



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

9
Zej

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TENSOR DE BEL-ROBINSON PARA ONDAS GRAVITACIONALES CON ROTACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A

ENRIQUE CHAVEZ CARRASCO

DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



MEXICO, D. F.

1996.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION FISICA

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"EL TENSOR DE BEL-ROBINSON PARA ONDAS GRAVITACIONALES CON ROTACION"

realizado por CHAVEZ CARRASCO ENRIQUE

con número de cuenta 8222476-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Propietario

DR. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKY

Propietario

DRA. GABRIELLA PICCINELLI BOCCHI

Suplente

DR. ALFREDO MACIAS ALVAREZ

Suplente

DR. HUGO MORALES TECOTL

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

**EL TENSOR DE BEL-ROBINSON PARA ONDAS
GRAVITACIONALES CON ROTACION**

TESIS

Para obtener el Título de

FISICO

Presenta:

Enrique Chávez Carrasco

Director

Dr. Hernando Quevedo Cubillos

1996

*Mundos infinitos aparecen y desaparecen en la
vasta extensión de mi propia conciencia, como
partículas de polvo que danzan en un rayo de luz.*

- Antiguo refrán védico.

A mis padres

A Norma.

*Que inunda mi mundo con
su ternura y alegría.*

*A los hombres que luchan y se esfuerzan,
día con día, honestamente, sinceramente,
pese a todo, en hacer un mundo mejor,
tanto para ellos -guerreros soñadores-,
como para los demás.*

Agradecimientos.

Quiero agradecer especialmente al **Dr. Hernando Quevedo** por haberme guiado de una manera sencilla, directa y entusiasta a través del tema desarrollado. Por haberme devuelto el gozo por la física e introducirme en el apasionante tema de la geometrodinámica. Además por mostrarme con su trato sencillo, amable y generoso que un investigador de primer nivel debe ser también una excelente persona.

Agradezco a mis sinodales **Dra. Gabriella Piccinelli**, **Dr. Hugo Morales**, **Dr. Alfredo Macías**, y **Dr. Roberto Allan Sussman**, así como al **Dr. Dario Nuñez** las sugerencias y los comentarios que hicieron a este trabajo durante su revisión.

Agradezco a mis compañeros **Román Linares** y **Antonio Santiago** por tomarse la molestia de leer algunas partes de la tesis, por las sugerencias que me hicieron para mejorarla y por toda la ayuda que me brindaron a lo largo de estos meses de trabajo. A **Enrique Cruz** por su valiosa asesoría en la utilización de los servicios de computo. A **Jesús Flores**, **Juan L. Martínez**, **Adolfo Zamora**, **Gerardo Cedillo** y **Julio Félix** por compartir este tiempo de trabajo y hacerlo más ameno.

Agradezco también a **Miguel de Icaza** y **Antonio Ramírez** por tener un buen servicio de computo en el Instituto así como por el apoyo que me brindaron en estas cuestiones.

He querido dejar para el final, y así concluir de manera especial, los agradecimientos para mi familia que aunque no están directamente relacionados con el trabajo han sido vitales en la realización de este.

Agradezco a mis padres y a mis hermanos por su gran ayuda durante toda mi vida. A mi cuñado **Jose** por su atinada influencia. Y también por que gracias a ellos soy. Agradezco finalmente a **Norma** simplemente por existir y estar junto a mí.

Contenido

Prefacio.	1
1 Radiación Gravitacional	5
1.1 Introducción	5
1.2 Ecuaciones de Einstein	6
1.3 Aproximación Lineal	7
1.4 Propagación de Ondas Gravitacionales.	9
1.4.1 Efecto de las Ondas sobre Partículas Libres.	11
1.4.2 Polarización de las Ondas Gravitacionales	13
1.5 Generación de Ondas Gravitacionales	14
1.5.1 Solución Exacta de la Ecuación de Onda	17
1.6 Energía Transportada por Ondas Gravitacionales.	19
1.7 Detección de Ondas Gravitacionales	21
1.7.1 Detector Resonante.	22
1.7.2 Futuros Detectores	26
2 Ondas Gravitacionales con Rotación	35
2.1 Introducción	35

2.2	Ondas de Beck-Einstein-Rosen	36
2.3	Elemento de Línea y Ecuaciones de Campo	37
2.4	Aproximación a Primer Orden	39
2.5	Una Solución Exacta	41
2.6	Acerca del Significado Físico de la Solución	43
2.6.1	Propagación y Rotación.	44
2.6.2	Singularidades.	45
2.6.3	Casos Especiales.	47
3	El tensor de Bel-Robinson	49
3.1	La Energía en Relatividad General	49
3.2	El tensor de Bel-Robinson	50
3.3	Energía-Momento del Campo Gravitacional	53
3.4	Invariantes del Tensor de Curvatura en el Vacío	54
3.5	Sistema de Coordenadas Normales de Fermi	55
3.6	Algunos Conceptos del Electromagnetismo	60
3.7	Construcción del Tensor de Superenergía	64
3.8	Aplicación a una Onda Plana	67
4	Superenergía para una Onda con Rotación	69
4.1	Introducción	69
4.2	Geodésicas del Espacio-Tiempo Cilíndrico con Rotación.	70
4.3	Energía de una Onda Gravitacional Cilíndrica con Rotación.	74
	Conclusiones.	77

Prefacio.

Una de las contribuciones más importantes que Einstein hizo a la comprensión del universo, siguiendo una intuición de Riemann, fue mostrar que la geometría del espacio tiempo no es plana, como en relatividad especial, y que su curvatura se determina, a través de las ecuaciones de campo, por la distribución y movimiento de la energía-masa en el universo. El desarrollo de la relatividad general de Einstein en 1915 ha sido uno de los hechos más sobresalientes de la física teórica del siglo XX. Einstein tuvo pocos hechos experimentales que lo guiaran para poder reemplazar la gravedad newtoniana por una teoría compatible con su primera teoría de la relatividad especial. Usando argumentos de consistencia, simplicidad y estética, llegó a una teoría que ha pasado subsecuentes y rigurosas pruebas y que ha predicho y explicado un amplio rango de fenómenos astronómicos que eran desconocidos en el tiempo en que él realizó su trabajo.

Sin embargo, fue solo hasta la década de los setenta que el desarrollo en astronomía y física experimental, ubicó a la relatividad general en la corriente principal de la física. Algunas consecuencias observables de la teoría son; los Hoyos Negros, el Big Bang y las lentes gravitacionales. La mayoría de los aspectos de la gravedad experimental han impulsado la tecnología moderna a sus límites y esta es una área fértil para la aplicación y el desarrollo de nueva tecnología. Algunos ejemplos incluyen el desarrollo de dispositivos superconductores de interferometría cuántica a bajas temperaturas (SQUID) para experimentos en bases espaciales de magnetogravedad y para detectores de ondas gravitacionales; la aplicación de diluciones de refrigerantes a gran escala para enfriar barras detectoras de ondas gravitacionales (cuya masa es de varias toneladas), a temperaturas que se aproximan a 10 mK; y el uso de lasers de alto poder y componentes ópticos de pérdida ultrabaja, en los detectores interferométricos de ondas gravitacionales. La investigación corriente en luz comprimida para las telecomunicaciones, fue estimulada en gran medida por los trabajos teóricos que buscaban crear detectores de ondas gravitacionales más sensibles.

Ahora, así como en la teoría electromagnética existen perturbaciones que se propagan a la velocidad de la luz en el vacío -ondas electromagnéticas-, la geometrodinámica de Einstein predice perturbaciones en la curvatura propagándose en el espacio-tiempo -ondas gravitacionales-. A pesar de que ésta es una de las primeras predicciones de la teoría, aún no se han podido detectar debido a la débil magnitud de las ondas que llegan a la

Tierra, producidas incluso por los eventos más catastróficos. Sin embargo, vemos que experimentalmente se está realizando un gran esfuerzo en su detección. La motivación radica, por una parte, en la poca evidencia experimental dentro de esta teoría, y por otra, en la gran cantidad de información que acarrearán. La detección de ondas gravitacionales traerá como consecuencia tanto una confirmación más de la geometrodinámica, como un avance de la misma. Además, es de gran interés para la astronomía. La mayor parte de la información que actualmente recibimos del universo es a través de radiación electromagnética y gran parte de ésta se pierde en su trayecto a la Tierra. Esto no ocurrirá con la radiación gravitacional ya que posee un gran poder de penetración, por lo que se espera comprender mejor una gran cantidad de fenómenos astronómicos así como descubrir otros más, que nos permitan, en términos generales, tener una más amplia comprensión del cosmos.

El tema de ondas gravitacionales es muy amplio, tanto teórico como experimentalmente hablando. En este trabajo analizaremos solo el caso particular de ondas gravitacionales, que, además de poseer simetría cilíndrica presentan rotación. Lo primero que haremos será introducir el formalismo desde el cual las estudiaremos, esto es, la geometrodinámica. Después se analizarán las ondas gravitacionales con simetría cilíndrica y rotación. Luego se encuentra una expresión para definir la energía de tales ondas y finalmente se calcula la energía para tales ondas.

Detallando más, en el primer capítulo estudiaremos la teoría concerniente a la radiación gravitacional. Derivaremos una solución simple en el campo débil de las ecuaciones de Einstein y analizaremos las características principales de las ondas gravitacionales; generación, propagación, efecto sobre partículas y detección. En particular se discutirán brevemente algunos de los proyectos más importantes que se han propuesto para su detección gracias al avance tecnológico. En el segundo capítulo se analiza el caso particular de ondas gravitacionales con rotación. Tenemos que desde la tercera década de este siglo, se conocía una clase de soluciones exactas de las ecuaciones del campo gravitacional con simetría cilíndrica, que representan ondas gravitacionales cilíndricas y que fueron estudiadas por el propio Einstein, como un ejemplo de ondas gravitacionales no lineales. Además, recientemente se encontró que también existen soluciones del tipo anterior pero con rotación. Entonces, utilizando estos estudios, en la primera parte del capítulo dos se analizará una solución aproximada que representa este tipo de ondas y en la segunda parte, analizaremos el caso de una solución exacta; sus propiedades más importantes, su rotación, sus singularidades y la importancia que este tipo de ondas tiene. Con el objeto de analizar físicamente esta solución, en el tercer capítulo, se presenta una definición local de la energía asociada con el campo gravitacional debido a la onda, que permite dar una interpretación física al tensor de Bel-Robinson. Para tal efecto, se revisa, la analogía entre el tensor de Bel-Robinson y el tensor de energía-momento de la electrodinámica y se define lo que es un sistema coordinado de Fermi. Finalmente, en el capítulo cuatro, se utilizan los resultados obtenidos en el tercer capítulo para calcular el tensor de energía gravitomagnético en el caso concreto de ondas con simetría cilíndrica y rotación que se

estudiaron en el capítulo dos.

El contenido de los primeros tres capítulos proviene de resultados ya conocidos; algunos de textos de la especialidad y otros que han sido publicados recientemente citados todos en las referencias. Los resultados obtenidos en el cuarto capítulo representan la parte más novedosa de este trabajo y han sido compilados en forma de un artículo de investigación que se ha enviado a publicar [17].

En todo el trabajo se utilizan las siguientes convenciones

- $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowsky, por lo que su signatura es 2, esto es, la suma de los elementos de la diagonal.
- Se utilizan índices griegos para el espacio-tiempo (μ, ν , etc.=0,1,2,3).
- Se utilizan índices latinos para las componentes espaciales (j, k , etc.=1,2,3).
- Se utilizan unidades geometrizadas. La velocidad de la luz c y la constante gravitacional de Newton G son iguales a la unidad: $G = c = 1$.
- La derivada parcial se representa por una coma, i.e. $\partial\psi/\partial u = \psi_{,u}$

Capítulo 1

Radiación Gravitacional

1.1. Introducción

Una de las primeras predicciones de la Relatividad General de Einstein es la existencia de ondas gravitacionales. La teoría predice que se propagan a la velocidad de la luz y representan una distorsión dependiente de las coordenadas del espacio-tiempo local. Ahora, el campo gravitacional es muy débil por lo que solo los eventos catastróficos, se espera, producirán ondas gravitacionales detectables. Entre los eventos posibles se incluye la colisión de dos objetos astronómicos y el colapso de enormes objetos astronómicos. La relatividad general predice que las ondas gravitacionales serán producidas por momentos cuadrupolares que varían con el tiempo (sección 1.4). La onda por sí misma crea una fuerza de marea que también varía con el tiempo y se propaga a la velocidad de la luz. Esta onda induce un esfuerzo sobre un cuerpo extendido y de aquí se deriva la idea de crear detectores de barras para tales ondas.

En la sección 1.1 de este capítulo se mencionan brevemente las ecuaciones de Einstein su importancia y su complejidad por lo que en la sección 1.2 se hará una linealización de las ecuaciones para poder manipularlas. En la sección 1.3 se verá como se propagan las ondas gravitacionales dentro de la teoría linealizada y el efecto que tienen sobre las partículas, esto es importante, entre otras cosas, porque sugiere la creación de detectores resonantes de ondas gravitacionales (sección 1.6.1). En la sección 1.4 se analiza la generación de ondas gravitacionales así como la solución exacta de la ecuación de onda. En la sección 1.5 se deduce una expresión para la energía que las ondas transportan y finalmente en la sección 1.6 se describen algunos de los detectores de ondas más importantes que se han propuesto para su detección así como las fuentes que posiblemente detectarán. El esfuerzo que se ha realizado para su detección se debe a la importancia que este acontecimiento traerá no solo para la confirmación y el desarrollo de la geometrodinámica, sino para la astronomía, la física y en general el conocimiento del hombre sobre el universo.

1.2 Ecuaciones de Einstein

En la teoría de Einstein, no solo la masa sino también la energía ejercen una acción gravitacional. En su artículo de 1915, Einstein dedujo la formulación matemática que relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de masa y energía: esta fórmula se conoce como ecuación de Einstein y es el centro de la teoría de la relatividad general o geometrodinámica. La ecuación de Einstein para el campo gravitacional es

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \quad (1.1)$$

El lado izquierdo describe la geometría del espacio-tiempo; una variedad lorentziana cuya curvatura es determinada por esta ecuación debido a la distribución y el movimiento de masa-energía en la fuente gravitacional, representada en el lado derecho. La constante cosmológica, Λ , fue insertada por Einstein para obtener soluciones estáticas, y poder describir el comportamiento a gran escala del universo. Sin embargo más tarde se demostró que la introducción de Λ no es necesaria para obtener dichas soluciones. Más aún, las observaciones demostraron que el universo no es estático. Entonces haciendo $\Lambda = 0$, tendremos

$$G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

en donde k es una constante que depende de la dimensión de las unidades físicas convenidas y $G^{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein,

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \quad (1.3)$$

con $R^{\alpha\beta}$ y R , el tensor contravariante y el escalar de curvatura, respectivamente, de Ricci.

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \quad R \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

Las ecuaciones del campo de Einstein son elegantes y ricas ya que son pocas las ecuaciones de la física que pueden escribirse de una forma más simple y contener tal cantidad de aplicaciones y consecuencias. La ecuación de campo muestra como la energía-momento de la materia genera una curvatura promedio en su vecindad. Simultáneamente, la ecuación del campo gobierna la curvatura de una fuente estática o estacionaria. Y lo que nos interesa aquí, gobierna la generación de ondas gravitacionales debido a energía-momento en movimiento, así como la propagación de estas a través del espacio-tiempo.

En principio, dado un cuerpo con cierta forma y velocidad se puede calcular su distribución de masa y energía, a partir de la cual, utilizando la ecuación de Einstein, se puede calcular el elemento de línea ds^2 , que determina enteramente la estructura del espacio-tiempo curvo. En la práctica este procedimiento es extremadamente complicado

pues la ecuación de Einstein es en realidad un conjunto de diez ecuaciones diferenciales parciales acopladas (debido a que $T^{\alpha\beta}$ y $G^{\alpha\beta}$ son tensores simétricos), y se deben resolver para $g^{\alpha\beta}$ cuando la fuente $T^{\alpha\beta}$ está dada. Las ecuaciones son no lineales pero tienen una estructura de valor inicial bien establecidas. Sin embargo, al ser $\{g^{\alpha\beta}\}$ las componentes de un tensor para algún sistema de coordenadas, cambiando el sistema, cambian las componentes, por lo que es imposible encontrar los diez $g^{\alpha\beta}$ dados los valores iniciales. Esto se debe a que existen cuatro grados de libertad funcionales arbitrarios para las ecuaciones de Einstein por lo cual éstas se reducen solo a seis independientes que caracterizan la geometría independientemente del espacio.

A pesar de todo, trabajar con seis ecuaciones diferenciales es difícil. Lo que haremos será simplificar el problema de tal forma que, tomando aproximaciones reales pero fáciles de manipular, obtengamos resultados físicos importantes.

1.3 Aproximación Lineal

Nuestro acercamiento hacia el tema de la radiación gravitacional será a través de una linealización de las ecuaciones de Einstein.

En grandes regiones del espacio-tiempo, donde se tiene un campo gravitacional débil, existen coordenadas cuasilorentzianas que cumplen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Con

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.6)$$

y en consecuencia $h_{\mu\nu,\rho}$ y derivadas de orden superior, serán pequeñas y sus productos despreciables.

Es importante aclarar que a pesar de que la ecuación (1.5) no es una ecuación tensorial, es válida en una infinidad de sistemas cuasilorentzianos (los cuales podemos encontrarlos a partir de una transformación de norma).

Ahora bien, una transformación de norma es un pequeño cambio de coordenadas definido como

$$x'^{\mu} \equiv x^{\mu} + \xi^{\mu} \quad (1.7)$$

con ξ^{μ} del mismo orden que $h^{\mu\nu}$. Estas transformaciones nos llevan de un sistema cuasilorentziano a otro de la misma especie. El elemento de matriz de transformación es

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu} \quad (1.8)$$

y con esto a primer orden tendremos

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (1.9)$$

en donde

$$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad (1.10)$$

entonces el efecto del cambio de coordenadas es redefinir $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (1.11)$$

En donde la nueva $h_{\mu\nu}$ será todavía pequeña y estaremos nuevamente en un sistema de coordenadas aceptable. Ahora es interesante ver que usando la ecuación (1.5) obtendremos a primer orden en $h_{\mu\nu}$ el tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}), \quad (1.12)$$

Esta forma de denotar al tensor de Riemann será importante para la aproximación lineal del tensor de Einstein. Ademas, no depende de la norma que se esté usando por lo que no se ve afectada por la ecuación (1.11).

Consistentemente con este punto de vista definiremos tensores con índices mixtos como

$$h^\mu{}_\beta = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta}, \quad (1.13)$$

y a la traza de h

$$h = h^\alpha{}_\alpha, \quad (1.14)$$

y con esto, un vector llamado de traza inversa de $h_{\mu\nu}$

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h. \quad (1.15)$$

Con todo lo anterior, empezando con la ec. (1.12), tendremos que el tensor de Einstein es

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\{\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + [\eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + O(h^2_{\alpha\beta})\}, \quad (1.16)$$

y si exigimos que se cumpla la condición de norma de Lorentz

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.17)$$

las ecuaciones de Einstein se simplifican bastante debido a que el término entre corchetes se anula. Ademas, siendo cuatro ecuaciones, siempre es posible imponer tal condición,

escogiendo la norma adecuada, gracias a los cuatro grados de libertad en las funciones de norma ξ^μ . Entonces la ecuación (1.16) queda

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square h^{\alpha\beta}, \quad (1.18)$$

en donde el D'Alambertiano se define como

$$\square f = f^{\mu}_{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{,\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Combinando las ec. (3.42), (1.18) y haciendo $k = 8\pi$ para obtener el límite newtoniano, las ecuaciones de Einstein para el campo débil serán

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Debido a que resultan de mantener los términos lineales de $h_{\alpha\beta}$ son llamadas ecuaciones de campo para la teoría linealizada.

