

B.  
20



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOBRE UNA NUEVA REPRESENTACION  
INTEGRAL DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO:  
EL DIPOLO MAGNETICO EN MOVIMIENTO  
NO RELATIVISTA**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C A**

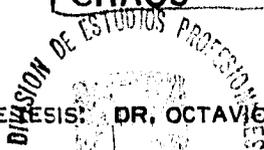
**P R E S E N T A :**

**LOREA CHAOS CADOR**



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

DIRECTOR DE TESIS: DR. OCTAVIO NOVARO P.



**1996**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Sobre una nueva representación integral del campo electromagnético: El dipolo magnético en movimiento no relativista."

realizado por LOREA CHAOS CADOR

con número de cuenta 9052310-8 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DR. OCTAVIO NOVARO PEÑALOSA *Novaro*

Propietario DR. EUGENIO LEY KOO *E. Ley Koo*

Propietario DR. ONOFRE ROJO ASENJO *Onofre Rojo Asenjo*

Suplente M. EN C. IGNACIO CAMPOS FLORES *Ignacio Campos Flores*

Suplente M. EN C. FRANCISCO JAVIER BENITEZ DIAZ *Fco. Javier Benitez Diaz*

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
CARRERA DE FÍSICA

**SOBRE UNA NUEVA REPRESENTACIÓN INTEGRAL DEL CAMPO  
ELECTROMAGNÉTICO:**

**EL DIPOLO MAGNÉTICO EN MOVIMIENTO NO RELATIVISTA.**

**LOREA CHAOS CADOR**

... ¿Qué es la vida? una ilusión,  
una sombra, una ficción,  
y el mayor bien es pequeño;  
que toda la vida es sueño,  
y los sueños, sueños son.

P. Calderón de la Barca.





de kop ver uitsteken. In gestrekte positie kan  
 het dier zich, traag en bedachtzaam, door  
 middel van zijn zes poten, voort bewegen  
 over een willekeurig substratum  
 (het kan eventueel stelselmatig  
 opklimmen of afdalen, op  
 struikgewas heendrukken  
 of over rotsblokken  
 klauteren).  
 dra het een  
 een lang  
 wys

lijf.  
 l wordt  
 l beurte-  
 n drie paren  
 id bereiken  
 het rollen (bv bij het  
 rt uit te lopen) de po-  
 Wanneer het er aanlei-  
 n weer in wandel-positie  
 n zijn lichaam plotseling te  
 ig, met zijn poten in de lucht en  
 d overmindering (remming met de  
 se ontrolling in stilstaande toestand.

XI-51

**A MIS PADRES,  
 FERNANDO CHAOS Y  
 GEORGETTE CADOR,  
 A MIS HERMANOS  
 ALVARO Y ALDARA**

**Agradezco:**

Especialmente a Octavio Novaro por todas las facilidades, paciencia y ayuda que me brindó durante el tiempo en el que realicé este trabajo.

A José Heras por su paciencia y apoyo para ayudarme a entender y resolver innumerables problemas que se presentaron a lo largo de este trabajo, así como, su disponibilidad incondicional y toda la facilidad que me brindó en la búsqueda bibliográfica.

A Eugenio Ley Koo por sus valiosas críticas.

A Onofre Rojo por su apoyo y comentarios oportunos.

A Ignacio Campos, Javier Benítez y Carlos Villarreal por sus comentarios y sugerencias, que hicieron de la versión final de este trabajo algo más claro y preciso.

A mi padre, Fernando Chaos, por sus consejos, paciencia e innumerables críticas a la tesis.

## Contenido

INTRODUCCIÓN Y RESUMEN DE RESULTADOS.....	1
Referencias y notas.....	8
<b>I LEYES GENERALIZADAS DE COULOMB Y BIOT-SAVART</b>	
1.1.- Teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo.....	12
1.2.- Leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart.....	14
Referencias y notas.....	17
<b>II LEYES GENERALIZADAS DE COULOMB Y BIOT-SAVART CON FUENTES MATERIALES</b>	
2.1.- Fuentes Materiales.....	19
2.2.- Leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales.....	23
Referencias y notas.....	27
<b>III DIPOLOS OSCILANTES</b>	
3.1.- Dipolo de Hertz.....	29
3.2.- Dipolo magnético oscilante.....	30
Referencias y notas.....	32
<b>IV DIPOLO MAGNÉTICO EN MOVIMIENTO NO RELATIVISTA</b>	
4.1.- Los campos del dipolo magnético.....	33
4.2.- El vector de Poynting y la potencia total radiada.....	37
Referencias y notas.....	40
<b>V CONCLUSIONES.....</b>	<b>41</b>
<b>APÉNDICE.....</b>	<b>43</b>

## INTRODUCCIÓN Y RESUMEN DE RESULTADOS

En la presentación usual de la teoría electromagnética el tratamiento de los fenómenos independientes del tiempo (electrostática y magnetostática) es muy diferente al de los fenómenos dependientes del tiempo (electrodinámica)<sup>1</sup>. En el caso independiente del tiempo, la teoría se basa en las leyes de Coulomb:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')n}{R^2} d^3x' \quad (1)$$

y de Biot-Savart

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x') \times n}{R^2} d^3x', \quad (2)$$

las cuales determinan el campo eléctrico  $E(x)$  y el campo magnético  $B(x)$  en el vacío producidos por densidades estáticas de carga  $\rho(x')$  y de corriente  $J(x')$  que se suponen confinadas en una región finita del espacio. En las Ecs. (1) y (2) la integración se realiza sobre todo el espacio,  $n$  es el vector unitario definido por  $n = R/R$  con  $R = |x - x'|$  la magnitud de  $R = (x - x')$  siendo  $x$  y  $x'$  los puntos del campo y de la fuente,  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad y permeabilidad del vacío,  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ , con  $c$  la rapidez de la luz.

En el caso dependiente del tiempo, la teoría electromagnética se basa en la integración de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3b)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3c)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3d)$$

El método tradicional para integrarlas consiste en introducir el potencial escalar  $\phi(x,t)$  y el potencial vectorial  $A(x,t)$  por medio de las expresiones:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4b)$$

que al sustituirlas en las Ecs. (3) e imponer la condición de Lorentz<sup>2</sup>,  $\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mu_0 \epsilon_0) \partial\varphi/\partial t = 0$ , originan las siguientes ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (5a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5b)$$

Una vez que se resuelven estas ecuaciones para condiciones iniciales y de frontera, finalmente se determinan los campos  $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$  diferenciando los potenciales  $\varphi$  y  $\mathbf{A}$  de acuerdo a las Ecs. (4).

La solución de las Ecs. (5), para el caso en que los potenciales se anulen en el infinito y las fuentes estén localizadas en una región finita del espacio, se describe por los potenciales retardados:<sup>3</sup>

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{R} d^3x', \quad (6a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{R} d^3x', \quad (6b)$$

donde  $t'$  es el tiempo retardado<sup>4</sup> definido por  $t' = t - R/c$ , y  $t$  el tiempo en el cual los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se calculan en el punto de observación.

Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  asociados a los potenciales retardados son:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{R} d^3x' \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{R} d^3x' \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{R} d^3x' \right). \quad (8)$$

Al comparar las Ecs. (1) y (2) con las Ecs. (7) y (8), se infiere que la solución de los problemas electrodinámicos es considerablemente más complicada que la de los electrostáticos y magnetostáticos: La dependencia implícita de las coordenadas espaciales en el tiempo retardado trae como consecuencia que la diferenciación espacial [explícita en las Ecs. (7) y (8)] sea más complicada. Marion y Heald<sup>5</sup> recalcan este punto: "La diferenciación espacial es tediosa y traicionera debido a la dependencia en el tiempo retardado."

En el caso particular de una carga en movimiento, determinar los campos  $E$  y  $B$  por el método de los potenciales retardados es bastante laborioso. En relación a este cálculo, Jefimenko<sup>6</sup> afirma: "Este método involucra largas y complicadas diferenciaciones y manipulaciones vectoriales, y constituye uno de los procedimientos más complicados en la teoría electromagnética clásica." Una objeción menor a las Ecs. (7) y (8) es que no se reducen fácilmente a las Ecs. (1) y (2).

Ahora bien, ¿es factible transformar las Ecs. (7) y (8) de tal manera que no aparezcan las derivadas espaciales y además se reduzcan claramente a las Ecs. (1) y (2)? La respuesta a esta pregunta la dieron Griffiths y Heald<sup>7</sup> en 1991 al obtener de las Ecs. (7) y (8) las siguientes expresiones:

$$E(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{\rho(x',t')n}{R^2} + \frac{\{\partial\rho(x',t')/\partial t'\}n}{Rc} - \frac{\partial J(x',t')/\partial t'}{Rc^2} \right) d^3x', \quad (9)$$

$$B(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{J(x',t') \times n}{R^2} + \frac{\{\partial J(x',t')/\partial t'\}}{Rc} \right) d^3x', \quad (10)$$

donde  $t'$  es el tiempo retardado. Las Ecs. (9) y (10) son una forma alternativa de escribir las soluciones descritas en las Ecs. (7) y (8). La ventaja práctica de las Ecs. (9) y (10) sobre las Ecs. (7) y (8) consiste en que las primeras no involucran derivadas espaciales de cantidades retardadas sino únicamente derivadas temporales de esas cantidades (las derivadas espaciales en este caso son definitivamente más complicadas de calcular que las derivadas temporales) y además se reducen claramente a las Ecs. (1) y (2).

Jefimenko<sup>8</sup> introdujo las Ecs.(9) y (10) e independientemente Unz<sup>9</sup> en 1966.

La Ec. (9) se conoce como *Ley Generalizada de Coulomb* y la Ec. (10) como *Ley generalizada de Biot-Savart*.<sup>5,7</sup> Estas leyes permanecieron inadvertidas hasta que fueron *redescubiertas* y *promovidas* por Griffiths y Heald<sup>7</sup> y por Ton<sup>10</sup> quien además demostró que las Ecs. (9) y (10) satisfacen las ecuaciones de Maxwell (3). La demostración de Ton<sup>10</sup> no es necesaria puesto que las Ecs.(9) y (10) son una forma de la *solución* de las Ecs. (3) sujeta a las condiciones de que los campos se anulen en el infinito y que las fuentes estén confinadas. Es pertinente decir que tanto Unz<sup>9</sup> como Heras<sup>11</sup> derivaron las Ecs. (9) y (10) usando la función de Green retardada de la ecuación de onda y que Bellotti y Bornatici las derivaron empleando transformadas de Fourier.<sup>12</sup>

Las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart son eficientes, en particular, para calcular los campos producidos por distribuciones puntuales de carga y corriente (por ejemplo, los campos eléctrico y magnético de un dipolo oscilante<sup>10,13-15</sup> y los campos de Liénard-Wiechert de una carga puntual<sup>7,10,16,17</sup>). Estas leyes ya aparecen en las terceras ediciones de los libros de Lorrain, Corson y Lorrain<sup>18</sup> y de Marlon y Heald.<sup>19</sup> Cabe señalar que las leyes se han extendido incluyéndoles monopolos magnéticos<sup>17</sup>, con las cuales se han encontrado los campos de Liénard-Wiechert de la carga dual, esto es, de una distribución puntual con carga eléctrica y magnética.<sup>20</sup>

La notación usual de las Ecs. (9) y (10) es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{[\rho]}{R^2} \mathbf{n} + \frac{[\dot{\rho}]}{Rc} \mathbf{n} - \frac{[\dot{\mathbf{j}}]}{Rc^2} \right) d^3x' , \quad (11)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{[\mathbf{j}] \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\mathbf{j}}] \times \mathbf{n}}{Rc} \right) d^3x' , \quad (12)$$

donde los corchetes [...] son el símbolo de retardo, e indican que la cantidad encerrada debe ser calculada en el punto fuente  $x'$  y el tiempo retardado  $t' = t - R/c$ , es decir  $[\mathbf{j}] = \mathbf{j}(x', t') = \mathbf{j}(x', t - R/c)$ . Se adopta la notación de que un punto sobre la variable dentro del corchete denota diferenciación con respecto a  $t'$ , esto es,  $[\dot{\cdot}] \equiv [\partial/\partial t']$ .<sup>21</sup>

