

01190

2  
28

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**PROCESOS DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR EN MEDIOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS**

**FERNANDO ASCENCIO CENDEJAS**

**TESIS DOCTORAL**

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**DE LA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE**

**DOCTOR EN INGENIERIA**

**CIUDAD UNIVERSITARIA**

**Noviembre, 1996**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CONTENIDO</b>  | <b>2</b>  |
| <b>Contenido</b>  |           |
| <b>1 RESUMEN</b>  | <b>7</b>  |
| <b>2 INTRODUCCION</b>   | <b>8</b>  |
| <b>3 TEORIA BASICA</b>  | <b>10</b> |
| 3.1 Ecuaciones de Conservación de la Energía . . . . .              | 12        |
| <b>4 EQUILIBRIO TERMICO</b>   | <b>16</b> |
| 4.1 Formulación Completa de Parámetros Agrupados . . . . .          | 19        |
| 4.1.1 Formulación Lineal . . . . .                                  | 19        |
| 4.1.2 Formulación Radial . . . . .                                  | 22        |
| 4.2 Formulación Adimensional . . . . .                              | 23        |
| 4.2.1 Definición de Variables Adimensionales . . . . .              | 23        |
| 4.2.2 Discusión sobre el número de Peclet . . . . .                 | 26        |
| 4.3 Velocidad del Frente Térmico en un Medio Poroso . . . . .       | 27        |
| 4.4 Modelo de Lauwerier . . . . .                                   | 31        |
| 4.5 Modelo de Avdonin . . . . .                                     | 34        |
| 4.6 Modelo de Rubinshtein . . . . .                                 | 39        |
| 4.7 Eficiencia Térmica . . . . .                                    | 40        |
| <b>5 NO EQUILIBRIO TERMICO</b>                                      | <b>44</b> |
| 5.1 El Término de Acople $q^*(t, \vec{x}_f)$ . . . . .              | 44        |
| 5.1.1 Función de Transferencia de Calor Pseudo-permanente . . . . . | 45        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>CONTENIDO</b>  | <b>3</b>  |
| 5.1.2 Función de Transferencia de Calor Transitoria (Esferas) .   | 47        |
| 5.1.3 Distribución de la temperatura interna en los bloques<br>esféricos . . . . .                                  | 48        |
| 5.1.4 Longitud Característica $l$ de una Esfera . . . . .   | 50        |
| 5.2 Solución sin Transferencia de Calor de los Estratos Adyacentes .  | 53        |
| 5.2.1 Caso en que ocurre Intercambio de Calor en Régimen<br>Pseudo-permanente entre la matriz y el fluido . . . . . | 54        |
| 5.2.2 Caso en que Ocorre Intercambio de Calor Transitorio en-<br>tre la Matriz y el Fluido (Esferas) . . . . .      | 57        |
| 5.3 Solución con Transferencia de Calor de los Estratos Adyacentes .  | 59        |
| 5.3.1 Formulación Adimensional . . . . .  | 61        |
| 5.3.2 Solución . . . . .  | 61        |
| <br>  |           |
| <b>6 FRENTE TERMICO</b>   | <b>67</b> |
| 6.1 Resultados . . . . .  | 67        |
| 6.2 Discusión . . . . .   | 76        |
| <br>  |           |
| <b>7 FRACCION DEL CALOR TRANSFERIDO <math>W^*</math></b>  | <b>81</b> |
| <br>  |           |
| <b>8 EJEMPLO ILUSTRATIVO</b>  | <b>84</b> |
| 8.1 Comentarios . . . . .   | 86        |
| <br>  |           |
| <b>9 CONCLUSIONES</b>   | <b>89</b> |
| 9.1 Síntesis de Resultados . . . . .  | 89        |
| <br>  |           |
| <b>10 NOMENCLATURA</b>  | <b>92</b> |

*Pleni sunt coeli  
et terra  
gloria eius  
Hossana in excelsis.*

A mi amadísima hija Cristina Elidé.

A mi madre, Argelia Cendejas, mujer valerosa. A mis hermanos Maribel, Argelia y Manuel. A María Anguiano. A todos mis sobrinos.

A la memoria de Manuel Ascencio Padilla, Sergio Ascencio, Rafael Echeverría y Edgar Elizondo.

A Luis Miguel y Licha Rionda, por su amistad a lo largo de los años, y en agradecimiento de tantas cosas más.

A los doctores Jesús Rivera Rodríguez, Héber Cinco Ley, Fernando Samaniego Verduzco y Fernando Rodríguez de la Garza, quienes son, en la palabra más noble de toda el habla humana, mis maestros.

A mis amigos geotérmicos Mario César Suárez, Marco Antonio Torres, Pedro Sánchez Upton, Catarino Cadenas y José Luis Sanabria. Con quienes juntos aprendimos que "... el ingeniero en yacimientos es realmente un artista que trata de comportarse como un científico en un trabajo donde realmente se necesita un profeta". A Victor Arellano, Alfonso García y Eduardo Iglesias del Instituto de Investigaciones Eléctricas. A mi amigo Nemecio Tafolla Manzo, Ex-Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana.

A Milagros (*sic*) Ross, con mucha gratitud.

A la Universidad Nacional Autónoma de México. A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Por último, especialmente, a mi asesor doctoral Dr. Jesús Rivera Rodríguez en agradecimiento por su apoyo invaluable y admiración por su elevada calidad humana.

"El romper de una ola no puede explicar todo el mar"

Vladimir Nabokov

"¿Quién sabe realmente?"

Rigveda

## 1 RESUMEN

Se presenta el estudio del proceso de transferencia de calor entre una fuente de calor (roca del yacimiento), y un fluido circundante a menor temperatura, que se genera cuando en un yacimiento geotérmico naturalmente fracturado que se encuentra a una condición inicial de temperatura uniforme, se inyecta agua a una temperatura inferior a la correspondiente al sistema. Se plantea el estudio básico del proceso, partiendo de los balances de conservación de masa y energía calorífica, modelándose el medio fracturado mediante un sistema ideal compuesto por dos medios homogéneos interconectados, uno de ellos corresponde al sistema de fracturas, a través de las cuales viaja el fluido, mientras que el otro está compuesto por esferas que representan la matriz rocosa del medio, las cuales actúan como una fuente de calor distribuida uniformemente en el medio de las fracturas. Se presentan soluciones a este problema considerando tanto una situación en que ocurre un equilibrio térmico instantáneo entre el fluido inyectado y la roca del yacimiento, como también el caso en el que la transferencia de calor ocurre bajo condiciones de desequilibrio térmico; en este último caso se discuten soluciones para intercambios entre el fluido y la roca del yacimiento, cuando dicho intercambio ocurre bajo condiciones de régimen pseudo-estacionario y transitorio. Asimismo, estas soluciones contemplan la transferencia de calor proveniente de los estratos impermeables adyacentes. Se presentan curvas tipo de avance del frente térmico —el lugar geométrico de un punto donde la temperatura ha disminuido cierta fracción de la diferencia entre la temperatura del yacimiento y la temperatura de inyección— y se realiza un estudio de sensibilidad sobre los principales parámetros que lo influyen ( $\omega_f, \lambda_D, Pe, Bi, \phi$ ). La teoría propuesta es también aplicable en el análisis de problemas de procesos de recuperación térmica de hidrocarburos efectuando las adecuaciones necesarias en la definición de la temperatura adimensional.

## 2 INTRODUCCION

La inyección subterránea de los fluidos de desecho es una de las operaciones más comunes en la mayoría de los proyectos geotermoeléctricos del mundo [30, 46, 16, 52, 53]. El principal objetivo es la disposición de los grandes volúmenes de agua separada de los pozos, la cual usualmente contiene silicatos y minerales tóxicos como arsénico, boro y mercurio. Algunos de los efectos positivos de inyectar fluidos se listan a continuación [31, 30, 32, 54, 43]:

- Disminuye los riesgos de impacto ambiental que normalmente crea la deposición de los fluidos en la superficie.
- Provee un medio de soporte a la presión en el yacimiento para mantener la producción en un nivel determinado, por un periodo dado de tiempo.
- Ayuda a realizar un barrido del calor residual en la matriz de la roca, incrementado el porcentaje de calor, inicialmente *in situ* que se recupera del yacimiento.
- Previene el asentamiento superficial del terreno que sobreyace al yacimiento.

En los campos geotérmicos mexicanos de Los Azufres y Cerro Prieto la inyección de los fluidos de desecho ha sido una operación común, el principal objetivo ha sido el control de los sólidos contaminantes asociados a la salmuera geotérmica. En los Geysers la inyección ha sido usada tanto para mantener la presión del yacimiento como para mejorar la recuperación del calor de la matriz de roca.

A pesar de contar con ciertas evidencias positivas, los efectos de la inyección subterránea de los fluidos de desecho no han sido siempre benéficos en el funcionamiento de un yacimiento; en efecto, varias experiencias de campo han mostrado que el agua inyectada con frecuencia se desplaza a través de las fracturas hacia zonas productoras en tiempos relativamente muy cortos. La rápida migración del agua inyectada es indeseable porque ocasiona el enfriamiento de los fluidos de producción.

Un yacimiento fracturado constituye un sistema muy complejo, ya que comprende tanto macro como minifracturas, que hacen que la matriz rocosa pierda continuidad, existiendo, además la situación de que no todas las fracturas están



interconectadas, y algunas pudieran estar selladas por procesos de mineralización. Todo esto ha ocasionado que para tratar matemáticamente el problema del transporte de fluidos y calor a través de dichos medios sea necesario idealizarlos, representándolos mediante dos medios homogéneos interconectados, de geometrías regulares (Fig. 1), tales como un sistema de estratos paralelos [33], donde la matriz y las fracturas se alternan y la representación de la matriz mediante figuras geométricas regulares (cubos, paralelepípedos o esferas) [21, 40, 2]. Resultados de diversas investigaciones fundamentales relacionadas con el movimiento del agua fría (frente térmico) en yacimientos geotérmicos fracturados han sido reportados en la literatura [12, 14, 13, 11, 10, 28, 27].

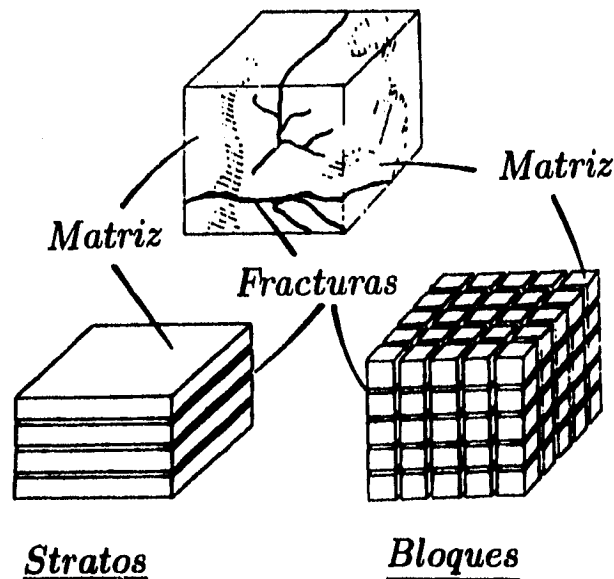


Fig. 1: Representación de un yacimiento naturalmente fracturado, Cinco-Ley y Samaniego [1985] [18].

### 3 TEORIA BASICA

Las principales simplificaciones consideradas en las descripciones matemáticas del presente trabajo se listan a continuación:

- El movimiento del fluido se da únicamente en la red de fracturas.
- Las propiedades térmicas del fluido inyectado se consideran idénticas a las del fluido que inicialmente satura el medio poroso fracturado; además, ambos fluidos se consideran incompresibles.
- El pozo se considera como una fuente lineal de fluido incompresible si la geometría de flujo en el medio permeable es radial; y como una fuente planar para el caso en que la geometría sea de tipo lineal.
- Pozo totalmente penetrante en un medio fracturado de espesor  $H$ .
- Cada medio, la matriz de roca y las fracturas, se consideran homogéneos e isotrópicos; y que se extienden infinitamente en la dirección horizontal.
- Las propiedades termofísicas del fluido y de la matriz de roca se consideran constantes.
- Los estratos sub y suprayacentes se consideran impermeables, con idénticas propiedades físicas y térmicas.
- Inicialmente, a  $t < 0$ , la temperatura en cualquier parte del sistema es uniforme e igual a  $T_0$  (matriz de roca, fluido y los estratos impermeables sub y suprayacentes); en  $r = 0$  y  $t \geq 0$ , la temperatura de inyección  $T_i$  y el ritmo de inyección  $q_i$  se mantienen constantes.
- No se presentan cambios de fase durante el proceso de inyección.
- Se desprecian los efectos gravitacionales.

La Fig. 2 muestra el modelo idealizado del sistema físico en estudio. Asimismo, se ha considerado que el estrato permeable fracturado está acotado entre los límites  $-\infty < x, y, < \infty$  y  $-H < z < 0$ ; el estrato impermeable suprayacente entre los límites  $0 < z < \infty$ ;  $-\infty < x, y < \infty$ ; y el estrato impermeable subyacente entre los límites  $-\infty < z < -H$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ .

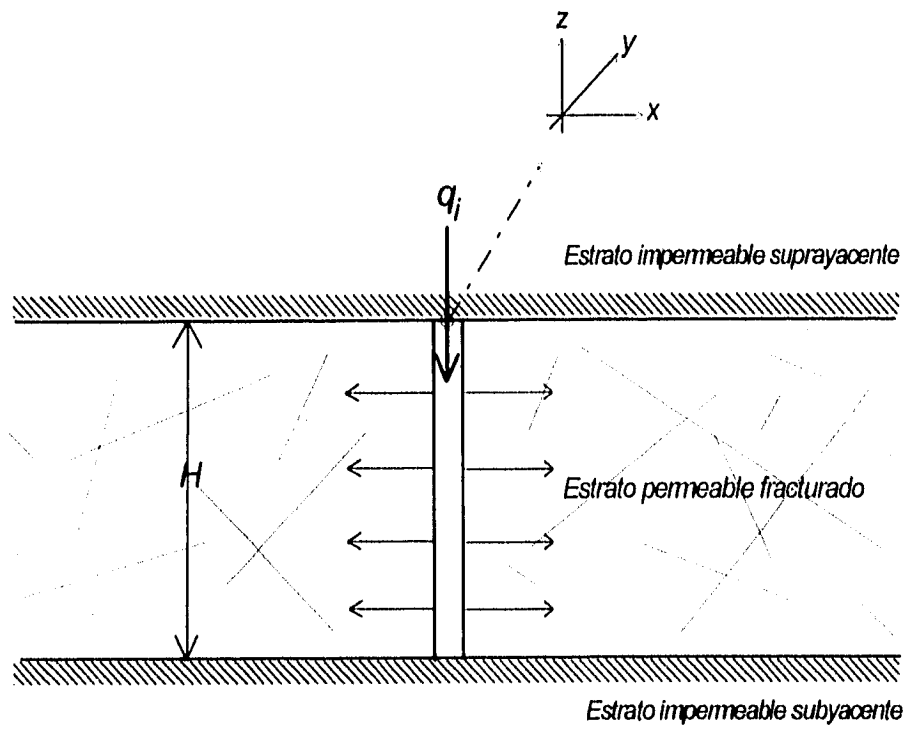


Fig. 2: Modelo idealizado del sistema físico.

### 3.1 Ecuaciones de Conservación de la Energía

Desde un punto de vista físico en un medio naturalmente fracturado el movimiento del fluido suele ocurrir principalmente a través de la red de fracturas y debido principalmente a que los bloques de roca son de dimensiones relativamente grandes no es adecuado considerar que se presente el equilibrio térmico instantáneo entre el fluido inyectado y la matriz rocosa. Por tal motivo, es necesario plantear independientemente las ecuaciones de conservación de la energía tanto para el fluido como para la matriz rocosa (esqueleto). Entre estos dos medios se presenta un término de acople  $q^*(t, \vec{x}_f)$  que representa el ritmo de intercambio de calor entre la matriz rocosa y las fracturas. Como consecuencia de lo anterior, en cada punto del medio se tienen dos temperaturas, a saber: (1) la temperatura promedio del fluido en la fractura  $T_f(t, \vec{x}_f)$ ; y (2) la temperatura promedio de la matriz rocosa  $T_r(t, \vec{x}_f)$ . Esta conceptualización es similar a la utilizada por la teoría de la *Doble Porosidad* [21, 40, 58, 57, 7, 8, 60] orientada a explicar el comportamiento del flujo de un fluido en medios naturalmente fracturados; en este caso se considera que los bloques de roca actúan como una fuente de fluido distribuida uniformemente en el medio de las fracturas.

a). *Ecuación de conservación de la energía para el fluido.* La ecuación diferencial parcial que describe el principio de la conservación de la energía para un fluido incompresible que se desplaza en un medio poroso naturalmente fracturado, bajo condiciones no isotérmicas y transitorias es ([15, 23, 24]):

$$\phi \rho_f c_f \frac{\partial T_f(t, \vec{x}_f)}{\partial t} = \phi \kappa_f \nabla^2 T_f(t, \vec{x}_f) - \rho_f c_f \phi \vec{v} \cdot \nabla T_f(t, \vec{x}_f) + q^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano,  $\nabla T_f$  es el gradiente de  $T_f$  y " $\cdot$ " denota el producto escalar.

En la ec. (1),  $t$  es el tiempo,  $\vec{x}_f$  es el vector de posición de un punto en el medio fracturado,  $\vec{v}$  es el vector de velocidad microscópica del fluido,  $\phi$  es la porosidad total de la fractura (la relación del volumen ocupado por las fracturas al volumen total del medio);  $\rho_f$ ,  $k_f$  y  $c_f$  son la densidad, conductividad térmica y calor específico del fluido, respectivamente. La temperatura  $T_f(t, \vec{x}_f)$  representa la temperatura del fluido en las fracturas, promediada en un elemento de volumen representativo (EVR) lo suficientemente grande. El medio fracturado se supone

que ocupa todo el espacio físico recorrido por la variable  $\vec{x}_f$ .

El término del lado izquierdo de la ecuación (1) representa la rapidez de acumulación de energía en el fluido; el primero y segundo términos del lado derecho representan la rapidez de transferencia de energía por conducción y convección, respectivamente. El término  $q^*(t, \vec{x}_f)$ , como se ha señalado, es el ritmo de intercambio de calor entre la matriz de roca y el fluido por unidad de volumen total.

La ecuación de la energía (1) considera que la matriz de roca es rígida (no existe fluidización en el medio poroso) y la energía asociada a la disipación viscosa es pequeña y despreciable. Nótese a su vez que (1) considera que el medio es isotrópico.

b). *Ecuación de conservación de la energía para la matriz rocosa.* La ecuación de la energía para la matriz de roca (esqueleto) está dada por la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$(1-\phi)\rho_r c_r \frac{\partial T_r(t, \vec{x}_f)}{\partial t} = (1-\phi)k_r \nabla^2 T_r(t, \vec{x}_f) - q^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\rho_r$ ,  $c_r$  y  $k_r$  son la densidad, calor específico y conductividad térmica de la roca, respectivamente.

De acuerdo a las hipótesis establecidas anteriormente, las condiciones iniciales y de frontera para las ecs. (1) y (2) son:

- Condiciones iniciales:

$$T_f = T_r = T_0 \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t = 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Condición de frontera interna:

$$T_f = T_r = T_i \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

- Condiciones de frontera externas:

$$T_f, T_r \rightarrow T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

c). Ecuación de conservación de energía para los estratos impermeables. Por otra parte, para los estratos impermeables supra y subyacentes las ecuaciones de conservación de la energía son:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 T_s \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 T_s \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -\infty < z < -H, \\ t > 0. \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\rho_s, c_s$  y  $\kappa_s$  son la densidad, calor específico y conductividad térmica de los estratos impermeables supra y subyacentes, respectivamente. Obsérvense los dominios de acción de estas ecuaciones.

Las condiciones iniciales y de frontera para las ecs. (6) y (7) son:

- Condiciones iniciales:

$$T_s = T_0 \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ -\infty < z < -H, \\ t = 0. \end{cases} \quad (8)$$

- Condiciones de frontera interna:

$$T_s = \text{Finita} \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ 0 < z < \infty, \\ -\infty < z < -H, \\ t > 0. \end{cases} \quad (9)$$

- Condiciones de frontera externas:

$$T_i = T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Aparte de estas condiciones, en los contactos del estrato permeable con los estratos adyacentes —en  $z = 0$  y  $z = -H$ , y en el dominio  $-\infty < x, y < \infty$ — se debe de garantizar las continuidades de la temperatura y del flujo de calor.

El campo de velocidades se obtiene de la ecuación de continuidad; para un fluido incompresible o estacionario ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ) expresa:

$$\nabla \cdot \phi \vec{v} = 0 \quad (11)$$

Si el movimiento del fluido en el medio permeable obedece a una geometría de flujo radial, la ecuación de continuidad para el fluido incompresible o estacionario es:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\phi v) = 0 \quad (12)$$

donde  $v$  es la magnitud del vector de velocidad microscópica  $\vec{v}$ . La solución de la ec. (12) es:

$$r\phi v = \text{const.} = \frac{q_i}{2\pi H} \quad (13)$$

Si el movimiento del fluido en el medio obedece a una geometría de flujo de tipo lineal, por ejemplo, el flujo a través de una fractura, la velocidad con la cual viaja el fluido es constante.