1.4 Propagación de Ondas Gravitacionales.

En regiones del espacio-tiempo puede ocurrir que el campo gravitacional sea débil y no necesariamente estacionario. Esto ocurre por ejemplo, lejos de una fuente completamente relativista sufriendo rápidos cambios que ocurrieron hace suficiente tiempo en el pasado, para que los disturbios producidos por los cambios pudieran alcanzar la región distante en consideración. Como se demostró en la sección anterior las ecuaciones linealizadas de Einstein en el vacío ($T^{\alpha\beta} = 0$) son

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.21)$$

Esta ecuación es también llamada ecuación de onda tridimensional. Sus soluciones se pueden representar de la forma

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (1.22)$$

en donde $\{k_\alpha\}$, son las componentes de alguna uno-forma constante y $\{A^{\alpha\beta}\}$ las componentes de algún tensor constante. La ecuación (1.21) también se puede escribir

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = 0. \quad (1.23)$$

De la ecuación (1.22) vemos que

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu} = k_\mu \bar{h}^{\alpha\beta}, \quad (1.24)$$

entonces de (1.23) tenemos

$$\eta^{\mu\nu} \ddot{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \ddot{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.25)$$

y esto se anula solo si ocurre

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0. \quad (1.26)$$

de aquí vemos que (1.22) es solución de ecuación de onda si k_α o su vector asociado k^α es nulo, es decir tangente a la línea de mundo de un fotón. De aquí se puede ver que una onda gravitacional viaja a la velocidad de la luz.

Entonces, las ecuaciones de Einstein asumen su forma mas simple, ec.(1.21), si imponemos la condición de norma definida en la ecuación (1.17) y combinamos esto con (1.22) y (1.24) encontramos:

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0, \quad (1.27)$$

que nos indica que $A^{\alpha\beta}$ debe ser ortogonal al cuadvivector nulo k^β .

La solución $A^{\alpha\beta} \exp(ik_\alpha x^\alpha)$ es una onda plana y para obtener resultados físicos utilizamos solo la parte real de esta expresión permitiendo así que $A^{\alpha\beta}$ pueda ser complejo. Además por los teoremas del análisis de Fourier, sabemos que cualquier solución de las ecuaciones (1.21) y (1.17) será una superposición de soluciones de ondas planas.

Ahora como $\ddot{h}^{\alpha\beta} = \ddot{h}^{\beta\alpha}$, vemos que la matriz de amplitudes, $[A^{\mu\nu}]$, tiene diez componentes pero la condición (1.27) nos da cuatro condiciones a estas, dejándonos solo seis. Utilizando nuestra libertad de escoger la norma, ec. (1.7), finalmente se reducen solo a dos componentes linealmente independientes en la matriz de amplitudes. Esto es, tenemos dos posibles polarizaciones para ondas gravitacionales planas.

A la norma que nos da directamente este tipo de polarización se le llama "norma sin traza transversa" y la forma de encontrarla es con la restricción (1.27) y usando nuestra libertad en la norma para restringirla más. Podemos cambiar de norma mientras nos mantengamos en la clase de normas lorentzianas usando cualquier vector que sea solución de

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi_\alpha = 0. \quad (1.28)$$

Si escogemos la solución a esta ecuación de la forma

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu), \quad (1.29)$$

en donde B_α es una constante y k_μ es el mismo vector de nuestra solución de onda. Esto nos da un cambio dado por la ec.(1.9),

$$h_{\alpha\beta}^{(N)} = h_{\alpha\beta}^{(V)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \quad (1.30)$$

en donde (N) se refiere a la nueva y (V) a la vieja o anterior. Al sustituir en $\bar{h}_{\alpha\beta}$ tendremos

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(N)} = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(V)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\mu}_{,\mu} \quad (1.31)$$

y utilizando (1.29) y (1.22) obtendremos despues de eliminar la exponencial

$$A_{\alpha\beta}^{(N)} = A_{\alpha\beta}^{(V)} - iB_{\alpha}k_{\beta} - iB_{\beta}k_{\alpha} + \eta_{\alpha\beta}B^{\mu}k_{\mu}, \quad (1.32)$$

este sistema de ecuaciones se puede simplificar y resolver exigiendo dos condiciones mas

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 0, \quad (1.33)$$

$$A_{\alpha\beta}U^{\beta} = 0, \quad (1.34)$$

con U^{β} algún vector fijo de cuadrivelocidad, o sea, algún vector unitario tipo tiempo que escojamos.

Para entender lo que esto significa, supongamos que estamos viajando en un marco de referencia lorentziano en la dirección z. Entonces $k \rightarrow (k, 0, 0, k)$, y de (1.34) y (1.27) tenemos que $A_{\alpha z} = 0$ para toda α . Con estas dos restricciones tendremos que solo A_{xx} , A_{yy} y $A_{xy} = A_{yx}$ son distintas de cero. Además, la condición de traza vc. (1.33) indica que $A_{xx} = -A_{yy}$ con lo que en forma matricial, en este marco particular escogido es:

$$(A_{\alpha\beta}^{TT}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Aquí TT significa que estamos en la norma sin traza transversa. Vemos que, finalmente, solo existen dos términos independientes en la matriz de amplitudes, lo que significa que las ondas gravitacionales, básicamente se componen de dos tipos de polarizaciones, las cuales, se puede comprobar, están desfasadas en $\frac{\pi}{4}$.

1.4.1 Efecto de las Ondas sobre Partículas Libres.

Supongamos que una onda gravitacional, en su trayectoria en el espacio tiempo, encuentra una nube de partículas libres. Escogiendo un sistema de coordenadas lorentziano y escogiendo una norma TT referida para este sistema (U^{α} en la ec. (1.34) es la cuadrivelocidad inicial de la nube), podemos analizar lo que ocurre con la separación entre partículas. Una partícula libre cumple con la ecuación geodésica

$$\frac{d}{dr}U^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 0. \quad (1.36)$$

Escogiendo el sistema coordenado de tal forma que la partícula inicialmente está en reposo, el valor inicial de su aceleración es

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -1^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}), \quad (1.37)$$

pero por la ec. (1.35), $h_{\beta 0}^{TT}$ es cero por lo que la aceleración inicial también. De esto se concluye que la partícula se encuentra en reposo en todo momento. Lo que hemos encontrado es un marco de referencia que permanece adherido a la partícula.

Para encontrar un mejor indicio del efecto de las ondas consideremos dos partículas, una en el origen, y otra muy cerca en $x = \epsilon$, $y = z$, ambas en reposo. Ambas se localizarán en la misma posición que en un principio y la distancia propia entre ellas será

$$\begin{aligned} \Delta l &\equiv \int |ds^2|^{\frac{1}{2}} = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\epsilon |g_{xx} dx|^{\frac{1}{2}} \approx |g_{xx}(x=0)|^{\frac{1}{2}} \epsilon \\ &\approx \left[1 + \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}(x=0)\right] \epsilon. \end{aligned} \quad (1.38)$$

y como generalmente h_{xx}^{TT} es diferente de cero, la distancia propia cambia con el tiempo.

Usando la ecuación de la desviación geodésica, con el vector de conexión ξ^α , tenemos:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta \quad (1.39)$$

Con U^α la cuadrivelocidad de las dos partículas. En este sistema de coordenadas solo necesitamos U^α al menor orden (espacio plano), pues cualquier corrección en U^α que depende de $h_{\mu\nu}$ nos dará términos de segundo orden en $h_{\mu\nu}$ en la ecuación anterior ($R^\alpha_{\mu\nu\beta}$ es de primer orden en $h_{\mu\nu}$). Entonces $U^\alpha \rightarrow (1, 0, 0, 0)$ y $\xi^\beta \rightarrow (0, \epsilon, 0, 0)$. A primer orden la ecuación anterior es:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\alpha = \epsilon R^\alpha_{00x} = -\epsilon R^\alpha_{0x0} \quad (1.40)$$

Usando la ec. (1.12) vemos que en la norma TT los únicos términos independientes, diferentes de cero serán:

$$\begin{aligned} R_{0x0}^x &= R_{x0x0} = -\frac{1}{2}h_{xx,00}^{TT}, \\ R_{0x0}^y &= R_{y0x0} = -\frac{1}{2}h_{xy,00}^{TT}, \\ R_{0y0}^y &= R_{y0y0} = -\frac{1}{2}h_{yy,00}^{TT} = -R_{0x0}^x \end{aligned} \quad (1.41)$$

Esto significa que dos partículas inicialmente separadas en la dirección x tendrán un vector de separación que varía respecto al tiempo al pasar la onda, cumpliendo con:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT}, \quad (1.42)$$

lo cual es consistente con la ec. (1.37). Del mismo modo dos partículas inicialmente separadas por ε en la dirección y cumplirán con ecuaciones similares, solo cambiando x por y en (1.42).

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy}^{TT} = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT}, \quad (1.44)$$

1.4.2 Polarización de las Ondas Gravitacionales

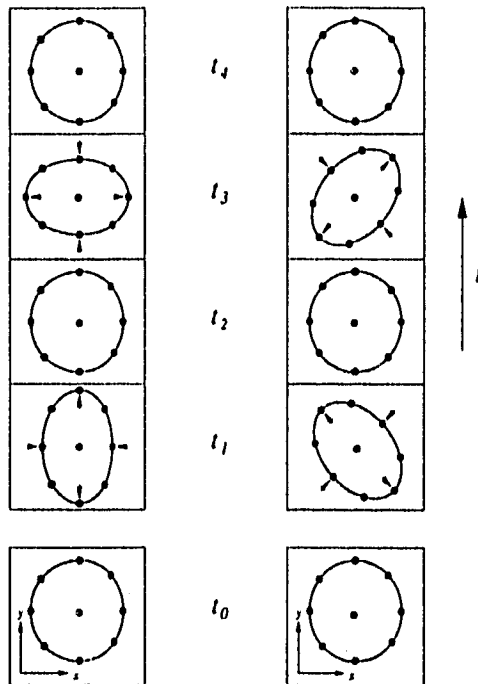


Figura 1.1: Efecto de una onda gravitacional propagandose en la dirección z , sobre la distancia propia entre un anillo de partículas libres, en el plano $x-y$. El tiempo (t_0) es antes de la propagación de la onda, los tiempos subsecuentes, durante la propagación. El lado izquierdo y el derecho representan una onda con polarización “+” y “x”, respectivamente.

Las ecuaciones anteriores nos ayudan a describir la polarización de la onda. Considerese un anillo de partículas inicialmente en reposo en plano $x-y$, como al tiempo t_0 de la

figura (1.1). Supongase que la onda tiene $h_{xx}^{TT} \neq 0$ y $h_{xy}^{TT} = 0$, entonces las partículas se moverán (en término de la distancia propia respecto de la que está en el centro) en la forma en que se muestra del lado izquierdo de la misma figura, primero hacia adentro y luego hacia afuera, en tanto que la onda oscila y h_{xx}^{TT} cambia de signo. Si en cambio, la onda tiene $h_{xy}^{TT} \neq 0$ y $h_{xx}^{TT} = h_{yy}^{TT} = 0$, entonces el anillo se distorciona como en la parte derecha de la figura. Como h_{xx}^{TT} y h_{xy}^{TT} son independientes, el lado izquierdo y derecho de la figura dan una representación gráfica de dos diferentes polarizaciones lineales. Notese que los dos estados están simplemente rotados 45° uno respecto al otro.

1.5 Generación de Ondas Gravitacionales

Estimaciones sencillas nos revelan que la amplitud de cualquier onda que incida en la tierra será muy pequeña. Ondas gravitacionales "fuertes" tendrían $h_{\mu\nu} = O(1)$, pero esto ocurre solo cerca de la fuente. Al igual que en cualquier campo de radiaciones, la amplitud de la onda decrece como r^{-1} . Ahora, para una fuente de masa M , estando la tierra a una distancia r , la máxima amplitud que experimentaríamos sería $\frac{M}{r}$. Por ejemplo, para una explosión de una supernova formando un agujero negro de diez veces la masa del sol en una galaxia vecina, situada a $10^{23}m$, este cociente es del orden de 10^{-20} . Obviamente un evento menos violento nos conducirá a amplitudes mucho menores¹.

En principio hagamos un cálculo aproximado de la generación de ondas, es decir, resolvamos

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.45)$$

pero hagamos algunas suposiciones realistas que simplifiquen nuestro problema. Supongamos que la dependencia temporal de $T_{\alpha\beta}$ es una oscilación sinusoidal con frecuencia Ω , que será la parte real de

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}(x^i) e^{-i\Omega t}, \quad (1.46)$$

y que la región del espacio donde $S_{\alpha\beta}$ es diferente de cero es pequeña comparada con $\frac{2\pi}{\Omega}$, la longitud de onda de una onda gravitacional de frecuencia Ω .

En realidad la primera suposición no es una restricción pues salimos del análisis de Fourier que podemos descomponer cualquier dependencia temporal en una serie de términos sinusoidales. Además, existen fuentes astrofísicas interesantes que son aproximadamente periódicas, como pulsares y sistemas binarios. La segunda suposición, llamada de lento movimiento implica que las velocidades dentro de la región de la fuente deben ser

¹ En este caso hemos tomado $r = 10Mpc = 3.084 \times 10^{23}m$, la distancia al cúmulo galáctico de Virgo. Además $10M_\odot = 1.47 \times 10^4m$ es el valor del agujero negro formado, por lo cual $(10M_\odot/r) \simeq 4.78 \times 10^{-20}$

mucho menores que c . En general casi todas las fuentes de ondas gravitacionales, con excepción de las más potentes cumplen con estas condiciones.

Véamos una solución de la forma

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}(x^i)e^{-i\Omega t}, \quad (1.47)$$

combinándola con (1.45) y (1.46) obtenemos

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\alpha\beta} = -16\pi S_{\alpha\beta}, \quad (1.48)$$

Si definimos r como la coordenada radial esférica cuyo origen está dentro de la fuente, buscamos soluciones de la forma

$$B_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{r} e^{i\Omega r} + \frac{Z_{\alpha\beta}}{r} e^{-i\Omega r}, \quad (1.49)$$

en donde $A_{\alpha\beta}$ y $Z_{\alpha\beta}$ son constantes. Como solo queremos emisión de ondas, hacemos $Z_{\alpha\beta} = 0$. Entonces debemos determinar $A_{\alpha\beta}$ en términos de la fuente. Supondremos que ésta solo existe en una esfera de radio $\varepsilon \ll \frac{2\pi}{\Omega}$. Integrando (1.49) en el interior de esta esfera tendremos

$$\int \Omega^2 B_{\alpha\beta} d^3x \leq \Omega^2 |B_{\alpha\beta}|_{\max} \frac{4\pi\varepsilon^2}{3}, \quad (1.50)$$

en donde $|B_{\alpha\beta}|_{\max}$ es el máximo valor de $B_{\alpha\beta}$ dentro de la fuente. Este valor es despreciable. Integrando el otro término, aplicando el teorema de Gauss

$$\int \nabla^2 B_{\alpha\beta} d^3x = \oint \mathbf{n} \cdot \nabla B_{\alpha\beta} ds. \quad (1.51)$$

La integral de superficie se calcula fuera de la fuente donde $B_{\alpha\beta}$ esta dada por (1.49), la cual es simétricamente esférica, entonces

$$\oint \mathbf{n} \cdot \nabla B_{\alpha\beta} ds = 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{d}{dr} B_{\alpha\beta} \right)_{r=\varepsilon} \approx -4\pi A_{\alpha\beta}, \quad (1.52)$$

en donde hemos tomado nuevamente la aproximación en ε .

Definimos la integral del lado derecho de (1.48) como:

$$J_{\alpha\beta} = \int S_{\alpha\beta} d^3x. \quad (1.53)$$

Finalmente, combinando estos resultados cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos

$$A_{\alpha\beta} = 4J_{\alpha\beta}, \quad (1.54)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = 4J_{\alpha\beta} \frac{e^{i\Omega(r-t)}}{r}. \quad (1.55)$$

Estas son las expresiones para las ondas gravitacionales generadas por la fuente, despreciando términos de orden r^{-2} y cualquier término de r^{-1} que sea de mayor orden en $\varepsilon\Omega$.

Ahora, para simplificar más utilizaremos una propiedad que no habíamos utilizado, el hecho que $\{h_{\alpha\beta}\}$ son componentes de un tensor. De (1.53) sabemos

$$J_{\alpha\beta}e^{-i\Omega t} = \int T_{\alpha\beta}d^3x. \quad (1.56)$$

lo cual implica

$$-i\Omega J^{\alpha 0}e^{-i\Omega t} = \int T^{\alpha 0}_{,0}d^3x. \quad (1.57)$$

y de la ley de conservación para $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta}_{,0} = 0, \quad (1.58)$$

con lo que podemos concluir

$$T^{\alpha 0}_{,0} = -T^{\alpha k}_{,k}. \quad (1.59)$$

y entonces tenemos

$$i\Omega J^{\alpha 0}e^{-i\Omega t} = \int T^{\alpha k}_{,k}d^3x = \oint T^{\alpha k}n_k ds. \quad (1.60)$$

Este último paso, siendo la aplicación del teorema de Gauss a cualquier volumen que contenga completamente la fuente. Esto significa que $T^{\alpha\beta} = 0$ en la superficie que limita este volumen, entonces el miembro derecho de (1.60) desaparece, y si Ω es distinto de cero, tenemos:

$$J^{\alpha 0} = 0, \quad \text{y} \quad \bar{h}^{\alpha 0} = 0. \quad (1.61)$$

Utilizando el teorema del virial para tensores tenemos para J_{ij}

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00}x^i x^m d^3x = 2 \int T^{im}d^3x. \quad (1.62)$$

Para una fuente en movimiento lento $T^{00} \approx \rho$, es la densidad newtoniana. De aquí se denota como momento cuadrupolar para la distribución de masa, al miembro del lado izquierdo

$$I^{lm} = \int T^{00}x^l x^m d^3x = D^{lm}e^{-i\Omega t}, \quad (1.63)$$

entonces en términos de esto tendremos

$$\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 D_{jk} \frac{e^{i\Omega(r-t)}}{r}. \quad (1.64)$$

Es importante recordar que esta expresión es una aproximación que no solo desprecia términos de orden r^{-2} sino que también lo hace con términos de orden r^{-1} que no son dominantes en la aproximación del movimiento lento. En particular h_{jk}^k es de orden superior y esto garantiza que la condición de norma $h^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ sea satisfecha por (1.64) y (1.61) al orden más bajo en r^{-1} y Ω . Debido a (1.64) a esta aproximación se le llama aproximación cuadrupolar para radiación gravitacional.

Al igual que en el caso de ondas planas, tenemos aquí la libertad de restringir más la norma. La elección obvia es tratar de encontrar una norma (TT), transversa a la dirección del movimiento de la onda (dirección radial) cuyo vector unitario es $n^j = \frac{x^j}{r}$, escogiendo nuestros ejes de tal forma que el punto donde medimos la onda, viaja en la dirección z , entonces podemos completar la ecuación (1.61) con

$$\bar{h}_{ii}^{TT} = 0, \quad (1.65)$$

$$\bar{h}_{xx}^{TT} = -\bar{h}_{yy}^{TT} = -\Omega^2 (t_{xx} - t_{yy}) \frac{e^{i\Omega r}}{r}, \quad (1.66)$$

$$\bar{h}_{xy}^{TT} = -2\Omega^2 t_{xy} \frac{e^{i\Omega r}}{r}, \quad (1.67)$$

en donde

$$t_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I_i^i. \quad (1.68)$$

se le llama libre de traza o tensor de momento cuadrupolar reducido.