Jefimenko<sup>22</sup> presentó en 1992 una extensión de las Ecs. (11) y (12) que incluyen fuentes materiales (densidades de polarización y magnetización). Sin embargo, esta extensión aún contiene algunas derivadas espaciales implícitas. Heras<sup>23</sup> reformuló esta extensión cambiando las derivadas espaciales por derivadas temporales. Las expresiones obtenidas por este último autor son:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{[\rho]}{R^2} + \frac{[\dot{\rho}]}{Rc} - \frac{[\ddot{\rho}]}{Rc^2} \right) d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\dot{M}] \times n}{R^2} + \frac{[\ddot{M}] \times n}{Rc} \right) d^3x' \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3([\mathbf{P}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\mathbf{P}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{P}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\dot{\mathbf{P}}]}{R^2c} + \frac{([\ddot{\mathbf{P}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\ddot{\mathbf{P}}]}{Rc^2} \right) d^3x' \right], \quad (13)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \frac{[\mathbf{J}] \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{[\dot{\mathbf{J}}] \times \mathbf{n}}{Rc} \right) d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\dot{\mathbf{P}}] \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{P}}] \times \mathbf{n}}{Rc} \right) d^3x' \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3([\mathbf{M}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\mathbf{M}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{M}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\dot{\mathbf{M}}]}{R^2c} + \frac{([\ddot{\mathbf{M}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\ddot{\mathbf{M}}]}{Rc^2} \right) d^3x' \right], \quad (14)$$

donde P es el vector de polarización y M el vector de magnetización, los cuales representan fuentes localizadas. Es importante señalar que hasta la fecha no se ha reportado en la literatura la demostración de que las Ecs. (13) y (14) satisfacen las ecuaciones de Maxwell con fuentes materiales:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (15a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (15b)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (15c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (15d)$$

En este trabajo se muestra cómo la integración directa de las Ecs. (15) puede realizarse usando una extensión del teorema de Helmholtz para campos

vectoriales dependientes del tiempo.<sup>11,17</sup> La solución encontrada por este método se expresa como sigue:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{[\rho] \cdot n}{R^2} + \frac{[\dot{\rho}] \cdot n}{Rc} - \frac{[\ddot{\rho}] \cdot n}{Rc^2} \right) d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\dot{M}] \times n}{R^2} + \frac{[\ddot{M}] \times n}{Rc} \right) d^3x' \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3([\mathbf{P}] \cdot n)n - [\mathbf{P}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{P}}] \cdot n)n - [\dot{\mathbf{P}}]}{R^2c} + \frac{([\ddot{\mathbf{P}}] \cdot n)n - [\ddot{\mathbf{P}}]}{Rc^2} \right] d^3x' - \frac{P}{3\epsilon_0} \right] \quad (16)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \frac{[\mathbf{J}] \times n}{R^2} + \frac{[\dot{\mathbf{J}}] \times n}{Rc} \right) d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\dot{\mathbf{p}}] \times n}{R^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}] \times n}{Rc} \right) d^3x' \right. \\ \left. + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3([\mathbf{M}] \cdot n)n - [\mathbf{M}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{M}}] \cdot n)n - [\dot{\mathbf{M}}]}{R^2c} + \frac{([\ddot{\mathbf{M}}] \cdot n)n - [\ddot{\mathbf{M}}]}{Rc^2} \right] d^3x' + \frac{2}{3}\mu_0 M \right] \quad (17)$$

Como puede observarse, las Ecs. (16) y (17) contienen un término adicional respecto a las Ecs. (13) y (14). Los términos adicionales son funciones vectoriales calculadas en el punto del campo al tiempo presente. Sin embargo, es importante señalar que, generalmente, estos términos no se toman en cuenta ya que, en la mayoría de los casos el interés es conocer los campos en algún punto lejos de la fuente, donde estos términos se anulan. Las Ecs. (16) y (17), como se demostrará más adelante, son soluciones de las Ecs. (15). De esta forma resulta claro que las Ecs. (13) y (14) no satisfacen las Ecs. (15) por la falta de los términos adicionales. Las Ecs. (16) y (17) son la extensión consistente de las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart [Ecs. (11) y (12)] que incluyen fuentes materiales.

Aquí se presentan dos aplicaciones importantes de las Ecs. (16) y (17). En la primera aplicación se determinan los campos eléctrico y magnético producidos por dipolos oscilantes. En particular en el caso del dipolo de Hertz<sup>24,25</sup> se encuentra que el campo eléctrico tiene la siguiente forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left( \frac{3[p]}{R^3} + \frac{3[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{e} \left( \frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) \right\} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{e} p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (18)$$

donde el vector unitario  $e$  representa la dirección de vibración del dipolo,  $[p]$  es el momento eléctrico,  $n = (x - x_0)/|x - x_0|$  donde  $x_0$  es el punto de ubicación del dipolo y  $x$  el punto campo. Como se puede observar el campo  $E$  en la Ec. (18) contiene el término adicional:

$$-\frac{1}{3\epsilon_0} e p(t) \delta(x - x_0), \quad (19)$$

que no se encuentra mencionado en la literatura común. Este término representa el campo  $E$  en la posición del dipolo pues, en  $x = x_0$ , es en el único lugar donde tiene un valor diferente de cero.

La segunda aplicación de las Ecs. (16) y (17), determina las expresiones para los campos  $E$  y  $B$  producidos por un dipolo magnético constante en movimiento no relativista:

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3c(n \cdot \beta)n - c\beta}{R^3} + \frac{7(n \cdot \dot{\beta})(n \cdot \dot{\beta})n - 3(n \cdot \ddot{\beta})\beta + 3(n \cdot \dot{\beta})n - (\beta \cdot \dot{\beta})n - \dot{\beta}}{R^2} \right] \times \mu \right. \\ \left. + \left[ \frac{3(n \cdot \dot{\beta})^2 n + (n \cdot \ddot{\beta})n}{Rc} \right] \times \mu \right\}, \quad (20)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3(n \cdot \mu)n - \mu + 12(n \cdot \mu)(n \cdot \beta)n - 3(\beta \cdot \mu)n - 3(n \cdot \mu)\beta - 2(n \cdot \beta)\mu}{R^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{10(n \cdot \mu)(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})n + 6(n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})n - 3(n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})\beta - 3(n \cdot \dot{\beta})(\beta \cdot \mu)n}{R^2 c} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\beta \cdot \dot{\beta})\mu - 4(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})\mu - 2(n \cdot \dot{\beta})\mu - (n \cdot \mu)(\beta \cdot \dot{\beta})n - (\dot{\beta} \cdot \mu)n - (n \cdot \mu)\dot{\beta}}{R^2 c} \right] \right. \\ \left. + [n] \times \left\{ \left[ \frac{3(n \cdot \dot{\beta})^2 n + (n \cdot \ddot{\beta})n}{Rc^2} \right] \times \mu \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 \mu \delta(x - r(t)) \right\}, \quad (21)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético del dipolo,  $n = (x - r(t'))/|x - r(t')|$ ,  $\beta = V/c$  con  $V$  la velocidad no relativista del dipolo ( $V \ll c$  y  $\beta \ll 1$ , se desprecian términos cuadráticos en  $V$ ) y  $r(t)$  es la trayectoria del dipolo.

Un resultado importante obtenido de las fórmulas (20) y (21) es la potencia total radiada por el dipolo magnético con aceleración uniforme:

$$P = \frac{9\mu_0}{70\pi c^3} \dot{\beta}^4 \mu^2. \quad (22)$$

Esta nueva expresión muestra que la potencia de un dipolo magnético en movimiento uniformemente acelerado en la aproximación no relativista es proporcional a la aceleración a la cuarta. Esta potencia se comparó con la potencia de una carga en movimiento uniformemente acelerado y se obtuvo que la potencia del dipolo magnético es mucho menor a la potencia de la carga.

El plan de trabajo es el siguiente; en la sección I se demuestra un teorema generalizado de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo. Con el teorema se integran las ecuaciones de Maxwell [Ecs. (3)] y se obtienen las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart [Ecs. (11) y (12)]. En la sección II se vuelve a aplicar el teorema para integrar las ecuaciones de Maxwell con fuentes materiales y obtener las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart [Ecs. (16) y (17)]. En la sección III se aplican estas últimas leyes en el dipolo de Hertz y el dipolo magnético oscilante. En la sección IV se aplican nuevamente las leyes con fuentes materiales para encontrar los campos eléctrico y magnético de un dipolo con momento magnético constante en movimiento no relativista (i.e.  $v \ll c$ ) y además, se determina la potencia total radiada en los campos de radiación. En la sección V se presentan las conclusiones del trabajo. Finalmente, en el apéndice se discute la función retardada de Green en el espacio libre.

#### Referencias y notas de la introducción

Esta diferencia en las presentaciones es de esperarse: Cuando la dependencia en el tiempo se introduce, uno debe responder (o debería) a la pregunta ¿Cómo se propaga el campo? Esta pregunta es crucial en el caso dependiente del tiempo. Dependiendo de la manera en que se introduce el tiempo se obtienen diferentes versiones de una teoría. Por ejemplo, postulando una propagación instantánea para los campos eléctrico y magnético se llega a teorías electromagnéticas de acción a distancia como el electromagnetismo invariante de Galileo [ver Jammer y Stachel, "If Maxwell had worked between

Ampère and Faraday: An historical fable with a pedagogical moral", *Am. J. Phys.* 48, 5-7, 1980].

<sup>2</sup>Esta condición es natural en el caso de tener fuentes localizadas. Otras condiciones de norma como la de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  es común en la teoría de radiación.

<sup>3</sup>J. Reitz, F. Milford, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Addison-Wesley Iberoamericana, Nueva York, 1986, p. 386.

<sup>4</sup>En las integrales de las Ecs. (6) el valor del integrando no está calculado al tiempo presente  $t$  sino al tiempo previo  $t' = t - R/c$  que se conoce como tiempo retardado, el cual expresa la condición de causalidad: La causa en  $t'$  precede a su efecto en  $t$ , es decir, tiene que pasar un tiempo  $= R/c$  antes de que el resultado de algún evento en  $x'$  se observe en  $x$ .

<sup>5</sup>Marion y Heald, *Classical electromagnetic radiation*, 3a edición, Saunders Forth Worth, TX, 1995 p. 268: "Because of the dependence on retarded times, the spatial differentiations are tedious and treacherous"

<sup>6</sup>O. Jefimenko, "Direct calculation of the electric and magnetic fields of an electric point charge moving with constant velocity", *Am. J. Phys.* 62, 79-85, 1994: "This method involves long and complicated differentiations and vector manipulations, and constitutes one of the most complicated procedures in classical electromagnetic theory".

<sup>7</sup>Griffiths and Heald, "Time-dependent generalizations of the Biot-Savart and Coulomb laws", *Am. J. Phys.* 59, 111-117, 1991.

<sup>8</sup>O. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, 2a edición, electret scientific, Star city, WV, 1989, p. 516.

<sup>9</sup>H. Unz, "Direct integration of time-dependent Maxwell equations", *Am. J. Phys.* 39, 1015-1019, 1966.

<sup>10</sup>T.C. Ton, "On the time-dependent, generalized Coulomb and Biot-Savart laws", *Am. J. Phys.* 59, 520-528, 1991.

<sup>11</sup>J. Heras, "Time-dependent generalization of the Biot-Savart and Coulomb laws: A formal derivation", *Am. J. Phys.* 63, 928-932, 1995.