En la tecnología de la inyección en campos geotérmicos a la velocidad microscópica  $v$  también se le conoce como "velocidad del frente químico", es decir, la rapidez con la cual avanza un agua de cierta composición química en un medio poroso. La relación que existe entre la velocidad microscópica y la velocidad macroscópica (o de Darcy),  $V$ , es:

$$V = \phi v \quad (14)$$

## 4 EQUILIBRIO TERMICO

Un medio poroso puede describirse como un material sólido que contiene espacios vacíos (poros) distribuidos al azar; este tipo de porosidad se encuentra frecuentemente en formaciones sedimentarias, tales como arenas y areniscas. Algunos yacimientos geotérmicos se ubican en este tipo de medios (Valle Imperial, California; Cerro Prieto, México) aunque muy fracturados, mientras que la mayoría de los yacimientos geotérmicos de alta temperatura se encuentran en rocas ígneas naturalmente fracturadas, con escasa o nula permeabilidad en la matriz.

En un medio poroso, el fluido tiene un área efectiva de contacto muy grande con la parte sólida de la roca y el contacto térmico puede considerarse como eficiente, lo que favorece el equilibrio térmico entre la roca y los fluidos que la saturan; por ejemplo, se ha estimado que un grano de roca con un diámetro de un milímetro alcanza el equilibrio térmico con el fluido circunvecino en menos de un segundo [10]. Por tanto, para las velocidades con que suele ocurrir el movimiento de un fluido en este medio es razonable considerar que para todos los propósitos prácticos, el fluido y la roca tienen la misma temperatura en cualquier punto del espacio.

Sumando las ecuaciones de la energía para el fluido (1) y la matriz de roca (2) con el propósito de eliminar el término  $q^*$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$(1-\phi)\rho_r c_r \frac{\partial T_r}{\partial t} + \phi \rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = (1-\phi)\kappa_r \nabla^2 T_r + \phi \kappa_f \nabla^2 T_f - \rho_f c_f \phi \vec{v} \cdot \nabla T_f \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (15)$$

De acuerdo a la suposición de equilibrio térmico instantáneo, se tiene que  $T_r = T_f = T$ , luego la anterior ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\kappa} \nabla^2 T - \rho_f c_f \phi \vec{v} \cdot \nabla T \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\bar{\kappa}$  y  $\bar{\rho c}$  son la conductividad térmica y la capacidad calorífica del medio poroso saturado, respectivamente; son definidas por las siguientes relaciones:



$$\bar{\rho}c = \phi\rho_f c_f + (1 - \phi)\rho_r c_r \quad (17)$$

$$\bar{\kappa} = (1 - \phi)\kappa_r + \phi\kappa_f \quad (18)$$

La validez de la ecuación (18) fue comprobada experimentalmente por *Hadidi et al.* [1956][29].

Es posible modificar el dominio en el sentido vertical, ya que se supone que los estratos sub y suprayacentes poseen idénticas propiedades, y por simetría, la ecuación (16) puede escribirse como:

$$\bar{\rho}c \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\kappa} \nabla^2 T - \rho_f c_f \phi \vec{v} \cdot \nabla T \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -\frac{1}{2}H \leq z \leq 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Mientras que ahora para el estrato impermeable se tiene:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 T_s \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Teniéndose ahora en  $z = -H/2$  la siguiente condición:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-\frac{H}{2}} = 0 \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Es decir, en  $z = -H/2$  el sistema tiene una frontera adiabática.

Las demás condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones (19) y (20) son:

• Condiciones iniciales:

$$T = T_s = T_0 \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ -\frac{1}{2}H \leq z \leq 0, \\ t = 0. \end{cases} \quad (22)$$

- Condiciones de frontera interna:

$$T = T_i \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (23)$$

$$T_s = \text{Finita} \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (24)$$

- Condiciones de frontera externas:

$$T = T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (25)$$

$$T_s = T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (26)$$

- Las restricciones en el contacto localizado en  $z = 0$  son:

$$T|_{z=0} = T_s|_{z=0} \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (27)$$

$$\bar{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \begin{cases} -\infty < x, y < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Es decir, existe continuidad de la temperatura y continuidad del flujo de calor.

El problema planteado por las ecs. (19) y (20) junto con las restricciones (21) a (28) no tiene solución analítica, ya que la condición de frontera (23) está dada únicamente en el intervalo  $-H/2 \leq z \leq 0$ , además de que en (19) está presente un término convectivo y ausente en (20) [3]. Este planteamiento matemático se conoce en la literatura especializada como la *Formulación Exacta* del problema. Existen otro tipo de formulaciones las cuales dependen de las consideraciones tomadas en cuanto a la conductividad térmica en el estrato permeable y en los estratos sub y suprayacentes. A continuación se describen las características de las formulaciones más comunes:

- *Formulación Completa de Parámetros Agrupados* (Lumped parameter model). Esta formulación considera el estrato permeable como un medio anisotrópico. La conductividad térmica se considera infinita en la dirección vertical y finita e igual a la conductividad real del medio en la dirección horizontal. Los estratos sub y suprayacentes se consideran isotrópicos, es decir, la conductividad térmica es igual en todas las direcciones.
- *Formulación Incompleta de Parámetros Agrupados*. Es similar a la anterior excepto que se desprecia la conducción de calor en la dirección horizontal en los estratos sub y suprayacentes. Esta formulación es válida cuando los ritmos de inyección son lo suficientemente grandes.
- *Formulación tipo Lawverier*. Difiere de la formulación Incompleta de Parámetros Agrupados en que también se considera despreciable en el estrato permeable la transferencia conductiva de calor en la dirección horizontal.

#### 4.1 Formulación Completa de Parámetros Agrupados

En esta sección se obtienen, a partir de la Formulación Exacta, las formulaciones de parámetros agrupados para los casos lineal y radial.

##### 4.1.1 Formulación Lineal

Al desarrollar los operadores vectoriales de las ecuaciones de la energía (19) y (20) en coordenadas rectangulares y considerando que el flujo del fluido a través del medio es unidireccional y en la dirección positiva de  $x$  exclusivamente, se obtiene:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) \quad \begin{cases} 0 < x, z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho_f c_f \phi v \frac{\partial T}{\partial x} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Las anteriores ecuaciones están sujetas a las siguientes restricciones:

$$T = T_0 \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t = 0. \end{cases} \quad (31)$$

$$T_s = T_0 \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ t = 0. \end{cases} \quad (32)$$

$$T = T_i \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (33)$$

$$T_s(t, x) = \text{Finita} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (34)$$

$$T = T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (35)$$

$$T_s = T_0 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (36)$$

$$T|_{z=0} = T_s|_{z=0} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (37)$$

$$\bar{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (38)$$

$$\frac{\partial T(t, x, z)}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{H}{2}} = 0 \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (39)$$

Considerando que el sistema es anisotrópico y que las conductividades térmicas del medio poroso saturado son  $\bar{\kappa}_x$  y  $\bar{\kappa}_z$  en las direcciones  $x$  y  $z$ , respectivamente, entonces la ec. (30) puede escribirse:

$$\frac{\rho c}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial t} = \bar{\kappa}_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \bar{\kappa}_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho_f c_f \phi v \frac{\partial T}{\partial x} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (40)$$

Al integrar la ecuación (40) con respecto a  $z$ , desde  $-H/2$  a  $0$ , utilizando las condiciones de frontera (38) y (39), se obtiene:

$$\frac{\rho c}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H/2}^0 T dz = \bar{\kappa}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-H/2}^0 T dz + \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \Big|_{z=0} - \rho_f c_f \phi v \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H/2}^0 T dz \quad (41)$$

Nótese que debido a la dirección de integración en la ecuación (41) se reemplazó  $\bar{\kappa}$  por  $\bar{\kappa}_x$ .

Considerando la condición de contar con una conductividad térmica vertical,  $\bar{\kappa}_z$ , muy grande, que en el límite tendería a infinito, entonces se tiene que  $T$  es independiente de  $z$  y toma el valor de

$$T = T_s \Big|_{z=0}$$

Entonces, cualquier integral en (41) será igual a:

$$\frac{H}{2} T_s \Big|_{z=0}$$

Por lo que al usar los resultados anteriores, se tiene que para  $z = 0$ , la ec. (41) queda como:

$$\frac{\rho c}{\partial t} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{2\kappa_s}{H} \frac{\partial T_s}{\partial z} - \rho_f c_f \phi v \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (42)$$

Luego, en síntesis, la formulación completa de Parámetros Agrupados para el caso de Lineal es:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) \quad \begin{cases} 0 < x, z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (43)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{2\kappa_s}{H} \frac{\partial T_s}{\partial z} - \rho_f c_f \phi v \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (44)$$

$$T_s = T_0, \quad \begin{cases} 0 < x, z < \infty, \\ t = 0. \end{cases} \quad (45)$$

$$T_s = T_i \quad \begin{cases} x = z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (46)$$

$$T_s \rightarrow T_0 \quad \begin{cases} x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (47)$$

#### 4.1.2 Formulación Radial

Si se sigue un procedimiento similar al del caso lineal, el planteamiento de parámetros agrupados radial es:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) \quad \begin{cases} 0 < r, z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (48)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = \bar{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) + \frac{2\kappa_s}{H} \frac{\partial T_s}{\partial z} - \frac{\rho_f c_f q_i}{2\pi H r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (49)$$

$$T_s = T_0 \quad \begin{cases} 0 < r, z < \infty, \\ t = 0. \end{cases} \quad (50)$$

$$T_s = T_i \quad \begin{cases} r = 0, \\ 0 < z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (51)$$

$$T_s \rightarrow T_0 \quad \begin{cases} r^2 + z^2 \rightarrow \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (52)$$

## 4.2 Formulación Adimensional

### 4.2.1 Definición de Variables Adimensionales

A continuación se presenta la definición de las variables adimensionales que serán utilizadas en el presente trabajo.

- El tiempo adimensional se define:

$$t_D = \frac{4\kappa t}{\rho c H^2} = \frac{4\bar{\alpha} t}{H^2}. \quad (53)$$

donde  $\bar{\alpha}$  es la difusividad térmica del medio saturado.

- Las temperaturas adimensionales son:

$$T_D = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_i}. \quad (54)$$

Así, para  $T_s, T_f, T_r$  y  $T_b$ , se tiene:

$$T_{Ds} = \frac{T_0 - T_s}{T_0 - T_i}, \quad T_{Df} = \frac{T_0 - T_f}{T_0 - T_i}, \quad T_{Dr} = \frac{T_0 - T_r}{T_0 - T_i}, \quad T_{Db} = \frac{T_0 - T_b}{T_0 - T_i}. \quad (55)$$

- Las siguientes son variables adimensionales asociadas a parámetros espaciales:

$$r_D = \frac{2r}{H}, \quad \chi = \frac{1}{2} r_D^2, \quad r'_D = \frac{2r'}{H}, \quad z_D = \frac{2z}{H}, \quad x_D = \frac{2x}{H}, \quad l_D = \frac{2l}{H}. \quad (56)$$

$$A_{HTbD} = A_{HTb} \frac{H}{2}, \quad \lambda_D = \kappa_{Dr} (A_{HTbD} / l_D) \quad (57)$$

- Los parámetros  $\omega_f$  y  $\omega_r$  relacionan la energía contenida en el fluido a la energía total (roca+fluido), y la energía contenida en la roca a la energía total, respectivamente:

$$\omega_f = \frac{\phi \rho_f c_f}{\rho c}, \quad \omega_r = \frac{(1 - \phi) \rho_r c_r}{\rho c}. \quad (58)$$

Es claro que la siguiente relación se cumple:  $\omega_f + \omega_r = 1$ .

- Los parámetros termofísicos adimensionales son:

$$a^2 = \frac{\alpha_s}{\alpha}, \quad b = \frac{\kappa_{Ds}}{a} = \sqrt{\rho_s c_s \kappa_s} / \sqrt{\rho c \kappa}. \quad (59)$$

$$\kappa_D = \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \quad (60)$$

Por tanto, para el fluido y los medios se tendrá:

$$\kappa_{Df} = \frac{\kappa_f}{\bar{\kappa}}, \quad \kappa_{Dr} = \frac{\kappa_r}{\bar{\kappa}}, \quad \kappa_{Ds} = \frac{\kappa_s}{\bar{\kappa}}. \quad (61)$$

- Los grupos adimensionales de Biot y de Peclet:

$$\text{Bi} = \frac{\hat{h}H}{2\bar{\kappa}}, \quad \hat{\text{Bi}} = \frac{\hat{h}H}{2\kappa_r} \quad (62)$$

$$\text{Pe} = \frac{\rho_f c_f q_i}{4\pi H \bar{\kappa}} = \frac{\omega_f (q_i / \phi)}{4\pi H \bar{\alpha}}; \quad \text{Pe}' = \frac{\rho_f c_f V H}{4\bar{\kappa}} = \frac{\omega_f v H}{4\bar{\alpha}}. \quad (63)$$

El número de Biot (Bi) relaciona el cociente de la resistencia al flujo interno de calor, con respecto a a la resistencia al flujo externo de calor. Mientras que el número de Peclet (Pe) es la relación de la transferencia convectiva de calor a la transferencia conductiva de calor; la definición es de acuerdo a *Bachu y Dagan [1979] [6]*, en la siguiente sección se discute sobre este número adimensional. El superíndice " ' " en el número de Peclet se refiere a condiciones de flujo con geometría lineal.

- Otro parámetro adimensional importante es:

$$q_D^* = \frac{H^2 q^*}{4\bar{\kappa}} \quad (64)$$

De acuerdo a las definiciones de las variables adimensionales anteriores se tiene que las formulaciones de parámetros agrupados adimensionales para los casos lineal y radial son:



- Formulación de parámetros agrupados adimensional, caso Lineal. De las ecs. (43) a (47) y aplicando las definiciones dadas en la sección 4.2.1, se tiene:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (65)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial x_D^2} - 2 \text{Pe}' \frac{\partial T_{D_s}}{\partial x_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < x_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (66)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (67)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} x_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (68)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} x_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (69)$$

- Formulación de parámetros agrupados adimensional, caso radial. De las ecs. (48) a (52) y aplicando las definiciones dadas en la sección 4.2.1, se tiene:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (70)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial r_D^2} + \left( \frac{1 - 2 \text{Pe}}{r_D} \right) \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (71)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (72)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} r_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (73)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} r_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (74)$$

## 4.2.2 Discusión sobre el número de Peclet

En problemas de transferencia de calor el número adimensional de Peclet se define como [26]:

$$Pe = \frac{v_0 l}{\alpha} \quad (75)$$

que es la relación de la transferencia convectiva de calor a la transferencia conductiva de calor para un flujo laminar distante de cualquier frontera [9]. En esta expresión,  $v_0$  es una velocidad característica,  $\alpha$  es la difusividad térmica del fluido, y  $l$  es una longitud característica.

En problemas de transferencia de calor en medios porosos *Bachu y Dagan [1979]* [6] definen el número de Peclet en función de la velocidad del fluido a través del espacio poroso:

$$Pe = \frac{\omega_f v_0 l}{\bar{\alpha}} \quad (76)$$

Es de acuerdo a esta definición como se ha definido el número adimensional de Peclet que se utiliza en el presente trabajo.

*van der Kamp y Bachu [1989]*[59] definen un número de Peclet "Geotérmico", expresado por la siguiente relación:

$$Pe = \frac{\omega_f q_H D}{\bar{\alpha}} A \quad (77)$$

siendo  $A = D/L$  (factor de forma), donde  $L$  y  $D$  son la longitud horizontal y el espesor (o altura) de un elemento representativo; y  $q_H$  es el flujo volumétrico horizontal por unidad de espesor.

Sin embargo, ninguno de los números de Peclet definidos anteriormente está caracterizado por la existencia de un valor crítico abajo del cual el sistema es conductivo, como es el caso del número de Rayleigh crítico usado en convección natural ([41, 48, 45]). *van der Kamp y Bachu [1989]* señalan que para números de Peclet mucho menores que la unidad, el sistema es dominado por la conducción, mientras que para valores significativamente mayores que la unidad el

sistema es dominado por la convección, por lo que un orden de magnitud de uno para el número de Peclet indica un sistema conductivo-convectivo.

### 4.3 Velocidad del Frente Térmico en un Medio Poroso

Considerando las siguientes aproximaciones:

- El patrón de flujo de fluidos es radial.
- La transferencia de calor por conducción en el estrato permeable es despreciable, y la temperatura en la dirección vertical es uniforme (equivalente a tener una conductividad térmica en la dirección vertical es infinita).
- No existe transferencia de calor hacia los estratos adyacentes.

Entonces, el problema establecido por las ecs. (70) a (74) se reduce a:

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} = -\frac{2Pe}{r_D} \frac{\partial T_D}{\partial r_D} \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (78)$$

$$T_D = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (79)$$

$$T_D = 1 \quad \begin{cases} r_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (80)$$

Al realizar el siguiente cambio de variable:

$$\chi = \frac{1}{2} r_D^2 \quad (81)$$

El conjunto de ecuaciones (78) a (80) se reduce a:

$$\frac{\partial T_D}{\partial t_D} = -2Pe \frac{\partial T_D}{\partial \chi} \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (82)$$

$$T_D = 0 \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (83)$$

$$T_D = 1 \quad \begin{cases} \chi = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (84)$$

Se puede demostrar que la solución de este problema es ([12]):

$$T_D = U(t_D - \frac{\chi}{2Pe}) \quad (85)$$

donde la función  $U(u)$  es la función unitaria de Heaviside, definida según:

$$U(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u \geq 0, \\ 0 & \text{para } u < 0. \end{cases} \quad (86)$$

Ahora bien, expresando (85) en función de las variables reales, se tiene:

$$T = T_0 - (T_0 - T_i)U(t - t_*) \quad (87)$$

Aquí  $t_*$  es el tiempo de arribo del frente térmico  $r_*$ , e igual a:

$$t_* = \frac{\pi H r_*^2}{\omega_f (q_i / \phi)} \quad (88)$$

Con lo que la posición del frente térmico con respecto al pozo inyector estaría dada por:

$$r_* = \sqrt{\omega_f \frac{q_i t}{\pi \phi H}} \quad (89)$$

A partir de esta relación, la velocidad con la cual viaja el frente térmico,  $v_*$ , es:

$$v_* = \frac{dr_*}{dt_*} = \omega_f v \quad (90)$$

La velocidad relativa,  $v_r$ , del frente térmico, con respecto a la del frente químico, sería:

$$v_r = \frac{v_x}{v} = \omega_f \quad (91)$$

Es conveniente mencionar que la relación entre las velocidades de los frentes térmico y químico,  $v_r$ , fue previamente establecida por Grant [1982] [25].

Con objeto de tener una idea respecto de las velocidades relativas de avance de los frentes químico y térmico, considérese una formación porosa con los siguientes valores característicos dados en la Tabla 1.

Tabla 1— Propiedades termofísicas

|   |                   |
|---|-------------------|
| Fluido  |                   |
| densidad, $\rho_f$ , $kg/m^3$ ,                     | 1000              |
| calor específico, $c_f$ , $J/kg\ m^3$ ,             | 4200              |
| Roca  |                   |
| densidad, $\rho_s$ , $kg/m^3$ ,                     | 2700              |
| calor específico, $c_s$ , $J/kg\ m^3$ ,             | 1000              |
| Roca saturada                                       |                   |
| capacidad calorífica, $\bar{\rho}c$ , $J/kg\ m^3$ , | $2.9 \times 10^6$ |
| Otras   |                   |
| $\phi$ ,  | 0.15              |

Sustituyendo los valores de la Tabla 1 en la ec. (58), se obtiene que  $\omega_f \approx 0.20$ . Por tanto,  $v_x = 0.20v$ , o bien:  $v = 5v_x$ , lo que implica que para el medio poroso ejemplificado, el frente químico avanzará cinco veces más rápido que el correspondiente frente térmico.

Este resultado es de interés práctico, ya que implica la posibilidad de reconocer el arribo del frente térmico a los pozos productores, previo a que éste se presente, manteniendo un monitoreo periódico de los cambios en composición química de los fluidos producidos, lo que permitiría identificar el arribo del frente químico, que como ya se ha comentado, precederá al arribo frente térmico propiamente dicho.

Del ejemplo anterior y considerando la ec. (87), es posible inferir que cuando un fluido con temperatura  $T_i$  se inyecta en una formación porosa con temperatura  $T_0$ , dos frentes comienzan a desplazarse alejándose del punto de inyección; el frente químico, al que sigue a una cierta distancia el frente térmico, donde la temperatura salta de  $T_0$  a  $T_i$ , tal como se ilustra en la Fig. 3.

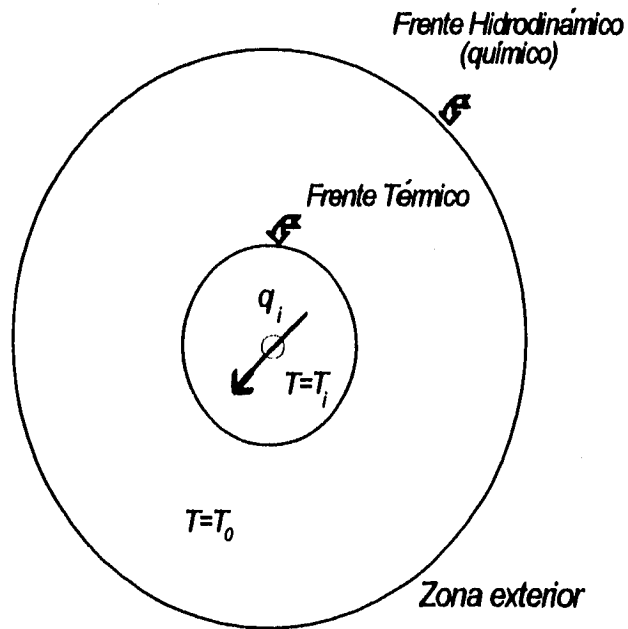


Fig. 3: Frente térmico e hidrodinámico en un problema típico de inyección.

