir del Semiespacio del sistema Estructura Suelo Semiespacio, gráfica 10, con el espectro de la Señal Calibrada, gráfica 6, se puede observar que en los espectros de respuesta del edificio correspondientes al 1er. y 17avo. nivel, gráficas 13 a 16, existe una amplificación para la frecuencia de 0.34 Hz que es la dominante de la estructura como se puede constatar en la FT del sistema Semiespacio Suelo Estructura (gráfica 10), donde en ciertos niveles de la estructura se tiene una máxima amplificación para esa frecuencia, sucediendo de manera similar en la FT de la Estructura, gráfica 17, en la que se puede ver que el 17avo. nivel desarrolla una amplitud máxima de 4.48 en la frecuencia de 0.34 Hz a la que se llamará Función de Transferencia de Base Flexible, y en la Función de Transferencia del Suelo, gráfica 18, se presenta una máxima amplificación de 3.6 correspondiente al primer estrato de suelo, en la frecuencia de 0.52 Hz.

Del análisis dinámico de interacción se pueden obtener las configuraciones correspondientes a las aceleraciones y desplazamientos máximos absolutos y relativos. Con las aceleraciones absolutas se obtienen los acelerogramas y espectros de Fourier. Las aceleraciones relativas sirven para conocer las aceleraciones que actúan en las masas del edificio, los desplazamientos absolutos indican la influencia de las formas modales superiores en el análisis dinámico, los desplazamientos relativos muestran los desplazamientos entre distintos puntos del edificio. Se debe aclarar que el cálculo de desplazamientos relativos se hace con respecto a la base de la estructura ya que estos son los necesarios para realizar el análisis de fuerzas que actúan sobre la estructura.

Cuando se hace el análisis dinámico del modelo completo se obtienen aceleraciones y desplazamientos absolutos y relativos máximos. Los tiempos de ocurrencia de las aceleraciones máximas para el primer depósito de suelo, primer nivel y último nivel, se presentan en la Tabla 4.

Nivel del Modelo	Relativos			Absolutos		
	t [s]	a [cm/s ²]	d [cm]	t [s]	a [cm/s ²]	d [cm]
Último nivel	59.16	-362.44	49.81	60.2	291.55	-63.81
Primer nivel	58.92	-11.37	1.28	59.4	107.72	-35.02
1er. Depósito de suelo	-----	0	0	59.4	113.59	-35.8

Tabla 4. Tiempos de Ocurrencia para las Aceleraciones Máximas

En las gráficas 19 y 20 se muestran las aceleraciones máximas absolutas y relativas, en las gráficas 21 y 22 los desplazamientos absolutos y relativos del sistema completo para el depósito de suelo, primer y último nivel. En la Tabla 3 se puede observar que las primeras ocho frecuencias naturales del sistema completo caen dentro del espectro de los depósitos profundos, gráfica 6, teniendo participación en la respuesta total del sistema completo.

3.3.9 INFLUENCIA DE LAS FORMAS MODALES EN EL ANÁLISIS DINÁMICO, CONVERGENCIA. Cuando se realiza un análisis dinámico modal de estructuras el tiempo de cálculo es muy grande. Sin embargo, con la introducción de la Función de Transferencia este tiempo se reduce considerablemente ya que con el hecho de conocer la FT de un sistema cualquiera se puede conocer la respuesta del sistema ante cualquier tipo de excitación sin necesidad de hacer un nuevo análisis dinámico.

Debido a la gran cantidad de formas modales que pueden intervenir en el análisis es conveniente realizar un estudio sobre la influencia de las formas modales para considerar solo aquellas cuya participación en la respuesta es importante y de esta forma se reducirá más el tiempo de cálculo.

Para el sistema analizado E-S-SE que consta de 30 grados de libertad al cual se le aplica una excitación en la base llamada señal calibrada, se calcularon las Funciones de Transferencia del sistema cuando se emplean algunas formas modales con el fin de observar la evolución de la energía en la respuesta.

En las gráficas 25 y 26 se muestra la FT para el 1er. estrato de suelo y 1er. Nivel de la estructura, en donde se ve que cuando se incluyen dos formas modales en el análisis dinámico las amplitudes máximas de la FT dentro de todo el intervalo de frecuencias se encuentran abatidas, en cambio cuando se incluyen 3 formas modales en el análisis las amplitudes se incrementan en el rango de frecuencias de 0 a 0.8 Hz, después del intervalo las amplitudes máximas siguen por abajo de la curva de máxima convergencia, que es la que incluye a todas las formas modales del sistema. La FT del 17avo. nivel de la estructura esta representada en la gráfica 27 en donde se tiene que las amplitudes máximas se abaten después del intervalo de 0 a 0.6 Hz cuando se consideran dos formas modales; al considerar tres formas modales la FT evoluciona hasta lograr que las amplitudes máximas se incrementen dentro de un rango de frecuencias de 0 a 0.63 Hz conforme se incrementan formas modales se puede observa como la FT evoluciona hasta llegar a la curva de máxima convergencia.

En la Tabla 5 la primer columna muestra el número de formas modales (FM) que se está considerando; las columnas 2, 3 y 4 presentan los valores de energía con diferentes grados de aproximación para los diferentes niveles de acuerdo al producto de las FT de las gráficas 25, 26 y 27 de las diferentes participaciones de las formas modales en forma acumulativa. Las columnas 5, 6, y 7 muestra el porcentaje de participación de la FM en la respuesta.

No. de FM	Energía [cm ² /s ³]			% de Participación de la FM		
	1er. Estrato	1er. Nivel	17avo. Nivel	1er. Estrato	1er. Nivel	17avo. Nivel
2	14,226.95	14,298.32	386,584.15	18%	19%	80%
3	76,383.49	72,359.72	486,036.29	79%	77%	21%
4	76,668.78	72,059.53	480,187.81	0%	0%	1%
5	78,261.29	75,185.46	494,213.03	2%	4%	3%
6	78,899.35	74,878.59	482,927.97	1%	0%	2%
7	78,915.23	74,734.52	484,291.73	0%	0%	0%
10	79,088.33	75,193.33	483,012.24	0%	1%	0%
15	79,080.51	75,130.28	483,066.30	0%	0%	0%
20	79,080.53	75,130.20	483,066.13	0%	0%	0%
22	79,080.53	75,130.18	483,066.13	0%	0%	0%
30	79,080.53	75,130.18	483,066.13	0%	0%	0%

FM= Forma Modal

Tabla 5. Influencia de las formas modales en el contenido de energía de la respuesta

Para la obtención de la energía se utilizó la siguiente expresión

$$E = \int_0^T [\ddot{x}(t)]^2 dt$$

que expresada en función de los coeficientes de Fourier es

$$E = T A_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{m=1}^M (A_m^2 + B_m^2)$$

este valor se utiliza para medir la convergencia que se tiene al considerar algunas formas modales. El empleo de la Energía para medir la convergencia en la respuesta se debe a que toma en cuenta todas las aceleraciones de la respuesta.

Como puede observarse en la Tabla 5, para el primer estrato y primer nivel, la participación de las dos primeras formas modales (cuerpo rígido y 1a FM) es de 18% y 19%, respectivamente, mientras que la participación de la tercer forma modal es de un 79%, por lo que al considerar las primeras tres formas modales se logra una aproximación del 97%. De esto se puede decir que la tercer forma modal para el cálculo de la respuesta de los estratos del suelo y los primeros niveles que se ven influenciados por la estratigrafía están relacionadas con la frecuencia del suelo (0.52662 Hz), por lo tanto la frecuencia fundamental será la tercera. En el caso del último nivel, debido a que se trata de un piso que no se ve influenciado por la frecuencia del suelo la FM que tiene una mayor participación en el cálculo de la respuesta es la segunda, es por eso que se tiene una participación de las dos primeras frecuencias naturales de un 80%. En la gráfica 28 se puede observar el porcentaje de aproximación acumulativa de las Formas Modales.

Para hablar de la frecuencia fundamental de un sistema se debe tener una muy buena convergencia de todo el sistema, por ejemplo, en la Tabla 5 para la segunda frecuencia natural en el primer estrato de suelo se tiene una participación en la respuesta del 18%, en el primer nivel de la estructura del 19% en cambio para el último nivel de la estructura se tiene una participación del 80%; revisando la segunda frecuencia natural el primer estrato de suelo presenta una participación del 79%, en el primer nivel de la estructura 77%, y en el último nivel de la estructura se tiene una participación del 21%; en la cuarta frecuencia natural en el primer estrato de suelo, primer nivel y último nivel de la estructura se tiene una participación en respuesta del 0%, esto indica que la cuarta forma modal no tiene ninguna participación en la respuesta del sistema, por tanto la Frecuencia Fundamental del Sistema es la Tercer Forma Modal.

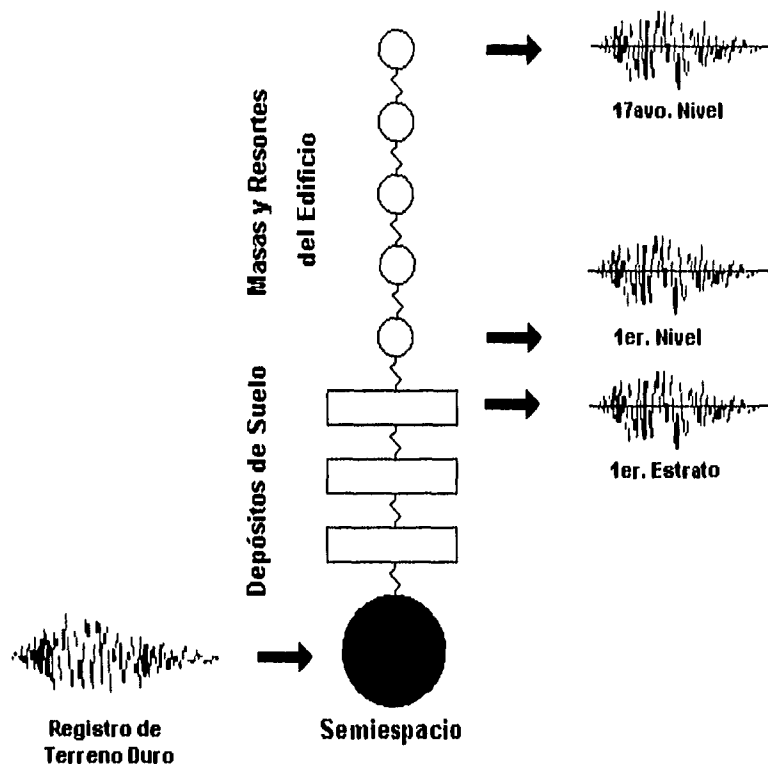
3.4 ANÁLISIS DINÁMICO TRADICIONAL DE INTERACCIÓN SUELO

ESTRUCTURA. En los modelos tradicionales de análisis dinámico de Interacción Suelo Estructura existe el problema de seleccionar el acelerograma de diseño; además, generalmente emplean acelerogramas registrados en terreno duro cuando consideran el sistema suelo-estructura, o registros de terreno flexible (de campo libre) cuando al incluir la estratigrafía inducen la señal en la base del edificio. Cuando no incluyen en el análisis a la estratigrafía también utilizan registros de campo libre debido a que la señal ya está filtrada y tiene las características dinámicas del suelo donde se desplantará la estructura.

Al Utilizar en el modelo Semidefinido la filosofía de análisis dinámico de interacción Suelo Estructura más comunes, a continuación se presentan los resultados que se obtienen y su comparación con la solución que se presenta en el inciso anterior.

3.4.1 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN CONSIDERANDO LA ESTRATIGRAFÍA (REGISTROS DE TERRENO DURO). En este tipo de análisis se utilizan acelerogramas de terreno duro como registrado en la Ciudad Universitaria el 19 de septiembre de 1985 (CFE, 1993), gráfica 24, ya que es un registro que no ha sido alterado por las condiciones locales del sitio y por ser de gran magnitud. Este tipo de registro generalmente es inducido en la base del modelo calculando la respuesta de la estructura y no la de campo libre para compararla con la registrada en el sitio (Aguilar et al, 1993).

Una representación gráfica de la forma en que algunos autores resuelven el problema de interacción Suelo Estructura utilizando la señal de campo libre es la mostrada en la figura 3.7



Interacción Suelo-Estructura

fig. 3.7

Al realizar un análisis de este tipo con el modelo propuesto, es decir, si se calcula la respuesta de campo libre y del sistema completo (suelo-estructura) ante la excitación del acelerograma registrado en Ciudad Universitaria en 1985, se puede observar en la gráfica 29 y de una comparación con el registro original, gráfica 4, que la energía y amplitud del espectro simulado se aproxima en 17% al real; al observar la forma del espectro se ve que el periodo dominante del suelo es el mismo ($T=2s$) pero la forma es completamente diferente, en aceleraciones se observa que la respuesta de la estratigrafía ante la excitación del sismo de 1985, gráfica 30, es menor que el registro original en el sitio, gráfica 3, aproximándose en un 32%. Con este tipo de resultados se puede argumentar que el empleo de acelerogramas registrados en terreno duro no es recomendable para tratar de reproducir una respuesta semejante a la registrada en el sitio, y que la señal que llega en los depósitos profundos del valle de México no es la misma a la que aflora en sitios donde el terreno es duro. En cuanto al contenido de frecuencias de la señal de excitación, se puede observar en las gráficas 6 y 23 que existe cierta similitud y en donde se presentan

amplitudes máximas es entre las frecuencias de 0.4 Hz y 0.5 Hz, abatiéndose para las restantes.

Al realizar el análisis de interacción se puede observar en la Tabla 6 que al comparar los resultados obtenidos del análisis utilizando el acelerograma calibrado y el registrado en Ciudad Universitaria, los resultados en amplitud, energía y aceleración son menores en el análisis tradicional.

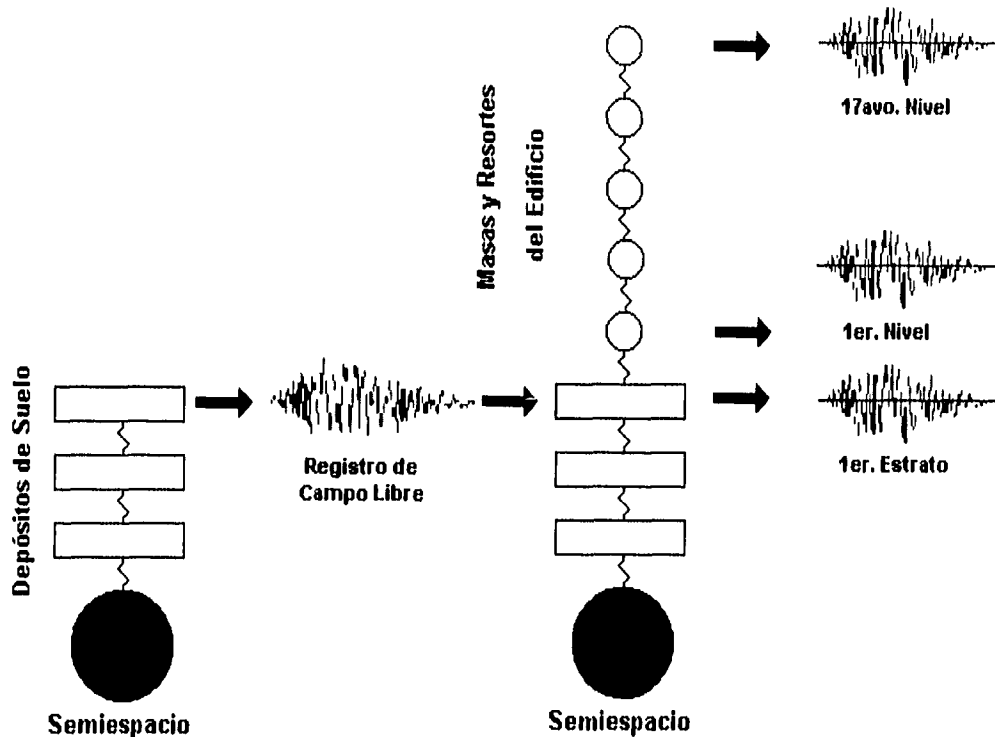
Nivel del Modelo	Acelerograma Calibrado			Registro de CU		
	Amplitud [cm ² /s ⁴]	Energía [cm ² /s ³]	Aceleración [cm/s ²]	Amplitud [cm ² /s ⁴]	Energía [cm ² /s ³]	Aceleración [cm/s ²]
17avo. nivel	153.38	482,711.26	291.55	19.35	76,444.50	101.84
1er. nivel	23.8	74,868.03	107.72	4.49	15,230.71	51.71
1er. estrato	26.16	78,828.71	113.59	4.91	15,989.39	53.46

Tabla 6. Amplitud, Energía y Aceleraciones Máximas en los diferentes niveles del sistema

La reducción en amplitud, energía y aceleración se debe al acelerograma de entrada, ya que tiene una energía de 4,287.40cm²/s³ que, comparada con el espectro calibrado, gráfica 6, es un 83% menor dando como resultado que la respuesta se vea reducida al realizar el análisis dinámico a través de la Función de Transferencia. El tiempo de duración del acelerograma de CU, gráfica 24, afecta en el tiempo de respuesta debido a que el análisis se realiza para el mismo periodo de tiempo, por lo que si se compara la respuesta en el periodo de tiempo, el acelerograma de los depósitos profundos, gráfica 7, es 2.7 veces mayor a la del registro de CU, gráfica 24. Los espectros y acelerogramas de respuesta se pueden observar en las gráficas 31 a 36.

3.4.2 ANÁLISIS DINÁMICO DE INTERACCIÓN CONSIDERANDO LA ESTRATIGRAFÍA (REGISTROS DE CAMPO LIBRE). Otro tipo de análisis donde utilizan acelerogramas de campo libre es cuando suponen que la señal que llega a la base del edificio es la desarrollada en campo libre y al inducirla en la base del edificio del sistema completo, se producirá una fuerza de resistencia al movimiento que modificará la respuesta de éste.

La figura 3.8 representa la forma en que algunos autores resuelven el problema de interacción Suelo Estructura utilizando la señal de campo libre en la base de la estructura.



Interacción Suelo-Estructura

fig. 3.7

Para realizar el análisis de interacción cuando la excitación es inducida en la base del edificio, la cual se encuentra situada en el primer estrato, se requiere conocer la Función de Transferencia para obtener la respuesta del sistema. Cuando se desea realizar un análisis dinámico por medio de la Función de Transferencia se requiere saber donde se aplicará la fuerza de excitación debido a que la Función de Transferencia depende del lugar donde se aplique la excitación del sistema en estudio.

La gráfica 37, muestra la Función de Transferencia del sistema analizado cuando la excitación es inducida en el primer estrato, en ella se puede observar que la Función de Transferencia de la base del edificio presenta una configuración diferente a la unidad, por lo que la excitación inducida en la base de la estructura se modificará debido a la influencia del edificio y de la estratigrafía. En la Función de Transferencia se observa que la frecuencia máxima se presenta en 0.5 Hz y domina tanto en las masas de la estructura como en las de la estratigrafía, esto no

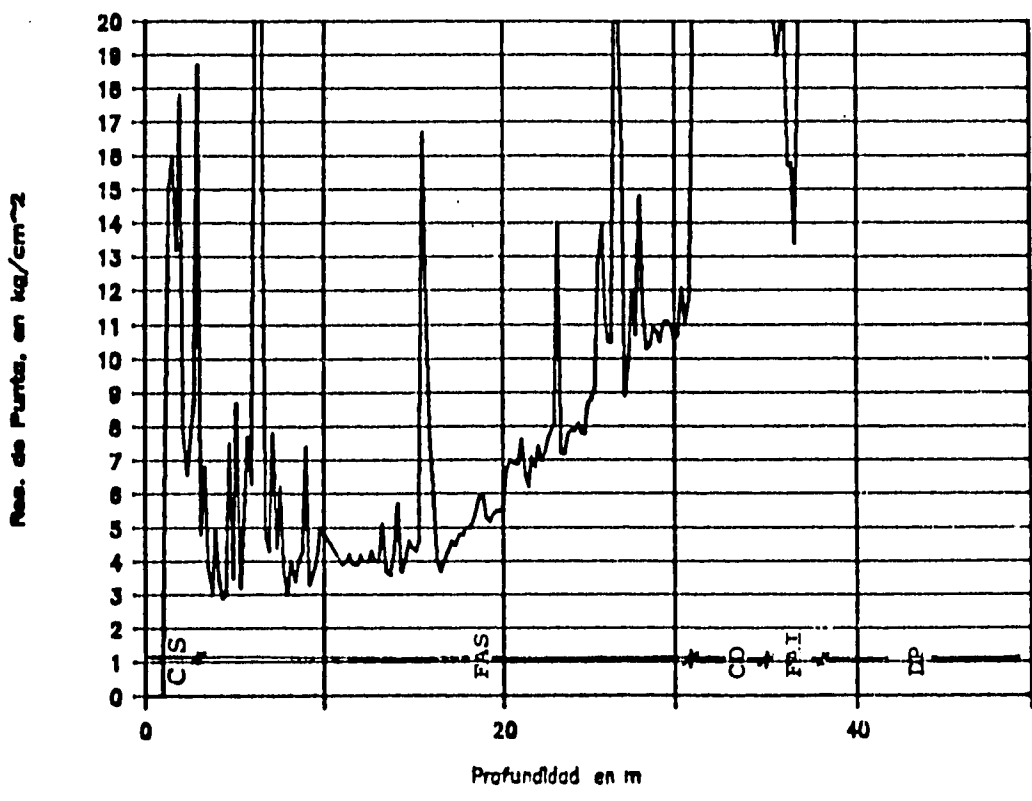
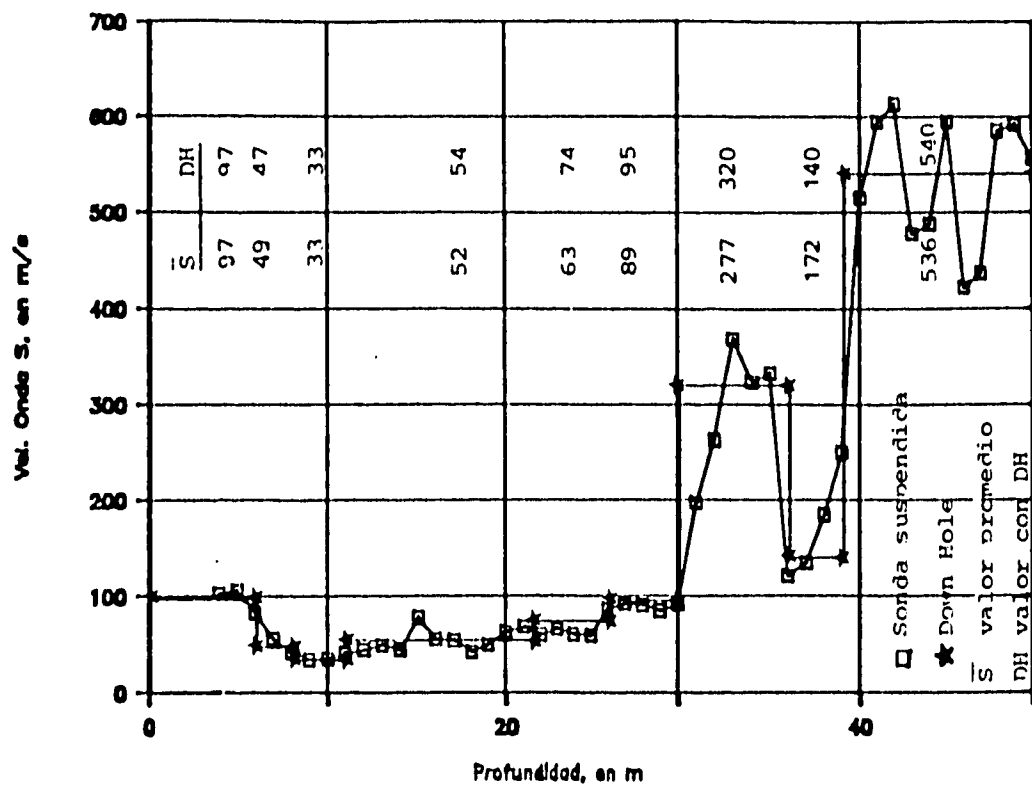
sucede en la Función de Transferencia de la excitación aplicada en el Semiespacio, gráfica 10, donde se puede notar una diferencia entre la frecuencia dominante en las masas de la estratigrafía y la frecuencia dominante de las masas de la estructura.