- <sup>12</sup>U. Bellotti and M. Bornatici, "Time-dependent generalized Coulomb and Biot-Savart laws: A derivation based on Fourier Transforms", *Am. J. Phys.* 64, 568-570, 1996.
- <sup>13</sup>Ver Ref. 8, p. 559.
- <sup>14</sup>H. Schantz, "The flow of electromagnetic energy in the decay of an electric dipole", *Am. J. Phys.* 63, 513-520, 1995.
- <sup>15</sup>Ver Ref. 5, p. 296.
- <sup>16</sup>Ver Ref. 5, p. 268.
- <sup>17</sup>J. Heras, "Jefimenko's formulas with magnetic monopoles and Liénard-Wiechert fields of a dual-charged particle", *Am. J. Phys.* 62, 525-531, 1994.
- <sup>18</sup>P. Lorrain, Dale P. Corson and François Lorrain, *Electromagnetic fields and waves*, 3a edición, Freeman, Nueva York, 1988, Sec. 37.4.
- <sup>19</sup>Ver Ref. 5, p. 261 y 262.
- <sup>20</sup>J. Heras, "Duality transformations and the Liénard-Wiechert fields of a dual-charged particle", *Am. J. Phys.* 62, 525-531, 1994.
- <sup>21</sup>La notación utilizada es: cuando la diferenciación es respecto a  $t$ , el punto está fuera del corchete:  $\partial[\mathbf{F}]/\partial t = [\dot{\mathbf{F}}]$ ; y cuando es respecto a  $t'$ , el punto se escribe dentro del corchete:  $\partial[\mathbf{F}]/\partial t' = [\dot{\mathbf{F}}]$ .
- <sup>22</sup>O. Jefimenko, "Solutions of Maxwell equations for electric and magnetic fields in arbitrary media", *Am. J. Phys.* 60, 890-902, 1992.
- <sup>23</sup>J. Heras, "Radiation fields of a dipole in arbitrary motion", *Am. J. Phys.* 62, 1109-1115, 1994. Las Ecs. (13) y (14) son diferentes a las Ecs. (6) y (8) de la referencia, puesto que en la referencia se utilizó la definición usada por Jefimenko (Ref. 22)  $\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$  y en las Ecs. (13) y (14) se usó la definición común  $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$  en el sistema internacional de unidades.
- <sup>24</sup>Marion y Heald, *Classical electromagnetic radiation*, 2a edición, Academic Press, Nueva York, 1980, p. 237.
- <sup>25</sup>M. Born y E. Wolf, *Principles of optics*, 4a edición, Pergamon Press, Oxford, 1970, Sec. 2.2.2.

## I LEYES GENERALIZADAS DE COULOMB Y BIOT-SAVART

En la literatura reciente se han desarrollado cinco métodos para obtener las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart. El primer método lo presentó Jefimeno.<sup>1</sup> Este método se basa en aplicar el teorema de campos ondulatorios,<sup>2</sup> a los campos eléctrico y magnético. Para tal efecto es necesario realizar operaciones vectoriales sobre cantidades retardadas. Sin embargo, en el método no se utilizan directamente las ecuaciones de Maxwell sino las ecuaciones de onda asociadas a ellas.

El segundo método consiste en diferenciar los potenciales retardados (en la norma de Lorentz)<sup>3</sup> y realizar operaciones vectoriales sobre cantidades retardadas. Este método lo presentaron Griffiths y Heald.<sup>4,5</sup>

La tercera forma de obtener las leyes generalizadas fue desarrollada por Ton<sup>6</sup>, esta forma se basa en aplicar "la transformación del cono de luz"<sup>7</sup> a la solución usual retardada de la ecuación de onda para el campo eléctrico y magnético. Además, Ton demuestra que las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

El cuarto método utiliza las ecuaciones de Maxwell y la función retardada de Green en el espacio libre para la ecuación de onda (obteniendo un teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo). Este método formal lo realizó Heras<sup>8</sup> en 1995.

Finalmente, la quinta forma para obtener las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart la hicieron U. Bellotti y M. Bornatici<sup>9</sup> en 1996, usando la solución de la transformada de Fourier de la ecuación de onda inhomogénea en términos de las fuentes de densidad de carga y corriente.

Los métodos anteriores, excepto el cuarto, tienen en común que parten de integrales de volumen que contienen cantidades retardadas. Sin embargo, este punto de partida no es necesariamente único. La idea de empezar con integrales sobre todo el espacio y tiempo parece ser más atractiva ya que, de esta forma se evita el problema de trabajar con cantidades retardadas desde el principio (hay que recordar que el retardo proviene de la integración temporal) de manera que las operaciones vectoriales que se realizan son comunes y la integración temporal siempre se puede realizar hasta el final.

En la presente sección se obtienen las leyes generalizadas de Coulomb y

Biot-Savart basándose en el método realizado por Heaviside. Para ello primero se demuestra un teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo y después, por medio de este teorema, se integran directamente las ecuaciones de Maxwell.

### 1.1 Teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo

El teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo establece que: <sup>8</sup> *Un campo vectorial dependiente del tiempo  $F(x,t)$  anulándose en el espacio infinito y propagándose hiperbólicamente en el vacío con rapidez  $c$ , se determina completamente al especificar su divergencia, rotacional y derivada temporal.* Una representación de  $F$  en términos de esas cantidades es la siguiente:

$$F(x,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \left( \nabla' \cdot F(x',t') \right) \nabla' G(x,t;x',t') + \left( \nabla' \times F(x',t') \right) \times \nabla' G(x,t;x',t') + \frac{1}{c^2} G(x,t;x',t') \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial F(x,t')}{\partial t'} \right) \right\} d^3x' dt' \quad (1.1)$$

donde  $G(x,t;x',t')$  es la función retardada de Green <sup>10</sup> en el espacio libre:

$$G(x,t;x',t') = \frac{\delta(t' + R/c - t)}{R} \quad (1.2)$$

que satisface la ecuación de onda

$$\left( \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(x,t;x',t') = -4\pi \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (1.3)$$

junto con las condiciones:  $G = 0$  en todo el espacio para  $t < t'$  (condición de causalidad) y  $G$  representa ondas salientes para  $t > t'$ . La presencia de  $G$  en la Ec. (1.1) trae como consecuencia que el campo  $F$  y sus derivadas deben satisfacer ciertas condiciones en el infinito para que las integrales no sean divergentes, de este modo  $F$  decrece en el infinito como  $1/|x|^{1+a}$  y sus derivadas  $|\nabla \cdot F|$ ,  $|\nabla \times F|$  y  $|\partial F / \partial t|$  como  $1/|x|^{2+a}$  donde  $a > 0$ . Estos comportamientos en el infinito garantizan que las integrales de volumen en la Ec. (1.1) no diverjan y que sus integrales de superficie asociadas se anulen

en el infinito. Puesto que  $G$  se propaga en el vacío con rapidez  $c$  de acuerdo a una ecuación de onda, que es hiperbólica, se puede decir que el campo  $F$  se propaga hiperbólicamente en el vacío con rapidez  $c$ .

La Ec. (1.1) se demuestra utilizando la siguiente identidad:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 -F^l \left( \partial'_s \partial'^s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G &= \left( \partial'_s F^s \right) \partial'^l G + \left( \partial'^s F^l - \partial'^l F^s \right) \partial'_s G + \frac{1}{c^2} G \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial F^l}{\partial t'} \right) \\
 &- \partial'_s \left( F^l \partial'^s G + F^s \partial'^l G - \delta^{sl} F_k \partial'^k G \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left( F^l \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial F^l}{\partial t'} \right), \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

donde  $F^l = (F)^l$  es la  $l$ -ésima componente cartesiana de  $F$ ;  $\partial'^l = \partial / \partial x'^l = (\nabla')^l$ ;  $\delta^{sl}$  es la delta de Kronecker y  $G = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  es la función de Green retardada.

Integrando la Ec. (1.4) (multiplicada por el factor  $1/4\pi$ ) sobre todo el espacio y tiempo, usando la Ec. (1.3) e integrando el lado izquierdo de la ecuación resultante se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 F^l &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \left( \partial'_s F^s \right) \partial'^l G + \left( \partial'^s F^l - \partial'^l F^s \right) \partial'_s G + \frac{1}{c^2} G \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial F^l}{\partial t'} \right) \right\} d^3 x' dt' \\
 &- \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \partial'_s \left( F^l \partial'^s G + F^s \partial'^l G - \delta^{sl} F_k \partial'^k G \right) d^3 x' \right\} dt' + \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ \int \frac{\partial}{\partial t'} \left( F^l \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial F^l}{\partial t'} \right) dt' \right\} d^3 x'
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde el campo  $F^l$  del lado izquierdo está calculado en el punto  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  y el campo  $F^l$  del lado derecho en el punto fuente  $\mathbf{x}'$  al tiempo  $t'$ . La integral volumétrica contenida en las llaves (...) del segundo sumando de la Ec. (1.5) se puede transformar, mediante el teorema de Gauss,<sup>11</sup> en una integral de superficie la cual se anula, después de realizar ciertas operaciones,<sup>12</sup> por las condiciones iniciales y las condiciones de frontera en el infinito. La integral sobre el tiempo encerrada en las llaves (...) del tercer sumando de la Ec. (1.5) se anula por las condiciones iniciales y finales. Por lo tanto, se tiene que la Ec. (1.5) reduce a:

$$F^1 = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \left( \partial'_s F^s \right) \partial'^1 G + \left( \partial'^s F^1 - \partial'^1 F^s \right) \partial'_s G + \frac{1}{c^2} G \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial F^1}{\partial t'} \right) \right) d^3 x' dt', \quad (1.6)$$

con las identificaciones  $\nabla' \cdot F = \partial'_s F^s$ ;  $[(\nabla' \times F) \times \nabla' G]^1 = (\partial'^s F^1 - \partial'^1 F^s) \partial'_s G$  y  $(\partial F / \partial t')^1 = \partial F^1 / \partial t'$  la Ec. (1.6) en notación vectorial se convierte en la Ec. (1.1), con lo que se demuestra el teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo.

## 1.2 Leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart

La ley generalizada de Coulomb [Ec. (1.1)] se puede obtener identificando al campo  $F$  de la Ec. (1.1) con el campo eléctrico  $E$ . Al substituir tres de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (1.7a)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \left( \nabla \times B - \mu_0 J \right), \quad (1.7c)$$

en la Ec. (1.1) y después de hacer algunas operaciones vectoriales se obtiene:

$$E = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \left( \frac{1}{\epsilon_0} \rho \nabla' G - \mu_0 G \frac{\partial J}{\partial t'} \right) d^3 x' dt' + \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla' \times \left( G \frac{\partial B}{\partial t'} \right) d^3 x' \right\} dt'. \quad (1.8)$$

La integral de volumen dentro de las llaves (...) puede transformarse en una integral de superficie la cual se anula en el infinito, de forma que la Ec. (1.8) se reduce a:

$$E = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \frac{1}{\epsilon_0} \rho \nabla' G - \mu_0 G \frac{\partial J}{\partial t'} \right) d^3 x' dt'. \quad (1.9)$$

Para calcular la integral respecto al tiempo de la Ec. (1.9), es necesario usar la Ec. (1.2) y el resultado:

$$\nabla' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{n}{R^2} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) - \frac{n}{cR} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right). \quad (1.10)$$

Realizando las integraciones con respecto al tiempo en la Ec. (1.9):

$$\begin{aligned}
 \int \rho \nabla' G dt' &= \frac{n}{R^2} \int \rho \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' - \frac{n}{cR} \int \rho \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' \\
 &= \frac{n}{R^2} \rho \Big|_{t'=t-R/c} - \frac{n}{cR} \int \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \rho \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \right\} dt' + \frac{n}{cR} \int \frac{\partial \rho}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' \\
 &= \frac{n}{R^2} \rho \Big|_{t'=t-R/c} - \frac{n}{cR} \rho \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} + \frac{n}{cR} \frac{\partial \rho}{\partial t'} \Big|_{t'=t-R/c} \\
 &= \frac{n}{R^2} (\rho) + \frac{n}{cR} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right], \quad (1.11a)
 \end{aligned}$$

$$\int G \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} dt' = \frac{1}{R} \int \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' = \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \Big|_{t'=t-R/c} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right], \quad (1.11b)$$

donde los corchetes [...] son el símbolo de retardo. Finalmente, al substituir los resultados anteriores en la Ec. (1.9) se obtiene la ley generalizada de Coulomb:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \left[ \frac{\rho}{R^2} \right] \mathbf{n} + \left[ \frac{\dot{\rho}}{Rc} \right] - \left[ \frac{\mathbf{j}}{Rc^2} \right] \right) d^3x', \quad (1.12)$$

donde  $[\dot{\quad}] = [\partial/\partial t']$ .