1.5.1 Solución Exacta de la Ecuación de Onda

La ecuación (1.45) nos da la relación entre la radiación gravitacional representada por $\bar{h}^{\alpha\beta}$, y su fuente representada por $T^{\alpha\beta}$. La solución a esta ecuación se puede expresar como una integral retardada

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, x^i) = 4 \int \frac{T_{\alpha\beta}(t - R, y^i)}{R} d^3x, \quad (1.69)$$

$$R = |x^i - y^i|.$$

La integral se toma sobre la región del espacio-tiempo ocupado por los puntos de la fuente en el tiempo retardado $t - R$. Esta región del espacio tiempo es la intersección de la mitad del cono de luz, correspondiente al pasado, del punto del campo (evento (t, x^i)), con el tubo de mundo de la fuente.

Supongamos que la fuente es una especie de distribución material localizada cerca del origen, y que las partículas de la fuente tienen velocidades pequeñas comparadas con las de la luz. Tomando nuestros puntos del campo a una distancia r del origen que es muy grande comparada con los desplazamientos máximos de las partículas de la fuente,

$$|x^i| \equiv r \gg |y^i| = y. \quad (1.70)$$

Entonces la contribución dominante de la integral se obtiene al remplazar R por r

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, x^i) \approx \frac{1}{r} \int T_{\alpha\beta}(t - R, y^i) d^3x, \quad (1.71)$$

la cual es una generalización de la ec.(1.55). Ahora de las leyes de conservación: $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ tenemos

$$\int T_{0\mu} d^3y = \text{cte.} \quad (1.72)$$

o sea que el momento total y la energía se conservan. Entonces la parte $\frac{1}{r}$ de $\bar{h}_{0\mu}$ es independiente del tiempo por lo que no contribuirá con ningún campo de ondas. Esto generaliza la ec.(1.54).

Usando la ec.(1.62) tenemos la generalización de la ec.(1.64)

$$\bar{h}_{jk}(t, x^i) = \frac{2}{r} I_{jk,00}(t - r), \quad (1.73)$$

y utilizando la norma sin traza transversa, finalmente obtenemos:

$$\bar{h}_{xx}^{TT} = \frac{1}{r} [f_{xx,00}(t - r) - f_{yy,00}(t - r)]. \quad (1.74)$$

$$\bar{h}_{xy}^{TT} = \frac{2}{r} f_{xy,00}(t - r). \quad (1.75)$$

De esta manera vemos que el tensor métrico de una onda gravitacional se expresa en términos de las derivadas temporales del momento cuadrupolar reducido.

1.6 Energía Transportada por Ondas Gravitacionales.

Considérese que el plano z contiene una distribución continua de osciladores, σ osciladores por unidad de área. Si nuestra onda incidente en la norma TT es

$$\bar{h}_{rr}^{TT} = A \cos \Omega(z - t), \quad \bar{h}_{yy}^{TT} = -\bar{h}_{xx}^{TT}. \quad (1.76)$$

las demas componentes son cero. Además cada oscilador responde con una oscilación estacionaria de la forma

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi). \quad (1.77)$$

con R , la amplitud, y ϕ , la fase, las cuales se discuten en la sección 1.7.1. y están dadas por las ecuaciones (1.109) y (1.110).

El movimiento es estacionario pues la energía disipada por la fricción en la oscilación se compensa por el trabajo hecho en el resorte por las fuerzas gravitacionales de marea de la onda. La energía proporcionada por la onda en cada oscilación será

$$\frac{dE}{dt} = \nu \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = m\gamma \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2. \quad (1.78)$$

Para obtener una energía estacionaria de pérdida, se promedia sobre un periodo de oscilación de $2\pi/\Omega$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} m\gamma\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi) dt = \frac{1}{2} m\gamma\Omega^2 R^2. \quad (1.79)$$

Esta es la energía proporcionada a cada oscilador por unidad de tiempo. Con σ osciladores por unidad de área, el flujo energético total F debe disminuir al atravesar el plano en

$$\delta F = -\frac{1}{2} \sigma m\gamma\Omega^2 R^2. \quad (1.80)$$

Entonces, se ha calculado el cambio en la amplitud de la onda después de interactuar con los osciladores, independientemente del cálculo que nos condujo a esta ecuación. Cada oscilador tiene un tensor cuadrupolar dado por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m \left[(x_1)^2 + (x_2)^2 \right] \\ &= m \left[\left(-\frac{1}{2} l_0 - \frac{R}{2} \cos(\Omega t + \phi) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} l_0 + \frac{R}{2} \cos(\Omega t + \phi) \right)^2 \right] \\ &= \text{const} + \frac{mR^2}{4} \cos 2(\Omega t + \phi) + m l_0 R \cos(\Omega t + \phi). \end{aligned} \quad (1.81)$$

como R es pequeña comparada con l_0 ($R = O(\bar{h}_{xx}^{TT} l_0)$) el término 2Ω en la ecuación anterior se desprecia comparado con Ω . Entonces cada oscilador tiene

$$I_{xx} = m l_0 R \cos(\Omega t + \phi). \quad (1.82)$$

por (1.64) cada oscilador produce una amplitud de onda

$$\delta \bar{h}_{xx} = -2\Omega^2 m l_0 R \cos[\Omega(r-t) - \phi]/r \quad (1.83)$$

en cualquier punto a una distancia r . El campo total se obtiene integrando las contribuciones de todos los osciladores. Supongamos que el plano de los osciladores es $z = 0$ y considérese un punto P a una distancia z , del mismo, después de interactuar con los osciladores. Con coordenadas polares (ρ, ϕ) en el plano, con centro en Q bajo P , un oscilador situado en O a una distancia ρ contribuye en $\delta \bar{h}_{xx}$ en P , con $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$. El número de osciladores entre ρ y $\rho + d\rho$ es $2\pi\sigma\rho d\rho$ y el campo total producido por los osciladores en el punto P es

$$\delta \bar{h}_{xx}^{TOTAL} = -2\Omega^2 m l_0 R 2\pi \int_0^\infty \sigma \cos[\Omega(r-t) - \phi] \frac{\rho d\rho}{r} \quad (1.84)$$

Cambiando la variable de integración a r ($\rho d\rho = r dr$), obtenemos

$$\delta \bar{h}_{xx}^{TOTAL} = -2\Omega^2 m l_0 R 2\pi \int_z^\infty \sigma \cos[\Omega(r-t) - \phi] dr \quad (1.85)$$

Como físicamente esperamos que los osciladores lejanos no contribuyan al campo en P , supondremos que $\sigma \approx \exp(-\epsilon r)$ y haremos tender ϵ a cero después de integrar. Entonces el plano de osciladores enviará una onda plana neta

$$\delta \bar{h}_{xx}^{TOTAL} = 4\pi\sigma m \Omega l_0 R \sin[\Omega(z-t) - \phi]. \quad (1.86)$$

Para comparar con la onda incidente pondremos en la misma norma TT

$$\delta \bar{h}_{xx}^{TT} = -\delta \bar{h}_{yy}^{TT} = 2\pi\sigma m \Omega l_0 R \sin[\Omega(z-t) - \phi] \quad (1.87)$$

Si sumamos a la onda incidente obtendremos a primer orden en R

$$\bar{h}_{xx}^{NETO} = \bar{h}_{xx}^{TT} + \delta \bar{h}_{xx}^{TT} \quad (1.88)$$

$$= (A - 2\pi\sigma m \Omega l_0 R \sin \phi) \cos[\Omega(z-t) - \psi], \quad (1.89)$$

con

$$\tan \psi = \frac{2\pi\sigma m \Omega l_0 R}{A} \cos \phi. \quad (1.90)$$

Además de un pequeño corrimiento de fase ψ , el efecto neto es una reducción en la amplitud de A

$$\delta A = -2\pi\sigma m \Omega l_0 R \sin \phi, \quad (1.91)$$

la cual debe ser responsable del decremento en el flujo F después de interactuar con los osciladores. Dividiendo la ec. (1.80) por la (1.91) y usando (1.109) y (1.110) para eliminar R y ϕ , tenemos un resultado clave, además, sorprendentemente sencillo

$$\frac{\delta F}{\delta A} = \frac{1}{16\pi} \Omega^2 A. \quad (1.92)$$

Integrando esta expresión se obtiene el flujo total de una onda de frecuencia Ω y amplitud A .

$$F = \frac{1}{32\pi} \Omega^2 A^2. \quad (1.93)$$

Como el promedio del cuadrado de la onda es $\langle (\bar{h}_{xx}^{TT})^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2$ y solo existen dos componentes de \bar{h}_{xx}^{TT} , distintas de cero, la ecuación anterior es

$$F = \frac{1}{32\pi} \Omega^2 \langle \bar{h}_{\mu\nu}^{TT} \bar{h}^{TT\mu\nu} \rangle. \quad (1.94)$$

Esta expresión es invariante de Lorentz pero no de norma. Sin embargo como una polarización puede transformarse por medio de una transformación de Lorentz (rotación), esta expresión se aplica a todas las polarizaciones. Además, como nos da la energía por unidad de área se aplica a cualquier frente de ondas, plano o esférico, pues uno siempre puede observar una área tan pequeña que la curvatura no sea considerable.

Hasta aquí, simplemente hemos supuesto que la energía que poníamos en los osciladores debía ser igual al decremento en su flujo. Sin embargo podemos argumentar que el flujo así construido es la única definición aceptable de energía para las ondas gravitacionales, pues se demuestra que se conserva cuando se suma a otras energías al menor orden en $h_{\mu\nu}$. Esto es importante pues al estar en espacio cuasiplano, al menor orden podemos construir cantidades que se conservan. A ordenes mayores, lejos de la teoría linealizada, no es tan fácil definir la energía local, pues la dependencia temporal en la métrica verdadera adquiere mayor importancia. Estas cuestiones son de las más fundamentales en relatividad, pero aún así nuestras ecuaciones funcionan aunque solo en teoría linealizada.

1.7 Detección de Ondas Gravitacionales

Del análisis del efecto de las ondas gravitacionales en partículas libres nos dimos cuenta que se realiza un variación en su separación, debido a su acción. Es como si una fuerza de marea variable actuara en las partículas. Si la partícula no es libre y en cambio es: a) construída a ser un constituyente de un cuerpo elástico, entonces la fuerza de marea crearía una vibración en el cuerpo. Estos son los rudimentos de un detector de ondas gravitacionales.

1.7.1 Detector Resonante.

Considere un detector ideal constituido de la siguiente forma: dos masas puntuales están unidas por un resorte de constante k , sin masa y con constante de amortiguamiento ν cuya longitud sin enlazar es l_0 . El sistema se encuentra sobre el eje x del sistema coordenado TT con las masas localizadas en x_1 y x_2 . En espacio-tiempo plano, las masas cumplen con las ecuaciones

$$m\ddot{x}_{1,00} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu(x_1 - x_2)_{,0} \quad (1.95)$$

$$m\ddot{x}_{2,00} = -k(x_2 - x_1 + l_0) - \nu(x_2 - x_1)_{,0} \quad (1.96)$$

definiendo

$$\xi = (x_2 - x_1 - l_0), \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{m}, \quad \gamma = \frac{\nu}{m}, \quad (1.97)$$

y combinando estas ecuaciones obtenemos

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.98)$$

que es la ecuación normal para el oscilador armónico amortiguado. Lo que ocurre cuando una onda gravitacional pasa por éste es lo siguiente: Sabemos que en nuestro sistema TT una partícula libre en reposo continúa en reposo aún después de que una onda incida sobre ella. Suponemos que los únicos movimientos en el sistema son producidos por la onda, i.e. $\xi = O(l_0|h_{\mu\nu}|) \ll l_0$, entonces las velocidades de las masas serán pequeñas y podremos aplicar las ecuaciones de Newton en un sistema inercial, pero como éste solo difiere en $O(|h_{\mu\nu}|^2)$ de las coordenadas TT , escogemos mejor este último sistema, con lo que las ecuaciones de movimiento para las masas son:

$$m\ddot{x}_{,00}^j = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2). \quad (1.99)$$

Ahora, la única fuerza no gravitacional que actúa en cada masa es debida al resorte. Como todos los movimientos son lentos, la fuerza que ejerce el resorte es proporcional a su extensión propia instantánea, medida usando la métrica.

Si la longitud propia del resorte es l y si la onda gravitatoria viaja en la dirección z entonces

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{1/2} dt \quad (1.100)$$

y para nuestro sistema

$$m\ddot{x}_{1,00} = -k(l_0 - l) - \nu(l_0 - l)_{,0} \quad (1.101)$$

$$m\ddot{x}_{2,00} = -k(l - l_0) - \nu(l - l_0)_{,0} \quad (1.102)$$

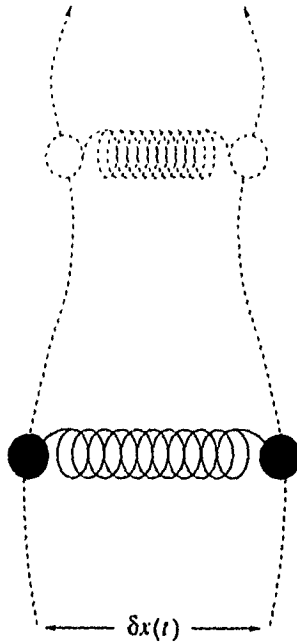


Figura 1.2: Dos partículas de masa m conectadas por un resorte ideal y sus líneas de mundo durante el paso de una onda gravitacional. Aquí $\delta x(t) = l_0 + \xi(t)$, δx es la separación total entre las dos masas, l_0 es la separación de equilibrio y ξ el pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio.

Definiendo ω_0 y γ como arriba y

$$\xi = l - l_0 \quad (1.103)$$

$$= x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} (x_2 - x_1) + O(|h_{\mu\nu}|^2), \quad (1.104)$$

obtenemos

$$x_2 - x_1 = l_0 + \xi - \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} (x_2 - x_1) + O(|h_{\mu\nu}|^2). \quad (1.105)$$

Utilizando esto al restar las ec.(1.101) y (1.102) obtenemos

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = -\frac{1}{2}l_0 h_{xx,00}^{TT}, \quad (1.106)$$

correcta a primer orden en h_{xx}^{TT} . Esta es la ecuación fundamental del detector de ondas gravitacionales y tiene la sencilla forma de un oscilador armónico amortiguado.

Se puede emplear un detector de este tipo como detector resonante para radiación gravitacional de frecuencia fija (pulsares, estrellas binarias cercanas). Supongase

$$\ddot{h}_{xx}^{TT} = A \cos \Omega t, \quad (1.107)$$

entonces la solución para ξ es

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi), \quad (1.108)$$

con

$$R = \frac{1}{2} l_0 \Omega^2 A / [(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2]^{1/2}, \quad (1.109)$$

$$\tan \phi = 2\gamma\Omega / (\omega_0 - \Omega). \quad (1.110)$$

La energía de oscilación del detector, al menor orden en h_{xx}^{TT} es

$$E = \frac{1}{2} m (x_{1,0})^2 + \frac{1}{2} m (x_{2,0})^2 + \frac{1}{2} k \xi^2. \quad (1.111)$$

Para un detector que se encontraba en reposo antes que la onda arribara, tenemos que $x_{1,0} = -x_{2,0} = -\xi_0/2$. Entonces

$$E = \frac{1}{4} m [(\xi_0)^2 + \omega_0^2 \xi^2] \quad (1.112)$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 [\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi) + \omega_0 \cos^2(\Omega t + \phi)]. \quad (1.113)$$

El valor medio de esta expresión es el promedio sobre un periodo de $2\pi/\Omega$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{8} m R^2 (\omega_0^2 + \Omega^2). \quad (1.114)$$

Donde $\langle \rangle$ denota promedios temporales. Para detectar una fuente específica cuya frecuencia Ω se conoce, se ajusta $\Omega = \omega_0$ para una máxima respuesta (resonancia), como se ve en (1.109). En este caso la amplitud será

$$R_{\text{resonante}} = \frac{1}{4} l_0 A (\Omega/\gamma), \quad (1.115)$$

Y la energía de vibración

$$E_{\text{resonante}} = \frac{1}{64} m l_0^2 \Omega^2 A^2 (\Omega/\gamma)^2. \quad (1.116)$$

El coeficiente (Ω/γ) con el factor de calidad Q de una oscilación, con $1/Q$ la fracción promedio de energía de un oscilador, que pierde (debido a la fricción) en un radián de oscilación. Entonces $Q = (\Omega/\gamma)$ y en el caso resonante

$$E_{\text{resonante}} = \frac{1}{16} m l_0^2 \Omega^2 A^2 Q^2. \quad (1.117)$$

Detectores de Barras

Muchos detectores son barras cilíndricas de gran masa en donde el resorte será el coeficiente de elasticidad de la barra cuando se enlarga sobre su eje. Cuando una onda incide, excita sus modos longitudinales de vibración. Un detector comúnmente consta de barras de aluminio de dos metros de longitud y aproximadamente dos toneladas de masa, que trabaja a frecuencias típicas de alrededor de 10^3 Hz. Sus modos normales son monitoreados por un transductor electromagnético. Una onda gravitacional altera los modos normales, cambiando su amplitud y/o su fase de vibración y el transductor monitorea el cambio resultante. Además, haciendo que los modos cuadrupolares de la antena entren en resonancia a la frecuencia de la onda, el detector almacenará una "memoria" de excitación, permitiendo tiempo extra para detectar la señal. Así, en lugar de observar solo un dato instantáneo se puede integrar por largos periodos de tiempo para buscar cambios en la amplitud o fase del detector.

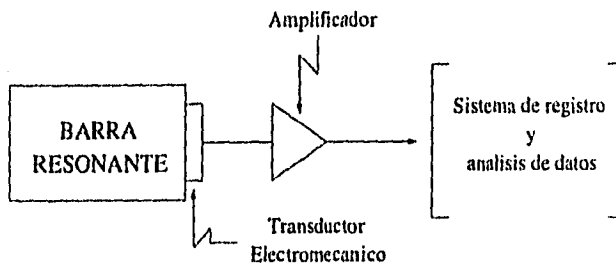


Figura 1.3: Esquema simplificado de un detector resonante

Los detectores de barras fueron inventados por J. Weber (1960); la primera generación, a temperatura del laboratorio, se desarrolló entre 1960 y 1976. La segunda generación, barras a temperatura de helio líquido, se desarrolló de 1973 a 1988 y una tercera generación de barras, enfriada a unos cuantos milikelvins está siendo desarrollada y operada en estos momentos por una docena de grupos en E.U., Europa, China, Japón, Rusia y Australia. La sensibilidad de ésta última será adecuada para detectar grandes núcleos no esféricos de supernovas en nuestra galaxia y en otras cercanas (hasta Andromeda). Sin embargo, se estima que el promedio de tales supernovas no es mayor de una cada diez años. Los detectores de barras son en la actualidad más sensibles que los interferómetros prototipo y lo serán hasta que el proyecto LIGO esté en operación.

1.7.2 Futuros Detectores

En las últimas tres décadas se ha realizado un gran avance tanto en la comprensión astrofísica como en la tecnología. Esto hace cada vez más posible la detección de las ondas gravitacionales. Para tal objeto se han propuesto diferentes proyectos para detectar las tres fuentes principales de ondas gravitacionales: las explosiones de radiación gravitacional, las ondas periódicas y las ondas estocásticas. Las explosiones son emisiones que duran un corto periodo de tiempo, unos cuantos ciclos. Entre las fuentes más potentes de explosiones se encuentran: el colapso de una estrella en una estrella de neutrones o en un hoyo negro, coalescencia de binarias compactas y la caída de estrellas y pequeños hoyos negros en hoyos negros supermasivos. Las fuentes de ondas periódicas principales son: estrellas de neutrones rotantes y estrellas binarias. Las ondas estocásticas son un potencial estacionario aleatorio de fondo de ondas gravitacionales. Este puede provenir de las ondas gravitacionales primordiales o de la superposición de la radiación de la gran población de estrellas binarias en nuestra galaxia y en otra.