Al realizar el análisis de interacción se puede observar en la Tabla 7 que al comparar los resultados obtenidos del análisis utilizando el acelerograma calibrado y el registrado en SCT de Campo Libre, los resultados en amplitud son mayores, y en energía y aceleración son menores en el análisis tradicional. El hecho de que la amplitud máxima del espectro sea mayor se debe a que la frecuencia dominante de la Función de Transferencia es de 0.5 Hz en todas las masas del sistema por lo que al realizar el análisis a través de la FT utilizando el registro de campo libre que tiene una frecuencia dominante de 0.5 Hz la amplitud se incrementa.

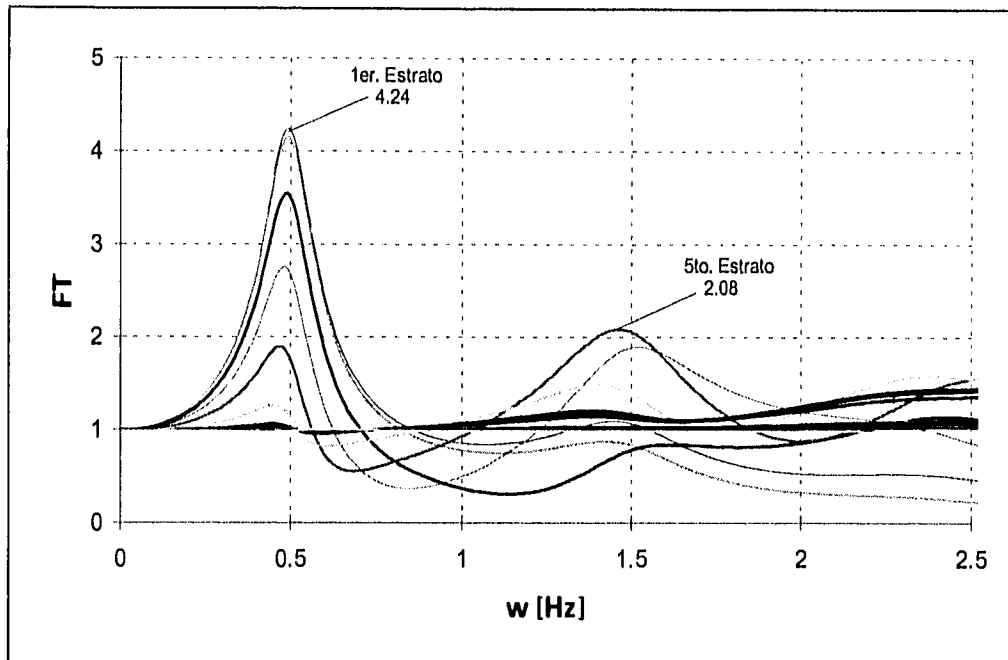
Nivel del Modelo	Acelerograma Calibrado			Registro de Campo Libre		
	Amplitud [cm ² /s ⁴]	Energía [cm ² /s ³]	Aceleración [cm/s ²]	Amplitud [cm ² /s ⁴]	Energía [cm ² /s ³]	Aceleración [cm/s ²]
17avo. nivel	153.38	482,711.26	291.55	137.14	307,386.41	238.34
1er. nivel	23.80	74,868.03	107.72	36.28	69,224.04	103.29
1er. estrato	26.16	78,828.71	113.59	40.00	75,488.15	107.66

Tabla 7. Amplitud, energía y Aceleraciones Máximas en los diferentes niveles del sistema

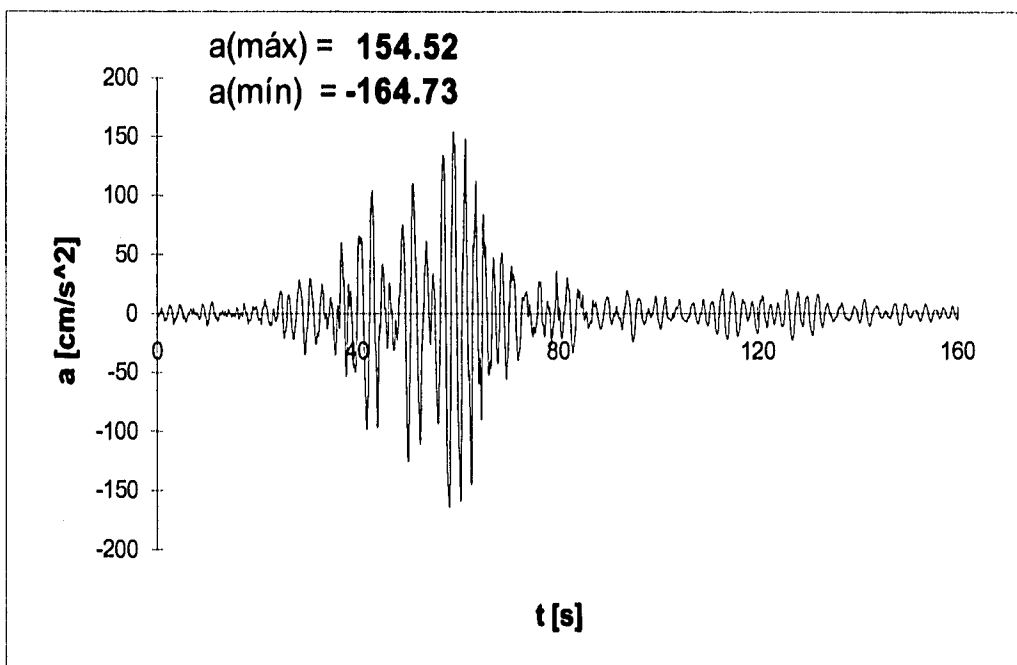
Comparando las gráficas de espectro y acelerogramas de respuesta se puede observar que en la gráfica 38 las frecuencias de la estructura no aparecen, en contraste con la gráfica 11, donde se percibe que la estructura tiene influencia sobre los desplazamientos del suelo. En las gráficas 39 y 12 se puede notar cierta similitud de los acelerogramas, al igual que en la respuesta máxima, pero debido a que la frecuencia que domina es la del suelo (0.5 Hz) la evolución del acelerograma es más armónico. Estas diferencias de influencia de las frecuencias de la estructura y del periodo dominante del suelo se pueden percibir en las gráficas 40 y 13 (espectros de respuesta del primer nivel), 42 y 15 (espectros de respuesta del último nivel), 41 y 14 (acelerogramas de respuesta del primer nivel) y 43 y 16 (acelerogramas de respuesta del último nivel).



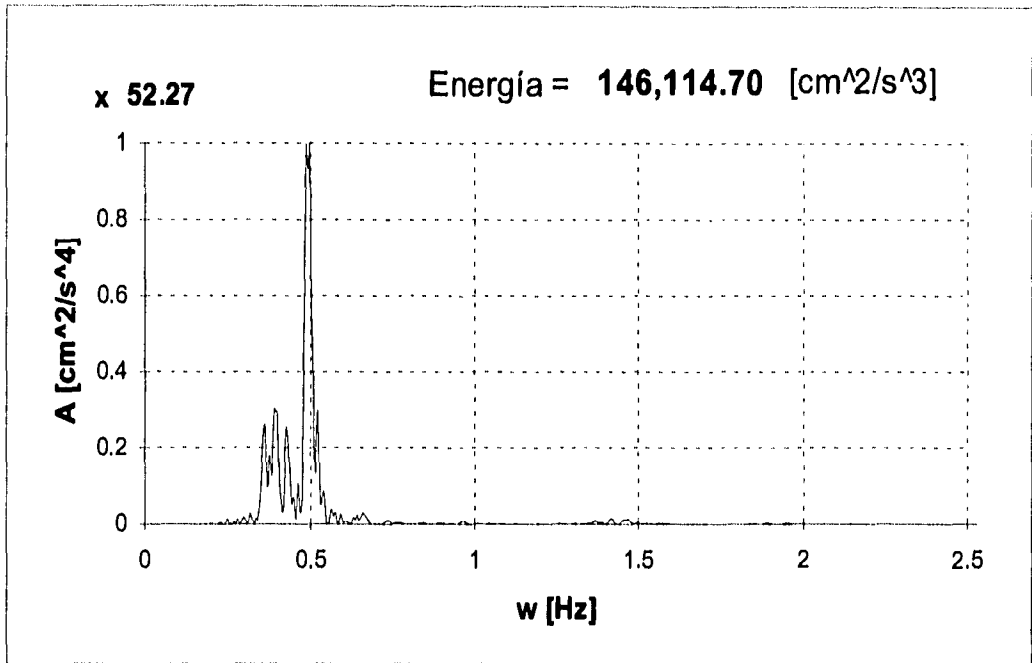
Gráfica 1. Propiedades de la Estratigrafía del Sitio de SCT



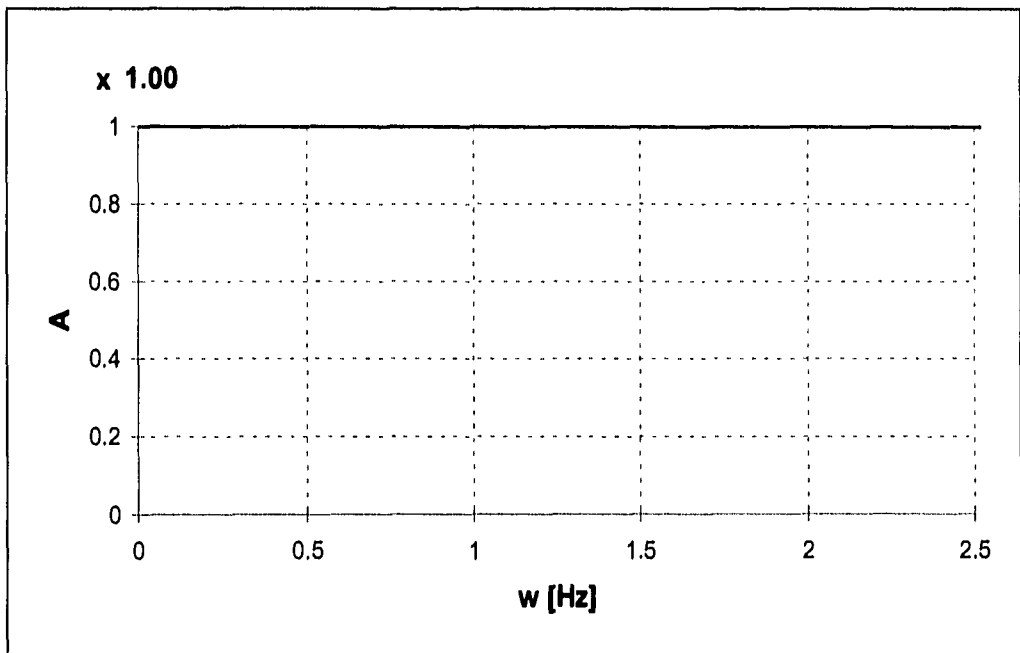
Gráfica 2. Función de Transferencia SCT



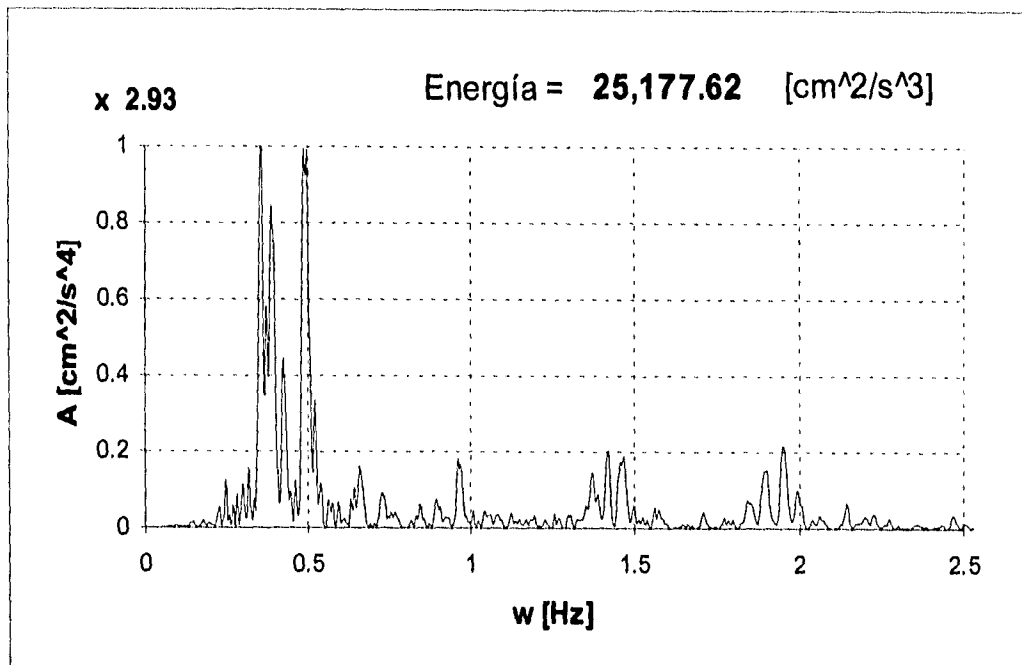
Gráfica 3. Acelerograma registrado en SCT en dirección N90E el 19 de septiembre de 1985



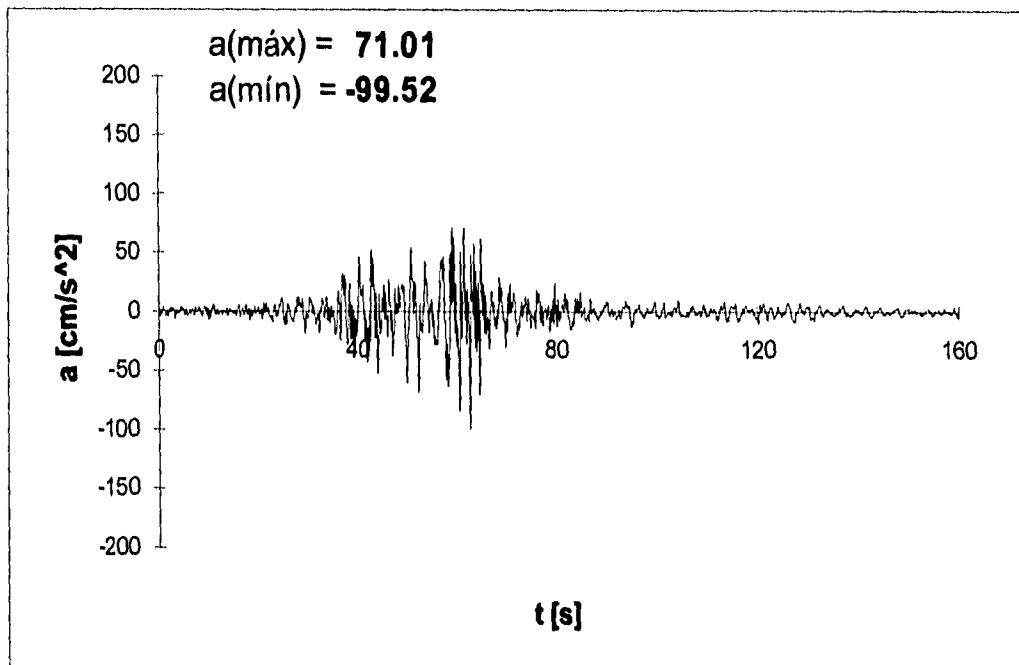
Gráfica 4. Espectro registrado en SCT en dirección N90E el 19 de septiembre de 1985



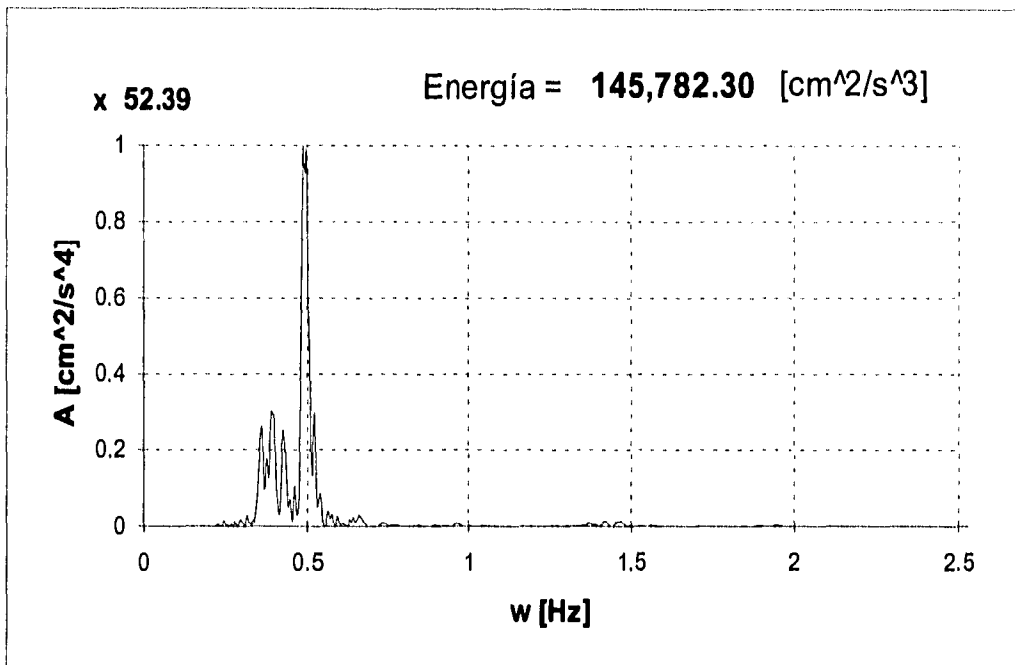
Gráfica 5. Espectro Unitario A



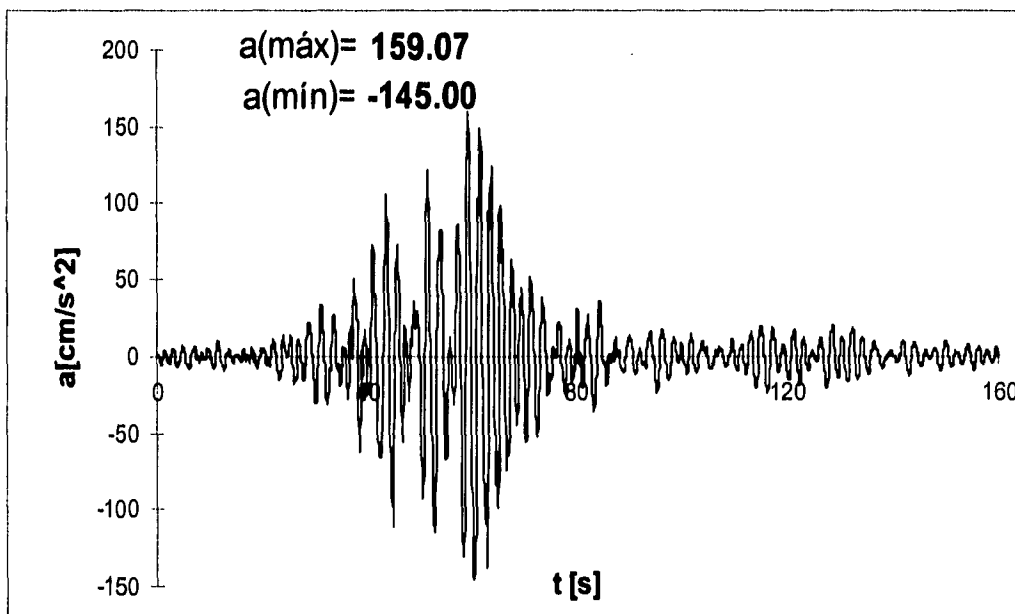
Gráfica 6. Espectro Depósitos Profundos α



