

104
2º



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

ANALISIS SISMICO DINAMICO. CONSIDERANDO
TRES GRADOS DE LIBERTAD POR NIVEL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A I
JORGE SOLARES SANDOVAL



MEXICO. D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

1996

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



VERDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
60-1-093

SR. JORGE SOLARES SANDOVAL,
P r e s e n t e .

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Ing. Fernando Monroy Miranda, y que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero, Civil.

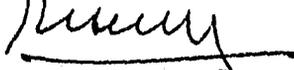
ANALISIS SISMICO DINAMICO CONSIDERANDO TRES GRADOS
DE LIBERTAD POR NIVEL

1. INTRODUCCION
2. DINAMICA DE UNO Y VARIOS GRADOS DE LIBERTAD
3. RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA A MOVIMIENTO DE SU BASE.
4. ELABORACION DEL PROGRAMA
5. EJEMPLOS Y CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar Servicio Social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, 6 de abril de 1990
EL DIRECTOR


DANIEL RESENDIZ NUNEZ

A ustedes padres, Juan y Alicia:

Porque sin su apoyo no se hubiera realizado el sueño; porque a ustedes les debo lo que soy.

mis hermanos, Lourdes y Juan carlos:

Porque forman parte de mí y por su amor incondicional.

A ti, Olivia:

Por nuestro amor firme y siempre armónico; porque los dos
somos uno mismo, nuestra felicidad es permanente.

mis abuelos (finados), a mis tíos y a mis primos:

Por el cariño que siempre me han manifestado.

A la Facultad de Ingeniería de la UNAM:

Escuela que me formó, mi Alma Mater.

Presentación	1
I. Introducción	2
1.1 Aspectos Generales sobre Sismología	2
II. Sistemas de Uno y Varios Grados de Libertad	8
II.1 Introducción.	8
II.2 Coordenadas y Grados de Libertad.	8
II.3 Ecuación de Equilibrio Dinámico de Sistemas con un Grado de Libertad.	11
II.4 Vibraciones Libres sin Amortiguamiento	14
II.5 Vibraciones Libres con Amortiguamiento	16
II.6 Vibración Forzada Armónicamente sin Amortiguamien- to	19
II.7 Vibración Forzada Armónicamente con Amortiguamien- to	21
II.8 Vibración Forzada con Amortiguamiento ante la pres- cencia de cualquier Fuerza perturbadora	25
II.9 Vibración Libre sin Amortiguamiento de Sistemas de Varios Grados de Libertad	28
II.10 Obtención de la Matriz de Rigideces para Estructuras con tres Grados de Libertad por nivel	30
III. Respuesta de la Estructura a Movimientos de su Base	36
III.1 Introducción	36
III.2 Determinación de los Modos de Vibración	37
III.3 Ortogonalidad de los Modos de Vibración	39
III.4 Análisis Modal sin considerar Torsión	42
III.5 Obtención del Coeficiente de Participación C_j de un modo cualquiera 'n'	44
III.6 Espectros de Respuesta	46
III.7 Espectros de Diseño propuestos en el Reglamento de Construcciones del D.F. 1987	48
III.8 Respuesta Inelástica de las Estructuras	56
III.9 Reducción de Fuerzas Sísmicas Propuestas en el RCDF-1987	59
III.10 Factor de Comportamiento Sísmico	61
III.11 Análisis Sísmico Dinámico Tridimensional	64
III.12 Obtención de Cortantes y Momentos Torsionantes por Nivel	65
IV. Elaboración del Programa.....	67
IV.1 Introducción	67
IV.2 Preparación del Archivo de Datos para la ejecución de los Programas	67
IV.3 Resultados e interpretación de los mismos	68
IV.4 Descripción de la Estructura a Analizar	69
IV.5 Resultados del Programa de la Estructura Analizada ..	71
IV.6 Representación Gráfica de Resultados	76
IV.7 Listado de los Programas de Computadora	81

V.	Ejemplos y Conclusiones	91
V.1	Introducción	91
V.2	Características Geométricas de los Marcos que integran el Edificio	92
V.3	Obtención de la matriz de Rigideces \mathcal{K} Expresada en Función de un Giro por Nudo y un Desplazamiento Horizontal por Nivel	95
V.4	Obtención de la Matriz de Rigidez Lateral \mathcal{K}_{LR} para cada Eje	119
V.5	Obtención de la Matriz de Rigidez en Función de Los Grados de Libertad del Edificio Completo (tres por cada nivel)	123
V.6	Obtención de la Matriz de Masas del Sistema Estructural	130
V.7	Determinación de Frecuencias y Modos de Vibrar del Ejemplo	131
V.8	Coeficientes de Participación	133
V.9	Aceleración para cada Modo en cada Dirección	137
V.10	Desplazamientos Totales	138
V.11	Desplazamientos Relativos	143
V.12	Cortantes y Momentos por Modo y Dirección	148
V.13	Desplazamientos y Giros	153
V.14	Fuerzas y Momentos	154
V.15	Conclusiones	155
	Bibliografía	158

Uno de los fenómenos naturales que han preocupado al hombre es sin duda los sismos, interesa conocer sobre todo su origen y los efectos que estos tienen sobre la corteza terrestre, sobre las personas y sobre las estructuras que el hombre construye. El objetivo de este trabajo es determinar la respuesta de los edificios ante la acción sísmica, para cumplir tal fin se puede recurrir al análisis dinámico modal espectral considerando tres grados de libertad por nivel; se pretende obtener con este método cortantes y desplazamientos en dos direcciones ortogonales entre sí, así como un momento de torsión y un giro de la planta para cada nivel del edificio, empleando como herramientas principales la teoría de la mecánica de vibraciones, la técnica del análisis modal y espectros de aceleraciones, involucrando los lineamientos que se establecen en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1987 (en adelante RCDF-87) y sus Normas Técnicas Complementarias por Sismo (en adelante NTC sismo-87).

En el capítulo I se estudia el origen de los sismos y aspectos relacionados con sismología, en el capítulo II nos ocuparemos de la mecánica de vibraciones para sistemas con un grado de libertad y se establecen las ecuaciones de equilibrio dinámico para sistemas de varios grados de libertad, en el capítulo III se obtendrá la respuesta de los edificios ante sismo haciendo uso del análisis modal y espectros de aceleraciones, en el capítulo IV se presenta un programa de computadora para realizar el análisis dinámico modal espectral con tres grados de libertad por nivel de acuerdo con el RCDF-87 y por último en el capítulo V se realiza un ejemplo de un edificio de tres niveles y se comparan los resultados con los que arroja el programa descrito en el capítulo IV y finalmente se establecen las conclusiones.

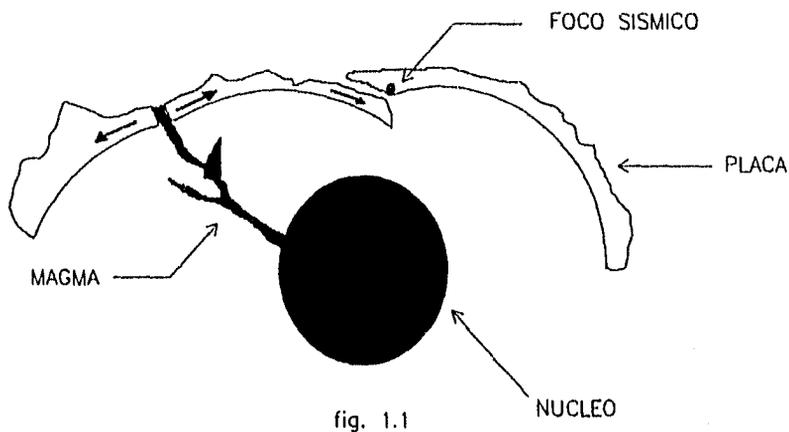
I.I Aspectos Generales sobre Sismología.

Antes de empezar un estudio sobre los conceptos que se involucran en el análisis dinámico, conviene hacer un repaso elemental acerca de lo que es la *sismología*, la cual se define como una rama de la geofísica que estudia las características de los sismos. Sismo es un movimiento debido a las fuerzas interiores de la tierra cuando las rocas han sido deformadas más allá de su límite y finalmente se rompen.

Existen varias causas por las que se originan los sismos, entre las que se cuentan las erupciones de volcanes, explosiones subterráneas y el movimiento de las placas que conforman la superficie de la tierra. La intensidad del movimiento depende de varios factores como la causa del sismo, la distancia que hay entre el foco y el lugar de registro del movimiento, las propiedades del suelo, etc.

De entre los miles de sismos que suceden anualmente, sólo unos cuantos revisten particular importancia ya sea porque son de gran intensidad o porque producen daños severos en las poblaciones. Estas sacudidas se deben principalmente al movimiento de las placas terrestres. La teoría que explica este fenómeno se llama *tectónica de placas* y establece que la tierra está subdividida en grandes placas

cuyo espesor es de alrededor de 80 km. y en las discontinuidades de las placas fluye hacia arriba el magma que se encuentra a presión abajo de la litosfera (fig. 1.1), esto origina que, en los extremos opuestos de la placa se produzcan grandes presiones hasta alcanzar la ruptura repentina de las rocas, las que se separan violentamente y se cierran, quedando en posiciones forzadas. Este ajuste que sigue a la falla se conoce como *rebote elástico*. El punto donde se produce la ruptura se conoce con el nombre de *foco* y la proyección del foco en la superficie terrestre es el *epicentro* del sismo. La distancia desde el foco hasta el lugar de registro es la *distancia focal*.



La energía liberada en un sismo se propaga en la corteza terrestre por medio de ondas, en forma análoga a las ondas generadas por la caída de un objeto dentro de un estanque de agua. Existen dos

clases de ondas terrestres: 1) *ondas de cuerpo* las cuales se desplazan en el interior de la tierra y 2) *ondas superficiales* que como su nombre lo dice se transmiten a lo largo de la superficie terrestre. A su vez las ondas de cuerpo se dividen en a) ondas de compresión y expansión u ondas longitudinales y pueden transmitirse a través de cualquier material (sólido, líquido y gaseoso), la dirección del movimiento de estas ondas es la misma que la de propagación y b) en ondas transversales las cuales sólo pueden propagarse a través de sólidos y la dirección del movimiento de las partículas debido a estas ondas es en ángulos rectos con relación a la dirección de su avance.

El aparato con el que se mide el movimiento del terreno durante un sismo se llama *sismógrafo*, el cual consta de un péndulo simple suspendido de un punto fijo y en la parte opuesta lleva una pluma registradora que apunta el movimiento sobre el papel que esta en el tambor giratorio. (fig 1.2).

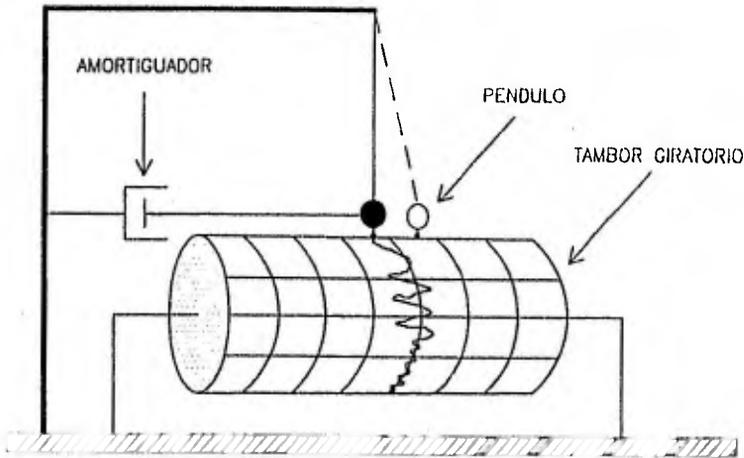


Fig. 1.2

traza un arco sobre el globo terrestre desde cada punto de observación hasta la distancia calculada y, el lugar donde se intersecten los arcos corresponde al foco del sismo.

Existen muchas maneras de medir los sismos, entre ellas por su intensidad o por su magnitud. La intensidad del movimiento del terreno se determina mediante la percepción humana y por los efectos que origina en los seres vivientes, por tal motivo la intensidad de un movimiento es ponderada mediante una escala cualitativa tal como la escala de Mercalli modificada que a continuación se presenta:

Valor de la intensidad	Descripción
I	No se percibe, excepto en circunstancias sumamente favorables.
II	Percibido por personas en descanso.
III	Se percibe en interiores; no siempre se reconoce como sismo.
IV	Se agitan puertas, ventanas y platos; los vehículos detenidos se mueven perceptiblemente.
V	Se percibe en exteriores; las personas dormidas despiertan, las puertas oscilan.
VI	Todos lo perciben; caminata inestable; los platos y ventanas se rompen.
VII	Dificultad para estar de pie; lo advierten los manejadores; caída de enyesado.
VIII	Se afecta la conducción de vehículos; daños a la mampostería ordinaria.
IX	Pánico general; mampostería débil destruida; mampostería ordinaria considerablemente dañada.
X	La generalidad de la mampostería y estructuras de marcos destruidas con cimientos.
XI	Los rieles se tuercen considerablemente; la tubería subterránea se rompe.
XII	Daño total; los objetos cruzan el aire.

La magnitud mide el tamaño de un sismo (Richter) y esta íntimamente ligado con la cantidad de energía liberada. La magnitud de un sismo se define con la ecuación:

$$M = \log A \quad \text{-----} \quad (1.1)$$

donde M = magnitud del sismo

A = amplitud máxima en μm registrada por un sismómetro de Wood-Anderson a 100 km del epicentro.

A partir de esta fórmula se han derivado otras para definir la magnitud de un sismo en una región determinada tomando en cuenta las características de amortiguamiento de la estructura subterránea, la distancia del epicentro al punto de registro, el tipo de sismógrafo, etc.

Como se mencionó anteriormente, la magnitud de un sismo y la energía están estrechamente relacionadas. Gutenberg y Richter obtuvieron la siguiente relación entre la energía de una onda sísmica E y la magnitud M:

$$\log E = 4.8 + 1.5 M \quad \text{-----} \quad (1.2)$$

o bien,

$$E = 10^{(4.8 + 1.5 M)} \quad \text{-----} \quad (1.3)$$

aplicando la fórmula 1.3 para diferentes valores de M:

$$\text{si } M=1 \quad E_1 = 10^{6.3} = 1,995,262.30 \text{ J}$$

$$\text{si } M=2 \quad E_2 = 10^{7.8} = 63,095,734.45 \text{ J}$$

$$\text{si } M=3 \quad E_3 = 10^{9.3} = 1,995,262,315 \text{ J}$$

la relación

$$E_2/E_1 = 31.62 \approx 32$$

y

$$E_3/E_1 = 1000$$

De lo cual se concluye que un sismo de magnitud 2 libera 32 veces más energía que uno de magnitud 1 y que un movimiento de magnitud 3 libera 1000 veces más energía que uno de magnitud 1.

SISTEMAS DE UNO Y VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

II.1 Introducción

En este capítulo se tratarán los aspectos fundamentales de la teoría de vibraciones relacionadas con el análisis sísmico, empezando por definir el concepto de coordenadas y grados de libertad; se plantea el modelo matemático que rige el movimiento de sistemas vibratorios con un grado de libertad y su solución para cada caso particular. El estudio de estructuras de varios grados de libertad con vibración libre sin amortiguamiento también es tratado en este capítulo, así como la obtención de la matriz de masas y la matriz de rigideces de estos sistemas estructurales.

II.2 Coordenadas y Grados de Libertad.

Para representar totalmente la configuración de desplazamiento de una estructura, se necesita un número infinito de coordenadas. En cada nudo del sistema estructural se deben establecer seis componentes de desplazamiento : traslación en X, Y, y Z; además giro alrededor del eje X, Y, Z .

Se dice entonces que los *grados de libertad* de un sistema estructural son el mínimo número de coordenadas independientes que se necesitan para definir completamente y en cualquier instante su configuración.

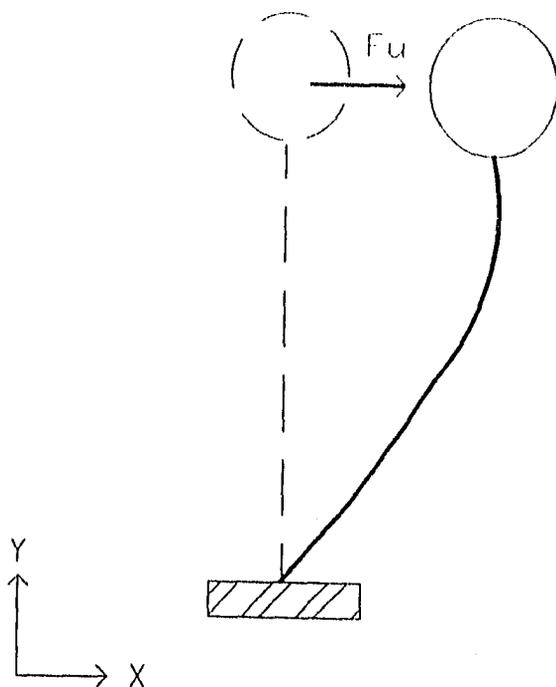


fig. 2.1

En la figura 2.1 se presenta un modelo con un grado de libertad, pues únicamente se necesita establecer una coordenada, en este caso traslación en X (δu), para definir la configuración deformada del sistema cuando se le aplica una fuerza en la dirección X (F_u).

En la figura 2.2 se muestra un sistema de piso que se considera infinitamente rígido en su plano, apoyado sobre cuatro columnas; a la estructura se le aplican fuerzas F_u , F_v , F_w , M_u , M_v y M_w . Para conocer la posición del punto "A" después de que fueron aplicadas éstas fuerzas, se necesitan seis componentes de desplazamiento (o bien seis coordenadas) δu , δv , δw , θ_u , θ_v , y θ_w ; esto es, tres

traslaciones y tres rotaciones respectivamente, por lo tanto se dice que es una estructura con seis grados de libertad.

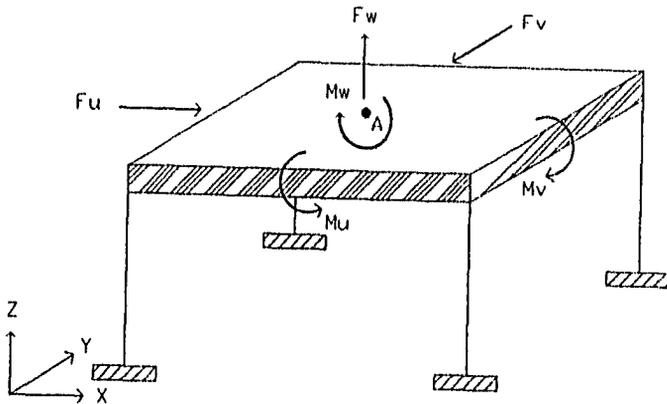


Fig. 2.2

En análisis dinámico de estructuras es práctica común considerar que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que los desplazamientos que interesan son sólo aquellos en los que se consideran fuerzas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración y momentos iguales al momento de inercia de masa por aceleración angular; por lo tanto el modelo presentado en la figura 2.2 se reduce a un sistema con 3 grados de libertad y sólo se necesitarán definir tres coordenadas, las traslaciones δu y δv así como la rotación θw .

Por esta razón en un análisis dinámico tridimensional los grados

de libertad de una estructura se determinarán con la siguiente ecuación:

$$GL=3N \text{ -----}(2.1)$$

Donde:

GL: grados de libertad del sistema estructural.

N: número de niveles del sistema estructural.

II.3 Ecuación de Equilibrio Dinámico de Sistemas con un Grado de Libertad.

Antes de determinar la ecuación de equilibrio dinámico para sistemas estructurales con un grado de libertad, es conveniente mencionar las fuerzas que intervienen en él (ver la figura 2.3) :

- a) La fuerza de inercia que de acuerdo con el principio de D'Alambert es proporcional a la masa y a la aceleración total que esta sufre.

$$F_i = m \cdot \ddot{x}$$

F_i : es la fuerza de inercia.

m : masa del sistema estructural.

\ddot{x} : aceleración total de la masa.

$$\ddot{x} = \ddot{s}_o + \ddot{u}$$

\ddot{s}_o : aceleración del terreno.

\ddot{u} : aceleración relativa de la masa al terreno.

- b) La fuerza que resulta de la rigidez del sistema estructural; suponiendo que la respuesta del sistema se mantiene dentro de un intervalo elástico lineal. La fuerza será igual al producto del desplazamiento relativo de la masa al terreno y la rigidez del sistema.

$$F_R = k \cdot u$$

F_R : fuerza de rigidez.

k : rigidez del sistema estructural.

u : desplazamiento relativo de la masa con respecto al terreno.

- c) La fuerza de amortiguamiento, la cual se genera por la disipación de energía que el sistema estructural realiza debido a la fricción interna de los materiales con los que esta construida la estructura y a rozamiento entre los miembros de ésta . Se supone que el amortiguamiento es lineal ó viscoso y se toma igual al producto de la velocidad relativa de la masa con respecto al terreno y el coeficiente de amortiguamiento.

$$F_A = c \cdot \dot{u}$$

F_A : fuerza de amortiguamiento.

c : coeficiente de amortiguamiento.

\dot{u} : velocidad relativa de la masa al terreno.

- d) Una fuerza externa que actua sobre la masa y que varia con el tiempo.

$$F_E(t)$$

F_E : fuerza externa en función del tiempo.

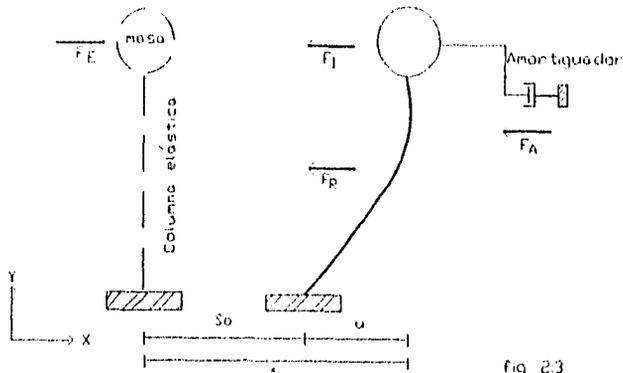


fig 2.3

La ecuación de equilibrio dinámico quedará definida de la siguiente manera:

$$F_I + F_A + F_R = F_E(t)$$

o bien,

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_E(t)$$

pero $\ddot{x} = \ddot{s}_0 + \ddot{u}$, por lo tanto la ecuación anterior se puede escribir así:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = F_E(t) - m \cdot \ddot{s}_0 \quad \text{----- (2.2)}$$

II.4 Vibraciones Libres sin Amortiguamiento.

Se dice que una estructura vibra libremente cuando su base permanece inmóvil y no hay fuerzas externas, además $c=0$. La ecuación 2.2 en este caso es :

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad \text{-----}(2.3)$$

Si se define $\omega^2 = k/m$ entonces la ecuación 2.3 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \text{-----}(2.4)$$

La relación que describe la vibración libre sin amortiguamiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y su solución es de la forma $u = e^{nt}$; derivando sucesivamente se obtiene $\dot{u} = n e^{nt}$, $\ddot{u} = n^2 e^{nt}$, sustituyendo en la ecuación 2.4 queda $n^2 e^{nt} + \omega^2 e^{nt} = 0$ o bien $e^{nt}(n^2 + \omega^2)$, pero para todo t , e^{nt} es diferente de cero por lo tanto $n^2 + \omega^2 = 0$, resolviendo esta última ecuación se observa que las dos raíces de n son imaginarias $n_1 = \omega i$ y $n_2 = -\omega i$. La solución general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuando n_1 y n_2 son imaginarias es: $u = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ tal que, $n_1 = \alpha + i\beta$, $n_2 = \alpha - i\beta$, en este caso $\alpha=0$ y $\beta=\omega$ en consecuencia la solución general es:

$$u = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad \text{-----}(2.5)$$

Esta ecuación describe la vibración libre sin amortiguamiento del sistema estructural mostrado en la figura 2.4 (también conocido como movimiento armónico simple no amortiguado) en el instante t ; siendo ω la frecuencia circular angular no amortiguada del sistema vibratorio

; el periodo natural de vibración es $T=2\pi/\omega$ (en segundos) y la frecuencia natural es el inverso del periodo $f=\omega/2\pi$ (en hertz). C_1 y C_2 son constantes de integración y se pueden obtener de las condiciones iniciales.

La ecuación 2.5 se puede escribir de la siguiente forma alternativa:

$$u = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{-----(2.6)}$$

Para demostrar la ecuación 2.6 observemos la figura 2.4 sea $A = (C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}$ es decir la amplitud del desplazamiento y a $\phi = \operatorname{Tan}^{-1}C_1/C_2$ se le conoce como el ángulo de fase.

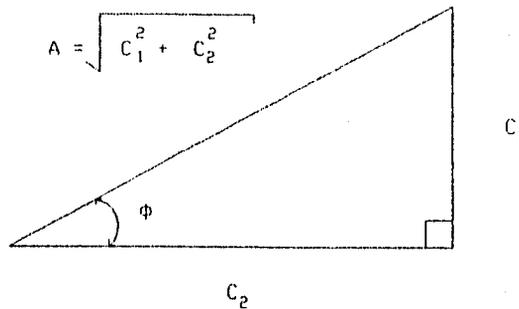


Fig. 2.4

Dividiendo la ecuación 2.5 entre A se obtiene $u/A = C_1/A \cos \omega t + C_2/A \operatorname{sen} \omega t$ pero $C_1/A = \operatorname{sen} \phi$ y $C_2/A = \cos \phi$ entonces queda $u/A = \operatorname{sen} \phi \cos \omega t + \cos \phi \operatorname{sen} \omega t$; el segundo miembro de esta ecuación es la fórmula del seno de una suma de ángulos [$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$] por esta razón podemos escribir $u = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.

En la figura 2.5 se representa la relación de desplazamiento(u) y tiempo(t) descrita por la ecuación 2.6 la cual representa un movimiento armónico simple con desplazamiento inicial(u_0).

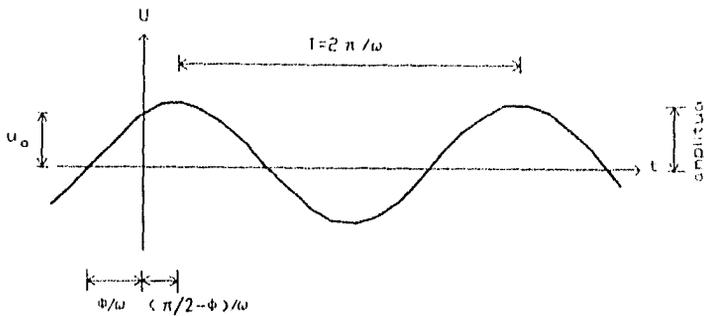


fig. 2.5

II.5 Vibraciones Libres con Amortiguamiento.

En este caso el amortiguamiento es diferente de cero por lo tanto la ecuación que rige las vibraciones libres con amortiguamiento es:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad \text{-----} \quad (2.7)$$

Para resolver esta ecuación es conveniente dividirla entre la masa esto es, $\ddot{u} + c/m \cdot \dot{u} + k/m \cdot u = 0$; definiendo $C_{cr} = 2 \sqrt{km}$ como el

amortiguamiento crítico del sistema estructural y $\xi=C/Ccr$ como el coeficiente de amortiguamiento, además sabemos que $\omega^2=k/m$ entonces podemos plantear la ecuación 2.7 de la siguiente manera:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u=0 \quad \text{-----}(2.8)$$

2.8 también es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma $a\ddot{u} + b\dot{u} + cu=0$; se demuestra que una solución de esta ecuación es $u=e^{nt}$ a partir de la cual se obtienen las otras soluciones; derivando sucesivamente y sustituyendo se obtiene $an^2e^{nt} + bne^{nt} + c=0$ o bien $e^{nt}[an^2+bn+c]=0$ pero e^{nt} es diferente de cero para todo valor de t por esta razón an^2+bn+c tiene que ser igual a cero. La ecuación 2.8 es entonces $n^2+2\xi\omega n+\omega=0$ cuyas raíces son $n_1=-\xi\omega + \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}$ y $n_2=-\xi\omega - \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}$; dependiendo el valor que tenga el coeficiente de amortiguamiento serán las raíces; si el sistema estructural tiene un amortiguamiento mayor al crítico ($\xi^2-1 > 0$) entonces n_1 y n_2 son raíces reales y la solución general es:

$$u=C_1 e^{[-\xi\omega + \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}]t} + C_2 e^{[-\xi\omega - \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}]t} \quad \text{o bien}$$

$$u=e^{-\xi\omega t} [C_1 e^{\omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}} t} + C_2 e^{-\omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}} t}] \quad \text{----}(2.9)$$

La ecuación 2.9 representa un movimiento suave no oscilatorio.

El segundo caso se presenta cuando $\xi^2-1=0$ se dice que el sistema se encuentra críticamente amortiguado. La solución general de la ecuación 2.8 es:

$$u=C_1 e^{[-\xi\omega + \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}]t} + C_2 t e^{[-\xi\omega - \omega(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}]t} \quad \text{y como } \xi^2-1=0$$

$$u=e^{-\xi\omega t} (C_1 + C_2 t) \quad \text{-----}(2.10)$$

El tercer caso se tiene cuando $\zeta^2 < 1$ es decir, que el sistema estructural es subamortiguado. Esta condición es la que ocurre comunmente en las obras de Ingeniería Civil ya que el amortiguamiento de los edificios y en general de cualquier estructura es mucho menor que el amortiguamiento crítico del mismo; n_1 y n_2 son raíces complejas y la solución general de la ecuación 2.8 es en esta ocasión:

$$u = e^{-\zeta\omega t} \{ C_1 \cos[\omega (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} t] + C_2 \sin[\omega (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} t] \} \quad \text{----- (2.11)}$$

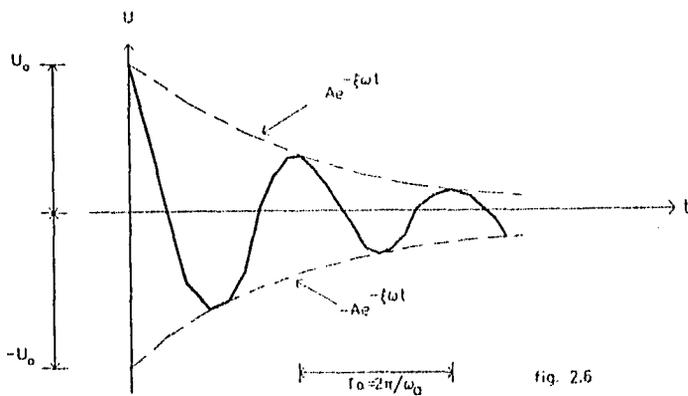
De manera similar a como se hizo en la sección anterior la ecuación 2.11 se puede escribir en la forma alterna:

$$u = Ae^{-\zeta\omega t} \sin[\omega (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} t + \phi] \quad \text{----- (2.12)}$$

A la relación $\omega (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$ se le conoce como la frecuencia circular natural amortiguada (ω_n) y al coeficiente $Ae^{-\zeta\omega t}$ se le llama amplitud amortiguada de la vibración; y la ecuación 2.12 se puede plantear de la siguiente manera:

$$u = Ae^{-\zeta\omega t} \sin[\omega_n t + \phi] \quad \text{----- (2.13)}$$

Haciendo un examen de la ecuación 2.13 se advierte que a medida que el tiempo transcurre el desplazamiento tiende a cero debido a la presencia de la amortiguación en el sistema estructural.



La gráfica de la figura 2.6 representa la relación de desplazamiento y tiempo descrita por la ecuación 2.13 cuando al sistema se le imprime un desplazamiento inicial (u_0), esta ecuación es tangente a $\pm A e^{-\zeta \omega t}$

II.6 Vibración Forzada Armónicamente sin Amortiguamiento.