#### 4.4 Modelo de Lauwerier

Lauwerier [1955] [34] presentó una solución analítica para calcular la distribución de temperaturas creadas por la inyección de un fluido caliente en un estrato horizontal permeable saturado con un fluido frío. El consideró que el transporte de energía en el estrato permeable es exclusivamente por convección y contempló las pérdidas de calor hacia los estratos impermeables sub y suprayacentes. Las principales simplificaciones que considera el modelo de Lauwerier son:

- En los estratos adyacentes la conductividad térmica horizontal es cero y en la dirección vertical es finita.

En el estrato permeable fracturado:

- La conductividad térmica en la dirección horizontal es cero.
- La conductividad térmica en la dirección vertical es infinita.

Las soluciones para la distribución de la temperatura a lo largo de una fractura tanto para el caso lineal como para el radial se presentan a continuación:

- Para el caso lineal las ecs. (65) a (69) se simplifican a:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (92)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = -2 \text{Pe}' \frac{\partial T_{D_s}}{\partial x_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < x_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (93)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (94)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} x_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (95)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} x_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (96)$$

La solución de la ec. (92) sujeta a las condiciones (93) a (96) es:

$$T_{D_s}(x_D, z_D, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{z_D + \kappa_{D_s} \frac{x_D}{2Pe'}}{2a\sqrt{t_D - \frac{x}{2Pe'}}} U(t_D - \frac{x_D}{2Pe'}) \quad (97)$$

Mientras que la distribución de la temperatura a lo largo de la fractura lineal ( $z_D = 0$ ) es:

$$T_{D_s}(x_D, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{b \frac{x_D}{2Pe'}}{2\sqrt{t_D - \frac{x}{2Pe'}}} U(t_D - \frac{x_D}{2Pe'}) \quad (98)$$

donde  $b = \kappa_{D_s}/a$  y  $\operatorname{erfc}(x)$  es la función Error Complementaria; definida como:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du, \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du, \\ &= 1 - \operatorname{erf}(x), \end{aligned} \quad (99)$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función Error.

La función  $\operatorname{erfc}(x)$  posee las siguientes propiedades [1]:

$$\operatorname{erfc}(0) = 1, \quad (100)$$

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 0. \quad (101)$$

• Para el caso radial el conjunto de ecuaciones (70) a (74) se reduce al siguiente problema:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (102)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = -\frac{2Pe}{r_D} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (103)$$



$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (104)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} r_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (105)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} r_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (106)$$

Efectuando el siguiente cambio de variable:

$$\chi = \frac{1}{2} r_D^2 \quad (107)$$

El problema (102) a (106) se transforma en:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < \chi, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (108)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = -2Pe \frac{\partial T_{D_s}}{\partial \chi} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (109)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < \chi, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (110)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} \chi = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (111)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \chi^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (112)$$

Comparando el problema planteado por las ecs. (108) a (112), con el planteado para el caso lineal por las ecs. (92) a (96) se observa que son problemas equivalentes; por lo cual, en base a lo anterior, la distribución de la temperatura para el caso radial, es:

$$T_{D_s}(\chi, z_D, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{z_D + \kappa_{D_s} \frac{\chi}{2Pe}}{2a\sqrt{t_D - \frac{\chi}{2Pe}}} U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (113)$$

Mientras que la distribución de la temperatura a lo largo de la fractura ( $z_D = 0$ ) está dada por:

$$T_{D_0}(\chi, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{b \frac{\chi}{2Pe}}{2\sqrt{t_D - \frac{\chi}{2Pe}}} U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (114)$$

En realidad fue Malofeev [1960] [36, 37] quien primero observó que la solución para el caso lineal es también aplicable al caso radial, si se realizan las sustituciones  $Pe'$  por  $Pe$  y  $x_D$  por  $\chi$ .

Por otra parte, si se expresa la ec. (114) en función de variables reales y al evaluarla en  $z = 0$ , se tiene:

$$T = T_0 - (T_0 - T_i) \operatorname{erfc} \left( \frac{\pi \sqrt{k_s \rho_s c_s r^2}}{\rho_f c_f q_i \sqrt{t - t_*}} \right) U(t - t_*) \quad (115)$$

donde, como se ha señalado,  $t_*$  es el tiempo de arribo del frente térmico cuando no existen pérdidas de calor hacia los estratos adyacentes. Asimismo, nótese que para una posición dada y tiempos suficientemente grandes, esta ecuación se reduce a la ec. (85), lo cual significa que se ha realizado totalmente el barrido de calor en la matriz de roca.

#### 4.5 Modelo de Avdonin

Otro importante modelo tendiente a predecir la distribución de la temperatura a lo largo de un estrado permeable es el propuesto por Avdonin [1964] [5], que considera que la conductividad térmica en la dirección horizontal es finita, a diferencia del modelo de Lauwerier que desprecia la transferencia conductiva de calor en el estrado permeable. Por tanto, de acuerdo a las simplificaciones consideradas, este planteamiento corresponde a una formulación de variables agrupadas incompleta. El resto de las suposiciones son las mismas que las consideradas por Lauwerier. A continuación se presentan las formulaciones matemáticas y sus respectivas soluciones para los casos lineal y radial.

- Formulación Lineal. El conjunto de ecuaciones (65) a (69) se reduce a:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (116)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial x_D^2} - 2 \text{Pe}' \frac{\partial T_{D_s}}{\partial x_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < x_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (117)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < x_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (118)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} x_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (119)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} x_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (120)$$

La solución del problema planteado por la ec. (116) a (120) es:

$$T_D(x_D, z_D, t_D) = \int_0^\infty \frac{x_D}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-[x_D/(2\sqrt{\tau}) - \text{Pe}'\sqrt{\tau}]^2} \text{erfc}\left(\frac{z_D/a + b\tau}{2\sqrt{t_D - \tau}}\right) d\tau. \quad (121)$$

Mientras que en la fractura ( $z_D = 0$ ) la distribución de la temperatura está dada por:

$$T_{D_s}(x_D, t_D) = \int_0^\infty \frac{x}{2\tau\sqrt{\pi\tau}} e^{-[x/(2\sqrt{\tau}) - \text{Pe}'\sqrt{\tau}]^2} \text{erfc}\left(\frac{b\tau}{2\sqrt{t_D - \tau}}\right) d\tau. \quad (122)$$

- Formulación Radial. Para el caso radial la formulación de Avdonin —o formulación de variables agrupadas incompleta— ec. (70) y condiciones (71) a (74) se pueden escribir como:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (123)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial r_D^2} + \left(\frac{1-2\text{Pe}}{r_D}\right) \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (124)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (125)$$

$$T_{D_s} = 1, \quad \begin{cases} r_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (126)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} r_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (127)$$

El problema planteado por la ec. (123) junto con las condiciones (124) a (127) tiene por solución:

$$T_D(r_D, z_D, t_D) = \frac{1}{\Gamma(\text{Pe})} \int_0^\infty \frac{1}{4\tau} \left(\frac{r_D^2}{4\tau}\right)^{\text{Pe}} e^{-r_D^2/4\tau} \text{erfc}\left(\frac{b\tau}{2\sqrt{t_D - \tau}}\right) d\tau. \quad (128)$$

donde  $\Gamma(n)$  es la función Gamma, la que se define como [1]:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0. \quad (129)$$

En la fractura ( $z_D = 0$ ) la distribución de la temperatura está dada por:

$$T_{D_s}(r_D, t_D) = \frac{1}{\Gamma(\text{Pe})} \int_0^\infty \frac{1}{4\tau} \left(\frac{r_D^2}{4\tau}\right)^{\text{Pe}} e^{-r_D^2/4\tau} \text{erfc}\left(\frac{b\tau}{2\sqrt{t_D - \tau}}\right) d\tau. \quad (130)$$

A partir de los modelos de Avdonin y Lauwerier, la Fig. 4 presenta la distribución espacial de la temperatura para diversos tiempos adimensionales considerándose que la geometría de flujo en el sistema es de tipo lineal. El proceso de integración requerido para la obtención de los resultados se realizó numéricamente a partir del método de integración aproximada de la regla de Simpson [20]. Obsérvese que el principal efecto de considerar la conducción de calor en la dirección horizontal en el estrato permeable (Avdonin) es el de tener temperaturas adimensionales ligeramente mayores que cuando no se considera. Asimismo, se observa que el modelo de Avdonin predice que el disturbio térmico en el sistema se da más distante del punto de inyección.

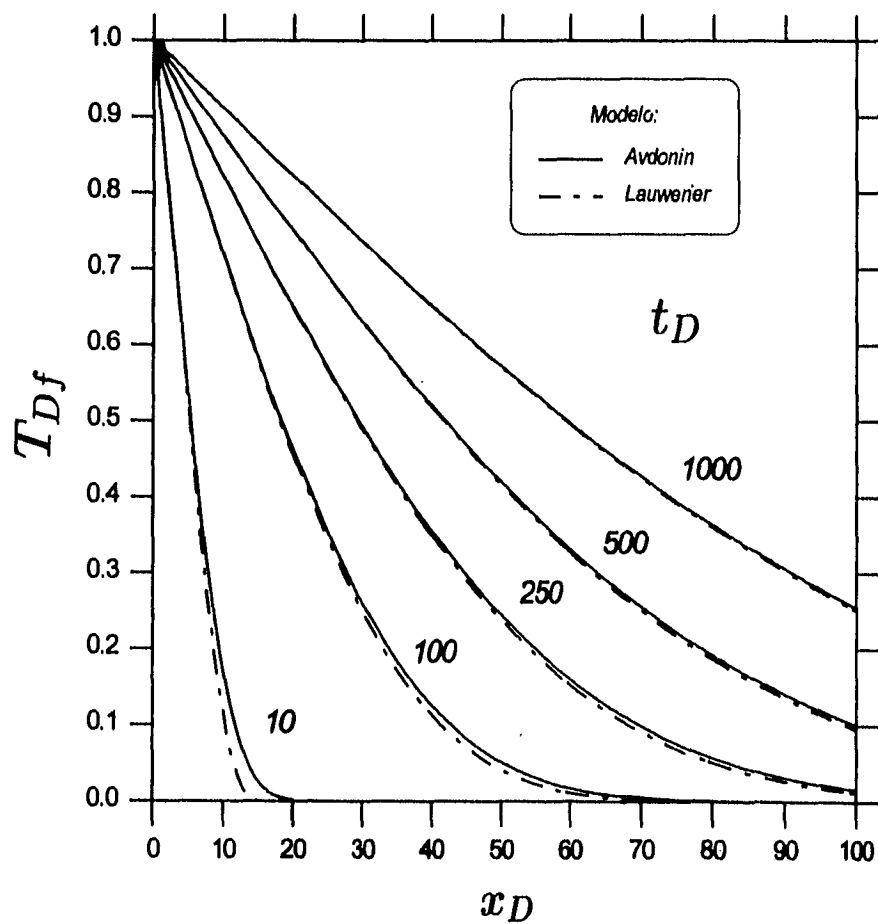


Fig. 4: Distribución de la temperatura a distintos tiempos adimensionales en un medio poroso. La geometría de flujo de fluido es lineal con  $Pe' = 1$  y  $b = 1$ .

## 4.6 Modelo de Rubinshtein

Las soluciones analíticas para la distribución de la temperatura más generales reportadas en la literatura son las presentadas por Rubinshtein [1959,1962] [50, 49]. Este autor considera que en el estrato impermeable existe tanto la conducción de calor en la dirección horizontal como en la vertical. En el estrato permeable se considera la conducción de calor horizontal, y al igual que el modelo de Lauwerier, la conductividad térmica vertical la supone infinita. De acuerdo a estas consideraciones el problema y solución para el modelo de Rubinshtein es:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (131)$$

$$z_D = 0: \quad \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial r_D^2} + \left( \frac{1-2Pe}{r_D} \right) \frac{\partial T_{D_s}}{\partial r_D} + \kappa_{D_s} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} \quad \begin{cases} 0 < r_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (132)$$

$$T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (133)$$

$$T_{D_s} = 1 \quad \begin{cases} r_D = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (134)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} r_D^2 + z_D^2 \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (135)$$

Una de las soluciones obtenida por Rubinshtein para el conjunto de ecs. (131) y las condiciones (132) a (135) fue para los valores de  $a^2 = 1$  y  $n = 2Pe$ , donde  $n$  es un número entero, la cual es:

$$T_D(r_D, z_D, t_D) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\tau^n}{R} e^{-\kappa_{D_s}(\tau-R)} \frac{d^n}{dR^n} \left( e^{-\kappa_{D_s}R} \operatorname{erfc} \frac{R}{2\sqrt{t_D}} \right) d\tau \quad (136)$$

donde  $R = \sqrt{\tau + z_D + r_D^2}$ .

#### 4.7 Eficiencia Térmica

La eficiencia térmica,  $\varepsilon$ , se define como la *fracción* de la energía inyectada que permanece en el yacimiento a cualquier instante de tiempo [55]. Este concepto fue introducido inicialmente en la ingeniería de yacimientos petroleros y utilizado en la evaluación de operaciones de recuperación térmica de hidrocarburos; la expresión matemática de esta definición es:

$$\varepsilon = 1 - W^* = 1 - \frac{\frac{1}{2Pe} \int_0^{t_D} \int_0^\infty \kappa_{Di} \frac{\partial T_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=0} d\chi dt_D}{t_D} \quad (137)$$

donde  $W^*$  es la *fracción* del calor total inyectado que se ha perdido hacia las formaciones adyacentes.

Si es el caso de la inyección de un fluido frío en un yacimiento geotérmico, entonces  $W^*$  debe entenderse como la *fracción* del calor adquirido por el fluido inyectado. Es claro de la definición de eficiencia térmica que cuando es el caso de un proceso de recuperación térmica de hidrocarburos el proceso es más eficiente cuando  $\varepsilon \rightarrow 1$ , mientras que en una operación de reinyección de fluido de baja temperatura el proceso es más "eficiente" cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La expresión (137) considera que el movimiento del fluido en el estrato permeable es de tipo radial. Para el caso lineal se realiza, nuevamente, la substitución de  $\chi$  por  $x$  y de  $Pe$  por  $Pe'$ .

Si la distribución de temperatura en el estrato permeable se considera que obedece al modelo de Lauwerier, la expresión matemática para la eficiencia térmica está dada por la siguiente expresión ([55]):

$$\varepsilon = 1 - W^* = \frac{1}{b^2 t_D} \left\{ 2\sqrt{\frac{bt_D}{\pi}} - 1 + e^{b^2 t_D} \operatorname{erfc}(\sqrt{bt_D}) \right\} \quad (138)$$

Rubinshtein [1959] [51], obtuvo una solución para la eficiencia térmica considerando el efecto de la variación vertical de la temperatura en el estrato permeable ( $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \neq 0$ ). El considera la inyección radial no isotérmica de fluido y hace uso de las funciones de Green para obtener su solución; el resultado para la eficiencia térmica obtenida por Rubinshtein es:



$$\epsilon = 1 - W^* = 1 - \frac{1 - \sigma}{2} \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{t_D}{\pi}} \left[ 1 - (1 - \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^{n-1} \left( 1 + \frac{n^2}{t_D} \right) e^{-\frac{n^2}{t_D}} \right] + \right. \\ \left. (1 - \sigma) \sum_{n=1}^{\infty} 2n\sigma^{n-1} \left( 1 + \frac{2n^2}{3t_D} \right) \operatorname{erfc} \frac{n}{t_D} \right\} \quad (139)$$

donde

$$\sigma = \frac{a/\kappa_{D_s} - 1}{a/\kappa_{D_s} + 1}$$

La eficiencia térmica dada por esta expresión considera que las propiedades térmicas de los estratos sub y suprayacentes son iguales. La Fig. 5 muestra el comportamiento de la eficiencia térmica  $\epsilon$  en función del tiempo adimensional  $t_D$ , según los modelos de Lauwerier y de Rubinshtein. Se observa que el efecto de la variación vertical de la temperatura resulta en un incremento máximo del 15% en la eficiencia térmica [42].

A continuación se presenta una discusión sobre  $\epsilon$  en el contexto de un proceso de recuperación térmica de hidrocarburos:

- Es interesante notar que la eficiencia térmica  $\epsilon$  (o  $W^*$ ) no depende de la temperatura de inyección, del ritmo de inyección de fluido, o del ritmo de inyección de calor [44]. Para un ritmo constante de inyección de calor,  $\epsilon$  (o  $W^*$ ) es únicamente función del tiempo adimensional. Si la temperatura de inyección se incrementa, el acumulativo de las pérdidas de calor hacia las formaciones adyacentes también se incrementa, pero igual sucede con el acumulativo de calor que permanece en el yacimiento. Para un elevado ritmo de inyección de fluido, la zona calentada es grande y por tanto lo es también el acumulativo de las pérdidas de calor desde la zona caliente. Pero también es grande el acumulativo de calor que permanece en el yacimiento como resultado del elevado ritmo de inyección. Estos efectos contrarios se cancelan, de manera que la eficiencia térmica, otra vez, es función exclusivamente del tiempo adimensional.

- De la definición de tiempo adimensional ( $t_D = 4\bar{\kappa}t/\bar{\rho}cH^2$ ), como observa Prats [42], se sigue que la principal variable, aparte del tiempo, es el espesor  $H$  del estrato permeable. Nótese que el espesor del yacimiento aparece al cuadrado. Si el espesor de un yacimiento es dos veces el de otro, entonces un periodo de inyección cuatro veces más grande será necesario para mantener la misma eficiencia térmica. Si la duración del periodo de calentamiento es la misma en ambos yacimientos, el tiempo adimensional del yacimiento de mayor espesor es cuatro veces más grande que la del otro. Se puede observar de la Fig. 5 que un factor de cuatro en el tiempo tiene un efecto significativo en  $\varepsilon$  (o  $W^*$ ).
- Prats [1969] [42] demostró que, para el yacimiento con propiedades idealizadas considerado por Marx y Langenheim [1969] [38] y Lauwerier [1955] [34], la eficiencia térmica dada por la ecuación (137) es una aproximación excelente para cuando la variación vertical de la temperatura en el yacimiento es despreciable. Esto se aplica igual si la temperatura de inyección o el ritmo de inyección varían, ya que el ritmo neto de inyección de calor se mantiene constante.

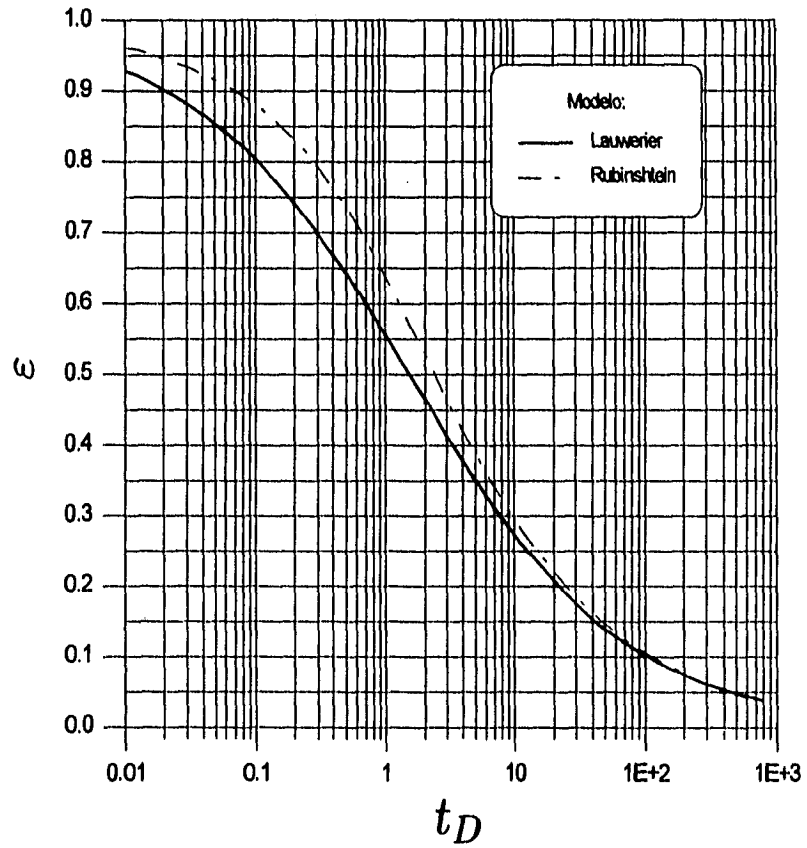


Fig. 5: Distribución de calor entre el yacimiento y formaciones adyacentes.

## 5 NO EQUILIBRIO TERMICO

Es importante la diferencia entre el flujo de calor o de un fluido en una matriz porosa y una matriz fracturada, tanto para un fenómeno térmico como para uno hidrodinámico. Para un tiempo dado, en un material poroso, la temperatura del fluido contenido en los poros tiene mayor oportunidad de equilibrarse con la temperatura de la matriz porosa. Este no es necesariamente el caso de los medios fracturados. En un medio poroso homogéneo el movimiento del fluido es laminar; mientras que en una roca fracturada, el fluido en las fracturas alcanza altas velocidades, lo que puede ubicarlo en la región de flujo turbulento, sobre todo en la vecindad de los pozos. A medida que el frente avanza en el yacimiento estas velocidades tienden a disminuir.