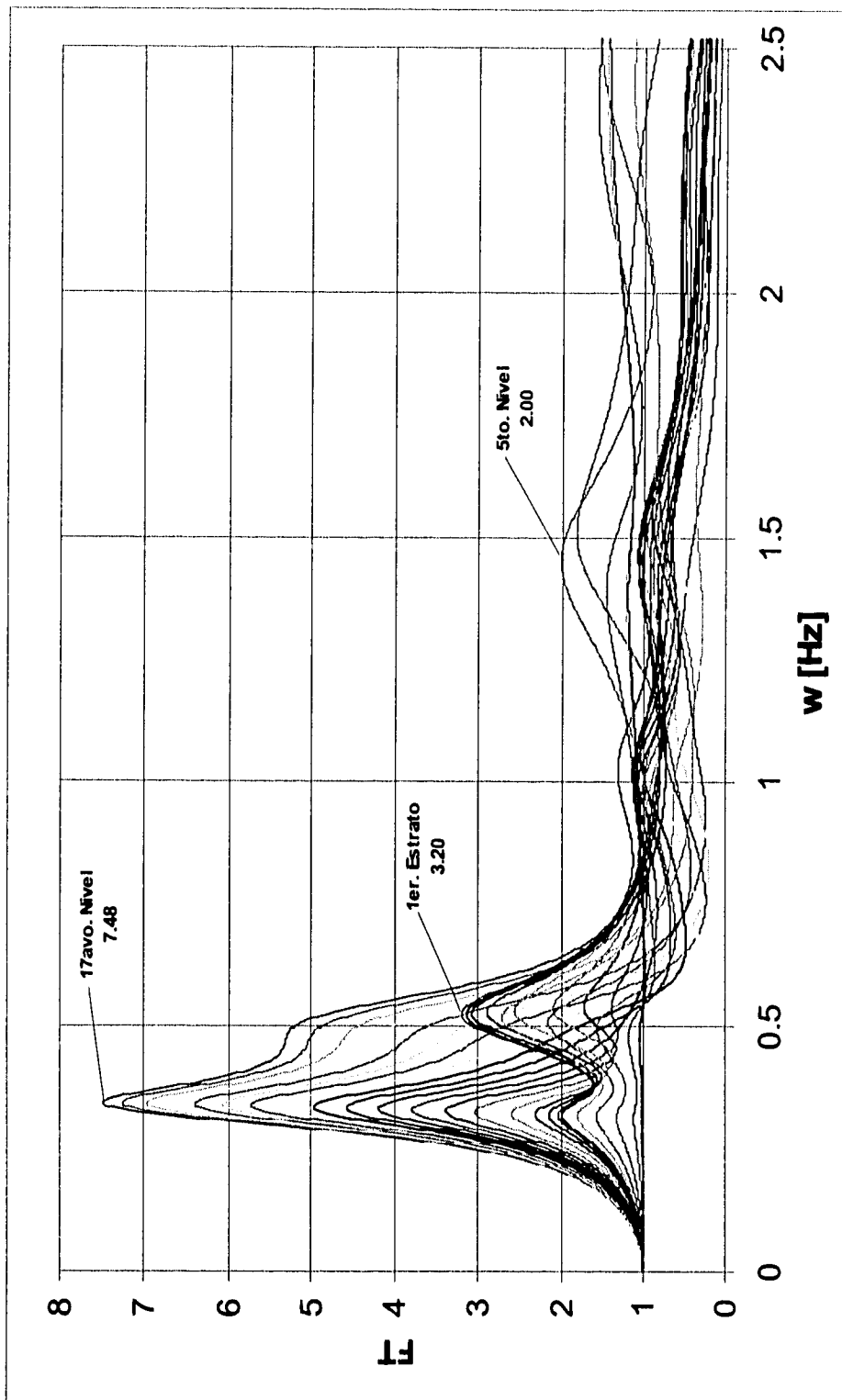
Gráfica 7. Acelerograma Depósitos Profundos α



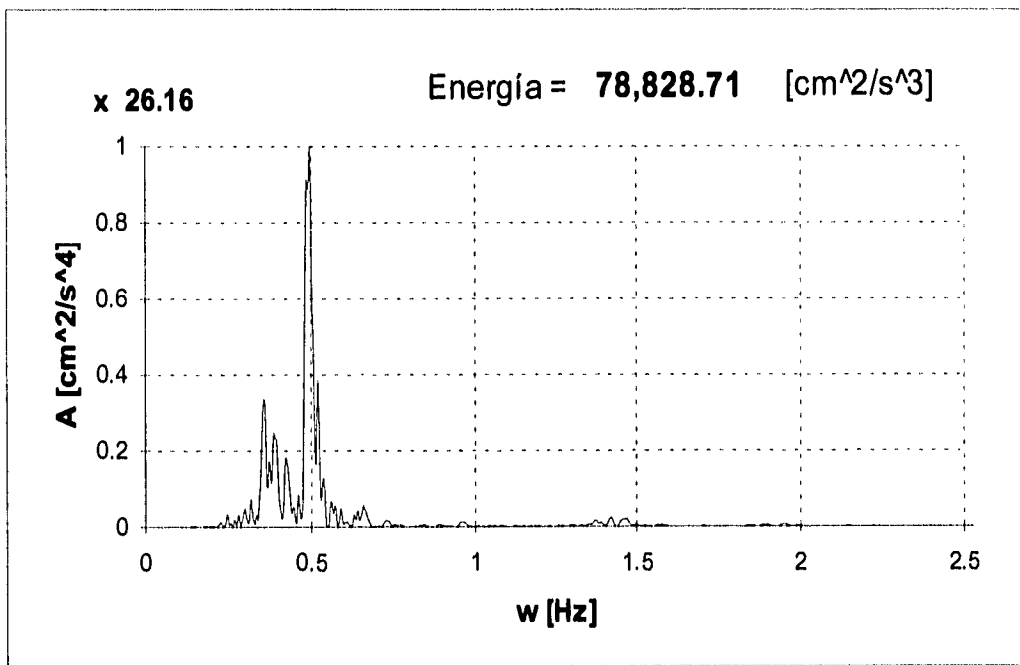
Gráfica 8. Espectro de Campo Libre Simulado



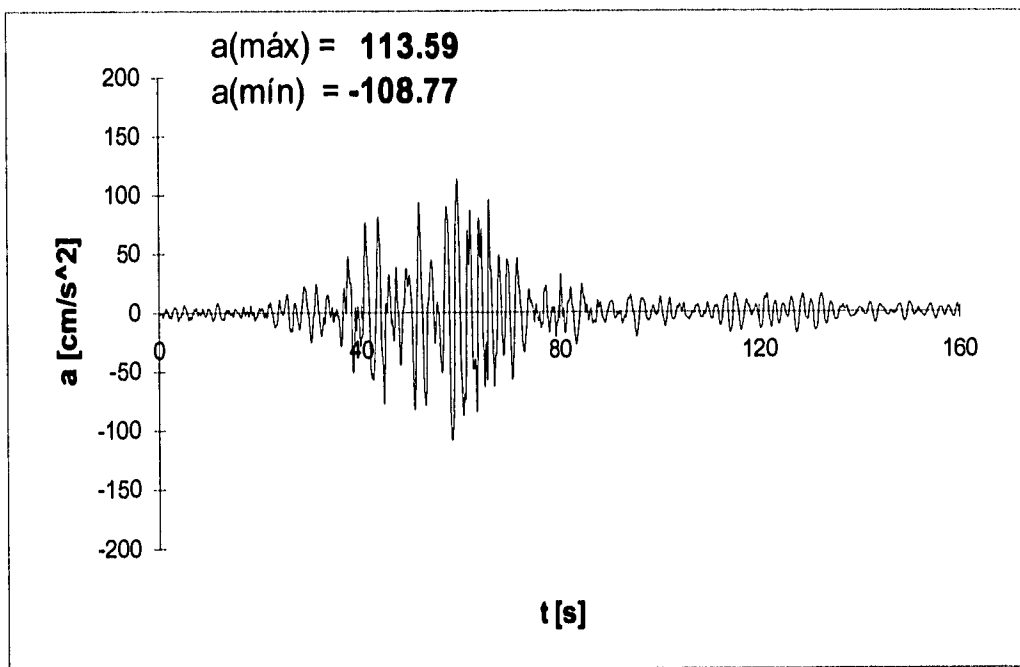
Gráfica 9. Acelerograma de Campo Libre Simulado



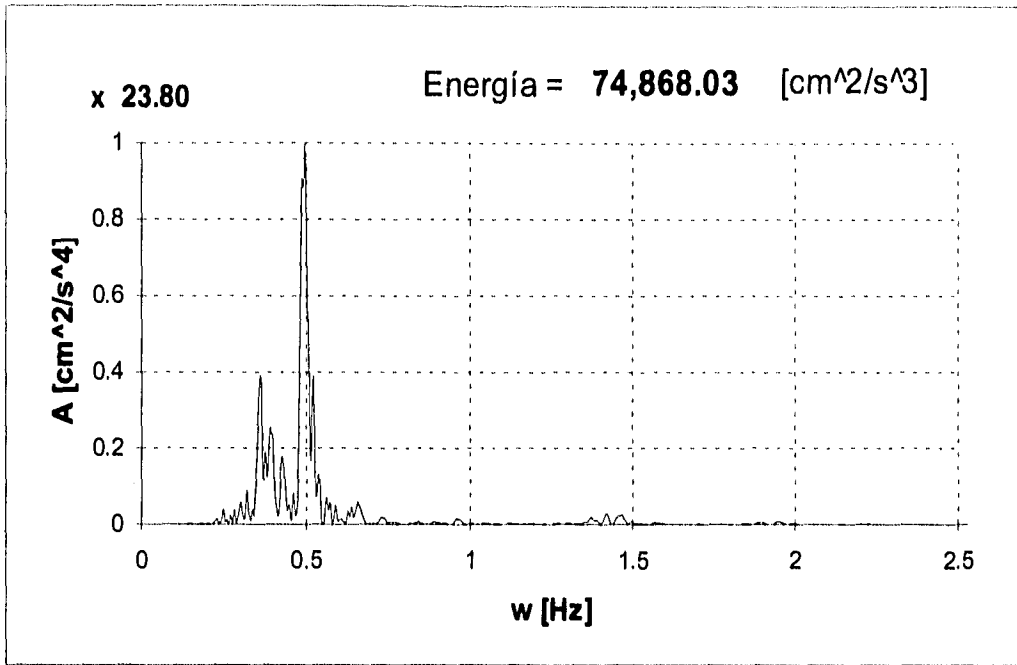
Gráfica 10. Función de Transferencia del Sistema Semiespacio Suelo Estructura (SE-S-E)



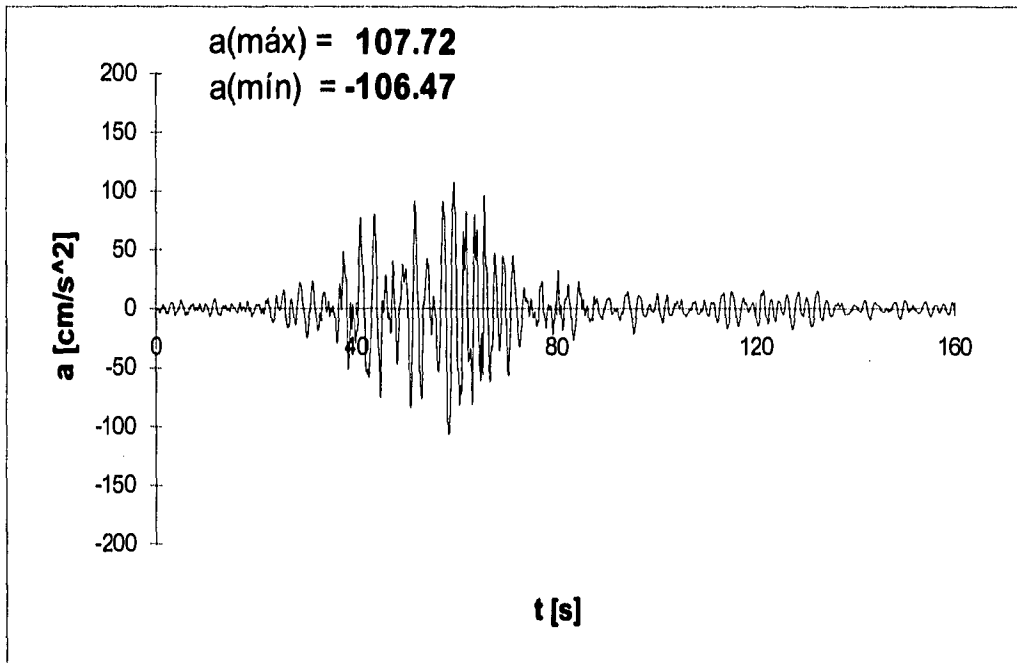
Gráfica 11. Espectro del primer estrato de suelo



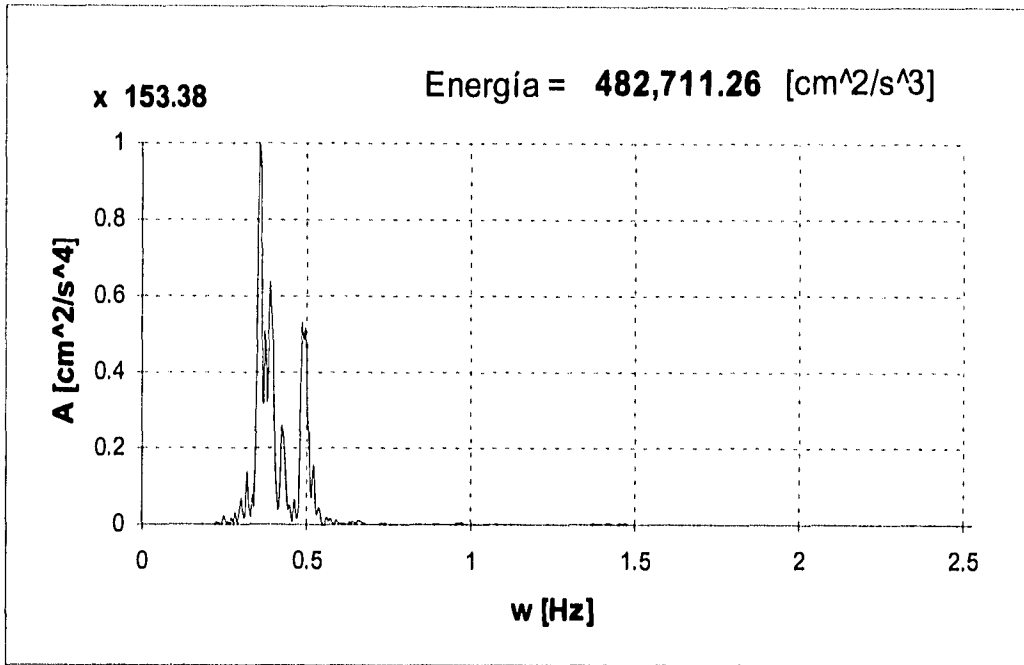
Gráfica 12. Acelerograma del primer estrato de suelo



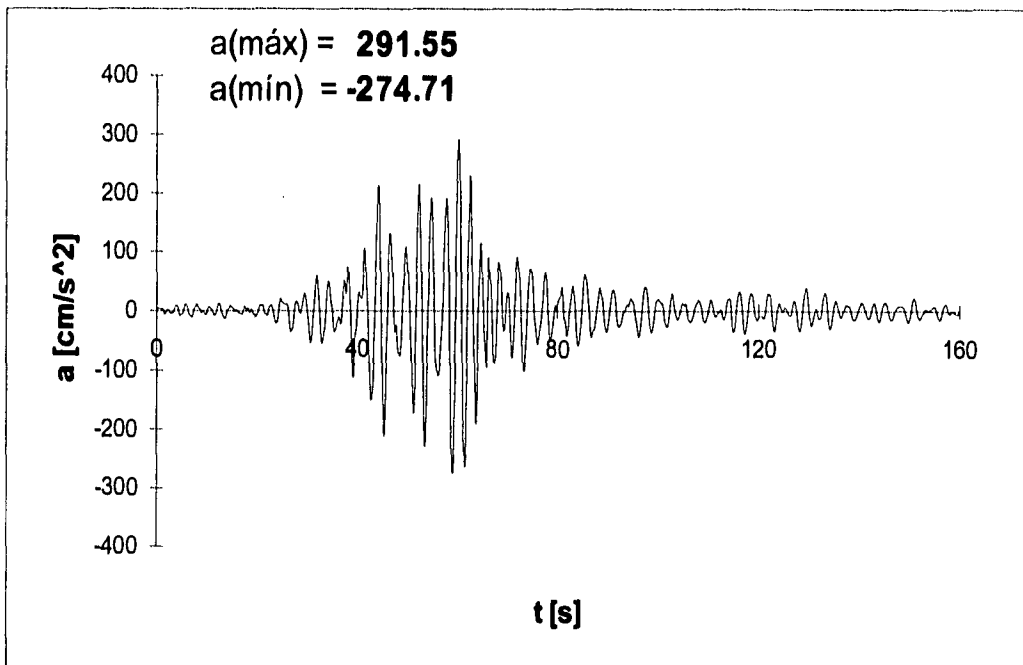
Gráfica 13. Espectro primer nivel de la estructura



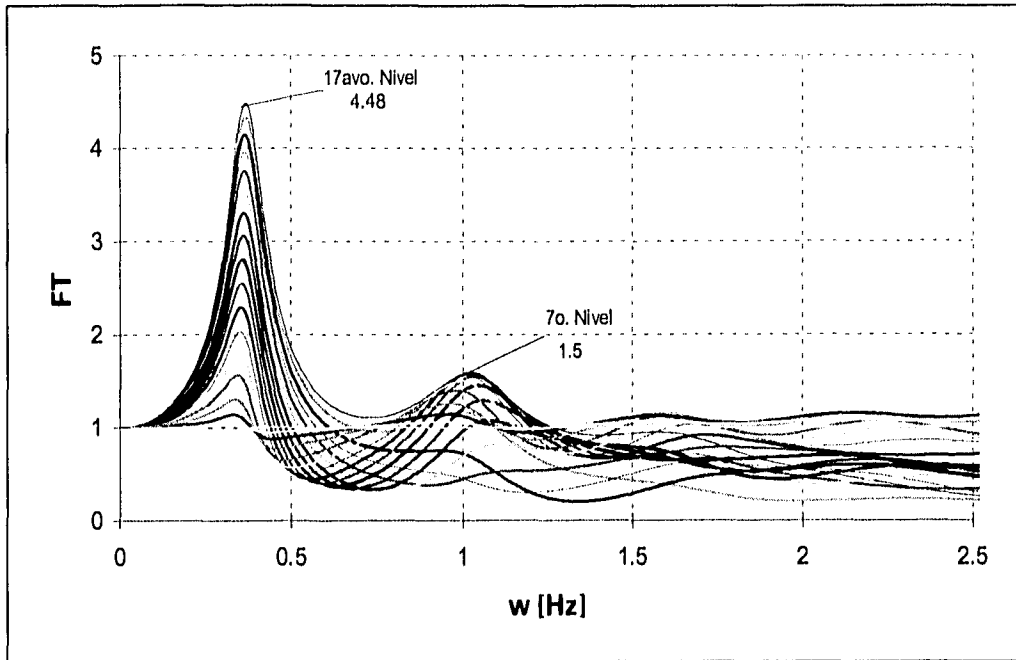
Gráfica 14. Acelerograma primer nivel de la estructura



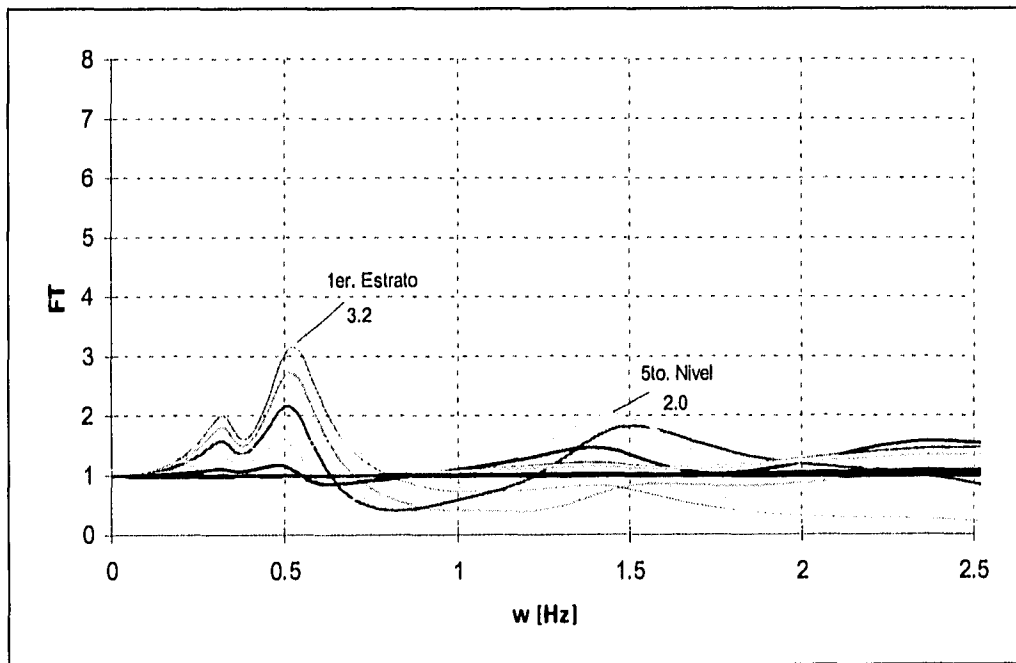
Gráfica 15. Espectro último nivel de la estructura