Ahora se tratará el caso en el que se aplica al sistema estructural una fuerza armónica $F_E(t) = f_0 \sin \Omega t$ ó bien $F_E(t) = f_0 \cos \Omega t$ el amortiguamiento es nulo y la ecuación que describe el movimiento es:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = F_0 \sin \Omega t \quad \text{-----} (2.14)$$

F_0 es el cociente que resulta de dividir la fuerza máxima aplicada al sistema entre la masa del mismo ($F_0=f_0/m$) y Ω es la frecuencia circular angular de la fuerza aplicada a la estructura también conocida como fuerza impulsora. En la sección II.3 se obtuvo la solución de la ecuación 2.14 cuando el segundo miembro es nulo, se trata ahora de obtener la solución de la ecuación 2.14 considerando la no homogeneidad de la ecuación. Así pues, para resolverla se usará el método de los coeficientes indeterminados. La ecuación 2.14 se puede escribir de la siguiente manera:

$(D^2 + \omega^2)u = F_0 \text{ sen } \Omega t$, se trata ahora de encontrar un operador tal que anule al término $\text{sen } \Omega t$; este operador es $D^2 + \Omega^2$, multiplicando ambos miembros de la ecuación se tiene:

$(D^2 + \omega^2)(D^2 + \Omega^2)u = (F_0 \text{ sen } \Omega t)(D^2 + \Omega^2) = 0$, en consecuencia la solución general de la ecuación 2.14 es:

$$u(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega t + C_2 \text{ sen } \omega t}_{u_c(t)} + \underbrace{C_3 \cos \Omega t + C_4 \text{ sen } \Omega t}_{u_p(t)} \quad \text{-----(2.15)}$$

Como se observa, los dos primeros términos de la ecuación 2.15 ya se habían obtenido anteriormente (sección II.3) y representan las oscilaciones libres del sistema estructural. Por otro lado la solución particular de la ecuación 2.15 constituye el desplazamiento producido por la influencia de la fuerza armónica impuesta a la estructura.

Para obtener las constantes C_3 y C_4 vamos a derivar la solución particular de la ecuación 2.15 entonces $u_p(t) = C_3 \cos \Omega t + C_4 \text{ sen } \Omega t$ y $\ddot{u}_p(t) = -(C_3 \Omega^2 \cos \Omega t + C_4 \Omega^2 \text{ sen } \Omega t)$ sustituyendo estos valores en la ecuación 2.14:

$$\begin{aligned} & -(C_3 \Omega^2 \cos \Omega t + C_4 \Omega^2 \text{ sen } \Omega t) + \omega^2 (C_3 \cos \Omega t + C_4 \text{ sen } \Omega t) \\ & = F_0 \text{ sen } \Omega t, \text{ haciendo operaciones y simplificando:} \end{aligned}$$

$C_3(\omega^2 - \Omega^2)\cos \Omega t + C_4(\omega^2 - \Omega^2)\sin \Omega t = F_0 \sin \Omega t$, planteando un sistema de ecuaciones para obtener C_3 y C_4 :

$C_3(\omega^2 - \Omega^2) = 0$ y $C_4(\omega^2 - \Omega^2) = F_0$ de donde se deduce rápidamente que $C_3 = 0$ y $C_4 = F_0 / (\omega^2 - \Omega^2)$, en consecuencia la solución general de la ecuación 2.14 es:

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + [F_0 / (\omega^2 - \Omega^2)] \sin \Omega t \quad \text{-----} (2.16)$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen de las condiciones iniciales del problema y los demás términos han sido ya tratados. Haciendo una inspección de la ecuación 2.16 se observa que a medida que la frecuencia circular angular de la fuerza perturbadora se aproxima a la frecuencia circular angular de las vibraciones libres del modelo estructural, los desplazamientos se hacen más grandes, el fenómeno descrito es conocido como *resonancia pura*. Esta situación no se presenta en la realidad ya que siempre habrán fuerzas retardadoras de amortiguación, las cuales por muy pequeñas que sean, siempre están presentes en cualquier sistema vibratorio. En la siguiente sección se verá la importancia que tiene el amortiguamiento en las estructuras. Por ahora sólo importa recalcar que no es conveniente que la frecuencia del modelo vibratorio sea parecida a la frecuencia de la fuerza perturbadora ya que se presentaría el fenómeno de resonancia y la estructura presentaría amplitudes de vibración importantes.

II.7 Vibración Forzada Armónicamente con Amortiguamiento.

La ecuación que define el movimiento vibratorio forzado considerando el amortiguamiento y una fuerza armónica es:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = F_0 \sin \Omega t \quad \text{-----} (2.17)$$

Todos los términos que aparecen en la ecuación 2.17 ya fueron tratados; para resolver esta ecuación nuevamente se usará el método de los coeficientes indeterminados. la ecuación 2.17 se convierte en:

$(D^2+2\xi\omega D+\omega^2)u=F_0 \text{ sen } \Omega t$; el segundo miembro de esta ecuación se anula con el operador $(D^2+\Omega^2)$ esto es:

$(D^2+2\xi\omega D+\omega^2)(D^2+\Omega^2)u=(D^2+\Omega^2)F_0 \text{ sen } \Omega t=0$ por esta razón la solución general de la ecuación 2.17 es:

$$\underbrace{C_1 e^{-\xi\omega t} \cos \omega t + C_2 e^{-\xi\omega t} \text{sen } \omega t}_{u_c(t)} + \underbrace{C_3 \cos \Omega t + C_4 \text{sen } \Omega t}_{u_p(t)} \quad (2.18)$$

Hay que hacer notar que la ecuación 2.18 está dividida en dos partes: la solución complementaria $u_c(t)$ y la solución particular $u_p(t)$, la primera se caracteriza por ser un término que se vuelve insignificante cuando el tiempo (t) tiende a infinito, se dice que es un término *transitorio* o una solución transitoria. Así, para valores grandes del tiempo el desplazamiento de la estructura se aproxima por la solución particular $u_p(t)$. A este último término se le conoce como solución *estacionaria* o de estado permanente.

Ahora se obtendrán las constantes de la solución particular C_3 y C_4 derivando dos veces:

$$u_p(t)=C_3 \cos \Omega t + C_4 \text{sen } \Omega t, \quad \dot{u}_p(t)=-C_3 \Omega \text{sen } \Omega t + C_4 \Omega \cos \Omega t$$

y $\ddot{u}_p(t)=-C_3 \Omega^2 \cos \Omega t + C_4 \Omega^2 \text{sen } \Omega t$, sustituyendo estos valores en la ecuación 2.17 y simplificando:

$$[\cos \Omega t] [C_3(\omega^2-\Omega^2) + C_4(2\xi\omega\Omega)] + [\text{sen } \Omega t] [C_4(\omega^2-\Omega^2)-C_3(2\xi\omega\Omega)]=$$

$$F_0 \text{ sen } \Omega t, \text{ planteando el sistema de ecuaciones lineales y}$$

resolviendo:

$$C_3(\omega^2-\Omega^2) + C_4(2\xi\omega\Omega)=0$$

$$C_4(\omega^2-\Omega^2)-C_3(2\xi\omega\Omega)=F_0 \quad \text{de donde:}$$

$$C_3=-2\xi\omega\Omega F_0 / [(\omega^2-\Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2] \text{ y } C_4=F_0 \{ [\omega^2-\Omega^2] / [(\omega^2-\Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2] \}$$

Sustituyendo los valores de las constantes C_3 y C_4 en la ecuación

$$2.18: u(t) = C_1 e^{-\xi\omega t} (\cos \omega t) + C_2 e^{-\xi\omega t} (\text{sen } \omega t) - \\ \frac{[F_0(\cos \Omega t)(2\xi\omega\Omega)]}{[(\omega^2-\Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]} + \\ \frac{[F_0(\text{sen } \Omega t)(\omega^2-\Omega^2)]}{[(\omega^2-\Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]} \quad \text{---- (2.19)}$$

Análogamente a como se vio anteriormente, la ecuación 2.19 se puede escribir de la siguiente forma alternativa:

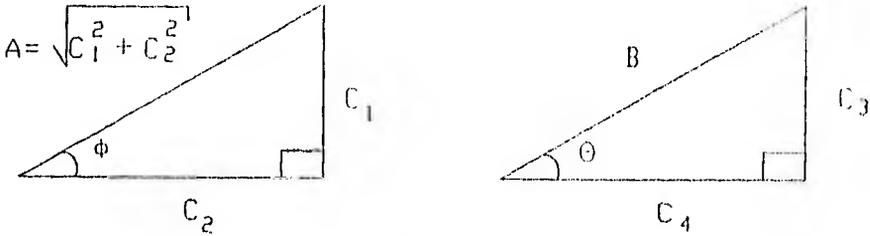


fig. 2.7

De la figura 2.7 se deduce que $\text{Sen } \phi = C_1/A$ y $\text{cos } \phi = C_2/A$ y $B = F_0 / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}$, en consecuencia :

$$\text{Sen } \theta = -2\xi\omega\Omega / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ y}$$

$\text{Cos } \theta = \omega^2 - \Omega^2 / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}$ multiplicando los dos primeros términos de la ecuación 2.19 por A/A y los restantes por B/B :

$$u(t) = A/A \cdot C_1 e^{-\xi\omega t} (\text{cos } \omega t) + A/A \cdot C_2 e^{-\xi\omega t} (\text{sen } \omega t) - \\ [B \cdot F_0 (\text{cos } \Omega t) (2\xi\omega\Omega)] / B \cdot [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}} + \\ [B \cdot F_0 (\text{sen } \Omega t) (\omega^2 - \Omega^2)] / B \cdot [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ se tiene:}$$

$$u(t) = A(\text{sen } \phi) e^{-\xi\omega t} (\text{cos } \omega t) + A(\text{cos } \phi) e^{-\xi\omega t} (\text{sen } \omega t) +$$

$B(\text{sen } \theta) (\text{cos } \Omega t) + B(\text{cos } \theta) (\text{sen } \Omega t)$, teniendo en cuenta la fórmula del seno de una suma de ángulos : $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$ podemos escribir:

$$u(t) = Ae^{-\zeta\omega t} [\text{sen}(\omega t + \phi)] + B[\text{sen}(\Omega t + \theta)]$$

o bien:

$$u(t) = Ae^{-\zeta\omega t} [\text{sen}(\omega t + \phi)] + \left[\frac{F_0}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \{\text{sen}(\Omega t + \theta)\} \quad (2.20)$$

Como se estudio anteriormente, se demuestra que cuando hay amortiguación, la solución complementaria de la ecuación 2.20 es transitoria y que para valores muy grandes del tiempo su solución es muy cercana al término estacionario es decir:

$$u(t) \cong \left[\frac{F_0}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \{\text{sen}(\Omega t + \theta)\}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

también se verifica fácilmente mediante un análisis de máximos y mínimos que el desplazamiento máximo se producirá para el valor: $\Omega = \omega (1 - 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$ por lo tanto, para evitar que el sistema entre en *resonancia*, la frecuencia de la fuerza perturbadora debe ser diferente a $(\omega / 2\pi) \cdot (1 - 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$; sin embargo, para valores pequeños de ζ , Ω es muy similar a ω . Para fines prácticos, se establece por lo tanto, que el desplazamiento máximo ocurre cuando $\Omega = \omega$.

Haciendo $u(t) = [g(\Omega)] [\text{sen } \Omega t + \theta]$, donde $g(\Omega) = F_0 / [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}$. En la figura 2.8 se grafica la función $g(\Omega)$ para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento ζ . A la familia de curvas mostradas se les conoce como *curvas de resonancia* del sistema estructural. La curva de trazos representa el caso en el cual el amortiguamiento es nulo y el sistema se encuentra en un estado de resonancia pura. De las otras curvas se observa que aún en resonancia, con el solo hecho de existir un pequeño amortiguamiento, las amplitudes de la estructura son finitas.

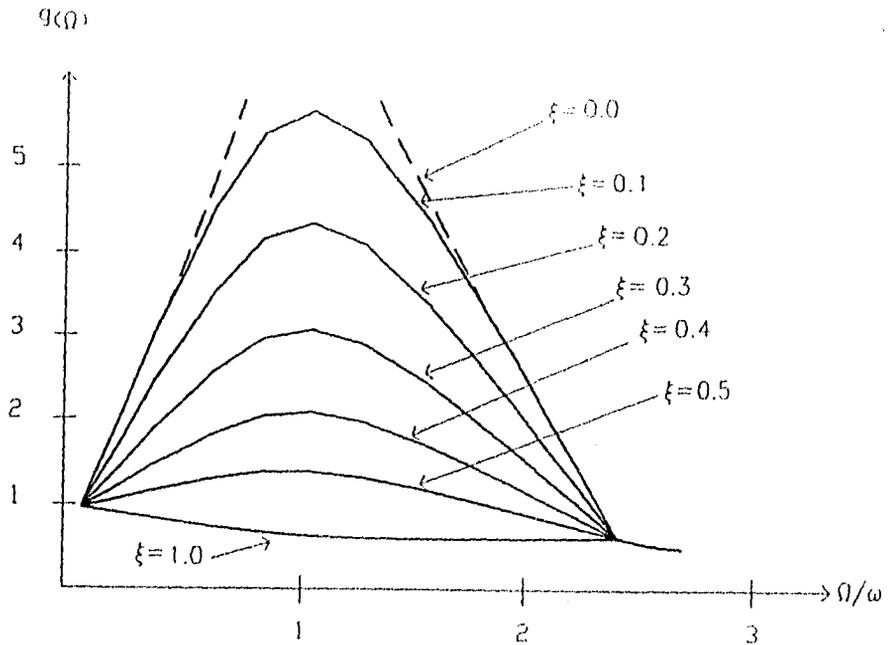


Fig. 2.8

II.8 Vibración Forzada con Amortiguamiento ante la presencia de cualquier Fuerza Perturbadora.

En la sección anterior se estudio el caso en el que la fuerza que actua en la estructura es armónica. Ahora se verá el caso en el cual la fuerza varía de un modo arbitrario, tal es la que resulta de explosiones, rachas de aire o fuerzas sísmicas. Para fines de este trabajo interesa conocer la respuesta que las estructuras tienen ante fuerzas sísmicas.

Se supone que la fuerza perturbadora $F(t)$, que es una función del tiempo, comienza a actuar en el tiempo $t=0$, que el sistema estructural está en reposo y que por lo tanto la velocidad y

desplazamiento iniciales son cero. Se considera que el movimiento del terreno consiste en un solo pulso de velocidad en un intervalo de tiempo infinitesimal $d\tau$; es decir, que la cantidad de movimiento más es igual al impulso $F(\tau)d\tau$, de donde se obtiene $\dot{u}=F(\tau)d\tau/m$ (fig. 2.9) y el desplazamiento es $u=0$ cuando $t=\tau$

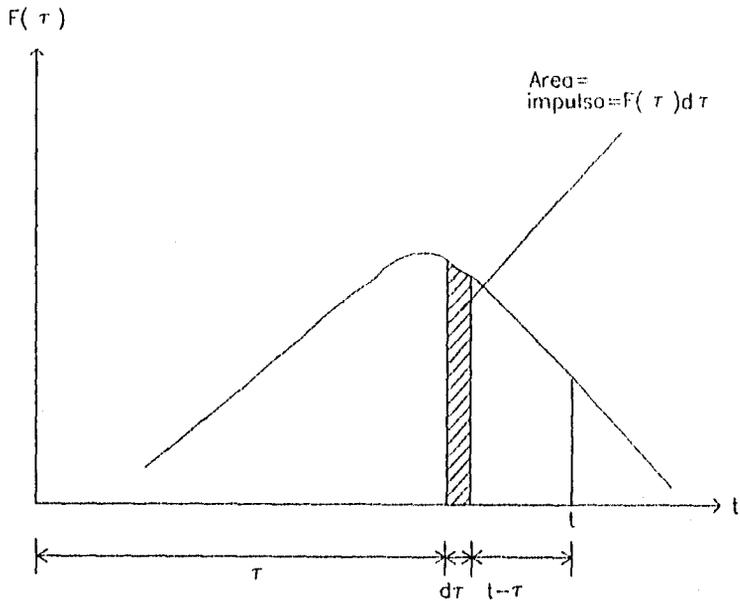


fig. 2.9

La fuerza que el movimiento del terreno induce a una estructura durante un sismo es: $F_E(t) = -m \ddot{s}_0(t)$

\ddot{s}_0 es la aceleración del suelo (variable en el tiempo)

Al sustituir esta última ecuación en la de la velocidad inicial se tiene: $\dot{u}_0 = -m \ddot{s}_0(\tau) d\tau / m = -\ddot{s}_0(\tau) d\tau$

Para calcular el desplazamiento que la estructura sufre con la aceleración del terreno \ddot{s}_0 en los instantes $t=\tau$ y $t=t-\tau$ se usará la fórmula correspondiente a la vibración libre con amortiguamiento:

$u(t)=e^{-\zeta\omega t} \{C_1 \cos[\omega_d t] + C_2 \operatorname{sen}[\omega_d t]\}$ y de las condiciones $u=0$ y $\dot{u}=\dot{u}_0$ las constantes de integración son $C_1=0$ y $C_2=u_0/\omega_d$ de donde se obtiene:

$u(t)=u_0/\omega_d e^{-\zeta\omega t} \operatorname{sen}[\omega_d t]$ pero $u_0=-\int_0^t \ddot{s}_0(\tau) d\tau$ para el instante $t=\tau$, entonces:

$u(t)=-\int_0^t \ddot{s}_0(\tau) d\tau / \omega_d e^{-\zeta\omega t} \operatorname{sen} \omega_d(t-\tau)$, esta última ecuación representa la vibración del sistema estructural cuando está sujeto a una carga impulsiva. Cuando la fuerza se aplica en forma continua, la respuesta del sistema en un instante posterior t se obtiene al sumar la serie de cargas impulsivas en dicho intervalo, así:

$$u(t)=-1/\omega_d \int_0^t \ddot{s}_0(\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega_d(t-\tau) d\tau \quad \text{-----(2.21)}$$

La ecuación obtenida es la integral de Duhamel y permite obtener el desplazamiento que tiene una estructura para el tiempo t . En la ecuación 2.21 τ es el instante en el que se aplica la carga impulsiva. Para conocer la historia de desplazamientos que sufre el sistema ante el movimiento del terreno desde $t=0$ hasta $t=t$ es necesario resolver la integral de Duhamel para cada intervalo de tiempo. Sin embargo, debido a que $\ddot{s}_0(t)$ no es una función continua, es común resolver esta integral mediante métodos numéricos.

II.9 Vibración Libre sin Amortiguamiento de Sistemas de Varios Grados de Libertad.

En las secciones anteriores se ha tratado el caso en el que el sistema vibratorio es de un sólo grado de libertad. No obstante, hay estructuras de varios pisos para las que se requiere obtener las fuerzas que induce el movimiento del terreno en éstas. Para tal fin será necesario obtener la matriz de masas $[m]$ y la matriz de rigideces $[K]$, se supone que el amortiguamiento es el mismo en todos los niveles del edificio, por tal razón la matriz $[C]$ se reduce a un escalar. Para fines de este trabajo, no se toma en cuenta la influencia que el amortiguamiento tiene sobre la estructura, este efecto se incluye después en forma aproximada ya que no se cuenta con datos precisos por lo que no se justifica hacer un análisis más refinado. Considérese la estructura de 6 grados de libertad mostrada en la figura 2.10.

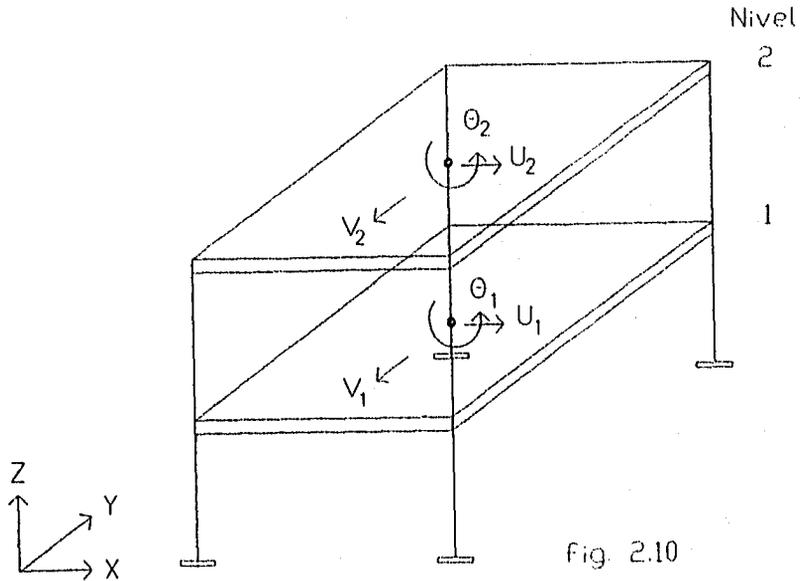


Fig. 2.10

Suponiendo que el sistema de piso es muy rígido y que la deformación axial de las columnas es despreciable, se tienen tres grados de libertad por nivel, es decir, un desplazamiento du_1 en la dirección X del nivel 1, un desplazamiento dv_1 en la dirección Y del nivel 1, un giro θ_1 del nivel 1 alrededor del eje Z; análogamente para el nivel 2 se tiene un desplazamiento en la dirección X, un desplazamiento en la dirección Y y un giro alrededor del eje Z, du_2 , dv_2 y θ_2 respectivamente; los cuales se pueden agrupar para formar el vector de desplazamientos de la estructura, esto es:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (2.22)}$$

(3xN, 1)

Además, tomando en cuenta que las masas se concentran en cada nivel, se pueden representar mediante una matriz diagonal.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (2.23)}$$

(3xN, 3xN)

m_1 y m_2 son la masa del nivel 1 y la masa del nivel 2 respectivamente, $m\theta_1$ es el momento de inercia polar de la masa del nivel 1 con respecto a su centro y $m\theta_2$ representa el momento de inercia polar de la masa del nivel 2 con respecto a su centro; también se le conoce como masa rotacional.

Derivando dos veces la ecuación 2.22 se obtiene el vector de aceleraciones del sistema:

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3 \times N, 1) \quad (2.24)$$

Similarmente a como se obtuvo la ecuación 2.3 para estructuras con vibración libre sin amortiguamiento con un grado de libertad, se plantea la ecuación para estructuras con varios grados de libertad como sigue:

$$[M] \ddot{U} + [K] U = \{0\} \quad (2.25)$$

Ahora las variables en la ecuación 2.25 representan matrices y vectores:

- [M] es la matriz de masas (diagonal) de orden $(3 \times N, 3 \times N)$
- [K] es la matriz de rigideces (simétrica) de orden $(3 \times N, 3 \times N)$
- U es el vector de desplazamientos relativos de las masas al terreno de orden $(3 \times N, 1)$
- \ddot{U} es el vector de aceleraciones relativas de las masas al terreno de orden $(3 \times N, 1)$
- {0} es una matriz nula
- N es el número de niveles de la estructura.

II.10 Obtención de la Matriz de Rigideces para Estructuras con tres Grados de Libertad por Nivel.

En esta sección se explica la forma de obtener la matriz de rigidez expresando el movimiento del sistema de piso, para cada nivel, en función de dos desplazamientos horizontales perpendiculares entre sí y un giro alrededor de un eje vertical que pase por el centro de masa en cada piso, evidentemente este eje vertical es ortogonal a la planta. En forma general, los pasos para obtener la matriz son:

- i) Se calcula la matriz de rigideces de cada sistema plano tomando en cuenta el giro y los desplazamientos vertical y horizontal respectivamente de cada nudo. Si se desprecia la deformación axial de los elementos que componen al sistema plano (vigas y columnas), los grados de libertad se reducen notablemente a un giro

por cada nudo y un desplazamiento horizontal por nivel. La matriz se ordenará como sigue para facilitar los cálculos:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\Delta} \\ K_{\Delta\gamma} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix}$$

ii) Con el procedimiento de condensación estática se obtiene la matriz de rigidez lateral de cada sistema plano j a partir de la matriz que resulta del inciso i como sigue:

Sabemos que la fuerza lateral es igual a la rigidez lateral por el desplazamiento lateral.

$$\{FLAT\} = [K_{LAT}] \{\delta_{LAT}\}$$

Ahora, sabiendo que los momentos son nulos cuando se toma en cuenta únicamente el desplazamiento lateral entonces se puede escribir.

$$\begin{bmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\Delta} \\ K_{\Delta\gamma} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \delta_{LAT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ FLAT \end{bmatrix}$$

Desarrollando:

$$K_{\gamma\gamma} \phi + K_{\gamma\Delta} \delta_{LAT} = 0$$

$$K_{\Delta\gamma} \phi + K_{\Delta\Delta} \delta_{LAT} = FLAT$$

Despejando ϕ de la primera ecuación:

$$\phi = -[K_{\gamma\gamma}]^{-1} [K_{\gamma\Delta}] \{\delta_{LAT}\}$$

Sustituyendo el valor de ϕ en la segunda ecuación:

$$-[K_{\Delta\gamma}] [K_{\gamma\gamma}]^{-1} [K_{\gamma\Delta}] \{\delta_{LAT}\} + [K_{\Delta\Delta}] \{\delta_{LAT}\} = FLAT = [K_{LAT}] \{\delta_{LAT}\}$$

Simplificando:

$$[K_{LAT}] = [K_{\Delta\Delta}] - [K_{\Delta\gamma}] [K_{\gamma\gamma}]^{-1} [K_{\gamma\Delta}]$$

iii) Ahora se calcula la matriz de rigideces en función de los grados de libertad del edificio completo (tres por cada nivel).

En la figura 2.11 se muestra la planta de un edificio en el nivel 1, con un desplazamiento lateral u_i en la dirección X, un desplazamiento lateral v_i en la dirección Y, un giro θ_i alrededor del eje Z; el subíndice i corresponde precisamente al nivel para

el que se calculan los desplazamientos y aunque están expresados en el centro de masas del nivel i , dado que se considera que el sistema de piso es muy rígido en su plano, basta con obtenerlos en cualquier punto de la planta para conocer la deformación que sufre el piso i . Con el procedimiento que a continuación se explica se calcula el desplazamiento lateral de todos los marcos que integran la planta del edificio en el piso i . ϕ_j es el ángulo que se forma entre las direcciones positivas de u_i y de d_{ji} , r_{ji} es la distancia que hay entre el centro de masas en el nivel i y la proyección, en planta, del marco del eje j y tiene signo positivo cuando el giro de d_{ji} alrededor del centro de masas es del mismo sentido que θ_i .

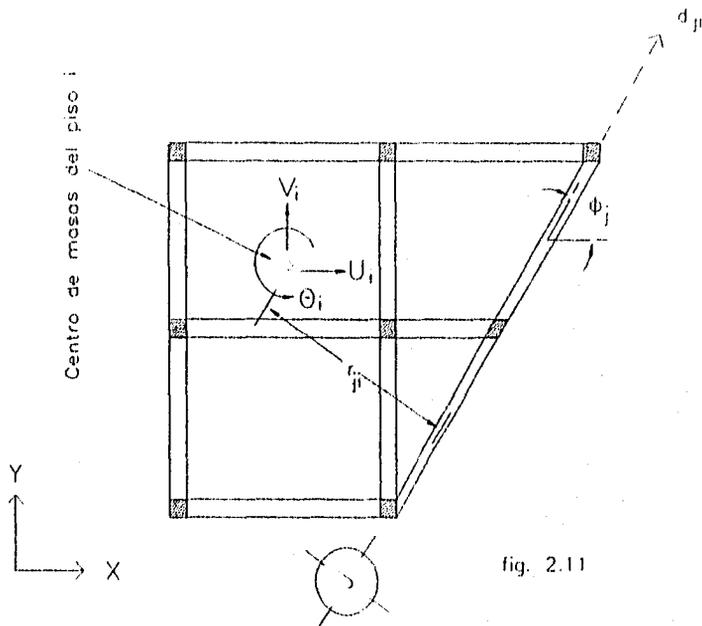


fig. 2.11

El desplazamiento lateral d_{ji} del marco del eje j en el piso i será igual a la suma del desplazamiento debido al giro, más el desplazamiento originado por u_i y el desplazamiento que ocasiona v_i (figura 2.12) considerando que el giro θ_i del piso es muy pequeño, la contribución de éste al desplazamiento del eje j es: $r_{ji} \cdot \theta_i$ en tanto que u_i y v_i influyen con $u_i \cos \phi_j$ y $v_i \sin \phi_j$ respectivamente en consecuencia el desplazamiento lateral del marco del eje j será:

$$\text{Sea } b_{ji} = \begin{bmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \\ r_{ji} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad u_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

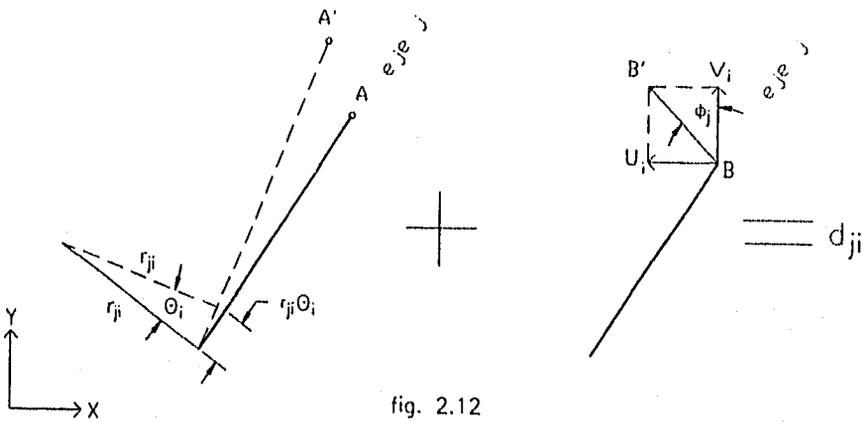


fig. 2.12

Entonces el desplazamiento del eje j , en el piso i se puede escribir de la siguiente forma:

$$d_{ji} = b_{ji}^T u_i$$

Una vez que se ha calculado el desplazamiento del eje j en los N niveles del edificio, éstos se agrupan como sigue:

$$D_j = \begin{bmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ d_{j3} \\ \vdots \\ d_{jN} \end{bmatrix} \quad (N \times 1) \qquad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (3N \times 1)$$

$$y \quad B_j = \begin{bmatrix} b_{j1}^T & & & & & & \\ & b_{j2}^T & & & & & \\ & & b_{j3}^T & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & b_{jN}^T \end{bmatrix} \quad (N \times 3N)$$

La matriz K_j expresada en función de los desplazamientos de los N pisos es:

$$K_j = B_j^T \mathcal{K}_{LAT j} B_j$$

Recordando que $\mathcal{K}_{LAT j}$ es la matriz de rigidez lateral del eje j obtenida por condensación estática.

Ya que se han obtenido todas las matrices K_j de los marcos que integran el edificio, sólo queda por obtener la matriz K en la cual se toma en cuenta la contribución para la rigidez de cada marco de la estructura, para tal fin basta con sumar todas las matrices K_j dado que están referidas a los mismos grados de libertad. El orden de la matriz K es $(3N \times 3N)$.

RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA A MOVIMIENTOS DE SU BASE

III.1 Introducción.

Una de las principales preocupaciones del ingeniero estructurista es determinar las sollicitaciones a las que estará sujeta la estructura durante su vida de servicio, entre estas se encuentran aquellas sollicitaciones que son provocadas por movimientos sísmicos, por tal motivo se han propuesto diversos métodos para evaluar la intensidad de la fuerza sísmica en los edificios, entre ellos se cuenta con el análisis dinámico modal espectral, el cual se apoya en las ecuaciones de equilibrio dinámico que se estudiaron en el capítulo anterior. En las siguientes secciones se hará un estudio de las ecuaciones que intervienen en el análisis modal, se verán las propiedades de los modos de vibración y la manera en que estas son aprovechadas para obtener el desplazamiento que presenta el edificio ante la excitación. Otro tema de no menos importancia es el de determinar cuál será el sismo que servirá para diseñar las estructuras, comúnmente conocido como sismo de diseño, para tal efecto se hará uso del espectro de aceleraciones propuesto en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1987, según la zona en que se encuentre desplazado el edificio. Se estudiará el comportamiento de las estructuras dentro del rango inelástico y la manera en que se puede aprovechar la disipación de energía para reducir las fuerzas sísmicas de diseño de acuerdo al factor de comportamiento sísmico que se propone en las Normas Técnicas Complementarias por Sismo del RCDF-1987. Por último,

se obtendrán los cortantes sísmicos en dos direcciones ortogonales, un momento torsionante para cada nivel y para cada modo de vibración así como la forma de superponer la respuesta de los modos para determinar la respuesta máxima de la estructura ante la presencia del sismo de diseño.