### 5.1 El Término de Acople $q^*(t, \vec{x}_f)$

Debido a las condiciones de temperatura variable en la interfase, el ritmo de transferencia de calor ( $q^*$ ) se expresa por la siguiente integral de convolución:

$$q^*(x_f, t) = \int_0^t \frac{\partial \Delta T_f(\tau)}{\partial \tau} q_1(t - \tau) d\tau \quad (140)$$

siendo  $\Delta T_f = T_0 - T_f(t, \vec{x}_f)$  y  $q_1$  es la transferencia de calor de los bloques de roca a la fractura por caída de temperatura unitaria en la interfase (Función de transferencia). Si hacemos uso de la ley de Fourier  $q_1$  puede ser representado por:

$$q_1(t) = AHT_b \kappa_r \nabla \Delta T_{b1}(t)|_{\text{interfase}}, \quad (141)$$

donde

$$\Delta T_b = T_0 - T_b,$$

y  $\nabla \Delta T_{b1}(t)|_{\text{interfase}}$  representa el gradiente de la temperatura evaluado en la interfase por caída de temperatura unitaria en la misma.

El parámetro  $A_{HTb}$  es el área efectiva de transferencia de calor por unidad de volumen total de yacimiento. Este parámetro fue introducido por *Cinco et al.*, [1982] [18] en el estudio del flujo de fluidos en medios naturalmente fracturados.

### 5.1.1 Función de Transferencia de Calor Pseudo-permanente

Si se realiza un balance de energía calorífica en los bloques de roca se llega a la siguiente expresión [4]:

$$(1 - \phi)\rho_r c_r \frac{d\bar{T}_b}{dt} = -\lambda(\bar{T}_b - T_f) \quad (142)$$

siendo

$$\lambda = \kappa_r \alpha'$$

donde  $\bar{T}_b$  es la temperatura promedio de los bloques;  $\alpha' (= A_{HTb}/l)$  es un parámetro característico de los bloques y tiene dimensiones de  $L^{-2}$ , y  $l$ , es una dimensión característica. El parámetro  $\alpha'$  es el mismo que el utilizado en la teoría de la Doble Porosidad (*Warren y Root* [1963] [60]), el cual se determina a partir de la siguiente expresión:

$$\alpha' = \frac{4n(n+2)}{l^2}$$

donde  $n$  es el número del conjunto de planos normales que limitan al medio menos permeable.

Al realizar el balance de energía calorífica expresado por la ec (142), se consideró que el ritmo de transferencia de calor de los bloques, por una parte, es igual al ritmo de variación de la temperatura promedio de los bloques,  $\bar{T}_b$ , multiplicada por el almacenamiento de energía en los bloques y, por otra parte, proporcional a la diferencia entre la temperatura promedio de los bloques y la temperatura en la fractura. Este planteamiento es conocido como de estado pseudo-permanente o quasi-estacionario, dado de que no considera la distribución interna de la temperatura en los bloques.

La representación adimensional de la ec. (142) (ver sección 4.2.1) es:

$$\omega_r \frac{\partial \bar{T}_{Db}}{\partial t_D} = -\lambda_D (\bar{T}_{Db} - T_{Df}), \quad (143)$$

la cual está sujeta a la siguiente condición inicial:

$$\bar{T}_{Db}(t_D = 0) = 0. \quad (144)$$

En el dominio de Laplace, la solución de la ec. (143) sujeta a la condición inicial (144) es:

$$\bar{T}_{Db} = \frac{1}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1} \cdot (T_{Df}/s) \quad (145)$$

Ahora bien, puesto que

$$q_D^* = \omega_r \frac{\partial \bar{T}_{Db}}{\partial t_D} \quad (146)$$

y al aplicar la transformada de Laplace a esta expresión, se obtiene:

$$\bar{q}_D^* = s\omega_r \bar{T}_{Db} \quad (147)$$

Luego, de las ecs. (145) y (147), se sigue que:

$$\bar{q}_D^*(s) = \frac{\omega_r}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1} \cdot T_{Df}, \quad (148)$$

y así el flujo de calor por caída de temperatura unitaria en la interfase es:

$$\bar{q}_{D1}(s) = \frac{\omega_r}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1} \quad (149)$$

Al evaluar la transformada inversa de Laplace de esta expresión, se obtiene que en el espacio real el ritmo de transferencia de calor por unidad de caída de temperatura unitaria en la interfase es:

$$q_{D1}(t_D) = \lambda_D e^{-(\lambda_D/w_r)t_D} \quad (150)$$

### 5.1.2 Función de Transferencia de Calor Transitoria (Esferas)

Para los bloques de roca, la ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento transitorio de la temperatura es:

$$(1 - \phi)\rho_r c_r \frac{\partial T_b(t, \vec{x}_m)}{\partial t} = \kappa_r \nabla^2 T_b(t, \vec{x}_m) \quad \begin{cases} 0 < x, y, z < l, m, n; \\ t > 0. \end{cases} \quad (151)$$

donde  $l, m, n$  son las dimensiones de los bloques de roca; las derivadas implícitas en el operador  $\nabla^2$  se toman con respecto a la variable local  $\vec{x}_m$ .

Si se considera a los bloques de roca como cuerpos esféricos de radio  $r'_b$ , la ecuación de conducción de calor en coordenadas radial esféricas es:

$$(1 - \phi)\rho_r c_r \frac{\partial T_b}{\partial t} = \kappa_r \left( \frac{\partial^2 T_b}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'} \frac{\partial T_b}{\partial r'} \right) \quad \begin{cases} 0 < r' < r'_b, \\ t > 0. \end{cases} \quad (152)$$

La cual está sujeta a las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$T_b = T_0 \quad \begin{cases} 0 < r' < r'_b, \\ t = 0. \end{cases} \quad (153)$$

$$T_b(t, r' = 0) = \text{Finita}, \quad \begin{cases} r' = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (154)$$

$$\hat{h}(T_b(t, r')|_{r'=r'_b} - T_f(t, r')) = -\kappa_r \frac{\partial T_b(t, r')}{\partial r'} \Big|_{r'=r'_b}, \quad t > 0. \quad (155)$$

donde  $h$  es el coeficiente convectivo de transferencia de calor o coeficiente de película. Nótese que en este planteamiento se considera tanto el comportamiento del flujo de calor en los bloques como en la interfase roca-fluido.

Representando adimensionalmente el problema establecido por las ecuaciones (152) a (155), con las definiciones dadas en la sección 4.2.1, se tiene:

$$\omega_r \frac{\partial T_{Db}}{\partial t_D} = \kappa_{Dr} \left( \frac{\partial^2 T_{Db}}{\partial r_D'^2} + \frac{2}{r_D'} \frac{\partial T_{Db}}{\partial r_D'} \right) \quad \begin{cases} 0 < r_D' < \xi, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (156)$$

donde

$$\xi = 2r_b'/H. \quad (157)$$

Las condiciones inicial y de frontera son:

$$T_{Db} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r_D' < \xi, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (158)$$

$$T_{Db} = \text{Finita} \quad \begin{cases} r_D' = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (159)$$

$$T_{Db}(t_D, r_D')|_{r_D'=\xi} - T_{Df}(t_D, r_D') = -\left(\frac{1}{\text{Bi}}\right) \frac{\partial T_{Dr}(t_D, r_D')}{\partial r_D'} \Big|_{r_D'=\xi}, \quad t_D > 0. \quad (160)$$

### 5.1.3 Distribución de la temperatura interna en los bloques esféricos

Rearreglando la ecuación de conducción de calor para los bloques esféricos de roca, ec. (156), se tiene:

$$\omega_r \frac{\partial(r_D' T_{Db})}{\partial t_D} = \kappa_{Dr} \frac{\partial^2(r_D' T_{Db})}{\partial r_D'^2} \quad \begin{cases} 0 < r_D' < \xi, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (161)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a esta ecuación y a las condiciones (158)-(160) se obtiene:



$$s \omega_r r'_D \bar{T}_{Db} = \kappa_{Dr} \frac{d^2 r'_D \bar{T}_{Db}}{dr_D^2} \quad (162)$$

$$\bar{T}_{Db}(r'_D = 0) = \text{Finita} \quad (163)$$

$$\bar{T}_{Db}|_{r'_D=\xi} - \bar{T}_{Df}/s = -\left(\frac{1}{Bi}\right) \frac{d\bar{T}_{Db}}{dr_D} \Big|_{r'_D=\xi} \quad (164)$$

La solución del sistema de ecuaciones (162) a (164) es:

$$r'_D \bar{T}_{Db} = \frac{\xi \operatorname{senh}(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} r'_D) T_{Df} / s}{\operatorname{senh}(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) + \frac{1}{Bi} \left\{ \sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \cosh(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - \frac{1}{\xi} \operatorname{senh}(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) \right\}} \quad (165)$$

Mientras que  $\nabla \bar{T}_{Db1}(s)$  |interfase es igual a:

$$\frac{\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi \coth(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - 1}{s \xi \left\{ 1 + \frac{1}{Bi} \left( \sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi \coth(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - 1 \right) \right\}} \quad (166)$$

Finalmente, la transferencia de calor de los bloques de roca a las fracturas por unidad de volumen total, producidas por caída de temperatura unitaria en la interfase es:

$$\bar{q}_{D1}(s) = \kappa_{Dr} (A_{HTbD} / \xi) \frac{f(s)}{s(1 + \frac{1}{Bi} f(s))} \quad (167)$$

donde

$$f(s) = \sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi \coth(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - 1$$

5.1.4 Longitud Característica  $l$  de una Esfera

Si se considera que no existe caída de temperatura en la interfase roca/fluido ( $\hat{B}i \rightarrow \infty$ ), la ec. (165) se reduce a:

$$\bar{T}_{Db1} = \frac{\xi \operatorname{senh}(\sqrt{s} \omega_r / \kappa_{Ds} r'_D)}{s r'_D \operatorname{senh}(\sqrt{s} \omega_r \xi^2 / \kappa_{Ds})} \quad (168)$$

la cual en el espacio de Laplace tiene por solución [17]:

$$T_{Db1} = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\xi}{r'_D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t_D / (\omega_r \xi^2 / \kappa_{Dr})} \operatorname{sen} \frac{n \pi r'_D}{\xi} \quad (169)$$

Ahora, es posible determinar la temperatura promedio  $\bar{T}_b$  de los bloques a partir de la siguiente expresión:

$$\bar{T}_b(x_f, t) = \frac{1}{V_b} \int_{V_b} T_b(x_b, t; x_f) dV \quad (170)$$

Sustituyendo (169) en (170), y al evaluar al integral se obtiene:

$$\bar{T}_{Db1} = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t_D / (\omega_r \xi^2 / \kappa_{Dr})} \quad (171)$$

Para tiempos suficientemente grandes, es decir,  $t_D > (\omega_r \xi^2 / \pi^2 \kappa_{Dr})$ , todos los términos de la serie después del primero son despreciables, por tanto:

$$\bar{T}_{Db1} \approx 1 - \frac{6}{\pi^2} e^{-\pi^2 t_D / (\omega_r \xi^2 / \kappa_{Dr})} \quad (172)$$

Derivando esta expresión con respecto a  $\bar{T}_{Db1}$ , y eliminado  $t_D$  de la expresión resultante, se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{T}_{Db1}}{\partial t_D} = -\frac{\pi^2}{\omega_r \xi^2 / \kappa_{Dr}} (\bar{T}_{Db1} - 1), \quad (173)$$

y al multiplicar ambos miembros por  $\omega_r$

$$\omega_r \frac{\partial \bar{T}_{Db1}}{\partial t_D} = -\frac{\pi^2}{\xi^2/\kappa_{DI}} (\bar{T}_{Db1} - 1). \quad (174)$$

Por otro lado, retomando la ecuación de balance de energía para los bloques de roca con transferencia de calor roca/fluido en régimen pseudo-permanente, ec. (143):

$$\omega_r \frac{\partial \bar{T}_{Db1}}{\partial t_D} = -\lambda_D (\bar{T}_{Db1} - 1) \quad (175)$$

Al comparar (174) con (175), se llega a que:

$$\lambda_D = \frac{\pi^2}{\xi^2/\kappa_{DI}} \quad (176)$$

Expresando esta relación en función de las variables reales:

$$\alpha' = (A_{HTb}/l) = \pi^2/r_b'^2 \quad (177)$$

Zimmerman et al. [1993] [61] obtienen una expresión equivalente pero analizando el problema del flujo de un fluido en medios naturalmente fracturados.

Por otro lado, de la definición de  $A_{HTb}$  y del volumen de un bloque esférico (ver Fig. 6):

$$A_{HTb} r_b' = \frac{A_{HT}}{V_{total}} r_b' = \frac{4\pi r_b'^2}{V_{total}} r_b', \quad (178)$$

donde  $V_{total}$  es el volumen de un elemento repetitivo e igual a:

$$V_{total} = (2r_b' + h')^3. \quad (179)$$

Rearreglando la ec. (178) se tiene:

$$A_{HTT} r'_b = 3 \frac{\frac{4}{3} \pi r'_b{}^3}{V_{total}} = 3 \frac{V_{bloques}}{V_{total}} = 3(1 - \phi) \quad (180)$$

Finalmente, combinando la ecs. (177) y (180), y despejando  $l$  se llega a:

$$l = \frac{3(1 - \phi)}{\pi^2} r'_b \quad \text{o} \quad l_D = \frac{3(1 - \phi)}{\pi^2} \xi \quad (181)$$

Esta ecuación muestra un aspecto interesante, dado que relaciona la longitud característica de un bloque de roca con la dimensión real del mismo.

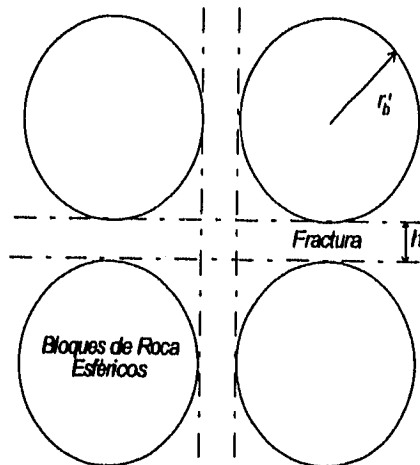


Fig. 6: Esquema de un yacimiento naturalmente fracturado con bloques de roca esféricos.

## 5.2 Solución sin Transferencia de Calor de los Estratos Adyacentes

Se presenta la solución de la distribución de la temperatura a través del estrato fracturado considerándose que la interacción matriz/fractura ocurre bajo condiciones de régimen de calor tanto pseudo-permanente como transitorio y se considera que no existe transferencia de calor de los estratos adyacentes. Este problema ha sido tratado detalladamente por *Ascencio y Rivera [1994] [4]*. Las principales consideraciones tomadas en cuenta son:

- La geometría de flujo de fluidos es radial.
- La transferencia de calor de los estratos sub y suprayacentes se considera despreciable.  
En el estrato fracturado:
- La conductividad térmica en la dirección horizontal es cero.
- La conductividad térmica en la dirección vertical es infinita.

De acuerdo a estas simplificaciones la ecuación de la energía calorífica para el fluido (ec. 1) se simplifica a:

$$\phi \rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \phi \kappa_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - \frac{\rho_f c_f q_i}{2\pi H r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + q^*(t, \bar{x}_f) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ -H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (182)$$

donde  $q^*(x_f, t)$  está dado por la ec. (140):

$$q^*(x_f, t) = \int_0^t \frac{\partial \Delta T_f(\tau)}{\partial \tau} q_1(t - \tau) d\tau \quad (183)$$

Sustituyendo la ec. (183) en (182), y representando adimensionalmente el resultado (ver sección 4.2.1 para las definiciones de las variables adimensionales):

$$\omega_f \frac{\partial T_{Df}}{\partial t_D} = -2Pe \frac{\partial T_{Df}}{\partial \chi} - \int_0^{t_D} \frac{\partial T_{Df}(\tau)}{\partial \tau} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty \\ t_D > 0 \end{cases} \quad (184)$$

Sujeta a las condiciones:

$$T_{Df} = 0 \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty \\ t_D = 0 \end{cases} \quad (185)$$

$$T_{Df} = 1 \quad \begin{cases} \chi = 0, \\ t_D > 0 \end{cases} \quad (186)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ec. (184) y a las condiciones (185)–(186), reordenando términos, se llega a:

$$2Pe \frac{d\bar{T}_{Df}}{d\chi} = -(\omega_f + \bar{q}_{D1}(s))\bar{T}_{Df}s, \quad (187)$$

$$\bar{T}_{Df}(\chi = 0) = \frac{1}{s}. \quad (188)$$

De la solución simultánea de estas dos últimas ecuaciones se obtiene el comportamiento de la distribución de temperatura en el dominio de Laplace:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-(\omega_f + \bar{q}_{D1}(s))\frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (189)$$

### 5.2.1 Caso en que ocurre Intercambio de Calor en Régimen Pseudo-permanente entre la matriz y el fluido

Substituyendo en la ecuación (189) la función de transferencia para el caso pseudo-permanente, ec. (149), se tiene:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-\left(\omega_f + \frac{\omega_r}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1}\right)\frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (190)$$

Casos particulares de la ec. (190):

- Tiempos pequeños. En este caso  $s \rightarrow \infty$ , por lo que la ec. (190) se reduce a:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-\omega_f \frac{\chi}{2Pe} s\right) \quad (191)$$

cuya transformada inversa es:

$$T_{Df} = U\left(t_D - \omega_f \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (192)$$

De este resultado se desprende lo siguiente:

$$v_* = v \quad (193)$$

Es decir, para tiempos cortos, el frente térmico avanza en el espacio poroso de acuerdo a la velocidad hidrodinámica del fluido, es decir, no se presenta todavía el efecto de retardamiento del frente térmico con respecto al hidrodinámico.

• **Tiempos intermedios.** Utilizando la siguiente aproximación:

$$e^x \approx 1 + x, \quad (194)$$

la ec. (190) se simplifica a:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-\omega_f \frac{\chi}{2Pe} s\right) \cdot \left(1 - \frac{\omega_r}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1} \cdot \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (195)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$T_{Df} = \left(1 - \lambda_D \frac{\chi}{2Pe} \exp\left(-(\lambda/\omega_r)(t_D - \omega_f \frac{\chi}{2Pe})\right)\right) \cdot U\left(t_D - \omega_f \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (196)$$

Esta ecuación pone en evidencia que para tiempos intermedios  $T_{Df}$  está influenciada principalmente por el factor geométrico  $\lambda_D$ .

• Tiempos grandes. En la ec. (190)  $s \rightarrow 0$  simplificándola a:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-(\omega_f + \omega_r) \frac{\chi}{2Pe} s\right) \quad (197)$$

La transformada inversa de esta ecuación es:

$$T_D = U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (198)$$

Este resultado es idéntico a la ec. (85), que corresponde a la solución de condiciones de equilibrio térmico instantáneo. Por tanto, es posible concluir que la solución que presupone que se han alcanzado condiciones de equilibrio térmico instantáneo corresponde a un caso particular de la solución general dada por la ec. (190).

La solución en el espacio real de la ec. (190) se obtiene aplicando la transformada inversa, Luke [1962][35]:

$$T_{Df}(\chi, t_D) = J\left(\lambda_D \frac{\chi}{2Pe}, (\lambda/\omega_r)(t_D - \omega_f \frac{\chi}{2Pe})\right) \cdot U\left(t_D - \omega_f \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (199)$$

donde

$$J(\nu, \tau) = \begin{cases} \exp[-(\nu + \tau)] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\nu}}\right)^k I_k(2\sqrt{\nu\tau}) & \text{si } \sqrt{\frac{\tau}{\nu}} \leq 1 \\ 1 - \exp[-(\nu + \tau)] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\nu}}\right)^{-k} I_k(2\sqrt{\nu\tau}) & \text{si } \sqrt{\frac{\tau}{\nu}} \geq 1 \end{cases} \quad (200)$$

donde  $I_k$  es la función modificada de Bessel de primera especie y orden  $k$ .

Esta solución es equivalente a la obtenida previamente por Rodríguez de la Garza [1988] [47] en el estudio de desplazamiento lineal de aceite por inyección de agua en un yacimiento fracturado.



La siguiente fórmula de recurrencia es importante en la evaluación de  $J(\nu, \tau)$  [1]:

$$I_{k+1}(x) = I_{k-1}(x) - \frac{2k}{x} I_k(x) \quad (201)$$

### 5.2.2 Caso en que Ocorre Intercambio de Calor Transitorio entre la Matriz y el Fluido (Esferas)

Substituyendo en la ecuación (189) la función de transferencia para el caso de intercambio transitorio, ec. (167), se tiene:

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-(\omega_f + \kappa_{Dr} (A_{HTbD}/\xi) \frac{f(s)}{s(1 + \frac{1}{B} f(s))}) \chi s\right) \quad (202)$$

donde

$$f(s) = \sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi \coth(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - 1$$

Utilizando la siguiente aproximación:

$$x \coth x - 1 \approx \frac{x^2}{3} \quad (203)$$

luego:

$$f(s) = \frac{\omega_r \xi^2}{3 \kappa_{Dr}} s \quad (204)$$

y, por tanto,

$$\bar{T}_{Df} = \frac{1}{s} \exp\left(-(\omega_f + \frac{1}{3} A_{HTbD} \xi \omega_r) \chi s\right) \quad (205)$$

cuya transformada inversa de Laplace es:

$$T_{Df} = U \left( t_D - \left( \omega_f + \frac{1}{3} A_{HTbD} \xi \omega_r \right) \chi \right) \quad (206)$$

De esta expresión es posible obtener la expresión para calcular la velocidad con la que viaja el frente térmico en un medio fracturado con transferencia transitoria de calor roca/fluido,  $V_{**}$  :

$$v_{**} = \frac{\omega_f}{\omega_f + \frac{1}{3} A_{HTbD} \omega_r} v \quad (207)$$

Retomando la ec. (180),

$$A_{HTbD} = 3(1 - \phi) \quad (208)$$

Al sustituir esta expresión en la ec. (207),

$$v_{**} = \frac{\omega_f}{1 - \phi \omega_r} v \quad (209)$$

Comparando la velocidad con la que viaja el frente térmico en un medio poroso bajo condiciones de equilibrio térmico instantáneo ( $v_* = \omega_f v$ ), con la velocidad con la cual viaja en un medio fracturado bajo condiciones de transferencia de calor transitoria  $v_{**}$  ec. (209), se tiene que:

$$v_{**} = \frac{1}{1 - \phi \omega_r} v_* \quad (210)$$

Esta ecuación permite establecer que en un medio fracturado y en ausencia de transferencia de calor de los estratos adyacentes el frente térmico avanza más rápidamente que en un medio poroso.