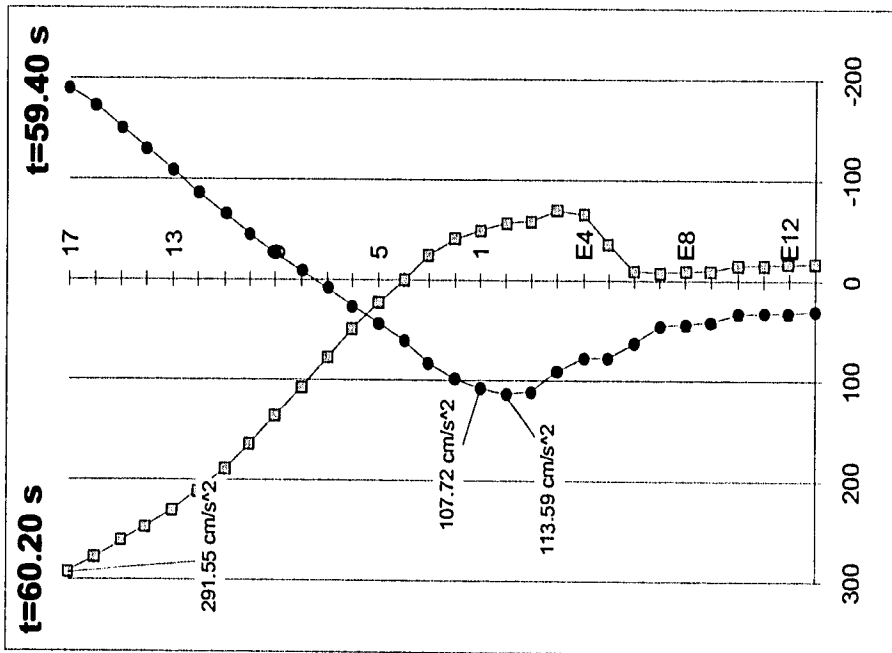
Gráfica 16. Acelerograma último nivel de la estructura



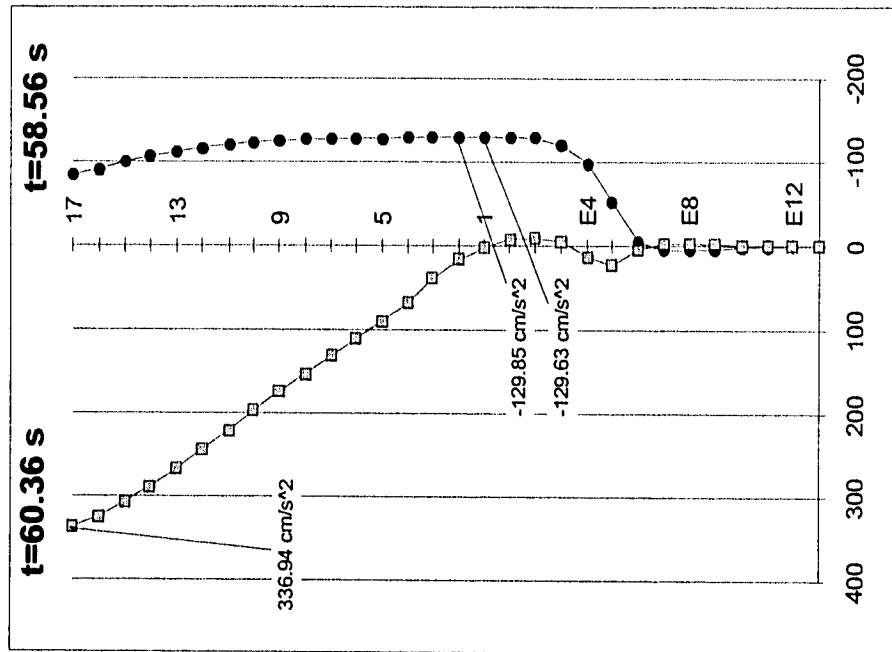
Gráfica 17. Función de Transferencia de la Estructura



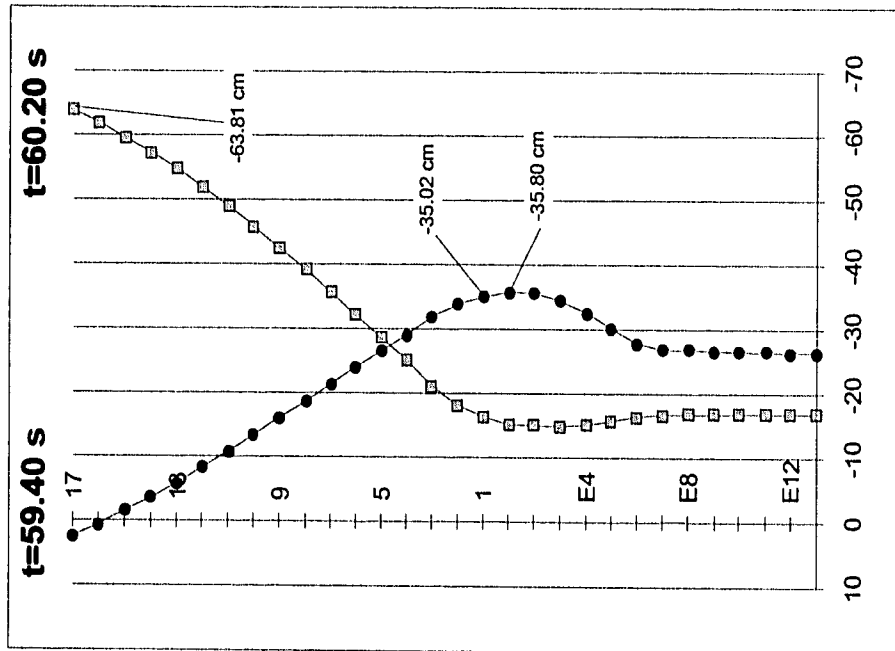
Gráfica 18. Función de Transferencia del Suelo



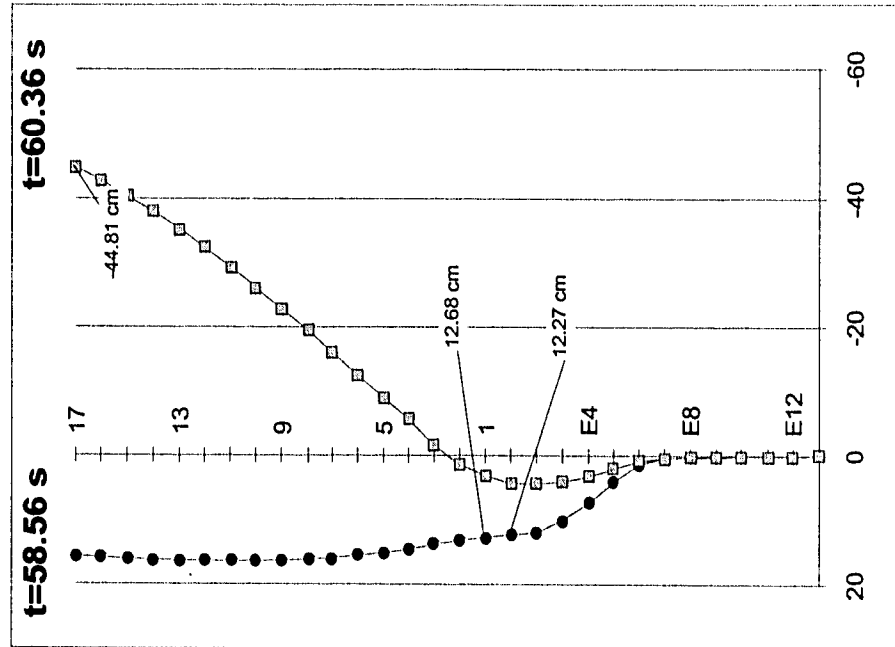
Gráfica 19. Aceleraciones Máximas Absolutas



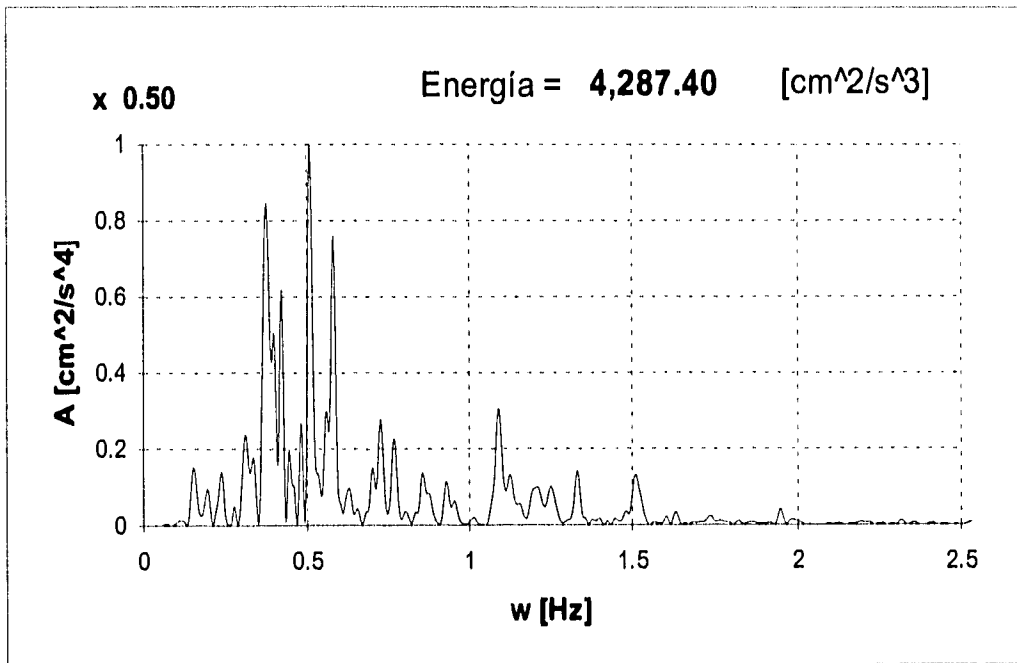
Gráfica 20. Aceleraciones Relativas



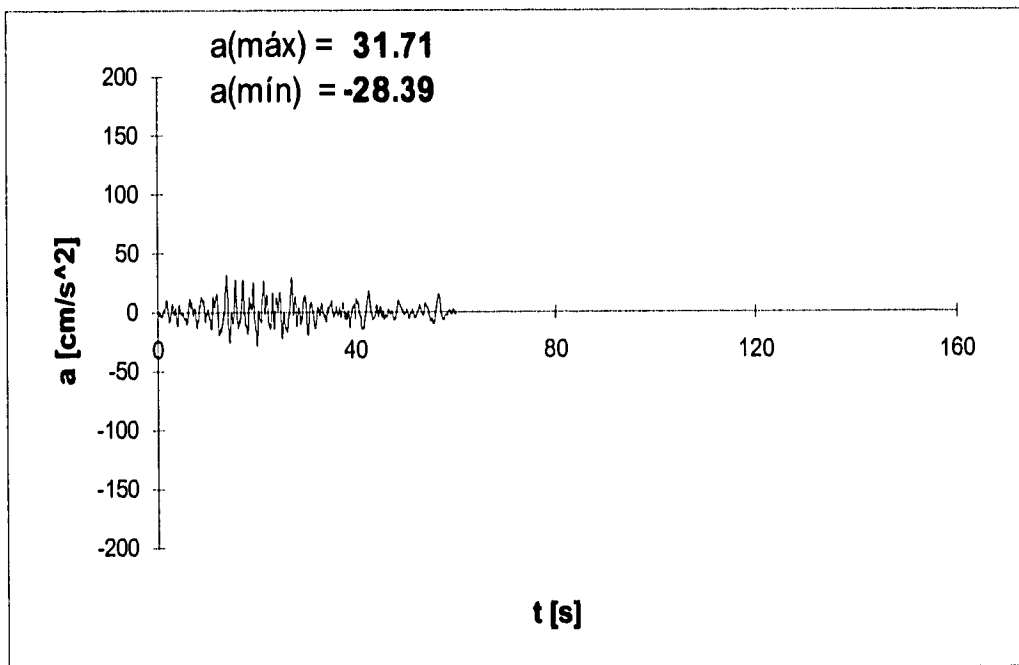
Gráfica 21. Desplazamientos Máximos Absolutos



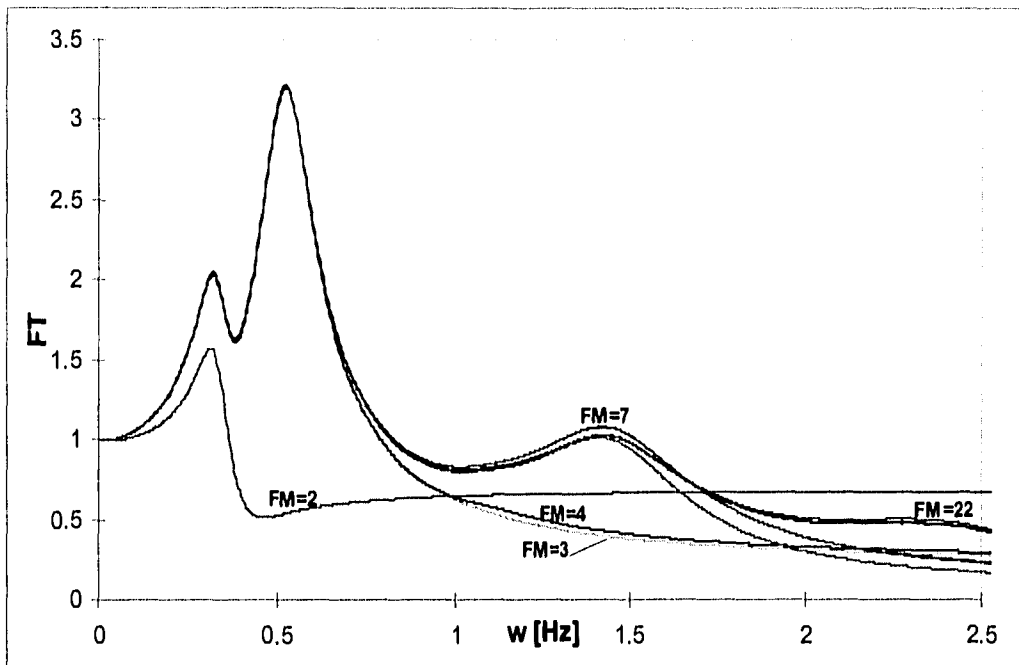
Gráfica 22. Desplazamientos Relativos



Gráfica 23. Espectro de Ciudad Universitaria

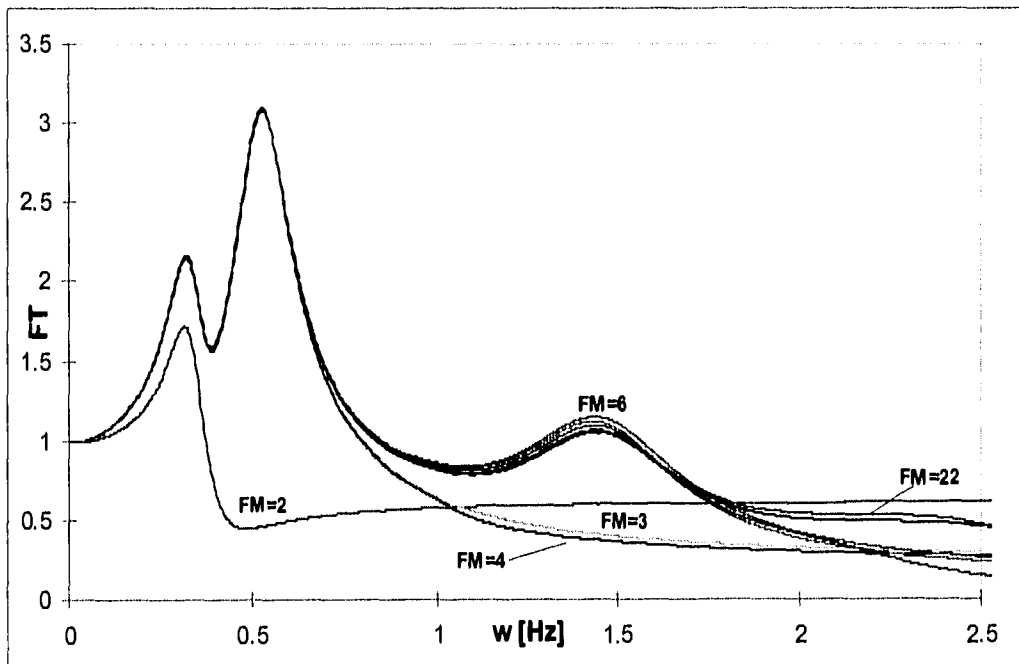


Gráfica 24. Acelerograma de Ciudad Universitaria



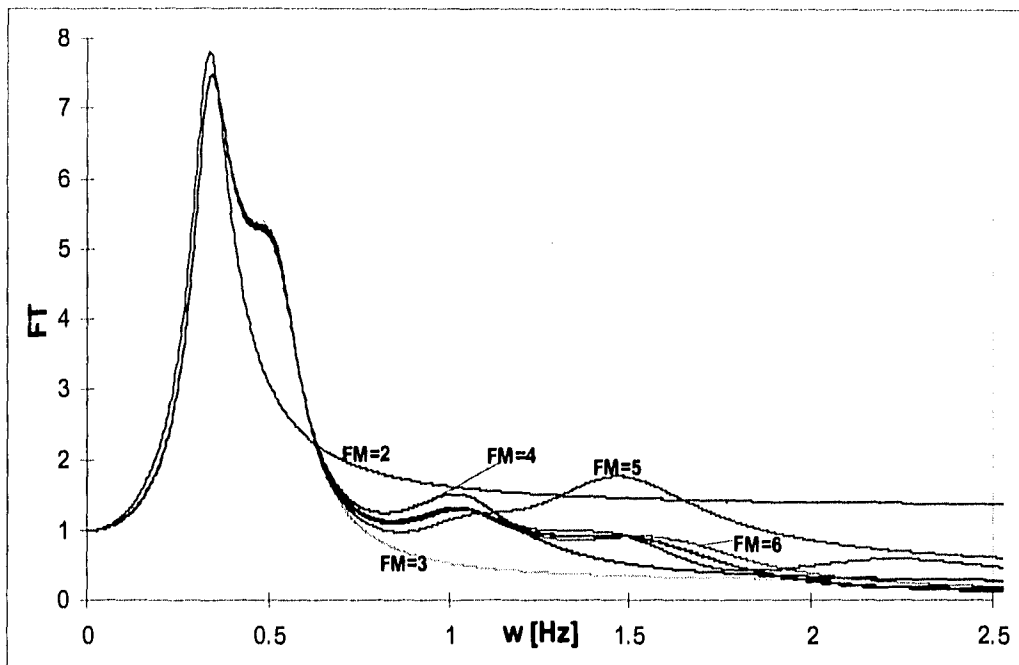
*FM=Número de formas modales incluidas

Gráfica 25. Evolución de la función de transferencia para el 1er. estrato de suelo



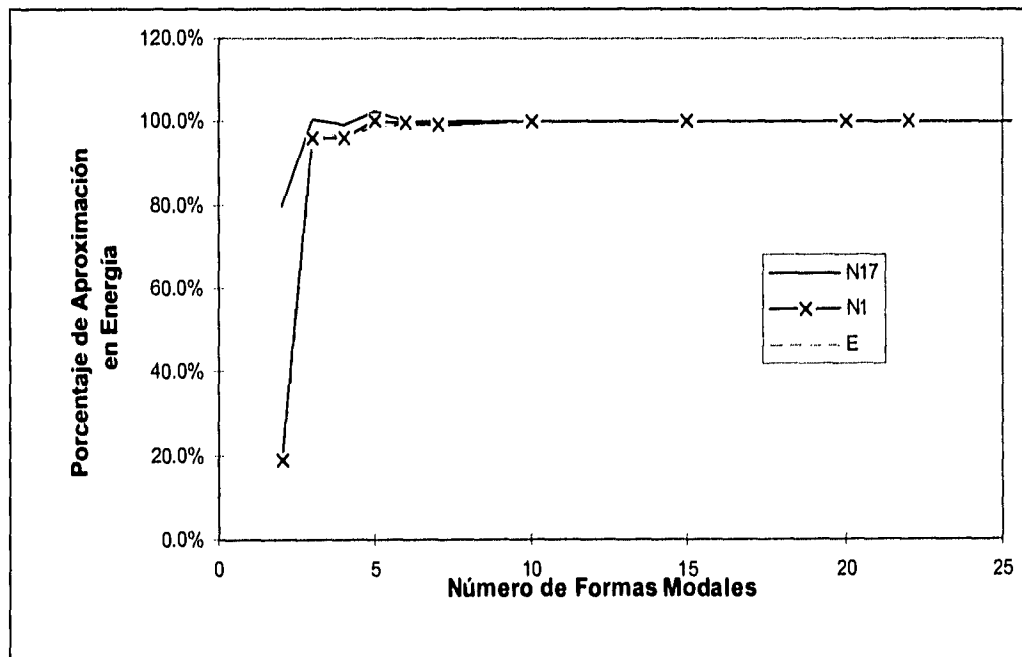
*FM=Número de formas modales incluidas

Gráfica 26. Evolución de la función de transferencia para el 1er. nivel de la estructura