La detección de ondas gravitacionales básicamente se puede dividir en tres partes: Detectores en la tierra, los cuales operan en la banda de frecuencia alta, (de 10,000 a 1 Hz). Detectores en el espacio, que operan en la banda de frecuencia baja (de 1 a 10^{-6} Hz) y detectores astronómicos los cuales operan en la banda de frecuencia muy baja (de 10^{-5} a 10^{-18} Hz). Por la importancia que tiene para la futura evolución de la Geometrodinámica aquí se hará énfasis en los primeros dos.

Detección en la Tierra: El proyecto LIGO.

Un interferómetro laser detector de ondas gravitacionales en su concepción más simple consiste en tres masas suspendidas por cables en los extremos de dos brazos ortogonales (una "L") como se muestra en la figura . Una onda gravitacional empuja las masas en vaivén una respecto a otra, cambiando la diferencia $L_x - L_y$, en la longitud de los dos brazos del detector (cada brazo se encuentra sobre un eje), en una cantidad ΔL que es proporcional a la longitud del brazo, $L = (L_x + L_y)/2$, y a una combinación de h_+ y h_x (los dos tipos de polarización de la onda gravitacional) [6] [5]:

$$\frac{\Delta L}{L} = [1/2(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi]h_+ + [\cos \theta \sin 2\phi]h_x \equiv h$$

Aquí (θ, ϕ) es la dirección de propagación de la onda. Por medio de interferometría laser uno puede obtener directamente $\Delta L/L$ y de su evolución temporal, la combinación llamada h de $h_+(t)$ y $h_x(t)$ en la ecuación anterior.

La interferometría es típicamente realizada en una de dos formas. Cada brazo se opera como una línea de retrazo con el haz de luz rebotando de un lado a otro en el

muchas veces. O cada brazo opera como una cavidad gigante de Fabry-Perot con una finura de 10,000. Configuraciones opticas mas sofisticadas llamadas reciclaje de banda ancha, reciclaje dual y reciclaje resonante, tiene el potencial de mejorar en gran medida la sensibilidad, e introduciendo "luz comprimida" en la parte oscura del interferometro, se puede obtener mayor sensibilidad aún.

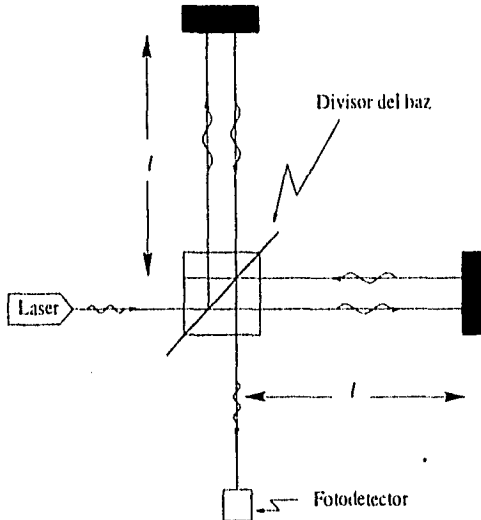


Figura 1.4: Esquema simplificado de un interferómetro láser de Michelson

Para la mayoría de las fuentes de ruido del detector (sismicidad, gradiente de gravedad, y ruido térmico), el ruido total desplazado ΔL en el interferómetro es independiente de la longitud del brazo L ; entonces la sensibilidad en la onda gravitacional $h = \Delta L/L$ se mejora agrandando la longitud del brazo. Interferómetros detectores prototipo con longitud de brazos de 1 a 40 metros se han desarrollado desde 1970, pero a partir de 1984 un grupo de universidades de E.U. decidieron construir y operar un gran sistema llamado "laser interferometer gravitational-wave detector" o LIGO. El multimillonario proyecto se supone estará listo en 1997.

Ahora, la detección inequívoca, en tierra, de rafagas de ondas gravitacionales necesita además correlación cruzada de dos detectores en sitios distantes. Por esta razón LIGO incluirá dos detectores en los E.U. muy apartados uno del otro. Para determinar la dirección (θ, ϕ) de una fuente y para separar sus dos polarizaciones $h_+(t)$ y $h_\times(t)$ se requerirá correlación cruzada de tres, y preferentemente cuatro detectores ampliamente separados. Por esta razón LIGO se apoyará en proyectos similares de Europa, Japón y Australia creando así una red mundial de detectores (la información del ángulo de incidencia proviene

principalmente de la diferencia de tiempos de arribo de la misma característica en un frente de onda, en tres diferentes sitios y de los patrones cuadrupolares de antena de los detectores). La sensibilidad que se estima alcanzarán los grandes interferómetros será del orden de 10^{-21} a frecuencias alrededor de los 100 Hz.

Detección en el Espacio: El proyecto MIGO.

Otro experimento propuesto para detectar ondas gravitacionales tiene lugar en el espacio es el proyecto MIGO: Michelson millimeter wave Interferometer Gravitational-wave Observatory. Este proyecto pretende poner tres naves espaciales en orbitas geoestacionarias alrededor de la tierra y así formar un interferómetro de Michelson en el espacio. El sistema será operado desde una base terrestre que proveera de una frecuencia estandar de alta estabilidad y el control de las señales de datos ver figura No.1.5. El MIGO deberá operar en un rango de frecuencias de las ondas gravitacionales entre 10^{-1} y 10^{-3} Hz. De acuerdo a estudios [3] deberá aproximarse a sensibilidades de explosiones de radiación gravitacional de alrededor de 10^{-18} , usando un interferómetro de micronda con frecuencia aproximada de 10^{11} Hz ($\lambda \approx 3 \times 10^{-3}$ m) y longitud de brazos de aproximadamente 60,000 Km. Sin embargo, la sensibilidad se incrementará para ondas gravitacionales periódicas.

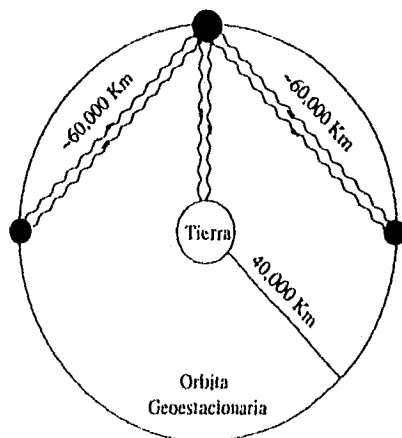


Figura 1.5: Observatorio espacial MIGO (Michelson millimeter wave Interferometer Gravitational wave space Observatory).

La limitación principal de la sensibilidad de MIGO es la estabilidad que cualquier base terrestre ofrece, pero si la longitud de los brazos fuera exactamente igual, se cancelaría cualquier inestabilidad. Así, la contribución en la inestabilidad de las frecuencias, que

liminan la sensibilidad, se reduciría por un factor $\frac{\delta L}{L}$ con δL la diferencia entre la longitud de los brazos y L la longitud total de ellos. Las perturbaciones en la longitud de los brazos puede ser causada por fuerzas no gravitacionales como presión de radiación y vientos solares. Estos errores se podrán eliminar con sistemas de arrastre libre o con mediciones de estas perturbaciones por medio de acelerómetros de alta precisión propuestos en el experimento MIGO. Otras fuentes de errores son ruido térmico, inestabilidad mecánica y térmica de la antena espacial.

El Proyecto LAGOS.

Abajo de los 10 Hz aproximadamente, la sensibilidad de los detectores de ondas gravitacionales en tierra estaran limitados por gradientes gravitacionales newtonianos que fluctuan. Abajo de 1 Hz el problema es tan grande que la detección de ondas se realiza mejor en el espacio. Hasta ahora la técnica principal para la detección en la banda de frecuencias bajas desde 1 Hz a 10^{-6} Hz ha sido la localización Doppler de naves espaciales, pero usando interferometría óptica entre naves orbitando el sistema solar, se obtendrá una mejor sensibilidad en el futuro.

Durante los primeros años del siguiente siglo el rastreo Doppler en la banda de frecuencias baja será remplazado por detectores interferométricos volando en el espacio. A este proyecto de la NASA se le llama "Laser Gravitational-wave Observatory in Space" o LAGOS. El diseño tentativo de LAGOS consiste en tres naves espaciales, en la esquina y los extremos de una gran L con longitud de brazos de 10 millones de kilómetros, ver figura 1.6. La nave central deberá tener una orbita circular alrededor del sol con periodo de un año. Escogiendo apropiadamente la posición de las otras dos naves se puede mantener un ángulo recto entre los dos brazos del interferómetro y mantener la distancia, entre las dos naves en los extremos y la central. De hecho, las dos naves de los extremos deben orbitar alrededor de la central con un periodo de un año en un plano inclinado 60° respecto del plano eclíptico. Un laser de un watt en la nave de la esquina mandara dos haces de luz a través de telescopios colimadores del haz, de 30 centímetros de diametro. Uno dirigido a cada nave en los finales de la L . Cada nave en lugar de regresar el haz con un espejo, lo recibirá, le enlazara uno propio y transmitirá la luz enlazada por fase desde ese laser de regreso a la nave de la esquina. Ahí se podra aplicar la interferometría a los dos haces rebotados, u otra tecnica, del mismo modo que en la tierra, para comparar sus fases entre sí y con la que fue transmitida. Quizá el aspecto tecnológico más complicado para LAGOS es asegurarse que, a pesar del golpeteo estocastico del viento y radiación solar, cada espejo del interferometro, se mueva sobre una geodesica espacio-temporal (a excepción de los breves momentos en que la distribución de masa de la nave es ajustada). El movimiento geodésico en el diseño de LAGOS es asegurado por un sistema de arrastre libre. Cada espejo se coloca sobre una masa de prueba, la cual es protegida del viento y la radiación solar por la misma nave que la rodea. La masa de prueba se mueve sobre una

geodésica y la nave percibe su movimiento sin influenciarla (en la medida de lo posible). La nave entonces enciende unos pequeños propulsores para forzarla a seguir la masa de prueba manteniéndola siempre en su centro.

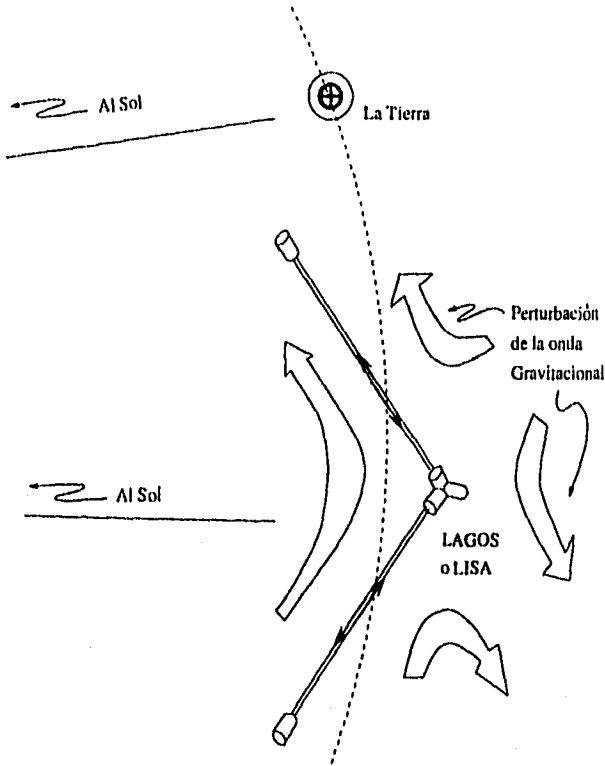


Figura 1.6: Observatorio espacial de ondas gravitacionales. LAGOS: Laser Gravitational-wave Observatory in space, o LISA

Considerando todas las fuentes de error, se ha calculado que para ondas gravitacionales periódicas con tiempo de integración de alrededor de un año, LAGOS debe alcanzar una sensibilidad capaz de detectar amplitudes de $h \sim 10^{-24}$, en el rango de frecuencias entre 10^{-3} y 10^{-2} Hz, amplitudes alrededor de $h \sim 10^{-20}$ a 10^{-24} entre 10^{-4} y 10^{-3} Hz, amplitudes alrededor de $h \sim 10^{-22}$ a 10^{-24} entre 1 y 10^{-2} Hz. Para ondas gravitacionales estocásticas y explosiones de radiación gravitacional LAGOS debe alcanzar sensibilidades de alrededor $h \sim 10^{-21}$ a 10^{-3} Hz, y entre $h \sim 10^{-18}$ a 10^{-21} entre 10^{-4} y 10^{-3} Hz y entre 1 y 10^{-3} Hz.

Comparando la sensibilidad de LAGOS con las amplitudes predicha teoricamente para la radiación gravitacional, a estas frecuencias LAGOS debera ser capaz de detectar ondas gravitacionales de binarias galacticas, incluidas binarias ordinarias de secuencia principal, binarias de contacto, variables cataclismicas, enanas blancas cercanas binarias y estrellas de neutrones binarias. La sensibilidad de LAGOS podra detectar posibles pulsos gravitacionales de la caída en espiral de objetos compactos en hoyos negros supermasivos en nucleos galacticos activos y del colapso de objetos muy masivos formando hoyos negros.

Mientras que en el proyecto LIGO se necesitan al menos dos detectores, en el LAGOS solo se necesita uno. La razón es que las ondas mas fuertes en la banda de frecuencias alta de LIGO, son pequeñas ráfagas que, pueden ser simuladas muchas veces al día por fuentes de ruido que no se comprenden bien. Para eliminar tal ruido es necesario la correlación cruzada de los resultados de dos o mas detectores independientes. En contraste en la frecuencia baja de LAGOS la mayoría de las más fuertes señales de onda permanecen durante bastantes ciclos (ondas periodicas de sistemas binarios, ondas de frecuencia del barrido de objetos cayendo en espiral a un agujero negro, ondas estocásticas del Big-bang). Tales señales no son facilmente simuladas por ruido.

LAGOS y el proyecto LINE-SAGITTARIUS descrito en el siguiente parrafo se han combinado en un solo proyecto de la ESA (European Space Agency), llamado LISA (Laser Interferometer Space Antenna).

El Proyecto SAGITTARIUS-LINE.

Otro experimento, orbitando la tierra, propuesto para detectar ondas es SAGITTARIUS (Spaceborne Astronomical Gravitational-waves Interferometer Testing Aspects of Relativity and Investigating Unknown Sources), tambien llamado LINE (Laser Interferometer Near Earth). Constara de 4 ó 6 satelites orbitando la tierra en orbita geocentricas circulares a 600 000 Km de altitud, formando un interferometro en el espacio; estaran en los tres vertices de un triángulo. La longitud de brazos de este interferómetro sera de aproximadamente 1 millón de km. Dos naves cercanas correspondientes a la masa central del interferómetro laser de la figura (1.4) y las otras dos correspondientes a sus masas finales, cada una sera localizada por una de las naves centrales. Una configuración alternativa propuesta con dos naves en cada vertice del triangulo. Cada nave estaria equipada con acelerómetros muy precisos y propulsores de iones capaces de proporcionar muy pequeños impulsos.

Las señales laser propagandose en un brazo del interferómetro generadas desde uno de los satelites centrales y regresadas transponderadas del satelite final correspondiente, serán comparadas con la señal original en la nave central. Cuando una onda gravitacional atraviese al mismo tiempo, por ejemplo perpendicular al brazo, se producira un corrimiento Doppler $\delta\nu$, en la frecuencia ν_0 del pulso del laser $\frac{\delta\nu}{\nu_0} \sim h$, donde h es la perturbación

métrica de la onda gravitacional. De la integral del tiempo de la diferencia entre las dos señales Doppler uno obtendrá la fase relativa del interferómetro $\frac{d(\delta\phi)}{dt} = 2\pi(\delta\nu_1 - \delta\nu_2)$.

Para ondas gravitacionales periódicas y un tiempo de integración de alrededor de cuatro meses, se ha estimado que SAGITTARIUS alcanzará una sensibilidad correspondiente a amplitudes del orden de $h \sim 10^{-23}$ en el rango de frecuencias entre 10^{-1} y 10^{-3} Hz.

De acuerdo a la teoría general de la relatividad, SAGITTARIUS será capaz de detectar ondas de algunas estrellas binarias conocidas con frecuencias de alrededor de $h \sim 10^{-21}$ y de algunas fuentes probables tales como, estrellas de neutrones binarias, hoyos negros binarios, enanas blancas binarias y de algunas fuentes estocásticas exóticas tales como hoyos negros supermasivos en núcleos galácticos.

Localización Interplanetaria Doppler.

Considerese una señal electromagnética que se envía de un punto A , la Tierra, a un punto B , una nave espacial orbitando en el sistema solar y es reflejada de regreso al punto original A . Si en el mismo tiempo una onda gravitacional con longitud de onda del orden de la distancia entre la tierra y la nave se propaga entre el punto A y el punto de reflexión B , entonces se producirán oscilaciones en el corrimiento Doppler de la radiación electromagnética recibida. Las oscilaciones en el corrimiento Doppler tendrán una magnitud relativa $\frac{\delta\nu}{\nu} \approx h^{TT}$, con ν la frecuencia de la onda electromagnética y h la perturbación métrica en la norma sin traza, transversa.

En la práctica, la localización Doppler de naves espaciales en el sistema solar utiliza una frecuencia estandar de alta estabilidad en la tierra (un reloj maser de hidrogeno) para el control de las ondas electromagnéticas emitidas. Se refleja la onda desde la nave, con una fase coherente, y se compara nuevamente la frecuencia de la onda recibida con la del reloj en la tierra. La localización Doppler en el espacio trabaja en el rango de frecuencias de ondas gravitacionales entre 10^{-1} y 10^{-4} Hz aproximadamente. Se han hecho mediciones preliminares con el Viking, Voyager, Pioneer 11 y 12 con el ULYSSES y el GALILEO y se realizarán en la misión CASSINI.

La fuente principal de error en este tipo de experimento se debe a la densidad de fluctuación de plasma interplanetario, que produce fluctuaciones en la dispersión de las ondas de radio y en consecuencia, oscilaciones en el corrimiento Doppler. Esto se puede reducir utilizando frecuencias de localización en la banda X (10 GHz) en la nave GALILEO y localización en la banda K en CASSINI.

Con la misión GALILEO y CASSINI la sensibilidad de explosiones de radiación deben ser mejores que $\sim 10^{-14}$ y $\sim 10^{-15}$ respectivamente en el rango de frecuencias entre 10^{-2} y 10^{-4} Hz. En el futuro la sensibilidad se mejorara hasta $h \sim 10^{-17}$.

A pesar de todo, los detectores en el espacio no compiten con detectores basados en observaciones astronómicas, tratando de encontrar ondas con frecuencias muy pequeñas (como la radiación de fondo producida en el universo temprano). Entre los detectores astronómicos más sensibles están los pulsares de milisegundos, en particular el pulsar PSR 1913+16², y el retardo entre diferentes imágenes en lentes gravitacionales.

Finalmente es de esperarse que cuando las ondas gravitacionales puedan ser detectadas se efectuará una completa revolución en la astronomía y se ampliará profundamente nuestra comprensión del universo puesto que mucha de la información que recibimos de él (a través de luz, neutrinos, ondas de radio) se pierde en su trayecto a la tierra. Esto no ocurrirá con la información que obtengamos de las ondas gravitacionales debido a su gran poder de penetración. Se podrá conocer desde el comportamiento del universo a escalas del tiempo de Planck (10^{-43} seg) hasta lo que ocurre dentro de un agujero negro, en fin las detecciones que se planean con LIGO, MIGO, LAGOS y los demás detectores, nos darán un mayor entendimiento del universo cuando se confirmen.