Para obtener la ley generalizada de Biot-Savart, se sigue el mismo método, identificando al campo F en la Ec. (1.1) con el campo magnético B. Por consiguiente, al substituir las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.13a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.13b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.13c)$$

en la Ec. (1.1) [con F = B] se obtiene:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int (\mathbf{J} \times \nabla' G) d^3x' dt' - \frac{1}{4\pi c^2} \int \nabla' \times \left( G \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t'} \right) d^3x' dt' \right]. \quad (1.14)$$

La última integral se puede transformar en una integral de superficie vía el teorema de Gauss la cual se anula en el infinito y de este modo la Ec. (1.14) se reduce a:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint J \times \nabla' G d^3x' dt'. \quad (1.15)$$

Al integrar la Ec. (1.15) respecto al tiempo con la ayuda de la Ec. (1.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int J \times \nabla' G dt' &= -\frac{n}{R^2} \times \int J \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' + \frac{n}{cR} \times \int J \frac{\partial}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' \\ &= -\frac{n}{R^2} \times [J] + \frac{n}{cR} \times \left[ \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ J \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \right\} dt' - \frac{n}{cR} \times \int \frac{\partial J}{\partial t'} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dt' \right] \\ &= -\frac{n}{R^2} \times [J] + \frac{n}{cR} \times J \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} - \frac{n}{cR} \times \left[ \frac{\partial J}{\partial t'} \right] \\ &= [J] \times \frac{n}{R^2} + \frac{n}{cR} \times \left[ \frac{\partial J}{\partial t'} \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

De forma que al sustituir el resultado anterior en la Ec. (1.15) se obtiene la ley generalizada de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \left[ \frac{J}{R^2} \times n + \frac{[j]}{Rc} \times n \right] \right) d^3x'. \quad (1.17)$$

Las Ecs. (1.12) y (1.17) son útiles para resolver problemas típicos asociados a fuentes puntuales como los de la antena diferencial<sup>6</sup> y los campos electromagnéticos producidos por una carga en movimiento arbitrario. La ventaja práctica de la pareja de Ecs. (1.12) y (1.17) es que no contiene derivadas espaciales sino sólo derivadas temporales las cuales son más fáciles de usar.

## Referencias y notas de la sección I

- <sup>1</sup>O. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, 2a edición, electret scientific, Star City, WV, 1989, p. 516.
- <sup>2</sup>Este teorema se discute en la sección 2-14 de la referencia 1.
- <sup>3</sup>Un punto delicado en la derivación de Griffiths y Heald consiste en que los potenciales están restringidos por una condición de norma particular (norma de Lorentz). En otra condición de norma, como la norma de Coulomb, esta derivación no parece ser tan simple.
- <sup>4</sup>Griffiths and Heald, "Time-dependent generalizations of the Biot-Savart and Coulomb laws", *Am. J. Phys.* 59, 111-117, 1991.
- <sup>5</sup>La derivación de Griffiths y Heald se reproduce en el libro: Marion y Heald, *Classical electromagnetic radiation*, 3a edición, Saunders, Forth Worth, TX, 1995, Sec. 8.2.
- <sup>6</sup>T.C. Ton, "On the time-dependent, generalized Coulomb and Biot-Savart laws", *Am. J. Phys.* 59, 520-528, 1991.
- <sup>7</sup>Ton utiliza una transformación novedosa llamada "transformación del cono de luz" para convertir los potenciales retardados en las leyes de Coulomb y Biot-Savart dependientes del tiempo.
- <sup>8</sup>J. Heras, "Time-dependent generalization of the Biot-Savart and Coulomb laws: A formal derivation", *Am. J. Phys.* 63, 928-932, 1995.
- <sup>9</sup>U. Bellotti and M. Bornatici, "Time-dependent generalized Coulomb and Biot-Savart laws: A derivation based on Fourier Transforms", *Am. J. Phys.* 64, 568-570, 1996.
- <sup>10</sup>Ver apéndice.
- <sup>11</sup>El teorema de Gauss o teorema de la divergencia en notación tensorial se encuentra en: D.S. Jones, *The theory of electromagnetism*, Oxford Pergamon, Gran Bretaña, 1974, p.p 112-115.

<sup>12</sup>Para asegurar que la integral volumétrica dentro de las llaves (...) se anule después de transformarla en una integral de superficie, es necesario hacer las siguientes operaciones: considere el primer término de la Ec. (1.5), sustituyendo la Ec.(1.10):

$$\begin{aligned}
 \left\{ \int \partial'_s \left( F^1 \partial'^s G \right) d^3 x' \right\} dt' &= \left\{ \int \partial'_s \left( F^1 \frac{n^s}{R^2} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) \right) d^3 x' \right\} dt' \\
 &\quad - \left\{ \int \partial'_s \left( F^1 \frac{n^s}{cR} \frac{\partial}{\partial t'} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) \right) d^3 x' \right\} dt' \\
 &= \left\{ \int \partial'_s \left( F^1 \frac{n^s}{R^2} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) + F^1 \frac{n^s}{cR} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) \right) d^3 x' \right\} dt' \\
 &\quad - \left\{ \int \frac{\partial}{\partial t'} \partial'_s \left( F^1 \frac{n^s}{cR} \delta \left( t' + \frac{R}{c} - t \right) \right) d^3 x' \right\} dt'.
 \end{aligned}$$

La primera integral volumétrica se anula al transformarla en una integral de superficie y usar las condiciones de frontera en el infinito. La integral sobre el tiempo del segundo término se anula por las condiciones iniciales. Al realizar las mismas operaciones en los demás términos de la integral volumétrica dentro de las llaves (...) de la Ec. (1.5) también se anulan.

## II LEYES GENERALIZADAS DE COULOMB Y BIOT-SAVART CON FUENTES MATERIALES

El primer antecedente de una extensión de las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales lo presentó Jefimenko<sup>1</sup> en 1992. Este autor obtiene tal extensión a partir de la solución de las ecuaciones de ondas asociadas a las ecuaciones de Maxwell para campos con fuentes materiales. La solución expresa a  $E$  y  $B$  como Integrales retardadas de  $\rho$  (densidad de carga),  $J$  (densidad de corriente),  $P$  (vector de polarización) y  $M$  (vector de magnetización) y de sus correspondientes derivadas espaciales y temporales.

La extensión obtenida por Jefimenko tiene el inconveniente de que aún contiene algunas derivadas espaciales. Sin embargo, en 1994 Heras<sup>2</sup> reformuló la extensión de Jefimenko cambiando las derivadas espaciales por temporales. Heras aplicó sus expresiones (Ecs. (13) y (14) de la introducción) para determinar los campos de radiación de un dipolo en movimiento arbitrario.

Esta sección se divide en dos partes. En la primera se discuten los vectores de polarización y magnetización así como su papel de fuentes materiales. En la segunda parte, se obtiene una extensión de las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales, que no contienen derivadas espaciales y que presentan un término adicional<sup>3</sup> el cual no se considera en la mayoría de los libros de texto.

### 2.1 Fuentes materiales

La polarización  $P$  se define como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen. Se presentan diferentes tipos de polarización en un material; la polarización *inducida* y la *permanente*<sup>4</sup>. Una de las formas en que se puede obtener una polarización inducida es la creación del momento dipolar debido a la presencia de un campo eléctrico externo que produce la separación de las cargas positivas y negativas del material o también la orientación de los dipolos del material en caso de que éste ya posea un momento dipolar propio. Al retirar el campo eléctrico externo esta polarización desaparece, de manera que la polarización depende del campo eléctrico.

La polarización permanente es aquella en la cual el material tiene un

momento dipolar permanente orientado, en ausencia de un campo externo, estos materiales se llaman *electretos*. Este tipo de polarización es independiente del campo eléctrico y se considera como una fuente de éste.

El momento dipolar eléctrico de una distribución de carga  $\rho(\mathbf{x}')$  se define como:

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.1)$$

En ciertos materiales es posible definir un vector de polarización tal que el momento dipolar eléctrico total esté dado por:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{P}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (2.2)$$

donde se integra sobre el volumen y  $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$  es el vector de polarización al cual le debe de corresponder una distribución de carga. Para encontrar la distribución de carga equivalente se utiliza la siguiente identidad<sup>5</sup>:

$$\partial'_s \mathbf{x}'^s \mathbf{p}^s = \mathbf{x}'^s (-\partial'_s \mathbf{P}^s) + \partial'_s (\mathbf{x}'^s \mathbf{P}^s), \quad (2.3)$$

que al integrarla y aplicar el teorema de Gauss al último miembro se obtiene:

$$\int \mathbf{P}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \int \mathbf{x}' (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3 \mathbf{x}' + \int \mathbf{x}' (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'), \quad (2.4)$$

con  $S$  la superficie que encierra al volumen. Si se toma a la superficie  $S$  en la Ec. (2.4) fuera del material pero que lo encierre, entonces  $\mathbf{P} = 0$  sobre  $S$  y la expresión se reduce a:

$$\int \mathbf{P}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = \int \mathbf{x}' (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.5)$$

La ecuación anterior es válida para cualquier estado de polarización. Comparar la definición de momento dipolar [Ec. (2.1)] con la Ec. (2.5) se puede identificar a  $\rho(\mathbf{x}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$  como la densidad de carga dada por la polarización, de esta manera la distribución de carga equivalente es:

$$\rho(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Por otra parte, la magnetización se define como el momento dipolar magnético por unidad de volumen. Análogamente a la polarización, la magnetización puede presentarse de dos formas; la *inducida* o la *permanente*<sup>6</sup>. La magnetización inducida es consecuencia de tener un campo magnético externo. En materiales no magnetizados los dipolos están orientados al azar y al aplicarles un campo magnético externo se orientan dependiendo de la naturaleza del material; en materiales *diamagnéticos*, los dipolos se orientan en sentido opuesto al campo aplicado y en materiales *paramagnéticos* los dipolos se orientan en la dirección del campo externo que se aplique. Al retirar el campo magnético los dipolos magnéticos se desorientan por lo que este tipo de magnetización depende del campo. Sin embargo, algunos materiales tienen la propiedad de poseer una magnetización permanente sin necesidad de encontrarse en un campo magnético externo. Este tipo de magnetización se llama permanente pues no depende de un campo externo, por lo que se consideran como una fuente de campo magnético.

El momento dipolar magnético se define como:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  es la densidad de corriente. En todos los materiales es posible definir un vector de magnetización tal que el momento magnético total en cualquier volumen esté dado por:

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.8)$$

De igual modo que el vector  $\mathbf{P}$  el vector de magnetización  $\mathbf{M}$  también debe de tener una distribución de corriente equivalente. Para determinar esta distribución es necesario usar la siguiente identidad matemática<sup>7</sup>:

$$2\mathbf{M}^l = x'_s \partial'^l M^s - x'_p \partial'^p M^l - \partial'^l \left( x'_s M^s \right) + \partial'^p \left( x'_p M^l \right), \quad (2.9)$$

que al integrarla sobre el volumen y transformar en una integral de superficie a los dos últimos miembros, estos se anulan. Por lo tanto, la Ec. (2.9) se

reduce a:

$$\int M(x') d^3x' = \frac{1}{2} \int x' \times (\nabla' \times M) d^3x' , \quad (2.10)$$

pues se puede demostrar que  $(x' \times (\nabla' \times M))^i = x'_a \partial'^i M^a - x'_p \partial'^p M^i$ . Entonces igualando la Ec. (2.7) con la Ec. (2.8) se tiene:

$$\int M(x') d^3x' = \frac{1}{2} \int x' \times J(x') d^3x' . \quad (2.11)$$

Por consiguiente, al comparar la Ec. (2.10) y (2.11) se identifica que:

$$J = \nabla \times M. \quad (2.12)$$

La Ec. (2.12) es la distribución equivalente de corriente que corresponde a la magnetización M.