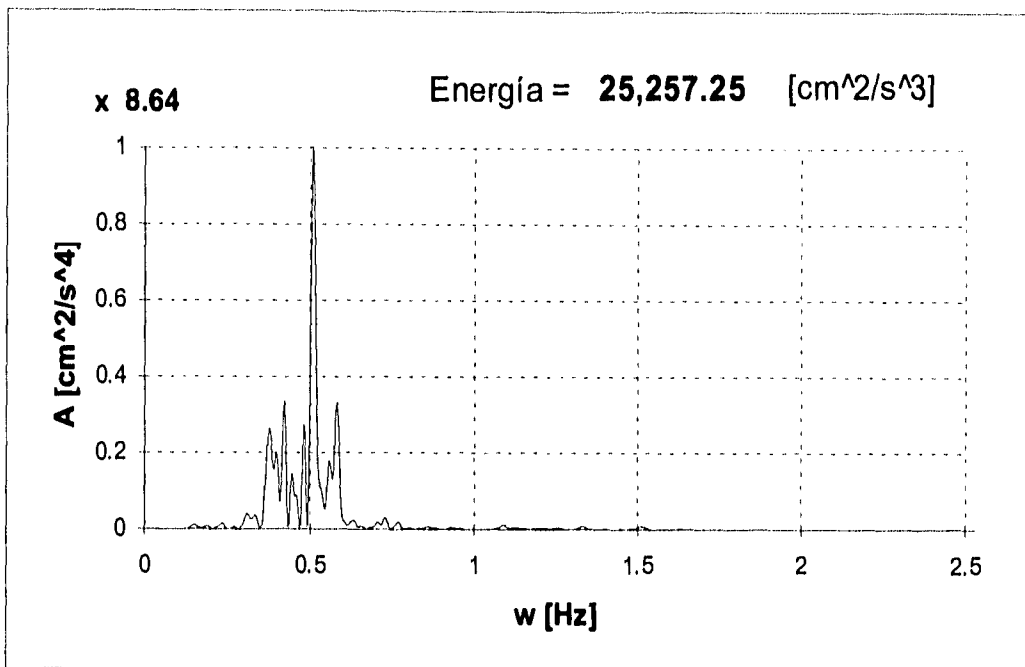


*FM=Número de formas modales incluidas

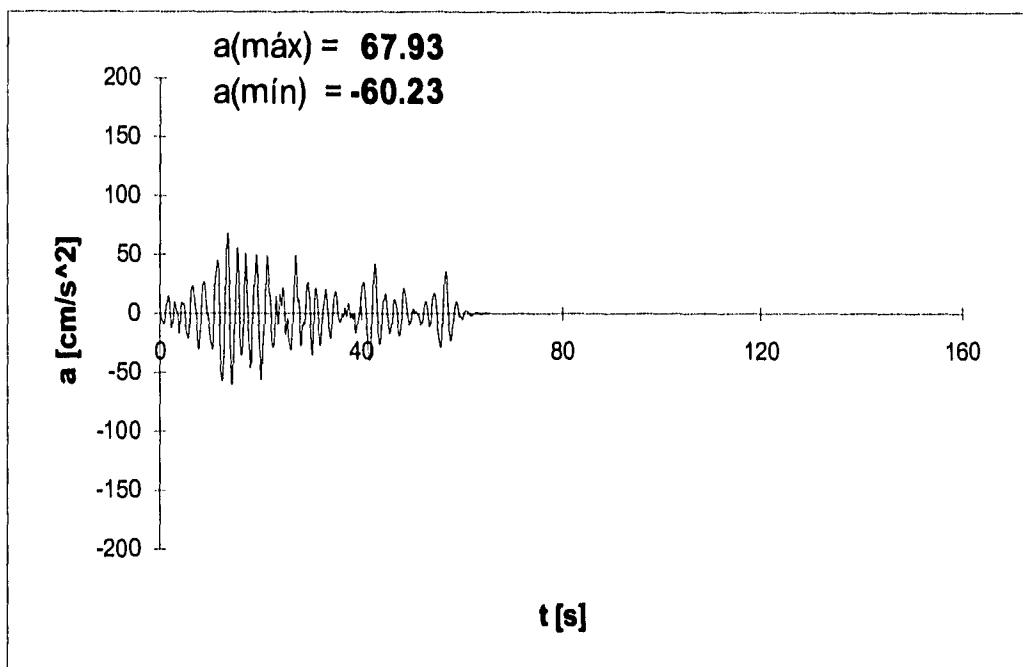
Gráfica 27. Evolución de la función de transferencia para el 17avo. nivel de la estructura



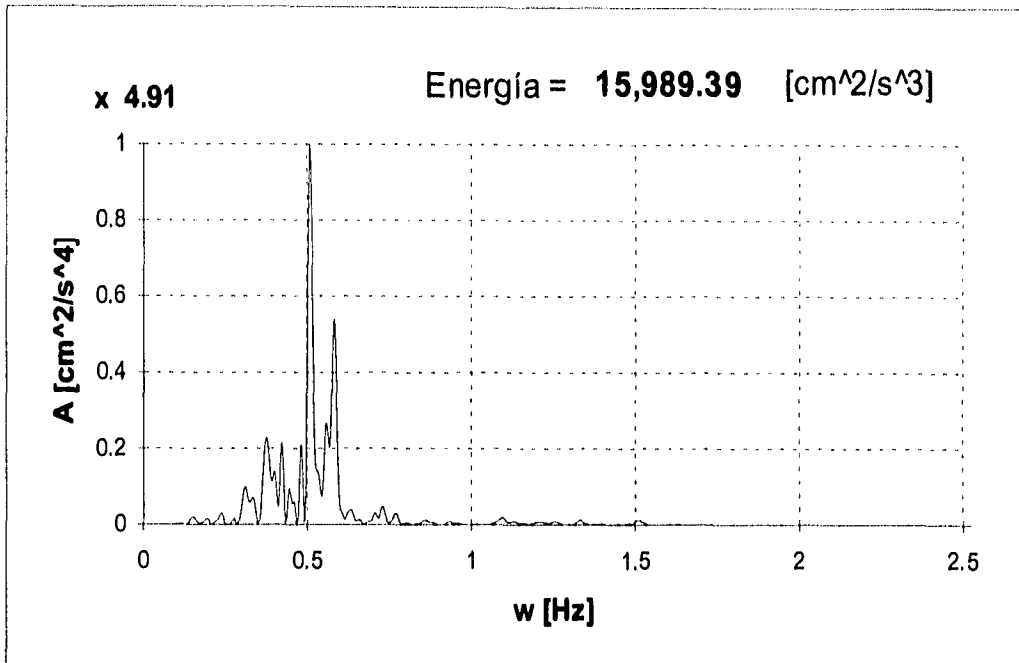
Gráfica 28. Influencia de las formas modales en el análisis dinámico



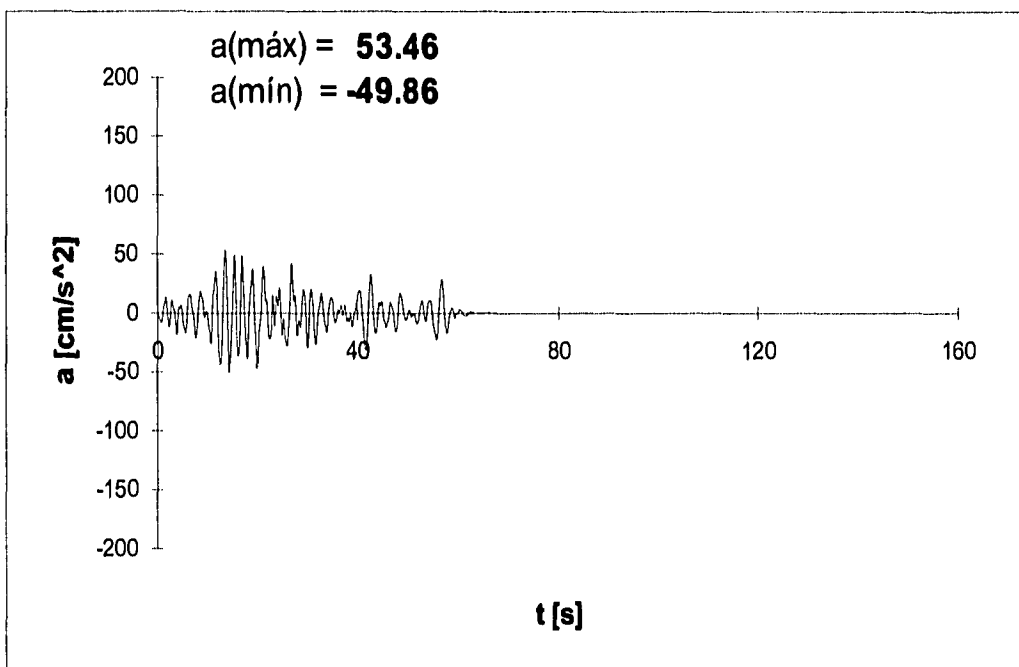
Gráfica 29. Espectro de Campo Libre



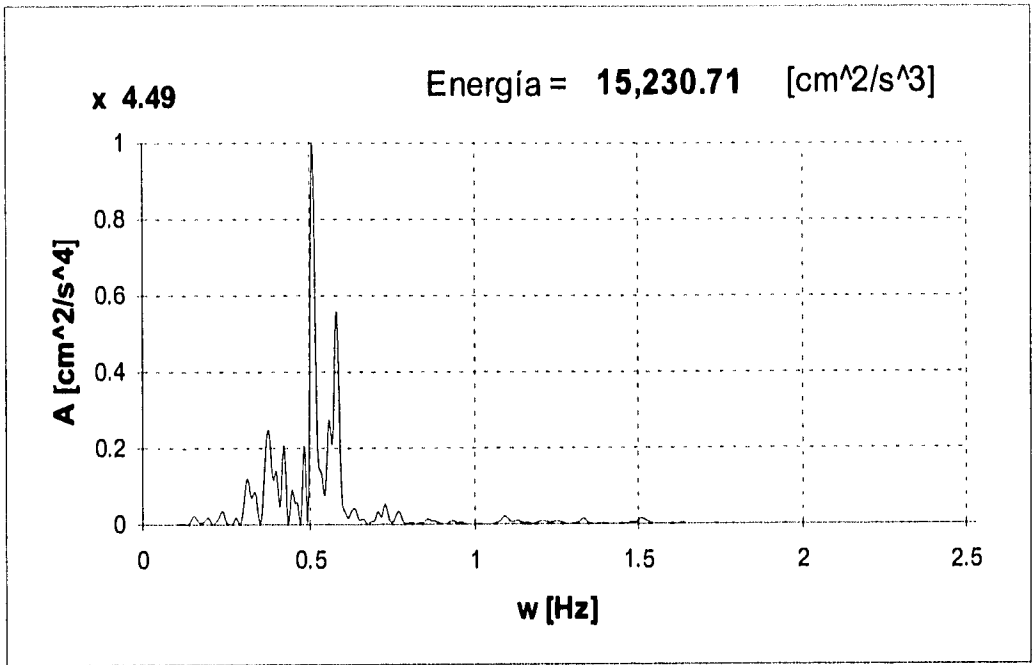
Gráfica 30. Acelerograma de Campo Libre



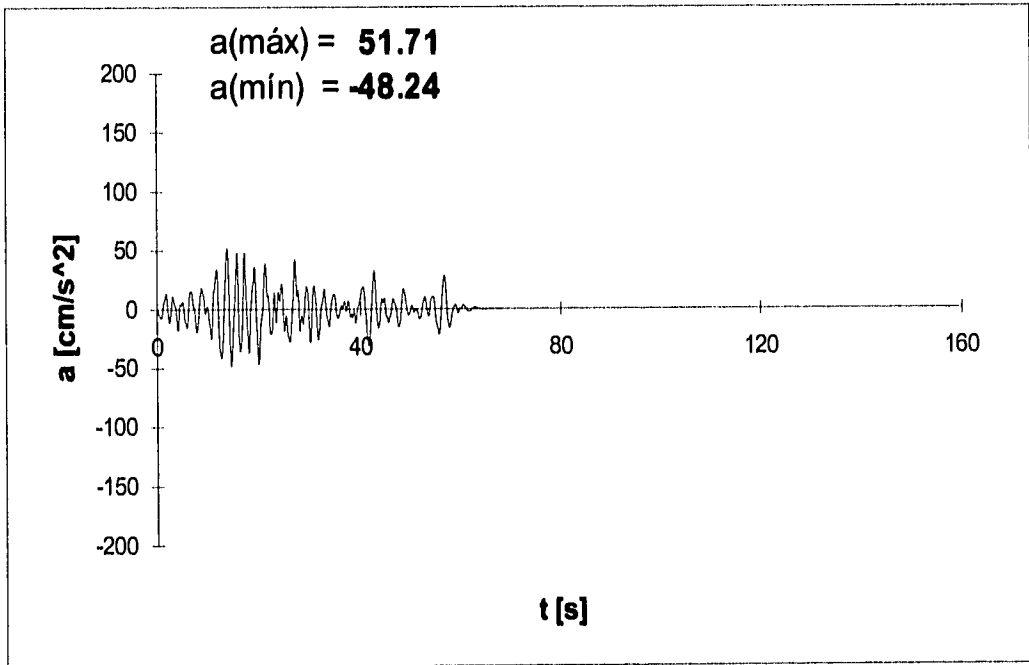
Gráfica 31. Espectro de la Estratigrafía Análisis Tradicional



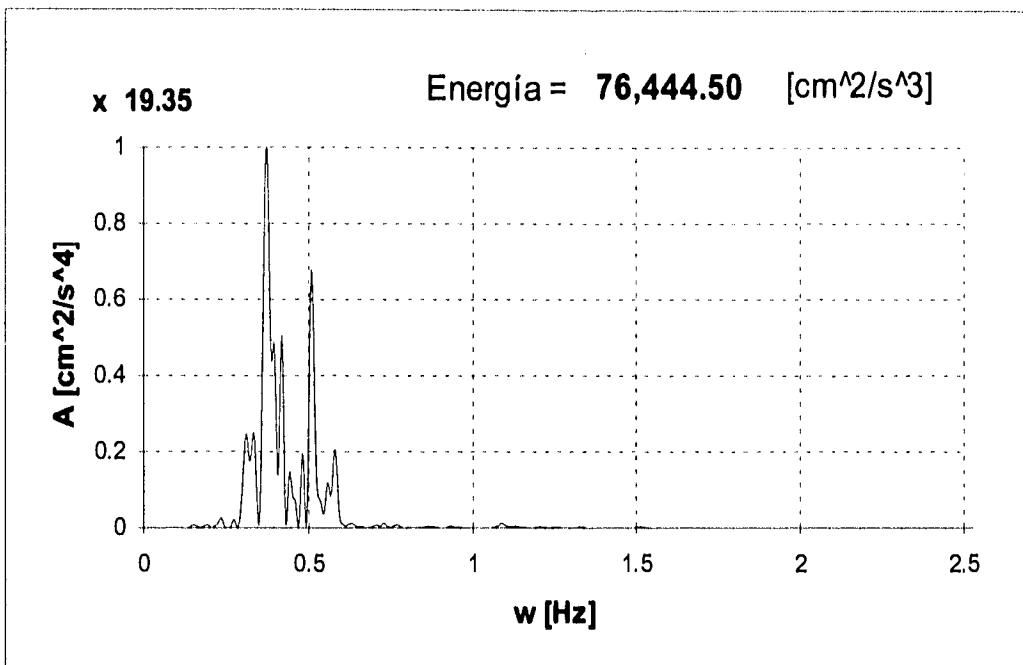
Gráfica 32. Acelerograma de la Estratigrafía Análisis Tradicional



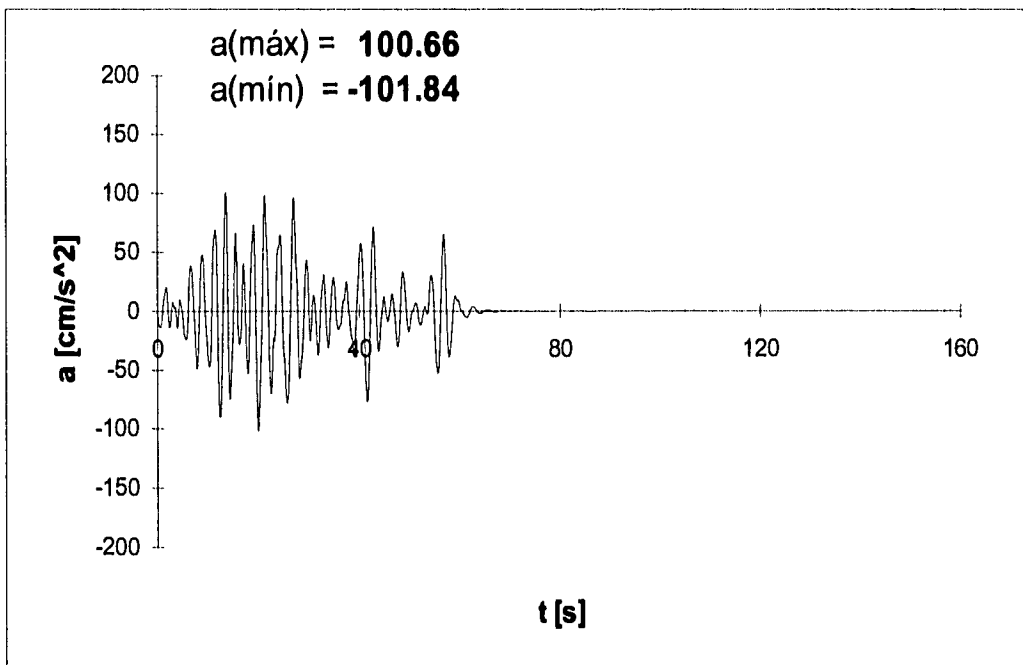
Gráfica 33. Espectro del primer nivel, Análisis Tradicional



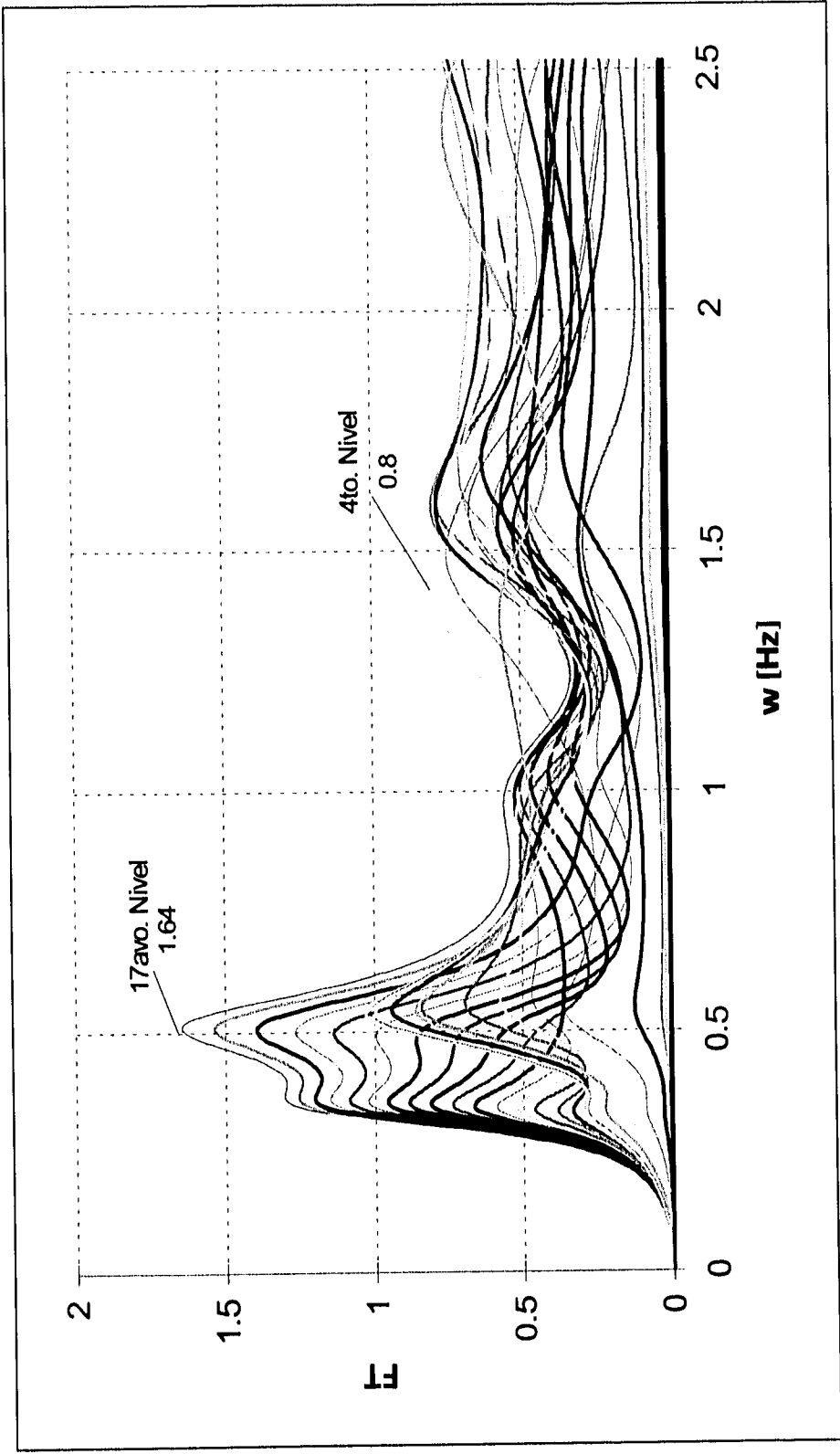
Gráfica 34. Acelerograma del primer nivel, Análisis Tradicional