²De hecho la observación de la coalecencia en el pulsar binario PSR 1913+16 concuerda con la teoría de Einstein con solo el 1% de error. Como este fenómeno astronómico solo es explicable debido a la emisión de radiación gravitacional, esta es la única evidencia indirecta de la existencia de ondas gravitacionales.

Capítulo 2

Ondas Gravitacionales con Rotación

2.1 Introducción

En electrodinámica, la generación de ondas rotantes electromagnéticas es un efecto que se puede explicar con mucha exactitud, y su observación experimental es un fenómeno común en el laboratorio. Pueden crearse estableciendo un campo de radiación electromagnética en una guía de ondas cilíndrica, de tal forma que la onda viaje alrededor del eje de la cavidad coaxial [7]. El confinamiento del campo electromagnético en la región anular se debe básicamente a la posibilidad de movimiento relativo de cargas positivas y negativas en las paredes cilíndricas de la cavidad. En una configuración similar, las ondas gravitacionales podrían dirigirse interiormente, sobre el eje de simetría y, a la vez, exteriormente, hacia el infinito. Para construir un análogo gravitacional de las ondas rotantes electromagnéticas, es más sencillo si excluimos las paredes de la cavidad y dejamos que el cilindro interno se reduzca al eje de rotación y el cilindro externo resida en el infinito. En este capítulo consideraremos las soluciones en el vacío de las ecuaciones del campo gravitacional correspondiente a esta imagen intuitiva. Se mostrará, explícitamente, que las soluciones de este tipo existen, pero acompañadas de singularidades en la curvatura. Además las ecuaciones del campo electromagnético son lineales, por eso podemos expresar una onda rotante electromagnética en el vacío como la superposición lineal de ondas planas familiares, mientras que una descomposición similar no es posible para el caso gravitacional debido a la no linealidad de las ecuaciones del campo. Es esto lo que complica la interpretación física de ondas gravitacionales con rotación.

En la sección 2.1, veremos brevemente propiedades y teoría de las ondas Beck-Einstein-Rosen, y también se discutirá la posibilidad de derivar estas soluciones con dos estados de polarización. En la sección 2.3 se obtienen, una generalización del elemento de línea de Beck-Einstein que incluye el caso con rotación y las ecuaciones del campo para este

caso. En las secciones 2.4 y 2.5 se presenta una solución aproximada y una exacta, respectivamente, que describe la propagación de ondas gravitacionales con rotación en el vacío. La solución exacta contiene dos funciones arbitrarias que dependen del tiempo avanzado y retardado, respectivamente. Estas funciones se pueden fijar exigiendo que la onda posea una forma realista particular. Se muestra que la rotación de las ondas conduce al arrastre de partículas libres que se mueven en este campo gravitacional. Finalmente en la sección 2.6 se discute la estructura de las singularidades que acompañan a este tipo de ondas gravitacionales así como su significado físico.

2.2 Ondas de Beck-Einstein-Rosen

En 1925, Beck [8] descubrió una clase de soluciones exactas, con simetría cilíndrica, para las ecuaciones del campo gravitacional. Lo hizo transformando los campos de Weyl usando variable compleja. Interpretó estas soluciones como la representación de ondas gravitacionales cilíndricas. Esta clase de soluciones fue redescubierta y estudiada en 1937 por Einstein y Rosen [9] como un ejemplo de ondas gravitacionales no lineales. Investigaron las condiciones para la existencia de ondas estacionarias y progresivas. En el caso de ondas progresivas, se dieron cuenta que el eje de simetría era una singularidad, pero que se podía evitar el problema si se localizaba la fuente de ondas gravitacionales en el eje. Desde esa época se han hecho grandes esfuerzos para darles una interpretación física a este tipo de soluciones [10] - [16] y de acuerdo a las investigaciones realizadas, las soluciones de Einstein-Rosen describen el campo exterior de un cuerpo con simetría cilíndrica emanando ondas gravitacionales de un solo estado de polarización.

Después Jordan, Ehlers y Kundt [17] e independientemente Kompaneets [38] han generalizado el elemento de línea de las ondas cilíndricas para incluir el caso con dos estados de polarización (investigaciones recientes se han dedicado al caso en que la polarización es arbitraria). El elemento de línea correspondiente se puede escribir

$$ds^2 = -e^{2(\gamma-\psi)} dt^2 + e^{-2\psi} (e^{2\gamma} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) + e^{2\psi} (dz + \omega d\varphi)^2 \quad (2.1)$$

donde ψ , γ y ω son funciones de ρ y t solamente. Aquí t es una coordenada temporal, ρ es una coordenada radial que indica la distancia al eje de simetría, φ denota el ángulo azimutal en un plano horizontal normal a este eje y z mide la distancia sobre el mismo.

En los últimos años se han desarrollado varios métodos para generar nuevas soluciones de una que ya es conocida [20]. Esto significa que uno puede usar las técnicas de generación de soluciones para obtener soluciones del tipo (2.1) con estados de polarización diferentes ($\omega \neq 0$), empezando con la solución de Einstein-Rosen ($\omega = 0$). De hecho, esta analogía se ha usado por Chandrasekar, Ferrari e Ibañez [19] para generar algunas soluciones cilíndricas específicas, las cuales representan colisiones de ondas gravitacionales

con diferentes estados de polarización. Las ecuaciones de Einstein para el elemento de línea (2.1) con un estado de polarización ($\omega = 0$) conducen a una ecuación lineal para ψ [ver ec. (2.2)] para la cual se puede encontrar su solución general como una suma infinita de soluciones particulares. Entonces, uno puede usar la solución general de Einstein-Rosen como métrica generatriz y usando las técnicas para generar soluciones, obtener la solución general de onda con estados de polarización diferente.

Lo que haremos aquí será investigar una generalización del elemento de línea (2.1) que incluya el caso de fuentes rotando y ondas gravitacionales. Para simplificar el análisis trataremos el caso de ondas gravitacionales con un solo estado de polarización.

2.3 Elemento de Línea y Ecuaciones de Campo

Las ondas gravitacionales cilíndricas se caracterizan por la existencia de un grupo de movimiento de doble parámetro con dos vectores de Killing tipo espacio digamos ξ y η . Las simetrías asociadas con los vectores de Killing significan que el sistema es invariante bajo rotaciones alrededor del eje de simetría y translaciones sobre el mismo o sea $\rho = 0$. Sea φ un ángulo azimutal alrededor de este eje y z la coordenada medida sobre él. Entonces $\xi = \partial/\partial\varphi$ y $\eta = \partial/\partial z$. Si t es la coordenada temporal, para asociar al elemento de línea con el de una fuente rotante entonces se debe cumplir $g_{t\varphi} \neq 0$ lo cual significa que la rotación es alrededor de $\rho = 0$, el eje de simetría. Bajo esta suposición el elemento de línea se puede escribir de la siguiente manera

$$ds^2 = -Bdt^2 + 2kdt d\varphi + 2md\rho dt + Ad\rho^2 + Cdz^2 + 2pdz d\varphi + 2Dd\varphi^2 \quad (2.2)$$

donde todos los coeficientes son funciones solo de ρ y t . En lo siguiente consideremos el caso especial en el cual los vectores de Killing ξ y η son hipersuperficie-ortogonales i.e. $p = 0$ en la ec. (2.2). También excluirémos el caso de ondas gravitacionales con dos polarizaciones.

Considerese la transformación de coordenadas

$$\rho = F(\rho', t') \quad y \quad t = G(\rho', t') \quad (2.3)$$

introduciendo estas nuevas coordenadas en el elemento de línea (2.2) y exigiendo

$$g'_{\rho t} = 0 \quad y \quad g'_{\rho\varphi} = 0 \quad (2.4)$$

obtenemos (quitando de una vez las primas)

$$BG_{,\rho}F_{,\rho} + m(G_{,\rho}F_{,\rho} + F_{,\rho}G_{,\rho}) - AG_{,\rho}F_{,\rho} = 0 \quad (2.5)$$

$$G_{,\rho} = 0 \quad (2.6)$$

respectivamente y la condición de integrabilidad

$$\left(\frac{A}{m}F_{,t}\right)_{,t} = \left(\frac{m}{A}F_{,p}\right)_{,p} \quad (2.7)$$

siempre puede ser satisfecha para m y A arbitraria. De acuerdo a esto el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -Bdt^2 + 2kdt d\varphi + Ad\rho^2 + Cdz^2 + 2Dd\varphi^2 \quad (2.8)$$

Este elemento de línea general es invariante bajo transformaciones de coordenadas de la forma

$$t' = F(t) \quad \rho' = G(\rho) \quad \varphi = \varphi + f(t) \quad z' = z + cte. \quad (2.9)$$

donde F , G y f son funciones arbitrarias de sus respectivas coordenadas.

Lo que falta solo es introducir el tensor métrico (2.8) en las ecuaciones de Einstein para el vacío y buscar solución para el sistema resultante.

En el caso general cuando los coeficientes de la métrica son funciones de ρ y de t , no se conoce ninguna solución exacta. Las técnicas para generar soluciones no se aplican a este caso pues generan el término cruzado $g_{z\varphi}$ pero no el $g_{t\varphi}$. Entonces tenemos que analizar las ecuaciones de campo explícitamente. Las componentes del tensor de Ricci de (2.8), diferentes de cero, se puede escribir en nuestra notación $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \rho, z, \varphi)$, como

$$\begin{aligned} \frac{2R_{00}}{\bar{\alpha}} &= -\frac{1}{C} \left(\frac{C_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \frac{1}{A} \left[\left(\frac{A_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \left(\frac{B_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} \right] \\ &\quad - \frac{B}{\alpha} \left(\frac{D_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} + \frac{1}{\bar{\alpha}^3} \frac{B}{C} (B_{,p}D_{,p} - A_{,t}D_{,t} + k^2_{,p}) + \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{C_{,t}^2}{C^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{2R_{01}}{\bar{\alpha}} &= -\frac{k}{\alpha} \left(\frac{k_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \frac{1}{C} \left(\frac{C_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} - \frac{B}{\alpha} \left(\frac{D_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \frac{1}{2AC\bar{\alpha}} (A_{,p}C_{,t} - A_{,t}C_{,p}) \\ &\quad + \frac{1}{2\bar{\alpha}^3} \frac{A}{C} (B_{,p}D_{,t} - B_{,t}D_{,p}) + \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{C_{,t}C_{,p}}{C^2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{2R_{03}}{\bar{\alpha}} = -\left(\frac{k_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} + \frac{Ak}{\alpha} \left(\frac{D_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \frac{1}{\bar{\alpha}^3} \frac{Ak}{C} (B_{,p}D_{,p} - A_{,t}D_{,t} + k^2_{,p}), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{2R_{11}}{\bar{\alpha}} &= -\frac{1}{C} \left(\frac{C_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} + \frac{D}{\alpha} \left[\left(\frac{A_{,t}}{\bar{\alpha}}\right)_{,t} - \left(\frac{B_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} \right] - \frac{B}{\alpha} \left(\frac{D_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} - 2\frac{k}{\alpha} \left(\frac{k_{,p}}{\bar{\alpha}}\right)_{,p} \\ &\quad - \frac{1}{\bar{\alpha}^3} \frac{A}{C} (B_{,p}D_{,p} - A_{,t}D_{,t} + k^2_{,p}) + \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{C_{,p}^2}{C^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{2\alpha R_{13}}{\tilde{\alpha}} = \left(\frac{kD_{,\rho} - Dk_{,\rho}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,t}, \quad (2.14)$$

$$\frac{2AR_{22}}{\tilde{\alpha}} = \frac{AD}{\alpha} \left(\frac{C_{,t}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,t} - \left(\frac{C_{,\rho}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,\rho} + \frac{A^2 D C_{,t}}{\tilde{\alpha}^3 C} \left(\frac{A_{,t}}{A} - \frac{C_{,t}}{C} + \frac{D_{,t}}{D} \right) + \frac{C_{,\rho}}{\tilde{\alpha}} \left(\frac{C_{,\rho}}{C} - \frac{\alpha_{,\rho}}{\alpha} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{2AR_{33}}{\tilde{\alpha}} = - \left(\frac{D_{,\rho}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,\rho} + \frac{AD}{\alpha} \left(\frac{D_{,t}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,t} - \frac{1}{\tilde{\alpha}^3} \frac{AD}{C} (B_{,\rho} D_{,\rho} - A_{,t} D_{,t} + k^2). \quad (2.16)$$

Aquí $\alpha = BD + k^2$ y $\tilde{\alpha} = \left[\frac{A}{C} (BD + k^2) \right]^{1/2}$. (2.17)

Para el caso del vacío, de las ecuaciones (2.12) y (2.16) obtenemos

$$2 \frac{A}{\tilde{\alpha}} (DR_{03} - kR_{33}) = \left(\frac{kD_{,\rho} - Dk_{,\rho}}{\tilde{\alpha}} \right)_{,\rho} = 0. \quad (2.18)$$

La ecuación anterior y la ec (2.14) se pueden integrar y resulta ($l = \text{cte. de integración}$).

$$kD_{,\rho} - Dk_{,\rho} = l\tilde{\alpha}, \quad (2.19)$$

En el caso general del elemento de línea (2.8), la solución exacta no se conocía. Para obtener algún indicio respecto a la estructura de las ecuaciones del campo se investigó primero la posibilidad de obtener soluciones aproximadas y después regresar al caso original. Esto se muestra en las siguientes secciones.

2.4 Aproximación a Primer Orden

Consideraremos ahora el caso de una fuente gravitacional con lenta rotación. Esto significa que podemos expandir el elemento de línea (2.2) en potencias de un parámetro pequeño, $\epsilon \ll 1$, el cual se relaciona con la velocidad angular de la fuente [21]. Suponiendo que $B = A$, obtenemos de (2.2), a primer orden en ϵ , la siguiente métrica

$$ds^2 = (A_0 + \epsilon A_1)(dt^2 - d\rho^2) - 2\epsilon k dt d\varphi - (C_0 + \epsilon C_1) dz^2 - (D_0 + \epsilon D_1) d\varphi^2 \quad (2.20)$$

En el caso límite $\epsilon = 0$, obtenemos de (2.20) el elemento de línea de Einstein-Rosen. Las ecuaciones de campo, entonces, se pueden escribir como ($D_0 = \rho^2/C_0$)

$$A_{0,\rho} = \frac{A_0}{2C_0^2} (\rho C_{0,\rho}^2 - 2C_0 C_{,\rho} + \rho C_{0,t}^2), \quad A_{0,t} = A_0 \frac{C_{0,t}}{C_0} (\rho C_{0,\rho} - C_0),$$

$$C_{0,\rho\rho} - C_{0,tt} + \frac{1}{\rho} C_{0,\rho} - \frac{C_{0,\rho}^2}{C_0} + \frac{C_{0,t}^2}{C_0} = 0, \quad (2.21)$$

O introduciendo en el elemento de línea (2.20), $C_0 = e^{2\psi}$, $A_0 = e^{2(\gamma-\psi)}$ y $C_0 D_0 = \rho^2$ nos conduce a las ecuaciones del campo

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} - \psi_{,tt} = 0, \quad \gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2), \quad \gamma_{,t} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t}. \quad (2.22)$$

Con las notaciones introducidas anteriormente vemos que a orden cero el elemento de línea (2.20) coincide con el de Einstein-Rosen con $\omega = 0$ [ec. (2.1)]. Entonces, las ecuaciones (2.22) corresponden a las de Einstein-Rosen y sus soluciones describen ondas gravitacionales con un estado de polarización.

Introduciendo las ecs.(2.22) en las ecuaciones del campo y expandiendo en series de potencias de ε , obtenemos a primer orden en ε el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

$$C_{1,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}C_{1,\rho} - C_{1,tt} + \frac{2}{C_0}(C_{0,t}C_{1,t} - C_{0,\rho}C_{1,\rho}) + \frac{C_1}{C_0^2}(C_{0,\rho}^2 - C_{0,t}^2) = 0,$$

$$A_{1,t} = \frac{A_1}{A_0}A_{0,t} + \frac{C_{1,t}}{C_{0,t}}A_{0,t} + \frac{A_0 C_{0,t}}{C_0^3}[\rho C_0 C_{1,\rho} + C_1(C_0 - 2\rho C_{0,\rho})],$$

$$A_{1,\rho} = \frac{A_1}{A_0}A_{0,\rho} - 2\frac{C_1}{C_0}A_{0,\rho} - \frac{A_0}{C_0^2}[C_1 C_{0,\rho} - C_{1,\rho}(\rho C_{0,\rho} - C_0) - \rho C_{0,t}C_{1,t}], \quad (2.23)$$

$$\bar{k}_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\bar{k}_{,\rho} - \frac{1}{2C_0^2}(C_{0,\rho}^2 + C_{0,t}^2)(\rho\bar{k}_{,\rho} - 2\bar{k}) = 0,$$

$$\bar{k}_{,\rho t} - \frac{2}{\rho}\bar{k}_{,t} - \frac{C_{0,\rho}C_{0,t}}{C_0^2}(\rho\bar{k}_{,\rho} - 2\bar{k}) = 0,$$

con

$$D_1 = \rho^2/C_1, \quad y \quad \bar{k} = kC_0. \quad (2.24)$$

Como las funciones A_0 y C_0 se supone son conocidas, Las ecs.(2.23) representan un sistema de ecuaciones diferenciales para A_1 , C_1 y \bar{k} . Se puede demostrar que las condiciones de integrabilidad de este sistema de ecuaciones son satisfechas por (2.21) y (2.22). Buscando una solución simple del sistema (2.23) encontramos

$$A_1 = aA_0, \quad C_1 = bC_0, \quad (2.25)$$

$$\bar{k} = \rho^2 \left(k_0 + s_0 \int \frac{e^{2\gamma}}{\rho^3} d\rho \right), \quad (2.26)$$

donde a y s_0 son constantes de integración y $k_0(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

Para investigar el significado físico de las constantes de integración debemos notar que las ecuaciones de perturbación (2.23) se descomponen en, una parte de Einstein-Rosen perturbada y una parte rotacional. Las ecuaciones de Einstein-Rosen (2.22) permanecen inalteradas cuando A_0 y C_0 , son reemplazados por $\zeta_A A_0$ y $\zeta_C C_0$, donde ζ_A y ζ_C son constantes reales diferentes de cero. Entonces $\zeta_A = 1 + \varepsilon a$ y $\zeta_C = 1 + \varepsilon b$ dan una solución trivial a las ecuaciones de Einstein-Rosen perturbadas. Además la solución general (2.26) de la perturbación rotacional tiene una parte trivial correspondiente a la transformación de las ondas Einstein-Rosen en un marco de referencia que rota lentamente con frecuencia $\varepsilon k_0(t)$. Entonces, la única solución no trivial está caracterizada por el parámetro de rotación s_0 .

Ahora, considerese el movimiento de una partícula de prueba en este campo. Como φ es una coordenada cíclica, la primera integral correspondiente se reduce a

$$p_\varphi = \varepsilon k_1 \dot{t} + D_0(1 - \varepsilon b) \dot{\varphi} \quad (2.27)$$

donde p_φ es el momento angular de la partícula de prueba. Aquí el punto indica derivación respecto del tiempo propio de la partícula de prueba. Se deduce entonces que aún para $p_\varphi = 0$ la partícula adquiere una pequeña velocidad

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx -\varepsilon \frac{k_1}{D_0} = -\varepsilon \left(k_0 + s_0 \int \frac{e^{2\gamma}}{\rho^3} d\rho \right), \quad (2.28)$$

cuando se mueve en este campo. Entonces, hemos visto que las constantes a y b están relacionadas con la solución Einstein-Rosen perturbada, k_0 y s_0 determinan la velocidad angular de la partícula y s_0 está relacionada con el momento angular de la fuente.