III.2 Determinación de los Modos de Vibración de la Estructura.

La ecuación 2.25 $[M]\ddot{u} + [K]u = 0$ se puede resolver haciendo un análisis paso a paso mediante métodos numéricos ó bien obteniendo periodos y modos de vibrar de la estructura; para tal fin se va a introducir el concepto de modos naturales de vibración como aquel que puede escribirse de la forma:

$$u(t) = Z_n \theta_n(t) \quad \text{-----} \quad (3.1)$$

Donde:

$u(t)$ = representa la vibración libre de la estructura en el tiempo.

Z_n es la forma del modo o de la vibración.

$\theta_n(t)$ es una función escalar que varía con el tiempo t .

Como se observa en la ecuación 3.1, la forma del modo Z_n no depende del tiempo.

Derivando dos veces la expresión 3.1 se obtiene:

$$\ddot{u}(t) = Z_n \ddot{\theta}_n(t) \quad \text{-----} \quad (3.2)$$

Sustituyendo 3.1 y 3.2 en 2.25 nos queda:

$$[M] Z_n \ddot{\theta}_n(t) + [K] Z_n \theta_n(t) = 0 \quad \text{-----} \quad (3.3)$$

Desarrollando la ecuación 3.3 para la masa del nivel i .

$$m_i z_i \ddot{\theta}(t) + \left(\sum_j k_{ij} z_i \right) \theta(t) = 0 \quad (3.4)$$

tal que:

m_i es la masa del nivel i

z_i es el desplazamiento del nivel i en el modo n

$\theta(t)$ es una función escalar para el modo n

k_{ij} es la rigidez del nivel i al aplicar un desplazamiento unitario en el nivel j

De la expresión 3.4 se tiene:

$$\ddot{\theta}(t)/\theta(t) = - \left(\sum_j k_{ij} z_i \right) / m_i z_i \quad (3.5)$$

Dado que el primer miembro de la ecuación 3.5 es función del tiempo, en tanto que el segundo miembro es independiente del tiempo, entonces para que se mantenga la igualdad los dos miembros deben ser constantes; si se nombra a este valor constante $-\omega_n^2$ entonces:

$$\left(\sum_j k_{ij} z_i \right) / m_i z_i = \omega_n^2 \quad (3.6)$$

Dividiendo la expresión 3.4 entre $m_i z_i$ y tomando en cuenta la ecuación 3.6 se llega a:

$$\ddot{\theta}_n(t) + \omega_n^2 \theta_n(t) = 0 \quad (3.7)$$

Siendo ω_n la frecuencia circular natural del sistema vibratorio en el modo n .

La solución de la ecuación 3.7 es :

$$\theta_n = A \text{ sen } \omega_n (t - t_n) \quad (3.8)$$

Derivando dos veces la ecuación 3.8

$$\ddot{\theta}_n = -A \omega_n^2 \sin \omega_n (t-t_n) = -\omega_n^2 \theta_n \quad \text{-----} \quad (3.9)$$

Sustituyendo el último resultado en 3.3:

$$[M]Z_n (-\omega_n^2 \theta_n) + [K]Z_n (\theta_n) = ([K] - \omega_n^2 [M])Z_n = 0 \quad \text{-----} \quad (3.10)$$

La expresión 3.10 representa la ecuación de frecuencias, es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Del análisis de esta última ecuación se deduce que para Z_n sea diferente de cero entonces se debe cumplir la siguiente relación:

$$[K - \omega_n^2 M] = 0 \quad \text{-----} \quad (3.11)$$

De la ecuación 3.11 se obtienen "n" omegas (ω) o frecuencias circulares también conocidos como eigenvalores los cuales se sustituyen en la expresión 3.10 para obtener las "n" zetas (Z), es decir la forma modal asociada a cada una de las frecuencias. Cabe señalar que para cada modo se obtiene solamente el desplazamiento relativo de las masas, z_{ij} (desplazamiento del nivel i en el modo j). Se acostumbra asignar un desplazamiento igual a la unidad a uno de los grados de libertad y después calcular el desplazamiento relativo de los grados de libertad restantes.

III.3 Ortogonalidad de los Modos de Vibración.

Se puede demostrar que los modos naturales constituyen un conjunto ortogonal completo con respecto a la matriz de masas $[M]$ y también a la matriz de rigideces $[K]$.

El conjunto es completo porque cualquier configuración de desplazamientos puede ser expresado como una combinación lineal de los modos de vibración, es decir:

$$U = \sum_j a_j z_j \quad \text{-----} \quad (3.12)$$

Los a_j son coeficientes de participación de cada modo de vibración.

Dado que los modos de vibración son ortogonales entonces se cumple:

$$z_m^T [M] z_n = 0 \quad \text{-----} \quad (3.13)$$

$$z_m^T [K] z_n = 0 \quad \text{-----} \quad (3.14)$$

tal que $\omega_n \neq \omega_m$ y $n \neq m$

La ecuación 3.14 también puede ser escrita como $F_m^T z_n = 0$ cuando $\omega_n \neq \omega_m$; esto significa que las fuerzas asociadas con el m -ésimo modo natural no producen trabajo cuando se mueven a través de la configuración del n -ésimo modo natural.

El producto $z_n^T [M] z_n$ es igual a una constante cualquiera sin embargo por convención se toma una escala igual a la unidad. Con esto se esta normalizando con respecto a la matriz de masas.

Para demostrar la ortogonalidad de los modos de vibración se considerará la ecuación 3.10:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) z_n = 0$$

Si se multiplica esta última ecuación por la traspuesta de la m-ésima forma modal se llega a:

$$Z_m^T [K] Z_n - \omega_n^2 Z_m^T [M] Z_n = 0 \quad \text{-----} (3.15)$$

En forma similar, si se tiene una ecuación análoga a la expresión 3.10 ahora para m-ésimo modo:

$$[K] - \omega_m^2 [M] Z_m = 0 \quad \text{-----} (3.16)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación 3.16 por la traspuesta del n-ésimo modo nos queda:

$$Z_n^T [K] Z_m - \omega_m^2 Z_n^T [M] Z_m = 0 \quad \text{-----} (3.17)$$

Dado que las matrices [M] y [K] son simétricas entonces se puede escribir:

$$Z_m^T [K] Z_n = Z_n^T [K] Z_m$$

$$Z_m^T [M] Z_n = Z_n^T [M] Z_m$$

Restando la ecuación 3.15 de la 3.17 se llega a:

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) Z_n^T [M] Z_m = 0 \quad \text{-----} (3.18)$$

tal que $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ con $n \neq m$

entonces:

$$Z_n^T [M] Z_m = 0 \quad \text{-----} (3.19)$$

$$\text{o bien } \sum m_i Z_{in} Z_{im} = 0 \quad \text{-----} (3.20)$$

De manera similar se llega a :

$$Z_n^T [K] Z_m = 0 \quad \text{----- (3.21)}$$

Con lo que se demuestra que los vectores de la forma modal son ortogonales con respecto a la matriz de masas y de rigideces respectivamente.

III.4 Análisis Modal sin considerar Torsión.

Dado que los modos de vibración constituyen un conjunto completo en un instante dado, el desplazamiento de cualquiera de sus masas puede ser calculado como la suma de los desplazamientos debidos a la participación de cada uno de los modos naturales es decir (fig. 3.1):

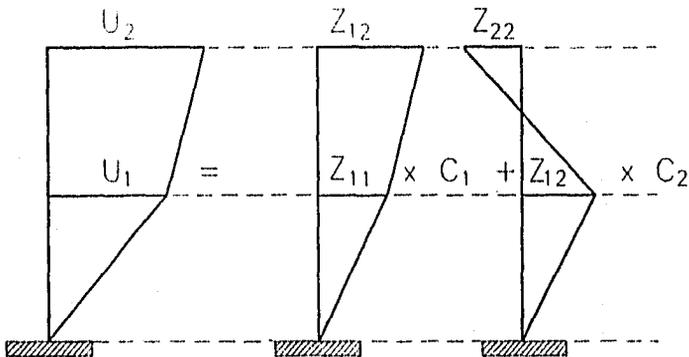


fig. 3.1

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) C_j z_{ij} \quad (3.22)$$

Donde:

$u_i(t)$: es el desplazamiento relativo de la masa i a la base en el instante t .

$\phi_j(t)$: función que representa la variación con respecto al tiempo de la participación del modo j . El valor máximo de esta función se obtiene del espectro de desplazamientos correspondiente a una estructura de un grado de libertad de igual periodo que el de la estructura analizada en el modo j .

C_j : Coeficiente de participación que establece la escala a la que interviene el modo j en el movimiento de la masa i .

La técnica del análisis modal consiste en convertir la ecuación del movimiento del sistema de N grados de libertad en N ecuaciones independientes. Recordando que la ecuación del movimiento de una estructura de varios grados de libertad en vibración libre es:

$$[M]\ddot{U} + [K]U = [O]$$

De acuerdo con la ecuación 3.22, los desplazamientos se pueden expresar como:

$$U = \{\phi(t)\} \{C\} \{Z\} \quad (3.23)$$

Derivando dos veces la ecuación 3.23 se llega a:

$$\ddot{U} = \{\ddot{\phi}(t)\} \{C\} \{Z\} \quad (3.24)$$

Sustituyendo las expresiones 3.23 y 3.24 en la ecuación del movimiento nos queda:

$$[M] \{\ddot{\phi}(t)\} \{C\} [Z] + [K] \{\phi(t)\} \{C\} [Z] = \{0\} \quad \text{----- (3.25)}$$

Sea $Y = \{\phi(t)\} \{C\}$ entonces 3.25 se puede escribir:

$$[M] \ddot{Y} [Z] + [K] Y [Z] = \{0\} \quad \text{----- (3.26)}$$

Al premultiplicar la ecuación 3.26 por $[Z]^T$:

$$[Z]^T [M] \ddot{Y} [Z] + [Z]^T [K] Y [Z] = \{0\} \quad \text{----- (3.27)}$$

Aprovechando la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración con respecto a la matriz de masas y la matriz de rigideces, esto es que $[Z]^T [M] [Z] = \{0\}$ y $[Z]^T [K] [Z] = \{0\}$ cuando $j \neq i$, la ecuación 3.27 se convierte en un sistema de matrices diagonales lo que da origen a N ecuaciones independientes de un grado de libertad (conocido también como desacoplamiento de la estructura) quedando por resolver N sistemas de un grado de libertad y luego combinarlos de acuerdo con su participación.

De las variables que intervienen en la ecuación 3.22 ya se ha obtenido z_{ij} falta por obtener $\phi_j(t)$ y C_j . En la siguiente sección se explica la manera de obtener el coeficiente de participación C_j .

III.5 Obtención del Coeficiente de Participación C_j de un Modo cualquiera 'n'.

Supongamos que el terreno donde se apoya la estructura sufre una variación en su velocidad igual a \dot{u}_0 , todas las masas tendrán una velocidad relativa a la base $\dot{u}_i = -\dot{u}_0$ que de acuerdo con la ecuación

3.22 se puede expresar:

$$\sum_j \phi_j(0) C_j z_{ij} = -\dot{s}_0 \quad (3.28)$$

para $t=0$ $\phi_j(0) = -\dot{s}_0$ entonces la expresión 3.28 nos queda:

$$\sum_j C_j z_{ij} = 1 \quad (3.29)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación 3.29 por $m_i z_{in}$ tenemos:

$$\sum_j C_j m_i z_{ij} z_{in} = m_i z_{in} \quad (3.30)$$

haciendo un desarrollo similar para todos los valores de i (para cada nivel) y sumando se llega a:

$$\sum_i \sum_j C_j m_i z_{ij} z_{in} = \sum_i m_i z_{in} \quad (3.31)$$

Que es igual a escribir (ya que no importa el orden en que se ejecuten las sumas):

$$\sum_j \sum_i C_j m_i z_{ij} z_{in} = \sum_i m_i z_{in} \quad (3.32)$$

Aprovechando la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración, en la expresión 3.32 sólo quedará el término (ya que los demás son nulos):

$$m_i z_{in} z_{in} = z_{in}^2 \quad (3.33)$$

Por lo que 3.31 se reduce a:

$$C_n \sum_i m_i z_{in}^2 = \sum_i m_i z_{in} \quad \text{o bien (despejando } C_n \text{):}$$

$$C_n = \frac{\sum_i m_i z_{in}}{\sum_i m_i z_{in}^2} \quad \text{sustituyendo el valor de } C_n \text{ en 3.22:}$$

$$u_i(t) = \sum_j \phi_j(t) z_{ij} \frac{\sum_i m_i z_{ij}}{\sum_i m_i z_{ij}^2} \quad \text{----- (3.34)}$$

Cabe hacer notar que se ha intercambiado el subíndice n por j , y que $u_i(t)$ es independiente de la escala a la que se tome z_{ij} , ya que aparece tanto en el numerador como en el denominador de la ecuación 3.34.

III.6 Espectros de Respuesta.

De la solución de la ecuación diferencial 2.21 se obtiene la historia completa de la respuesta de la estructura ante un sismo, no obstante, resolver la integral de Duhamel resulta bastante laborioso y poco práctico pues para fines de diseño interesa conocer el valor máximo de la sollicitación a la que estará sujeto el edificio. Para tal fin, se obtiene la respuesta máxima de un sistema con un grado de libertad con un amortiguamiento dado ante un acelerograma de un sismo específico para un intervalo de valores del periodo T desde 0 segundos hasta un valor alto comparado con periodos de estructuras comunes de ingeniería civil, los resultados obtenidos se grafican disponiendo en el eje de las abscisas el periodo T expresado en segundos y en el eje de las ordenadas el valor de la respuesta máxima sea este

desplazamiento, velocidad o aceleración. Esta forma de representar los resultados constituye lo que se denomina *espectro de respuesta* como el que se muestra en la figura 3.2 y el valor máximo de la integral de Duhamel se llama *desplazamiento espectral*, *velocidad espectral* ó *aceleración espectral* según sea este el caso.

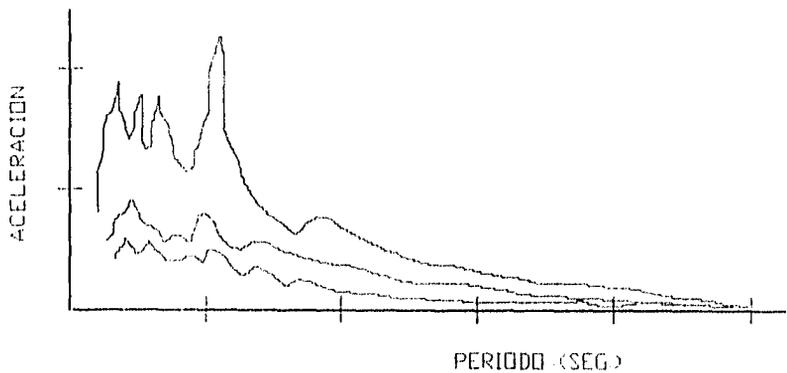


fig. 3.2

Como se observa de la fig. 3.2, el espectro de un temblor real presenta grandes variaciones en su respuesta, por lo que dos estructuras con periodos muy parecidos pueden tener sollicitaciones bastante distintas ante un mismo sismo. En la práctica, como se verá en el RCDF-87 se pueden manejar espectros de forma más suavizada debido al amortiguamiento que ayuda a que las variaciones sean menos bruscas para un rango de periodos establecidos, además tomando en cuenta la incertidumbre que existe en el cálculo del periodo natural

del edificio, así como la interacción suelo estructura que también modifica el periodo natural o la deformación inelástica que sufre el sistema.

Otro aspecto que es importante señalar, es que las estructuras no deben ser diseñadas sólo para resistir un sismo en particular sino que se debe contemplar un conjunto de temblores que puedan afectar al edificio durante su vida útil. En el Reglamento de Construcciones del D.F. 1987 se considera este hecho, por tal motivo los espectros que ahí se recomiendan para calcular la aceleración que se induce al sistema estructural, son el resultado de la envolvente de un grupo de sismos con diferentes contenidos de frecuencias y duración del movimiento.

III.7 Espectros de Diseño Propuestos en el Reglamento de Construcciones del D.F. 1987.

Para calcular el desplazamiento según la ecuación 3.22, resta por determinar el término $\phi_j(t)$ el cual podemos expresar como:

$$\phi_{j \max} = A_j / \omega_j^2 \text{ ----- (3.35)}$$

A_j se obtiene directamente del espectro de aceleraciones que se presenta en el Reglamento de Construcciones del D.F. 1987 y se puede interpretar a esta variable como una pseudoaceleración máxima en el modo j .

De esta forma, partiendo de la ecuación 3.22 el desplazamiento máximo del nivel i en el modo j es:

$$u_{ji \max} = A_j C_j z_{ij} / \omega_j^2 \text{ ----- (3.36)}$$

Cuando se hace el análisis modal se siguen las siguientes hipótesis:

a) La estructura se comporta elásticamente.

b) La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico, a , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones:

$a = (1+3T/T_a)c/4$, si T es menor que T_a

$a = c$, si T está entre T_a y T_b

$a = qc$, si T es mayor T_b

$q=(T_b/T)^r$

T es el periodo natural de interés; T , T_a y T_b están expresados en segundos; c es el coeficiente sísmico, y r un exponente que depende la zona en que se halla la estructura.

Para efectos de diseño, el Distrito Federal se considera dividido en las zonas I a III dependiendo del tipo de suelo, según se estipula en el art. 175 del RCDF-87.

Zona I. Lomas, formadas por rocas o suelo generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o intercalados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. En esta zona es frecuente la presencia de oquedades en rocas y de cavernas y tuneles excavados en suelos para explorar minas de arena.

Zona II. Transición, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m. o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de estas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros.

Zona III. Lacustre, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas de consistencia firme a muy dura y de espesores variables de centímetros a varios metros. Los depósitos lacustres suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

La zona a que corresponde un predio se determinará a partir de las investigaciones que se realicen en el subsuelo del predio objeto del estudio, tal y como lo establezcan las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones. En caso de construcciones ligeras o medianas, cuyas características se definan en dichas Normas, podrá determinarse la zona mediante el mapa que se presenta en la figura 3.3, si el predio está dentro de la porción zonificada; los predios ubicados a menos de 200 m. de las fronteras entre dos las zonas antes descritas se supondrán ubicados en la más desfavorable.

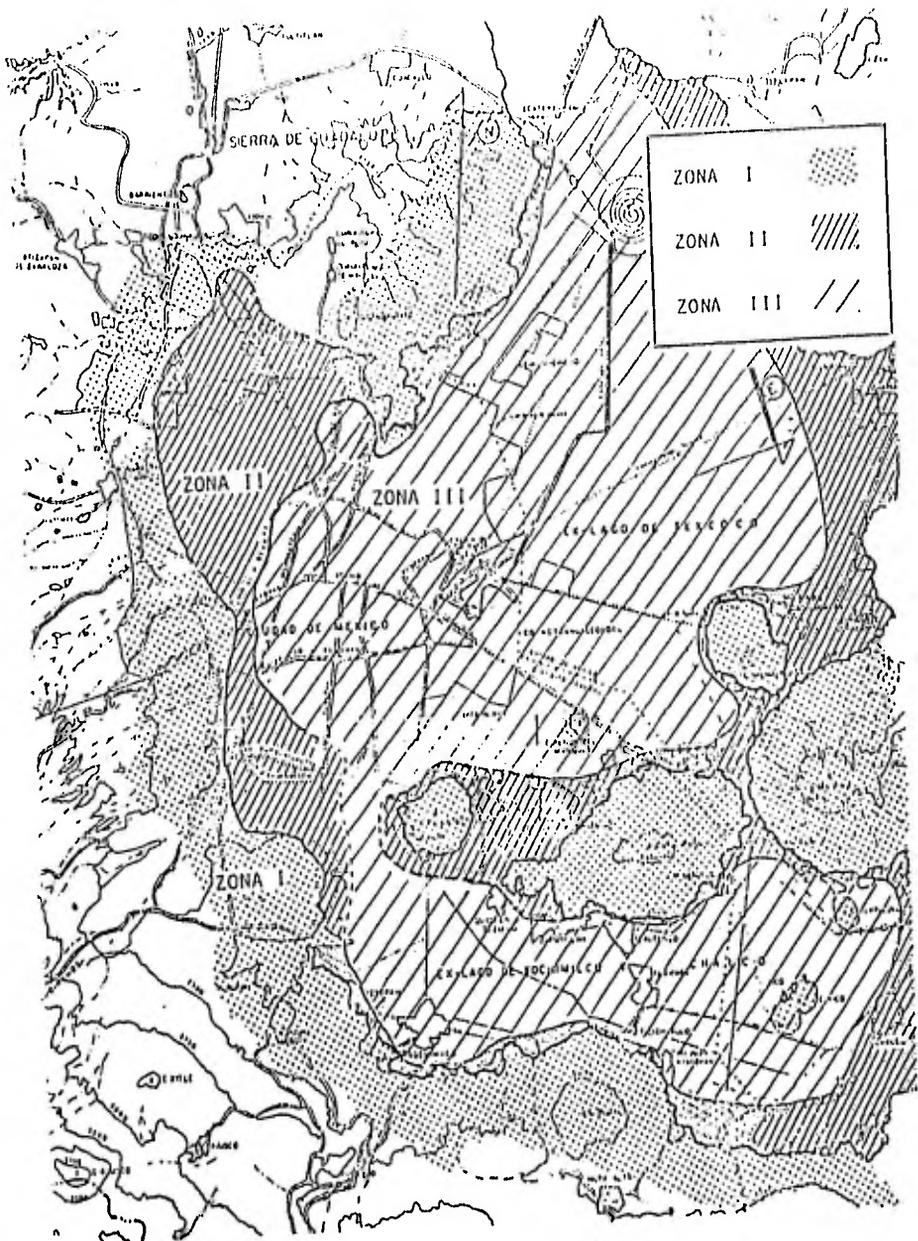


fig. 3.3

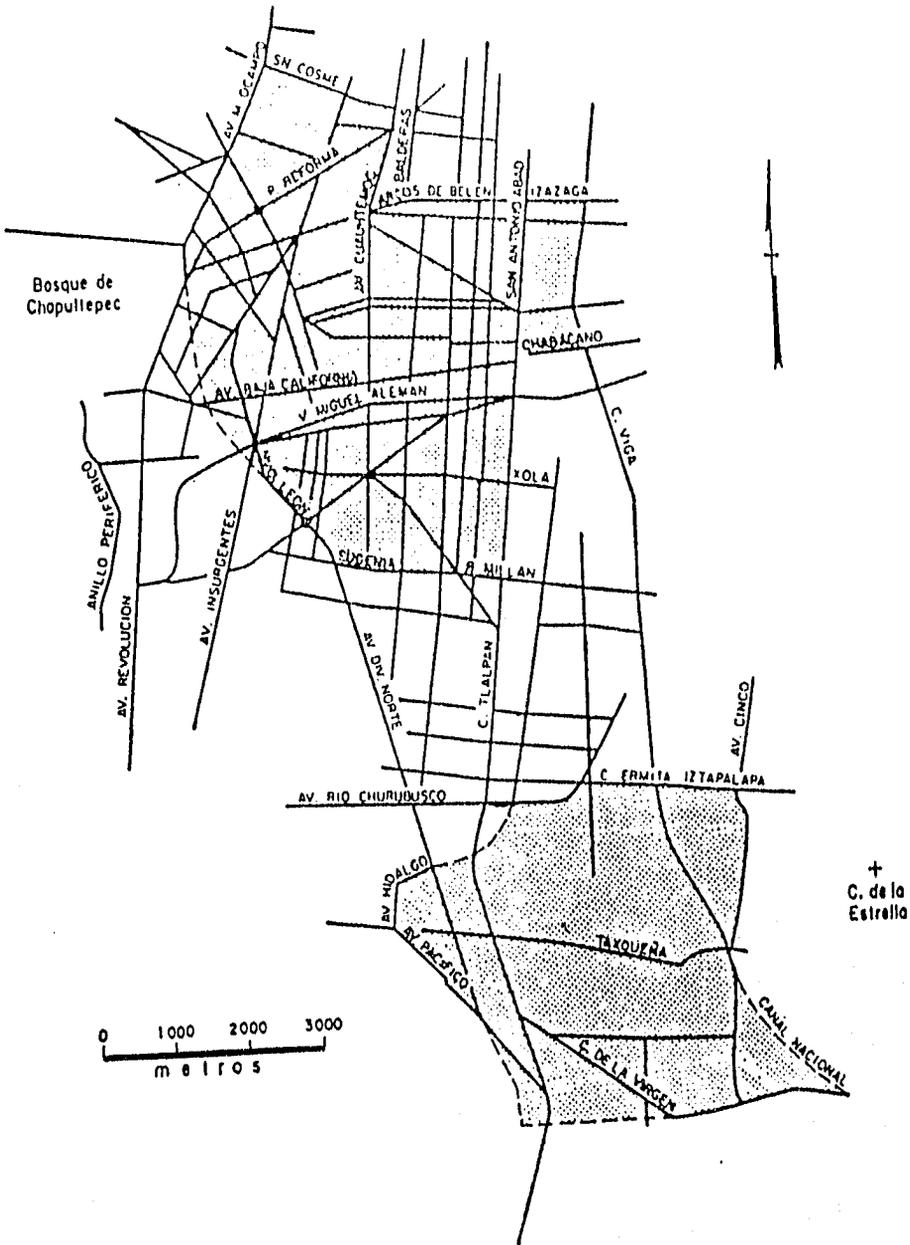


fig. 3.4

Además las construcciones se clasifican en los siguientes grupos (art. 174 del RCDF-87):

I. Grupo A. Construcciones cuya falla estructural podría causar la pérdida de un número elevado de vidas o pérdidas económicas o culturales excepcionalmente altas, o que constituyen un peligro significativo por contener sustancias tóxicas o explosivas, así como construcciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana, como hospitales y escuelas, estadios, templos, salas de espectáculos y hoteles que tengan salas de reunión que pueden alojar más de 200 personas; gasolineras, depósito de sustancias inflamables o tóxicas, terminales de transporte, estaciones de bomberos, subestaciones eléctricas y centrales telefónicas y de telecomunicaciones, archivos y registro públicos de particular importancia a juicio del Departamento del Distrito Federal, museos, monumentos y locales que alojen equipo especialmente costoso.

II. Grupo B. Construcciones comunes destinadas a vivienda, oficinas y locales comerciales, hoteles y construcciones comerciales e industriales no incluidas en el grupo A, las que se subdividen en:

a) SUBGRUPO B1. Construcciones de más de 30 m. de altura o con más de 6000 m² de área total construida, ubicadas en las zonas I y II según se definen anteriormente, y construcciones de más de 15 de altura o 3000 m² de área total construida, en zona III, y

b) SUBGRUPO B2. Las demás de este grupo.

El coeficiente sísmico, c , es el cociente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse que actúa en la base de la construcción por efecto del sismo, entre el peso de ésta sobre dicho nivel. Para calcular el peso total se tendrán en cuenta las cargas muertas y vivas que correspondan según el uso al que estará destinado el inmueble en estudio.

El coeficiente sísmico para las construcciones clasificadas como del grupo B se tomará igual a:

$c=0.16$ en la zona I.

$c=0.32$ en la zona II.

$c=0.40$ en la zona III. (y parte sombreada de la zona II fig. 3.4)

Para las estructuras del grupo A se incrementará el coeficiente sísmico en 50 por ciento.

En la tabla 3.1 se establecen los valores de T_a , T_b y r .

Tabla 3.1 Valores de T_a , T_b y r

Zona	T_a	T_b	r
I	0.2	0.6	1/2
II *	0.3	1.5	2/3
III +	0.6	3.9	1

* Área no sombreada de la figura 3.4.

+ y parte sombreada de la zona II en la figura 3.4.

En las figuras 3.5 a 3.7 se muestran los espectros de diseño para estructuras del grupo B, del análisis de estos espectros se observa que en zona I la condición más desfavorable para las estructuras es que su periodo de vibración este comprendido entre 0.2 y 0.6 segundos en tanto que en la zona III entre 0.6 y 3.9 segundos es decir que en la zona I no es recomendable construir edificios cuyo periodo de vibración sea bajo o sea estructuras rígidas, mientras que en zona III no es conveniente desplantar inmuebles flexibles, esto es con periodos altos.

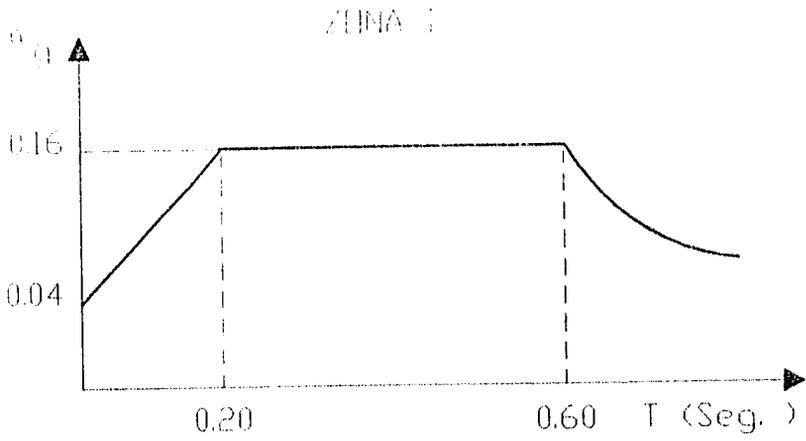


Fig. 3.5

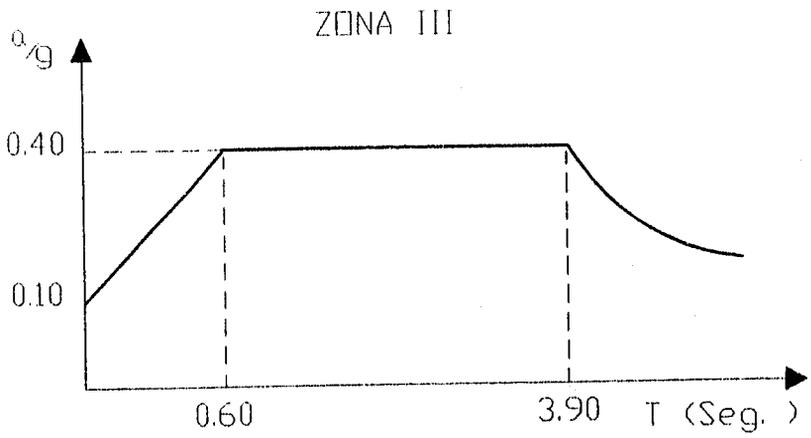


Fig. 3.6

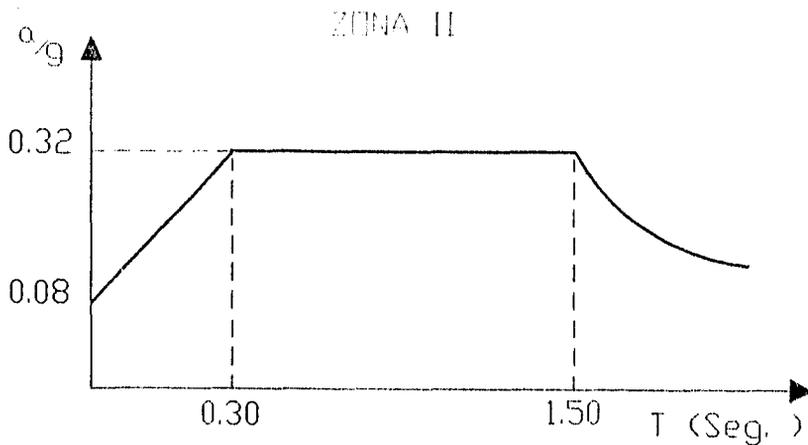


fig. 3.7

III.8 Respuesta Inelástica de las Estructuras.