### 5.3 Solución con Transferencia de Calor de los Estratos Adyacentes

Estableciendo las siguientes suposiciones:

- El flujo de los fluidos en el medio permeable fracturado es de geometría radial.
- El transporte conductivo de calor en la dirección horizontal, tanto en el estrato fracturado como en los estratos impermeables adyacentes es despreciable.

Tomando en cuenta a las consideraciones anteriores, el planteamiento que a continuación se presenta corresponde a una formulación tipo Lauwerier.

La ecuación de la energía para el estrato permeable adyacente es:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \quad \begin{cases} 0 < r, z < \infty, \\ t > 0. \end{cases} \quad (211)$$

las ecuaciones de la energía para el fluido y la matriz de roca, (1) y (2), respectivamente son:

$$\phi \rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \phi \kappa_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - \frac{\rho_f c_f q_i}{2\pi H r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + q^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (212)$$

$$(1 - \phi) \rho_r c_r \frac{\partial T_r}{\partial t} = (1 - \phi) \kappa_r \frac{\partial^2 T_r}{\partial z^2} - q^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ -\frac{1}{2}H < z < 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (213)$$

Con las siguientes condiciones de frontera en la interfase ( $z = 0$ ):

$$T_r = T_s; \quad T_f \neq T_s \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (214)$$

$$-\phi\kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial z} = \phi h(T_f - T_s) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (215)$$

$$(1 - \phi)\kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} = \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} + \phi h(T_f - T_s) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (216)$$

Mientras que en  $z = -H/2$  se tiene:

$$\frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{\partial T_r}{\partial z} = 0 \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = -\frac{1}{2}H, \\ t > 0. \end{cases} \quad (217)$$

Integrando las ecs. (212) y (213) con respecto a  $z$  entre los límites  $-H/2$  y  $0$ :

$$\phi\rho_f c_f \int_{H/2}^0 \frac{\partial T_f}{\partial t} = \phi\kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \Big|_{z=-H/2}^{z=0} - \frac{\rho_f c_f q_i}{2\pi H r} \int_{H/2}^0 \frac{\partial T_f}{\partial r} + \int_{H/2}^0 q^*(t, \vec{x}_f) \quad (218)$$

$$(1 - \phi)\rho_r c_r \int_{H/2}^0 \frac{\partial T_r}{\partial t} = (1 - \phi)\kappa_r \frac{\partial T_r}{\partial z} \Big|_{z=-H/2}^{z=0} - \int_{H/2}^0 q^*(t, \vec{x}_f) \quad (219)$$

Al considerar las condiciones (214) a (217), las ecs. (218) y (219) se transforman en:

$$\frac{1}{2}H\phi\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = -\phi h(T_f - T_s) - \frac{\rho_f c_f q_i}{4\pi r} \frac{\partial T_f}{\partial r} + \frac{1}{2}Hq^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (220)$$

$$\frac{1}{2}H(1 - \phi)\rho_r c_r \frac{\partial T_r}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} + \phi h(T_f - T_s) - \frac{1}{2}Hq^*(t, \vec{x}_f) \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ z = 0, \\ t > 0. \end{cases} \quad (221)$$

## 5.3.1 Formulación Adimensional

Considerando la definición de variables adimensionales dadas en la sección 4.2.1, la formulación adimensional tipo Lauwerier es:

$$\frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T_{D_s}}{\partial z_D^2} \quad \begin{cases} 0 < z_D < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (222)$$

$$z_D = 0: \quad \omega_f \frac{\partial T_{D_f}}{\partial t_D} = \phi \text{Bi}(T_{D_s} - T_{D_f}) - 2\text{Pe} \frac{\partial T_{D_f}}{\partial \chi} - \int_0^{t_D} \frac{\partial T_{D_f}(\tau)}{\partial \tau} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (223)$$

$$z_D = 0: \quad \omega_r \frac{\partial T_{D_s}}{\partial t_D} = \kappa_{Dr} \frac{\partial T_{D_s}}{\partial z_D} - \phi \text{Bi}(T_{D_s} - T_{D_f}) + \int_0^{t_D} \frac{\partial T_{D_f}(\tau)}{\partial \tau} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ t_D > 0 \end{cases} \quad (224)$$

$$T_{D_f} = T_{D_r} = T_{D_s} = 0 \quad \begin{cases} 0 < \chi, z_D < \infty, \\ t_D = 0. \end{cases} \quad (225)$$

$$T_{D_f} = 1 \quad \begin{cases} \chi = z_D = 0, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (226)$$

$$T_{D_s} \rightarrow 0 \quad \begin{cases} 0 < \chi < \infty, \\ z_D \rightarrow \infty, \\ t_D > 0. \end{cases} \quad (227)$$

## 5.3.2 Solución

Al aplicar la transformada de Laplace a la ec. (222) y condiciones (224)—(227), se obtiene:

$$\bar{T}_{D_s} = C e^{-\sqrt{s} z_D / a} \quad \{ 0 < z_D < \infty. \quad (228)$$

$$\bar{T}_{Df}(\chi = 0, z_D = 0) = 1/s, \quad (229)$$

$$\bar{T}_{Ds}(\chi, z_D \rightarrow \infty) = 0, \quad (230)$$

$$z_D = 0: \quad s\omega_f \bar{T}_{Df} = \phi \text{Bi}(\bar{T}_{Ds} - \bar{T}_{Df}) - 2\text{Pe} \frac{d\bar{T}_{Df}}{d\chi} - s\bar{T}_{Df}(s) \bar{q}_{D1}(s), \quad (231)$$

$$z_D = 0: \quad s\omega_r \bar{T}_{Ds} = \kappa_{Ds} \frac{\partial \bar{T}_{Ds}}{\partial z_D} - \phi \text{Bi}(\bar{T}_{Ds} - \bar{T}_{Df}) + s\bar{T}_{Df}(s) \bar{q}_{D1}(s). \quad (232)$$

Al evaluar la ec. (228) en  $z_D = 0$ :

$$\bar{T}_{Ds}|_{z_D=0} = C \quad (233)$$

Al derivar la ec. (228) con respecto a  $z_D$  y evaluarla en  $z_D = 0$ :

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_{Ds}}{\partial z_D} \right|_{z_D=0} = -\frac{\sqrt{s}}{a} C \quad (234)$$

Al usar estos dos últimos resultados en la ec. (232), se tiene:

$$s\omega_r C = \frac{\kappa_{Ds} \sqrt{s}}{a} - \phi \text{Bi}(C - \bar{T}_{Df}) + s\bar{T}_{Df}(s) \bar{q}_{D1}(s). \quad (235)$$

Al despejar la constante de integración  $C$ , se tiene:

$$C = \frac{\phi \text{Bi} + s\bar{q}_{D1}(s)}{s\omega_r + b\sqrt{s} + \phi \text{Bi}} \bar{T}_{Df} \quad (236)$$

Al substituir el valor de la constante de integración  $C$  en la ec. (231), tomando en cuenta la ec. (233), reordenando y después de arreglar:

$$-2Pe \frac{dT_{Df}}{d\chi} = - \left\{ \left( \frac{\omega_r + b/\sqrt{s} - \bar{q}_{D1}(s)}{\omega_r s + b\sqrt{s} + \phi Bi} \right) \phi Bi + \bar{q}_{D1}(s) + \omega_f \right\} s T_{Df} \quad (237)$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria sujeta a la condición de frontera interior (229) es:

$$T_{Df} = \frac{1}{s} \exp \left( - \left\{ \left( \frac{\omega_r + b/\sqrt{s} - \bar{q}_{D1}(s)}{\omega_r s + b\sqrt{s} + \phi Bi} \right) \phi Bi + \bar{q}_{D1}(s) + \omega_f \right\} s \frac{\chi}{2Pe} \right) \quad (238)$$

Mientras que la distribución de la temperatura en la matriz rocosa es:

$$T_{Ds} = \frac{\phi Bi + s \bar{q}_{D1}(s)}{s \omega_r + b\sqrt{s} + \phi Bi} T_{Df} e^{-\sqrt{s} x_D/a} \quad (239)$$

Reescribiendo las funciones de transferencia:

- Flujo de calor roca/fluido régimen pseudo-permanente,

$$\bar{q}_{D1}(s) = \frac{\omega_r}{(\omega_r/\lambda_D)s + 1} \quad (240)$$

- Flujo de calor roca/fluido régimen transitorio (bloques esféricos),

$$\bar{q}_{D1}(s) = \kappa_{Dr} (A_{HTbD}/\xi) \frac{f(s)}{s(1 + \frac{1}{Bi} f(s))} \quad (241)$$

donde

$$f(s) = \sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi \coth(\sqrt{s \omega_r / \kappa_{Dr}} \xi) - 1$$

Considerando las siguientes relaciones —obtenidas en la sección 5.1.3—:

$$\lambda_D = \frac{\pi^2}{\xi^2 / \kappa_{Ds}}, \quad l_D = \frac{3(1 - \phi)}{\pi^2} \xi \quad (242)$$

Se obtiene que,

$$\bar{q}_{D1}(s) = \frac{3(1-\phi)}{\pi^2} \lambda_D \frac{f(s)}{s(1 + \frac{1}{Bi} f(s))} \quad (243)$$

y

$$f(s) = \pi \sqrt{s \omega_r / \lambda_D} \coth(\pi \sqrt{s \omega_r / \lambda_D}) - 1.$$

Nótese que para tiempos suficientemente grandes,  $s \rightarrow 0$  y  $\bar{q}_{D1}(s) \approx \omega_r$ , por lo que las ecs. (238) y (239) se reducen a:

$$\bar{T}_D = \bar{T}_{Df} = \bar{T}_{Ds} = \frac{1}{s} \exp\left((b/\sqrt{s} + 1)s \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (244)$$

cuya transformada inversa de Laplace es:

$$T_D(\chi, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{b \frac{\chi}{2Pe}}{2\sqrt{t_D - \frac{\chi}{2Pe}}} U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (245)$$

la cual es precisamente la solución clásica de Lauwerier.

Sin embargo, ante la imposibilidad de obtener una expresión analítica de la transformada inversa de Laplace de la ec. (238), la transformada inversa de  $\bar{T}_{Df}$  se puede obtener numéricamente a partir del algoritmo de Stehfest [56], el cual trabaja según el siguiente procedimiento:

$$T_{Df}(t_D) = \frac{\ln 2}{t_D} \sum_1^N v_i \bar{T}_{Df}\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right) \quad (246)$$

donde los coeficientes  $v_i$  —independientes del tiempo— se determinan de acuerdo al procedimiento siguiente:

$$v_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{\operatorname{Min}(i, N/2)} \frac{k^{(N/2)} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \quad (247)$$



La Fig. 7 muestra la distribución espacial de la temperatura adimensional para el fluido y matriz rocosa a través del medio fracturado, además de la distribución de la temperatura según el modelo de Lauwerier. Obsérvese que el efecto de considerar condiciones de no-equilibrio térmico roca/fluido es el que las temperaturas adimensionales bajo estas condiciones sean superiores a las temperaturas predichas por el modelo de Lauwerier, que considera dicho equilibrio. Otro aspecto interesante es que en un sistema en que no existen condiciones de equilibrio térmico roca/fluido, el disturbio térmico alcanza distancias mayores. De otra manera, si se habla de la inyección no-isotérmica en un yacimiento geotérmico fracturado bajo condiciones de no equilibrio térmico roca/fluido, la temperatura teórica dimensional que alcanzan tanto el fluido como la matriz rocosa son inferiores a las temperaturas del sistema roca/fluido cuando sí se consideran estas condiciones ( $T = T_f = T_r$ ), pero el disturbio térmico llega más lejos del punto de inyección, lo cual es un aspecto importante en el diseño de una operación masiva de inyección de fluidos de temperatura relativamente baja en un campo geotérmico.

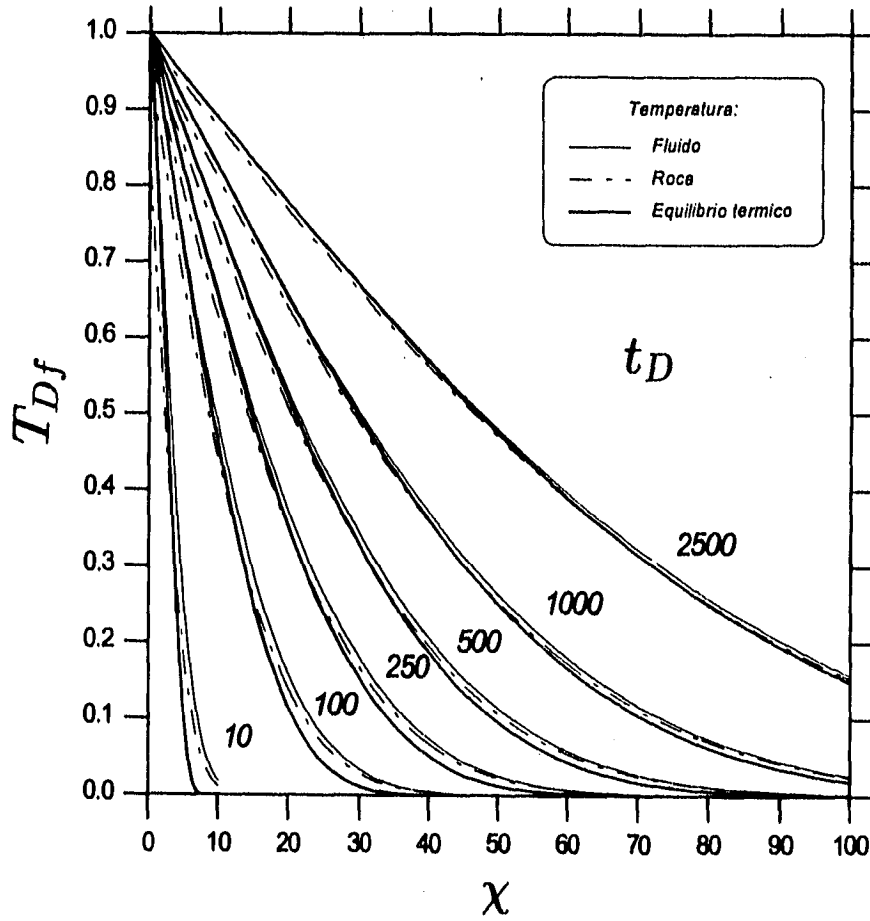


Fig. 7: Distribución de la temperatura en un medio naturalmente fracturado.

## 6 FRENTE TERMICO

Se define el frente térmico como el lugar geométrico de los puntos donde la temperatura del fluido en el sistema de fracturas ha disminuido una cierta fracción de la diferencia entre la temperatura del yacimiento y la temperatura de inyección ((43)):

$$T_* = T_i + f(T_0 - T_i) \quad (248)$$

donde el subíndice  $*$  se refiere al frente térmico.

Si el frente térmico es simétrico  $f$  se considera igual a  $\frac{1}{2}$ ; sin embargo, la experiencia indica que el frente térmico es altamente no simétrico y la más pequeña variación de la temperatura es muy significativa en diversas aplicaciones geotérmicas. Al respecto, *Pruess y Bodvarson* [1984] [43] sugieren utilizar un valor de  $f = \frac{3}{4}$ . De acuerdo a lo anterior, la temperatura adimensional correspondiente al frente térmico es:

$$T_{D*} = \frac{1}{4} \quad (249)$$

Procediendo de acuerdo a la definición del frente térmico, y considerando el modelo de la distribución de la temperatura en el estrato permeable fracturado (ec. (238)), así como las funciones de transferencia de calor roca/fluido y el algoritmo de inversión numérica de Stehfest [56], en la siguiente sección se presenta un estudio sobre la sensibilidad del frente térmico a los principales parámetros adimensionales asociados a la descripción del proceso.

### 6.1 Resultados

En las Figs. 8-14 se presentan distintas curvas tipo del avance del frente térmico ( $FT$ ) en un medio naturalmente fracturado ( $MNF$ ) que se generaron para diversos valores de las principales variables adimensionales. Los valores utilizados como referencia pueden considerarse como típicos de un medio fracturado y se presentan en la Tabla 2:

Tabla 2- Parámetros de referencia

|             |          |
|-------------|----------|
| $\lambda_D$ | 100 000  |
| $\omega_f$  | 0.10     |
| $\phi$      | 0.1      |
| $\phi Bi$   | 100      |
| $\hat{Bi}$  | $\infty$ |
| $b$         | 1        |

- La Fig. 8 presenta la curva tipo del avance del *FT* en un *MNF*. Se considera transferencia de calor entre los bloques de roca y el fluido tanto para condiciones pseudo-estacionarias como transitorias.
- La Fig. 9 muestra el efecto del parámetro  $\lambda_D$  en la evolución del *FT*, se presentan valores de  $\lambda_D$  correspondientes a  $1E3, 1E4, 1E5, 1E6$ . Se considera que la transferencia de calor entre los bloques de roca y el fluido ocurre bajo condiciones pseudo-estacionarias. La Fig. 10 *ídem* a la anterior, excepto que la transferencia de calor roca/fluido se presenta bajo condiciones transitorias.
- La Fig. 11 muestra el efecto del parámetro  $\omega_f$  en la evolución del *FT*. Se presentan curvas para  $\omega_f = 0.01, .05, 0.1, 0.2$ . Se considera que la transferencia de calor roca/fluido ocurre bajo condiciones pseudo-estacionarias. La Fig. 12 *ídem* a la anterior, excepto que la transferencia de calor roca/fluido ocurre bajo condiciones transitorias.
- Las Figs. 13 y 14 muestran la sensibilidad en el *FT* de los parámetros  $\hat{Bi}$  y  $\phi$ . En estos casos la transferencia de calor roca/fluido tiene lugar bajo condiciones transitorias.

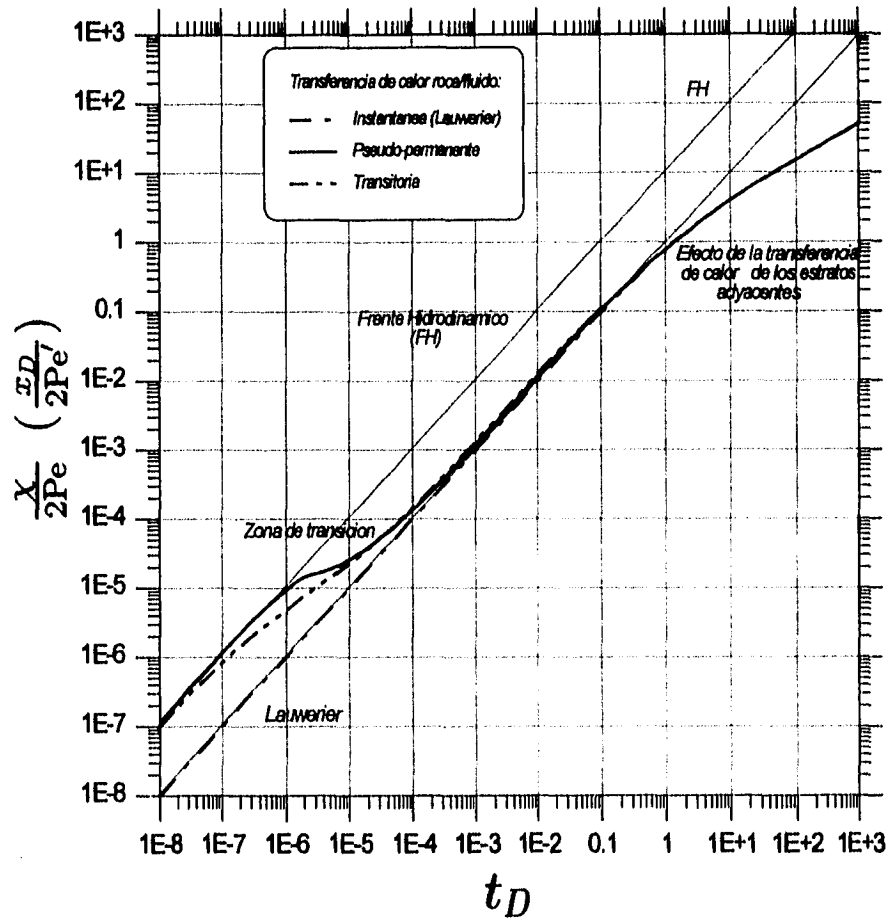


Fig. 8: Avance del Frente Térmico (FT) en un Medio Naturalmente Fracturado (MNF). ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ ).