Hasta ahora sólo se ha considerado el caso en que P y M sean estáticos, pero al introducir la dependencia en el tiempo se presenta la corriente de polarización  $\partial P / \partial t$ , de forma que, para este caso, las distribuciones de carga y corriente equivalentes son:

$$\rho(x,t) = -\nabla \cdot P(x,t) , \quad (2.13a)$$

$$J(x,t) = \nabla \times M(x,t) + \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} . \quad (2.13b)$$

Una manera de justificar la forma de las Ecs. (2.13) es por la ecuación de continuidad<sup>8</sup>:

$$\nabla \cdot J(x,t) + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = 0 , \quad (2.14)$$

al substituir la Ec. (2.13a) en la ecuación de continuidad se tiene:

$$\nabla \cdot J(x,t) - \frac{\partial (\nabla \cdot P(x,t))}{\partial t} = 0 , \quad (2.15)$$

Intercambiando el orden de diferenciación:

$$\nabla \cdot \left( J - \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0 , \quad (2.16)$$

en general, la Ec. (2.16) implica que:

$$\mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{Q} , \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es algún vector. Sin embargo, para el caso estático se sabe que  $\mathbf{J}$  está dada por la Ec.(2.12) entonces, si la Ec. (2.12) es un caso particular de la Ec. (2.17) se tiene que  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}$ , con lo que se obtiene la Ec. (2.13b). Por lo tanto, la forma de  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  para el caso dependiente del tiempo son las Ecs. (2.13).

En la presente sección, se resuelven las ecuaciones de Maxwell con fuentes materiales en donde  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  se consideran distribuciones puntuales en movimiento<sup>9</sup>. Estas distribuciones, para fuentes materiales puntuales, son de la forma  $S(\mathbf{x},t) = s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$  donde  $\mathbf{r}(t)$  es la posición de la fuente y  $s(t)$  es el momento variable.

## 2.2 Leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales

Las ecuaciones de Maxwell con fuentes materiales, sin incluir las densidades de carga y corriente libres, son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} , \quad (2.18a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2.18b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (2.18c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (2.18d)$$

donde  $\mathbf{P}$  (vector de polarización) y  $\mathbf{M}$  (vector de magnetización) se suponen fuentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Por lo tanto , los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  se definen independientemente de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  (por ejemplo, como momentos de dipolo). En general, los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  dependen de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

Cuando  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  están confinados en una región finita del espacio, las Ecs. (2.18) se pueden integrar directamente por medio de la Ec. (1.1). Aplicando la Ec. (1.1) al campo  $\mathbf{E}$  y utilizando las Ecs. (2.18) se obtiene:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{x}, t) = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left( \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}', t') \nabla' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + \frac{1}{c^2} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t'^2} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}', t') d^3 \mathbf{x}' dt' + \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla' \times \left( G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right) d^3 \mathbf{x}' dt'.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

La integral de volumen en el último término, se puede transformar en una integral de superficie la cual se anula en el infinito ( $G$  y  $\partial \mathbf{B} / \partial t'$  se anulan en el infinito). Las demás integrales se pueden transformar de forma tal que las derivadas espaciales contenidas en los integrandos se cambien por derivadas temporales. Para tal propósito se requiere de la Ec. (1.10) y del siguiente resultado<sup>10</sup>:

$$\partial'^s \partial'^l G = \left( \frac{3n^s n^l - \delta^{sl}}{R^3} - \frac{4\pi}{3} \delta^{sl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right) \delta(u) - \left( \frac{3n^s n^l - \delta^{sl}}{R^2 c} \right) \frac{\partial \delta(u)}{\partial t'} + \left( \frac{n^s n^l}{R c^2} \right) \frac{\partial^2 \delta(u)}{\partial t'^2}, \tag{2.20}$$

donde  $G = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ ;  $u = t' + R/c - t$ ;  $(n)^i = n^i$  es la  $i$ -ésima componente cartesiana del vector unitario  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ;  $(\nabla')^i = \partial'^i = \partial / \partial x'^i$ ; índices repetidos se suman. Por consiguiente, con las Ecs. (1.10) y (2.20) se tiene que la Ec. (2.19) se transforma en:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \delta(u) \left( \frac{3(\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{P}(\mathbf{x}', t')}{R^3} \right. \\
& \left. + \frac{3(\ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t')}{R^2 c} + \frac{(\ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{x}', t')}{R c^2} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \delta(u) \left( \frac{\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{\ddot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R c} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t), \tag{2.21}
\end{aligned}$$

donde el punto representa derivada respecto a  $t'$ ,  $\dot{\mathbf{P}} \equiv \partial \mathbf{P} / \partial t'$ .

La identificación  $\mathbf{F} = \mathbf{B}$  en la Ec. (1.1) y el uso de las Ecs. (2.18), (1.10) y (2.20) dan una expresión similar para el campo magnético:

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \delta(u) & \left( \frac{3(\dot{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \ddot{M}(\mathbf{x}', t')}{R^3} \right. \\
& + \frac{3(\ddot{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{M}(\mathbf{x}', t')}{R^2 c} + \frac{(\ddot{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{M}(\mathbf{x}', t')}{R c^2} \left. \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \\
& + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \delta(u) \left( \frac{\dot{P}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{\ddot{P}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R c} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' + \frac{2\mu_0}{3} M(\mathbf{x}, t). \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Las Ecs. (2.21) y (2.22) constituyen la solución general a las Ecs. (2.18) bajo las condiciones de que los campos E y B (y sus respectivas derivadas) se anulen en el infinito y que las fuentes P y M estén confinadas en una región finita del espacio. Puede observarse que las Ecs. (2.21) y (2.22) no involucran derivadas espaciales de los vectores P y M de manera que los cálculos se simplifican considerablemente en aplicaciones específicas. En particular, en la teoría de dipolos (estáticos, oscilantes y en movimiento arbitrario) las Ecs. (2.21) y (2.22) son las herramientas apropiadas para calcular directamente los campos E y B correspondientes.

Es interesante notar que el término  $-(1/3\epsilon_0)P$  en la Ec. (2.21) y el término  $(2\mu_0/3)M$  en la Ec. (2.22) son funciones vectoriales calculadas en el punto de observación y en el tiempo presente. Ya que en este contexto los vectores P y M se suponen fuentes de los campos E y B, los términos mencionados se pueden interpretar como fuentes que producen instantáneamente parte de los campos E y B [las partes restantes de los campos se producen por los vectores P, M y sus derivadas temporales mediante las correspondientes integrales que aparecen en las Ecs. (2.21) y (2.22)]. En este sentido, estos términos siempre están conectados instantáneamente (o están "en contacto") con los campos E y B. Esto sugiere el nombre de término de contacto para tales términos. En la mayoría de los casos, estos términos no se consideran debido al interés general de conocer los campos en algún punto lejos de la fuente, donde estos términos no contribuyen pues, tienen un valor distinto de cero sólo en un punto. Es pertinente mencionar que unas ecuaciones similares a las Ecs. (2.21) y (2.22), pero sin sus respectivos términos de contacto las obtuvo Heras<sup>2</sup> en un artículo reciente. Sin embargo, sin sus correspondientes términos de contacto las Ecs. (2.21) y (2.22) no satisfacen las ecuaciones de Maxwell (2.18) por lo

que estos términos son esenciales para la consistencia interna de la teoría. Por ejemplo, se puede demostrar<sup>11</sup> que las Ecs.(2.21) y (2.22) sin sus términos de contacto satisfacen las ecuaciones  $\nabla \cdot \mathbf{E} = - (2/3\epsilon_0)\nabla \cdot \mathbf{P}$  y  $\nabla \cdot \mathbf{B} = - (2\mu_0/3)\nabla \cdot \mathbf{M}$  y no las ecuaciones de Maxwell (2.18a) y (2.18b). Además, los términos adicionales o de contacto en las Ec. 2.21) y (2.22) también son válidos para el caso estático, ya que sólo provienen de considerar a la polarización y magnetización como fuentes puntuales de los campos E y B.

Al realizar la integral respecto de  $t'$  en las Ecs. (2.21) y (2.22) se obtienen las siguientes expresiones para los campos E y B:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3([\mathbf{P}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\mathbf{P}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{P}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\dot{\mathbf{P}}]}{R^2 c} + \frac{([\ddot{\mathbf{P}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\ddot{\mathbf{P}}]}{Rc^2} \right] d^3x' - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} - \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{[\dot{\mathbf{M}}] \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{M}}] \times \mathbf{n}}{Rc} \right] d^3x', \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3([\mathbf{M}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\mathbf{M}]}{R^3} + \frac{3([\dot{\mathbf{M}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\dot{\mathbf{M}}]}{R^2 c} + \frac{([\ddot{\mathbf{M}}] \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - [\ddot{\mathbf{M}}]}{Rc^2} \right] d^3x' + \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{[\dot{\mathbf{P}}] \times \mathbf{n}}{R^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{P}}] \times \mathbf{n}}{Rc} \right] d^3x'. \quad (2.24)$$

La inclusión de las densidades de carga y corriente libres en las Ecs. (2.21) y (2.22) o las Ecs. (2.23) y (2.24) implican las Ecs. (16) y (17) de la Introducción. En ausencia de las densidades de carga y corriente libres, las Ecs. (2.21) y (2.22) o equivalentemente las Ecs. (2.23) y (2.24) representan la correcta extensión de las leyes de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales.

Para ilustrar la utilidad de las leyes de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales [Ecs.(2.21) y (2.22) o Ecs.(2.23) y (2.24)] en la siguiente

sección se aplicarán las Ecs. (2.23) y (2.24) en el cálculo de los campos eléctrico y magnético del dipolo de Hertz así como los campos del dipolo magnético oscilante. En la sección IV se aplicarán las Ecs. (2.21) y (2.22) para calcular los campos de un dipolo magnético en movimiento no relativista.

#### Referencias y notas de la sección II

- <sup>1</sup>O. Jefimenko, "Solutions of Maxwell equations for electric and magnetic fields in arbitrary media", Am. J. Phys. 60, 890-902, 1992.
- <sup>2</sup>J. Heras, "Radiation fields of a dipole in arbitrary motion", Am. J. Phys. 62, 1109-1115, 1994.
- <sup>3</sup>J. Heras, "Generalized Biot-Savart and Coulomb laws with material sources and the ignored term in the electric field of the Hertz dipole", sometido a publicación en Am. J. Phys.
- <sup>4</sup>Ronald K. Wangsness, *Electromagnetic fields*, John Wiley & Sons, Inc., EE.UU., 1979, Sec. 10.1, 10.2.
- <sup>5</sup>W.N. Cottingham y D.A. Greenwood, *Electricity and magnetism*, Cambridge University Press, 1991, p.p 82-85.
- <sup>6</sup>Ver Ref. 4 Sec. 20.1, 20.2.
- <sup>7</sup>Ver Ref. 5 p.p 92-95.
- <sup>8</sup>Ver Ref. 5 p.p 99-101.
- <sup>9</sup>M. Born y E. Wolf, *Principles of optics*, 4a edición, Pergamon Press, Oxford, 1970, Sec. 2.2.2.
- <sup>10</sup>J. Heras, "New approach to the classical radiation fields of point sources", sometido a publicación en Physical Review Letters.
- <sup>11</sup>La demostración se encuentra en la Ref. 3.