En muchas ocasiones, una estructura que se encuentra sujeta a la acción de un sismo sufre deformaciones que rebasan su límite elástico y su comportamiento se vuelve no lineal, sin embargo puede sostener deformaciones plásticas muy superiores a la que corresponde al inicio de la etapa inelástica esto es debido principalmente a la disipación de energía del amortiguamiento histerético del edificio, este amortiguamiento se presenta cuando una estructura esta sujeta a fuerzas con cambios en el signo de la carga dentro del rango inelástico como sucede en el caso de un sismo en el que el sentido de la fuerza se alterna constantemente.

Para explicar el fenómeno de la disipación de energía observemos la figura 3.8 en la cual se muestra un lazo de histéresis, en el eje de las abscisas esta la deformación δ y en el eje de las ordenadas la fuerza F_s . La cantidad de energía introducida desde el punto D hasta el A se representa por el área del triángulo definido por los puntos DAE. Cuando la estructura se mueve del punto A al punto B, se descarga la energía representada por el área que definen los puntos BAE. La misma situación ocurre entre los puntos B y C y entre los puntos C y D. En consecuencia, la energía que corresponde al área ABCD se disipa en un ciclo de inversión de la carga.

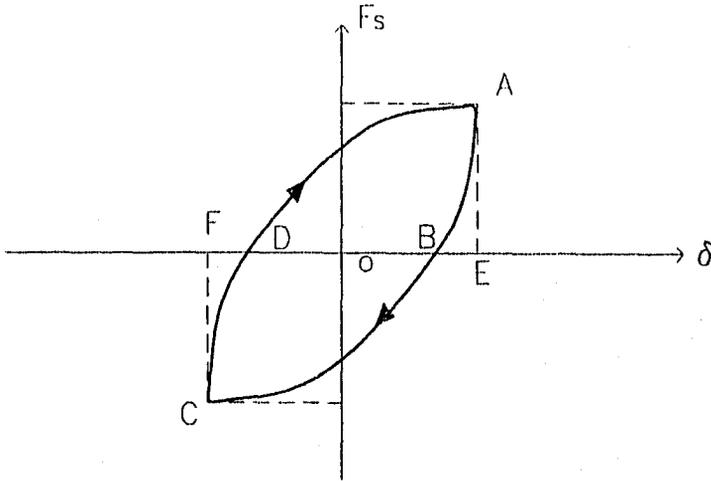


fig. 3.8

Para calcular la respuesta inelástica de la estructura ya no es válida la técnica de superponer los modos como se hace para sistemas elásticos, pero sí siguen rigiendo las ecuaciones diferenciales del equilibrio dinámico para uno y varios grados de libertad. La solución para sistemas inelásticos se puede obtener mediante la integración directa paso a paso de las ecuación 2.2 definida en el capítulo II en el que se discretiza el tiempo en varios intervalos pequeños Δt y se considera comportamiento lineal del sistema para cada intervalo. Uno de los sistemas no lineales más comunes es el elastoplástico representado en la figura 3.9 en el que el comportamiento es lineal hasta la carga máxima después, la capacidad de carga se mantiene constante hasta la deformación última, enseguida de esta ocurre la falla; a la relación $\Delta u/\Delta e$ se le conoce como *factor de ductilidad* y se representa por la letra griega μ .

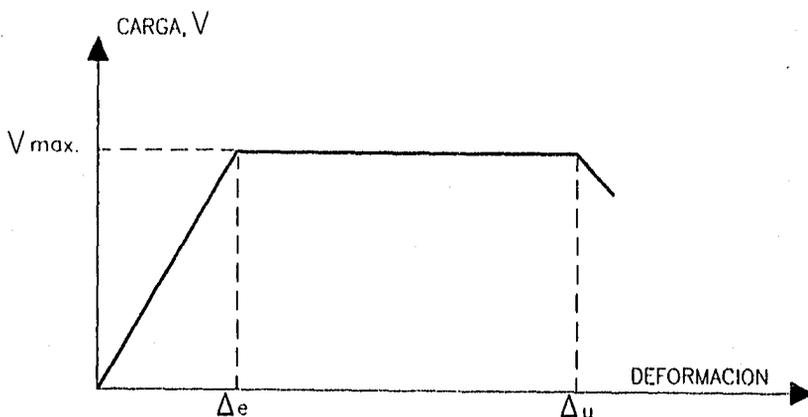


fig. 3.9

De análisis paso a paso que se han realizado para sistemas de un grado de libertad, se ha observado que para un acelerograma y amortiguamiento dados, la capacidad que requiere el sistema no lineal para resistir el sismo sin que exceda de su deformación de falla es μ veces menor que el requerido para un sistema lineal con las mismas condiciones de excitación y amortiguamiento excepto para sistemas con periodo corto. Por este motivo, las estructuras pueden ser diseñadas para una carga sísmica menor que la que proporciona el espectro pero sin olvidar que la estructura tendrá deformaciones inelásticas, por ello es importante tomar en cuenta en el diseño que los diversos elementos estructurales no sufran fallas locales debidas a fuerzas de cortante, cargas axiales o problemas de pandeo que ocasionen deterioro de rigidez y resistencia al sistema.

III.9 Reducción de Fuerzas Sísmicas Propuestas en el RCDF-1987.

Con fines de diseño, las fuerzas sísmicas obtenidas del análisis modal se podrán reducir dividiéndolas entre el factor reductivo Q' . Si la estructura satisface las condiciones de regularidad dicho factor reductivo se calculará como sigue:

$$Q' = Q \text{ si } T \text{ es mayor o igual que } T_a$$

$$Q' = 1 + (T/T_a) (Q-1), \text{ si } T \text{ es menor que } T_a$$

Siendo T el periodo natural de vibración del modo que se considere al realizar el análisis modal y T_a se determinará de la tabla 3.1. y Q es el factor de comportamiento sísmico que se obtendrá como se indica en la siguiente sección.

Si la estructura no satisface las siguientes condiciones de regularidad, entonces el factor reductivo Q' se multiplicará por 0.8 :

1.- Que su planta sea sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes.

2.- La relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5.

3.- La relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5.

4.- En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente.

5.- En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.

6.- No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún de 20 por ciento del área de la planta.

7.- El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho peso.

8.- Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70 por ciento de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.

9.- Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas.

10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del entrepiso inmediatamente inferior.

11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente, e_s , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

Las deformaciones se calcularán multiplicando por Q' las causadas por las fuerzas sísmicas reducidas.

III.10 Factor de Comportamiento Sísmico.

Se adoptarán los siguientes valores del factor de comportamiento sísmico:

I. Se usará $Q=4$ cuando se cumplan los requisitos siguientes:

1.- La resistencia en todos los entrepisos es suministrada exclusivamente por marcos no contraventeados de acero o concreto reforzado, o bien por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado en los que en cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, cuando menos 50 por ciento de la fuerza sísmica actuante.

2.- Si hay muros ligados a la estructura en la forma especificada en el caso I del artículo 204 del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal 1987^{*1}, estos se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante

fuerzas laterales, sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, y los marcos, sean o no contraventeados, y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80 por ciento de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería.

3.- El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 35 por ciento del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del RCDF-1987.*¹

4.- Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen con los requisitos que fijan las normas complementarias correspondientes para marcos y muros dúctiles.

5.- Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas complementarias correspondientes.

II. Se adoptará $Q=3$ cuando se satisfacen las condiciones 2,4 y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejando de satisfacerse las condiciones 1 o 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas, por marcos rígidos de acero, por marcos de concreto reforzado, por muros de este material, por combinaciones de éstos y marcos o por diafragmas de madera contrachapada. Las estructuras con losas planas deberán además satisfacer los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

III. Se usará $Q=2$ cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventeados o no, o muros o columnas de concreto reforzado, que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o por muros de mampostería de piezas macizas confinadas por castillos, dadas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, diafragmas contruidos con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará $Q=2$ cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado, con las excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

IV. Se usará $Q=1.5$ cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y III, o por marcos y armaduras de madera.

V. Se usará $Q=1$ en estructuras cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales diferentes de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre, a satisfacción del Departamento del Distrito Federal, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de Q que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección.

El factor Q puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de ésta en dichas direcciones.

#1: Artículo 204 del RCDF-1987, inciso f:

Los muros que contribuyen a resistir fuerzas laterales se ligarán adecuadamente a los marcos estructurales o a castillos y dadas en todo el perímetro del muro, su rigidez se tomará en cuenta en el análisis sísmico y se verificará su resistencia de acuerdo con las normas correspondientes.

Los castillos y dadas a su vez estarán ligados a los marcos. Se verificará que las vigas o losas y columnas resistan la fuerza cortante, el momento flexionante, las fuerzas axiales y, en su caso, las torsiones que en ellas induzcan los muros. Se verificará asimismo que las uniones entre elementos estructurales resistan dichas acciones.

III.11 Análisis Sísmico Dinámico Tridimensional.

Como se ha establecido a lo largo de este trabajo, los grados de libertad dinámico son tres, los desplazamientos en X y en Y y el giro alrededor del eje vertical Z. Lo que se hace para realizar el análisis es obtener la respuesta de manera independiente cuando el sismo actúa en la dirección del grado de libertad es decir, se analiza la estructura primero en la dirección X sin tomar en cuenta la aceleración que el sismo produce en la dirección Y y alrededor del eje Z y después se examina el edificio en la dirección Y no considerando la aceleración que este le produce en la dirección X y en torno al eje Z; restaría por inducir al sistema una aceleración angular (sin tomar en cuenta aceleración lineal en X y Y) pero debido a que no se tiene un espectro de aceleraciones angulares, sólo se realizará el análisis

por sismo tomando en cuenta las dos aceleraciones lineales antes mencionadas. Para incluir este hecho, el coeficiente de participación se calculará multiplicándolo por un vector "f" tal que tenga un valor unitario en los lugares correspondientes al grado de libertad orientado en la dirección que actúa el sismo y cero en los lugares restantes. Es decir, escrito en forma matricial:

$$C_{jd} = \frac{Z_j^T [M] \{f_d\}}{Z_j^T [M] Z_j} \quad (3.37)$$

d=dirección de análisis

Y la ecuación 3.36 se transforma en:

$$u_{jidmax} = A_{jd} C_{jd} Z_{ij} / \omega_j^2 \quad (3.38)$$

III.12 Obtención de Cortantes y Momentos Torsionantes por Nivel.

La respuesta máxima de la estructura por nivel y para cada modo se obtiene empleando la ecuación 3.38, pues una vez conocidos los desplazamientos y giros por nivel en cada modo, estamos en condiciones de obtener cortantes y momentos torsionantes respectivamente y la respuesta total se podría obtener haciendo la suma algebraica del valor de cada modo, sin embargo, esta forma de proceder resulta bastante conservador pues es improbable que los valores extremos de todos los modos ocurran simultáneamente, por tal motivo lo que se hace es combinar probabilísticamente la respuesta máxima de cada modo. El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal 1987 propone

emplear el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados:

$$R_i = \left(\sum_{j=1}^N R_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{-----} \quad (3.39)$$

Donde:

R_i = Respuesta del nivel i

R_{ij} = Respuesta máxima del nivel i en el modo j

N = Grados de libertad de la estructura

La Ecuación 3.39 no es aplicable para sistemas de varios grados de libertad que tienen modos vibrar con periodos muy cercanos entre sí como ocurre cuando se consideran como grados de libertad los giros de la planta, en las NTC-87 por sismo se establece que los periodos de los modos naturales en cuestión difieran al menos 10% entre sí. En caso de no cumplirse esta disposición se deberá tener en cuenta el acoplamiento entre los modos, para tal fin se propone estimar la respuesta mediante la ecuación:

$$R = \left[\sum_i^N \sum_j^N R_j \rho_{ij} R_j \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{-----} \quad (3.40)$$

Cuando los porcentajes críticos de amortiguamiento son iguales, es decir $\xi_i = \xi_j = \xi$, ρ_{ij} se puede calcular mediante la ecuación:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2} \quad \text{-----} \quad (3.41)$$

$$r = \omega_j / \omega_i \quad \text{-----} \quad (3.42)$$

Además, para las estructuras comunes de ingeniería civil se recomienda usar un factor de amortiguamiento del 5%, es decir $\xi = 0.05$, al menos que se justifique otro valor.

ELABORACION DEL PROGRAMA

IV.1 Introducción.

En este capítulo se presentan dos programas elaborados en QBASIC versión 4.5; el primero es para obtener frecuencias, periodos y modos de vibrar de estructuras con tres grados de libertad por nivel por el método de iteración inversa, y con el segundo programa se realiza el análisis dinámico modal usando espectros de aceleraciones propuestos en el RCDF-1987, este análisis es considerando tres grados de libertad por nivel. También se realizó una corrida empleando los programas mencionados utilizando como ejemplo la estructura que se resuelve en el capítulo 5; asimismo, se hace una representación gráfica de resultados.

IV.2 Preparación del Archivo de Datos para la ejecución de los Programas.

El programa de iteración inversa es para obtener la frecuencia circular angular de la estructura y se tiene que correr tantas veces como grados de libertad tenga el inmueble; dicho programa también obtiene el periodo y el modo de vibración asociado con la frecuencia en cuestión. Para efectuar la corrida se necesitan los siguientes datos:

- 1.-Número de niveles de la estructura(máximo 10).
- 2.-El valor de corrimiento " μ "(si $\mu=0$ entonces el método converge al primer modo; si por ejemplo $\mu=200$, el método convergerá al modo cuya frecuencia circular angular se aproxime al valor de corrimiento, en este caso 200).

3.-Matriz de rigideces del sistema. (fuerza-longitud)

4.-Diagonal de la matriz de masas(fuerza * tiempo²/longitud).

El programa de análisis dinámico modal obtiene los desplazamientos máximos (en las direcciones x e y respectivamente) y el giro máximo para cada una de las plantas, así como fuerzas y momentos asociados a dichos desplazamientos. Los datos necesarios son:

1.-Número de niveles(10 como máximo).

2.-Tipo de estructura (A ó B).

3.-La estructura es regular(sí ó no).

4.-Factor de comportamiento sísmico en X e Y respectivamente (separados por una coma).

5.-Zona del terreno donde se ubica la estructura(1,2 ó 3)

6.-Cuadrado de las frecuencias circulares angulares para cada modo de vibración (En orden ascendente desde el primer modo al último).

7.-Diagonal de la matriz de masas (en tonelada * segundos²/metros).

8.-Matriz de rigideces (en tonelada-metro).

9.-Modos de vibración(Teniendo cuidado en que el orden de introducción de los modos sea el mismo que el orden que se dió para su frecuencia circular angular asociada).

IV.3 Resultados e interpretación de los mismos.

El programa de iteración inversa arroja como resultados el modo de vibración, el cuadrado de la frecuencia circular y el periodo del

modo en estudio. Hay que recordar que se tiene que efectuar una corrida por cada modo que se quiera obtener, haciendo variar el valor de corrimiento " μ ".

El programa de análisis dinámico modal muestra los datos que fueron proporcionados para el análisis tales como el tipo de estructura, si ésta es regular, factor de comportamiento sísmico en las direcciones X e Y, zona del terreno donde se desplanta la estructura y proporciona como resultados los desplazamientos máximos y fuerzas máximas, siendo el primer valor, en caso de que la estructura fuera de un nivel, el desplazamiento de la planta X, el segundo el desplazamiento en Y, y el tercero el giro de la planta. Si la estructura es de dos niveles o más habrá $3 \times N$ valores del desplazamiento (donde N = número de niveles) y de acuerdo a como se ordene la entrada de datos los tres primeros desplazamientos corresponderán al primer o último nivel. Para las fuerzas máximas rige el mismo criterio de interpretación que para los desplazamientos.

IV.4 Descripción de la Estructura a Analizar.

En la figura 4.1 se presenta la estructura que aparece en el ejemplo del capítulo 5. Esta es de tres niveles; desplantada en suelo blando (zona III) para uso residencial. El primero y segundo niveles tienen un peso de 22.5 toneladas cada uno, en tanto que el tercer nivel tiene un peso de 17.50 toneladas. El edificio está compuesto por tres marcos en las direcciones "X" y "Y" respectivamente. Las medidas en planta del inmueble son de 10 x 6 metros. La planta del tercer nivel es de forma irregular, como se puede observar.

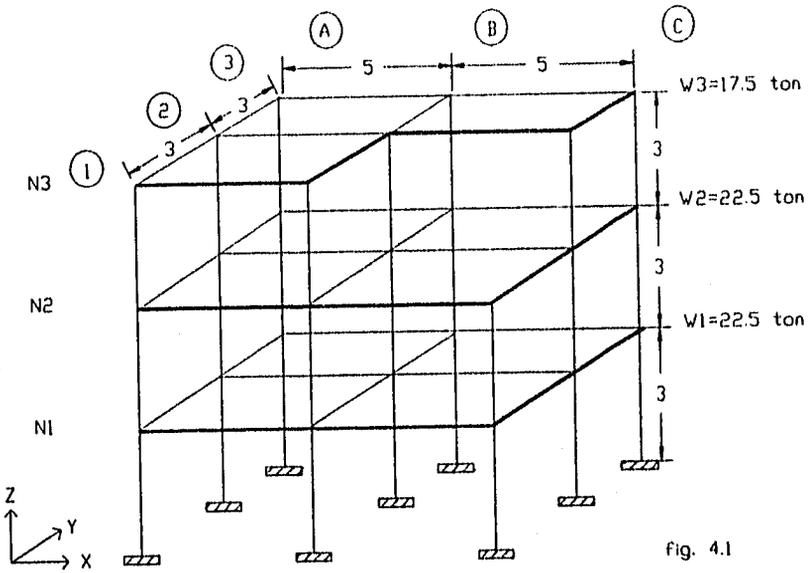


fig. 4.1

IV.5 Resultados del Programa de la Estructura Analizada.

a) Del programa de Iteración Inversa

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1
X= 6.127870175926832D-03
X=-9.540813327038213D-03
X= 2.166898107137937
X= 1.307249754181846D-02
X=-2.225888412403485D-02
X= 2.896990567869375
X= .0398008360482037
X=-2.830817704289619D-02

FRECUENCIA W2= 399.9322053431093

PERIODO T= .3141856381034861

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1
X=-42.13222073593181
X= 1.361658120935892
X= 2.032484088344223
X=-87.45376401171964
X= 3.111828396275945
X= .5872437742847156
X=-117.9289189745379
X= 4.012816607793113

FRECUENCIA W2= 640.6946193654123

PERIODO T= .2482298355250466

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1
X= 1.766141800235429
X= 1.799387743555042
X= 1.677537684958798
X= 3.30127197893375
X= 3.908666288614916
X=-1.017702892337461
X=-.2480709893149365
X= 5.259131756618625

FRECUENCIA W2= 1270.10894586361

PERIODO T= .176302727215488

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1
X=-1.611444582353919D-02
X=-1.282413740226638D-02
X= .6367066456598117
X=-1.880689328699373D-02
X=-2.198186439514259D-02
X=-1.061725820816001
X= 2.127289334787999D-02
X=-3.712796948606599D-02

FRECUENCIA W2= 3586.094306238651

PERIODO T= .1049225083823165

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1

X= 67.99281635563979

X=-1.236577194803777

X=-.1283217683342476

X= 40.31259076447667

X=-1.572510497068146

X=-.3999825593536281

X=-71.82241003550779

X=-4.073289406404732

FRECUENCIA W2= 6051.853461463681

PERIODO T= 8.076725372749716D-02

RESULTADOS:

MODO DE VIBRACION

X= 1

X=-6.438735760923608D-04

X=-5.695960794836733D-03

X=-.9487018173306122

X=-5.154492518938706D-04

X=-5.891635802158139D-03

X= .4702029374439234

X= 9.688285301206465D-04

X= 3.162259561206312D-02

FRECUENCIA W2= 9601.252942665678

PERIODO T= 6.412325537656083D-02

RESULTADOS:

MODOS DE VIBRACION

X= 1
X=-1.10567857263699
X= 5.523922333742087
X=-1.104592041142396
X= .3776164007551637
X= 3.7823699019356
X= .6398537181623565
X= .2073256932418999
X=-6.544468986718928

FRECUENCIA W2= 10789.70073262704

PERIODO T= 6.048877903236335D-02

RESULTADOS:

MODOS DE VIBRACION

X= 1
X=-1034.699487979052
X=-41.02209758155001
X=-1.489306964667871
X= 1014.682966113132
X= 1.523052639575999
X= 1.033384129406185
X=-504.897161491239
X=-19.95381646870362

FRECUENCIA W2= 16694.23881773916

PERIODO T= 4.862909719468381D-02

RESULTADOS:

MODOS DE VIBRACION

X= 1
X= 5.929396988445016
X=-35.39441946446541
X=-2.308230029618091
X=-10.23553092252729
X= 32.18590032419505
X= 2.000024682550666
X= 7.81728182443209
X=-15.9001467179355

FRECUENCIA W2= 29398.59441005688

PERIODO T= 3.664512728805445D-02

b) Del programa de Analisis Dinamico Modal

ANALISIS DINAMICO CONSIDERANDO 3 GRADOS DE LIBERTAD
POR NIVEL DE ACUERDO AL RCDP-1987

ESTRUCTURA TIPO:b

ESTRUCTURA REGULAR:si

FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN X: 2

FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN Y: 2

ZONA DEL TERRENO : 3

DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MAXIMOS (metros y rad.)

U(1)= 1.83768E-03
U(2)= 1.106149E-03
U(3)= 4.613059E-05
U(4)= 2.139986E-03
U(5)= 1.188029E-03
U(6)= 5.827812E-05
U(7)= 1.356426E-03
U(8)= 8.092533E-04
U(9)= 3.160532E-05

FUERZAS Y MOMENTOS MAXIMOS(Ton. y Ton.-metro)

F(1)= 11.47513
F(2)= 12.17764
F(3)= 8.512692
F(4)= 3.585378
F(5)= 2.105699
F(6)= 7.601885
F(7)= 3.564691
F(8)= 3.073789
F(9)= 3.364021

IV.6 Representación Gráfica de Resultados.

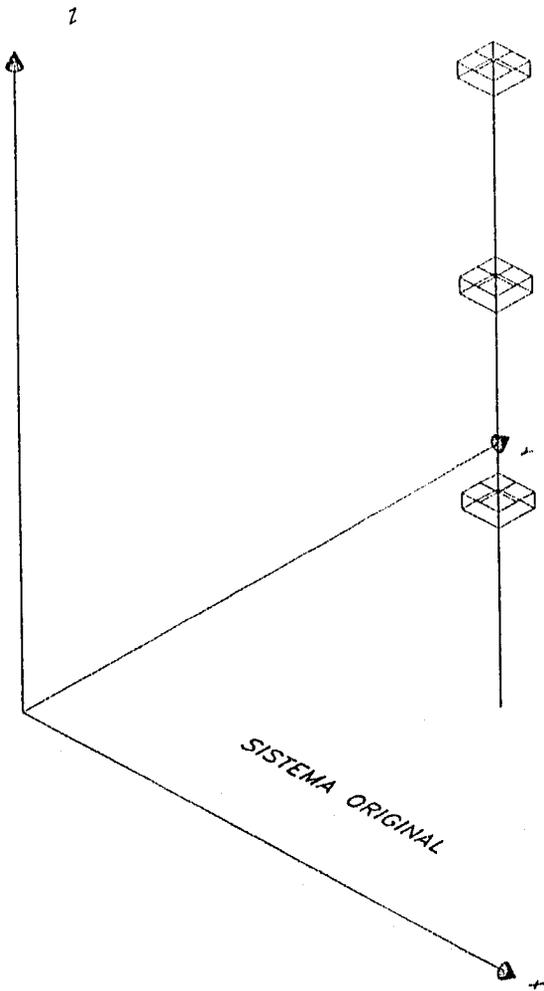
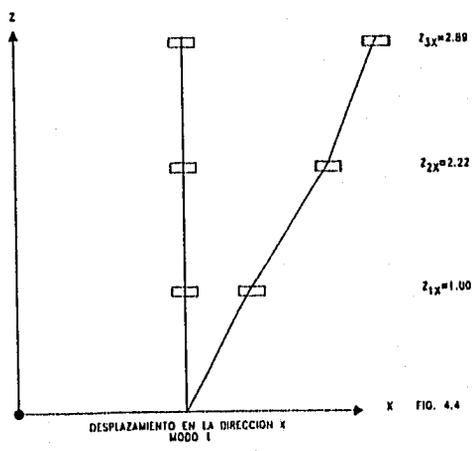
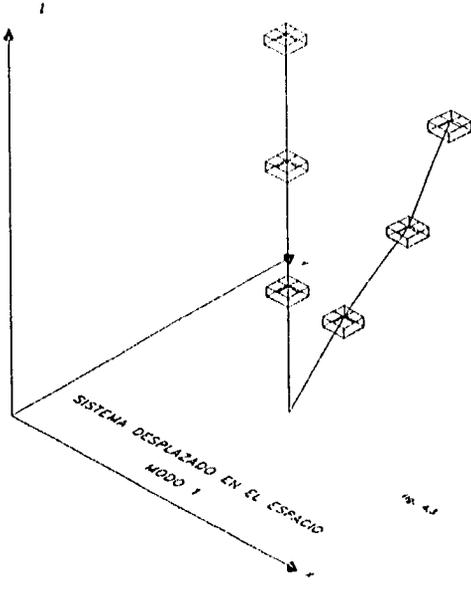
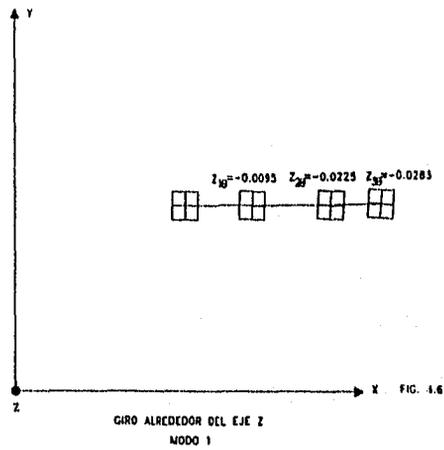
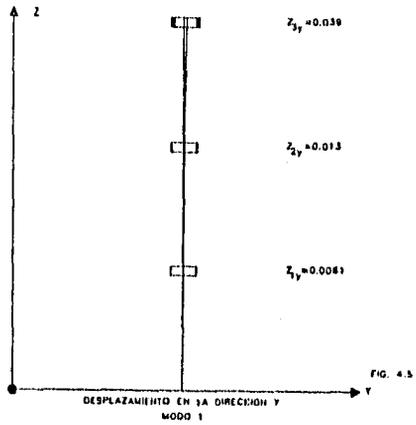
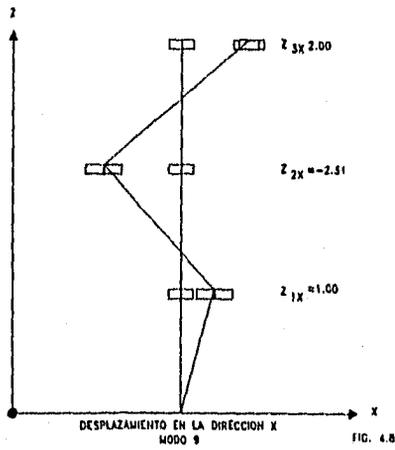
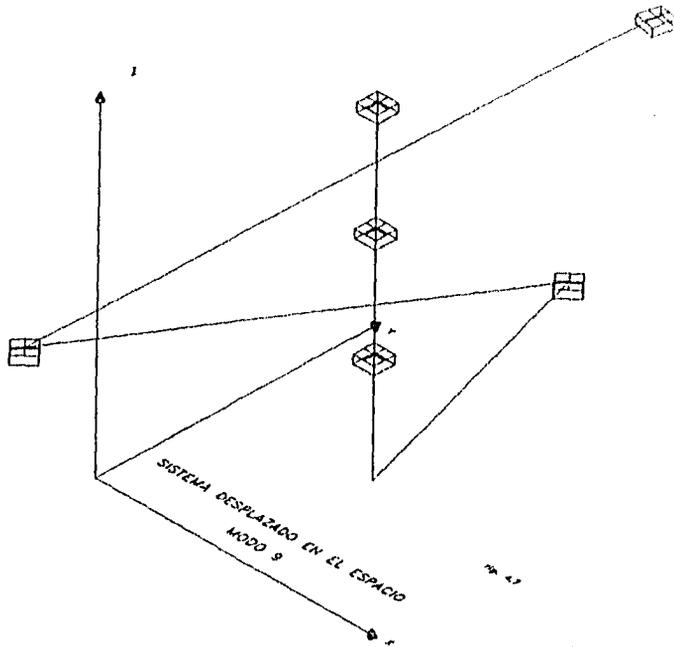
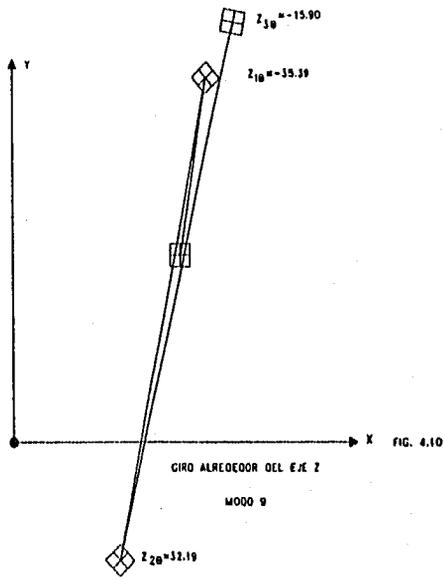
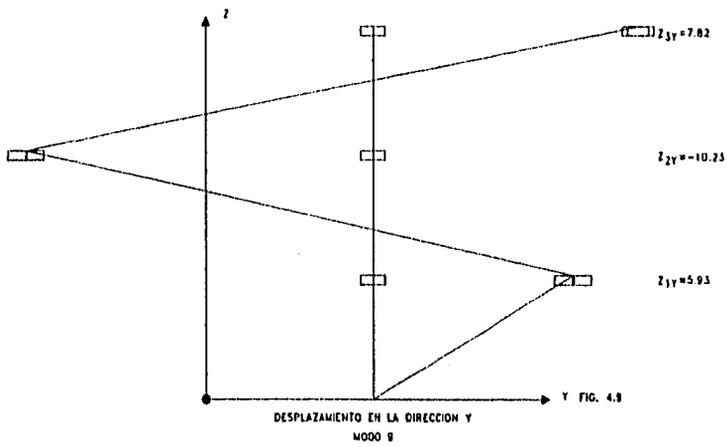