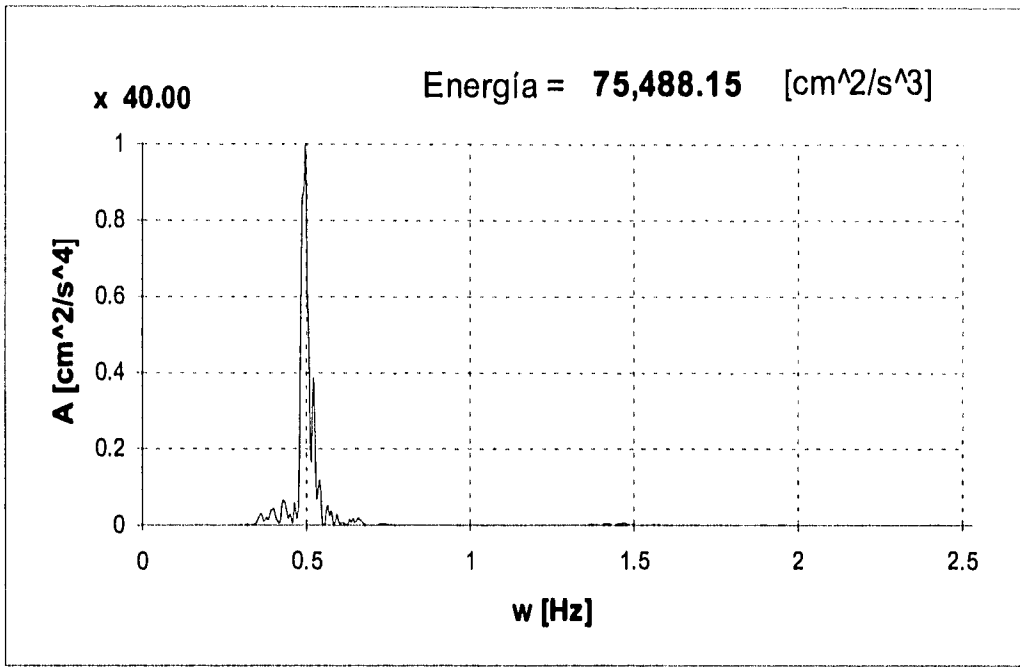
Gráfica 35. Espectro del 17avo nivel, Análisis Tradicional



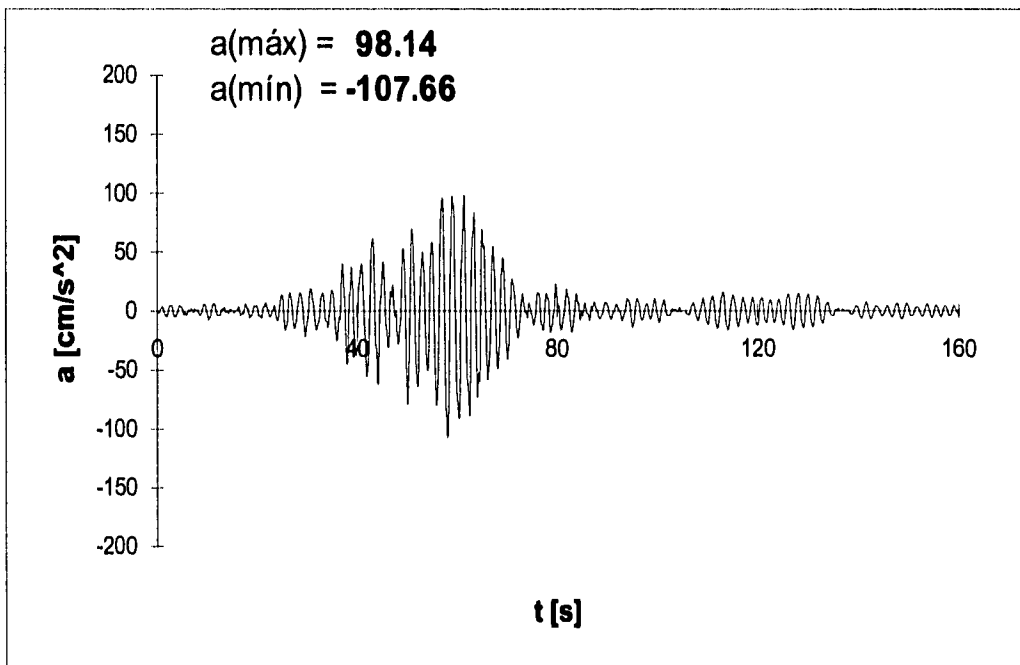
Gráfica 36. Acelerograma del 17avo nivel, Análisis Tradicional



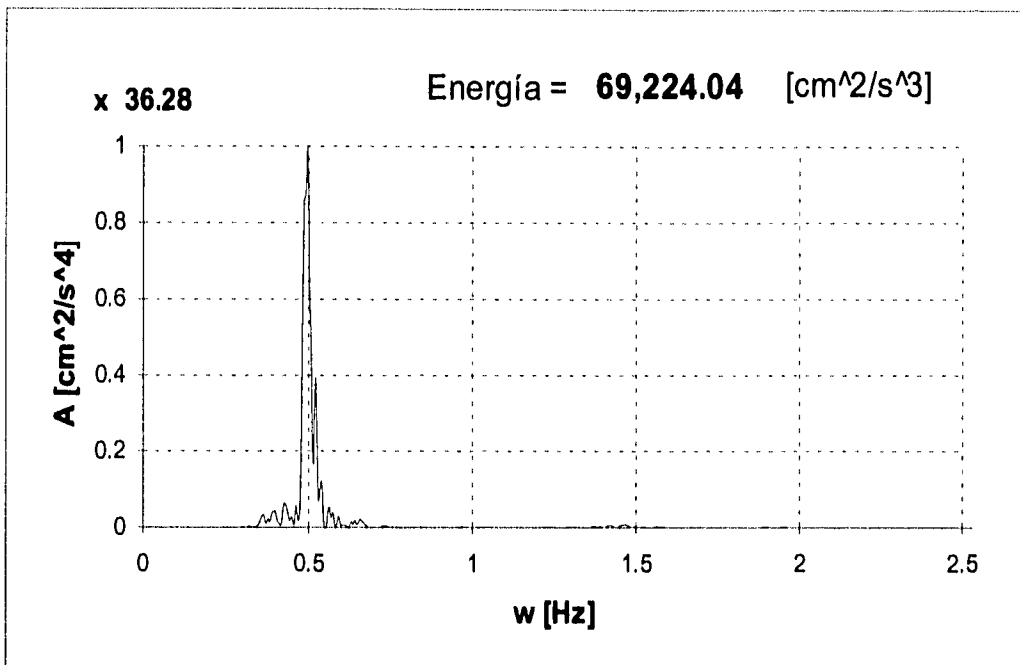
Gráfica 37. Función de Transferencia con Excitación en la Base del Edificio



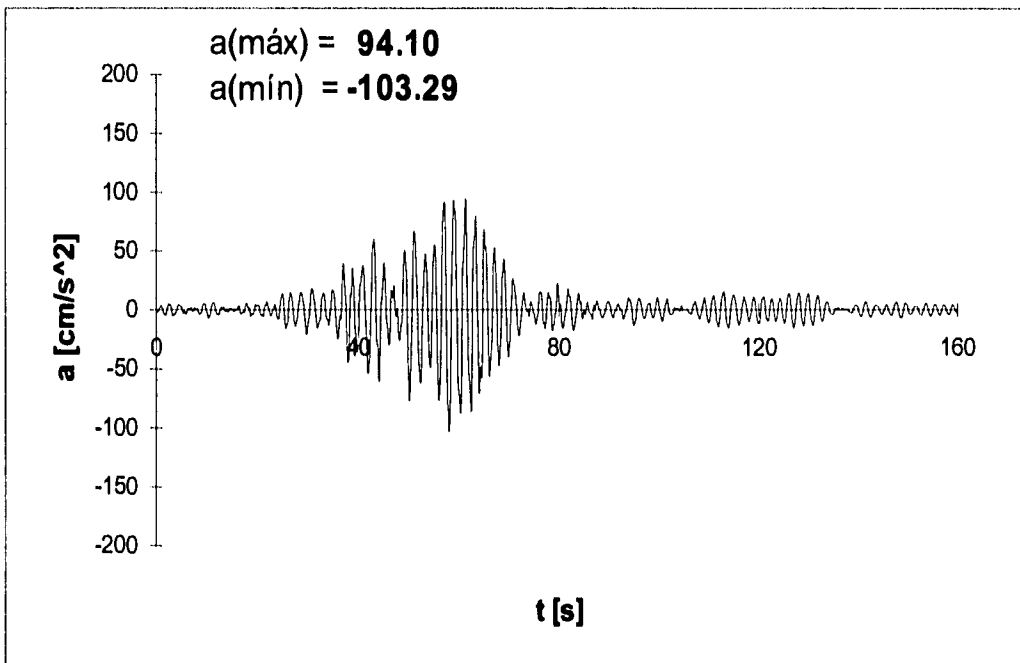
Gráfica 38. Espectro Estratigrafía Campo Libre, Análisis Tradicional



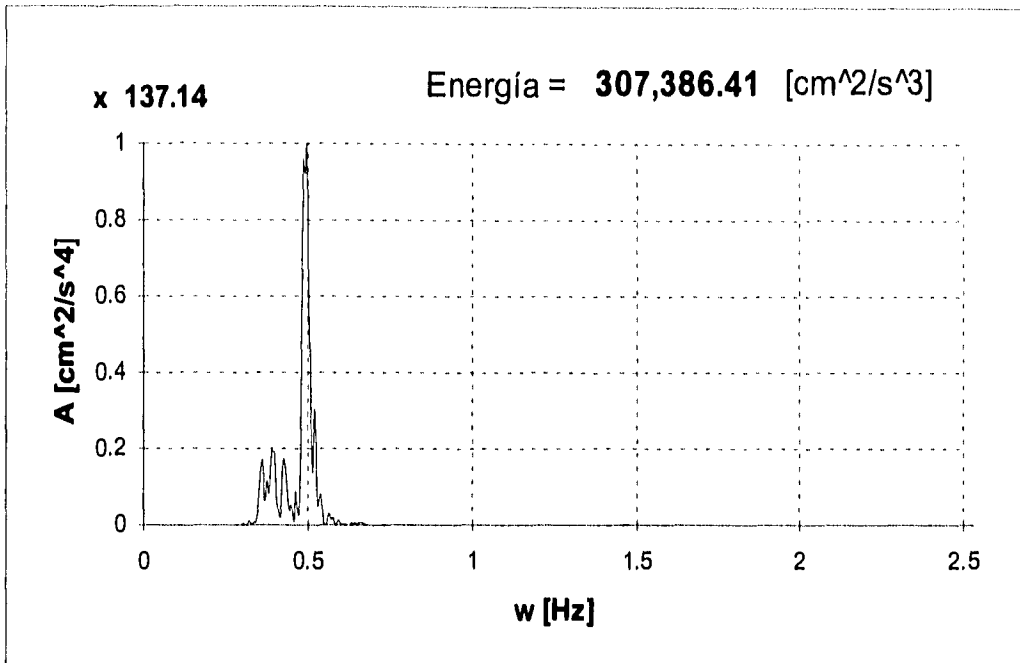
Gráfica 39. Acelerograma Estratigrafía Campo Libre, Análisis Tradicional



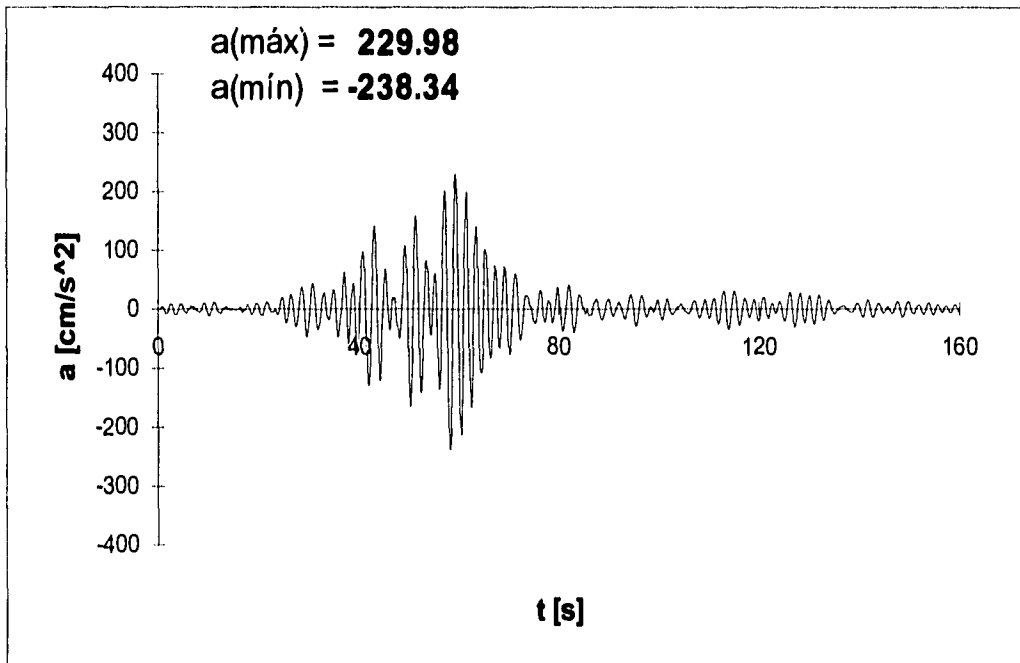
Gráfica 40. Espectro primer nivel Campo Libre, Análisis Tradicional



Gráfica 41. Acelerograma primer nivel Campo Libre, Análisis Tradicional



Gráfica 42. Espectro 17avo. nivel Campo Libre, Análisis Tradicional



Gráfica 43. Acelerograma 17avo. nivel Campo Libre, Análisis Tradicional

CAPÍTULO 4
CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Con el modelo semidefinido Estructura Suelo Semiespacio se permite introducir la señal sísmica en el Semiespacio móvil, a diferencia de los modelos tradicionales en donde se presentan problemas en la selección y en la forma de como inducir la señal. Además, el análisis presentado de interacción se hace proponiendo un modelo más completo.

Del cálculo de las frecuencias naturales de los sistemas Suelo Semiespacio, Estructura Semiespacio y Estructura Suelo Semiespacio, se obtuvo que las frecuencias del sistema Estructura Suelo Semiespacio se intercalan entre las frecuencias de los sistemas Suelo Semiespacio y Estructura Semiespacio, notando además que existe una mayor densidad de frecuencias en el sistema Estructura Suelo Semiespacio siendo este un efecto de la interacción suelo estructura. También se presenta un incremento en el periodo del sistema Estructura Suelo Semiespacio debido a la mayor flexibilidad que tiene el sistema comparada a la del sistema Estructura Semiespacio. Este incremento en el periodo es otro de los efectos del problema de Interacción dinámica Suelo Estructura.

Con el análisis de campo libre realizado se verificó que el espectro calculado es muy parecido al registrado en SCT, presentándose un error de 0.23% tanto en amplitud máxima como en energía, en aceleración máxima se obtuvo un error de 3.44%, comprobando que con el cálculo de la Función de Transferencia de la excitación inducida en los depósitos profundos de la estratigrafía es la que produce la respuesta de campo libre, ya que se reproduce con una precisión del 95% el espectro real registrado en el sitio.

Al realizar el análisis dinámico induciendo la señal en el Semiespacio del sistema Estructura Suelo Semiespacio y al compararlo con el de campo libre se tiene una disminución del 50% en la amplitud máxima del espectro y una reducción del 46% en energía, esto se debe a la influencia del edificio desplantado sobre el terreno, impidiendo que se desarrollen aceleraciones mayores a las del registro de Campo Libre, siendo un resultado del fenómeno de interacción.

La Función de Transferencia permite conocer las características vibratorias de un sistema cualquiera, permitiendo que el análisis dinámico se pueda efectuar de una manera simple. Una vez que se calcula la Función de Transferencia, se multiplica por la señal de excitación correspondiente para obtener la respuesta, con lo que se tendrá una reducción considerable en el tiempo de cálculo.

La frecuencia asociada a la Forma Modal que tiene una mayor participación en la respuesta se le llamará frecuencia fundamental.

Para analizar el problema de interacción dinámica del fenómeno de interacción Suelo Estructura se debe seguir el procedimiento que se resume en los siguientes pasos:

- a) Se calcula la Función de Transferencia de la estratigrafía donde se desplantará la estructura
- b) Conocida la Función de Transferencia, se divide la señal de Campo Libre registrada en el sitio entre la Función de Transferencia, dando por resultado la señal que se utilizará como fuente de excitación en el Semiespacio
- c) Con la señal calibrada utilizada como fuente de excitación, se realiza el análisis dinámico de la estratigrafía para comprobar que la señal obtenida en la superficie es la correspondiente al registro de Campo Libre del sitio en estudio
- d) Una vez conocida la señal calibrada que se utilizará como fuente de excitación se procede a realizar el análisis dinámico del sistema Estructura Suelo Semiespacio

De los análisis tradicionales aplicados en el modelo propuesto se concluye que en el análisis de Interacción con excitación en los depósitos profundos, el empleo de acelerogramas registrados en terreno duro no es recomendable para tratar de reproducir una respuesta semejante a la registrada en el sitio, y que la señal que llega en los depósitos profundos del valle de México no es la misma a la que aflora en sitios donde el terreno es duro. En el análisis de interacción suelo estructura con excitación de campo libre en la base de cimentación de la estructura no se puede considerar confiable, debido a la superposición de frecuencias dominantes del sistema SueloEstructura con las del espectro de respuesta de la excitación.

El trabajo presentado es de carácter teórico; por tanto, queda abierta la línea de investigación experimental que permita comparar los resultados experimentales con los del modelo aquí propuesto.

REFERENCIAS

Álvarez Flores Edith, 1996, "Análisis Dinámico de Absorbedores de Vibración en Estructuras", Tesis de Maestría., División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UAQ, Querétaro, Qro.

Barcena Vega Armando, 1993, "Interacción Dinámica Suelo-Estructura en Suelos Blandos", Tesis de Maestría., División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UNAM, México D.F.

Blevins Robert D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Robert Krieger Publishing Company, Malabar Florida.

Clough, R.W., and Penzien, J., 1993, "Dynamics of Structures", McGraw Hill Book Co., Singapur, segunda edición.

Colindras Selva Rafael, 1983, "Dinámica de Suelos y Estructuras Aplicadas a la Ingeniería Sísmica".

Hinkle, Rollard T., Morse, Ivan E. and Tse, Francis, 1978, "Mechanical Vibrations Theory and Applications", Allyn and Bacon, Inc., Boston, Massachusetts, segunda edición.

Jaime Paredes Alberto, 1988, "Geotécnia y Sismicidad en el Valle de México", Tesis de Doctorado, División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UNAM, México D.F.

Juárez Ramírez M. y Avilés López J., 1993, "Respuesta Sísmica de la Torre Administrativa del Instituto Mexicano del Petroleo Considerando la Interacción Dinámica Suelo-Estructua", pp. 903-909, Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica Puerto Vallarta, Jal. México.

Mendoza O. E., Díaz L. O. y Esteva M. L., 1993, "Análisis Sísmico Inelástico de Edificios Considerando la Interacción Suelo-Estructura", pp. 910-916, Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica Puerto Vallarta, Jal. México.

Muria Vila D., 1993, "Identificación de las Propiedades Dinámicas Mediante Vibración Ambiental. El Edificio Jalapa", pp. 446-454, Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica Puerto Vallarta, Jal. México.

Paz, M., 1991, "Structural Dynamics Theory and Computation", Van Nostrand Reinhold Co., New York, tercera edición.

Pérez -Rocha L. E., Aguilar Becerril H. R., 1993, "Efectos de la Interacción Suelo-Estructura en la ductilidad Estructural", pp. 926-933, Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica Puerto Vallarta, Jal. México.

Proyecto 6503 "Interacción Estructura Suelo Semiespacio y Absorbedores de Vibración, una nueva alternativa", Instituto de Ingeniería, Coordinación de Mecánica Aplicada, UNAM, J. L. Urrutia, 1996-1997.

Romo M. P. y A. Bárcena, 1993, "Interacción Dinámica Suelo-Estructura y su Impacto en la Ingeniería de Cimentaciones", pp. 669-679, Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica Puerto Vallarta, Jal. México.

Serrano Lizaloe Raúl, 1994, "Cálculo Tensorial para Ingenieros", Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, primera edición.

Soedel Werner, 1981, "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker Inc., New York.

Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, 1974, "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, Inc.

Urrutia Galicia J. L., 1979, "Stresses in Internally Loaded Cylindrical Shells", M.A.Sc. Thesis, University of Waterloo, Canadá.

Urrutia Galicia, J. L., 1992, "Una introducción sobre la existencia de formas modales covariantes y contravariantes en el análisis dinámico", pp.181-191, Sismodinámica. Revista internacional, México.

Urrutia Galicia José Luis, 1992, "On the Existence of Covariant and Contravariant Modal Forms of Dynamic Analysis", pp.201-217, Canadian Society For Mechanical Engineering, Transactions (Canada), No. 16(2).

Urrutia Galicia José Luis, 1994, "Teoría General de Vibraciones Mecánicas", Apuntes de Clase, Instituto de Ingeniería UNAM.