2.5 Una Solución Exacta

Para encontrar solución al sistema de ecuaciones que resulta de las componentes no nulas del tensor de Ricci (sección 2.3), definiremos

$$B = A - \frac{K^2}{D}. \quad (2.29)$$

Esta elección especial se determinó al analizar la forma de la solución aproximada dada en la sección anterior, y del hecho de que la métrica de Minkowski en un marco rotante, debe estar contenida en la ec (2.2) como un caso especial trivial. Nuestra elección (2.29) reduce las clases de soluciones que podemos obtener pues representa una relación algebraica fija entre la mayoría de las funciones que componen la métrica. Introduciendo la notación

$$C = e^{2\psi}, \quad D = \mu^2 e^{-2\psi}, \quad A = e^{2(\gamma-\psi)}, \quad k = \omega \mu^2 e^{-2\psi}, \quad (2.30)$$

el elemento de línea (2.2) se transforma en [22]

$$ds^2 = -e^{2(\gamma-\psi)}(dt^2 - d\rho^2) + \mu^2 e^{-2\psi}(\omega dt + d\varphi)^2 + e^{2\psi} dz^2. \quad (2.31)$$

Haciendo uso de las ec. (2.29) y (2.30) las ecuaciones del campo en el vacío dadas en la sección 2.3, se reducen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$(\mu\psi_{,\rho})_{,\rho} - (\mu\psi_{,t})_{,t} = 0, \quad (2.32)$$

$$\mu_{,tt} - \mu_{,\rho\rho} - \frac{l}{2}\omega_{,\rho} = 0, \quad l = \text{cte.}, \quad (2.33)$$

$$\omega_{,\rho} = l e^{2\gamma} \mu^{-3}, \quad (2.34)$$

$$2\gamma_{,\rho} = \frac{1}{\mu_{,\rho}^2 - \mu_{,t}^2} \left\{ \mu_{,t} [\mu_{,\rho\rho} + \mu_{,tt} + 2\mu(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2)] - 2\mu_{,t}(\mu_{,\rho t} + 2\mu\psi_{,\rho}\psi_{,t}) \right\}, \quad (2.35)$$

$$2\gamma_{,t} = -\frac{1}{\mu_{,\rho}^2 - \mu_{,t}^2} \left\{ \mu_{,t} [\mu_{,\rho\rho} + \mu_{,tt} + 2\mu(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2)] - 2\mu_{,\rho}(\mu_{,\rho t} + 2\mu\psi_{,\rho}\psi_{,t}) \right\}. \quad (2.36)$$

La condición de integrabilidad para la función γ es equivalente a las ec. (2.32), (2.33) y (2.34). De (2.34) la función ω puede ser determinada una vez que γ y μ se conocen. Haciendo $l = 0$ y eligiendo $\mu = \rho$ como solución de (2.33), las ecuaciones del campo (2.32), (2.33) y (2.34) se reducen a (2.22), o sea, al caso Einstein-Rosen. En este caso ω es una función arbitraria de t la cual puede ser eliminada del elemento de línea (2.31), introduciendo un nuevo ángulo azimutal. Entonces el caso especial $l = 0$ nos conduce al elemento de línea de Einstein-Rosen en un marco rotante. Consecuentemente exigimos ahora que $l \neq 0$. Para analizar este caso general, es útil introducir el tiempo "retardado" u y el tiempo "avanzado" v como $u = t - \rho$ y $v = t + \rho$. Las ecuaciones del campo (2.32-2.36) se transforman en

$$(\mu\psi_{,v})_{,u} + (\mu\psi_{,u})_{,v} = 0, \quad (2.37)$$

$$\mu_{,uv} - \frac{l^2}{8} e^{2\gamma} \mu^{-3} = 0, \quad (2.38)$$

$$\omega_{,v} - \omega_{,u} = l e^{2\gamma} \mu^{-3}, \quad (2.39)$$

$$\gamma_{,u} = \frac{1}{2\mu_{,u}} (\mu_{,uu} + 2\mu\psi_{,u}^2), \quad (2.40)$$

$$\gamma_{,v} = \frac{1}{2\mu_{,v}} (\mu_{,vv} + 2\mu\psi_{,v}^2). \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.37, 2.38) y (2.40, 2.41) son acopladas. Calculando las derivadas parciales de (2.38) respecto a u y v y comparándolas con (2.40) y (2.41), obtenemos

$$2\mu^2 \psi_{,u}^2 = 3\mu_{,u}^2 - \mu\mu_{,uv} + \mu\mu_{,u}\mu_{,uvv}(\mu_{,uv})^{-1}. \quad (2.42)$$

$$2\mu^2 \psi_{,v}^2 = 3\mu_{,v}^2 - \mu\mu_{,uv} + \mu\mu_{,v}\mu_{,uvv}(\mu_{,uv})^{-1}. \quad (2.43)$$

Introduciendo estas últimas ecuaciones en la ec. (2.37) se obtiene una ecuación diferencial parcial de cuarto orden en μ la cual se satisface idénticamente si μ es una función separable, es decir si $\mu = \alpha(v)\beta(u)$. En este caso especial las ecuaciones de campo restante se pueden integrar inmediatamente. El resultado es

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha\beta, \\ \psi &= \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \frac{\alpha}{\beta}, \\ \gamma &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{8}{l^2} (\alpha\beta)^3 \alpha_{,v}\beta_{,u} \right], \\ \omega_{,v} &= \omega_{,u} + \frac{8}{7} \alpha_{,v}\beta_{,u}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

El sistema anterior representa una solución de las ecuaciones del campo para valores arbitrarios de α y β , funciones del tiempo avanzado y retardado, respectivamente. La función ω de la métrica está dada por una ecuación diferencial a primer orden la cual determinará ω módulo una función arbitraria $\omega_0 = \omega_0[(u+v)/2] = \omega_0(t)$. Esto significa que en cada punto $\rho = (u-v)/2 = \text{cte}$, se puede escoger ω_0 de tal forma que ω se anule. Físicamente esto significa que en cada punto del espacio es posible introducir un marco de referencia que rota junto con la fuente gravitacional.

2.6 Acerca del Significado Físico de la Solución

Introduciendo la notación

$$\alpha = \exp \left\{ -\sqrt{3/2} V(v) \right\} \quad \text{y} \quad \beta = \exp \left\{ -\sqrt{3/2} U(u) \right\} \quad (2.45)$$

la función ψ toma la forma

$$\psi = U(u) - V(v). \quad (2.46)$$

El significado de esta ecuación es que la función ψ representa la superposición de una onda que entra y una onda que sale. Como U y V son funciones arbitrarias siempre es posible crear una forma realista para la onda. Como los términos restantes de la métrica se dan en función de U y V , estos también se pueden construir para describir ondas realistas.

Entonces el carácter de onda de la solución es claro. También notamos que la función ψ satisface la ecuación escalar de onda en el espacio-tiempo descrito por la solución (2.44), i.e.

$$(\sqrt{-g}g^{\lambda\tau}\psi_{,\tau})_{,\lambda} = 2 [(\mu\psi_{,u})_{,v} + (\mu\psi_{,v})_{,u}] = 0, \quad (2.47)$$

donde g es el determinante del tensor métrico. El lado derecho de la ecuación anterior es equivalente a la ecuación para el campo (2.37) que se satisface por la función ψ , la cual entonces se puede interpretar como el potencial de onda escalar.

2.6.1 Propagación y Rotación.

Del tensor de Riemann es posible formar 14 escalares cuadráticos funcionalmente independientes de los cuales solo cuatro son diferentes de cero en el vacío [23] [24]. Calculando estos para la solución especial (2.44) encontramos que todos se anulan aunque $R_{\delta\kappa\lambda\tau} \neq 0$. De acuerdo a Bel [24], esto significa que este espacio-tiempo describe campos gravitacionales libres. Físicamente esto se explica de la siguiente forma. Considerando el tensor de curvatura como la intensidad del campo gravitatorio, podemos argumentar que el frente de una onda gravitacional, corresponde a una discontinuidad en el tensor de Riemann, esto es, una onda gravitacional se puede considerar como una perturbación del tensor de Riemann viajando en el espacio. De acuerdo a Pirani [25] un observador podrá "localizar" el campo gravitacional si su vector de 4-velocidad coincide con alguno de los vectores principales del tensor de Riemann. Además un tensor de curvatura cuyos invariantes independientes se anulan pertenece a los tipos N o III en la clasificación de Petrov [24]. Una investigación más detallada del tensor de curvatura correspondiente a la solución (2.44) muestra que pertenece al tipo III de Petrov. Como el vector principal de un tensor de curvatura del tipo III es un vector nulo, concluimos que un observador puede localizar la perturbación solo si él se mueve con la velocidad de la luz. Esto significa que la perturbación viaja con esta velocidad, i.e., es una onda gravitacional.

Para demostrar la rotación de la onda gravitacional se podría utilizar un método covariante que consiste en comparar el arrastre de marcos inerciales, durante el paso de un pulso de onda, con un marco inercial situado en infinito. Desafortunadamente, en este caso especial no existen marcos inerciales en infinito pues el espacio-tiempo no es asintóticamente plano. Una solución a este problema es analizar la influencia de una onda en una partícula de prueba que se mueve libremente en este campo. Entonces, consideramos el comportamiento de las primeras derivadas diferentes de cero, de las coordenadas espaciales, cuando el estado inicial de la partícula de prueba se establece, por ejemplo como el estado de reposo, esto es; $\dot{p} = \dot{z} = \dot{\varphi} = 0$. El punto representa la derivada respecto al tiempo propio τ , de la partícula de prueba. Como estamos interesados en la rotación de la partícula, calculamos solo la componente $\dot{\varphi}$ de la ecuaciones geodésicas. Un

cálculo directo nos conduce a

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{1}{2} \frac{k}{AD} \left(\frac{B_{,t}}{B} - 2 \frac{k_{,t}}{k} \right) \\ &= \omega e^{2(\psi-\gamma)} \left\{ \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) \frac{\alpha_{,v}}{\alpha} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) \frac{\beta_{,u}}{\beta} + (1 - \omega^2 \mu^2 e^{-2\gamma})^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{,vv}}{\alpha_{,v}} + \frac{\beta_{,uu}}{\beta_{,u}} \right) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha_{,v}}{\alpha} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \right) \frac{\beta_{,u}}{\beta} - \frac{\omega_{,u} + \omega_{,v}}{\omega} \right] \right\} \quad (2.48) \end{aligned}$$

Así mismo $\ddot{\phi}$ se anula cuando $g_{t\varphi} = 0$, i.e., en el caso de ondas gravitacionales de Einstein-Rosen. En el caso general $g_{t\varphi} \neq 0$, la partícula de prueba se acelera en la dirección φ , durante el paso de la onda gravitacional; este es el arrastre de los marcos inerciales. Esta aceleración no covariante desaparece solo cuando el término cruzado $g_{t\varphi}$ se anula. Introduciendo el valor explícito de γ de la ec. (2.44) en la ec. (2.48) vemos que $\ddot{\phi}$ desaparece también para $l = 0$ lo cual concuerda con las ecuaciones del campo (2.32- 2.36) pues ellas condujeron a las soluciones de Einstein-Rosen en este caso especial. Consecuentemente, l esta relacionada a la velocidad angular de la onda. Entonces se puede considerar esta tendencia de arrastre de una partícula de prueba en este campo gravitacional como resultado de la rotación de la onda.

Así se ha demostrado que la solución exacta (2.44) con sus dos funciones arbitrarias, describe la propagación de ondas gravitacionales con rotación.

2.6.2 Singularidades.

Para investigar las singularidades de la solución (2.44), analizaremos la curvatura medida por un observador que se mueve sobre una geodésica. Consideremos las ecuaciones para la geodésica tipo tiempo. Para simplificar usaremos nuevamente coordenadas cilíndricas y la notación dada en la ec. (2.30), entonces

$$p_{\varphi} = k\dot{t} + D\dot{\phi}, \quad (2.49)$$

$$m = C\dot{z}, \quad (2.50)$$

$$\frac{p_{\varphi}^2}{D} + \frac{m^2}{C} + 1 = A(\dot{t}^2 - \dot{\rho}^2), \quad (2.51)$$

$$2A\ddot{\rho} + A_{,\rho}\dot{t}^2 + A_{,\rho}\dot{\rho}^2 + 2A_{,\rho}\dot{t}\dot{\rho} - 2p_{\varphi}\omega_{,\rho}\dot{t} + \left(\frac{m^2}{C} + \frac{l^2}{D} \right)_{,\rho} = 0. \quad (2.52)$$

aquí p_z y m son constantes que representan las componentes del momento angular para una partícula de prueba en la dirección φ y z respectivamente. Para simplificar, hagamos el momento angular p_z y la velocidad inicial del observador, en la dirección z , cero. Entonces la simetría del campo requiere que el movimiento se de en un plano perpendicular al eje de simetría (plano ecuatorial), entonces $m = 0$. Introduciendo la ec. (2.51) en la ec.(2.52) obtenemos

$$2 \frac{d}{d\tau}(A\dot{\rho}) + \frac{A_{,\rho}}{A} = 0 . \quad (2.53)$$

haciendo

$$A\dot{\rho} = g^2 , \quad g = g(\rho) , \quad (2.54)$$

encontramos la solución general de la ec. (2.53) en la forma

$$A = h^2 - g^2 , \quad h = h(t) , \quad (2.55)$$

Aquí h y g son funciones arbitrarias de las coordenadas correspondientes. Como A esta dada en término de $\alpha(v)$ y $\beta(u)$, la ecuación (2.55) representa una condición en los posibles valores de α y β . Se puede demostrar que esta condición se satisface al menos para algunos valores especiales de α y β . Mas adelante daremos dos ejemplos.

La ecuación restante para \dot{t} se puede obtener de (2.51), entonces

$$\dot{t} = h/A . \quad (2.56)$$

Así hemos visto que existen geodésicas tipo tiempo en el plano ecuatorial.

Podemos identificar el vector de cuadrivelocidad del observador con el vector tipo tiempo $\lambda_{(0)}^\mu$ de una tetrad que lleva el observador y se propaga paralelamente sobre la geodésica. Las componentes espaciales restantes de la tetrad pueden ser calculadas de la condición de que son ortonormales a $\lambda_{(0)}^\mu$ y satisfacen la ecuación del transporte paralelo sobre la geodésica tipo tiempo con vector tangente $\lambda_{(0)}^\mu$. Entonces vemos que el vector tipo tiempo de esta tetrad puede identificarse con el cuadvectores de la partícula de prueba $\lambda_{(0)}^\mu = u^\mu = (\dot{t}, \dot{\rho}, 0, \dot{\varphi})$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{(0)}^\mu &= A^{-1}(h, g, 0, -k h/D) , \\ \lambda_{(1)}^\mu &= (\lambda_{(1)}^0, \lambda_{(1)}^0 h/g, 0, \lambda_{(1)}^3) , \\ \lambda_{(2)}^\mu &= (0, 0, C^{-1/2}, 0) , \\ \lambda_{(3)}^\mu &= (\lambda_{(3)}^0, \lambda_{(3)}^0 h/g, 0, \lambda_{(3)}^3) , \end{aligned} \quad (2.57)$$

en donde las componentes $\lambda_{(1)}^0$, $\lambda_{(1)}^3$, $\lambda_{(3)}^0$, $\lambda_{(3)}^3$ pueden calcularse explícitamente resolviendo las ecuaciones correspondientes para el transporte paralelo.

La curvatura medida por este observador respecto a su tetraedra propia es una cantidad invariante la cual se puede usar para obtener información acerca de las singularidades. Calculando solo una componente del tensor de Riemann encontramos

$$R_{(0)1(0)2} = \frac{l^2}{16} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\sqrt{6}} (\alpha\beta)^{-4} \left\{ (4\sqrt{6} + 9) \frac{\alpha}{\alpha_{,v}} \frac{\beta_{,u}}{\beta} - (4\sqrt{6} - 9) \frac{\alpha_{,v}}{\alpha} \frac{\beta}{\beta_{,u}} - 6 \right. \\ \left. - \frac{l^2}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\sqrt{6}} (\alpha\beta)^{-4} g \left[(4\sqrt{6} + 9)(h - g) \frac{\alpha^2}{\alpha_{,v}^2} + (4\sqrt{6} - 9)(h + g) \frac{\beta^2}{\beta_{,u}^2} \right] \right\} \quad (2.58)$$

vemos que la solución (2.44) presenta singularidades en cualquiera de las hipersuperficies determinadas por

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha_{,v} = 0, \quad \beta_{,u} = 0. \quad (2.59)$$

2.6.3 Casos Especiales.

Investigaremos dos casos especiales de la solución (2.44) los cuales ilustran la estructura de las singularidades de la curvatura. En el caso de un pulso de onda con $h = t$ y $g = \rho$, las funciones arbitrarias α y β pueden fijarse por medio de la condición (2.55), entonces

$$\alpha^{4-\sqrt{6}} = \frac{4-\sqrt{6}}{2} v^2, \quad \beta^{4+\sqrt{6}} = \frac{l^2}{16} (4 + \sqrt{6}) u^2. \quad (2.60)$$

Para obtener estas últimas ecuaciones hemos usado las ec. (2.30) y (2.44). Introduciendo estos valores para α y β en la ec. (2.58) se confirma que en $u = 0$ y $v = 0$ la curvatura diverge como $(uv)^{-2}$. Se deduce entonces que la singularidad no está situada en un punto en particular sino que constantemente cambia su posición con el movimiento de la onda. Además el eje de simetría $\rho = 0$ es singular en $t = 0$. Entonces podemos interpretar la solución (2.60) como la descripción de la propagación de un pulso de onda que es enviado por una fuente situada en infinito. El pulso de onda implota en el eje el cual se transforma en singular en ese momento y después regresa a infinito. Durante su trayecto, el pulso de onda es acompañado por un cilindro singular, el cual se puede interpretar como el frente de onda del pulso.

Ahora se considerará una onda periódica. Escogiendo $h^2 = \sin t$ y $g^2 = \sin \rho$ la ec. (2.55) se transforma en

$$\alpha^{4-\sqrt{6}} = 2(4 - \sqrt{6}) \sin\left(\frac{v}{2}\right), \quad \beta^{4+\sqrt{6}} = -\frac{l^2}{2} (4 + \sqrt{6}) \cos\left(\frac{u}{2}\right), \quad (2.61)$$

La componente de curvatura es singular para

$$\sin \frac{v}{2} = 0, \quad \cos \frac{v}{2} = 0, \quad \sin \frac{u}{2} = 0, \quad \cos \frac{u}{2} = 0. \quad (2.62)$$

Esto quiere decir que las singularidades se sitúan en la hipersuperficie determinada por $v = (n + 1)\pi$ y $u = (n + 1)\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La posición de las singularidades cambia con el tiempo y en un dado $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ (incluyendo el eje de simetría), las singularidades aparecen y desaparecen periódicamente. La interpretación de esta solución en particular es análoga a la de la solución descrita arriba. La diferencia principal es que en el último caso existen ondas periódicas propagándose junto con los cilindros singulares. La fuente de las ondas puede situarse en infinito y el eje de simetría actúa como un reflector de ondas. En ambos casos las singularidades aparecen en cilindros definidos por $F = t \pm \rho + \text{const.} = 0$ y viajan en el espacio-tiempo a la velocidad de la luz pues $g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = 0$. Este resultado nos sugiere que las singularidades deben interpretarse como fuentes de ondas gravitacionales.

Los cálculos presentados aquí han sido verificados usando el sistema computacional algebraico *REDUCE 3.3* [26].