Fig. 4.2









IV.7 Listados de los Programas de Computadora.

```
' PROGRAMA DE ITERACION INVERSA PARA CALCULAR FRECUENCIAS Y MODOS
' VARIABLES DE ENTRADA:
' NO=NUMERO DE NIVELES
' RIG=MATRIZ DE RIGIDECEES
' MAS=MATRIZ DE MASAS
' MU=VALOR SUPUESTO DE 'MU'(SI MU=0 CONVERGE AL PRIMER MODO
' VARIABLES DE SALIDA:
' X=VECTOR DE MODOS DE VIBRACION
' W2=FRECUENCIA CIRCULAR ANGULAR
' T=PERIODO DE VIBRACION
DIM RIG(30, 30), MAS(30, 30), KINV(30, 30), K(30, 30), MUMAS(30, 30)
DIM X(30, 1), XP(30, 1), Y(30, 1), C(30, 1), YT(1, 30)
DIM YTXP(1, 1), YTM(1, 30), YTMX(1, 1)
DEFDBL A-Z
INPUT " NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS(POR DEFAULT .DAT"; ARCH#
OPEN ARCH# + ".DAT" FOR INPUT AS #1
OPEN ARCH# + ".RES" FOR OUTPUT AS #2
WIDTH #2, 75
INPUT #1, NO
INPUT #1, MU
N = NO * 3
'   LECTURA DE LA MATRIZ DE RIGIDECEES
FOR I = 1 TO N
FOR J = 1 TO N
INPUT #1, RIG(I, J)
NEXT J
NEXT I
'   FORMACION Y LECTURA DE LA MATRIZ DE MASAS
FOR I = 1 TO N
FOR J = 1 TO N
MAS(I, J) = 0
NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO N
INPUT #1, MAS(I, I)
NEXT I
CLOSE #1
'   CALCULO DE LA MATRIZ [K]=[RIG]-MUMAS]
FOR I = 1 TO N
FOR J = 1 TO N
MUMAS(I, J) = MU * MAS(I, J)
K(I, J) = RIG(I, J) - MUMAS(I, J)
NEXT J
NEXT I
'   SE INVIERTE LA MATRIZ [K]
1900 GOSUB 2000
2001
FOR I = 1 TO N
X(I, 1) = 1!
NEXT I
```

```

' EMPIEZA EL METODO DE ITERACION INVERSA
1000
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO 1
    XP(I, J) = 0!
    FOR K = 1 TO N
      XP(I, J) = MAS(I, K) * X(K, J) + XP(I, J)
    NEXT K
  NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO 1
    Y(I, J) = 0!
    FOR K = 1! TO N
      Y(I, J) = KINV(I, K) * XP(K, J) + Y(I, J)
    NEXT K
  NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  C(I, 1) = Y(I, 1) / X(I, 1)
NEXT I
FOR I = 1 TO N
  X(I, 1) = Y(I, 1) / Y(I, 1)
NEXT I
' COMPARACION DE CONSTANTES 'C' PARA TOLERANCIA
JCONT = 0!
I = 0!
IGL2 = N ^ 2!
1005
I2 = 0!
ICONT = 0!
I = I + 1!
1006
I2 = I2 + 1!
IF ABS(C(I, 1) - C(I2, 1)) > .0001 GOTO 1000
JCONT = JCONT + 1!
ICONT = ICONT + 1!
IF JCONT = IGL2 GOTO 1007
IF ICONT = N GOTO 1005
GOTO 1006
1007
' TERMINA BLOQUE DE TOLERANCIA
PRINT #2, " RESULTADOS:"
PRINT #2, STRING$(75, "-")
PRINT #2,
PRINT #2, "MODO DE VIBRACION"
FOR I = 1 TO N
PRINT #2, "X="; X(I, 1)
NEXT I
'EMPIEZA CALCULO DE LA FRECUENCIA CIRCULAR ANGULAR

```

```

'CALCULO DE Y TRASPUESTA
FOR I = 1 TO N
  YT(1, I) = Y(I, 1)
NEXT I
'MULTIPLICACION DE [Y]T*[X]P
FOR I = 1 TO 1
  FOR J = 1 TO 1
    YTXP(I, J) = 0!
    FOR K = 1 TO N
      YTXP(I, J) = YT(I, K) * XP(K, J) + YTXP(I, J)
    NEXT K
  NEXT J
NEXT I
'MULTIPLICACION DE [Y]T*[M]*[Y]
FOR I = 1 TO 1
  FOR J = 1 TO N
    YTM(I, J) = 0!
    FOR K = 1 TO N
      YTM(I, J) = YT(I, K) * MAS(K, J) + YTM(I, J)
    NEXT K
  NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO 1
  FOR J = 1 TO 1
    YTMY(I, J) = 0!
    FOR K = 1 TO N
      YTMY(I, J) = YTM(I, K) * Y(K, J) + YTMY(I, J)
    NEXT K
  NEXT J
NEXT I
RO = YTXP(1, 1) / YTMY(1, 1)
W2 = RO + MU
PRINT #2,
PRINT #2, "FRECUENCIA W2="; W2
W = W2 ^ .5
T = 6.28318 / W
PRINT #2,
PRINT #2, "PERIODO T="; T
PRINT #2,
PRINT #2, STRING$(75, "-")
CLOSE #2
END
2000
'*** SUBROUTINA PARA CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ DE 30X30
DIM B(30, 30), P(30), COL(30), ADJ(30, 30)
.
.
VARIABLES DE ENTRADA:
.
N=ORDEN DE LA MATRIZ=GRADOS DE LIBERTAD
.
[K]=MATRIZ A INVERTIR POR RENGLONES
.
VARIABLES DE SALIDA:

```

```

      (KINV)=INVERSA DE LA MATRIZ K
      IF (N < 2 OR N > 30) GOTO 5000
      FOR I = 1 TO N
      FOR J = 1 TO N
      B(I, J) = K(I, J)
NEXT J
NEXT I
      B(I, J) = K(I, J)
200  FOR L = 1 TO N
      TRAZA = 0
      FOR I = 1 TO N
      TRAZA = TRAZA + B(I, I)
NEXT I
      P(L) = -1 * TRAZA / L
      FOR I = 1 TO N
      B(I, I) = B(I, I) + P(L)
NEXT I
      IF (L <> N - 1) GOTO 5001
      FOR I = 1 TO N
      FOR J = 1 TO N
      ADJ(I, J) = B(I, J)
NEXT J
NEXT I
5001  FOR J = 1 TO N
      FOR I = 1 TO N
      COL(I) = B(I, J)
NEXT I
      FOR I = 1 TO N
      PRDD = 0
      FOR K1 = 1 TO N
      PRDD = PRDD + K(I, K1) * COL(K1)
NEXT K1
      B(I, J) = PRDD
NEXT I
NEXT J
NEXT L
      PRD = (-1) ^ N
      DET = PRD * P(N)
      IF (ABS(DET) < .00001) GOTO 5000
      FOR I = 1 TO N
      FOR J = 1 TO N
      KINV(I, J) = -ADJ(I, J) / P(N)
NEXT J
NEXT I
5000  RETURN 2001
STOP

```

```

PROGRAMA PARA REALIZAR ANALISIS DINAMICO MODAL CON TRES GRADOS DE LIBERTAD
DE ACUERDO AL REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES 1987
VARIABLES DE ENTRADA:
NO=NUMERO DE NIVELES
TIPO%=TIPO DE ESTRUCTURA
REG%=REGULARIDAD DE LA ESTRUCTURA
Q(1)=FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN X
Q(2)=FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN Y
ZONA=ZONA DEL TERRENO DONDE SE ENCUENTRA LA ESTRUCTURA
W2(1)=CUADRADO DE LAS FRECUENCIAS CIRCULARES ANGULARES
MAS(i,i)=MATRIZ DE MASAS
RIG(i,i)=MATRIZ DE RIGIDECES
Z(i,j)=VECTOR DE MODOS DE VIBRACION
VARIABLES DE SALIDA:
UMAX(i)=VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS
FMAX(i)=VECTOR DE FUERZAS
DIM mas(30, 30), rig(30, 30), z(30, 30), ztm(30, 30), ztmz(30, 3), ztar(30, 3)
DIM r(30, 3), a(30, 3), w2(30), per(30), Q(2), csr(30, 3), qpri(30, 3)
DIM c(30, 3), dest(30, 30, 3), destr(30, 30, 3), fuer(30, 30, 3), dest2(30)
DIM umax(30), fza2(30), fmax(30)
CLS
INPUT " archivo (sin extension)": arch#
OPEN arch# + ".dat" FOR INPUT AS #1
OPEN arch# + ".res" FOR OUTPUT AS #2
WIDTH #2, 75
INPUT #1, no
n = no * 3
' tipo% = tipo de estructura A o B
INPUT #1, tipo%
' reg% = es estructura regular si/no
INPUT #1, reg%
' q(1),q(2) = factor de comportamiento sismico en x e y respectivamente
INPUT #1, Q(1), Q(2)
' zona = zona del terreno
INPUT #1, zona
' Lectura de frecuencias W2 del modo 1 al modo N
FOR j = 1 TO n
INPUT #1, w2(j)
w(i) = w2(i) ^ .5
per(i) = 6.28318 / w(i)
NEXT i
'---Empieza calculo de coeficientes sismicos reducidos RCBF-87
FOR j = 1 TO n
FOR i = 1 TO 2
IF zona <> 1 GOTO 10
ta = .2
tb = .6
r = 1 / 2
c = .16
GOTO 11

```

```

10
IF con1 = 2 THEN
  ta = .3
  tb = 1.9
  c = 2 / 3
  r = .32
ELSE
  ta = .6
  tb = 3.9
  c = 1
  r = .4
END IF
11
IF tipo# = "u" OR tipo# = "b" THEN
  c = c
ELSE
  c = 1.5 * c
END IF
IF per(j) >= ta THEN
  qpri(j, i) = Q(i)
ELSE
  qpri(j, i) = t + (per(j) / ta) * (Q(i) - t)
END IF
IF reg# = "s1" OR reg# = "S1" THEN
  qpri(j, i) = qpri(j, i)
ELSE
  qpri(j, i) = .8 * qpri(j, i)
END IF
IF per(j) < ta THEN
  a(j, i) = (1 + 3 * per(j) / ta) * c / 4
GOTO 15
ELSE
  IF per(j) > tb GOTO 13
  a(j, i) = c
GOTO 15
13
  a(j, i) = (tb / per(j)) ^ r * c
END IF
15
csr(j, i) = 9.81 * a(j, i) / qpri(j, i)
NEXT i
NEXT j
  coeficiente sismico para giro es cero
FOR j = 1 TO n
  csr(j, 3) = 0
NEXT j
PRINT #2, "          ANALISIS DINAMICO CONSIDERANDO 3 GRADOS DE LIBERTAD"
PRINT #2, "          POR NIVEL DE ACUERDO AL RCDP-1987"
PRINT #2, STRING$(75, "-")
PRINT #2, ""

```

```

PRINT #2, " ESTRUCTURA TIPO:"; tipo#
PRINT #2, " ESTRUCTURA REGULAR:"; reg#
PRINT #2, " FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN X:"; Q(1)
PRINT #2, " FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO EN Y:"; Q(2)
PRINT #2, " ZONA DEL TERRENO :"; zona
PRINT #2, ""
PRINT #2, STRING$(75, "-")
PRINT #2, ""
' Obtencion del vector Rx
FOR i = 1 TO n STEP 3
r(i, 1) = 1
NEXT i
' Obtencion del vector Ry
FOR i = 2 TO n STEP 3
r(i, 2) = 1
NEXT i
' Obtencion del vector Rz
FOR i = 3 TO n STEP 3
r(i, 3) = 1
NEXT i
' Lectura de la matriz de masas
FOR i = 1 TO n
INPUT #1, mas(i, i)
NEXT i
' Termina lectura de la matriz de masas
' Lectura de la matriz de rigideces
FOR i = 1 TO n
FOR j = 1 TO n
INPUT #1, rig(i, j)
NEXT j
NEXT i
' Termina lectura de la matriz de rigideces
' Lectura de los modos de vibracion de 1 a N
FOR j = 1 TO n
FOR i = 1 TO n
INPUT #1, z(i, j)
NEXT i
NEXT j
' Termina lectura de los modos de vibracion
CLOSE #1
' Calculo de los coeficientes de participacion C1 a Cn
' calculo de ZT [M]
FOR j = 1 TO n
FOR i = 1 TO n
ztm(i, j) = z(i, j) * mas(i, i)
NEXT i
NEXT j
' calculo de ZT [M] R
FOR k = 1 TO n
FOR j = 1 TO 3

```

```

ztrn(k, j) = 0
FOR i = 1 TO n
ztrn(k, j) = ztm(i, k) * r(i, j) + ztrn(k, j)
NEXT i
NEXT j
NEXT k
' calculo de ZT [M] Z
FOR k = 1 TO n
FOR j = 1 TO 3
ztmz(k, j) = 0
FOR i = 1 TO n
ztmz(k, j) = ((z(i, k) ^ 2) * mas(i, i)) + ztmz(k, j)
NEXT i
NEXT j
NEXT k
FOR j = 1 TO 3
FOR i = 1 TO n
c(i, j) = ztrn(i, j) / ztmz(i, j)
NEXT i
NEXT j
'Calculo de desplazamientos totales
FOR k = 1 TO 3
FOR j = 1 TO n
FOR i = 1 TO n
dest(j, i, k) = c(j, k) * csr(j, k) * z(i, j) / w2(j)
NEXT i
NEXT j
NEXT k
'Calculo de desplazamientos relativos
'--Para la direccion X
k = 1
' en X
FOR j = 1 TO n
dear(j, 1, k) = dest(j, 1, k)
FOR i = 4 TO n STEP 3
dear(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en Y
FOR j = 1 TO n
dear(j, 2, k) = dest(j, 2, k)
FOR i = 5 TO n STEP 3
dear(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en teta
FOR j = 1 TO n
dear(j, 3, k) = dest(j, 3, k)
FOR i = 6 TO n STEP 3
dear(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)

```

```

NEXT i
NEXT j
'--Para la direccion Y
k = 2
' en X
FOR j = 1 TO n
desr(j, 1, k) = dest(j, 1, k)
FOR i = 4 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en Y
FOR j = 1 TO n
desr(j, 2, k) = dest(j, 2, k)
FOR i = 5 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en teta
FOR j = 1 TO n
desr(j, 3, k) = dest(j, 3, k)
FOR i = 6 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
'--Para giro
k = 3
' en X
FOR j = 1 TO n
desr(j, 1, k) = dest(j, 1, k)
FOR i = 4 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en Y
FOR j = 1 TO n
desr(j, 2, k) = dest(j, 2, k)
FOR i = 5 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' en teta
FOR j = 1 TO n
desr(j, 3, k) = dest(j, 3, k)
FOR i = 6 TO n STEP 3
desr(j, i, k) = dest(j, i, k) - dest(j, i - 3, k)
NEXT i
NEXT j
' Obtencion de cortantes y momentos para cada modo y cada direccion
FOR l = 1 TO 3

```

```

FOR j = 1 TO n
FOR i = 1 TO n
  fuer(j, i, 1) = 0
FOR k = 1 TO n
  fuer(j, i, 1) = rig(i, k) * desr(j, k, 1) + fuer(j, i, 1)
NEXT k
NEXT i
NEXT j
NEXT 1
' Combinacion de desplazamientos
FOR i = 1 TO n
  desr2(i) = 0
FOR k = 1 TO 3
FOR j = 1 TO n
  desr2(i) = desr(j, i, k) ^ 2 + desr2(i)
NEXT j
NEXT k
  umax(i) = SQR(desr2(i))
NEXT i
' Combinacion de Fuerzas( Fuerzas y Momentos)
FOR i = 1 TO n
  fza2(i) = 0
FOR k = 1 TO 3
FOR j = 1 TO n
  fza2(i) = fuer(j, i, k) ^ 2 + fza2(i)
NEXT j
NEXT k
  fmax(i) = SQR(fza2(i))
NEXT i
'Impresion de desplazamientos y giros
PRINT #2, "DESPLAZAMIENTOS Y GIROS MAXIMOS ( metros y rad. )"
PRINT #2, ""
FOR i = 1 TO n
  PRINT #2, "U("; i; ")="; umax(i)
NEXT i
'Impresion de Fuerzas y momentos
PRINT #2, " "
PRINT #2, "FUERZAS Y MOMENTOS MAXIMOS( Ton. y Ton.-metro )"
PRINT #2, ""
FOR i = 1 TO n
  PRINT #2, "F("; i; ")="; fmax(i)
NEXT i
CLOSE #2
END

```

EJEMPLOS Y CONCLUSIONES

V.1 Introducción

En la figura 5.1 se muestra el edificio para el cual se va a realizar el análisis sísmico dinámico de acuerdo a los lineamientos que se establecen en el reglamento de construcciones para el Distrito Federal 1987. Es una estructura de tres niveles desplantada en suelo blando (zona III) para uso residencial. El concreto a emplear es clase I, $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$ y acero de refuerzo $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

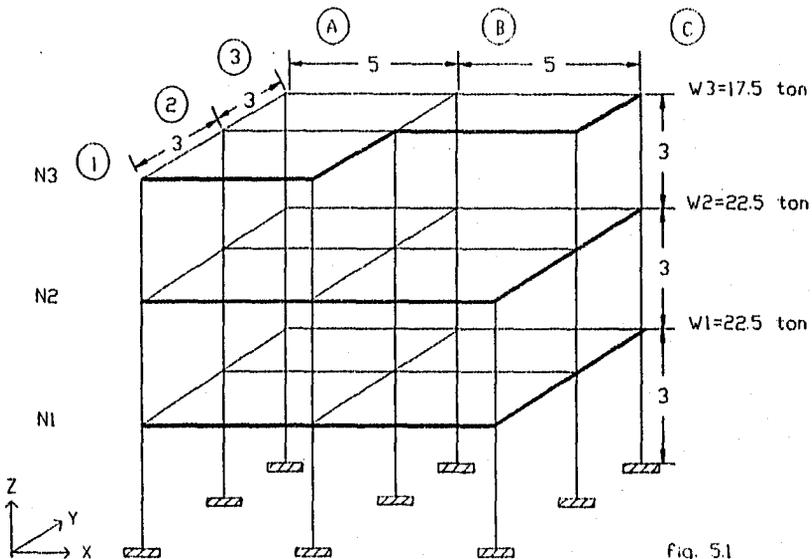
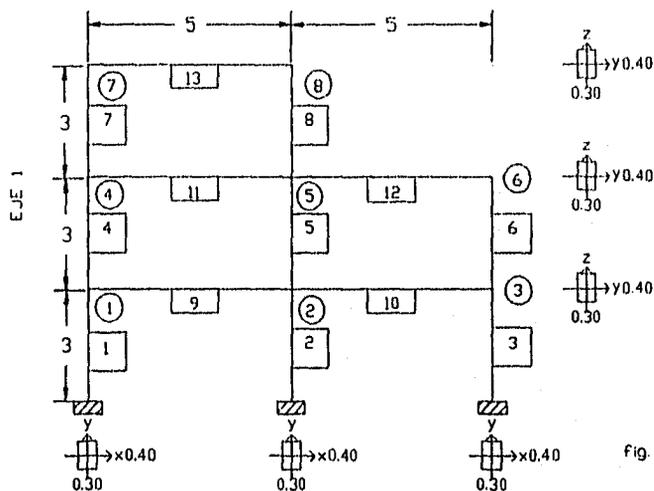


fig. 5.1

V.2 Características Geométricas de los Marcos que Integran el Edificio

Conviene enumerar las columnas y vigas(de ahora en adelante les llamaremos indistintamente barras), así como también los nudos (entendiéndose por nudo aquel en el que convergen una o más barras) como se muestra de la figura 5.2 a la figura 5.5, se anota en cada una de las figuras las dimensiones de las barras, área y momento de inercia.



AREA :
BARRAS 1 a 13= 0.12 M²

INERCIA :
BARRAS 1 a 8 $I_y = 9 \times 10^{-4}$ M⁴
BARRAS 9 a 13 $I_y = 16 \times 10^{-3}$ M⁴

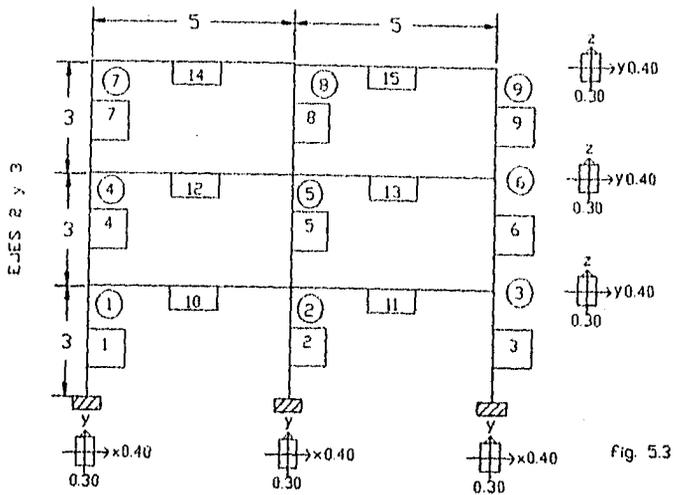


Fig. 5.3

AREA:
BARRAS 1 a 15 $A=0.12 \text{ M}^2$

INERCIA:
BARRAS 1 a 9 $I_y=9 \times 10^{-4} \text{ M}^4$
BARRAS 10 a 15 $I_y=1.6 \times 10^{-3} \text{ M}^4$

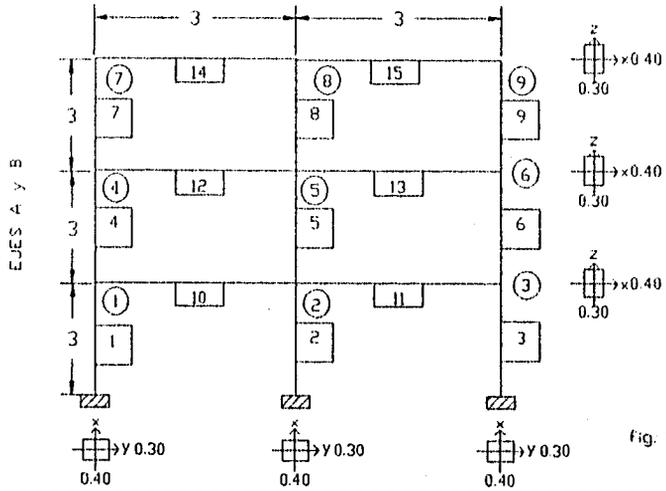


fig. 5.4

AREA:

INERCIA:

BARRAS 1 a 15 $A=0.12 \text{ M}^2$ BARRAS 1 a 15 $I_x=1.6 \times 10^{-3} \text{ M}^4$

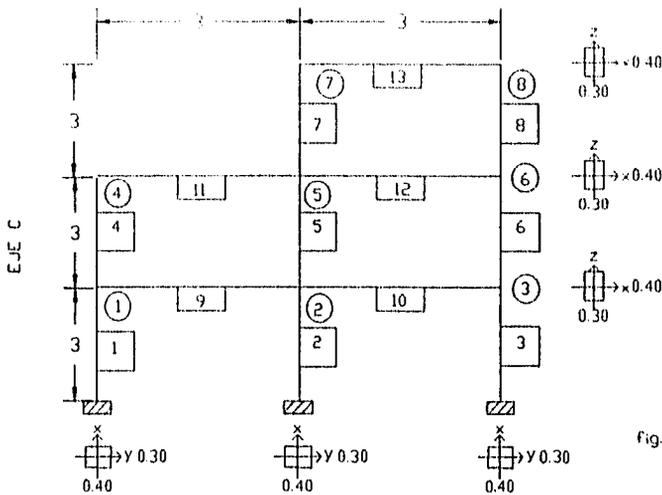


Fig. 5.5

AREA:

BARRAS 1 a 13 $A=0.12 \text{ M}^2$

INERCIA:

BARRAS 1 a 13 $I_x=1.6 \times 10^{-3} \text{ M}^4$

V.3 Obtención de la Matriz de Rigideces K Expresada en Función de un Giro por Nudo y un Desplazamiento Horizontal por Nivel.

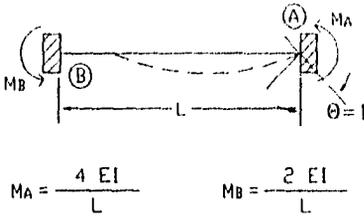
Para obtener la matriz K vamos a descomponerla en un grupo de matrices como sigue:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{\gamma\gamma} & K_{\gamma\Delta} \\ K_{\Delta\gamma} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix}$$

En primer término se va a obtener la matriz $K_{\gamma\gamma}$, esta matriz representa el momento que es producido en los nudos que integran el marco cuando se aplica un giro unitario en cada uno de estos nudos.

Dado que todas las barras están doblemente empotradas, al aplicar un giro unitario en el nudo A de la barra, el factor de transporte es $\frac{1}{2}$ para el nudo B. (figura 5.6.a).

RIGIDEZ ANGULAR DE UN ELEMENTO DOBLEMENTE EMPOTRADO

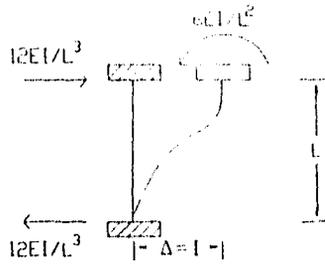


$$M_A = \frac{4EI}{L}$$

$$M_B = \frac{2EI}{L}$$

(a)

RIGIDEZ LINEAL DE UN ELEMENTO DOBLEMENTE EMPOTRADO



$$12EI/L^3$$

$$12EI/L^3$$

$$6EI/L^2$$

$$\Delta = 1$$

(b)

Fig. 5.6

Tomando como ejemplo el marco del eje 1, al aplicar un giro unitario en el nudo 1 (figura 5.7), los momentos de empotramiento en los extremos de las barras 1, 4 y 9 son:

barra 1:

$$M_1 = 4EI_1/L_1 = 4E(0.90 \times 10^{-3})/3 = 1.2 \times 10^{-3} \times E$$

$$M_{APOYO} = 2EI_1/L_1 = 2E(0.90 \times 10^{-3})/3 = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

barra 4:

$$M_1 = 4EI_4/L_4 = 4E(0.90 \times 10^{-3})/3 = 1.2 \times 10^{-3} \times E$$

$$M_4 = 2EI_4/L_4 = 2E(0.90 \times 10^{-3})/3 = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

barra 9:

$$M_1 = 4EI_9/L_9 = 4E(1.60 \times 10^{-3})/5 = 1.28 \times 10^{-3} \times E$$

$$M_2 = 2EI_9/L_9 = 2E(1.60 \times 10^{-3})/5 = 0.64 \times 10^{-3} \times E$$

De esta forma, la contribución a la rigidez de las barras 1, 4 y 9 en el nudo 1 es la suma de cada una de ellas.

$$K_{11} = (1.20 + 1.20 + 1.28) \times 10^{-3} \times E = 3.68 \times 10^{-3} \times E$$

Como el nudo 2 está conectado por la barra 9 la rigidez del primero al aplicar el giro en el nudo 1 es:

$$K_{12} = 0.64 \times 10^{-3} \times E$$

En forma análoga, la barra 4 conecta al nudo 4 con el nudo 1 en consecuencia:

$$K_{14} = 0.60 \times 10^{-3} \times E$$

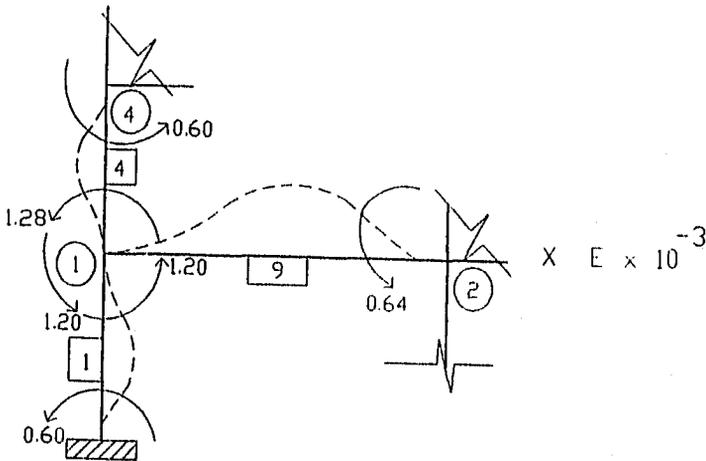


fig. 5.7

Este procedimiento se tiene que realizar para todos los nudos. Una forma sencilla de efectuar los cálculos es obtener el momento de empotramiento en el extremo de la barra donde se aplica el giro unitario y anotarlo en la barra correspondiente(figura 5.8).

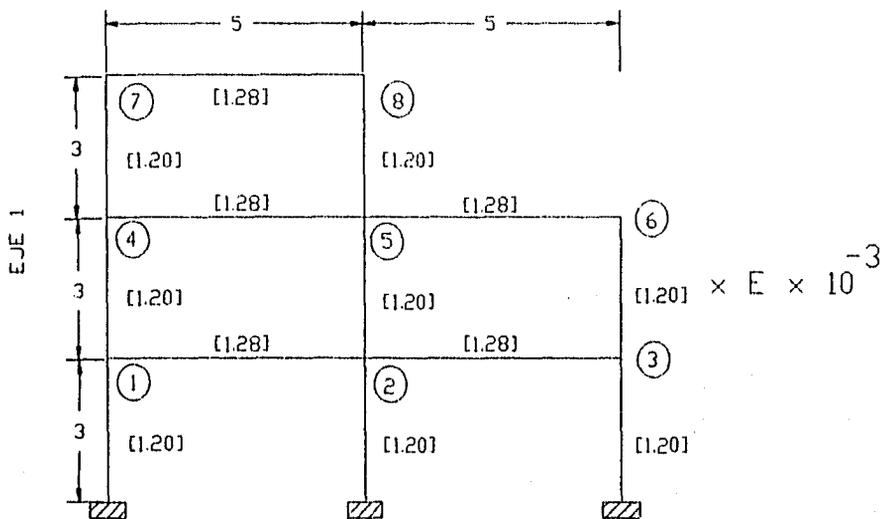


fig. 5.8

Así, por ejemplo, la rigidez del nudo 1 cuando se aplica un giro unitario en el nudo 1 es la suma de los valores de todas las barras que convergen en el nudo.

$$K_{\gamma_1 \gamma_1} = (1.20 + 1.20 + 1.28) \times 10^{-3} \times E = 3.68 \times 10^{-3} \times E$$

La contribución a la rigidez del nudo 2 cuando se aplica un giro unitario en el nudo 1 es $\frac{1}{2}$ del valor de la barra que conecta al nudo 2 con el nudo 1 (dado que están doblemente empotrados el factor de transporte es $\frac{1}{2}$).

$$K_{\gamma_1 \gamma_2} = (1.28 \times 10^{-3} \times E) \times \frac{1}{2} = 0.64 \times 10^{-3} \times E$$

y para el nudo 4 se tiene:

$$K_{\gamma_1 \gamma_4} = (1.20 \times 10^{-3} \times E) \times \frac{1}{2} = 0.60 \times 10^{-3} \times E$$

Este procedimiento se hace con todos los nudos hasta completar la matriz de rigidez angular $K_{\gamma\gamma}$

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	
γ_1	3.680	0.640	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000	
γ_2	0.640	4.960	0.640	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000	
γ_3	0.000	0.640	3.680	0.000	0.000	0.600	0.000	0.000	
γ_4	0.600	0.000	0.000	3.680	0.640	0.000	0.600	0.000	$\times E \times 10^{-3}$
γ_5	0.000	0.600	0.000	0.640	4.960	0.640	0.000	0.600	
γ_6	0.000	0.000	0.600	0.000	0.640	2.480	0.000	0.000	
γ_7	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000	0.000	2.480	0.640	
γ_8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000	0.640	2.480	

La manera de obtener el resto de los elementos de la matriz de rigideces K es aplicando un desplazamiento unitario en cada nivel. En este caso la rigidez lineal se calcula con la fórmula $12EI/L^3$ y el momento que se produce en los extremos de las barras es $6EI/L^2$.