Urrutia G., Arroyo M. y Vázquez C., 1996, "Soil-Structure-Half Space Model for the Dynamic Analysis of Structures", Artículo 937, Memorias del XI Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Acapulco Gro., México.

Wen-Hwa Wu and H. Allison Smith, 1995, "Efficient Modal Analysis for Structures with Soil-Structure Interaction", Vol. 24 pp.283-299, Earthquake Engineering and Structural Dynamics.

Thomson, William T., 1972, "Theory of Vibration with Applications", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey.

Zill Dennis G., 1994, "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones", Grupo editorial Iberoamericano, México.

APÉNDICE A

NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

A.1 CONCEPTOS GENERALES. “*Dinámica estructural*” es el estudio de las vibraciones en las estructuras, que resultan de la aplicación de fuerzas y cargas que varían con el tiempo. Sin embargo, en la mayoría de los casos la rapidez de variación de la carga es suficientemente lenta, de modo que se desprecia el efecto dinámico, y las cargas pueden considerarse como estáticas. Ciertos tipos de estructuras requieren una consideración especial en relación con el comportamiento dinámico. Cualquier estructura que soporta cargas móviles, por ejemplo: **los puentes, las traves de grúas viajeras, y las estructuras diseñadas para soportar maquinaria giratoria** necesitan diseñarse de tal manera que se hagan mínimos, o por lo menos aceptables, los efectos de la vibración. Otras situaciones en las que los efectos dinámicos pueden influir en el diseño estructural incluyen fuerzas de viento no permanentes sobre los edificios, de impacto y, por supuesto, de sismos.

El estudio del comportamiento dinámico de las estructuras se basa en el análisis de las características **desplazamiento-tiempo**, pero antes necesitamos definir ciertos términos (Clough, 1993).

AMPLITUD.- es el desplazamiento máximo con respecto a la posición de equilibrio.

FRECUENCIA.- es el número de vibraciones en la unidad de tiempo generalmente está dada en ciclos/seg, (Hertz).

FRECUENCIA NATURAL.- es la velocidad angular a la cual una estructura tiende a vibrar una vez puesta en vibración libre. Una estructura puede tener varias frecuencias naturales. Se define en términos de ciclos por segundo o radianes por segundo.

VIBRACIÓN FORZADA.- es la vibración producida por una fuerza perturbadora externa que depende del tiempo.

VIBRACIONES LIBRES.- toma lugar cuando el sistema oscila bajo la acción de fuerzas inerciales inherentes en el sistema propio, y no existen fuerzas externas. El sistema bajo vibración libre puede vibrar en una o más de sus frecuencias naturales, las cuales son propias de sistemas dinámicos y dependen de la distribución de sus masas y rigideces.

VIBRACIÓN TRANSITORIA.- Cuando un sistema dinámico es excitado por una súbita periódica o no periódica excitación $F(t)$, la respuesta inicial correspondiente se denomina **respuesta transitoria**, puesto que generalmente tienden a desaparecer con el tiempo, no se producen oscilaciones estacionarias. Tales oscilaciones tienen lugar a las frecuencias naturales del sistema con la magnitud variando en una forma que depende del tipo de excitación.

VIBRACIÓN NO AMORTIGUADA.- teóricamente el movimiento vibratorio puede continuar, con la misma amplitud, indefinidamente en ausencia de agentes disipativos.

VIBRACIÓN AMORTIGUADA.- prácticamente, siempre existen agentes disipativos generadores de fuerzas que se oponen al movimiento, por lo que el movimiento vibratorio desarrollado por una masa no tiene la misma amplitud de vibración a lo largo del tiempo, volviendo finalmente a su estado de reposo inicial.

AMORTIGUAMIENTO.- es la reducción progresiva en la amplitud de la vibración debida a las siguientes causas:

- a). Fricción molecular interna,
- b). Pérdida de energía asociada a la fricción debida al deslizamiento en juntas, y
- c). Resistencia al movimiento proporcionada por el aire u otro fluido (arrastre).

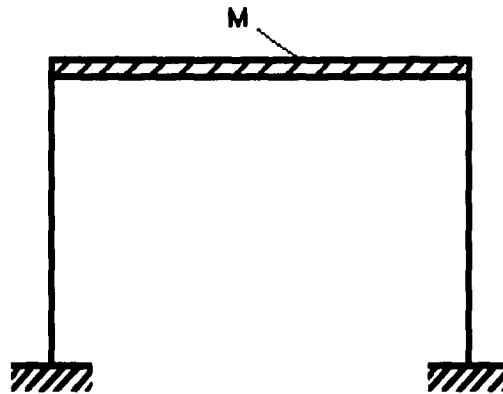
El tipo de amortiguamiento usualmente considerado en las vibraciones estructurales se denomina "**amortiguamiento viscoso**", en el cual la fuerza que resiste el movimiento es proporcional a la velocidad. Se sabe que este tipo de amortiguamiento representa adecuadamente la resistencia al movimiento proporcionada por el aire que rodea un cuerpo que se mueve a baja velocidad y también por la fricción molecular interna.

GRADOS DE LIBERTAD.- son los desplazamientos independientes o coordenadas necesarias para definir completamente el estado deformado de la estructura en cualquier instante. Cuando una sola coordenada es suficiente para definir la posición de cualquier parte de la estructura, entonces ésta tiene modelo de un **sólo grado de libertad**. Las fuerzas de inercia que actúan en una estructura vibratoria se encuentran a partir de la **Segunda Ley de Newton**:

$$\text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

Generalmente la masa de una estructura está distribuida de modo que la mayoría de estas tiene un número infinito de grados de libertad.

En estructuras de "**edificios**", como las de la fig. a.1, la mayor parte de la masa total estará concentrada en los pisos del edificio. Bajo estas circunstancias y con algunas hipótesis de simplificación razonable con respecto a las propiedades estructurales de los miembros, pueden obtenerse muy buenas soluciones a los problemas de vibraciones estructurales.



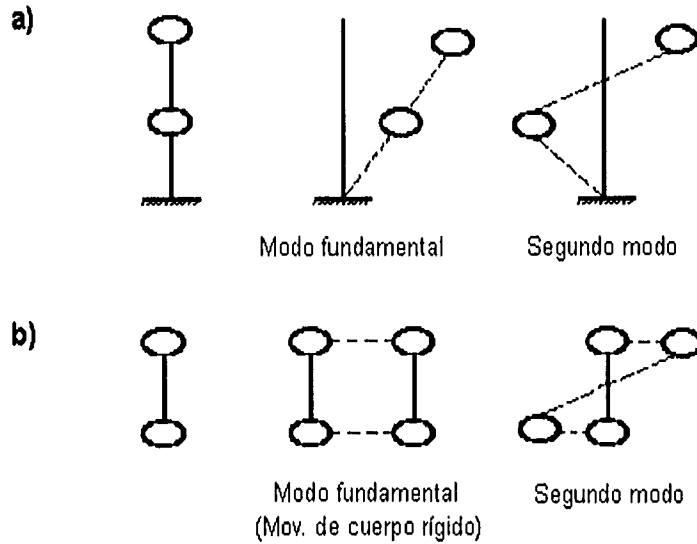
Representación de una masa distribuida y concentrada

fig. a.1

FORMAS MODALES (MODO NATURAL).- Es la configuración del sistema cuando cada punto al que ha sido asignada una masa, experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia, pasando simultáneamente por la posición de equilibrio. A la forma modal con más baja frecuencia natural de un sistema de "n" grados de libertad se le conoce como modo fundamental de vibración.

A cada una de las frecuencias naturales de oscilación del sistema se le asocia un modo natural de oscilación. Un sistema con un número infinito de grados de libertad como lo son los sistemas continuos (vigas, placas, cascarones, etc.) tienen también un número infinito de modos naturales de oscilación.

CONFIGURACION MODAL



Sistema de dos grados de libertad

Modos naturales: a) sistema empotrado y libre; b) sistema libre-libre

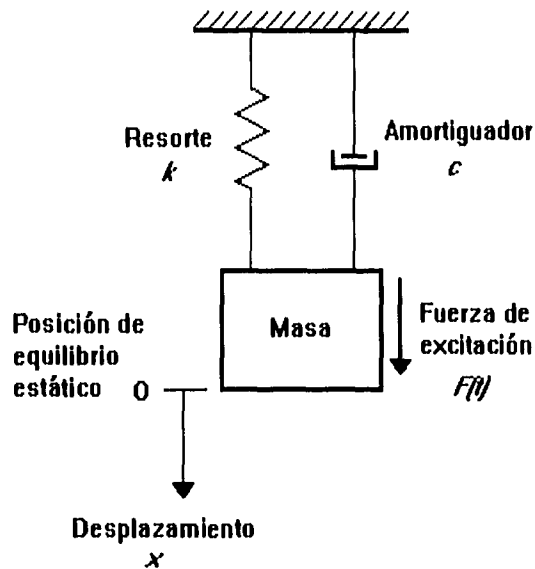
fig. a.2

SISTEMA SEMIDEFINIDO (Hinkle, 1978).- Un caso especial de importancia práctica ocurre cuando una raíz de la ecuación de frecuencias es cero. Cuando una frecuencia natural es cero, no hay movimiento relativo en el sistema. Entonces el sistema se mueve como cuerpo rígido y se conoce como semidefinido.

A.2 SISTEMAS VIBRATORIOS (Thomson, 1972). El tema de vibración está relacionado con el movimiento oscilatorio de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es una combinación de materia la cual posee masa, y cuyas partes son capaces de tener movimiento relativo restringido por conexiones elásticas. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibración.

Los elementos que constituyen un sistema vibratorio son ilustrados en la fig. a.3. Los elementos idealizados son llamados:

1. Masa
2. Resorte
3. Amortiguador
4. Fuerza de excitación



Elementos de un sistema vibratorio

fig. a.3

Los primeros tres elementos describen el sistema físico. La masa (m) es considerada como un cuerpo rígido, que vibra y que puede amplificar o perder la energía cinética de acuerdo con la frecuencia de vibración del cuerpo. De la Segunda Ley de Newton, el producto de la masa por su aceleración es igual a la fuerza aplicada a la masa, y la aceleración toma lugar en la dirección de la fuerza.

El resorte (k) posee elasticidad. La fuerza del resorte existe si el resorte es deformado, ya sea en extensión o en compresión. Por tanto, la fuerza del resorte existe solo si hay un desplazamiento relativo entre los dos extremos del resorte. Un resorte lineal es aquel que obedece a la **Ley de Hooke**, la cual expresa, que la fuerza del resorte es proporcional a la deformación del resorte. La constante de proporcionalidad, tiene unidades de fuerza por unidad de deformación, y es llamada **rigidez que es una k constante del resorte**.

El amortiguador (c) no tiene masa ni elasticidad. La fuerza de amortiguamiento existe solamente si hay movimiento relativo entre los extremos del amortiguador.

AMORTIGUAMIENTO CRITICO.- es difícil obtener la magnitud del coeficiente c , sin embargo es común introducir en la teoría de vibración el concepto de amortiguamiento crítico C_{cr} . El amortiguamiento crítico es la cantidad de amortiguamiento que elimina completamente la vibración y se representa por:

$$C_{cr} = 2\sqrt{KM}$$

En donde K y M , son la rigidez y la masa del sistema respectivamente.

Los sistemas vibratorios están sujetos a amortiguamiento de algún grado porque la energía es disipada por fricción. Si el amortiguamiento es pequeño, tendrá poca influencia en las frecuencias naturales del sistema, y entonces el cálculo para las frecuencias naturales es generalmente hecho con bases no amortiguadas. El amortiguamiento es de gran importancia para limitar la amplitud de oscilación en la condición especial de resonancia.

RESONANCIA.- cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es forzado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema se encuentra una condición de resonancia, pudiendo resultar grandes oscilaciones.

Una vez definidos los conceptos anteriores se introduce ahora de otro elemento que forma parte de un sistema vibratorio.

Dicho elemento es la **fuerza excitadora**, que es el medio por lo cual la energía entra al sistema. La fuerza excitadora puede ser aplicada a la masa y/o un movimiento excitador aplicado al amortiguamiento y al resorte. Una fuerza de excitación es aplicada a la masa m en la fig. a.3. La excitación varía en concordancia con una función prescrita de tiempo.

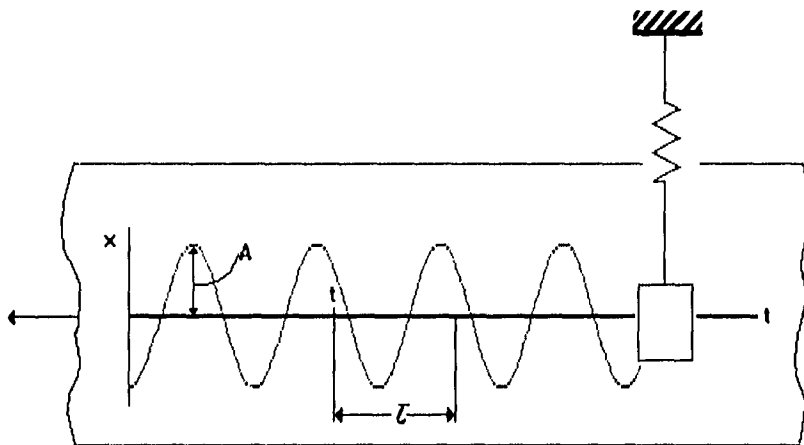
A.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO (Clough, 1993). El movimiento oscilatorio puede repetirse a sí mismo periódicamente, como en el caso de un balancín de reloj, o desplegar una considerable irregularidad, como en el caso de movimientos sísmicos. Cuando el movimiento se repite a intervalos de tiempo τ , se le llama **periódico**. El tiempo de repetición τ es el período de la

oscilación y su recíproco, $f=1/\tau$ es la **frecuencia**. Si se designa el movimiento por $x(t)$, todo movimiento periódico debe satisfacer la relación

$$x(t)=x(t+\tau)$$

El movimiento periódico más simple es el movimiento armónico. Puede ilustrarse por medio de una masa suspendida de un resorte liviano, como se muestra en la fig. a.4. Si la masa se desplaza de su posición de reposo y se libera, oscilará hacia arriba y hacia abajo, el movimiento registrado puede expresarse por medio de la ecuación

$$x = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad (\text{a. 1})$$

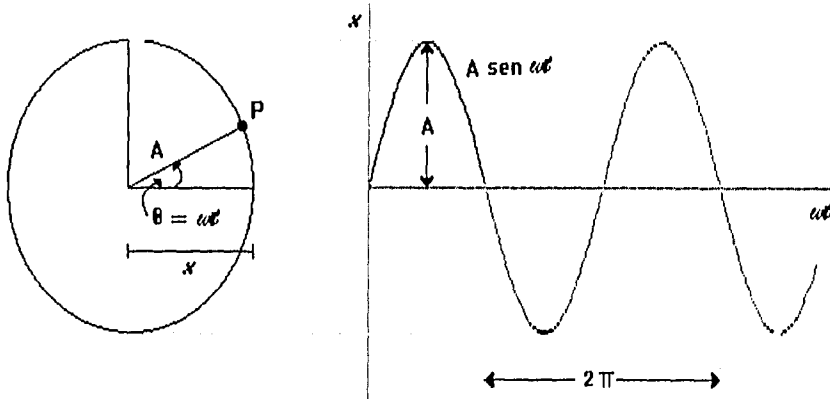


Registro de un movimiento armónico

fig. a.4

en donde A es la amplitud de la oscilación, medida desde la posición de equilibrio de la masa y τ es el período. El movimiento se repite cuando $t = t + \tau$. Frecuentemente se representa el movimiento armónico como la proyección sobre una línea recta, de un punto que se mueve en una circunferencia a velocidad constante, como se muestra en la fig. a.5. Si ω es la velocidad angular de línea OP , el desplazamiento X puede escribirse como

$$X = A \sin(\omega t) \quad (\text{a. 2})$$



**Movimiento armónico como proyección de un punto
que se mueve en una circunferencia**
fig. a.5

La cantidad ω está generalmente en radianes por segundo y se le denomina **frecuencia circular**. Como el movimiento se repite cada 2π radianes, se tiene

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f \quad (\text{a. 3})$$

en donde τ y f son el período y la frecuencia del movimiento armónico, usualmente medidos en segundos y ciclos por segundo, respectivamente.

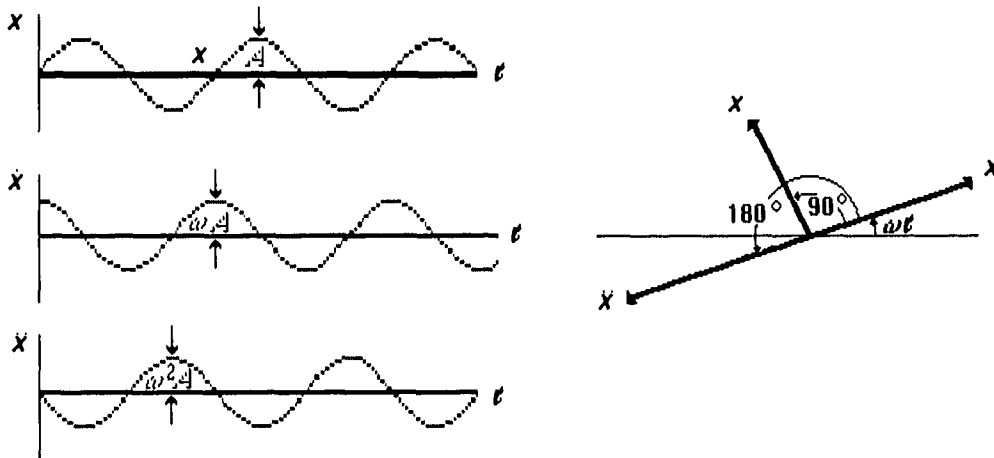
La velocidad y aceleración del movimiento armónico puede simplemente determinarse por la diferenciación de la ecuación a.2. Usando el punto para representar a la derivada con respecto al tiempo, se puede demostrar lo siguiente (Thomson, 1972).

$$\dot{X} = \omega A \cos \omega t = \omega A \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

(a. 4)

$$\ddot{X} = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t = \omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \pi)$$

Así, la velocidad y la aceleración son también armónicas con la misma frecuencia de oscilación pero aventajan al desplazamiento en $\pi / 2$ y π radianes, respectivamente. La fig. a.6 muestra la variación de tiempo y la relación de fase entre desplazamiento, velocidad y aceleración en el movimiento armónico.



En el movimiento armónico, la velocidad y aceleración están retrasadas al desplazamiento entre $\pi/2$ y π

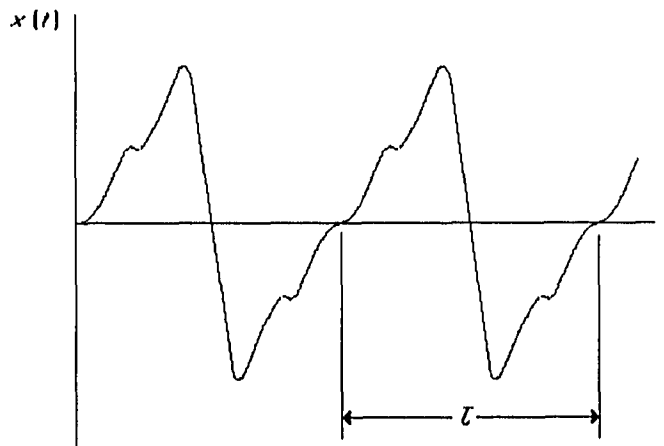
fig. a.6

Examinando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad (\text{a. 5})$$

de modo que en el movimiento armónico la aceleración es proporcional al desplazamiento y está dirigida hacia el origen. Como la Segunda Ley de Newton establece que la aceleración es proporcional a la fuerza, un movimiento armónico resulta para sistemas con resortes lineales y fuerzas que varían como kx .

A.4 MOVIMIENTO PERIODICO (Thomson, 1972). Es frecuente que se presenten vibraciones de diferentes frecuencias simultáneamente. Un ejemplo es la vibración libre de un sistema con varios grados de libertad, en donde participan las vibraciones de cada frecuencia natural. Tales vibraciones se manifiestan en forma de una onda irregular que se repite periódicamente, como se muestra en la fig. a.7.



Movimiento periódico de período τ

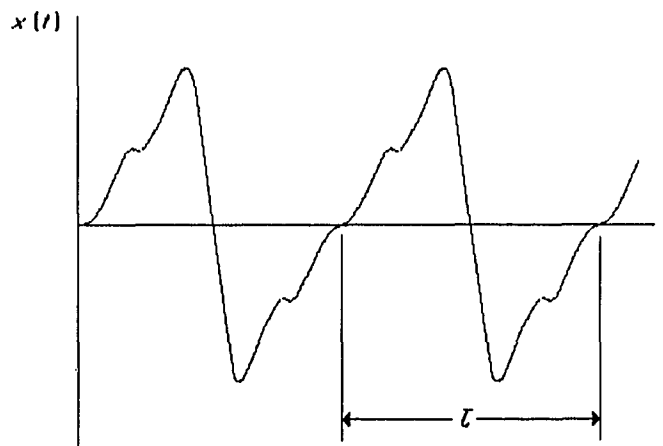
fig. a.7

Examinando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad (\text{a. 5})$$

de modo que en el movimiento armónico la aceleración es proporcional al desplazamiento y está dirigida hacia el origen. Como la Segunda Ley de Newton establece que la aceleración es proporcional a la fuerza, un movimiento armónico resulta para sistemas con resortes lineales y fuerzas que varían como kx .

A.4 MOVIMIENTO PERIODICO (Thomson, 1972). Es frecuente que se presenten vibraciones de diferentes frecuencias simultáneamente. Un ejemplo es la vibración libre de un sistema con varios grados de libertad, en donde participan las vibraciones de cada frecuencia natural. Tales vibraciones se manifiestan en forma de una onda irregular que se repite periódicamente, como se muestra en la fig. a.7.