### III DIPOLOS OSCILANTES

El formalismo usual para tratar los dipolos oscilantes es mediante el método desarrollado por Hertz<sup>1,2</sup>. Este método representa las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético en términos de los llamados "vectores de Hertz" ( $\Pi_e$  y  $\Pi_m$ ) en vez de los potenciales escalar  $\varphi$  y vectorial  $A$ . Los vectores de Hertz están relacionados con  $\varphi$  y  $A$  de la misma forma que  $P$  y  $M$  están relacionados con  $\rho$  y  $J$ :

$$\varphi = -\nabla \cdot \Pi_e, \quad (3.1a)$$

$$A = \nabla \times \Pi_m + \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}, \quad (3.1b)$$

donde  $\Pi_e$  es el vector de Hertz asociado con los efectos del campo eléctrico y  $\Pi_m$  el asociado con los efectos del campo magnético. Por lo tanto,  $\Pi_e$  y  $\Pi_m$  son solución de la ecuación de onda inhomogénea, la cual se expresa en términos de los potenciales retardados como:

$$\Pi_e(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[\mathbf{P}]}{R} d^3x', \quad (3.2a)$$

$$\Pi_m(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[\mathbf{M}]}{R} d^3x', \quad (3.2b)$$

Las Ecs. (3.2) son las expresiones para los potenciales  $\Pi_e$  y  $\Pi_m$  en términos de la polarización y la magnetización por lo que podemos expresar directamente los campos  $E$  y  $B$  en términos de estos potenciales.

Sin embargo, recientemente, tanto Marion y Heald<sup>3</sup> como Schantz<sup>4</sup>, han obtenido los campos de un dipolo eléctrico oscilante (dipolo de Hertz) por un método distinto, el cual parte de las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart [Ecs. (1.12) y (1.17)].

En esta sección, se calculan los campos del dipolo de Hertz y de un dipolo magnético oscilante con un método diferente, el cual se basa en aplicar las leyes generalizadas de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales [Ecs. (2.23) y (2.24)]. Para ambos casos se encuentra que los campos presentan un término adicional.

### 3.1 El dipolo de Hertz

El dipolo de Hertz es un dipolo eléctrico puntual oscilante, caracterizado por el siguiente vector de polarización<sup>5</sup>:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e} p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.3)$$

donde  $p(t)$  es una función periódica en el tiempo que representa la magnitud del momento eléctrico del dipolo,  $\mathbf{x}_0$  es el punto donde se encuentra localizado el dipolo y el vector unitario  $\mathbf{e}$  especifica la dirección de vibración del dipolo. Al calcular el vector  $\mathbf{P}$  en el punto fuente  $\mathbf{x}'$  y el tiempo retardado  $t' = t - R/c$ , el vector de polarización se puede escribir como:

$$[\mathbf{P}] = \mathbf{e} [p] \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0), \quad (3.4)$$

donde  $[p]$  denota  $p(t')$ . Si se usan las Ec. (3.3) y (3.4) con sus respectivas derivadas temporales en las Ecs. (2.23) y (2.24) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ \left( \frac{3[p]}{R^3} + \frac{3[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{e} \left( \frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) \right\} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3x' \\ - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{e} p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \frac{[\dot{p}]}{R^2} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc} \right) (\mathbf{e} \times \mathbf{n}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3x', \quad (3.6)$$

al integrar respecto al volumen se obtienen las expresiones para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  del dipolo de Hertz<sup>5,6</sup>:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left( \frac{3[p]}{R^3} + \frac{3[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{e} \left( \frac{[p]}{R^3} + \frac{[\dot{p}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc^2} \right) \right\} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{e} p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\dot{p}]}{R^2} + \frac{[\ddot{p}]}{Rc} \right) (\mathbf{e} \times \mathbf{n}), \quad (3.8)$$

donde el vector unitario  $\mathbf{n}$  está dado por  $\mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Nótese que las Ecs. (3.5) y (3.6) sin el término adicional:

$$-\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{e} p(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.9)$$

son las ecuaciones que se encuentran en los libros de texto. La novedad aquí es la presencia del término de contacto dado por la Ec. (3.9), el cual no ha sido considerado en la mayoría de los libros de texto de la teoría electro-magnética. Este término es diferente de cero sólo cuando  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ . Por lo tanto, este término representa el campo eléctrico en el dipolo el cual, que por hipótesis, está situado en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Fuera del dipolo, el término de contacto se anula. *"Aunque este término contribuye solamente en un punto, es necesario para la consistencia (con respecto a las Ecs. de Maxwell) del campo eléctrico producido por un dipolo de Hertz"*<sup>7</sup>. Claramente, las Ecs. (3.7) y (3.8) se reducen a las conocidas ecuaciones de un dipolo eléctrico, (estático) con momento constante<sup>8,9</sup>  $\mathbf{p} = e\mathbf{p}$  en el origen, i.e.  $\mathbf{x}_0 = 0$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{R^3} \right) - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{p} \delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = 0. \quad (3.10)$$

En la presente deducción de estos campos se puede decir que: *"Para tratar los dipolos puntuales, la extensión de las leyes de Coulomb y Biot-Savart con fuentes materiales [Ecs. (2.23) y (2.24)] son las herramientas apropiadas y naturales para calcular los campos eléctrico y magnético producidos por estos dipolos"*<sup>7</sup>.

Es importante señalar que las Ecs. (3.7) y (3.8) son válidas aún en el caso teórico de que  $p(t)$  no sea una función periódica en el tiempo.

### 3.2 El dipolo magnético oscilante

De manera análoga al dipolo eléctrico oscilante, las Ecs. (2.23) y (2.24) se pueden aplicar a un dipolo magnético puntual oscilante. Para calcular los campos de este dipolo se considera al dipolo localizado en el punto  $\mathbf{x}_0$  y vibrando en una dirección fija especificada por el vector unitario  $\mathbf{e}$ . En este

caso el vector de magnetización (calculado en el punto fuente  $\mathbf{x}'$  y en el tiempo retardado  $t'$ ) está dado por:

$$[\mathbf{M}] = e [m] \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0), \quad (3.11)$$

donde  $[m]$  denota  $m(t')$  y es una función periódica en el tiempo que representa la magnitud del momento magnético del dipolo. Al substituir la Ec. (3.11) junto con sus respectivas derivadas temporales en las Ecs. (2.23) y (2.24) se tiene:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{[\dot{m}]}{R^2} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc} \right] (\mathbf{e} \times \mathbf{n}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3x', \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3[m]}{R^3} + \frac{3[\dot{m}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc^2} \right] (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - e \left[ \frac{[m]}{R^3} + \frac{[\dot{m}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc^2} \right] \right\} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) d^3x' \\ + \frac{2}{3} \mu_0 e m(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (3.13)$$

Integrando sobre el volumen se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{[\dot{m}]}{R^2} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc} \right] (\mathbf{e} \times \mathbf{n}), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3[m]}{R^3} + \frac{3[\dot{m}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc^2} \right] (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - e \left[ \frac{[m]}{R^3} + \frac{[\dot{m}]}{R^2c} + \frac{[\ddot{m}]}{Rc^2} \right] \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 e m(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.15)$$

Estas ecuaciones sin el término:

$$\frac{2}{3} \mu_0 e m(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.16)$$

son muy conocidas en la literatura común<sup>5,6</sup>. Las Ecs. (3.14) y (3.15) siguen siendo válidas aún en el caso teórico de que  $m(t)$  no sea una función periódica

en el tiempo además, se reducen a las expresiones usuales de un dipolo estático con momento magnético constante  $m = em$  en el punto  $x_0 = 0$  dadas por:<sup>8,9</sup>

$$E = 0, \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(m \cdot n)n - m}{R^3} \right) + \frac{2}{3} \mu_0 m \delta(x), \quad (3.17)$$

En este caso el término de contacto presente en los campos del dipolo magnético oscilante es crucial para explicar el desdoblamiento hiperfino del estado base del hidrógeno<sup>10</sup>.

### Referencias y notas de la sección III

- <sup>1</sup>M. Born y E. Wolf, *Principles of optics*, 4a edición, Pergamon Press, Oxford, 1970, Sec. 2.2.2
- <sup>2</sup>Marion y Heald, *Classical electromagnetic radiation*, 2a edición, Academic Press, Nueva York, 1980, Sec. 8.3.
- <sup>3</sup>Jerry B. Marion y Mark A. Heald, *Classical electromagnetic radiation*, 3a edición, Saunders, Forth Worth, TX, 1995, Sec. 9.3.
- <sup>4</sup>H. Gregory Schantz, "The flow of electromagnetic energy in decay of an electric dipole", *Am. J. Phys.* 63, 513-520, 1995.
- <sup>5</sup>Ver ref. 1, Sec. 2.2.3.
- <sup>6</sup>Ver ref. 2, p.p. 239-240.
- <sup>7</sup>J. Heras, "Generalized Biot-Savart and Coulomb laws with material sources and the ignored term in the electric field of the Hertz dipole", sometido a publicación en *Am. J. Phys.*
- <sup>8</sup>David J. Griffiths, "Dipoles at rest", *Am. J. Phys.* 60, 979-987, 1992.
- <sup>9</sup>J. David Jackson, *Classical electrodynamics*, 2a edición, John Wiley & Sons, EE.UU., 1962, p.p. 141 y 184.
- <sup>10</sup>David J. Griffiths, "Hiperfine splitting in ground state of hydrogen", *Am. J. Phys.* 50, 698-703, 1982.

#### IV EL DIPOLO MAGNÉTICO EN MOVIMIENTO NO RELATIVISTA

El problema de determinar los campos E y B de un dipolo en movimiento arbitrario que contiene momentos magnético (m) y eléctrico (p) es importante desde un punto de vista físico pues, muchos objetos en la naturaleza contienen momentos magnéticos y/o eléctricos. Este problema lo discutió Monaghan<sup>1</sup> por el método de los potenciales retardados obteniendo los campos electromagnéticos en la forma de Heaviside-Feynman. Recientemente, Heras<sup>2</sup> usando las fórmulas (13) y (14) de la Introducción obtuvo los campos de radiación de un dipolo en movimiento arbitrario en la forma de Liénard-Wiechert.

Los antecedentes de este problema se encuentran en los artículos de Ellis<sup>3,4</sup>, Ward<sup>5,6</sup> y Kolsrud y Leer<sup>7</sup>. Al discutir este problema, tanto Ellis como Ward necesitaron desarrollar métodos sofisticados para encontrar expresiones de los campos. Esto indica la complejidad del problema y explica porque se discutió hasta los años sesentas.

Con el fin de mostrar la utilidad de las Ecs. (2.21) y (2.22), en esta sección se les utiliza para calcular los campos eléctrico y magnético de un dipolo magnético puntual, con momento magnético constante y en movimiento no relativista. Se obtienen expresiones explícitas de los campos de dicho dipolo así como el vector de Poynting y la potencia total radiada asociada a los campos de radiación de este dipolo.