Para el nivel 3:

$$\text{La rigidez lineal es } 12EI_{7,8}/L_{7,8}^3 = 12E(0.9 \times 10^{-3})/3^3 = 0.4 \times 10^{-3} \times E$$

y el momento es: $6EI_{7,8}/L_{7,8}^2 = 6E(0.9 \times 10^{-3})/3^2 = 0.6 \times 10^{-3} \times E$ (fig.5.9)

Para obtener los valores que integran la matriz $K_{\Delta\Delta}$ basta con sumar la rigidez lineal de todas las barras que contribuyen a la rigidez en el nivel del que se trate, en este caso el nivel 3 (ver figura 5.9):

$$K_{\Delta_3\Delta_3} = (0.4 + 0.4) \times 10^{-3} \times E = 0.8 \times 10^{-3} \times E$$

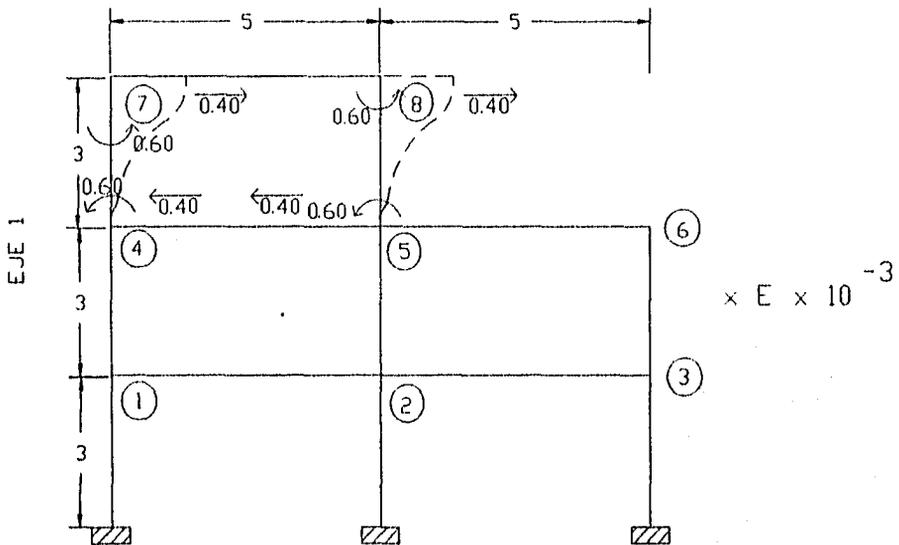


Fig. 5.9

Al aplicar un desplazamiento unitario en el nivel 3, también ejerce influencia en el nivel 2:

$$K_{\Delta_3\Delta_2} = (-0.4 - 0.4) \times 10^{-3} \times E = -0.8 \times 10^{-3} \times E$$

El nivel 1 no contribuye en la resistencia al desplazamiento del nivel 3, entonces $K_{\Delta_3\Delta_1} = 0$

Ahora vamos a obtener la matriz $K_{\Delta\gamma}$, esta matriz representa el momento que se produce en los nudos del marco cuando se aplica un desplazamiento unitario en un entrepiso. Continuando con el ejemplo y observando la figura 5.9 se obtiene:

$$K_{\Delta_3\gamma_1} = (-0.6 + 0.6) \times 10^{-3} \times E = 0$$

$$K_{\Delta_3\gamma_2} = (-0.6 + 0.6) \times 10^{-3} \times E = 0$$

$$K_{\Delta_3\gamma_3} = (-0.6 + 0.6) \times 10^{-3} \times E = 0$$

$$K_{\Delta_3\gamma_4} = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

$$K_{\Delta_3\gamma_5} = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

$$K_{\Delta_3\gamma_6} = (-0.6 + 0.6) \times 10^{-3} \times E = 0$$

$$K_{\Delta_3\gamma_7} = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

$$K_{\Delta_3\gamma_8} = 0.6 \times 10^{-3} \times E$$

Para definir completamente las matrices $K_{\Delta\Delta}$ y $K_{\Delta\gamma}$ se aplica un desplazamiento unitario en el nivel 2 y otro más en el nivel 1 como se muestra en las figuras 5.10 y 5.11 respectivamente, en las cuales aparecen los valores de la fuerza de rigidez para cada barra y el momento en los nudos, obtenidos en forma similar a como se hizo para el nivel 3.

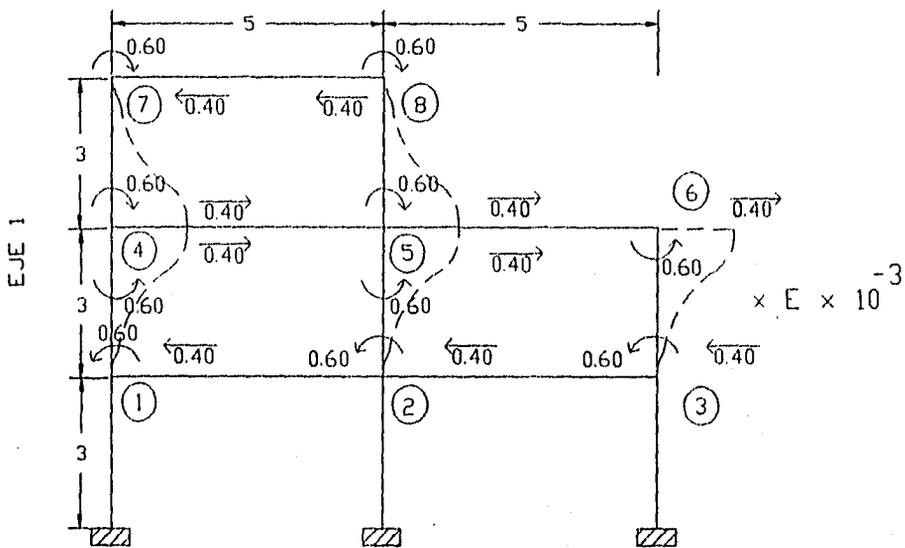


Fig. 5.10

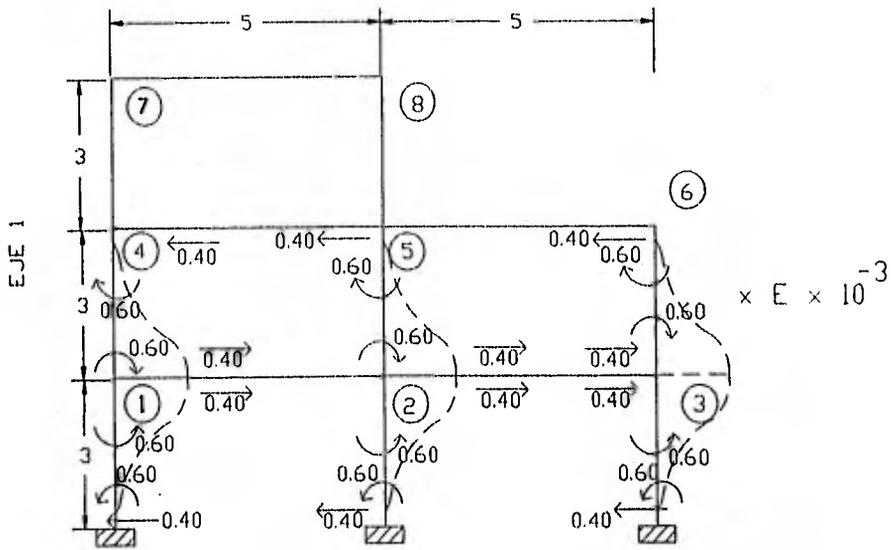


fig. 5.11

Entonces:

$$\begin{array}{r}
 \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \\
 \Delta_1 \quad 2.400 \quad -1.200 \quad 0.000 \\
 \% \Delta \Delta = \Delta_2 \quad -1.200 \quad 2.000 \quad -0.800 \quad \times 10^{-3} \times E \\
 \Delta_3 \quad 0.000 \quad -0.800 \quad 0.800
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \\
 \gamma_1 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad 0.000 \\
 \gamma_2 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad 0.000 \\
 \gamma_3 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad 0.000 \\
 \% \gamma \Delta = \gamma_4 \quad -0.600 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad \times 10^{-3} \times E \\
 \gamma_5 \quad -0.600 \quad 0.000 \quad 0.600 \\
 \gamma_6 \quad -0.600 \quad 0.600 \quad 0.000 \\
 \gamma_7 \quad 0.000 \quad -0.600 \quad 0.600 \\
 \gamma_8 \quad 0.000 \quad -0.600 \quad 0.600
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \gamma_7 \quad \gamma_8 \\
 \Delta_1 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad -0.600 \quad -0.600 \quad -0.600 \quad 0.000 \quad 0.000 \\
 \% \Delta \gamma = \Delta_2 \quad 0.600 \quad 0.600 \quad 0.600 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad -0.600 \quad -0.600 \times 10^{-3} E \\
 \Delta_3 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad 0.600 \quad 0.000 \quad 0.600 \quad 0.600
 \end{array}$$

En forma análoga se obtiene la matriz de rigidez \mathcal{K} para los demás ejes:

Ejes 2 y 3

Aplicando un giro unitario en cada uno de los nudos (figura 5.12)

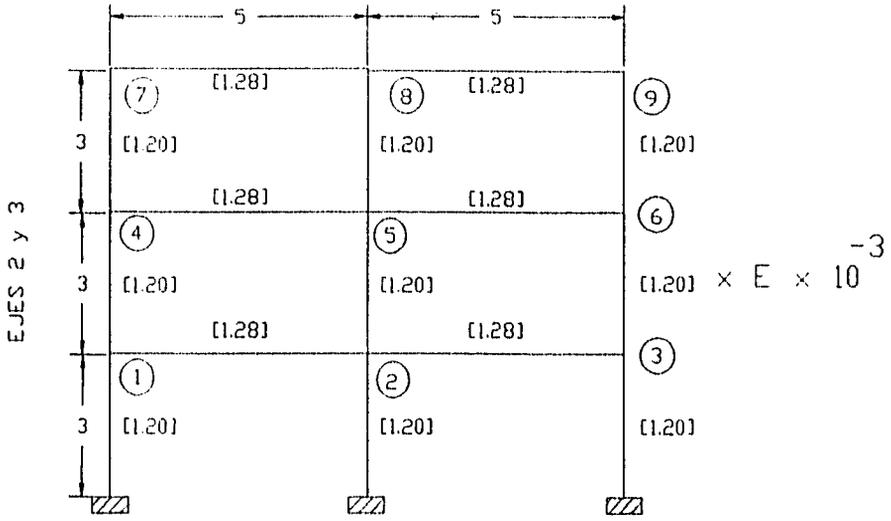
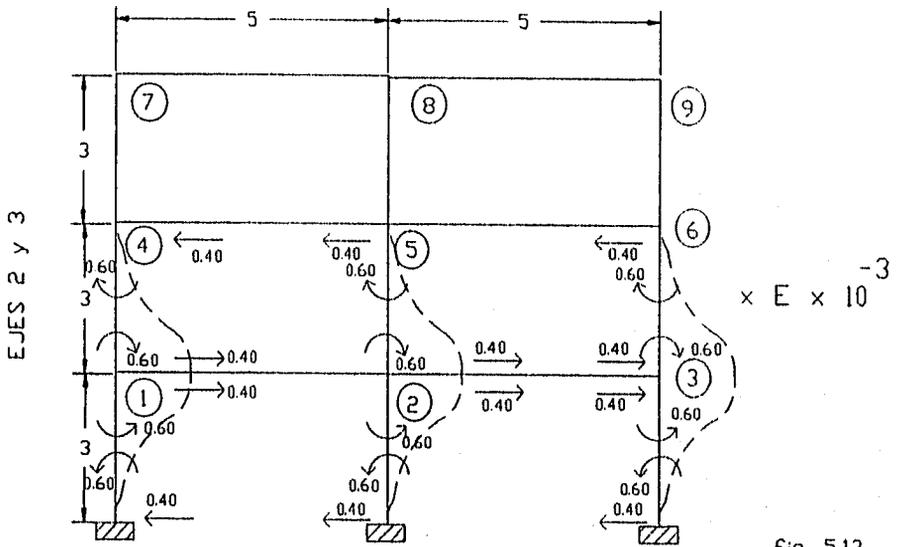


fig. 5.12

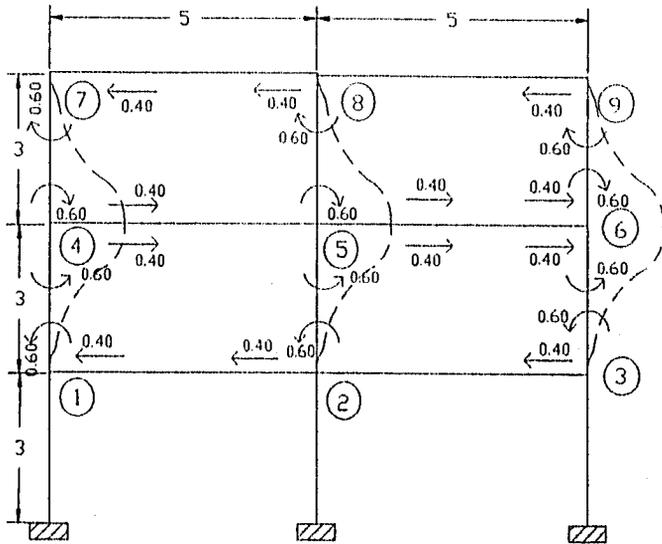
$\chi\gamma\gamma \times 10^{-3} \kappa E =$

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
γ_1	3.680	0.640	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
γ_2	0.640	4.960	0.640	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000
γ_3	0.000	0.640	3.680	0.000	0.000	0.600	0.000	0.000	0.000
γ_4	0.600	0.000	0.000	3.680	0.640	0.000	0.600	0.000	0.000
γ_5	0.000	0.600	0.000	0.640	4.960	0.640	0.000	0.600	0.000
γ_6	0.000	0.000	0.600	0.000	0.640	3.680	0.000	0.000	0.600
γ_7	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000	0.000	2.480	0.640	0.000
γ_8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000	0.640	3.760	0.640
γ_9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000	0.640	2.480

Aplicando un desplazamiento unitario en los niveles 1, 2 y 3
 (figuras 5.13, 5.14 y 5.15 respectivamente)



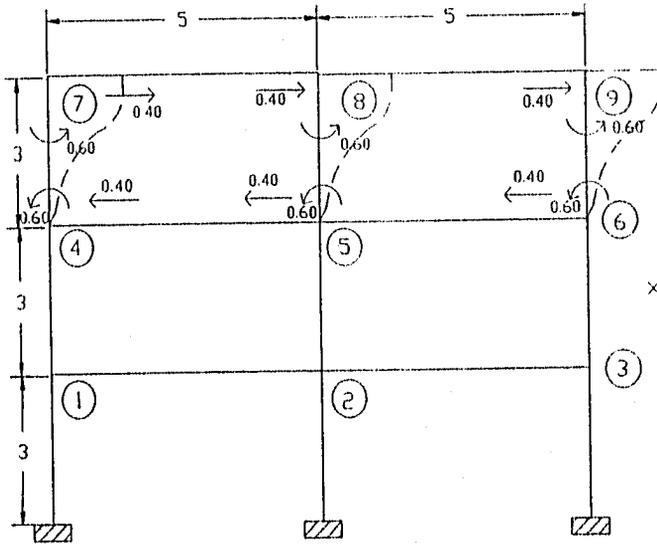
EJES 2 y 3



$\times E \times 10^{-3}$

Fig. 5.14

EJES 2 y 3



$\times E \times 10^{-3}$

Fig. 5.15

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
$\% \Delta \Delta =$	Δ_1 2.400	-1.200	0.000	$\times 10^{-3} \times E$
	Δ_2 -1.200	2.400	-1.200	
	Δ_3 0.000	-1.200	1.200	

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
$\% \gamma \Delta =$	γ_1 0.000	0.600	0.000	$10^{-3} \times E$
	γ_2 0.000	0.600	0.000	
	γ_3 0.000	0.600	0.000	
	γ_4 -0.600	0.000	0.600	
	γ_5 -0.600	0.000	0.600	
	γ_6 -0.600	0.000	0.600	
	γ_7 0.000	-0.600	0.600	
	γ_8 0.000	-0.600	0.600	
	γ_9 0.000	-0.600	0.600	

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$\% \Delta \gamma \times 10^{-3} \times E =$	Δ_1 0.000	0.000	0.000	-0.600	-0.600	-0.600	0.000	0.000	0.000
	Δ_2 0.600	0.600	0.600	0.000	0.000	0.000	-0.600	-0.600	-0.600
	Δ_3 0.000	0.000	0.000	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600

Ejes A y B :

Aplicando un giro unitario en cada uno de los nudos (figura 5.16)

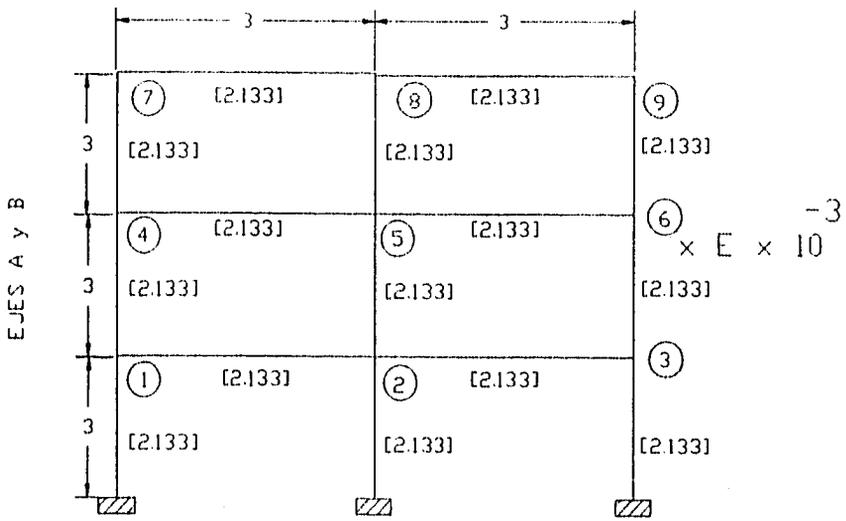
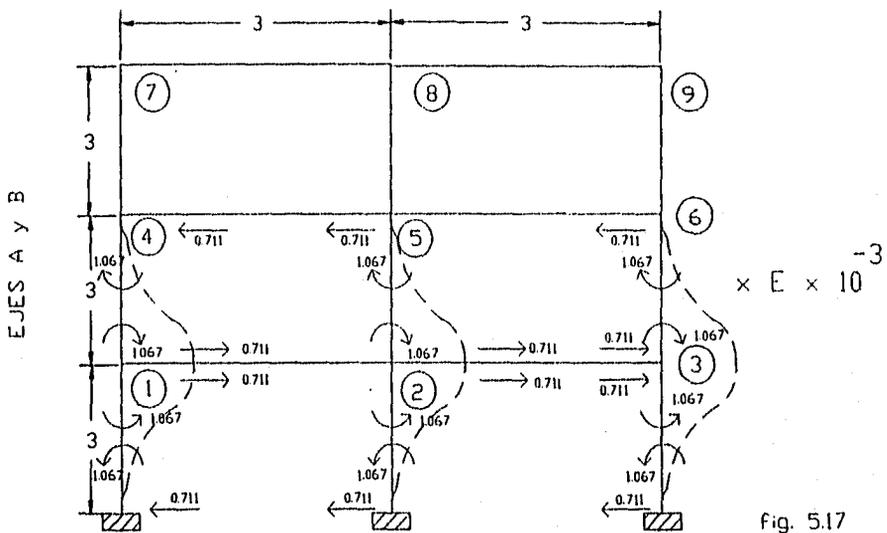


fig 5.16

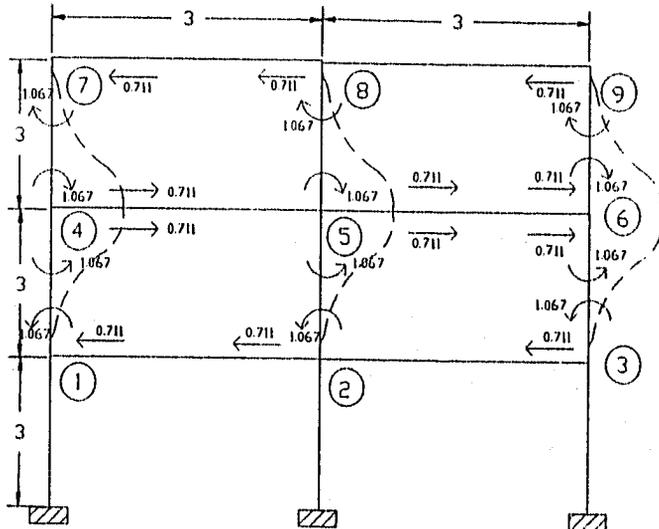
$\gamma_{\gamma} \times 10^{-3} \times E =$

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
γ_1	6.400	1.067	0.000	1.067	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
γ_2	1.067	8.532	1.067	0.000	1.067	0.000	0.000	0.000	0.000
γ_3	0.000	1.067	6.400	0.000	0.000	1.067	0.000	0.000	0.000
γ_4	1.067	0.000	0.000	6.400	1.067	0.000	1.067	0.000	0.000
γ_5	0.000	1.067	0.000	1.067	8.532	1.067	0.000	1.067	0.000
γ_6	0.000	0.000	1.067	0.000	1.067	6.400	0.000	0.000	1.067
γ_7	0.000	0.000	0.000	1.067	0.000	0.000	4.267	1.067	0.000
γ_8	0.000	0.000	0.000	0.000	1.067	0.000	1.067	6.400	1.067
γ_9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.067	0.000	1.067	4.267

Aplicando un desplazamiento unitario en los niveles 1, 2 y 3
 (figuras 5.17, 5.18 y 5.19 respectivamente)



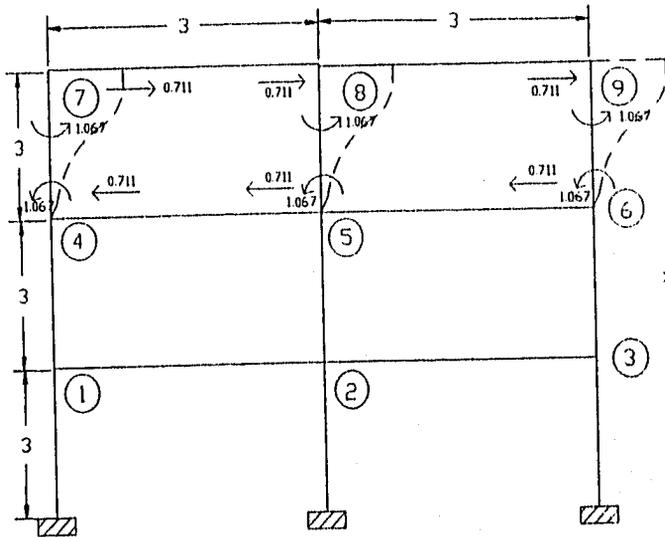
EJES A Y B



$\times E \times 10^{-3}$

Fig. 5.18

EJES A y B



$\times E \times 10^{-3}$

fig. 5.19

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
Δ_1	4.267	-2.133	0.000	
Δ_2	-2.133	4.267	-2.133	$\times 10^{-3} \times E$
Δ_3	0.000	-2.133	2.133	

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
γ_1	0.000	1.067	0.000	
γ_2	0.000	1.067	0.000	
γ_3	0.000	1.067	0.000	
γ_4	-1.067	0.000	1.067	$\times 10^{-3} \times E$
γ_5	-1.067	0.000	1.067	
γ_6	-1.067	0.000	1.067	
γ_7	0.000	-1.067	1.067	
γ_8	0.000	-1.067	1.067	
γ_9	0.000	-1.067	1.067	

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
Δ_1	0.000	0.000	0.000	-1.067	-1.067	-1.067	0.000	0.000	0.000
Δ_2	1.067	1.067	1.067	0.000	0.000	0.000	-1.067	-1.067	-1.067
Δ_3	0.000	0.000	0.000	1.067	1.067	1.067	1.067	1.067	1.067

Eje C:

Aplicando un giro unitario en cada uno de los nudos(figura 5.20)

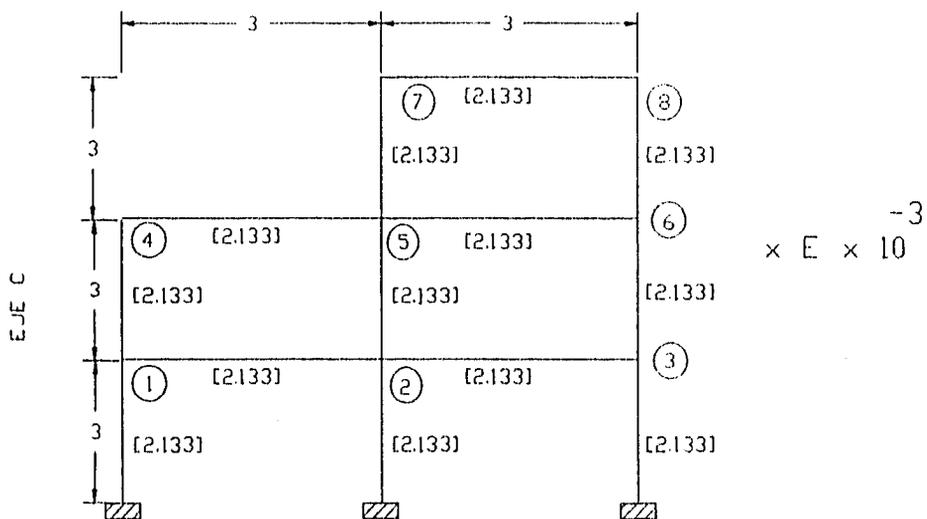
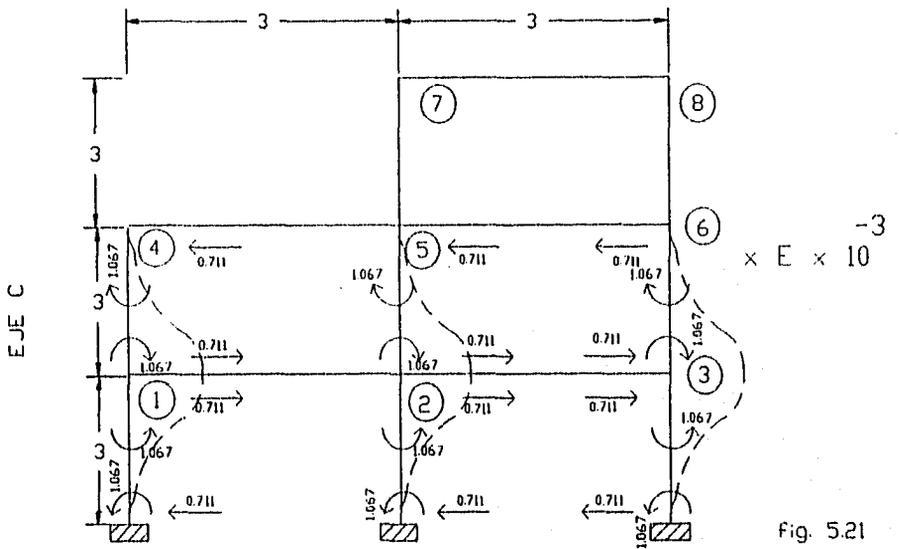


fig. 5.20

$\gamma\gamma\gamma \times 10^{-3} \times E =$

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
γ_1	6.400	1.067	0.000	1.067	0.000	0.000	0.000	0.000
γ_2	1.067	8.532	1.067	0.000	1.067	0.000	0.000	0.000
γ_3	0.000	1.067	6.400	0.000	0.000	1.067	0.000	0.000
γ_4	1.067	0.000	0.000	4.267	1.067	0.000	0.000	0.000
γ_5	0.000	1.067	0.000	1.067	8.532	1.067	1.067	0.000
γ_6	0.000	0.000	1.067	0.000	1.067	6.400	0.000	1.067
γ_7	0.000	0.000	0.000	0.000	1.067	0.000	4.267	1.067
γ_8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.067	1.067	4.267

Aplicando un desplazamiento unitario en los niveles 1, 2 y 3
 (figuras 5. 21, 5. 22 y 5. 23 respectivamente)



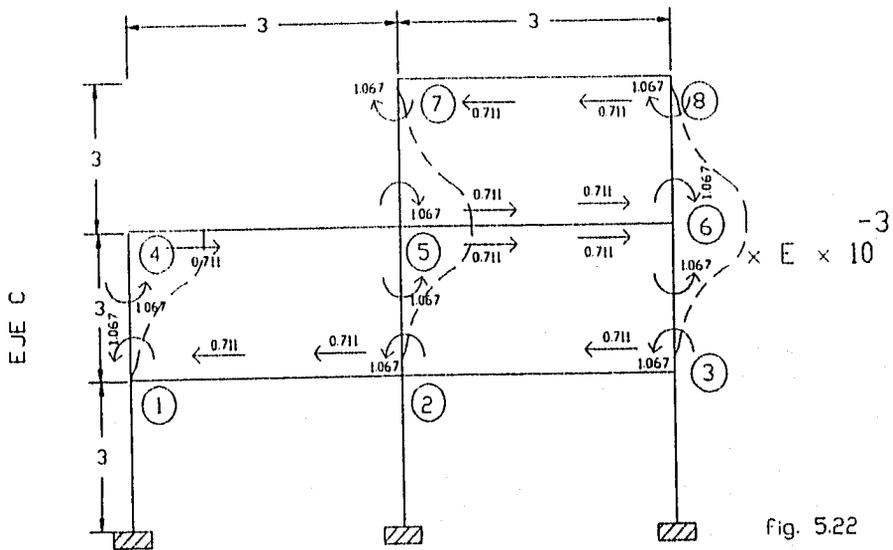


Fig. 5.22

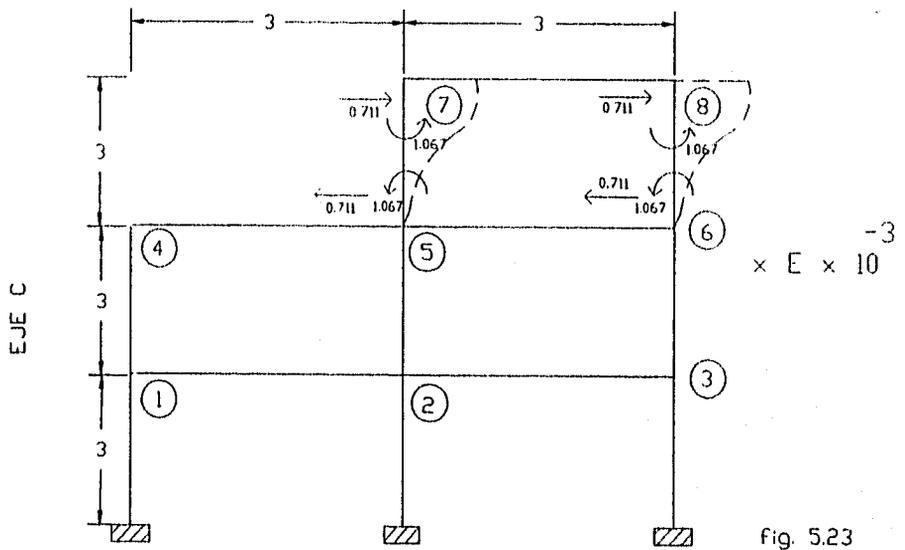


fig. 5.23

	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$\% \Delta \Delta =$	4.267	-2.133	0.000
Δ_1	-2.133	3.555	-1.422
Δ_2	0.000	-1.422	1.422
Δ_3			

$\times 10^{-3} \times E$

	Δ_1	Δ_2	Δ_3
γ_1	0.000	1.067	0.000
γ_2	0.000	1.067	0.000
γ_3	0.000	1.067	0.000
γ_4	-1.067	1.067	0.000
γ_5	-1.067	0.000	1.067
γ_6	-1.067	0.000	1.067
γ_7	0.000	-1.067	1.067
γ_8	0.000	-1.067	1.067

$\times 10^{-3} \times E$

$\% \Delta \gamma \times 10^{-3} \times E =$

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
Δ_1	0.000	0.000	0.000	-1.067	-1.067	-1.067	0.000	0.000
Δ_2	1.067	1.067	1.067	1.067	0.000	0.000	-1.067	-1.067
Δ_3	0.000	0.000	0.000	0.000	1.067	1.067	1.067	1.067

V.4 Obtención de la Matriz de Rigidez Lateral $\%K_{LAT}$ para cada Eje

Vamos a obtener la matriz de rigidez lateral para cada eje mediante el procedimiento de condensación estática el cual se muestra a continuación:

$$[\%K_{LAT} \ j] = [\% \Delta \Delta] - [\% \Delta \gamma] [\% \gamma \gamma]^{-1} [\% \gamma \Delta]$$

La inversa de la matriz $\% \gamma \gamma$ para el eje i es:

$$[\% \gamma \gamma]^{-1} \times 10^2 \times E =$$

0.287	-0.040	0.008	-0.051	0.013	-0.005	0.014	-0.007
-0.040	0.216	-0.040	0.013	-0.031	0.018	-0.005	0.009
0.008	-0.040	0.291	-0.004	0.016	-0.074	0.002	-0.004
-0.051	0.013	-0.004	0.301	-0.046	0.013	-0.081	0.032
0.013	-0.031	0.016	-0.046	0.227	-0.062	0.027	-0.062
-0.005	0.018	-0.074	0.013	-0.062	0.437	-0.008	0.017
0.014	-0.005	0.002	-0.081	0.027	-0.008	0.455	-0.124
-0.007	0.009	-0.004	0.032	-0.062	0.017	-0.124	0.450