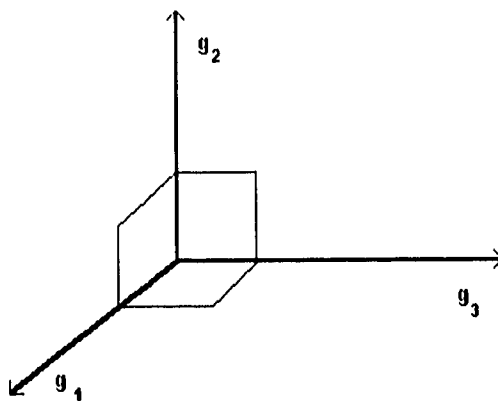
Movimiento periódico de período τ

fig. a.7

A.5 CALCULO TENSORIAL (Serrano, 1994)

COORDENADAS ORTOGONALES.- Se llaman coordenadas ortogonales o rectangulares de un punto P fig. a.8 a las distancias de este punto a rectas perpendiculares entre si (ejes coordenados).

BASE ORTONORMAL.- Una base del espacio tridimensional formada por vectores mutuamente perpendiculares se llama **base ortogonal**

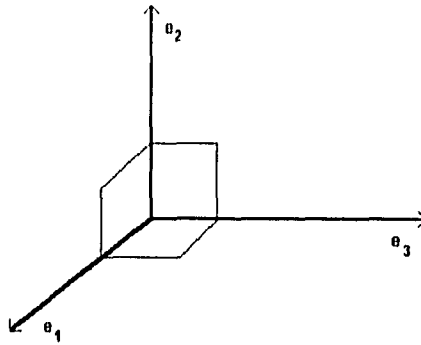


$$|g_1| \neq |g_2| \neq |g_3|$$

Base ortogonal

fig. a.8

si estos vectores de la base son, además unitarios, entonces la base se denomina ortonormal



$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$$

Base ortonormal

fig. a.9

En el sistema de coordenadas cartesianas, los vectores base g_i son perpendiculares entre sí, esto es, son ortogonales, por lo que

$$g_i \cdot g_j = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Además, ellos son vectores unitarios, es decir su magnitud está "**normalizada**" respecto a la unidad, entonces

$$g_i \cdot g_j = 1 \quad \text{para } i = j$$

Consecuentemente, la matriz de los coeficientes métricos para una base ortonormalizada es igual a la matriz unidad

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que se introduce un nuevo símbolo para la matriz unidad, el cual se conoce como el símbolo o **delta de Kronecker**, definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (\text{a.6})$$

para el espacio tridimensional es

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para una base ortonormal se tiene

$$g_i \cdot g_j = g_{ij} = \delta_{ij}$$

BASES COORDENADAS COVARIANTE Y CONTRAVARIANTE (Serrano, 1994).- Sean g_1, g_2, g_3 los vectores de una base referida aun espacio euclídeo tridimensional, y supóngase también la existencia de la base g^1, g^2, g^3 definida en el mismo espacio.

Los índices para la base g^j se escribirán arriba para distinguirla de la base g_i . Los vectores fundamentales de ambas bases estrán relacionados mediante las siguientes expresiones

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (\text{a.7})$$

donde δ_i^j es otra forma de escribir el símbolo de Kronecker definido en a.6. El desarrollo de las expresiones a.7 da lo siguiente

$$g_1 \cdot g^1 = 1; \quad g_1 \cdot g^2 = 0; \quad g_1 \cdot g^3 = 0$$

$$g_2 \cdot g^1 = 0; \quad g_2 \cdot g^2 = 1; \quad g_2 \cdot g^3 = 0$$

$$g_3 \cdot g^1 = 0; \quad g_3 \cdot g^2 = 0; \quad g_3 \cdot g^3 = 1$$

Estos resultados indican que el valor g^1 es perpendicular tanto a g_2 como a g_3 , mientras que g^2 lo es a g_1 y a g_2 .

Por lo tanto, si se conoce la base g_i , puede entonces obtenerse la base g^j mediante estas nueve ecuaciones. Si para las bases g_i y g^j se cumplen las relaciones a.7, se dice entonces que g_i es la **base covariante**, mientras que g^j recibe el nombre de **base contravariante**.

A.6 ANÁLISIS DE FOURIER

a). FUNCIONES ORTOGONALES (Serrano, 1994)

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en un intervalo $a \leq t \leq b$ si

$$\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = 0$$

Ahora bien, si tenemos un conjunto de funciones de valores reales, $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ se dice que es ortogonal en un intervalo $a \leq t \leq b$ si

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t) dx \begin{cases} = 0 & \text{si } m \neq n \\ \neq 0 & \text{si } m = n \end{cases}$$

b). NORMA DE UNA FUNCIÓN

El producto escalar de dos funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$, $\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle$, es igual a

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \int_a^b \phi_m(t), \phi_n(t) dt \quad \text{si } m = n$$

y se llama norma cuadrada de $\phi_n(t)$ a la ecuación

$$\|\phi_n(t)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(t) dt \quad \text{cuando } m = n$$

y al valor obtenido como

$$\|\phi_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(t) dt}$$

se le llama **Norma de la función** $\phi_n(t)$.

c). CONJUNTO ORTONORMAL

Si se obtiene un conjunto $\{\phi_n(t)\}$, se dice que es ortonormal en el intervalo de definición cuando $\|\phi_n(t)\| = 1$ para $n=0,1,2,\dots$

d). COEFICIENTES DE FOURIER

Cualquier conjunto ortogonal de funciones $\{\phi_n(t)\}$ puede ser normalizado al dividir cada función entre su norma.

Si además $\{\phi_n(t)\}$ es un conjunto ortogonal finito de funciones, las cuales satisfacen condiciones de frontera arbitrarias en un intervalo $a \leq t \leq b$; entonces, cualquier función $f(t)$ puede expresarse como la combinación lineal de los elementos $\phi_n(t)$ que satisfacen determinadas condiciones de frontera, como a continuación se indica

$$f(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + \dots + C_n\phi_n(t) + \dots$$

y al multiplicar la ecuación anterior por $\phi_m(t)$ e integrar sobre el intervalo de definición se obtiene

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = C_0 \int_a^b \phi_0(t)\phi_m(t)dt + C_1 \int_a^b \phi_1(t)\phi_m(t)dt + \dots + C_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)dt + \dots$$

Por ortogonalidad, cada término en el lado derecho de la ecuación anterior es cero, excepto cuando $m=n$, por tanto

$$\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = C_n \int_a^b \phi_n(t)^2 dt$$

Si C_n son los coeficientes, se tiene

$$C_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t) dt}{\int_a^b \phi_n(t)^2 dt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e). SERIE DE FOURIER GENERALIZADA (Zill, 1994)

Existen las llamadas series de Fourier generalizadas para cualquier condición de frontera

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(t)$$

donde

$$C_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t) dt}{\|\phi_n(t)\|^2}$$

APÉNDICE B

PROGRAMA DE CÁLCULO

PROGRAMA DE CÁLCULO

Programa que calcula la respuesta dinámica de un sistema Semidefinido de "n" masas sometida a cualquier tipo de aceleración descompuesta en una serie de Fourier aplicada en el grado de libertad de interés.

```
C ----- ACE-DESP -----
C -----
C ----- Programa Realizado por: -----
C ----- César Vázquez Lorenzana y -----
C ----- Edith Álvarez Flores -----
C -----
C *****
C ***** Calculo de Desplazamientos *****
INTEGER I,J,IK,N,NN,M0,M1,MM,GL
INTEGER TT,TMIN,TMAX,INCT
DOUBLE PRECISION W(50),FI(50,50),M(50),K(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION Xsuma(2),Asuma(2)
DOUBLE PRECISION SUMPFI,SUMMF2,c0
DOUBLE PRECISION X(50),XC(2),XS(2),XCTE(2)
DOUBLE PRECISION Ac(50),AcC(2),AcS(2),AcCTE(2)
DOUBLE PRECISION W1,W0,PI,Fk(50)
DOUBLE PRECISION Am(1000),Bm(1000),A0
DOUBLE PRECISION QX(6700,50),QA(6700,50),CSICR
DIMENSION P(50)
REAL Ti,DX,T,Lf,Tmx,CF2
PI=3.14159265359
OPEN(1,FILE='est-42m.cvl')
OPEN(2,FILE='est-42m.wfi')
OPEN(3,FILE='ip850919.fou')
OPEN(4,FILE='est42ip2.dmx',STATUS='NEW')
OPEN(5,FILE='est42ip2.mov',STATUS='NEW')
WRITE(4,*) 'EST-42M',',',',IP850919'
READ(1,*) N,CSICR
NN=2*N
CALL LeedeM1aMn (N,P,M,k,CSI)
CALL Leefrecu (N,GL,w,FI)
C ----- CAMBIOS TEMPORALES -----
CSICR=0.000001
SUMA=0
DO 12 I=1,N-1
CSI(I)=0.2
CSI(N+I)=0.2
SUMA=SUMA+M(I)+M(I+N)
12 CONTINUE
M(N)=100*SUMA
P(N)=1
P(N-1)=0
```



```

WRITE(*,*) 'GL=',gl
  WRITE(*,*) 'N=',N
  DO 14 l=1,N-1
14 CONTINUE
C -----
  WRITE(*,*) 'Dame el Periodo del acelerograma=? '
  READ(*,*) Lf
  WRITE(*,*)
  WRITE(*,*) 'Dame el tiempo inicial del acelerograma=? '
  READ(*,*) Ti
  WRITE(*,*) 'Dame el tiempo total del acelerograma=? '
  READ(*,*) Tmx
  WRITE(*,*) 'Dame el intervalo de tiempo=? '
  READ(*,*) Dx
  CALL LeeCoefFour (MM,Lf,A0,Am,Bm,CF2)
C -----
  DO 10 lk=2,gl
  Gmk(lk)=w(lk)*SQRT(1-CSI(lk-1)**2)
  cwk(lk)=CSI(lk-1)*w(lk)
10 CONTINUE
C ----- calculo de Fk* , 'con aceleraciones -----
  DO 30 i=1,gl
  sumPFI=0
  sumMFI2=0
C -----para fuerza-----
  DO 40 j=1,nn
  sumPFI=sumPFI+P(j)*F1(j,i)*M(j)
  sumMFI2=sumMFI2+M(j)*F1(j,i)**2
40 CONTINUE
  Fk(i)=sumPFI/sumMFI2
30 CONTINUE
C -----
  WRITE(4,*) Tl,',',Tmx
  WRITE(5,*) Tl,',',Tmx
C -----
  w1=(2*PI/Lf)
  tmin=Ti/DX
  tmax=Tmx/DX
  inct=DX/DX
C *****
C ***** calculo del desplazamiento *****
C *****
  DO 50 lk=2,gl
  WRITE(*,*) 'Trabajando ... ',lk,w(lk)
  DO 60 TT=tmin,tmax,inct
  T=TT*DX
  j=2
  Xsuma(1)=0
  Asuma(1)=0
  Xsuma(j)=0
  Asuma(j)=0
  c0=2*CSICR
C ***** Funcion Constante *****
  CALL Constante(c0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XCTE,AcCTE,lk)
C -----mejor espacio m1,mm-----
  M1=1
  DO 80 M0=1,500

```

```

w0=M0*w1
c0=2*CSICR*w0
C ***** Funcion Senoidal *****
CALL Senoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XS,AcS,lk)
C ***** Funcion Cosenoidal *****
CALL Cosenoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XC,AcC,lk)
C ----- Total -----
X(1)=Am(M0)*XC(1)+Bm(M0)*XS(1)
Ac(1)=Am(M0)*AcC(1)+Bm(M0)*AcS(1)
X(j)=Am(M0)*XC(j)+Bm(M0)*XS(j)
Ac(j)=Am(M0)*AcC(j)+Bm(M0)*AcS(j)
Xsuma(1)=Xsuma(1)+X(1)
Asuma(1)=Asuma(1)+Ac(1)
Xsuma(j)=Xsuma(j)+X(j)
Asuma(j)=Asuma(j)+Ac(j)
80 CONTINUE
X(1)=A0*XCTE(1)+Xsuma(1)
Ac(1)=A0*AcCTE(1)+Asuma(1)
X(j)=A0*XCTE(j)+Xsuma(j)
Ac(j)=A0*AcCTE(j)+Asuma(j)
C -----
QX(TT+1,1)=X(1)
QA(TT+1,1)=Ac(1)
QX(TT+1,lk)=X(j)
QA(TT+1,lk)=Ac(j)
60 CONTINUE
WRITE(*,*) 1,QX(1,1)
WRITE(*,*) lk,QX(1,lk)
50 CONTINUE
C -----
WRITE(*,*) 'Trabajando ... '
DO 90 TT=tmin,tmax,lnct
T=TT*DX
DO 91 i=1,NN
X(i)=0
Ac(i)=0
91 CONTINUE
DO 93 j=1,NN
DO 95 lk=1,gl
X(j)=X(j)+Fk(lk)*QX(TT+1,lk)*FI(j,lk)
Ac(j)=Ac(j)+Fk(lk)*QA(TT+1,lk)*FI(j,lk)
95 CONTINUE
93 CONTINUE
C -----
C ----- Almacenamiento de Aceleraciones y Desplazamientos -----
C -----Almacena para un w0: t Vs a -----
CALL almacenaWvsXmax(4,nn,t,X)
C -----Almacena para un w0 : t Vs X -----
CALL almacenaWvsXmax(5,nn,t,AC)
90 CONTINUE
STOP
END
C *****
C ***** SUBROUTINAS*****
C *****
SUBROUTINE almacenaWvsXmax (NA,nn,w,Xmx)
INTEGER NA,NN,I

```

```

DOUBLE PRECISION Xmx(50)
REAL W
C ----- w,Xmx(i) -----
WRITE(NA,*) w
DO 100 i=1,nn-1
WRITE(NA,*) Xmx(i)
100 CONTINUE
WRITE(NA,*) Xmx(NN),','
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Constante (c0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XCTE,AcCTE,lk)
INTEGER J,lk
DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XCTE(2),AcCTE(2)
DOUBLE PRECISION CTE,cte1,cte2,a,b
DOUBLE PRECISION AFkcte
REAL t
cte1=1/c0
cte2=1/c0**2
CTE=1/(w(lk)*SQRT(CSI(lk-1)**2+(Gmk(lk)/w(lk))**2))
AFkcte=ATAN(Gmk(lk)/cwk(lk))
C ----- C. R. -----
XCTE(1)=(cte1*t-cte2+cte2*EXP(-c0*t))
AcCTE(1)=EXP(-c0*t)
C ----- Estacionaria M. S. -----
b=Gmk(lk)
XCTE(j)=cte*SIN(AFkcte)/b
C ----- Transitoria -----
b=SIN(AFkcte+Gmk(lk)*t)/Gmk(lk)
XCTE(j)=XCTE(j)-cte*EXP(-cwk(lk)*t)*b
a=2*cwk(lk)*Gmk(lk)*COS(AFkcte+Gmk(lk)*t)
a=a+(Gmk(lk)**2-cwk(lk)**2)*SIN(AFkcte+Gmk(lk)*t)
a=EXP(-cwk(lk)*t)/Gmk(lk)*a
AcCTE(j)=cte*a
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Cosenoidal (c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XC,AcC,lk)
INTEGER J,lk
DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XC(2),AcC(2)
DOUBLE PRECISION W0,c,C1,C2,C3,a,b
DOUBLE PRECISION Flr,AFkc,PI
REAL t
PI=3.14159265359
C ----- Factores de Participacion -----
C ' ----- Modo de Cuerpo Rígido -----
C1=-1/(c0**2+w0**2)
C2=c0/((c0**2+w0**2)*w0)
C3=1/(c0**2+w0**2)
C ' ----- Modos Superiores -----
b=(2*CSI(lk-1)*Gmk(lk)/w(lk))**2
c=1/(w(lk)**2*SQRT((2*CSI(lk-1)**2-1+(w0/w(lk))**2)**2+b))
b=(w0/w(lk))

```

```

Flr=(2*CSI(Ik-1)*Gmk(Ik)/(w(Ik)*(2*CSI(Ik-1)**2-1+b**2)))
AFkc=ATAN(Flr)
C ----- C. R. -----
XC(1)=(C1*COS(w0*t)+C2*SIN(w0*t)+C3*EXP(-c0*t))
a=C2*w0**2*SIN(w0*t)-c0**2*C3*EXP(-c0*t)
AcC(1)=(-C1*w0**2*COS(w0*t)+a)
C ----- Estacionaria M. S. -----
b=-COS(w0*t)*COS(AFkc)
a=SIN(AFkc)/Gmk(Ik)
b=(cwk(Ik)*COS(w0*t)+w0*SIN(w0*t))*a+b
b=c*(b)
XC(j)=b
a=SIN(AFkc)/Gmk(Ik)*w0**2*(-w0*SIN(w0*t)-cwk(Ik)*COS(w0*t))
a=a+COS(AFkc)*w0**2*COS(w0*t)
AcC(j)=c*a
C ----- Transitoria -----
b=Gmk(Ik)*t
b=(Gmk(Ik)*COS(AFkc+Gmk(Ik)*t)-cwk(Ik)*SIN(AFkc+b))
XC(j)=XC(j)-c*EXP(-cwk(Ik)*t)/Gmk(Ik)*b
a=AFkc
a=Gmk(Ik)**3*COS(Gmk(Ik)*t+AFkc)+cwk(Ik)**3*SIN(Gmk(Ik)*t+a)
a=a-3*cwk(Ik)**2*Gmk(Ik)*COS(Gmk(Ik)*t+AFkc)
a=a-3*cwk(Ik)*Gmk(Ik)**2*SIN(Gmk(Ik)*t+AFkc)
AcC(j)=AcC(j)+c*EXP(-cwk(Ik)*t)/Gmk(Ik)*a
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Senoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XS,AcS,Ik)
INTEGER J,Ik
DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XS(2),AcS(2)
DOUBLE PRECISION W0,S,S1,S2,S3,S4,a,b
DOUBLE PRECISION Flr,AFks,PI
REAL t
PI=3.14159265359
C ----- Factores de Participacion -----
C ----- Modo de Cuerpo Rigido -----
S1=-c0/((c0**2+w0**2)*w0)
S2=-1/((c0**2+w0**2)
S3=1/(c0*w0)
S4=-w0/((c0**2+w0**2)*c0)
C ----- Modos Superiores -----
b=w0/w(Ik)
S=1/(w(Ik)**2*SQRT((1-(w0/w(Ik))**2)**2+(2*CSI(Ik-1)*b)**2))
Flr=(2*CSI(Ik-1)*w0/(w(Ik)*(1-(w0/w(Ik))**2)))
AFks=ATAN(Flr)
C ----- C. R. -----
b=S4*EXP(-c0*t)
XS(1)=(S1*COS(w0*t)+S2*SIN(w0*t)+S3+b)
b=(-S1*w0**2*COS(w0*t)-S2*w0**2*SIN(w0*t)+S4*c0**2*EXP(-c0*t))
AcS(1)=b
C ----- Estacionaria M. S. -----
XS(j)=S*SIN(w0*t-AFks)
AcS(j)=-S*w0**2*SIN(w0*t-AFks)
C ----- Transitoria -----
b=Gmk(Ik)*SIN(AFks)*COS(Gmk(Ik)*t)

```

```

b=(SIN(Gmk(IK)*t)*(cwk(IK)*SIN(AFks)-w0*COS(AFks))+b)
XS(j)=XS(j)+S*EXP(-cwk(IK)*t)/Gmk(IK)*b
a=Gmk(IK)
a=SIN(Gmk(IK)*t)*SIN(AFks)*(cwk(IK)**3/Gmk(IK)+cwk(IK)*a)
a=a+SIN(Gmk(IK)*t)*COS(AFks)*(Gmk(IK)-cwk(IK)**2/Gmk(IK))*w0
a=a+COS(Gmk(IK)*t)*SIN(AFks)*(-cwk(IK)**2-Gmk(IK)**2)
a=a+COS(Gmk(IK)*t)*COS(AFks)**2*cwk(IK)*w0
AcS(j)=AcS(j)+S*EXP(-cwk(IK)*t)*a
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE LeedeM1aMn (N,P,M,k,CSI)
C ----- lectura de (1) hacia (n) -----
DOUBLE PRECISION CSI(50),K(50),M(50),SUMA
INTEGER I,N
DIMENSION P(50)
DO 11 I=1,N-1
READ (1,*) P(I),M(I),P(N+I),M(N+I),K(N+I-1),CSI(N+I-1)
READ (1,*) K(I),CSI(I)
11 CONTINUE
READ (1,*) P(N),M(N),P(N+N),M(N+N),K(N+N-1),CSI(N+N-1)
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Leefrecu (n,gl,w,FI)
DOUBLE PRECISION W(50),FI(50,50)
INTEGER I,J,GL,N
READ(2,*) gl
DO 500 i=1,gl
READ(2,*) w(i)
DO 510 j=1,n
READ(2,*) FI(j,i),FI(n+j, i)
510 CONTINUE
500 CONTINUE
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE LeeCoefFour (MM,Lf,A0,Am,Bm,CF2)
INTEGER MM,M0
DOUBLE PRECISION Am(1500),Bm(1500),A0
REAL Am2,Bm2
REAL A02,Lf,CF2
Am2=0
Bm2=0
READ(3,*) MM,A0
A02=A0**2
DO 400 M0=1,MM
READ(3,*) Am(M0),Bm(M0)
Am2=Am2+Am(M0)**2
Bm2=Bm2+Bm(M0)**2
400 CONTINUE
CF2=Lf*A02+Lf/2*(Am2+Bm2)
RETURN
END

```