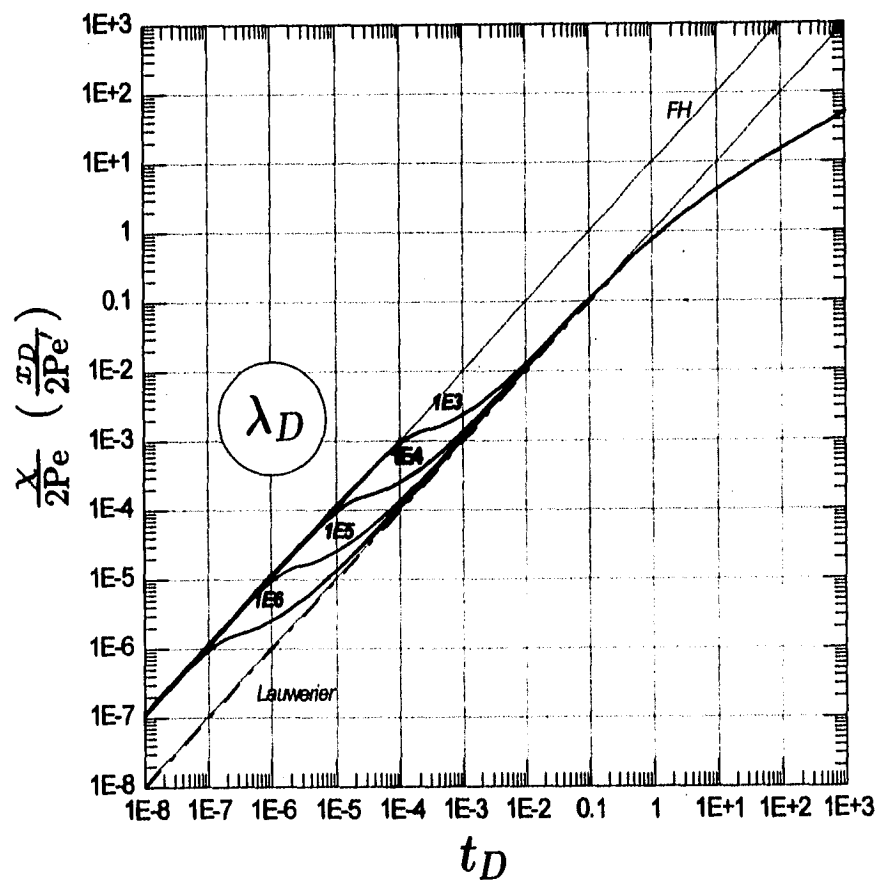


Fig. 9: Avance del FT en un MNF. Efecto del parámetro  $\lambda_D$ . Transferencia de calor roca/fluido en régimen pseudo-permanente. ( $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi Bi = 100$ ).

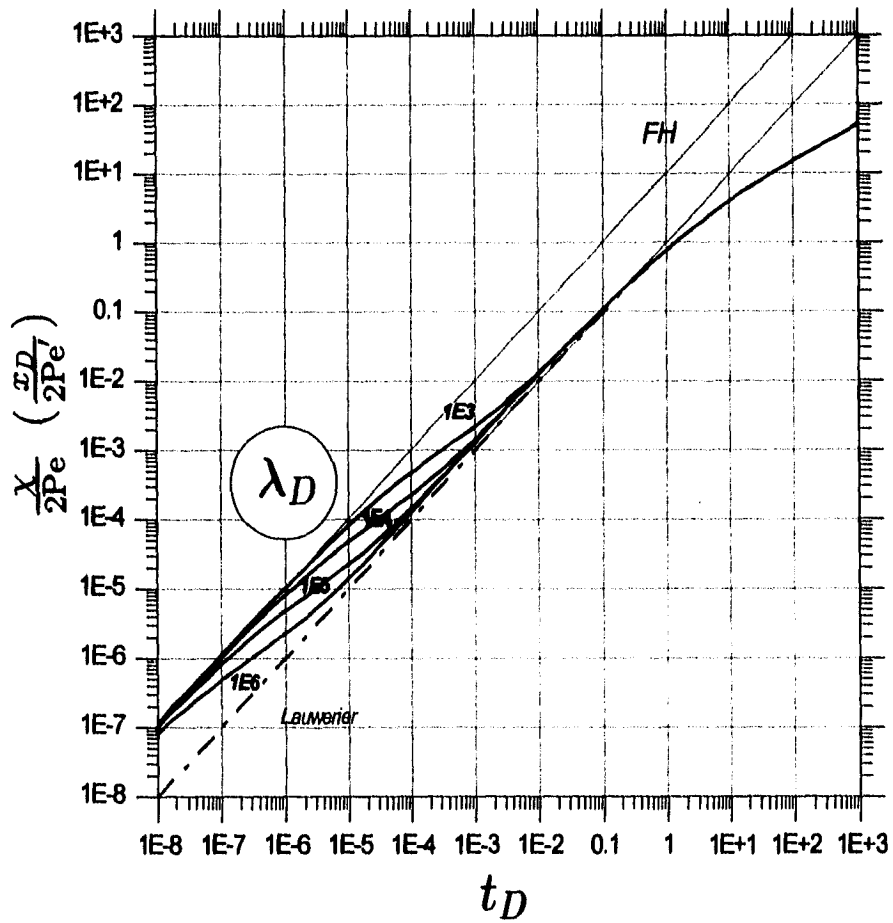


Fig. 10: Avance del *FT* en un *MNF*. Efecto del parámetro  $\lambda_D$ . Transferencia de calor roca/fluido en régimen transitorio. ( $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ ).

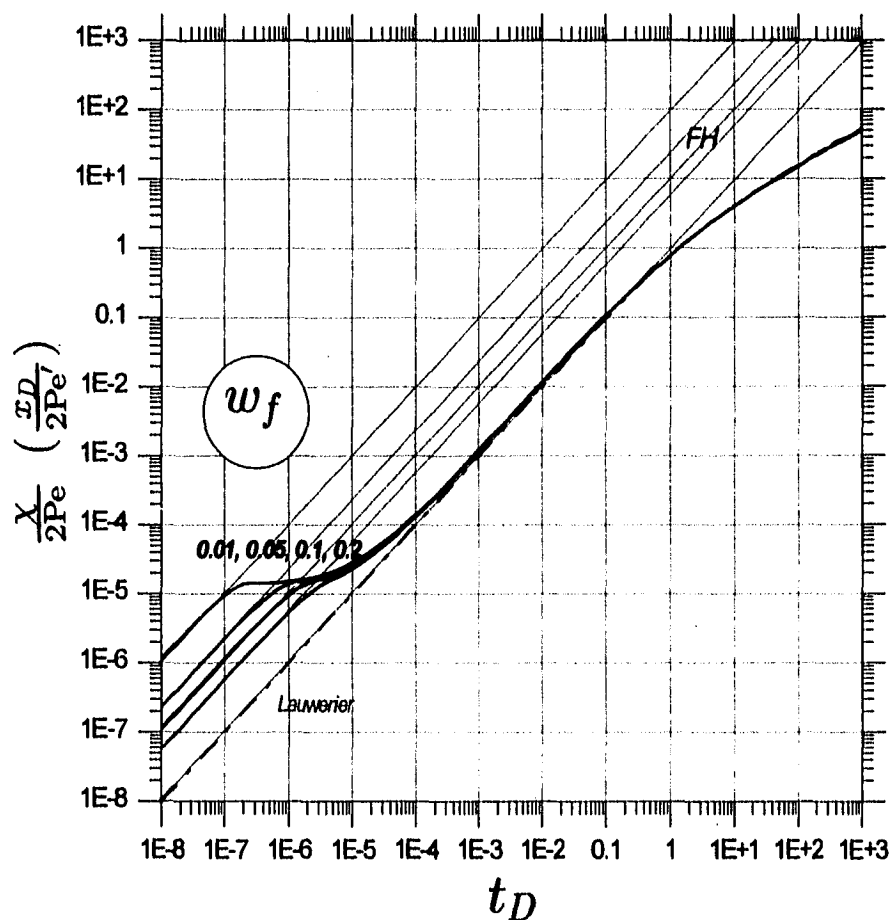


Fig. 11: Avance del FT en un MNF. Efecto del parámetro  $\omega_f$ . Transferencia de calor roca/fluido ocurre en régimen pseudo-estacionario. ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\phi Bi = 100$ )



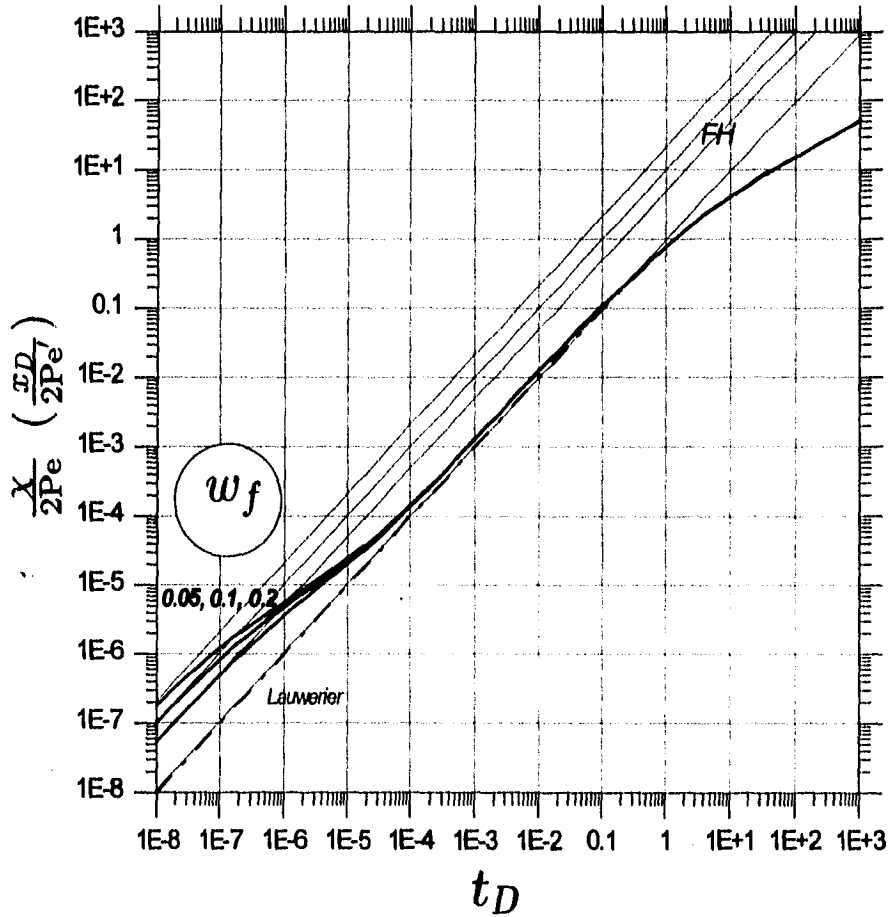


Fig. 12: Avance del FT en un MNF. Efecto del parámetro  $\omega_f$ . Transferencia de calor roca/fluido ocurre en régimen transitorio. ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ )

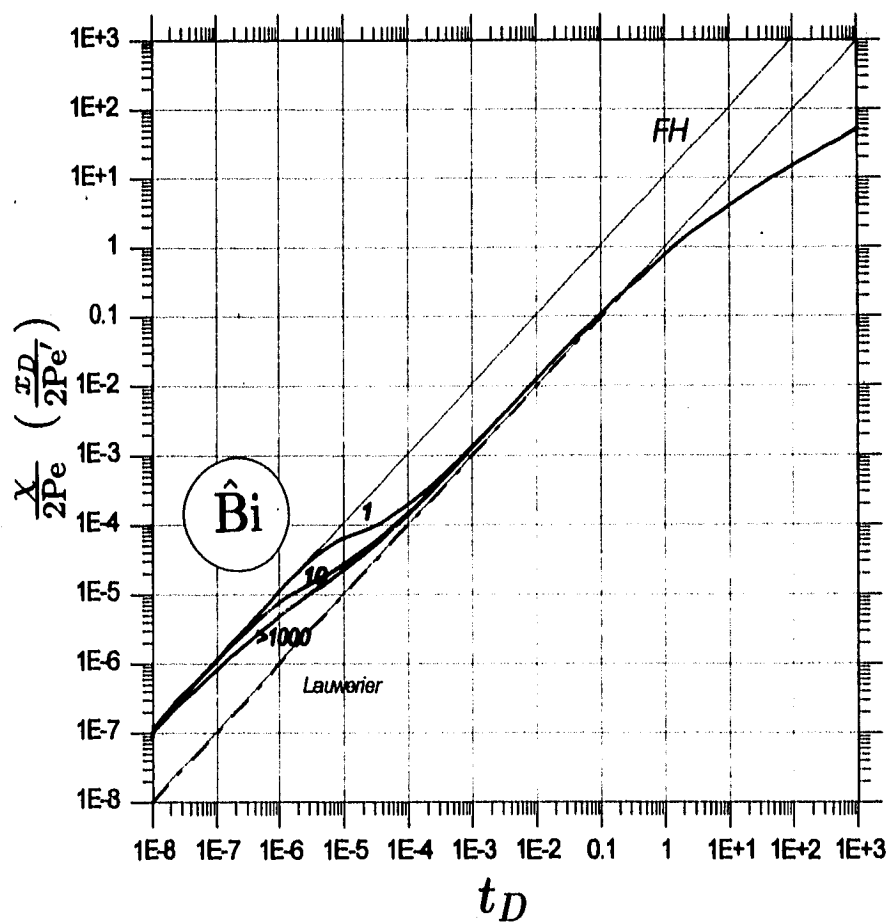


Fig. 13: Avance del FT en un MNF. Efecto del parámetro  $\hat{Bi}$ . Transferencia de calor roca/fluido ocurre en régimen transitorio. ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi_{Bi} = 100$ )

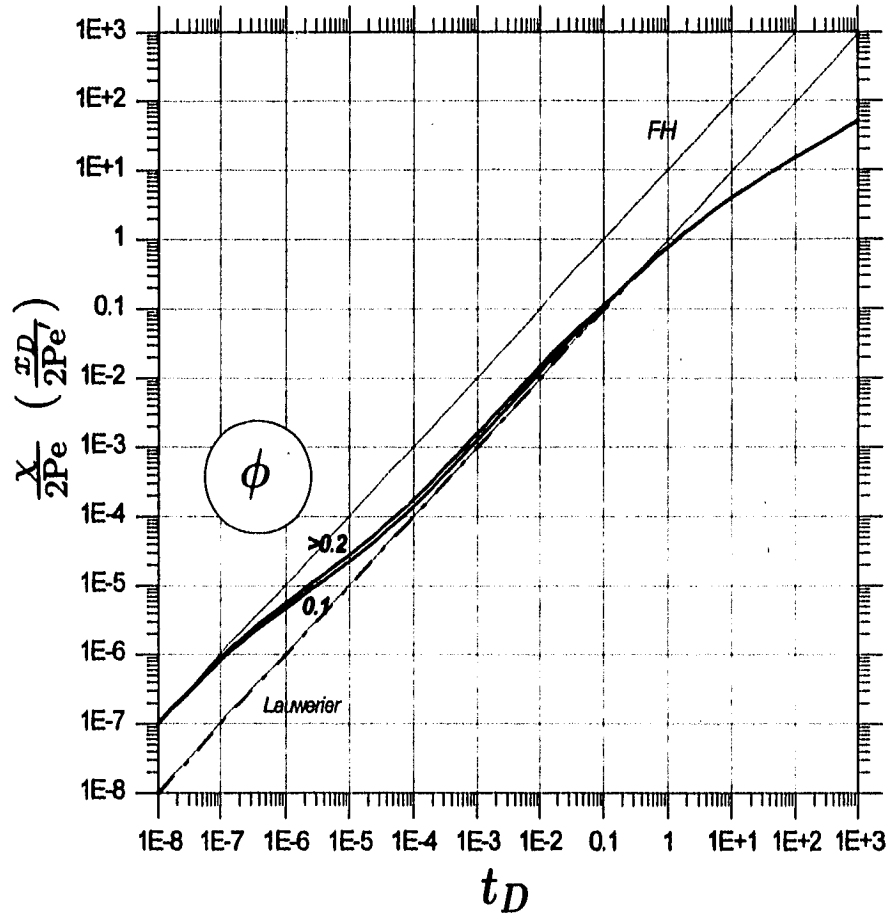


Fig. 14: Avance del *FT* en un *MNF*. Efecto de  $\phi$ . Transferencia de calor roca/fluido es en régimen transitorio. ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ )

## 6.2 Discusión

1. Se observa de la Fig. 8 que el avance del frente térmico en un medio naturalmente fracturado muestra la presencia de cuatro períodos característicos que a continuación se describen:

- (a) *Período temprano.* A tiempos pequeños se observa que la localización del frente térmico  $FT$  es la misma que la del frente hidrodinámico  $FH$ . En este período, como se ha visto, el avance del  $FT$  es aún independiente del efecto de la transferencia de calor proveniente de los bloques de roca. Durante este período se tiene para los casos lineal y radial, respectivamente:

$$x_{D*} = 2Pe' t_D/\omega_f \quad (250)$$

$$x_* = 2Pe t_D/\omega_f \quad (251)$$

donde el subíndice " \* " se refiere al  $FT$ .

Al expresar estas relaciones en término de las variables reales y reacomodando términos se obtiene:

$$x_* = x^* = (V/\phi)t \quad (252)$$

$$r_* = r^* = \sqrt{\frac{q_i t}{\phi \pi H}} \quad (253)$$

donde el superíndice " \* " se refiere al  $FH$ .

- (b) *Período de transición.* A tiempos intermedios se presenta una región de transición en la que se inicia la transferencia de calor de la roca fracturada al fluido contenido en la fractura, lo cual ocasiona la retardación del  $FT$ . En general, esta región está fuertemente influenciada por el grado de heterogeneidad del medio fracturado.
- (c) *Período de equilibrio.* A tiempos grandes el avance del  $FT$  en el  $MNF$  obedece a condiciones de equilibrio térmico instantáneo entre la matriz de roca y el fluido, y la conducción de calor de los estratos adyacentes es despreciable. En este período tenemos para los casos lineal y radial, respectivamente:

$$x_{D*} = 2Pe' t_D \quad (254)$$

$$\chi_* = 2Pe t_D \quad (255)$$

Entonces, de estas expresiones se obtiene que el avance del frente térmico a partir del pozo inyector está dado por:

$$x_* = \omega_f(V/\phi)t, \quad (256)$$

$$r_* = \sqrt{\omega_f \frac{q_i t}{\phi \pi H}} \quad (257)$$

para los casos lineal y radial, respectivamente.

(d) *Período tardío.* A tiempos suficientemente grandes, se presenta un período caracterizado por la combinación de las condiciones de equilibrio térmico y la influencia de la transferencia de calor de los estratos adyacentes.

- En general, se observa del conjunto de gráficas que el *FH* y el *FT* viajan paralelamente. Si combinamos las expresiones del avance del *FT* y del *FH* para un determinado instante de tiempo, se puede demostrar que la separación entre el frente térmico y el frente hidrodinámico cuando no hay transferencia de calor de los estratos adyacentes está dado por las siguientes expresiones:

$$\delta_{i*}^* = x^* - x_* = (1 - \omega_f)x^* \quad (258)$$

$$\delta_{r*}^* = r^* - r_* = (1 - \sqrt{\omega_f})r^* \quad (259)$$

- Se observa de las Figs. 9 y 10 que el inicio de la zona de transición lo determina el parámetro  $\lambda_D (= \frac{1}{4}H^2\kappa_{Dr}(A_{HTb}/l))$ , el cual es una medida del nivel de la intensidad de la interacción entre la roca porosa y la fractura, así como de la potencia del medio fracturado. Nótese que para valores muy grandes de  $\lambda_D$ , por ejemplo valores mayores que  $1 \times 10^6$ , el período dominado por condiciones de equilibrio térmico roca/fluido comienza más temprano, lo cual es cierto cuando los bloques de roca son

muy pequeños ( $l$  pequeño), o cuando el espesor del estrato permeable y/o el área de transferencia de calor por unidad de volumen total es muy grande ( $A_{HTb} \rightarrow \infty$ ). En general, para un determinado espesor, en el límite, si  $\lambda_D \rightarrow \infty$  implicaría que el medio es homogéneo.

4. Las Figs. 11 y 12 muestran que  $\omega_f$  afecta el tiempo de duración de la región de transición. Asimismo, la duración de la región de transición está dada tanto para los casos lineal y radial por la siguiente expresión:

$$\Delta t_*^* = t_* - t^* = \left(\frac{1}{\omega_f} - 1\right)t^* \quad (260)$$

donde  $t^*$  y  $t_*$  son los tiempos de arribo de los frentes hidrodinámico y térmico, respectivamente.