Capítulo 3

El tensor de Bel-Robinson

3.1 La Energía en Relatividad General

La noción de energía y la ley de conservación de la energía juegan un papel fundamental en todas las teorías de la física. Así por ejemplo, en la teoría newtoniana del movimiento de las partículas se tiene una noción de la energía de las partículas. En teorías físicas de mas amplias perspectivas y de mayor sofisticación, el marco conceptual de las leyes físicas cambia notablemente respecto de la mecánica newtoniana de partículas, pero una noción de la energía siempre se encuentra presente. En relatividad general las propiedades de la energía de la materia son representadas por un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Así la densidad local de energía de materia queda bien definida. Sin embargo, aunque la condición $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ puede ser interpretada como una expresión local de la conservación de la energía-momento de la materia. Esta expresión en general no conduce a una ley de conservación global, es decir, una ley que establezca que la energía total (expresada como una integral que involucre a $T_{\mu\nu}$ sobre una hipersuperficie tipo espacio) se conserve. Sobre fundamentos físicos esto no es sorprendente pues $T_{\mu\nu}$ sólo representa la energía contenida en la materia y la "energía del campo gravitacional", la cual no se toma en cuenta, debe contribuir a la energía total y entonces debería aparecer en alguna ley de conservación. A pesar de todo no se conoce expresión alguna, para la densidad de energía del campo gravitatorio, con significado, en relatividad general. En la gravedad newtoniana, la densidad de energía del campo gravitatorio se puede expresar en términos de las derivadas del potencial, y como éste corresponde a componentes de la métrica, el candidato mas adecuado para la densidad de energía del campo gravitacional en relatividad general podría ser una expresión cuadrática en las primeras derivadas de la métrica. Sin embargo, como ningún tensor distinto de $g_{\mu\nu}$ puede construirse localmente a partir solo de las componentes de la base coordenada de $g_{\mu\nu}$ y de sus primeras derivadas, solo podremos obtener tal expresión si poseemos una estructura adicional del espacio-tiempo, como un sistema preferencial de

coordenadas o descomposición de la métrica del espacio-tiempo en una "parte de fondo" y una "parte dinámica" (así se podría tomar, por ejemplo, derivadas de la "parte dinámica" de la métrica respecto al operador de derivada asociado a la "parte de fondo"). Tal estructura adicional estaría en contra del espíritu de la relatividad general, el cual tiene a la métrica del espacio-tiempo como capaz de describir completamente todos los aspectos de la estructura del espacio-tiempo y del campo gravitacional. Mientras este problema no se solucione es altamente improbable encontrar una expresión análoga a la fórmula newtoniana, para la densidad de energía gravitacional, con significado físico. Además no se han encontrado otros candidatos razonables para una expresión local de ésta densidad. Sin embargo una expresión tensorial local que involucre la curvatura del espacio-tiempo, a un orden mayor que el lineal, es el tensor de Bel-Robinson. Aunque no posee dimensiones de densidad de energía ($[\text{longitud}]^{-2}$ en unidades geometrizadas), y necesitaremos introducir constantes de diferente naturaleza que G y c en tal expresión, ofrece las ventajas de su completo significado físico y las de ser un análogo del tensor de energía-momento de la teoría electromagnética.

En las secciones 3.2 - 3.4 presentamos el tensor de Bel-Robinson de la misma manera en que lo dedujo originalmente Bel [27] y comentamos sus propiedades más importantes. En el resto de este capítulo se presenta una derivación de la energía local del campo gravitacional [46] para la que utilizaremos el tensor de Bel-Robinson. Esta derivación se basa en la medición que haría un observador utilizando las coordenadas normales de Fermi (sección 3.5) y en la analogía que existe entre la teoría de la gravitación de Einstein y la teoría electrodinámica de Maxwell. La ventaja de este nuevo concepto de la energía local de un campo gravitacional es que corresponde a las mediciones concretas de observadores y, aunque se relaciona con el tensor de Bel-Robinson, no presenta el problema de la dimensionalidad.

3.2 El tensor de Bel-Robinson

El criterio para la existencia de ondas gravitacionales propuesta por Bel [28, 29] [30]- [33] se basa en una analogía con la teoría de ondas electromagnéticas. Principalmente se asienta en la definición del tensor de energía del campo gravitacional (mas precisamente tensor de superenergía). Por analogía con el tensor de energía momento del campo electromagnético

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha}^{\rho} F_{\beta\rho} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} \right) \quad (3.1)$$

el tensor de superenergía debe ser cuadrático en el tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Considérese que nos encontramos en el espacio-tiempo vacío, entonces las ecuaciones de Einstein son de la forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.2)$$

sean $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$ los índices pares antisimétricos del tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Introduciendo dos nuevos tensores duales de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\gamma\delta} \quad R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

con $\eta_{\alpha\beta\rho\sigma}$ el pseudotensor del elemento de volumen

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\sqrt{-g}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.4)$$

$g \equiv \det ||g_{\alpha\beta}||$ y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ el símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita

$$\varepsilon_{\pi_0\pi_1\pi_2\pi_3} = \begin{cases} +1 & \text{para las permutaciones pares de } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{para las permutaciones impares} \\ 0 & \text{para los casos restantes} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.6)$$

se demuestra que en los espacios de Einstein

$${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \dot{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.7)$$

Entonces definimos el tensor de Bel-Robinson de superenergía [30] como el tensor de cuarto rango

$$T^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R^{\alpha\rho\lambda\sigma}R^{\beta}{}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} + \dot{R}^{\alpha\rho\lambda\sigma}\dot{R}^{\beta}{}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}) \quad (3.8)$$

Entre sus propiedades se encuentra la de que en el espacio vacío exhibe gran analogía con el tensor del campo electromagnético $\tau^{\mu\nu}$, en particular las siguientes

1. Es completamente simétrico debido a que el tensor $\dot{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, en el espacio vacío, es simétrico con respecto a los pares de índices $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$
2. Así como en el caso del tensor $\tau^{\mu\nu}$, resulta cero bajo contracción con el tensor métrico,

$$g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (3.9)$$

3. Satisface la ecuación covariante de continuidad, la cual es un análogo a la ecuación de continuidad del tensor $\tau^{\mu\nu}$ en un espacio-tiempo sin fuentes [34]

$$T^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\alpha} = 0 \quad (3.10)$$

4. La analogía entre $T^{\alpha\beta\mu\nu}$ y $\tau^{\mu\nu}$ también se hace presente cuando se comparan los eigenvalores de $\tau^{\mu\nu}$ y los invariantes de $T^{\alpha\beta\mu\nu}$. El tensor $\tau^{\mu\nu}$ satisface la relación

$$\tau_{\alpha}^{\beta} \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{4} k^2 g_{\alpha\gamma} \quad (3.11)$$

con k el eigenvalor del tensor $\tau_{\alpha\beta}$ que cumple

$$4k^2 = \Phi^2 + \Psi^2 \quad (3.12)$$

en donde $\Phi = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $\Psi = F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu}$ y ${}^*F^{\mu\nu}$ es un tensor dual al tensor de Maxwell

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (3.13)$$

De la misma manera, el tensor de superenergía satisface la relación [35]

$$T_{\alpha\beta\lambda\mu} T_{\gamma}^{\beta\lambda\mu} = \frac{1}{4} K^2 g_{\alpha\gamma} \quad (3.14)$$

con

$$K^2 = (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})^2 + (\dot{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{R}^{\alpha\beta\gamma\delta})^2 \quad (3.15)$$

La gran analogía algebraica entre el tensor de Bel-Robinson y el de energía momento del campo electromagnético se puede emplear para definir la "densidad de energía y momento" del campo gravitacional. Sea un cuádrivector unitario tipo tiempo, u^{α} , definido en todo punto del espacio-tiempo M . Se construye el escalar

$${}^*W = T^{\alpha\beta\lambda\mu} u_{\alpha} u_{\beta} u_{\lambda} u_{\mu} \quad (3.16)$$

Este escalar se puede expresar como [34]

$$W(u^{\alpha}) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\alpha\beta} \mathcal{H}^{\alpha\beta}) \quad (3.17)$$

donde los tensores simétricos $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ introducidos por Matte [36] se definen como

$$\mathcal{E}_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{H}_{\alpha\lambda} = -\dot{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} u^{\beta} u^{\mu} \quad (3.19)$$

estos tensores están orientados en el espacio desde el punto de vista que el vector tipo tiempo u^{α} es su eigenvector (correspondiente al eigenvalor cero). Así mismo se puede demostrar que el cuadrado de cada uno de estos tensores es no negativo.

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} \geq 0 \quad \mathcal{H}_{\alpha\lambda} \mathcal{H}^{\alpha\lambda} \geq 0 \quad (3.20)$$

donde se cumple la igualdad solo cuando el tensor es cero.

Además se puede demostrar el siguiente teorema [34, 24]: Si para algunos vectores u^α , las cantidades $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ son simultáneamente cero entonces tenemos como una condición necesaria y suficiente que $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, esto es, que el espacio-tiempo es plano.¹

3.3 Energía-Momento del Campo Gravitacional

Respecto a la discusión sobre el concepto de ondas gravitacionales desde el punto de vista de la energía transportada por ellas, Synge [37] formuló dos condiciones necesarias que deben satisfacer la función $F(u^\alpha)$ que expresa la densidad de energía del campo gravitacional:

$$(1) F(u^\alpha) \geq 0 \quad \text{y} \quad (2) \text{ Si } F(u^\alpha) = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (3.21)$$

esto significa que la energía del campo desaparece solo en el caso de la ausencia del mismo. Es fácil demostrar que el escalar $W(u^\alpha)$ satisface ambas condiciones; la primera por las ec. (3.17) y (3.20) y la segunda por el teorema antes mencionado.

Así entonces el escalar $W(u^\alpha)$ puede tomarse como la definición de la densidad de energía del campo gravitacional². Como el vector u^α es de tipo tiempo, podemos escoger un sistema local de coordenadas en el cual $u^\alpha = \delta^\alpha_0$. En este sistema $W = T^{0000}$, justo como el concepto de energía no gravitacional se relaciona con la componente T^{00} del tensor de energía-momento, de materia, en las ecuaciones de Einstein.

Considerese el vector de Poynting para el campo gravitacional (o densidad de flujo de superenergía) [30]

$$P^\alpha = (\delta^\alpha_\rho - u_\rho u^\alpha) T^{\rho\beta\lambda\mu} u_\beta u_\lambda u_\mu \quad (3.22)$$

el cual se determina, por la analogía con el vector electromagnético de Poynting. En el mismo sistema de coordenadas, tenemos

$$P^0 = 0 \quad P^i = T^{i000} \quad (3.23)$$

y Bel [30] demuestra que la siguiente relación, en la aproximación lineal, se cumple en todo punto

$$W_{,0} = -P^i{}_{,0} \quad (3.24)$$

¹Matte [36] escribió las ecuaciones del campo gravitacional en términos de las ec. (3.18) y (3.19) de tal forma que en primera aproximación son análogas a las ecuaciones de Maxwell donde \mathcal{E} y \mathcal{H} juegan el papel de los campos eléctrico y magnético. Desde su punto de vista esta analogía es suficiente para demostrar la realidad de las ondas gravitacionales.

²En conformidad con las propiedades de la densidad requeridas para la correcta aplicación de tales conceptos (La densidad de acuerdo a Bel sería $\sqrt{-g}W$)

de donde, por el teorema de Gauss tenemos

$$\partial_0 \int_V W dV = - \int_S P^i n_i dS \quad (3.25)$$

donde S es la frontera bidimensional del volumen tridimensional V dado y n_i es el vector normal unitario a S . La formula anterior significa que la densidad de flujo de superenergía a través de un elemento dS es proporcional a $P^i n_i$. En consecuencia, para que el flujo de superenergía, a través de cualquier superficie S que rodee un punto dado, sea cero, es necesario y suficiente que $P^i n_i = 0$. Así se puede formular el criterio para la existencia de ondas gravitacionales de acuerdo a Bel.

Primer criterio de Bel.

La presencia de un flujo de energía-momento es condición necesaria y suficiente para la existencia de ondas gravitacionales libres. En consecuencia, en la vecindad de un punto arbitrario del espacio-tiempo vacío se encuentran presentes ondas gravitacionales si para cualquier vector unitario, tipo tiempo, u^α en ese punto, $P^\alpha(u^\alpha) \neq 0$. Y si $P^\alpha(u^\alpha) = 0$, entonces no existen ondas gravitacionales en la vecindad de tal punto.

Es importante mencionar, como Bel demuestra, que en un espacio bivectorial con bivectores bases construidos en el sistema natural de vectores unitarios, escogidos por nosotros,

$$\begin{aligned} \hat{E}_{(0)} &= e_{(1)} \wedge e_{(2)}, & \hat{E}_{(2)} &= e_{(2)} \wedge e_{(0)}, & \hat{E}_{(3)} &= e_{(3)} \wedge e_{(3)}, \\ \hat{E}_{(4)} &= e_{(2)} \wedge e_{(3)}, & \hat{E}_{(5)} &= e_{(3)} \wedge e_{(1)}, & \hat{E}_{(6)} &= e_{(1)} \wedge e_{(2)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

la matriz del tensor de curvatura se puede expresar como

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} -\mathcal{E} & \mathcal{H} \\ \mathcal{H} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

con \mathcal{E} y \mathcal{H} las matrices $\|\mathcal{E}_{ik}\|$ y $\|\mathcal{H}_{ik}\|$ de las componentes del tensor (3.18) y (3.19). Entonces si

$$P_\mu(u^\alpha) \equiv 0 \Rightarrow P^i = 0. \quad (3.28)$$

3.4 Invariantes del Tensor de Curvatura en el Vacío

El segundo criterio de Bel, formulado por él [29] se basa en una extensión del concepto de campos isotrópicos, conocidos del electromagnetismo, al caso de campos gravitacionales. Bel llegó a la definición de campos isotrópicos gravitacionales generalizando el concepto de campo isotrópico como aquel en que sus invariantes desaparecen. Mientras el número de escalares, funcionalmente independientes, que pueden tomarse del tensor de Maxwell es

de dos, del tensor de Riemann es posible formar catorce, de los cuales solo cuatro pueden ser diferentes de cero en el vacío [38, 39].

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta}, & B &= \frac{1}{8} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} \dot{R}^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta}, \\ C &= \frac{1}{16} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}, & D &= \frac{1}{16} R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} R^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma} \dot{R}^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

A estos Bel les llamó escalares fundamentales. Entonces definiendo el campo gravitacional isotrópico por la condición

$$A = B = C = D = 0 \quad (3.30)$$

se obtiene un nuevo criterio para la existencia de ondas gravitacionales

Segundo criterio de Bel.

El campo de ondas gravitacionales libres es idéntico al campo gravitacional isotrópico definido por la condición anterior para $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Un espacio-tiempo vacío con tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ describirá ondas gravitacionales libres si todos los cuatro escalares fundamentales (3.29) desaparecen. En caso contrario, no existen ondas gravitacionales libres.

3.5 Sistema de Coordenadas Normales de Fermi

En esta sección proporcionaremos el fundamento físico esencial para llevar a cabo nuestra analogía con la electrodinámica; el concepto del sistema de Fermi.

Un sistema coordinado de especial utilidad para un físico experimentando en un sistema acelerado, por ejemplo en un jet, es aquel que se encuentra en reposo respecto de los aparatos atornillados a las paredes. Es decir, lo más conveniente es poner una malla euclídeana dentro del avión y algunos relojes en reposo respecto de la malla. En este sistema el observador puede percibir por diferentes causas que se acelera o rota, pero en las inmediaciones del origen de las coordenadas espaciales (una región tan pequeña que los efectos de la curvatura son despreciables), ningún aspecto del sistema coordinado puede revelar si el espacio-tiempo es curvo o plano. Así, el sistema de coordenadas normales de Fermi provee de una forma estandarizada en la cual un observador en caída libre puede reportar observaciones y experimentos locales. En particular, los términos cuadráticos de la métrica, los cuales son calculados en términos de la curvatura, determinan los efectos de gradientes de campos gravitacionales sobre experimentos realizados, por ejemplo, en caída libre.

Comencemos precisando la malla coordinada que utilizaremos. La siguiente es quizá la forma más natural en que la podemos establecer.

1. Sea τ el tiempo propio medido por el observador. Sea $P = P_0(\tau)$ la línea de mundo del observador.
2. El observador lleva consigo una tetrada ortonormal $\lambda_{(a)}^\mu$, (el superíndice indica la componente, el subíndice el vector y el paréntesis que se encuentra en un marco localmente Lorentziano) en donde

$$\lambda_{(0)}^\mu = u^\mu = dP_0/d\tau \quad (3.31)$$

es la cuadrivelocidad del observador la cual apunta en la dirección temporal. Además, cumple la ortonormalidad

$$\lambda_{(a)}^\mu \lambda_{(b)}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \quad (3.32)$$

3. La tetrada cambia de punto a punto sobre la línea de mundo del observador debido al transporte paralelo [40, 41]

$$u^\sigma \lambda_{(a),\sigma}^\rho = -\Omega^{\rho\sigma} \lambda_{(a)}^\nu g_{\nu\sigma} = -\Omega^\rho_\sigma \lambda_{(a)}^\sigma \quad (3.33)$$

en donde

$$\Omega^{\mu\nu} = a^\mu u^\nu - u^\mu a^\nu + u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.34)$$

es el generador infinitesimal de transformaciones de Lorentz, con $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta\mu\nu}$ (para evitar confusiones) definido en (3.4). Se puede calcular $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ y $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ transformando de un marco local de Lorentz mediante.

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \det ||L_{\nu}^{(\mu)}|| \epsilon_{(a)(b)(c)(d)} \quad \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \det ||L_{(a)}^{\mu}|| \epsilon^{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} \quad (3.35)$$

en donde L_{ν}^{μ} es la matriz arbitraria no singular de transformación.

Además

$$a^\mu = du^\mu/d\tau = \text{cuadriaceleración del observador} \quad (3.36)$$

$$u^\alpha a_\alpha = u^\alpha \omega_\alpha = 0 \quad (3.37)$$

en donde ω es la velocidad angular de rotación de los vectores espaciales de la base e_j relativa al vector de transporte de Fermi-Walker

Si $\omega = 0$, el observador haría un transporte Fermi-Walker de su tetrada y si $\omega = 0$ y $a = 0$, él estaría en caída libre (movimiento geodésico) y entonces haría un transporte paralelo de su tetrada

$$u^\sigma \lambda_{(a),\sigma}^\rho = 0 \quad (3.38)$$

4. El observador construye su marco de referencia de la siguiente manera

Para cada evento $P_0(\tau)$ en su línea de mundo el crea geodésicas espaciales puras, ortogonales a $u = dl_0/d\tau$, con parametro afin igual a su longitud propia

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, n^\mu, s] \quad (3.39)$$

en donde τ , su tiempo propio nos indica el tiempo donde comienza la geodésica, n^μ el vector tangente a la geodésica en el punto inicial, nos indica cuál geodésica y s la longitud propia sobre la geodésica desde el punto inicial nos indica en dónde sobre la geodésica. El vector tangente tiene longitud unitaria pues el parametro afin escogido es la longitud propia

$$n^\mu = (\partial \mathcal{G} / \partial s)_{s=0}, \quad n^\mu = (dx^\mu / ds) \text{ sobre la geodésica} \quad (3.40)$$

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right) = -1 \quad (3.41)$$

5. Cada evento cerca de la línea de mundo del observador es intersectado por precisamente una de las geodésicas $\mathcal{G}[\tau, n^\mu, s]$ (lejos no se cumple pues la geodésica se puede cruzar ya sea debido a la aceleración del observador o por la curvatura del espacio-tiempo).