##### 4.1 Los campos del dipolo magnético en movimiento no relativista

Este dipolo está caracterizado por el siguiente vector de magnetización:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) , \quad (4.1)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético (constante) y  $\mathbf{r}(t)$  es la trayectoria del dipolo. Al calcular el vector de magnetización en el punto fuente  $\mathbf{x}'$  y el tiempo retardado  $t'$  se obtiene:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') = \mu \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) . \quad (4.2)$$

Después de realizar algunas operaciones vectoriales y tomando en cuenta

que sólo se tiene magnetización M, las Ecs. (2.21) y (2.22) se escriben como:

$$E(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint \delta(u) \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R^2} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \delta(u) \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{Rc} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \right\} \quad (4.3a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iint \delta(u) \left( \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{R^3} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \iint \delta(u) \left( \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{R^2 c} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \delta(u) \left( \frac{(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{Rc^2} \right) d^3 \mathbf{x}' dt' \right\} + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}(\mathbf{x}, t). \quad (4.3b)$$

Si se introducen las Ecs. (4.1) y (4.2) en las Ecs. (4.3), después de integrar respecto al volumen se obtiene:

$$E(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \right) \delta(u') dt' + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}(t')}{R(t')c} \right) \delta(u') dt' \right] \right\}, \quad (4.4a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R^3(t')} \right) \delta(u') dt' + \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R^2(t')c} \right) \delta(u') dt' \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \left( \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R(t')c^2} \right) \delta(u') dt' \right] \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)), \quad (4.4b)$$

donde  $R(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|$ ,  $\mathbf{n}(t') = (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'))/R(t')$  y  $u' = t' + R(t')/c - t$ .  
Empleando la fórmula<sup>8</sup>:

$$\int \delta [f(t') - t] g(t') dt' = \left. \frac{g(t')}{|df/dt'|} \right|_{f(t')=t}, \quad (4.5)$$

que sólo se tiene magnetización M, las Ecs. (2.21) y (2.22) se escriben como:

$$E(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \delta(u) \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{R^2} \right) d^3x' dt' + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \int \delta(u) \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \times \mathbf{n}}{Rc} \right) d^3x' dt' \right] \right\} \quad (4.3a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \delta(u) \left( \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{R^3} \right) d^3x' dt' \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \delta(u) \left( \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{R^2c} \right) d^3x' dt' \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \int \delta(u) \left( \frac{(\mathbf{M}(\mathbf{x}', t') \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{M}(\mathbf{x}', t')}{Rc^2} \right) d^3x' dt' \right] \right\} + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}(\mathbf{x}, t). \quad (4.3b)$$

Si se introducen las Ecs. (4.1) y (4.2) en las Ecs. (4.3), después de integrar respecto al volumen se obtiene:

$$E(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \right) \delta(u') dt' \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}(t')}{R(t')c} \right) \delta(u') dt' \right] \right\}, \quad (4.4a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R^3(t')} \right) \delta(u') dt' + \frac{d}{dt} \left[ \int \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R^2(t')c} \right) \delta(u') dt' \right] \right. \\ \left. + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \int \left( \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\mu}}{R(t')c^2} \right) \delta(u') dt' \right] \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)), \quad (4.4b)$$

donde  $R(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|$ ,  $\mathbf{n}(t') = (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'))/R(t')$  y  $u' = t' + R(t')/c - t$ .  
Empleando la fórmula<sup>8</sup>:

$$\int \delta(f(t') - t) g(t') dt' = \left. \frac{g(t')}{|df/dt'|} \right|_{f(t')=t}, \quad (4.5)$$

con  $f(t') = t' + R(t')/c$ ,  $df/dt' = 1 - n \cdot V(t')/c$ , la integración con respecto al tiempo en las Ecs. (4.4) da como resultado:

$$E(x, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mu \times \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{n}{KR^2} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{n}{KRc} \right] \right\}, \quad (4.6)$$

$$B(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3(\mu \cdot n)n - \mu}{KR^3} \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{3(\mu \cdot n)n - \mu}{KR^2c} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{(\mu \cdot n)n - \mu}{KRc^2} \right] \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 \mu \delta(x - r(t)), \quad (4.7)$$

donde el factor  $K = 1 - n \cdot V/c$  con  $V$  la velocidad del dipolo y los corchetes [...] significan que la cantidad encerrada está calculada en el tiempo retardado. Las Ecs. (4.6) y (4.7) son un caso particular de las expresiones de Heras<sup>2</sup>. Sin embargo, estas últimas expresiones no incluyen el término de contacto, el cual da el valor del campo dentro del dipolo en movimiento.

Una vez que se realizan las derivadas respecto de  $t$ , en las Ecs. (4.6) y (4.7), se considera el caso no relativista es decir,  $K = 1$ , se desprecian los términos cuadráticos en  $V$  y se substituye  $\beta = V/c$  y  $\dot{\beta}$  por  $a/c$ ; entonces los respectivos términos de  $E$  y  $B$  son:

a) Términos para  $E$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{n}{KR^2} \right] = \frac{3c(n \cdot \beta)n - c\beta}{R^3} + \frac{(n \cdot \dot{\beta})n}{R^2},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{n}{KRc} \right] = \frac{7(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})n + 2(n \cdot \dot{\beta})n - 3(n \cdot \dot{\beta})\beta - (\beta \cdot \dot{\beta})n - \dot{\beta}}{R^2} + \frac{(n \cdot \ddot{\beta})n + 3(n \cdot \dot{\beta})^2 n}{Rc}.$$

b) Términos para  $B$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{3(\mu \cdot n)n - \mu}{KR^2c} \right] = \frac{12(n \cdot \beta)(n \cdot \mu)n - 3(\beta \cdot \mu)n - 3(n \cdot \mu)\beta - 2(n \cdot \beta)\mu}{R^3} + \frac{3(n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})n - (n \cdot \dot{\beta})\mu}{R^2c},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{3(\mu \cdot n)n - \mu}{KR^2c} \right] &= \frac{10(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})(n \cdot \mu)n - 4(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})\mu + 3(n \cdot \dot{\beta})(n \cdot \mu)n}{R^2c} \\ &+ \frac{(\beta \cdot \dot{\beta})\mu - 3(n \cdot \dot{\beta})(\beta \cdot \mu)n - 3(n \cdot \dot{\beta})(n \cdot \mu)\beta}{R^2c} \\ &- \frac{(\beta \cdot \dot{\beta})(n \cdot \mu)n + (\dot{\beta} \cdot \mu)n + (n \cdot \mu)\dot{\beta} + (n \cdot \dot{\beta})\mu}{R^2c} \\ &+ \frac{3(n \cdot \beta)(n \cdot \mu)n - 3(n \cdot \beta)\mu + (n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})n - (n \cdot \dot{\beta})\mu}{Rc^2}, \end{aligned}$$

al substituir los resultados anteriores en las Ecs. (4.6) y (4.7), se obtienen las expresiones explícitas para los campos E y B del dipolo magnético en movimiento no relativista:

$$\begin{aligned} E = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{3c(n \cdot \beta)n - c\beta}{R^3} + \frac{7(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})n - 3(n \cdot \dot{\beta})\beta + 3(n \cdot \dot{\beta})n - (\beta \cdot \dot{\beta})n - \dot{\beta}}{R^2} \right] \times \mu \right. \\ \left. + \left[ \frac{3(n \cdot \dot{\beta})^2n + (n \cdot \ddot{\beta})n}{Rc} \right] \times \mu \right\}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{12(n \cdot \mu)(n \cdot \beta)n + 3(n \cdot \mu)n - \mu - 3(\beta \cdot \mu)n - 3(n \cdot \mu)\beta - 2(n \cdot \beta)\mu}{R^3} \right. \right. \\ \left. + \frac{10(n \cdot \mu)(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})n + 6(n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})n - 3(n \cdot \mu)(n \cdot \dot{\beta})\beta - 3(n \cdot \dot{\beta})(\beta \cdot \mu)n}{R^2c} \right. \\ \left. + \frac{(\beta \cdot \dot{\beta})\mu - 2(n \cdot \dot{\beta})\mu - 4(n \cdot \beta)(n \cdot \dot{\beta})\mu - (n \cdot \mu)(\beta \cdot \dot{\beta})n - (\dot{\beta} \cdot \mu)n - (n \cdot \mu)\dot{\beta}}{R^2c} \right] \\ \left. + (n) \times \left[ \frac{3(n \cdot \dot{\beta})^2n + (n \cdot \ddot{\beta})n}{Rc^2} \right] \times \mu \right\} + \frac{2}{3} \mu_0 \mu \delta(x - r(t)). \quad (4.9) \end{aligned}$$

De los resultados anteriores se puede observar que los términos de radiación de los campos ( $1/R$ ) eléctrico y magnético son perpendiculares, como era de esperarse. Además una novedad que se puede observar, es que el término intermedio ( $1/R^2$ ) usualmente asociado con la velocidad también incluye a la aceleración que es característica de los términos de radiación (o lejanos).

Al hacer  $\beta = 0$ , en las Ecs. (4.8) y (4.9), se recupera el caso estático de un dipolo magnético dado por las expresiones siguientes:

$$E = 0, \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mu \cdot n)n - \mu}{R^3} \right) + \frac{2}{3} \mu_0 \mu \delta(x), \quad (4.10)$$

#### 4.2 El vector de Poynting y la potencia radiada

Los campos de radiación<sup>9,10</sup> asociados con las Ecs. (4.8) y (4.9) son los términos que varían como  $1/R$ . Si se considera que  $\dot{\beta} = \text{constante}$  estos términos se reducen a:

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(n \cdot \dot{\beta})^2 n}{Rc} \right] \times \mu, \quad (4.11a)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3n \times (n \times \mu)(n \cdot \dot{\beta})^2}{Rc^2} \right]. \quad (4.11b)$$

La densidad de energía asociada a E y B se obtiene por el vector de Poynting, el cual está dado por:

$$S = \frac{1}{\mu_0} (E \times B). \quad (4.12)$$

Los campos de radiación en E y B son perpendiculares en las Ecs. (4.11) el vector de Poynting se reduce a:

$$S = \frac{1}{c\mu_0} |E|^2 n, \quad (4.13)$$

substituyendo el valor de  $|E|^2$  se obtiene la expresión:

$$S = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left( 9(\dot{n} \cdot \dot{\beta})^4 \frac{(\mu^2 - (n \cdot \mu)^2)}{R^2} \right) n. \quad (4.14)$$

La potencia radiada por unidad de ángulo sólido se define por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = S \cdot nR^2. \quad (4.15)$$

Al substituir el resultado de la Ec. (4.14) en la Ec. (4.15) se obtiene que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left( 9(\dot{n} \cdot \dot{\beta})^4 (\mu^2 - (n \cdot \mu)^2) \right), \quad (4.16)$$

tomando  $\mu$  paralelo a  $\dot{\beta}$  se tiene:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left( 9 \dot{\beta}^4 \mu^2 \cos^4 \theta \operatorname{Sen}^2 \theta \right). \quad (4.17)$$

Por lo tanto la potencia total radiada es:

$$P = \frac{9\mu_0 \dot{\beta}^4 \mu^2}{8\pi c^3} \int_0^\pi \cos^4 \theta \operatorname{Sen}^3 \theta \, d\theta = \frac{9\mu_0 \dot{\beta}^4 \mu^2}{8\pi c^3} \frac{4}{35} = \frac{9\mu_0}{70\pi c^3} \dot{\beta}^4 \mu^2, \quad (4.18)$$

o equivalentemente:

$$P = \frac{9\mu_0}{70\pi c^3} a^4 \mu^2. \quad (4.19)$$

Del resultado anterior, que se puede llamar fórmula de Larmor para un dipolo con momento magnético constante y aceleración constante no relativista, se concluye que la potencia es proporcional a la cuarta potencia de la aceleración y al cuadrado del momento.

Se puede comparar la Ec. (4.18) con la correspondiente fórmula de Larmor de una carga con aceleración no relativista, la cual está dada por:

$$P_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} e^2 \dot{\beta}^2, \quad (4.20)$$

por otra parte el electrón tiene un momento magnético intrínseco, debido a su espín, constante en magnitud el cual está dado por:

$$\mu = \frac{eh}{2m_e}$$

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

donde  $m_e$  es la masa del electrón,  $h = h/2\pi$  con  $h$  la constante de Planck y  $e$  la carga del electrón. Al sustituir la Ec. (4.21) en la Ec. (4.18) se obtiene:

$$P = \frac{9\mu_0}{70\pi c^3} \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e^2} \dot{\beta}^4, \quad (4.22)$$

comparando la Ec. (4.20) con la Ec. (4.22) y suponiendo que  $\dot{\beta} = 10^{-7}$  se tiene:

$$\frac{P_e}{P} = \frac{560 c^4 m_e^2}{108 \hbar^2 \dot{\beta}^2} \approx 3 \times 10^{56} \quad (4.23)$$

con este resultado se puede concluir que la potencia radiada del momento magnético intrínseco del electrón es mucho menor que la debida a su carga eléctrica.