5. Del conjunto de gráficas, Figs. 8-14, se nota que para tiempos suficientemente grandes, la tendencia lineal de la segunda línea recta se desvía del comportamiento correspondiente a las condiciones de equilibrio térmico debido a la influencia de la transferencia de calor de los estratos adyacentes. El inicio del periodo de flujo dominado simultáneamente por condiciones de equilibrio térmico y por la transferencia de calor de los estratos adyacentes se inicia aproximadamente cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$t_D \geq .1 \quad (261)$$

$$\frac{\chi}{2Pe} \geq .1 \quad (262)$$

6. Por otro lado, la distribución de la temperatura en el medio fracturado para tiempos grandes está dada por la solución de Lauwerier:

$$T_D(\chi, t_D) = \operatorname{erfc} \frac{b \frac{\chi}{2Pe}}{2\sqrt{t_D - \frac{\chi}{2Pe}}} U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right) \quad (263)$$

Ahora bien, según la definición del  $FT$  especificada en (248) tenemos que:

$$\frac{1}{4} = \operatorname{erfc} \frac{b \frac{\chi}{2Pe}}{2\sqrt{t_D - \frac{\chi}{2Pe}}} U\left(t_D - \frac{\chi}{2Pe}\right)$$

y para que se satisfaga la anterior relación, el valor del argumento  $\zeta$  de la función  $\text{erfc}(\zeta)$  deberá ser igual a 0.81342, como fue previamente sugerido por Pruess y Bodvarson [1984] [43], se tiene por tanto:

$$\zeta = \frac{b \chi_*}{2\sqrt{t_D - \frac{\chi_*}{2\text{Pe}}}} \quad (265)$$

al recomodar términos,

$$t_D = \frac{\chi_*}{2\text{Pe}} + \left(\frac{b}{2\zeta}\right)^2 \left(\frac{\chi_*}{2\text{Pe}}\right)^2 \quad (266)$$

Si la anterior relación se expresa en función de las variables reales, se obtiene que el tiempo de arribo del frente térmico,  $t_*$ , es:

$$t_* = \frac{\phi \pi H r_*^2}{\omega_f q_i} + \kappa_s \rho_s c_s \left(\frac{\pi}{\zeta \rho_f c_f q_i}\right)^2 r_*^4 \quad (267)$$

Al realizar un desarrollo similar para el caso lineal, se tiene:

$$t_* = \frac{x_*}{\omega_f v} + \kappa_s \rho_s c_s \left(\frac{1}{\zeta H \rho_f c_f v}\right)^2 x_*^2 \quad (268)$$

Estos resultados muestran dos aspectos interesantes, por una parte que el tiempo de arribo del *FT* es un proceso aditivo —la suma de los efectos de intercambio de calor roca/fluido y el de la transferencia de calor hacia (o desde) los estratos adyacentes—; y por la otra, que para tiempos suficientemente grandes, el primer término del miembro de la derecha de las ecs. (267) y (268) es despreciable y el avance del *FT* está determinado por  $t/x^2$  y  $t/r^4$  para los casos lineal y radial, respectivamente.

Al rearmar términos en la ec. (266) se obtiene:

$$\left(\frac{b}{2\zeta}\right)^2 \frac{1}{2\text{Pe}} \chi_*^2 + \chi_* - 2\text{Pe} t_D = 0 \quad (269)$$

Al resolver para la incógnita  $\chi_*$ , se obtiene que la posición del frente térmico está dada por la siguiente expresión:

$$\chi_* = \frac{1}{2} r_{D*}^2 = \left(\frac{2\zeta}{b}\right)^2 \text{Pe} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\zeta}\right)^2 t_D} - 1\right) \quad (270)$$

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

o en función de la variables reales:

$$r_*^2 = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2 \frac{\rho_f c_f q_i H}{2\pi \bar{\kappa}} \left( \sqrt{1 + \bar{\alpha} \left(\frac{2b}{\zeta H}\right)^2 t} - 1 \right) \quad (271)$$

donde  $b = \sqrt{\rho_s c_s \kappa_s} / \sqrt{\rho c \bar{\kappa}}$ .

Para el caso lineal se tiene la siguiente expresión:

$$x_{D*} = \left(\frac{2\zeta}{b}\right)^2 \text{Pe}' \left( \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\zeta}\right)^2 t_D} - 1 \right) \quad (272)$$

o en función de la variables reales:

$$x_* = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2 \frac{\rho_f c_f V H}{2\bar{\kappa}} \left( \sqrt{1 + \bar{\alpha} \left(\frac{2b}{\zeta H}\right)^2 t} - 1 \right) \quad (273)$$

7. Se puede observar de las Figs. 8-14 que el efecto de la transferencia de calor de tipo transitoria roca/fluido es el de suavizar la curva que determina la región de transición, mientras que en el caso de transferencia de calor en régimen pseudo-estacionario se presenta un cambio más brusco, en otras palabras, el frente térmico llega con menor prontitud para el caso de una transferencia de calor transitoria que para el de una de características pseudo-estacionarias.
8. De la Fig. 13 se observa que el considerar que existe una caída de temperatura adicional en la interfase roca/fluido ( $\text{Bi} < 1000$ ) ocasiona que el frente térmico se comporte de acuerdo a un modelo de tipo de transferencia de calor pseudo-estacionario entre ambos medios. Esto es similar a lo que ocurre en los modelos de Doble Porosidad para cuando la transferencia de fluido de la matriz de roca a las fracturas es restringida por la presencia de una zona de daño ("skin") en la interfase [18, 19, 22, 39], ocasionado, por ejemplo, por efectos de mineralización.
9. Finalmente, se aprecia de la Fig. 14 que la magnitud de la porosidad total no muestra un efecto de importancia sobre el proceso de transferencia de calor entre la matriz y el fluido en el sistema de fracturas, cuando este proceso se realiza en régimen transitorio.



7 FRACCION DEL CALOR TRANSFERIDO  $W^*$ 

Retomando la definición de  $W^*$ ,

$$W^* = \frac{\frac{1}{2Pe} \int_0^{t_D} \int_0^\infty \kappa_{Ds} \frac{\partial T_{Df}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} d\chi dt_D}{t_D} \quad (274)$$

Puesto que no se dispone de una expresión en el espacio real para  $T_{Df}$  no es posible calcular directamente  $W^*$ ; sin embargo, es posible determinarlo a partir del siguiente procedimiento:

- Rearreglando la ec. (274) para obtener:

$$t_D W^* = \frac{1}{2Pe} \int_0^{t_D} \int_0^\infty \kappa_{Ds} \frac{\partial T_{Df}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} d\chi dt_D \quad (275)$$

- Al aplicar la transformada de Laplace se obtiene:

$$\frac{d\bar{W}^*}{ds} = s \frac{1}{2Pe} \int_0^\infty \kappa_{Ds} \frac{\partial \bar{T}_{Df}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0} d\chi \quad (276)$$

Este resultado se obtuvo con la ayuda de la siguiente propiedad de la transformada de Laplace, la que se define como:

$$\mathcal{L}\{tF(t)\} = \frac{df(s)}{ds}$$

donde  $\mathcal{L}$  es el operador de la transformada de Laplace.

Substituyendo el modelo para  $T_{Df}$  en la ec. (276) obtenemos:

$$\frac{d\bar{W}^*}{ds} = \frac{b}{s^2} \frac{\phi Bi + s\bar{q}_{D1}}{(b + \sqrt{s})\phi Bi + (s\bar{q}_{D1} + \omega_f s)(\omega_r \sqrt{s} + b)} \quad (277)$$

- La transformada inversa de Laplace de  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d\bar{W}^*}{ds}\right\}$ , se determina numéricamente, para cada instante de tiempo  $t_D$ , mediante el algoritmo de Stehfest.

- Finalmente, la fracción del calor transferido es:

$$W^* = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d\bar{W}^*}{ds}\right\} \frac{1}{t_D} \quad (278)$$

La Fig. 15 muestra el comportamiento de  $W^*$  para diversos valores del parámetro  $\omega_f$ . Por otra parte, se observó que no se presentó sensibilidad apreciable del parámetro  $\lambda_D$  sobre  $W^*$ , ya que variándola entre  $100 < \lambda_D < 100000$  no se observaron cambios en la curva. Por otra parte, nótese que en el modelo usado para la generación de  $W^*$  vs.  $t_D$ , ec. (277), no aparece el número adimensional de Peclet y en el cual aparece en relación directa el ritmo de inyección  $q_i$ ; luego se puede inferir, como se señaló en la sección 4.7, que  $W^*$  no depende del ritmo de inyección. En la sección 8 se analiza un problema ilustrativo donde se hace uso de la curva tipo de  $W^*$  vs.  $t_D$ .

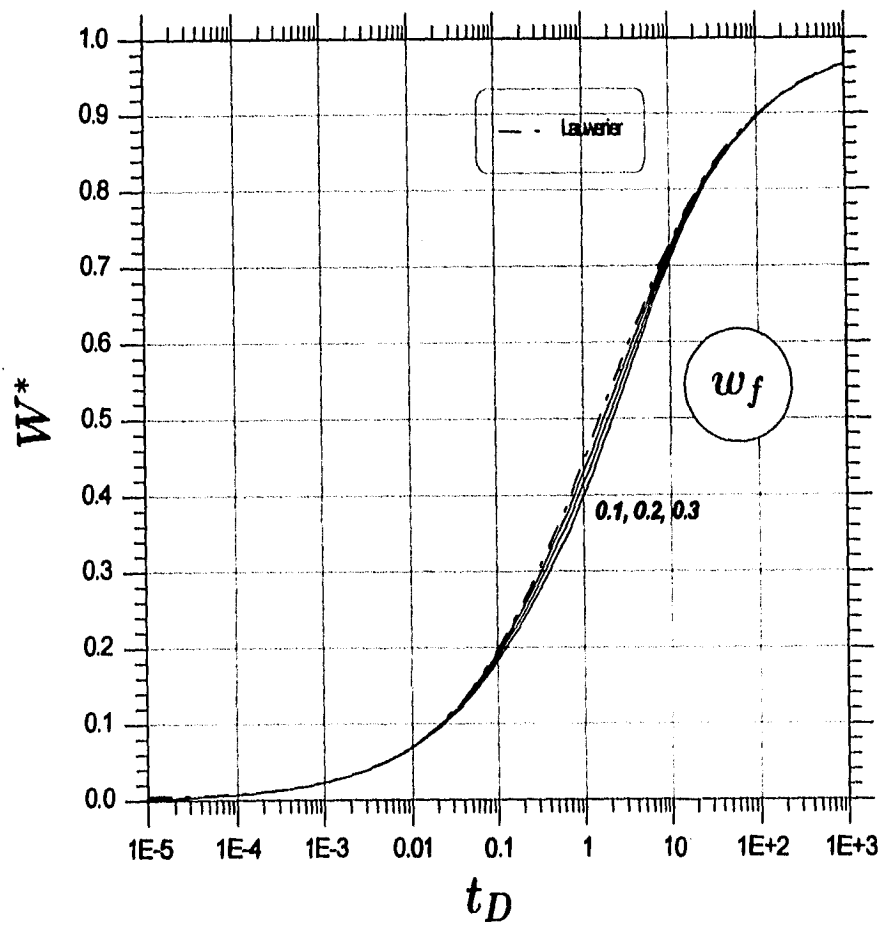


Fig. 15: Comportamiento de la fracción del calor transferido para diversos valores de  $\omega_f$ . ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ )

## 8 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Se inyecta continuamente durante un período de 1 año fluido de baja temperatura en un yacimiento geotérmico naturalmente fracturado con un caudal constante de  $0.03 \text{ m}^3/\text{s}$ . Suponiendo que el patrón de flujo en el medio permeable es de geometría eminentemente radial, y la diferencia de temperatura entre el fluido frío y el sistema es de  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Calcular para espesores del estrato permeable de  $10 \text{ m}$ ,  $100 \text{ m}$  y  $1000 \text{ m}$ :

- La posición del frente hidrodinámico  $r^*$  y la del frente térmico  $r_*$  con y sin transferencia de calor de los estratos impermeables adyacentes.
- La fracción del calor transferido  $W^*$  al fluido inyectado.
- El acumulativo del calor adquirido por el fluido.

Las propiedades termofísicas del fluido, de la roca seca y roca saturada se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3— Propiedades características fluido y roca

|   |                   |
|---|-------------------|
| <b>Fluido</b>   |                   |
| densidad, $\rho_f, \text{ kg/m}^3$ ,                                  | 1000              |
| calor específico, $c_f, \text{ J/kgm}^3$ ,                            | 4200              |
| conductividad térmica, $\kappa_f, \text{ W/m }^\circ\text{C}$ ,       | 1                 |
| <b>Roca</b>   |                   |
| porosidad, $\phi$ ,   | 0.1               |
| densidad, $\rho_r, \text{ kg/m}^3$ ,                                  | 2700              |
| calor específico, $c_r, \text{ J/kg m}^3$ ,                           | 1000              |
| conductividad térmica, $\kappa_r, \text{ W/m }^\circ\text{C}$ ,       | 2                 |
| <b>Roca saturada</b>  |                   |
| capacidad calorífica, $\bar{\rho}c, \text{ J/kg m}^3$ ,               | $2.8 \times 10^6$ |
| conductividad térmica, $\bar{\kappa}_r, \text{ W/m }^\circ\text{C}$ , | 1.9               |
| <b>Otras</b>  |                   |
| $b(= \sqrt{\rho_s c_s \kappa_s} / \sqrt{\rho c \bar{\kappa}})$ ,      | $\approx 1$       |
| $\omega_f(= \phi \rho_f c_f / \bar{\rho} c)$ ,                        | .15               |
| $\hat{\text{Bi}}$   | $\infty$          |
| $\lambda_D$   | 100000            |

Solución:

- Para varios tiempos adimensionales  $t_D (= 4\kappa t / \rho c H^2)$ , se determina la posición del frente térmico  $r_*$  a partir de la curva tipo de la Fig. 16; mientras que la posición del  $FT$  sin transferencia de calor de los estratos adyacentes se determina con la ec. (257):

$$r_* = \sqrt{\omega_f \frac{q_i t}{\phi \pi H}}$$

Mientras que la posición del frente hidrodinámico  $r^*$  se determina con la relación (253):

$$r^* = \sqrt{\frac{q_i t}{\phi \pi H}}$$

- El acumulativo del calor transferido se determina a partir de la siguiente expresión:

$$Q = \rho_f c_f q_i \Delta T W^* t$$

donde  $W^*$  se determina de la gráfica de la Fig. 17.

La síntesis de los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4:

Tabla 4- Resultados a un año de inyección

| $H$ (m) | $t_D$                | $\frac{\chi}{2Pe}$   | $r_*$ (m)  | $r^*$ (m) | $W^*$ (%) | $Q$ (kJ)             |
|---------|----------------------|----------------------|------------|-----------|-----------|----------------------|
| 10      | $8.4 \times 10^{-1}$ | $6.5 \times 10^{-1}$ | 185 [211]† | 542       | 40        | $8.0 \times 10^{10}$ |
| 100     | $8.4 \times 10^{-3}$ | $8.4 \times 10^{-3}$ | 67 [67]†   | 173       | 7         | $1.2 \times 10^{10}$ |
| 1000    | $8.4 \times 10^{-5}$ | $1.2 \times 10^{-4}$ | 25 [21]†   | 55        | .5        | $1.0 \times 10^9$    |

†: Los valores entre paréntesis cuadrados corresponden al  $FT$  no influenciado por la transferencia de calor de los estratos adyacentes.

### 8.1 Comentarios

- Nótese de la Fig. 16 que para  $H = 10 \text{ m}$  el  $FT$  se localiza en el inicio del período influenciado por los efectos simultáneos de condiciones de equilibrio térmico y transferencia de calor de los estratos adyacentes (período tardío). Para  $H = 100 \text{ m}$  el  $FT$  se encuentra en la región de condiciones de equilibrio térmico (período de equilibrio); mientras que para  $H = 1000 \text{ m}$  el  $FT$  se localiza al final de la región de transición que es influenciada por el efecto de la transferencia de calor no instantánea entre los bloques de roca y el fluido.
- Comparando el avance de los frentes térmicos bajo condiciones de equilibrio térmico instantáneo y el caso real, se observa de los datos de la columna correspondiente a  $r_*$  de la Tabla 3, columna 4, que para  $H = 10 \text{ m}$  el  $FT$  se encuentra más próximo del pozo inyector, respecto del  $FT$  correspondiente a una situación en la que no se presenta la transferencia de calor de los estratos adyacentes (los datos entre paréntesis cuadrados). Como se ha mencionado, el efecto de la transferencia de calor de los estratos adyacentes tiende a retardar el avance del  $FT$ .
- Para  $H = 1000 \text{ m}$  se observa que el  $FT$  ha avanzado una distancia mayor que para la situación de condiciones de equilibrio térmico.
- Nótese la importancia del espesor del estrato permeable fracturado en el tiempo de aparición de cada uno de los períodos de flujo de calor previamente definidos.
- Una observación adicional de los resultados mostrados en la Tabla 3, es que a tiempos suficientemente grandes, la aportación de calor de los estratos adyacentes impermeables originan que el frente térmico avance más lentamente de lo que la teoría del equilibrio térmico predice.

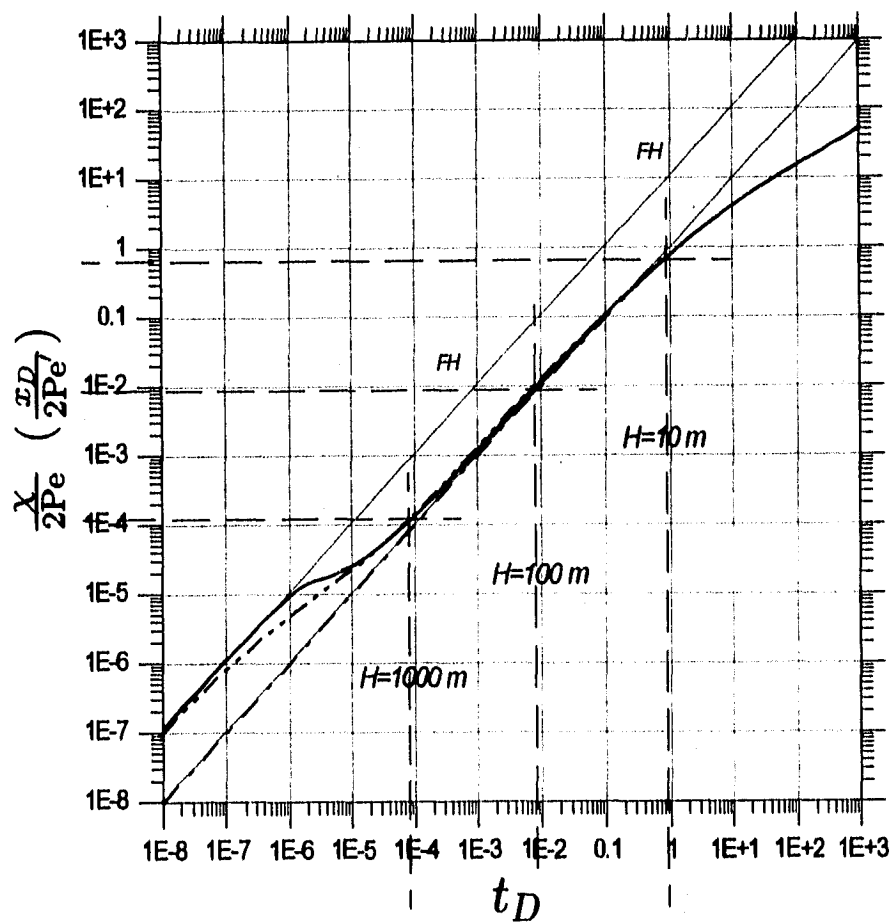


Fig. 16: Curva tipo de avance del Frente Térmico en un Medio Naturalmente Fracturado. ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\omega_f = 0.1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ ).

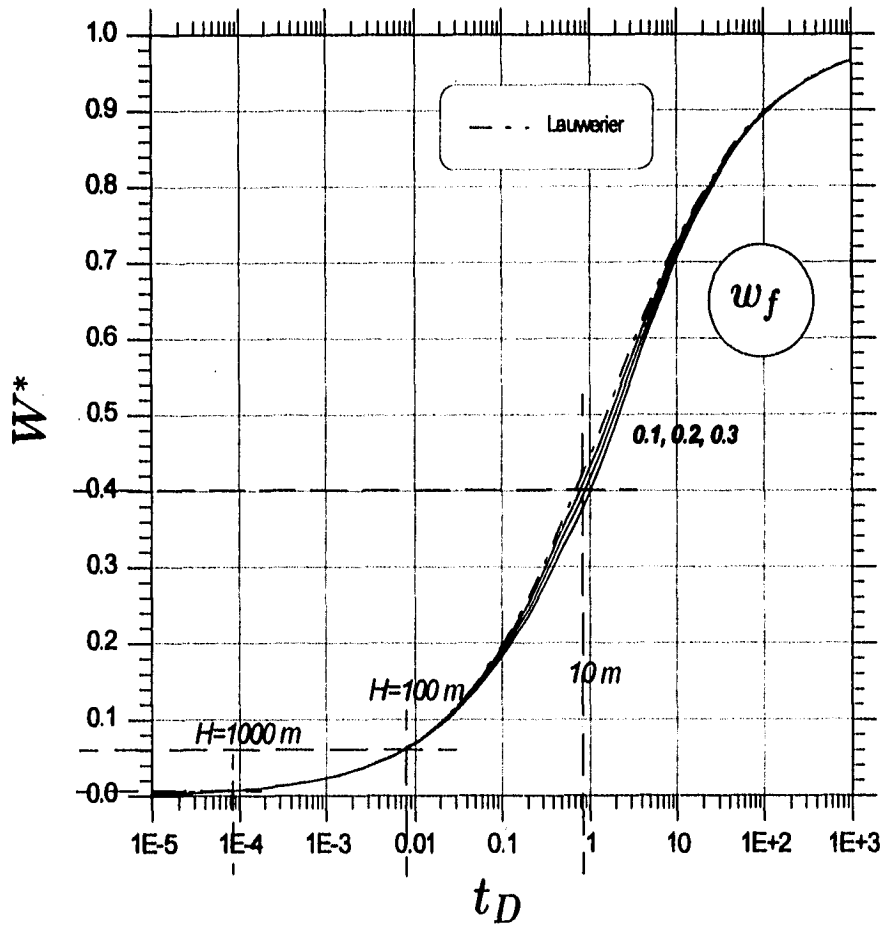


Fig. 17: Comportamiento de la fracción del calor transferido para diversos valores de  $\omega_f$ . ( $\lambda_D = 1E5$ ,  $b = 1$ ,  $\phi Bi = 100$ ,  $\hat{Bi} = \infty$ ).



## 9 CONCLUSIONES

La principal aportación del presente trabajo es la proposición de un modelo para la distribución de la temperatura asociada a la inyección no-isotérmica de un fluido a través de un medio naturalmente fracturado. El modelo considera la transferencia de calor roca/fluido tanto para condiciones transitorias como pseudo-estacionarias y contempla la transferencia de calor de los estratos impermeables adyacentes.