Efectuando operaciones:

$$[\% \Delta \tau 1] = [\% \Delta \Delta] - [\% \Delta \gamma] [\% \gamma \gamma]^{-1} [\% \gamma \Delta] =$$

2.121	-1.072	0.112	
-1.072	1.430	-0.566	($10^{-3} \times E$)
0.112	-0.566	0.467	

Para los ejes 2 y 3:

$$[\% \gamma \gamma]^{-1} \times 10^2 \times E =$$

0.287	-0.039	0.007	-0.051	0.012	-0.004	0.014	-0.005	0.002
-0.039	0.215	-0.039	0.012	-0.030	0.012	-0.005	0.006	-0.005
0.007	-0.039	0.287	-0.004	0.012	-0.051	0.002	-0.005	0.014
-0.051	0.012	-0.004	0.301	-0.044	0.010	-0.078	0.022	-0.008
0.012	-0.030	0.012	-0.044	0.222	-0.044	0.022	-0.043	0.022
-0.004	0.012	-0.051	0.010	-0.044	0.301	-0.008	0.022	-0.078
0.014	-0.005	0.002	-0.078	0.022	-0.008	0.444	-0.083	0.023
-0.005	0.006	-0.005	0.022	-0.043	0.022	-0.083	0.301	-0.083
0.002	-0.005	0.014	-0.008	0.022	-0.078	0.023	-0.083	0.444

Efectuando operaciones:

$$[X_{LAT} 2,3] = [X_{\Delta\Delta}] - [X_{\Delta\gamma}] [X_{\gamma\gamma}]^{-1} [X_{\gamma\Delta}] =$$

$$\begin{array}{ccc} 2.160 & -1.186 & 0.193 \\ -1.186 & 1.856 & -0.896 \\ 0.193 & -0.896 & 0.728 \end{array} \quad (10^{-3} \times E)$$

Para los ejes A y B:

$$[X_{\gamma\gamma}]^{-1} \times 10^2 \times E =$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0.165 & -0.022 & 0.004 & -0.030 & 0.007 & -0.002 & 0.008 & -0.003 & 0.001 \\ -0.022 & 0.125 & -0.022 & 0.007 & -0.018 & 0.007 & -0.003 & 0.004 & -0.003 \\ 0.004 & -0.022 & 0.165 & -0.002 & 0.007 & -0.030 & 0.001 & -0.003 & 0.008 \\ -0.030 & 0.007 & -0.002 & 0.173 & -0.025 & 0.005 & -0.046 & 0.013 & -0.004 \\ 0.007 & -0.018 & 0.007 & -0.025 & 0.129 & -0.025 & 0.013 & -0.026 & 0.013 \\ -0.002 & 0.007 & -0.030 & 0.005 & -0.025 & 0.173 & -0.004 & 0.013 & -0.046 \\ 0.008 & -0.003 & 0.001 & -0.046 & 0.013 & -0.004 & 0.258 & -0.047 & 0.013 \\ -0.003 & 0.004 & -0.003 & 0.013 & -0.026 & 0.013 & -0.047 & 0.176 & -0.047 \\ 0.001 & -0.003 & 0.008 & -0.004 & 0.013 & -0.046 & 0.013 & -0.047 & 0.258 \end{array}$$

Efectuando operaciones:

$$[X_{LAT} A,B] = [X_{\Delta\Delta}] - [X_{\Delta\gamma}] [X_{\gamma\gamma}]^{-1} [X_{\gamma\Delta}] =$$

$$\begin{array}{ccc} 3.827 & -2.106 & 0.352 \\ -2.106 & 3.265 & -1.571 \\ 0.352 & -1.571 & 1.266 \end{array} \quad (10^{-3} \times E)$$

Para el eje C:

$$[\mathcal{X}_{\gamma\gamma}]^{-1} \times 10^2 \times E =$$

0.167	-0.023	0.004	-0.044	0.009	-0.002	-0.003	0.001
-0.023	0.125	-0.022	0.010	-0.019	0.007	0.005	-0.003
0.004	-0.022	0.165	-0.003	0.007	-0.030	-0.004	0.009
-0.044	0.010	-0.003	0.254	-0.035	0.007	0.010	-0.004
0.009	-0.019	0.007	-0.035	0.132	-0.026	-0.037	0.016
-0.002	0.007	-0.030	0.007	-0.026	0.174	0.018	-0.048
-0.003	0.005	-0.004	0.010	-0.037	0.018	0.261	-0.070
0.001	-0.003	0.009	-0.004	0.016	-0.048	-0.070	0.264

Efectuando operaciones:

$$[\mathcal{X}_{LAr C}] = [\mathcal{X}_{\Delta\Delta}] - [\mathcal{X}_{\Delta\gamma}] [\mathcal{X}_{\gamma\gamma}]^{-1} [\mathcal{X}_{\gamma\Delta}] =$$

3.753	-1.897	0.205	
-1.897	2.507	-0.991	($10^{-3} \times E$)
0.205	-0.991	0.810	

V.5 Obtención de la Matriz de Rigidez en Función de los Grados de Libertad del Edificio Completo (tres por cada nivel).

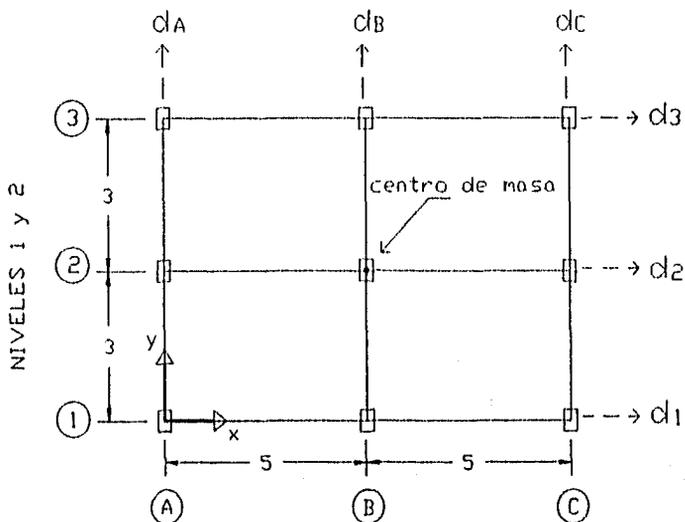


fig. 5.24

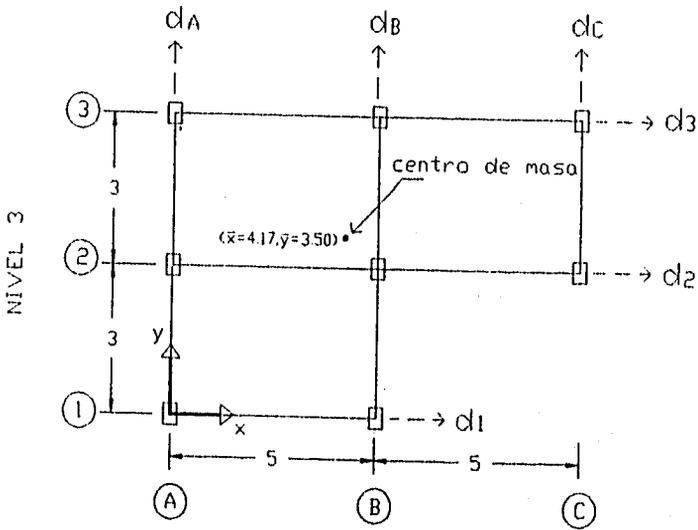


Fig. 5.25

De acuerdo a las figuras 5.24 y 5.25 se puede formar la tabla siguiente en la que se toma en cuenta las características geométricas de cada una de las plantas.

MARCO _j	NIVEL 1		NIVEL 2		NIVEL 3	
	ϕ_j (grados)	r_{ij} (mts.)	ϕ_j (grados)	r_{ij} (mts)	ϕ_j (grados)	r_{ij} (mts)
1	0°	3.00	0°	3.00	0°	3.50
2	0°	0.00	0°	0.00	0°	0.50
3	0°	-3.00	0°	-3.00	0°	-2.50
A	90°	-5.00	90°	-5.00	90°	-4.17
B	90°	0.00	90°	0.00	90°	0.83
C	90°	5.00	90°	5.00	90°	5.83

Dado que $b_{ji}^T = (\cos \phi_j \quad \text{sen} \phi_j \quad r_{ji})$ para el eje i en el nivel 1 se tiene:

$$b_{11}^T = (\cos 0^\circ \quad \text{sen} 0^\circ \quad 3) = (1.00, 0.00, 3.00)$$

y en forma similar: $b_{12}^T = (1.00, 0.00, 3.00)$ $b_{13}^T = (1.00, 0.00, 3.50)$

$$b_{21}^T = (1.00, 0.00, 0.00) \quad b_{22}^T = (1.00, 0.00, 0.00) \quad b_{23}^T = (1.00, 0.00, 0.50)$$

$$b_{31}^T = (1.00, 0.00, -3.00) \quad b_{32}^T = (1.00, 0.00, -3.00) \quad b_{33}^T = (1.00, 0.00, -2.50)$$

$$b_{A1}^T = (0.00, 1.00, -5.00) \quad b_{A2}^T = (0.00, 1.00, -5.00) \quad b_{A3}^T = (0.00, 1.00, -4.17)$$

$$b_{B1}^T = (0.00, 1.00, 0.00) \quad b_{B2}^T = (0.00, 1.00, 0.00) \quad b_{B3}^T = (0.00, 1.00, 0.83)$$

$$b_{C1}^T = (0.00, 1.00, 5.00) \quad b_{C2}^T = (0.00, 1.00, 5.00) \quad b_{C3}^T = (0.00, 1.00, 5.83)$$

Y como $B_j = \begin{bmatrix} b_{j1}^T \\ b_{j2}^T \\ b_{j3}^T \end{bmatrix}$ entonces:

	1.00	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_1 =$	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	3.50

	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_2 =$	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.50

	1.00	0.00	-3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_3 =$	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-3.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-2.50

	0.00	1.00	-5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_A =$	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-5.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-4.17

	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_B =$	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.83

	0.00	1.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$B_C =$	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	5.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	5.83

Pero $K_j = B_j^T K_{LAT} B_j$

Para el eje 1 se tiene: $K_1 = B_1^T K_{LAT} B_1 =$

2.121	0.000	6.363	-1.072	0.000	-3.216	0.112	0.000	0.392
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.363	0.000	19.089	-3.216	0.000	-9.648	0.336	0.000	1.176
-1.072	0.000	-3.216	1.430	0.000	4.290	-0.566	0.000	-1.981
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-3.216	0.000	-9.648	4.290	0.000	12.870	-1.698	0.000	-5.943
0.112	0.000	0.336	-0.566	0.000	-1.698	0.467	0.000	1.635
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.392	0.000	1.176	-1.981	0.000	-5.943	1.635	0.000	5.721

x E x 10⁻³

Para el eje 2 : $K_2 = B_2^T \chi_{LAT_2} B_2 =$

2.160	0.000	0.000	-1.186	0.000	0.000	0.193	0.000	0.097
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-1.186	0.000	0.000	1.856	0.000	0.000	-0.896	0.000	-0.448
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.193	0.000	0.000	-0.896	0.000	0.000	0.728	0.000	0.364
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.097	0.000	0.000	-0.448	0.000	0.000	0.364	0.000	0.182

xEx10⁻³

Para el eje 3 : $K_3 = D_3^T \text{XLAT}_3 B_3 =$

2.160	0.000	-6.480	-1.186	0.000	3.558	0.193	0.000	-0.483
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-6.480	0.000	19.440	3.558	0.000	-10.674	-0.579	0.000	1.448
-1.186	0.000	3.558	1.856	0.000	-5.568	-0.896	0.000	2.240
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.558	0.000	-10.674	-5.568	0.000	16.704	2.688	0.000	-6.720
0.193	0.000	-0.579	-0.896	0.000	2.688	0.728	0.000	-1.820
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.483	0.000	1.448	2.240	0.000	-6.720	-1.820	0.000	4.550

$\times 10^{-3}$

Para el eje A : $K_A = B_A^T \text{XLAT}_A B_A =$

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	3.827	-19.135	0.000	-2.106	10.530	0.000	0.352	-1.468
0.000	-19.135	95.675	0.000	10.530	-52.650	0.000	-1.760	7.339
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-2.106	10.530	0.000	3.265	-16.325	0.000	-1.571	6.551
0.000	10.530	-52.650	0.000	-16.325	81.625	0.000	7.855	-32.755
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.352	-1.760	0.000	-1.571	7.855	0.000	1.266	-5.279
0.000	-1.468	7.339	0.000	6.551	-32.755	0.000	-5.279	22.014

$\times 10^{-3}$

Para el eje B : $K_B = B_B^T \text{XLAT}_B B_B =$

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	3.287	0.000	0.000	-2.106	0.000	0.000	0.352	0.292
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-2.106	0.000	0.000	3.265	0.000	0.000	-1.571	-1.304
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.352	0.000	0.000	-1.571	0.000	0.000	1.266	1.051
0.000	0.292	0.000	0.000	-1.304	0.000	0.000	1.051	0.872

$\times 10^{-3}$

Para el eje C : $K_C = B_C^T \cdot \%LAT_C \cdot B_C =$

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	3.753	18.765	0.000	-1.897	-9.485	0.000	0.205	1.195
0.000	18.765	93.825	0.000	-9.485	-47.425	0.000	1.025	5.976
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-1.897	-9.485	0.000	2.507	12.535	0.000	-0.991	-5.778
0.000	-9.485	-47.425	0.000	12.535	62.675	0.000	-4.955	-28.888
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.205	1.025	0.000	-0.991	-4.955	0.000	0.810	4.722
0.000	1.195	5.976	0.000	-5.778	-28.888	0.000	4.722	27.531

$\times 10^{-3}$

La matriz K se obtiene sumando todas las matrices K_j dado que estan referidas a los mismos grados de libertad. Entonces $K = K_1 + K_2 + K_3 +$

$K_A + K_B + K_C =$

6.441	0.000	-0.117	-3.444	0.000	0.342	0.498	0.000	0.006
0.000	10.867	-0.370	0.000	-6.109	1.045	0.000	0.909	0.019
-0.117	-0.370	228.029	0.342	1.045	-120.397	-0.243	-0.735	15.938
-3.444	0.000	0.342	5.142	0.000	-1.278	-2.358	0.000	-0.189
0.000	-6.109	1.045	0.000	9.037	-3.790	0.000	-4.133	-0.530
0.342	1.045	-120.397	-1.278	-3.790	173.874	0.990	2.900	-74.306
0.498	0.000	-0.243	-2.358	0.000	0.990	1.923	0.000	0.179
0.000	0.909	-0.735	0.000	-4.133	2.900	0.000	3.342	0.494
0.006	0.019	15.938	-0.189	-0.530	-74.306	0.179	0.494	60.870

$\times 10^{-3}$

Esta última matriz representa la rigidez del edificio con tres grados de libertad por cada nivel; dos traslaciones ortogonales entre sí y un giro alrededor del eje perpendicular a los entrepisos del edificio.

V.6 Obtención de la Matriz de Masas del Sistema Estructural.

Como el peso del nivel 1 y el peso del nivel 2 son iguales entonces la masa para ambos entrepisos es:

$$m_1 = m_2 = 22.5(\text{ton}) / 9.81 (\text{m}/\text{seg}^2) = 2.293 (\text{ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m})$$

Para el nivel 3:

$$m_3 = 17.5(\text{ton}) / 9.81 (\text{m}/\text{seg}^2) = 1.784 (\text{ton}\cdot\text{seg}^2/\text{m})$$

Para obtener la masa rotacional de los niveles 1 y 2 simplemente se calculará el momento polar de inercia alrededor del centro de masas:

$$m\theta_1 = m\theta_2 = 1/12(2.293)(6^2 + 10^2) = 25.987 \text{ ton}\cdot\text{seg}\cdot\text{m}$$

Para el tercer nivel se empleará un procedimiento análogo tomando en cuenta el teorema de los ejes paralelos $I_z = \bar{I}_z' + md^2$:

Dividiendo la planta del edificio como se muestra en la figura 5.26

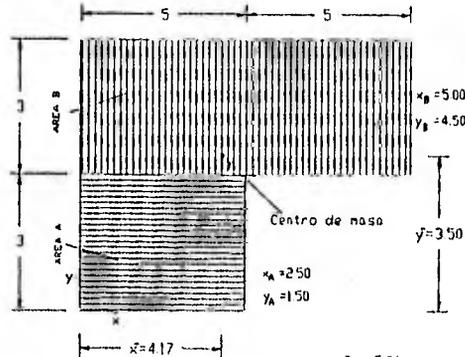


Fig 5.26

$$m_A = 0.594 \text{ ton-seg}^2/\text{m} \quad \text{y} \quad m_B = 1.189 \text{ ton-seg}^2/\text{m}$$

efectuando operaciones:

$$m\theta_S = 1/12 m_A (3^2 + 5^2) + 1/12 m_B (3^2 + 10^2) + m_A (d_A)^2 + m_B (d_B)^2$$

Donde:

$$d_A^2 = (\bar{x} - \bar{x}_A)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_A)^2 = (4.170 - 2.50)^2 + (3.50 - 1.5)^2 = 6.789 \text{ m}$$

$$d_B^2 = (\bar{x} - \bar{x}_B)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_B)^2 = (4.170 - 5.00)^2 + (3.50 - 4.5)^2 = 1.689 \text{ m}$$

Sustituyendo valores:

$$m\theta_S = 18.532 \text{ ton/seg}^2\text{-m} \quad \text{y la matriz de masas es:}$$

2.293	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	2.293	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	25.987	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	2.293	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	2.293	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	25.987	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.784	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.784	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	18.532

V.7 Determinación de Frecuencias y Modos de Vibrar del ejemplo

Una vez que ya obtuvimos la matriz de masas y rigideces estamos en la posibilidad de obtener el polinomio característico resolviendo el determinante:

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \quad \text{o bien} \quad | [M]^{-1} [K] - \omega^2 [I] | = 0$$

El polinomio característico es:

$$\lambda^9 - 0.78433 \times 10^5 \lambda^8 + 0.237424 \times 10^{10} \lambda^7 - 0.362101 \times 10^{14} \lambda^6 + 0.3017834 \times 10^{18} \lambda^5 - 0.1384268 \times 10^{22} \lambda^4 + 0.33452 \times 10^{25} \lambda^3 - 0.39041033 \times 10^{28} \lambda^2 + 0.2006083 \times 10^{31} \lambda - 0.35939574 \times 10^{33} = 0$$

cuyas raíces son precisamente el cuadrado de la frecuencia circular angular de cada modo:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 399.9322 \text{ (rad/seg)} \quad T_1 = 0.31418 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 640.6946 \text{ (rad/seg)} \quad T_2 = 0.24822 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_3 = \omega_3^2 = 1270.1089 \text{ (rad/seg)} \quad T_3 = 0.17630 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_4 = \omega_4^2 = 3586.0943 \text{ (rad/seg)} \quad T_4 = 0.10492 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_5 = \omega_5^2 = 6051.8534 \text{ (rad/seg)} \quad T_5 = 0.08076 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_6 = \omega_6^2 = 9601.2529 \text{ rad/seg)} \quad T_6 = 0.06412 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_7 = \omega_7^2 = 10789.7007 \text{ (rad/seg)} \quad T_7 = 0.06048 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_8 = \omega_8^2 = 16694.2388 \text{ (rad/seg)} \quad T_8 = 0.04862 \text{ (seg)}$$

$$\lambda_9 = \omega_9^2 = 29398.5944 \text{ (rad/seg)} \quad T_9 = 0.03664 \text{ (seg)}$$

Los vectores característicos asociados con las frecuencias circulares angulares corresponden a los modos de vibración del sistema:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.00612 \\ -0.00954 \\ 2.16689 \\ 0.01307 \\ -0.02225 \\ 2.89699 \\ 0.03980 \\ -0.02830 \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -42.13222 \\ 1.36165 \\ 2.03248 \\ -87.45376 \\ 3.11182 \\ 0.58724 \\ -117.92891 \\ 4.01281 \end{bmatrix} \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.76614 \\ 1.79938 \\ 1.67753 \\ 3.30127 \\ 3.90866 \\ -1.01770 \\ -0.24807 \\ 5.25913 \end{bmatrix}$$

$$Z_4 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.01611 \\ -0.01282 \\ 0.63670 \\ -0.01880 \\ -0.02198 \\ -1.06172 \\ 0.02127 \\ -0.03712 \end{bmatrix} \quad Z_5 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 67.99281 \\ -1.23657 \\ -0.12832 \\ 40.31259 \\ -1.57251 \\ -0.39998 \\ -71.82241 \\ -4.07328 \end{bmatrix} \quad Z_6 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.00064 \\ -0.00569 \\ -0.94870 \\ -0.00051 \\ -0.00589 \\ 0.47020 \\ 0.00096 \\ 0.03162 \end{bmatrix}$$

$$Z_7 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -1.10567 \\ 5.52392 \\ -1.10459 \\ 0.37761 \\ 3.78236 \\ 0.63985 \\ 0.20732 \\ -6.54446 \end{bmatrix} \quad Z_8 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1034.699 \\ -41.022 \\ -1.489 \\ 1014.682 \\ 1.523 \\ 1.033 \\ -504.897 \\ -19.953 \end{bmatrix} \quad Z_9 = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 5.92939 \\ -35.39441 \\ -2.30823 \\ -10.23553 \\ 32.18590 \\ 2.00002 \\ 7.81728 \\ -15.90014 \end{bmatrix}$$

V.8 Coeficiente de Participación

Aplicando la ecuación 3.37 se obtienen los coeficientes de participación para cada modo en cada dirección.

en la dirección x:

$$f_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

modo 1:

$$C_{1x} = \frac{Z_1^T [M] f_x}{Z_1^T [M] z_1} = 0.4428$$

mado 2:

$$C_{2x} = \frac{z_2^T [M] f_x}{z_2^T [M] z_2} = 1.7005 \times 10^{-4}$$

mado 3:

$$C_{3x} = \frac{z_3^T [M] f_x}{z_3^T [M] z_3} = 4.1676 \times 10^{-3}$$

mado 4:

$$C_{4x} = \frac{z_4^T [M] f_x}{z_4^T [M] z_4} = 0.3517$$

mado 5:

$$C_{5x} = \frac{z_5^T [M] f_x}{z_5^T [M] z_5} = 5.3633 \times 10^{-5}$$

mado 6:

$$C_{6x} = \frac{z_6^T [M] f_x}{z_6^T [M] z_6} = 0.2006$$

mado 7:

$$C_{7x} = \frac{z_7^T [M] f_x}{z_7^T [M] z_7} = 4.5866 \times 10^{-4}$$

mado 8:

$$C_{8x} = \frac{z_8^T [M] f_x}{z_8^T [M] z_8} = 1.3589 \times 10^{-7}$$

mado 9:

$$C_{9x} = \frac{z_9^T [M] f_x}{z_9^T [M] z_9} = 8.8441 \times 10^{-6}$$

en la dirección y:

$$f_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

modo 1:

$$C_{1y} = \frac{Z_1^T [M] f_y}{Z_1^T [M] z_1} = 4.0992 \times 10^{-3}$$

modo 2:

$$C_{2y} = \frac{Z_2^T [M] f_y}{Z_2^T [M] z_2} = -1.0790 \times 10^{-2}$$

modo 3:

$$C_{3y} = \frac{Z_3^T [M] f_y}{Z_3^T [M] z_3} = 1.0776 \times 10^{-2}$$

modo 4:

$$C_{4y} = \frac{Z_4^T [M] f_y}{Z_4^T [M] z_4} = -7.9948 \times 10^{-3}$$

modo 5:

$$C_{5y} = \frac{Z_5^T [M] f_y}{Z_5^T [M] z_5} = 5.0133 \times 10^{-3}$$

modo 6:

$$C_{6y} = \frac{Z_6^T [M] f_y}{Z_6^T [M] z_6} = -1.9451 \times 10^{-4}$$

modo 7:

$$C_{7y} = \frac{z_7^T [M] f_y}{z_7^T [M] z_7} = -6.5992 \times 10^{-4}$$

modo 8:

$$C_{8y} = \frac{z_8^T [M] f_y}{z_8^T [M] z_8} = -1.7803 \times 10^{-4}$$

modo 9:

$$C_{9y} = \frac{z_9^T [M] f_y}{z_9^T [M] z_9} = 6.3188 \times 10^{-5}$$

alrededor del eje z:

$$f_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

modo 1:

$$C_{1\theta} = \frac{z_1^T [M] f_\theta}{z_1^T [M] z_1} = -0.0481$$

modo 2:

$$C_{2\theta} = \frac{z_2^T [M] f_\theta}{z_2^T [M] z_2} = 4.0534 \times 10^{-3}$$

modo 3:

$$C_{3\theta} = \frac{z_3^T [M] f_\theta}{z_3^T [M] z_3} = 0.2371$$

modo 4:

$$C_{4\theta} = \frac{Z_4^T [M] f_{\theta}}{Z_4^T [M] z_4} = -0.3013$$

modo 5:

$$C_{5\theta} = \frac{Z_5^T [M] f_{\theta}}{Z_5^T [M] z_5} = -6.2022 \times 10^{-3}$$

modo 6:

$$C_{6\theta} = \frac{Z_6^T [M] f_{\theta}}{Z_6^T [M] z_6} = 6.9696 \times 10^{-2}$$

modo 7:

$$C_{7\theta} = \frac{Z_7^T [M] f_{\theta}}{Z_7^T [M] z_7} = 6.1300 \times 10^{-2}$$

modo 8:

$$C_{8\theta} = \frac{Z_8^T [M] f_{\theta}}{Z_8^T [M] z_8} = -2.6251 \times 10^{-4}$$

modo 9:

$$C_{9\theta} = \frac{Z_9^T [M] f_{\theta}}{Z_9^T [M] z_9} = -5.8491 \times 10^{-3}$$

V.0 Aceleración para cada Modo en cada Dirección

Para poder aplicar la ecuación 3.38 resta por determinar las aceleraciones en cada dirección y para cada modo de acuerdo a los espectros que para tal fin se proponen en el Reglamento de Construcciones del D.F. 1987. Dado que el inmueble es para uso residencial entonces se clasifica dentro del grupo B y como la resistencia ante cargas laterales es suministrada básicamente por marcos de concreto en ambas direcciones entonces se podrá adoptar un factor de comportamiento sísmico $Q_x=2$ y $Q_y=2$. Además se trata de una estructura regular desplantada en terreno tipo III. con estos datos y conociendo los periodos de cada modo se tiene:

A_{jd} ← aceleración modo j, dirección d
 $A = (\text{ordenada espectral}) / Q' \times 9.81$ ← aceleración de la gravedad
 ↑ factor de comportamiento sísmico reducido
 cuando el sismo actúa en la dirección d

$$A_{1x} = A_{1y} = (0.257/1.523) \times 9.81 = 1.655 \text{ m/seg}^2 \quad A_{1\theta} = 0$$

$$A_{2x} = A_{2y} = (0.224/1.413) \times 9.81 = 1.555 \text{ m/seg}^2 \quad A_{2\theta} = 0$$

$$A_{3x} = A_{3y} = (0.188/1.293) \times 9.81 = 1.426 \text{ m/seg}^2 \quad A_{3\theta} = 0$$

$$A_{4x} = A_{4y} = (0.152/1.174) \times 9.81 = 1.270 \text{ m/seg}^2 \quad A_{4\theta} = 0$$

$$A_{5x} = A_{5y} = (0.140/1.134) \times 9.81 = 1.211 \text{ m/seg}^2 \quad A_{5\theta} = 0$$

$$A_{6x} = A_{6y} = (0.132/1.106) \times 9.81 = 1.171 \text{ m/seg}^2 \quad A_{6\theta} = 0$$

$$A_{7x} = A_{7y} = (0.130/1.10) \times 9.81 = 1.159 \text{ m/seg}^2 \quad A_{7\theta} = 0$$

$$A_{8x} = A_{8y} = (0.124/1.081) \times 9.81 = 1.125 \text{ m/seg}^2 \quad A_{8\theta} = 0$$

$$A_{9x} = A_{9y} = (0.118/1.061) \times 9.81 = 1.091 \text{ m/seg}^2 \quad A_{9\theta} = 0$$

aplicando la ecuación 3.38 obtenemos los desplazamientos totales en cada modo y para cada dirección:

V.10. Desplazamientos Totales (en metros)

$$U_{jid_{\max}} = A_{jd} C_{jd} z_{ij} / \omega_j^2$$

modo 1
 cuando se imprime aceleración en la dirección x
 $\text{dest}(i , 1x , x) = 1.8329E-03$
 ↑ desplazamiento del nivel i en la dirección x

dest(1 , 1y , x)= 1.1231E-05
dest(1 , 1θ , x)=-1.7487E-05
dest(1 , 2x , x)= 3.9716E-03
dest(1 , 2y , x)= 2.3960E-05
dest(1 , 2θ , x)=-4.0797E-05
dest(1 , 3x , x)= 5.3098E-03
dest(1 , 3y , x)= 7.2951E-05
dest(1 , 3θ , x)=-5.1887E-05
dest(2 , 1x , x)= 4.1278E-07
dest(2 , 1y , x)=-1.7391E-05
dest(2 , 1θ , x)= 5.6207E-07
dest(2 , 2x , x)= 8.3894E-07
dest(2 , 2y , x)=-3.6099E-05
dest(2 , 2θ , x)= 1.2845E-06
dest(2 , 3x , x)= 2.4238E-07
dest(2 , 3y , x)=-4.8679E-05
dest(2 , 3θ , x)= 1.6564E-06
dest(3 , 1x , x)= 4.6811E-06
dest(3 , 1y , x)= 8.2673E-06
dest(3 , 1θ , x)= 8.4227E-06
dest(3 , 2x , x)= 7.8527E-06
dest(3 , 2y , x)= 1.5453E-05
dest(3 , 2θ , x)= 1.8296E-05
dest(3 , 3x , x)=-4.7639E-06
dest(3 , 3y , x)=-1.1612E-06
dest(3 , 3θ , x)= 2.4618E-05
dest(4 , 1x , x)= 1.2485E-04
dest(4 , 1y , x)=-2.0118E-06
dest(4 , 1θ , x)=-1.6005E-06
dest(4 , 2x , x)= 7.9492E-05
dest(4 , 2y , x)=-2.3479E-06
dest(4 , 2θ , x)=-2.7342E-06
dest(4 , 3x , x)=-1.3255E-04
dest(4 , 3y , x)= 2.6468E-06
dest(4 , 3θ , x)=-4.6353E-06

dest(5 , 1x , x)= 1.0756E-08
dest(5 , 1y , x)= 7.3138E-07
dest(5 , 1θ , x)=-1.3300E-08
dest(5 , 2x , x)=-1.3800E-09
dest(5 , 2y , x)= 4.3363E-07
dest(5 , 2θ , x)=-1.6915E-08
dest(5 , 3x , x)=-4.3016E-09
dest(5 , 3y , x)=-7.7257E-07
dest(5 , 3θ , x)=-4.3815E-08
dest(6 , 1x , x)= 2.4455E-05
dest(6 , 1y , x)=-1.5746E-08
dest(6 , 1θ , x)=-1.3929E-07
dest(6 , 2x , x)=-2.3201E-05
dest(6 , 2y , x)=-1.2605E-08
dest(6 , 2θ , x)=-1.4408E-07
dest(6 , 3x , x)= 1.1499E-05
dest(6 , 3y , x)= 2.3693E-08
dest(6 , 3θ , x)= 7.7334E-07
dest(7 , 1x , x)= 4.9340E-08
dest(7 , 1y , x)=-5.4550E-08
dest(7 , 1θ , x)= 2.7255E-07
dest(7 , 2x , x)=-5.4496E-08
dest(7 , 2y , x)= 1.8630E-08
dest(7 , 2θ , x)= 1.8661E-07
dest(7 , 3x , x)= 3.1567E-08
dest(7 , 3y , x)= 1.0228E-08
dest(7 , 3θ , x)=-3.2290E-07
dest(8 , 1x , x)= 9.1832E-12
dest(8 , 1y , x)=-9.5019E-09
dest(8 , 1θ , x)=-3.7671E-10
dest(8 , 2x , x)=-1.3676E-11
dest(8 , 2y , x)= 9.3181E-09
dest(8 , 2θ , x)= 1.3986E-11
dest(8 , 3x , x)= 9.4890E-12
dest(8 , 3y , x)=-4.6366E-09

dest(5 , 1x , x)= 1.0756E-08
dest(5 , 1y , x)= 7.3138E-07
dest(5 , 1θ , x)=-1.3300E-08
dest(5 , 2x , x)=-1.3800E-09
dest(5 , 2y , x)= 4.3363E-07
dest(5 , 2θ , x)=-1.6915E-08
dest(5 , 3x , x)=-4.3016E-09
dest(5 , 3y , x)=-7.7257E-07
dest(5 , 3θ , x)=-4.3815E-08
dest(6 , 1x , x)= 2.4455E-05
dest(6 , 1y , x)=-1.5746E-08
dest(6 , 1θ , x)=-1.3929E-07
dest(6 , 2x , x)=-2.3201E-05
dest(6 , 2y , x)=-1.2605E-08
dest(6 , 2θ , x)=-1.4408E-07
dest(6 , 3x , x)= 1.1499E-05
dest(6 , 3y , x)= 2.3693E-08
dest(6 , 3θ , x)= 7.7334E-07
dest(7 , 1x , x)= 4.9340E-08
dest(7 , 1y , x)=-5.4550E-08
dest(7 , 1θ , x)= 2.7255E-07
dest(7 , 2x , x)=-5.4496E-08
dest(7 , 2y , x)= 1.8630E-08
dest(7 , 2θ , x)= 1.8661E-07
dest(7 , 3x , x)= 3.1567E-08
dest(7 , 3y , x)= 1.0228E-08
dest(7 , 3θ , x)=-3.2290E-07
dest(8 , 1x , x)= 9.1832E-12
dest(8 , 1y , x)=-9.5019E-09
dest(8 , 1θ , x)=-3.7671E-10
dest(8 , 2x , x)=-1.3676E-11
dest(8 , 2y , x)= 9.3181E-09
dest(8 , 2θ , x)= 1.3986E-11
dest(8 , 3x , x)= 9.4890E-12
dest(8 , 3y , x)=-4.6366E-09

dest(8 , 30 , x)=-1.8324E-10
dest(9 , 1x , x)= 3.2909E-10
dest(9 , 1y , x)= 1.9513E-09
dest(9 , 10 , x)=-1.1648E-08
dest(9 , 2x , x)=-7.5961E-10
dest(9 , 2y , x)=-3.3684E-09
dest(9 , 20 , x)= 1.0592E-08
dest(9 , 3x , x)= 6.5819E-10
dest(9 , 3y , x)= 2.5726E-09
dest(9 , 30 , x)=-5.2326E-09
dest(1 , 1x , y)= 1.6966E-05
dest(1 , 1y , y)= 1.0396E-07
dest(1 , 10 , y)=-1.6187E-07
dest(1 , 2x , y)= 3.6762E-05
dest(1 , 2y , y)= 2.2178E-07
dest(1 , 20 , y)=-3.7763E-07
dest(1 , 3x , y)= 4.9149E-05
dest(1 , 3y , y)= 6.7526E-07
dest(1 , 30 , y)=-4.8028E-07
dest(2 , 1x , y)=-2.6192E-05
dest(2 , 1y , y)= 1.1035E-03
dest(2 , 10 , y)=-3.5664E-05
dest(2 , 2x , y)=-5.3232E-05
dest(2 , 2y , y)= 2.2905E-03
dest(2 , 20 , y)=-8.1504E-05
dest(2 , 3x , y)=-1.5379E-05
dest(2 , 3y , y)=3.0888E-03
dest(2 , 30 , y)=-1.0510E-04
dest(3 , 1x , y)= 1.2104E-05
dest(3 , 1y , y)= 2.1377E-05
dest(3 , 10 , y)= 2.1779E-05
dest(3 , 2x , y)= 2.0305E-05
dest(3 , 2y , y)= 3.9960E-05
dest(3 , 20 , y)= 4.7312E-05
dest(3 , 3x , y)=-1.2318E-05

dest(3 , 3y , y)=-3.0027E-06
dest(3 , 3θ , y)= 6.3659E-05
dest(4 , 1x , y)=-2.8381E-06
dest(4 , 1y , y)= 4.5733E-08
dest(4 , 1θ , y)= 3.6384E-08
dest(4 , 2x , y)=-1.8070E-06
dest(4 , 2y , y)= 5.3373E-08
dest(4 , 2θ , y)= 6.21542E-08
dest(4 , 3x , y)= 3.0132E-06
dest(4 , 3y , y)=-6.0167E-08
dest(4 , 3θ , y)= 1.0537E-07
dest(5 , 1x , y)= 1.0054E-06
dest(5 , 1y , y)= 6.8366E-05
dest(5 , 1θ , y)=-1.2432E-06
dest(5 , 2x , y)=-1.2900E-07
dest(5 , 2y , y)= 4.0533E-05
dest(5 , 2θ , y)=-1.5811E-06
dest(5 , 3x , y)=-4.0209E-07
dest(5 , 3y , y)=-7.2216E-05
dest(5 , 3θ , y)=-4.0956E-06
dest(6 , 1x , y)=-2.3712E-08
dest(6 , 1y , y)= 1.5267E-11
dest(6 , 1θ , y)= 1.3506E-10
dest(6 , 2x , y)= 2.2495E-08
dest(6 , 2y , y)= 1.2222E-11
dest(6 , 2θ , y)= 1.3970E-10
dest(6 , 3x , y)=-1.1149E-08
dest(6 , 3y , y)=-2.2972E-11
dest(6 , 3θ , y)=-7.4982E-10
dest(7 , 1x , y)=-7.0989E-08
dest(7 , 1y , y)= 7.8486E-08
dest(7 , 1θ , y)=-3.9214E-07
dest(7 , 2x , y)= 7.8408E-08
dest(7 , 2y , y)=-2.6805E-08
dest(7 , 2θ , y)=-2.6850E-07

```

dest( 7 , 3x , y )=-4.5419E-08
dest( 7 , 3y , y )=-1.4716E-08
dest( 7 , 3θ , y )= 4.6458E-07
dest( 8 , 1x , y )=-1.2030E-08
dest( 8 , 1y , y )= 1.2447E-05
dest( 8 , 1θ , y )= 4.9351E-07
dest( 8 , 2x , y )= 1.7917E-08
dest( 8 , 2y , y )=-1.2207E-05
dest( 8 , 2θ , y )=-1.8322E-08
dest( 8 , 3x , y )=-1.2431E-08
dest( 8 , 3y , y )= 6.0741E-06
dest( 8 , 3θ , y )= 2.4005E-07
dest( 9 , 1x , y )= 2.3512E-09
dest( 9 , 1y , y )= 1.3941E-08
dest( 9 , 1θ , y )=-0.3221E-08
dest( 9 , 2x , y )=-5.4271E-09
dest( 9 , 2y , y )=-2.4066E-08
dest( 9 , 2θ , y )= 7.5677E-08
dest( 9 , 3x , y )= 4.7025E-09
dest( 9 , 3y , y )= 1.8380E-08
dest( 9 , 3θ , y )=-3.7385E-08

```

Los desplazamientos totales debidos a la aceleración angular son cero por ser esta nula.

V.11 Desplazamientos Relativos

El desplazamiento relativo por nivel y en cada dirección se obtiene restando el desplazamiento total del nivel inferior al desplazamiento total del nivel que se trate.

```

desr( 1 , 1x , x )= 1.8329E-03
desr( 1 , 1y , x )= 1.1231E-05
desr( 1 , 1θ , x )=-1.7487E-05
desr( 1 , 2x , x )= 2.1386E-03

```

desr(1 , 2y , x)= 1.2728E-05
desr(1 , 2θ , x)=-2.3310E-05
desr(1 , 3x , x)= 1.3382E-03
desr(1 , 3y , x)= 4.8991E-05
desr(1 , 3θ , x)=-1.1089E-05
desr(2 , 1x , x)= 4.1278E-07
desr(2 , 1y , x)=-1.7391E-05
desr(2 , 1θ , x)= 5.6207E-07
desr(2 , 2x , x)= 4.2616E-07
desr(2 , 2y , x)=-1.8708E-05
desr(2 , 2θ , x)= 7.2243E-07
desr(2 , 3x , x)=-5.9655E-07
desr(2 , 3y , x)=-1.2579E-05
desr(2 , 3θ , x)= 3.7192E-07
desr(3 , 1x , x)= 4.6811E-06
desr(3 , 1y , x)= 8.2673E-06
desr(3 , 1θ , x)= 8.4227E-06
desr(3 , 2x , x)= 3.1715E-06
desr(3 , 2y , x)= 7.1863E-06
desr(3 , 2θ , x)= 9.8738E-06
desr(3 , 3x , x)=-1.2616E-05
desr(3 , 3y , x)=-1.6614E-05
desr(3 , 3θ , x)= 6.3218E-06
desr(4 , 1x , x)= 1.2485E-04
desr(4 , 1y , x)=-2.0118E-06
desr(4 , 1θ , x)=-1.6005E-06
desr(4 , 2x , x)=-4.5358E-05
desr(4 , 2y , x)=-3.3609E-07
desr(4 , 2θ , x)=-1.1336E-06
desr(4 , 3x , x)=-2.1204E-04
desr(4 , 3y , x)= 4.9947E-06
desr(4 , 3θ , x)=-1.9011E-06
desr(5 , 1x , x)= 1.0756E-08

desr(5 , 1y , x)= 7.3130E-07
desr(5 , 1θ , x)=-1.3300E-08
desr(5 , 2x , x)=-1.2136E-08
desr(5 , 2y , x)=-2.9775E-07
desr(5 , 2θ , x)=-3.6142E-09
desr(5 , 3x , x)=-2.9215E-09
desr(5 , 3y , x)=-1.2062E-06
desr(5 , 3θ , x)=-2.6900E-08
desr(6 , 1x , x)= 2.4455E-05
desr(6 , 1y , x)=-1.5746E-08
desr(6 , 1θ , x)=-1.3929E-07
desr(6 , 2x , x)=-4.7656E-05
desr(6 , 2y , x)= 3.1408E-09
desr(6 , 2θ , x)=-4.7860E-09
desr(6 , 3x , x)= 3.4700E-05
desr(6 , 3y , x)= 3.6298E-08
desr(6 , 3θ , x)= 9.1742E-07
desr(7 , 1x , x)= 4.9340E-08
desr(7 , 1y , x)=-5.4550E-08
desr(7 , 1θ , x)= 2.7255E-07
desr(7 , 2x , x)=-1.0383E-07
desr(7 , 2y , x)= 7.3181E-08
desr(7 , 2θ , x)=-8.5930E-08
desr(7 , 3x , x)= 8.6064E-08
desr(7 , 3y , x)=-8.4026E-09
desr(7 , 3θ , x)=-5.0952E-07
desr(8 , 1x , x)= 9.1832E-12
desr(8 , 1y , x)=-9.5019E-09
desr(8 , 1θ , x)=-3.7671E-10
desr(8 , 2x , x)=-2.2859E-11
desr(8 , 2y , x)= 1.8820E-08
desr(8 , 2θ , x)= 3.9070E-10
desr(8 , 3x , x)= 2.3165E-11
desr(8 , 3y , x)=-1.3954E-08

desr(0 , 30 , x)=-1.9722E-10
desr(9 , 1x , x)= 3.2909E-10
desr(9 , 1y , x)= 1.5513E-09
desr(9 , 10 , x)=-1.1648E-08
desr(9 , 2x , x)=-1.0887E-09
desr(9 , 2y , x)=-5.3197E-09
desr(9 , 20 , x)= 2.2240E-08
desr(9 , 3x , x)= 1.4178E-09
desr(9 , 3y , x)= 5.9410E-09
desr(9 , 30 , x)=-1.5824E-08
desr(1 , 1x , y)= 1.6966E-05
desr(1 , 1y , y)= 1.0396E-07
desr(1 , 10 , y)=-1.6187E-07
desr(1 , 2x , y)= 1.9796E-05
desr(1 , 2y , y)= 1.1781E-07
desr(1 , 20 , y)=-2.1576E-07
desr(1 , 3x , y)= 1.2387E-05
desr(1 , 3y , y)= 4.5347E-07
desr(1 , 30 , y)=-1.0264E-07
desr(2 , 1x , y)=-2.6192E-05
desr(2 , 1y , y)= 1.1035E-03
desr(2 , 10 , y)=-3.5664E-05
desr(2 , 2x , y)=-2.7040E-05
desr(2 , 2y , y)= 1.1870E-03
desr(2 , 20 , y)=-4.5840E-05
desr(2 , 3x , y)= 3.7852E-05
desr(2 , 3y , y)= 7.9820E-04
desr(2 , 30 , y)=-2.3599E-05
desr(3 , 1x , y)= 1.2104E-05
desr(3 , 1y , y)= 2.1377E-05
desr(3 , 10 , y)= 2.1779E-05
desr(3 , 2x , y)= 8.2012E-06
desr(3 , 2y , y)= 1.8582E-05
desr(3 , 20 , y)= 2.5532E-05

desr(3 , 3x , y)=-3.2624E-05
desr(3 , 3y , y)=-4.2963E-05
desr(3 , 3θ , y)= 1.6347E-05
desr(4 , 1x , y)=-2.8381E-06
desr(4 , 1y , y)= 4.5733E-08
desr(4 , 1θ , y)= 3.6384E-08
desr(4 , 2x , y)= 1.0310E-06
desr(4 , 2y , y)= 7.6401E-09
desr(4 , 2θ , y)= 2.5770E-08
desr(4 , 3x , y)= 4.8202E-06
desr(4 , 3y , y)=-1.1354E-07
desr(4 , 3θ , y)= 4.3215E-08
desr(5 , 1x , y)= 1.0054E-06
desr(5 , 1y , y)= 6.8366E-05
desr(5 , 1θ , y)=-1.2432E-06
desr(5 , 2x , y)=-1.1344E-06
desr(5 , 2y , y)=-2.7832E-05
desr(5 , 2θ , y)=-3.3784E-07
desr(5 , 3x , y)=-2.7309E-07
desr(5 , 3y , y)=-1.1275E-04
desr(5 , 3θ , y)=-2.5145E-06
desr(6 , 1x , y)=-2.3712E-08
desr(6 , 1y , y)= 1.5267E-11
desr(6 , 1θ , y)= 1.3506E-10
desr(6 , 2x , y)= 4.6208E-08
desr(6 , 2y , y)=-3.0453E-12
desr(6 , 2θ , y)= 4.6404E-12
desr(6 , 3x , y)=-3.3645E-08
desr(6 , 3y , y)=-3.5195E-11
desr(6 , 3θ , y)=-8.8953E-10
desr(7 , 1x , y)=-7.0989E-08
desr(7 , 1y , y)= 7.8486E-08
desr(7 , 1θ , y)=-3.9214E-07
desr(7 , 2x , y)= 1.4939E-07

```

desr( 7 , 2y , y )=-1.0529E-07
desr( 7 , 2θ , y )= 1.2363E-07
desr( 7 , 3x , y )=-1.2382E-07
desr( 7 , 3y , y )= 1.2089E-08
desr( 7 , 3θ , y )= 7.3309E-07
desr( 8 , 1x , y )=-1.2030E-08
desr( 8 , 1y , y )= 1.2447E-05
desr( 8 , 1θ , y )= 4.9351E-07
desr( 8 , 2x , y )= 2.9947E-08
desr( 8 , 2y , y )=-2.4655E-05
desr( 8 , 2θ , y )=-5.1183E-07
desr( 8 , 3x , y )=-3.0348E-08
desr( 8 , 3y , y )= 1.8281E-05
desr( 8 , 3θ , y )= 2.5837E-07
desr( 9 , 1x , y )= 2.3512E-09
desr( 9 , 1y , y )= 1.3941E-08
desr( 9 , 1θ , y )=-8.3221E-08
desr( 9 , 2x , y )=-7.7784E-09
desr( 9 , 2y , y )=-3.8007E-08
desr( 9 , 2θ , y )= 1.5889E-07
desr( 9 , 3x , y )= 1.0129E-08
desr( 9 , 3y , y )= 4.2446E-08
desr( 9 , 3θ , y )=-1.1306E-07

```

Como los desplazamientos totales son cero cuando actúa la aceleración angular, entonces los desplazamientos relativos también son cero.

V.12 Cortantes y Momentos por Modo y Dirección(ton. y ton.- m)

Los cortantes y momentos se obtienen multiplicando la matriz de rigideces por los desplazamientos relativos por cada modo y por dirección:

$$\{fuerzas\} = [K] \{desr\}$$

fuer(1 , 1x , x)= 11.2912
fuer(1 , 1y , x)= 0.1565
fuer(1 , 1θ , x)=-2.6410
fuer(1 , 2x , x)= 3.4416
fuer(1 , 2y , x)=-0.1773
fuer(1 , 2θ , x)=-3.9828
fuer(1 , 3x , x)=-3.4921
fuer(1 , 3y , x)=0.13527
fuer(1 , 3θ , x)= 1.4203
fuer(2 , 1x , x)= 2.3851E-03
fuer(2 , 1y , x)=-0.1894
fuer(2 , 1θ , x)= 9.6269E-02
fuer(2 , 2x , x)= 3.0437E-03
fuer(2 , 2y , x)=-2.9165E-02
fuer(2 , 2θ , x)= 0.1008
fuer(2 , 3x , x)=-2.8809E-03
fuer(2 , 3y , x)= 4.7228E-02
fuer(2 , 3θ , x)=-4.1830E-02
fuer(3 , 1x , x)= 3.4032E-02
fuer(3 , 1y , x)= 8.4474E-02
fuer(3 , 1θ , x)= 1.8879
fuer(3 , 2x , x)= 4.2066E-02
fuer(3 , 2y , x)= 0.1131
fuer(3 , 2θ , x)= 0.3346
fuer(3 , 3x , x)=-4.5494E-02
fuer(3 , 3y , x)=-0.1154
fuer(3 , 3θ , x)=-0.5076
fuer(4 , 1x , x)=1.8916
fuer(4 , 1y , x)=-3.5193E-02
fuer(4 , 1θ , x)=-0.5327
fuer(4 , 2x , x)=-0.3584
fuer(4 , 2y , x)=-1.7173E-02
fuer(4 , 2θ , x)= 9.1343E-02
fuer(4 , 3x , x)=-0.5306
fuer(4 , 3y , x)= 2.9225E-02

fuer(4 , 30 , x)=-0.1835
fuer(5 , 1x , x)= 2.4302E-04
fuer(5 , 1y , x)= 1.9194E-02
fuer(5 , 10 , x)=-6.0352E-03
fuer(5 , 2x , x)=-1.9349E-04
fuer(5 , 2y , x)=-4.7801E-03
fuer(5 , 20 , x)= 3.0611E-03
fuer(5 , 3x , x)= 5.1376E-05
fuer(5 , 3y , x)=-4.7585E-03
fuer(5 , 30 , x)=-4.4328E-03
fuer(6 , 1x , x)= 0.7503
fuer(6 , 1y , x)=-2.0565E-04
fuer(6 , 10 , x)=-9.7785E-02
fuer(6 , 2x , x)=-0.9104
fuer(6 , 2y , x)=-1.4155E-03
fuer(6 , 20 , x)= 0.1139
fuer(6 , 3x , x)= 0.4238
fuer(6 , 3y , x)= 1.4069E-03
fuer(6 , 30 , x)= 0.1534
fuer(7 , 1x , x)= 1.4475E-03
fuer(7 , 1y , x)=-2.7627E-03
fuer(7 , 10 , x)= 0.1425
fuer(7 , 2x , x)=-1.3446E-03
fuer(7 , 2y , x)= 4.2280E-03
fuer(7 , 20 , x)=-2.2175E-02
fuer(7 , 3x , x)= 4.2648E-04
fuer(7 , 3y , x)=-2.3935E-03
fuer(7 , 30 , x)=-4.4923E-02
fuer(8 , 1x , x)= 7.2147E-07
fuer(8 , 1y , x)=-5.0994E-04
fuer(8 , 10 , x)=-2.2724E-04
fuer(8 , 2x , x)=-1.7590E-06
fuer(8 , 2y , x)= 6.2872E-04
fuer(8 , 20 , x)= 1.3877E-05

fuer(8 , 3x , x)= 1.2089E-06
fuer(8 , 3y , x)=-2.9162E-04
fuer(8 , 3θ , x)=-1.4187E-04
fuer(9 , 1x , x)= 3.4198E-05
fuer(9 , 1y , x)= 1.9113E-04
fuer(9 , 1θ , x)=-0.01239
fuer(9 , 2x , x)=-8.7416E-05
fuer(9 , 2y , x)=-3.8210E-04
fuer(9 , 2θ , x)= 1.4360E-02
fuer(9 , 3x , x)= 6.0832E-05
fuer(9 , 3y , x)= 2.4096E-04
fuer(9 , 3θ , x)=-6.1875E-03
fuer(1 , 1x , y)= 0.1045
fuer(1 , 1y , y)= 1.4492E-03
fuer(1 , 1θ , y)=-2.4446E-02
fuer(1 , 2x , y)= 3.1857E-02
fuer(1 , 2y , y)=-1.6416E-03
fuer(1 , 2θ , y)=-3.6866E-02
fuer(1 , 3x , y)=-3.2324E-02
fuer(1 , 3y , y)= 1.2521E-03
fuer(1 , 3θ , y)= 1.3147E-02
fuer(2 , 1x , y)=-0.1513
fuer(2 , 1y , y)= 12.021
fuer(2 , 1θ , y)=-6.1085
fuer(2 , 2x , y)=-0.1931
fuer(2 , 2y , y)= 1.8506
fuer(2 , 2θ , y)=-6.3982
fuer(2 , 3x , y)= 0.1828
fuer(2 , 3y , y)=-2.9967
fuer(2 , 3θ , y)= 2.6542
fuer(3 , 1x , y)= 8.8002E-02
fuer(3 , 1y , y)= 0.2184
fuer(3 , 1θ , y)= 4.8818
fuer(3 , 2x , y)= 0.1087
fuer(3 , 2y , y)= 0.2926

fuer(3 , 20 , y)= 0.8653
fuer(3 , 3x , y)=-0.1176
fuer(3 , 3y , y)=-0.2984
fuer(3 , 30 , y)=-1.3125
fuer(4 , 1x , y)=-4.3001E-02
fuer(4 , 1y , y)= 8.0001E-04
fuer(4 , 10 , y)= 1.2110E-02
fuer(4 , 2x , y)= 8.1493E-03
fuer(4 , 2y , y)= 3.9038E-04
fuer(4 , 20 , y)=-2.0764E-03
fuer(4 , 3x , y)= 1.2061E-02
fuer(4 , 3y , y)=-6.6436E-04
fuer(4 , 30 , y)= 4.1723E-03
fuer(5 , 1x , y)= 2.2716E-02
fuer(5 , 1y , y)= 1.7941
fuer(5 , 10 , y)=-0.5641
fuer(5 , 2x , y)=-1.8086E-02
fuer(5 , 2y , y)=-0.4468
fuer(5 , 20 , y)= 0.2861
fuer(5 , 3x , y)= 4.8024E-03
fuer(5 , 3y , y)=-0.4448
fuer(5 , 30 , y)=-0.4143
fuer(6 , 1x , y)=-7.2748E-04
fuer(6 , 1y , y)= 1.9940E-07
fuer(6 , 10 , y)= 9.4812E-05
fuer(6 , 2x , y)= 8.8280E-04
fuer(6 , 2y , y)= 1.3724E-06
fuer(6 , 20 , y)=-1.1046E-04
fuer(6 , 3x , y)=-4.1096E-04
fuer(6 , 3y , y)=-1.3641E-06
fuer(6 , 30 , y)=-1.4883E-04
fuer(7 , 1x , y)=-2.0827E-03
fuer(7 , 1y , y)= 3.9749E-03
fuer(7 , 10 , y)=-0.2051

fuer(7 , 2x , y)= 0.0019
 fuer(7 , 2y , y)=-6.0833E-03
 fuer(7 , 2θ , y)= 3.1906E-02
 fuer(7 , 3x , y)=-6.1362E-04
 fuer(7 , 3y , y)= 3.4437E-03
 fuer(7 , 3θ , y)= 6.4634E-02
 fuer(8 , 1x , y)=-9.4516E-04
 fuer(8 , 1y , y)= 0.6680
 fuer(8 , 1θ , y)= 0.2977
 fuer(8 , 2x , y)= 2.3044E-03
 fuer(8 , 2y , y)=-0.8236
 fuer(8 , 2θ , y)=-1.8180E-02
 fuer(8 , 3x , y)=-1.5838E-03
 fuer(8 , 3y , y)= 0.3820
 fuer(8 , 3θ , y)= 0.1858
 fuer(9 , 1x , y)= 2.4433E-04
 fuer(9 , 1y , y)= 1.3655E-03
 fuer(9 , 1θ , y)=-8.8524E-02
 fuer(9 , 2x , y)=-6.2455E-04
 fuer(9 , 2y , y)=-2.7300E-03
 fuer(9 , 2θ , y)= 0.1026
 fuer(9 , 3x , y)= 4.3462E-04
 fuer(9 , 3y , y)= 1.7216E-03
 fuer(9 , 3θ , y)=-0.0442

Como los desplazamientos relativos son nulos cuando se aplica aceleración angular a la estructura, entonces las fuerzas son nulas también.

V.13 Desplazamientos y Giros (metros y rad.)

Dado que los periodos difieren en más de 10% es aplicable la ecuación 3.39 para combinar las respuestas máximas

$$R_i = \left(\sum_{j=1}^N R_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

desplazamiento del nivel 1 en la dirección x
U(1x)= 1.8376E-03

desplazamiento del nivel 1 en la dirección y
U(1y)= 1.1061E-03

giro del nivel 1
U(1θ)= 4.6130E-05
U(2x)= 2.1399E-03
U(2y)= 1.1880E-03
U(2θ)= 5.8278E-05
U(3x)= 1.3564E-03
U(3y)= 8.0925E-04
U(3θ)= 3.1605E-05

V.14 Fuerzas y Momentos (Ton. y Ton.-metro)

Se aplica el mismo criterio que para obtener desplazamientos.

F(1x)= 11.4751
F(1y)= 12.1776
F(1θ)= 8.5126
F(2x)= 3.5853
F(2y)= 2.1056
F(2θ)= 7.6018
F(3x)= 3.5646
F(3y)= 3.0737
F(3θ)= 3.3640

V.15 Conclusiones.

Dada la necesidad de mantener con un grado de seguridad razonable los edificios ante la acción de un sismo , es indispensable realizar un estudio completo acerca del fenómeno y los efectos que tiene sobre las estructuras. No se trata de construir verdaderas fortalezas contra la acción sísmica que lógicamente resultarían poco económicas, sino más bien debemos poner en la balanza, por un lado el costo que tendría si la estructura sufriera un colapso y por el otro lado cuánto costaría construir un edificio diseñado para resistir cualquier sismo a presentarse durante su vida de servicio; es decir, debemos lograr un equilibrio entre ambas situaciones. Es aquí en donde el ingeniero estructurista debe aplicar su experiencia y buen criterio pues ningún lado de la balanza se puede calcular con exactitud porque, si bien, el costo del inmueble, mobiliario y equipo que allí se alojen se puede determinar fácilmente, cómo evaluaríamos cuantitativamente la pérdida de vidas ?. Por otra parte el problema de predecir en qué momento va a ocurrir un sismo, así como su magnitud aún no está resuelto en vista de que depende de varios factores como lo son la causa que originó el sismo, la distancia existente entre el foco y el lugar de registro del movimiento, las propiedades del subsuelo; por lo cual no se sabe a ciencia cierta a qué solicitaciones va a estar sometida la construcción, en consecuencia, cuales serán sus dimensiones, geometría y propiedades estructurales de sus elementos para que no ocurra la falla.

La mecánica y particularmente la teoría de vibraciones nos aportan valiosa información para ser considerada en el diseño de las estructuras como lo es, el hecho de no ser recomendable que los periodos de vibración del movimiento telúrico y el edificio sean iguales pues se presentaría el fenómeno de resonancia como ocurrió en algunos edificios de la Ciudad de México los cuales sufrieron colapso en 1985, debido a que el subsuelo tiene periodos largos de vibración, particularmente en la zona III (zona blanda). Por esta razón la

ordenada máxima en el espectro de aceleraciones del reglamento aparece para periodos largos de vibración, en tanto que en zona I (terreno firme) la ordenada máxima del espectro de aceleraciones se establece para periodos cortos. El amortiguamiento adquiere gran importancia pues reduce considerablemente el efecto del sismo en el inmueble.

Una de las principales consideraciones en el análisis dinámico modal espectral es que el sistema estructural tiene comportamiento elástico lineal; sin embargo durante un sismo muchas estructuras rebasan su límite elástico sin que estas sufran un colapso; esto se debe a la disipación de energía del amortiguamiento histerético del edificio; por este hecho se justifica hacer una reducción de fuerzas sísmicas cuando se analiza un edificio con el fin de que al ocurrir un evento, la estructura entre en el rango de deformaciones inelásticas y se aproveche la ductilidad de sus elementos. La ductilidad de un edificio depende de su estructuración, de un buen diseño y construcción de las uniones entre los diferentes elementos estructurales del inmueble; por eso reviste gran importancia para el ingeniero poner especial atención en estos aspectos.

El tipo de análisis a emplear para revisar un edificio depende del grado de precisión que se quiera obtener . Cuando una estructura tiene propiedades (geometría, características de los materiales, ubicación, destino, etc.) poco comunes es recomendable usar métodos refinados de análisis . En cambio, cuando se va a revisar un edificio de propiedades similares a otros ya existentes, pueden emplearse los métodos comunes de análisis; como regla, el hecho de usar un método más elaborado requiere del uso de mayores recursos (conocimientos, tiempo, dinero, equipo) que si se emplea otro menos elaborado. El análisis sísmico dinámico modal espectral con tres grados de libertad por nivel (en tres dimensiones) es un claro ejemplo, pues comparado con el análisis dinámico con un grado de libertad por nivel (en el plano), es más complicado y laborioso. El análisis en tres

dimensiones tiene la ventaja de que el momento torsionante en planta para cada nivel se obtiene directamente del mismo; sin embargo, se tiene el inconveniente de no contar con espectros de aceleraciones angulares y por consecuencia, éstos y otros factores no se encuentran incluidos en el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

Podemos decir entonces, a manera de conclusión, para que una estructura resista en forma adecuada las sollicitaciones a las cuales estará sujeta durante su vida de servicio es tan, o más importante, su estructuración, materiales y buena construcción que el análisis mismo, pues éste último, independientemente del método a emplearse, es un procedimiento bien definido, cuidando claro, que éste se siga de acuerdo a las consideraciones hechas al desarrollar el método en cuestión.

BIBLIOGRAFIA

- BAZAN, Enrique; MELI, Roberto. *Manual de diseño sísmico de edificios*.
Editorial Limusa. 1985.
- CLOUGH, Ray W; PENZIEN, Joseph. *Dynamics of structures*.
Editorial Mc. Graw Hill. 1973.
- DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL. " *Reglamento de construcciones para el Distrito Federal* ". Gaceta oficial del departamento del D.F.
México. No. 129. (10 de abril de 1989). Pag. 2.
- GHALI, A.; NEVILLE, A. *Análisis estructural*.
Editorial Diana. 1983.
- JOYANES, Luis. *Programación básica para microcomputadoras*.
Editorial Mc. Graw Hill. 1986.
- LEET, L. Don; JUDSON, Sheldon. *Fundamentos de geología física*.
Editorial Limusa. 1986.
- NEWMARK, N.M.; ROSENBLUETH, E. *Fundamentos de Ingeniería sísmica*.
Editorial Diana. 1976.
- STEIDEL, Robert F. *Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas*.
Editorial CECSA. 1981.
- WAKABAYASHI, Minoru. *Diseño de estructuras sismorresistentes*.
Editorial Mc. Graw Hill. 1988.
- ZILL, Dennis G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*.
Grupo editorial Iberoamérica. 1986.