La potencia radiada por el electrón en movimiento uniformemente acelerado (aceleradores lineales) no relativista es completamente despreciable a menos que la ganancia de energía sea del orden de  $8.19 \times 10^{-14}$  J. Sin embargo, para aceleradores circulares (sincrotrón o betatrón) la potencia radiada del electrón cambia drásticamente comparada con los aceleradores lineales debido al cambio en la dirección de la aceleración<sup>11</sup>. De manera análoga y, después de haber comparado las potencias debidas a un electrón y a su momento magnético, en movimiento uniformemente acelerado, se concluye que la potencia radiada debida al momento magnético del electrón se puede despreciar.

Por otra parte, el valor de la potencia en la Ec.(4.18) o (4.19) depende de la magnitud del momento magnético del dipolo y de magnitud de la aceleración. Por ejemplo, Barger y Olsson<sup>12</sup> mediante una serie de argumentos en base al pulsar detectado en la nebulosa del Cangrejo, encuentran que la potencia radiada de la nebulosa, es del orden de  $10^{31}$ W con lo cual determinan que el pulsar tiene un momento magnético de  $3.4 \times 10^{27}$  A m<sup>2</sup>, el cual es muy grande así que la potencia para este caso no será pequeña como en el caso del electrón.

Referencia y notas de la sección IV

- <sup>1</sup>J.J. Monaghan, "The Heaviside-Feynman expression for the fields of an accelerated dipole", J. Phys. A 1, 112-117, 1968.
- <sup>2</sup>J. Heras, "Radiation fields of a dipole in arbitrary motion", Am. J. Phys. 62 1109-1115, 1994.
- <sup>3</sup>J.R. Ellis, "The field of an arbitrary moving dipole", Proc. Cambridge Philos. Soc. 59, 759-774, 1963.
- <sup>4</sup>J.R. Ellis, "Electromagnetic fields of moving dipoles and multipoles", J. Math. Phys. 7, 547-553, 1965.
- <sup>5</sup>G.N. Ward, "On the integration of Maxwell equations, and charge and dipole fields", Proc. R. Soc. London, ser A 279, 562-571, 1964.
- <sup>6</sup>G.N. Ward, "The electromagnetic fields of moving dipoles", Proc. Cambridge Philos. Soc 61, 1185-1197, 1965.
- <sup>7</sup>Kolsrud y Leer, "Radiation from moving dipole", Physica Norvegica 2, 181-188 1967.
- <sup>8</sup>J. David Jackson, *Classical electrodynamics*, 2a edición, John Wiley & Sons, EE.UU., 1962, p.p 268-272.
- <sup>9</sup>F. Hartemann y N. Luhmann, "Classical electrodynamical derivation of the radiation damping force", Phys. Rev. 74, 1107-1110, 1995.
- <sup>10</sup>J. Heras, "Duality transformations and the Liénard-Wiechert fields of a dual-charged particle", Am. J. Phys. 62, 525-531, 1994.
- <sup>11</sup>Ver ref. 8, p.p 645-656.

## V CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha obtenido una nueva representación integral del campo electromagnético [Ecs. (16) y (17)] con fuentes materiales (es decir con los vectores de polarización  $P$  y de magnetización  $M$  como fuentes de los campos) integrando directamente las ecuaciones de Maxwell [Ecs. (15)] por el teorema de Helmholtz para campos vectoriales dependientes del tiempo [Ec. (1.1)].

Esta nueva representación del campo electromagnético no involucra derivadas espaciales (como es el caso del formalismo de los vectores de Hertz) sino sólo temporales, lo cual es ventajoso para aplicaciones. La nueva representación tiene unos términos adicionales, los cuales son indispensables para que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell [Ecs. (15)], aún para el caso en que no dependan del tiempo (estático).

Otro punto importante de la nueva representación de las leyes generalizadas, es que separan explícitamente los campos cercanos ( $1/R^3$ ), intermedios ( $1/R^2$ ) y lejanos ( $1/R$ ).

La nueva representación se aplicó en el cálculo de los campos eléctrico y magnético producidos por el dipolo de Hertz, el dipolo magnético oscilante y por un dipolo magnético en movimiento no relativista (con momento magnético constante).

En el caso del dipolo de Hertz se ha obtenido el campo  $E$  [Ec. (3.7)] ya conocido en la literatura más un término adicional [Ec. (3.9)], el cual representa el valor del campo eléctrico en el dipolo. Para el dipolo magnético oscilante se ha obtenido el campo  $B$  [Ec. (3.15)] mencionado en la literatura más un término adicional [Ec. (3.16)] que representa el valor del campo magnético en el dipolo. En ambos casos se recuperan las expresiones para el caso estático [Ecs. (3.10) y (3.17)].

Para el caso del dipolo magnético en movimiento no relativista se determinaron, de forma explícita, los campos  $E$  y  $B$  [Ecs. (4.8) y (4.9)]. La expresión para  $B$  contiene un término adicional que, de forma análoga a los dipolos oscilantes, representa el campo magnético en el dipolo.

En este último caso, se calculó el vector de Poynting [Ec. (4.14)] y se obtuvo la potencia total radiada [Ec. (4.18)] para los campos de radiación o

lejanos ( $1/R$ ), cuando el momento magnético ( $\mu$ ) sea paralelo a la aceleración ( $\dot{\beta}$ ) y ésta sea constante. Se encuentra que la potencia total radiada es proporcional a la aceleración a la cuarta y al cuadrado del momento. Esta potencia se comparó con la potencia de una carga en movimiento uniformemente acelerado y se obtuvo que la potencia del dipolo magnético es mucho menor a la de la carga.

La nueva representación integral del campo electromagnético obtenida en este trabajo es de gran utilidad para aplicaciones ya que permite encontrar expresiones explícitas en los campos de distribuciones puntuales con polarización y magnetización de una manera relativamente simple pues, sólo contiene derivadas temporales, que a pesar de ser largas son más fáciles de usar que las derivadas espaciales, las cuales se presentan al tratar los problemas por el método de los potenciales retardados o el formalismo de los vectores de Hertz.

## APÉNDICE

### Función de Green<sup>1,2</sup>

La función de Green es crucial para resolver problemas de electrodinámica, donde los campos E y B satisfacen una ecuación del tipo:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(x,t) \quad (\text{A1})$$

donde  $f(x,t)$  es una fuente de distribución conocida y  $c$  la velocidad de la luz. Para resolver la Ec. (A1) se usa el método de la función de Green. Para ello se toma la transformada de Fourier de  $\Psi(x,t)$  y  $f(x,t)$ :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{A2.1})$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{A2.2})$$

con transformada inversa:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{i\omega t} dt, \quad (\text{A3.1})$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{A3.2})$$

Al introducir (A2) en (A1) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi + F \right) e^{i\omega t} d\omega = 0, \quad (\text{A4})$$

la cual se satisface para todos los valores de  $t$  siempre que el término dentro de los paréntesis se anule. Por lo tanto, las componentes espaciales de la

transformada de Fourier  $\psi(\mathbf{x})$  satisfacen una ecuación de onda de Helmholtz inhomogénea:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{x}) = -4\pi F(\mathbf{x}), \quad (\text{A5})$$

donde  $k = \omega/c$  es el número de onda asociado con la frecuencia  $\omega$ . La solución a la Ec. (A5) se simplifica tomando una función auxiliar  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  que satisface:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (\text{A6})$$

donde  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  es la función de Green. Si no hay fronteras (es decir en el espacio libre)  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  debe tener simetría esférica en  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , ya que la forma del operador laplaciano en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{Sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \text{Sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (\text{A7})$$

y como  $G$  sólo depende de  $R$ , resulta que  $G(R)$  satisface:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G(R)) + k^2 G(R) = -4\pi\delta(R), \quad (\text{A8})$$

en todos lados menos en  $R = 0$ ,  $R G(R)$  satisface la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2}{dR^2} (R G(R)) + k^2 R G(R) = 0, \quad (\text{A9})$$

la cual tiene como solución:

$$G^\pm(R) = \frac{A}{R} e^{\pm i k R}, \quad (\text{A10})$$

donde  $A$  depende de las condiciones de frontera en el tiempo que especifique el problema físico. Intuitivamente, si la fuente está quieta en  $t = 0$  y después empieza a moverse la solución apropiada que se debe escoger en la Ec. (A10) es con el signo positivo, el cual corresponde a ondas radiando hacia fuera de la fuente. La solución con signo negativo describe ondas entrantes. Para entender con más detalle esto se necesita la correspondiente función de

Green dependiente del tiempo. Se integra la Ec. (A6) sobre una pequeña esfera de radio  $a$ , centrada en  $R = 0$ . Conforme  $R \rightarrow 0$ ,  $G \rightarrow A/R$  y  $\nabla^2 G \rightarrow -4\pi A\delta(R)$ . Al substituir estos resultados e integrar sobre el volumen en la Ec. (A6) se tiene que:

$$\int \left( \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) d^3 \mathbf{x}' = -4\pi \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (A11)$$

el segundo miembro del lado izquierdo de la Ec. (A11) se anula cuando el radio  $a \rightarrow 0$ . Substituyendo que  $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , y tomando el límite  $a \rightarrow 0$  la Ec. (A11) se escribe como:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int \left( -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') A \right) d^3 \mathbf{x}' = \lim_{a \rightarrow 0} \left( -4\pi \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \right), \quad (A12)$$

de la Ec. (A12) se concluye que  $A = 1$ . Por lo tanto:

$$G^\pm(R) = \frac{1}{R} e^{\pm i k R}, \quad (A13)$$

la cual es la función de Green en el caso estático.

Para la solución dependiente del tiempo,  $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, t')$  satisface:

$$\left( \nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, t') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (A14)$$

En otras palabras  $G$  puede interpretarse como el potencial en  $(\mathbf{x}, t)$  debido a una carga puntual unitaria localizada en  $\mathbf{x}'$  al tiempo  $t'$ . Al aplicar las transformadas inversas de Fourier [Ecs. (A3) en la Ec. (A14)] se tiene que la fuente es  $-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')e^{i\omega t}$  y por consiguiente la solución es  $G^\pm(R)e^{i\omega t}$ , con  $G^\pm(R)$  dada por la Ec. (A13). De las Ec. (A2) la función de Green dependiente del tiempo es:

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i k R}}{R} e^{i\omega \tau} d\omega, \quad (A15)$$

donde  $\tau = t - t'$ . De esta manera, la función de Green en el espacio libre es una función de la distancia relativa  $R$  y del tiempo relativo  $\tau$  entre la fuente y el punto de observación. Entonces para un medio no dispersivo donde  $k = \omega/c$ , la integral de la Ec. (A13) es una función delta y por lo tanto la función de Green es explícitamente:

$$G^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, t') = \frac{\delta\left(t' - t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{A16})$$

Matemáticamente, tanto  $G^+(R, t)$  como  $G^-(R, t)$  son soluciones válidas. La función de Green  $G^+$  se llama función de Green retardada pues tiene la condición (física) de causalidad asociada a la distribución de onda. El argumento de la función delta muestra que un efecto observado en el punto  $\mathbf{x}$  a un tiempo  $t$  es causado por la acción de una fuente localizada a una distancia  $R$  lejos y a un tiempo anterior (o tiempo retardado),  $t' = t - R/c$ . La diferencia en el tiempo  $R/c$  es el tiempo de propagación de la distribución de un punto a otro. De la misma forma  $G^-$  se llama función de Green avanzada.

## REFERENCIAS

- <sup>1</sup>J.D Jackson, *Classical electrodynamics*, 2a edición, John Wiley & Sons, inc., EE.UU., 1975, Sec 6.6.
- <sup>2</sup>J. Vanderlinde, *Classical electromagnetic theory*, John Wiley & Sons, inc., EE.UU., 1975, sec. 10.1, 10.2.