El modelo propuesto se ubica dentro de la clasificación tipo Lauwerier, en el sentido que considera que en el estrato permeable la conductividad térmica es infinita en la dirección vertical y finita e igual a la conductividad térmica real del medio en la dirección horizontal. Estas simplificaciones permitieron la obtención de soluciones equivalentes para las geometrías de flujo de fluido en el medio permeable de tipo lineal y radial. Para el caso lineal se deben realizar las sustituciones de  $\frac{X}{2Pe}$  por  $\frac{xD}{2Pe}$ .

Aunque el presente trabajo se dirigió hacia el estudio de los procesos de inyección en yacimientos geotérmicos, la formulación matemática es igualmente válida cuando se analiza el problema de los procesos de recuperación térmica de hidrocarburos, efectuando las adecuaciones necesarias en la temperatura adimensional.

### 9.1 Síntesis de Resultados

A continuación se presentan algunos de los resultados más relevantes obtenidos en el presente trabajo :

- El avance del frente térmico está caracterizado por la presencia de cuatro períodos distintivos: 1. Período temprano. Se da a tiempos cortos y la posición del frente térmico ( $FT$ ) es igual a la posición del frente hidrodinámico ( $FH$ ). 2. Período de transición. Este periodo se da a tiempos intermedios y es una región de transición influenciada principalmente por el grado de heterogeneidad del medio fracturado. 3. Período de equilibrio. A tiempos grandes se presenta una región dominada por el efecto de condiciones de equilibrio térmico roca/fluido. 4. Período tardío. Para tiempos suficientemente grandes el avance del  $FT$  está determinado

por el efecto combinado del aporte de calor de la roca porosa fracturada bajo condiciones de equilibrio térmico instantáneo y de la transferencia de calor de los estratos impermeables adyacentes.

- Los principales parámetros que determinan la distribución de temperaturas en el estrato permeable durante un proceso de la inyección no-isotérmica de fluidos son:
  - $\omega_f$ , que es la relación de la energía contenida en el fluido a la energía total (roca+fluido).
  - $\lambda_D$ , que es una medida del nivel de la intensidad de la interacción entre la roca porosa y la fractura, y de la potencia del medio permeable fracturado ( $H$ ).
  - $Pe$ , que es el número adimensional de Peclet y relaciona la transferencia convectiva de calor a la transferencia conductiva de calor. El ritmo de inyección aparece en relación directa en este número adimensional.
  - $H$ , para un tiempo dado la posición del  $FT$  está fuertemente influenciado por el espesor de la formación, estando su ubicación fijada por el inverso del espesor al cuadrado, a través de la definición del tiempo adimensional.
- El parámetro  $\lambda_D (= \frac{1}{4} H^2 \kappa_{Dr} (A_{HTb}/l))$  determina el inicio de la zona de transición. Este parámetro es una medida del grado de heterogeneidad del medio naturalmente fracturado. Para un medio fracturado de potencia constante, si  $\lambda_D \rightarrow \infty$  indica un medio homogéneo.
- La magnitud de la porosidad total no muestra un efecto de importancia sobre el proceso de transferencia de calor entre la matriz y el fluido en el sistema de fracturas, cuando este proceso se realiza en régimen transitorio.
- Cuando el número de Biot,  $\hat{Bi}$ , basado en el área de una esfera, toma valores inferiores a 1000, la transferencia de calor que ocurre a través de la interfase roca/fluido puede modelarse como un proceso ocurriendo bajo condiciones de régimen estacionario.
- Las posiciones del  $FT$  para las geometrías de flujo de fluido lineal ( $x_*$ ) y radial ( $r_*$ ) para los principales períodos de flujo de calor son:
  - Período Temprano:

$$x_* = x^* = (V/\phi)t; \quad r_* = r^* = \sqrt{\frac{q_i t}{\phi \pi H}}$$

– Período de Equilibrio:

$$x_* = \omega_f (V/\phi)t; \quad r_* = \sqrt{\omega_f \frac{q_i t}{\phi \pi H}}$$

– Período tardío:

$$x_* = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2 \frac{\rho_f c_f V H}{2\kappa} \left( \sqrt{1 + \bar{\alpha} \left(\frac{2b}{\zeta H}\right)^2 t} - 1 \right);$$

$$r_*^2 = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2 \frac{\rho_f c_f q_i H}{2\pi \kappa} \left( \sqrt{1 + \bar{\alpha} \left(\frac{2b}{\zeta H}\right)^2 t} - 1 \right).$$

- El parámetro  $\omega_f$  determina el tiempo de duración de la región de transición  $\Delta t$ . Para los casos de flujo lineal y radial se tiene, indistintamente:

$$\Delta t = t_* - t^* = \left(\frac{1}{\omega_f} - 1\right)t^*$$

- El tiempo de llegada del *FT* para los casos lineal y radial, está dado por las siguientes expresiones, respectivamente:

$$t_* = \frac{\phi \pi H r_*^2}{\omega_f q_i} + \kappa_s \rho_s c_s \left(\frac{\pi}{\zeta \rho_f c_f q_i}\right)^2 r_*^4;$$

$$t_* = \frac{x_*}{\omega_f v} + \kappa_s \rho_s c_s \left(\frac{1}{\zeta H \rho_f c_f v}\right)^2 x_*^2.$$

- Cuando no hay transferencia de calor de los estratos adyacentes, el *FH* y el *FT* viajan paralelamente, las separaciones entre el *FT* y del *FH* para los casos lineal ( $\delta_{l_*}^*$ ) y radial ( $\delta_{r_*}^*$ ), están dadas por las siguientes expresiones:

$$\delta_{l_*}^* = x^* - x_* = (1 - \omega_f)x^*; \quad \delta_{r_*}^* = r^* - r_* = (1 - \sqrt{\omega_f})r^*.$$

## 10 NOMENCLATURA

## Letras itálicas:

|           |  |
|-----------|--|
| $a^2$     | Es igual a $\alpha_s/\bar{\alpha}$ , <i>adimensional</i>   |
| $A_{THb}$ | área efectiva de transferencia de calor por unidad de volumen total, $m^{-1}$                              |
| $b$       | es igual a $\kappa_{Ds}/a = \sqrt{\rho_s c_s \kappa_s} / \sqrt{\rho c \bar{\kappa}}$ , <i>adimensional</i> |
| $c$       | capacidad calorífica del fluido, $J/kg \text{ } ^\circ C$  |
| $\hat{h}$ | coeficiente convectivo de transferencia de calor, $J/m^2 s \text{ } ^\circ C$                              |
| $h'$      | espesor de las fracturas, $m$  |
| $H$       | espesor del estrato fracturado, $m$  |
| $l$       | longitud característica de los bloques de roca, $m$  |
| $q_i$     | ritmo de inyección, $m^3/s$  |
| $q^*$     | es el ritmo de intercambio de calor matriz-fractura por unidad de volumen total, $J/m^3 s$                 |
| $q_1$     | flujo de calor asociado a una caída de temperatura unitaria en la superficie, $J/m^3 s \text{ } ^\circ C$  |
| $r$       | coordenada radial, $m$   |
| $r_b$     | radio de los bloques de roca esféricos, $m$  |
| $s$       | parámetro de Laplace   |
| $t$       | tiempo, $s$  |
| $T$       | temperatura, $^\circ C$  |
| $v$       | velocidad microscópica, $m/s$  |
| $V$       | velocidad macroscópica o de Darcy ( $= \phi v$ ), $m/s$  |
| $v_*$     | velocidad del frente térmico en un medio homogéneo, $m/s$  |
| $v_{**}$  | velocidad del frente térmico en un medio fracturado, $m/s$   |
| $W^*$     | fracción del calor transferido, <i>fracción</i>  |
| $\vec{x}$ | vector de posición   |
| $x$       | coordenada espacial en la dirección $x$ , $m$  |
| $y$       | coordenada espacial en la dirección $y$ , $m$  |
| $z$       | coordenada espacial en la dirección $x$ , $m$ .  |

## Letras romanas:

|      |                                       |
|------|---------------------------------------|
| $Bi$ | Número de Biot, <i>adimensional</i>   |
| $Pe$ | número de Peclet, <i>adimensional</i> |
| $V$  | volumen, $m^3$ .                      |

## Letras griegas:

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\alpha$        | difusividad térmica ( $= \kappa/\rho c$ ), $m^2/s$                                      |
| $\alpha'$       | parámetro característico de los bloques ( $= A_{HTb}/l$ ), $m^{-2}$                     |
| $\bar{\alpha}$  | difusividad térmica de la roca saturada, $m^2/s$  |
| $\delta_{i*}^*$ | es igual a $x^* - x_* = (1 - \omega_f)x^*$ , $m$  |
| $\delta_{r*}^*$ | es igual a $r^* - r_* = (1 - \sqrt{\omega_f})r^*$ , $m$                                 |
| $\Delta T$      | es igual a $T_0 - T$ , $^{\circ}C$  |
| $\epsilon$      | eficiencia térmica, <i>fracción</i>   |
| $\kappa$        | conductividad térmica, $J/m s ^{\circ}C$  |
| $\bar{\kappa}$  | conductividad térmica de la roca saturada, $J/m s ^{\circ}C$                            |
| $\lambda$       | intensidad de interacción roca/fractura ( $= \kappa_r A_{HTb}/l$ ), $J/m^3 s ^{\circ}C$ |
| $\xi$           | es igual a $2r_b'/H$ , <i>adimensional</i>  |
| $\pi$           | es igual a 3.14159...   |
| $\rho$          | densidad, $kg/m^3$  |
| $\bar{\rho c}$  | capacidad calorífica de la roca saturada, $J/kg m^3$                                    |
| $\sigma$        | es igual a $\frac{a/\kappa_{Df}-1}{a/\kappa_{Dr}+1}$ , <i>adimensional</i>              |
| $\tau$          | variable de integración temporal, $s$   |
| $\phi$          | porosidad, <i>fracción</i>  |
| $\chi$          | es igual a $\frac{1}{2}r_D^2$ , <i>adimensional</i>                                     |
| $\omega_f$      | relación de la energía contenida en la fractura a la energía total, <i>fracción</i>     |
| $\omega_r$      | relación de la energía contenida en la roca a la energía total, <i>fracción</i>         |
| $\zeta$         | es igual a 0.81342.   |

## Subíndices:

|       |   |
|-------|---|
| $b$   | bloques de roca   |
| $D$   | adimensional  |
| $f$   | fluido (fractura)   |
| $HTb$ | transferencia de calor por unidad de volumen total        |
| $i$   | inyección   |
| $r$   | roca  |
| $s$   | estrato impermeable adyacente                             |
| $0$   | inicial   |
| $1$   | caída de temperatura unitaria en la interfase roca/fluido |
| $*$   | frente térmico.   |

## Operadores:

- $\cdot$  producto escalar
- $\nabla \cdot$  divergencia
- $\nabla$  gradiente
- $\nabla^2$  laplaciano (divergencia del gradiente)
- $\mathcal{L}\{F(t)\}$  transformada de laplace de  $F(t)$ ,  $= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \bar{F}(s)$ .

## Funciones Especiales:

- $\cosh(x)$  Coseno hiperbólico de  $x$
- $\coth(x)$  Cotangente hiperbólica de  $x$
- $\sinh(x)$  Seno hiperbólico de  $x$
- $I_k(x)$  Función de Bessel Modificada de orden  $k$
- $\operatorname{erf}(x)$  Función Error,  $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$
- $\operatorname{erfc}(x)$  Función Error complementaria,  $= 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du$
- $U(y)$  Función Unitaria de Heaviside,  $= \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0, \\ 0 & \text{para } y < 0. \end{cases}$
- $\Gamma(n)$  Función Gamma,  $= \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad n > 0$ .

## REFERENCIAS

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] R. Aguilera. *Naturally Fractured Reservoir*. The Petroleum Publishing Co., Tulsa Okla., 1980.
- [3] M.Ya. Antimirov. Calculation of the temperature field associated with the injection of a heat-transfer agent into an oil stratum in the linear case. *J. Enrg. Phys.*, 19(6):1562-1566, 1970.
- [4] F. Ascencio and J. Rivera. Heat transfer processes during low or high enthalpy fluid injection into naturally fractured reservoir. Proceedings 19th workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, CA, January 1994.
- [5] N.A. Avdonin. Some formulas for calculating the temperature field of a stratum subject to thermal injection. *Izvestia VUZ. Neft'i Gaz*, 3:37-41, 1964.
- [6] S. Bachu and G. Dagan. Stability of displacement of a cold fluid by a hot fluid in a porous medium. *Phys. Fluids*, 22(1):54-59, 1979.
- [7] G.I. Barenblatt and Yu.P. Zheltov. Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks. *Soviet Physics, Doklady*, 5:522-525, 1960.
- [8] G.I. Barenblatt, Yu.P. Zheltov, and I.N. Kochina. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *J. Appl. Math. Mech.*, 24(5):1286-1303, 1960.
- [9] C.O. Bennett and J.E. Myers. *Momentum, Heat, and Mass Transfer*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1982.
- [10] G. Bodvarsson. Geothermal resource energetics. *Geothermics*, 3(3):83-92, 1974.
- [11] G.S. Bodvarsson and C.H. Lai. Studies of injection into naturally fractured reservoirs. *Trans. Geoth. Resources Council*, 1982.
- [12] G.S. Bodvarsson, K. Pruess, and M.J. O'Sullivan. Injection and energy recovery in fractured geothermal reservoirs. *Soc. Pet. Eng. Jour.*, 303-312, 1985.

- [13] G.S. Bodvarsson and V. Stefansson. Some theoretical and field aspects of reinjection in geothermal reservoirs. *Water Resour. Res.*, 25(6):1235-1248, 1989.
- [14] G.S. Bodvarsson and C.F. Tsang. Injection and thermal breakthrough in fractured geothermal reservoirs. *J. of Geophysical Research*, 87:1031, 1982.
- [15] D.H. Brownell, S.K. Garg, and J.W. Pritchett. Governing equations for geothermal reservoirs. *Water Resour. Res.*, 13(6):929-934, 1977.
- [16] C.F. Jr. Budd. Geothermal energy for electrical generation. *J. Pet. Tech.*, 189-195, 1984.
- [17] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford U. Press, Oxford, 2a. edition, 1959.
- [18] H. Cinco-Ley and F. Samaniego. Pressure transient analysis for naturally fractured reservoirs. Paper presented at the 57th Annual fall Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, New Orleans, LA, Sept. 26-29 1982.
- [19] H. Cinco-Ley, F. Samaniego, and F. Kucuk. The pressure transient behavior for naturally fractured reservoirs with multiple block size. Paper presented at the 60th Annual fall Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, NV, Sept. 22-25 1985.
- [20] P.F. Davis and Rabinowits. *Methods of numerical integration*. Academic Press, INC., New York, 1984.
- [21] A. de Swaan. Analytic solution for determining naturally fractured reservoir properties by well testing. *Soc. Pet. Eng. J.*, 16:117-122, Junio 1976.
- [22] A. de Swaan. Influence of shape and skin of matrix-rock blocks on pressure transients in fractured reservoirs. *SPE Form. Eval.*, 5:344-352, 1990.
- [23] S.K. Garg and J.W. Pritchett. On pressure-work, viscous dissipation and energy balance. *Advances in water resources*, 1(1):41-47, 1977.
- [24] S.K. Garg, J.W. Pritchett, and D.H. Brownell. Transport of mass and energy in porous media. Proceedings Second United Nations Symposium on the Development and Use of Geothermal Resources, San Francisco, CA, May 1975.



- [25] M. A. Grant, I.G. Donaldson, and P.F. Bixley. *Geothermal Reservoir Engineering*. Academic Press, New York, 1982.
- [26] U. Grigull and J. Kestin. *Heat Conduction*. Springer-Verlag, Washington, 1984.
- [27] A.C. Gringarten and J.P. Sauty. A theoretical study of heat extraction from aquifers with uniform regional flow. *J. Geophysical Research*, 80(5):4956-4962, 1975.
- [28] A.C. Gringarten, P.A. Witherspoon, and Y Onishi. Theory of heat extraction from fractured hot dry rock. *J. Geophys. Res.*, 80(8):1120-1124, 1975.
- [29] T.R. Hadidi, R.F. Nielsen, and Calhoun. Studies on heat transfer during a linear fluid displacement in a porous media. *Producers Monthly*, 20(10):38-37, 1956.
- [30] R.N. Horne. Effects of water injection into fractured geothermal reservoirs: a summary of experience worldwide. *Geothermal Resources Council*, 47-63, 1982.
- [31] R.N. Horne. Geothermal reinjection in japan. *J. Pet. Tech.*, 495-503, March 1982.
- [32] R.N. Horne. Reservoirs engineering aspects of reinjection. *Geothermics*, 14(2):449-457, 1985.
- [33] H. Kazemi. Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *Soc. Pet. Eng. J.*, 246:451-462, Dec. 1969. Trans. AIME, 246.
- [34] H.A Lauwerier. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. *Appl.Sci.Res*, 5:145-150, 1955.
- [35] Y.L. Luke. *Integral of Bessel Functions*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1962.
- [36] G.E Malofeev. Heat losses in the cap and base rock under hot water injection into a stratum. *Izvestia VUZ. Neft'i Gaz*, 5:37-43, 1959.
- [37] G.E Malofeev. On the modeling of the process of stratum heating under hot water injection. *Izvestia VUZ. Neft'i Gaz*, 9:45-49, 1959.

- [38] J.W. Marx and R.H. Langenheim. Reservoir heating by hot fluid injection. *Trans., AIME*, 216:312-315, 1959.
- [39] A.F. Moench. Double-porosity models for a fissured groundwater reservoir with fractured skin. *Water Resour. Res.*, 20:831-846, 1984.
- [40] H.L. Najurieta. Theory for pressure transient analysis of naturally fractured reservoir. *J. Pet. Technol.*, 32:1241-1250, 1980.
- [41] D.A. Neild. Onset of thermohaline convection in a porous medium. *Water Resour. Res.*, 4(1):553-560, 1968.
- [42] M. Prats. The heat efficiency of thermal recovery processes. *Trans. AIME*, 246:323-332, March 1969.
- [43] K. Pruess and G.S. Bodvarsson. Thermal effects of reinjection in geothermal reservoir with major vertical fractures. *J. Pet. Tech*, Sept. 1984.
- [44] H.J. Ramey. How to calculate heat transmission in hot fluid injection. *Pet. Eng.*, 110-120, Nov. 1964.
- [45] R.J. Ribando and K.E. Torrance. Natural convection in a porous medium: effects of confinement, variable permeability and thermal boundary conditions. *J. Heat Transfer*, 98:42-48, 1976.
- [46] R.J. Rivera. Reinjection in geothermal fields under exploitation: stage-experiences and perspectives. Nov. 1991. Workshop on Evaluation of Environmental Impact, Natural Risks and Reinjection in Geothermal Area, Quito, Ecuador. UN/DTCD-OLADE.
- [47] F. Rodríguez de la Garza. Modelo analítico del desplazamiento lineal de aceite por inyección de agua en yacimientos fracturados. *Ingeniería Petrolera*, 20-26, Junio 1988.
- [48] H. Rubin. On the analysis of cellular convection in porous media. *Int. Journal Heat Mass Trans.*, 18:1483-1486, 1975.
- [49] L.I. Rubinshtein. An asymptotic solution of an axially symmetric contact problem in thermal convection for high values of the convection parameters. *Dans SSSR*, 146(5):1043-1047, 1962.
- [50] L.I. Rubinshtein. A contact thermal conduction problem. *Dans SSSR*, 135(4):805-811, 1959.

- [51] L.I. Rubinshtein. The total heat losses in injection of a hot liquid into a stratum. *Neft' i Gaz*, 2(9):41-48, 1959.
- [52] A. Satman. *Reservoir Engineering Assessment of Geothermal Systems*. Stanford University, 1981.
- [53] A. Satman, A.B. Zolotukhin, and W.E. Brigham. A new approach for predicting the thermal behavior in porous media during fluid injection. *Trans. Geoth. Resources Council*, 621-624, 1979.
- [54] R.C. Schroeder, M.J. O'Sullivan, and K. Pruess. Reinjection studies of vapor-dominated systems. *Paper presented at the Italian-American Workshop*, Oct. 1980.
- [55] A.G. Spillette. Heat transfer during hot fluid injection into an oil reservoir. *J. Cdn. Pet. Tech.*, 213-217, Oct.-Dec. 1965.
- [56] H. Stehfest. Numerical inversion of laplace transforms. *Communications of the ACM*, January, 13(1):47-99, 1970.
- [57] T.D. Streltsova. Hydrodynamics of groundwater flow in a fractured formations. *Water Resour. Res.*, 12(3):405-414, 1976.
- [58] T.D. Streltsova. Well pressure behavior of a naturally fractured reservoir. *Soc. Pet. J.*, 23:769-780, 1983.
- [59] G. van der Kamp and S. Bachu. Use of dimensional analysis in the study of thermal effects of various hydrogeological regimes. *American Geophysics Union*, 23-26, 1989. Geophysical Monograph 47.
- [60] J.E. Warren and P.J. Root. The behavior of naturally fractured reservoir. *Soc. Pet. Eng. J.*, 228:245-255, Sept. 1963. *Trans. AIME*, 228.
- [61] R.W. Zimmerman, G. Chen, T. Hadgu, and G.S. Bodvarsson. A numerical dual-porosity model with semianalytical treatment of fracture/matrix flow. *Water Resour. Res.*, 29(7):2127-2137, Julio 1993.