6. Si se escoge un evento \mathcal{P} cerca de la línea de mundo del observador, la geodésica originada en esta línea, que lo intersecta, en un tiempo específico τ , tiene dirección original $n^{(j)} \lambda_{(j)}^\mu$, y necesita extenderse una distancia s antes de llegar a \mathcal{P} . Así una forma natural de identificar al evento \mathcal{P} es a través de sus coordenadas en el marco de referencia propio del observador

$$\begin{aligned} x^{(0)}(\mathcal{G}[\tau, n^\mu, s]) &= \tau \\ x^{(j)}(\mathcal{G}[\tau, n^\mu, s]) &= s n^{(j)} = s n_{(j)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cuando se requiere hacer cálculos necesitamos no solo el sistema coordenado, sino los coeficientes de la métrica y la conexión afin. Afortunadamente, $g_{(\alpha)(\beta)}$ y $\Gamma^{(\alpha)}_{(\beta)(\gamma)}$ se necesitan solo sobre la línea de mundo del observador, en donde se expresan de una manera muy simple. No es conveniente utilizar un marco de referencia propio, lejos de la línea de mundo donde la malla deja de ser ortonormal y las geodésicas incluso se pueden cruzar.

Sobre toda la línea de mundo $\mathcal{P}_0(\tau)$ los vectores base de su malla coordenada son idénticos (por construcción a su tetrada ortonormal)

$$\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} = \lambda_{(\alpha)}^\mu \quad (3.43)$$

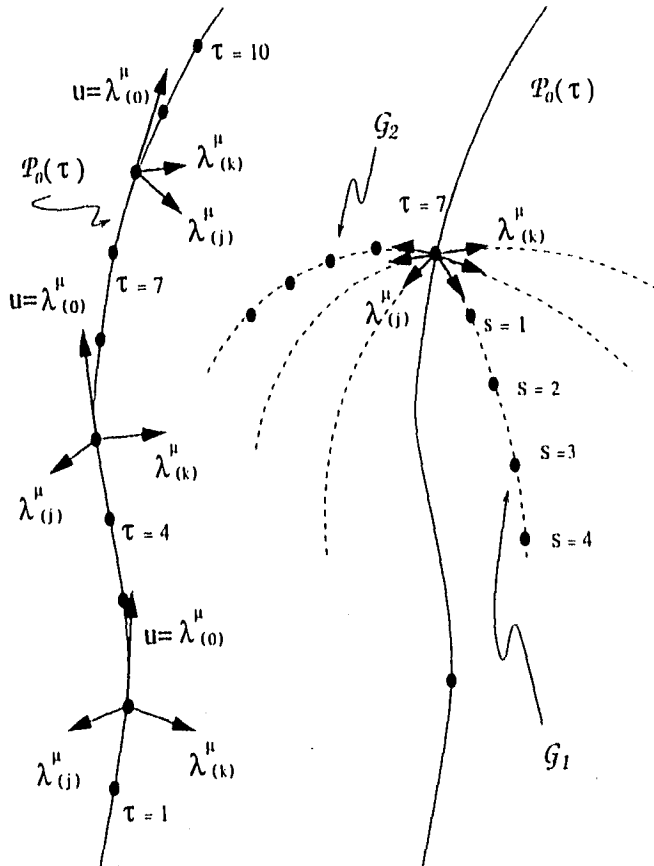


Figura 3.1: Marco de referencia propio de un observador acelerado. El lado izquierdo muestra la tetrada orthonormal del observador siendo transportada a lo largo de su línea de mundo $\mathcal{P}_0(\tau)$. El lado derecho muestra el "erizamiento" geodésico ortogonal a un evento arbitrario $\mathcal{P}_0(7)$ en la línea de mundo del observador. Cada geodésica está especificada en forma única por el tiempo propio τ en que es originada y su dirección (el vector unitario tangente n^μ sobre el cual emana). Un evento dado sobre la geodésica s desde el punto de emanación geodésica. Entonces la notación para tal evento es $\mathcal{P} = \mathcal{G}[\tau, n^\mu, s]$. Podemos observar dos geodésicas \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 que emanan en el mismo tiempo propio $\tau = 7$ pero con diferentes direcciones, las cuales podrían expresarse $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}[7, a\lambda_{(j)}^\mu + b\lambda_{(k)}^\mu, s]$ y $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}[7, c\lambda_{(j)}^\mu + d\lambda_{(k)}^\mu, s]$ con a, b, c y d constantes reales.

y los coeficientes métricos sobre $\mathcal{P}_0(\tau)$ son

$$g_{(\alpha)(\beta)} = \lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_{(\beta)}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (3.44)$$

Algunos de los coeficientes de la conexión son determinados por la ley de transporte para la tetrad del observador, ec. (3.33)

$$\begin{aligned} u^\sigma \lambda_{(\alpha)\sigma}^\rho &= \lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_{(\alpha)\mu}^\rho = \lambda_{(\alpha)}^\rho \Gamma_{(\alpha)\rho}^{(\alpha)} \\ &= -\Omega_{(\alpha)}^\rho \lambda_{(\alpha)}^\sigma = -\Omega_{(\alpha)}^\rho = -\lambda_{(\alpha)}^\rho \Omega_{(\alpha)}^{(\rho)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

entonces sobre $\mathcal{P}_0(\tau)$

$$\Gamma_{(\alpha)\rho}^{(\beta)} = -\Omega_{(\alpha)}^{(\beta)} \quad (3.46)$$

como $\Omega_{(\alpha)}^{(\beta)}$ tiene la forma (3.34) y la cuadrivelocity y cuadiaceleración del observador tienen componentes $u_{(0)} = -1$, $u_{(i)} = 0$, $a_{(0)} = 0$, en el marco propio del observador los coeficientes de la conexión sobre $\mathcal{P}_0(\tau)$ son

$$\begin{aligned} \Gamma_{(0)\rho}^{(0)} &= \Gamma_{(0)\rho(0)} = 0 \\ \Gamma_{(i)\rho}^{(0)} &= -\Gamma_{(0)\rho(i)} = \Gamma_{(i)\rho(0)} = \Gamma_{(0)\rho}^{(i)} = a^{(i)} \\ \Gamma_{(i)\rho}^{(j)} &= -\Gamma_{(j)\rho(i)} = -\omega^i \epsilon_{(0)(i)(j)(k)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Los coeficientes restantes de la conexión se pueden obtener de la ecuación geodésica para la geodésica $\mathcal{G}[\tau, n^\mu, s]$ que emana de la línea de mundo del observador. De acuerdo a la ec. (3.42), la representación coordenada de tales geodésicas es

$$x^{(0)}(s) = \tau = cte \quad x^{(i)}(s) = n^{(i)}s \quad (3.48)$$

y como sobre la geodésica $d^2 x^{(\alpha)}/ds^2 = 0$, la ecuación geodésica queda

$$0 = \frac{d^2 x^{(\alpha)}}{ds^2} + \Gamma_{(\beta)(\gamma)}^{(\alpha)} \frac{dx^{(\beta)}}{ds} \frac{dx^{(\gamma)}}{ds} = \Gamma_{(j)(k)}^{(\alpha)} n^{(j)} n^{(k)} \quad (3.49)$$

Esta ecuación geodésica se satisface en la línea de mundo del observador para todas las geodésicas espaciales si y solo si, sobre $\mathcal{P}_0(\tau)$

$$\Gamma_{(j)(k)}^{(\alpha)} = \Gamma_{(\alpha)(j)(k)} \quad (3.50)$$

los valores (3.47,3.50) de los coeficientes de la conexión determinan de forma única las derivadas parciales de las componentes de la métrica por medio de

$$g_{\alpha\beta;\gamma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu} = 0 \quad (3.51)$$

entonces tenemos que sobre $\mathcal{P}_0(\tau)$

$$\begin{aligned} g_{(\alpha)(\beta)(0)} &= 0 & g_{(j)(k)(i)} &= 0 \\ g_{(0)(0)(j)} &= -2a_j & g_{(0)(j)(i)} &= -\epsilon_{(0)(j)(k)(i)} \omega^{(k)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

y estas junto con la condición de ortonormalidad $g_{(\alpha)(\beta)}[P_0(\tau)] = \eta_{\alpha\beta}$, implican que el elemento de línea cerca de la línea de mundo del observador es

$$ds^2 = -(1 + 2a_{(t)}x^{(t)})dx^{(0)}dx^{(0)} - 2\epsilon_{(0)(i)(j)(k)}x^{(k)}\omega^{(i)}dx^{(0)}dx^{(j)} \\ + \delta_{(i)(k)}dx^{(i)}dx^{(k)} + 0(|x^{(t)}|^2)dx^{(0)}dx^{(j)} \quad (3.53)$$

Aquí podemos notar ciertas particularidades respecto a este elemento de línea:

- En la línea de mundo del observador $P_0(\tau)$, i.e. $x^{(i)} = 0$, $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^{(\alpha)}dx^{(\beta)}$.
- Las correcciones a primer orden del elemento de línea no son afectadas por la curvatura del espacio-tiempo y no contienen información acerca de la curvatura. Solo a segundo orden $O(|x^{(t)}|^2)$, la curvatura se comienza a mostrar.
- En el caso especial en que tanto la aceleración como la rotación son cero ($a^\mu = \omega^\mu = 0$), el marco propio del observador se reduce a un marco local de Lorentz ($g_{(\alpha)(\beta)} = \eta_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{(\alpha)}_{(\beta)(\gamma)} = 0$) sobre toda su geodésica de línea de mundo.

En el último caso se puede deducir [42] la siguiente expresión para la métrica, con precisión de segundo orden en $|x^{(t)}|$

$$ds^2 = (-1 - R_{(0)(t)(0)(m)}x^{(t)}x^{(m)})dt^2 - \left(\frac{4}{3}R_{(0)(i)(j)(m)}x^{(i)}x^{(m)}\right)dt dx^{(j)} \\ + \left(\delta_{(i)(k)} - \frac{1}{3}R_{(i)(0)(j)(m)}x^{(0)}x^{(m)}\right)dx^{(i)}dx^{(j)} + 0(|x^{(t)}|^3)dx^{(0)}dx^{(j)} \quad (3.54)$$

Aquí $R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ son las componentes del tensor de Riemann sobre la línea de mundo $x^{(i)} = 0$. Estas coordenadas son llamadas *Coordenadas normales de Fermi*.

3.6 Algunos Conceptos del Electromagnetismo

En esta sección serán expuestos someramente algunos conceptos del electromagnetismo que necesitaremos para crear nuestra analogía con la electrodinámica.

Fuerza de Lorentz

La ley de Lorentz nos permite hacer dos cosas; (1) definir los campos electromagnéticos y (2) predecir el movimiento de las partículas. Se encarga de definir los conceptos que utiliza (\vec{B} y \vec{E}) y de crear postulados acerca de éstos conceptos. La fuerza de Lorentz en notación familiar tridimensional es

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.55)$$

y escrita de forma completamente geométrica

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = c(u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.56)$$

con $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$ en donde $\beta = v/c$.

Si escribimos ésta ecuación en términos del tensor del campo electromagnético, conocido como el tensor de Faraday, tendremos

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = c F^\alpha_\beta u^\beta \quad (3.57)$$

en donde podemos expresar en forma matricial

$$\|F^\alpha_\beta\| = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

y las componentes covariantes se obtienen al descender un índice con $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} F^\alpha_\beta$

$$\|F_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix} \quad (3.59)$$

Esta ecuación matricial demuestra la unidad del campo eléctrico y magnético. Ninguno de los dos es una identidad geométrica independiente del marco de referencia, sino que son parte de una sola entidad, el tensor de Faraday y a través de él adquieren significado que trasciende las coordenadas y los marcos de referencia.

Es importante mencionar que debido a su naturaleza, podemos también expresar el tensor del campo electromagnético en términos de las derivadas de sus potenciales A_μ , es decir, el cuadrivector potencial de la teoría electromagnética genera el tensor del campo electromagnético mediante las ecuaciones geométricas

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \quad (3.60)$$

En donde los campos eléctricos y magnéticos, en un marco específico de Lorentz están dados por

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A^0 \quad (3.61)$$

Ahora, a partir de las intensidades del campo eléctrico y magnético podemos formar magnitudes que se conservan al pasar de un sistema de referencia inercial a otro, es decir,

magnitudes invariantes. La forma de estos invariantes se encuentra fácilmente a partir de la representación cuadrimensional del campo, valiéndonos del tensor antisimétrico, $F_{\mu\nu}$ y son

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = H^2 - E^2 = \text{inv} \quad (3.62)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}F_{\delta\gamma} = \vec{E} \cdot \vec{H} = \text{inv} \quad (3.63)$$

Por otro lado, las leyes de Maxwell se pueden expresar de una forma más simple por medio del tensor de Faraday.

La ley magnetostática y la ley magnetodinámica, respectivamente

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.64)$$

están unidas en una sola ley geométrica independiente del marco de referencia. En términos de las componentes del tensor del campo electromagnético, esta ley es

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad (3.65)$$

Pues esto se reduce a $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ cuando toma los valores de $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$; y se reduce a la otra ley cuando cualquier índice se se iguala a cero.

Las ecuaciones electrostática y electrodinámica respectivamente son

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = -4\pi J \quad (3.66)$$

Estas, como las anteriores son dos partes diferentes de una sola ley geométrica. Escrita en término de las componentes esta ley es

$$F^{\alpha\beta}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha \quad (3.67)$$

donde las componentes de cuadracorriente J^α son

$$J^0 = \rho = \text{densidad de carga} \quad (3.68)$$

$$J^i = \text{componentes de densidad de corriente} \quad (3.69)$$

Finalmente, del tensor de Faraday uno puede construir el tensor de energía-momento para el campo electromagnético

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu_{\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (3.70)$$

de donde tomando la divergencia tenemos

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha}_{;\nu} F^{\nu\alpha} + F^{\mu\alpha} F^{\nu\alpha}_{;\nu} - \frac{1}{2} F^{\alpha\beta}_{;\nu} F^{\nu\alpha\beta} \right) \quad (3.71)$$

utilizando las ecuaciones de Maxwell, simplemente queda

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = -F^{\mu\alpha} J_{\alpha} \quad (3.72)$$

Ahora, observemos la ecuación de la desviación geodésica en término de sus componentes

$$\frac{D^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \xi^{\gamma} \frac{dx^{\delta}}{d\tau} = 0 \quad (3.73)$$

En la teoría geométrica de la gravedad de Einstein, esta ecuación de la desviación geodésica sintetiza el efecto entero de la geometría en la materia. Hace lo mismo que la ecuación de la fuerza de Lorentz

$$\frac{D^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} - \frac{e}{m} F^{\alpha}_{\beta} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \quad (3.74)$$

Usando unidades geometrizadas y la teoría Newtoniana de la gravedad, uno puede evaluar nueve de las mas interesantes componentes de la curvatura de Riemann cerca del sol, por ejemplo. Este método es el análogo gravitacional de determinar la fuerza del campo eléctrico midiendo la aceleración de una partícula de prueba en movimiento lento ($v \ll c$). Considere la separación entre geodésicas de dos partículas de prueba en movimiento lento, cercanas una de la otra y a una distancia r del sol. En las coordenadas casi inerciales estándar de la mecánica celeste, las cuatro componentes de la cuadrivelocidad de la partícula central (en la que montamos nuestro marco de referencia), pueden ser despreciadas excepto $dx^0/d\tau = 1$. Entonces las componentes espaciales de la ecuación de desviación geodésica son

$$\frac{D^2 \xi^k}{d\tau^2} + R^k_{0j0} \xi^j = 0 \quad (3.75)$$

comparando con la conclusión de la teoría newtoniana llegamos a la siguiente información acerca de la curvatura del espacio-tiempo cerca de un centro de masa

$$\left\| \begin{array}{ccc} R^{(x)}_{0(x)0} & R^{(y)}_{0(x)0} & R^{(z)}_{0(x)0} \\ R^{(x)}_{0(y)0} & R^{(y)}_{0(y)0} & R^{(z)}_{0(y)0} \\ R^{(x)}_{0(z)0} & R^{(y)}_{0(z)0} & R^{(z)}_{0(z)0} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} m/r^3 & 0 & 0 \\ 0 & m/r^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2m/r^3 \end{array} \right\| \quad (3.76)$$

Estas son de principal relevancia para muchas aplicaciones de la teoría gravitacional. Son análogas a las ecuaciones del campo eléctrico en las ecuaciones de movimiento de Lorentz, y observado la ec. (3.54) encontramos la razón por la cual esta parte del tensor de Riemann adquiere el nombre de *gravitoelectrónica*. Muchos de los términos no evaluados son análogos a las componentes magnéticas del campo y son débiles a menos que la fuente este en movimiento rápido, también se les llama *gravitomagnéticos*.

3.7 Construcción del Tensor de Superenergía

Sean $X^a = (\tau, \mathbf{x})$ las coordenadas de Fermi sobre la línea de mundo del observador; la métrica del espacio-tiempo en estas coordenadas está dada por

$${}^F g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + {}^F h_{\alpha\beta} \quad (3.77)$$

en donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski y ${}^F h_{\alpha\beta}$ se puede expresar, lejos del observador, en una serie de potencias de \mathbf{x} , con coeficientes que dependen de la curvatura del espacio-tiempo. Solo tomaremos en cuenta los términos de menor orden fuera de la trayectoria. Tomando la definición de los potenciales gravitoelectrónico y gravitomagnético Φ_g y \mathbf{A}_g , respectivamente como

$${}^F h_{00} = 2\Phi_g \quad \text{y} \quad {}^F h_{0i} = -2(\mathbf{A}_g)_i \quad (3.78)$$

en el sistema de coordenadas normales de Fermi tenemos que [ver ec. (3.54)]

$$\Phi_g = -\frac{1}{2} {}^F R_{0i0j}(\tau) x^i x^j \quad (3.79)$$

$$(\mathbf{A}_g)_i = \frac{1}{3} {}^F R_{0jik}(\tau) x^j x^k \quad (3.80)$$

en donde

$${}^F R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau) = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_{(\beta)}^\nu \lambda_{(\gamma)}^\rho \lambda_{(\delta)}^\sigma \quad (3.81)$$

es la curvatura medida por un observador central³. Entonces definimos el campo gravitoelectrónico \mathcal{E} y el campo gravitomagnético \mathcal{B} en completa analogía con la electrodinámica

$$\mathcal{E}_i(\tau, \mathbf{x}) = {}^F R_{0i0j}(\tau) x^j \quad (3.82)$$

$$\mathcal{B}^i(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^F R_{jkl0}(\tau) x^l. \quad (3.83)$$

Esta definición concuerda con la identificación que se hace de las componentes "eléctricas" y "magnéticas" del tensor de Riemann. El tensor de curvatura de Riemann generalmente consiste de componentes "eléctricas", "magnéticas" y "espaciales", pero en una región plana de Ricci, las componentes "espaciales" se dan en términos de las componentes "eléctricas". Las ecuaciones (3.82) y (3.83) contienen la información completa del campo gravitacional a lo largo de la trayectoria. Además nos permiten expresar las ecuaciones del campo gravitacional en un sistema de Fermi en una forma análoga a las ecuaciones de Maxwell.

³Se le llama observador central al que mide en su sistema local de Lorentz localizado sobre la línea de mundo

3.7 Construcción del Tensor de Superenergía

Sean $X^a = (\tau, \mathbf{x})$ las coordenadas de Fermi sobre la línea de mundo del observador; la métrica del espacio-tiempo en estas coordenadas esta dada por

$${}^F g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + {}^F h_{\alpha\beta} \quad (3.77)$$

en donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski y ${}^F h_{\alpha\beta}$ se puede expresar, lejos del observador, en una serie de potencias de \mathbf{x} , con coeficientes que dependen de la curvatura del espacio-tiempo. Solo tomaremos en cuenta los términos de menor orden fuera de la trayectoria. Tomando la definición de los potenciales gravitoelectrónico y gravitomagnético Φ_g y \mathbf{A}_g , respectivamente como

$${}^F h_{00} = 2\Phi_g \quad \text{y} \quad {}^F h_{0i} = -2(\mathbf{A}_g)_i \quad (3.78)$$

en el sistema de coordenadas normales de Fermi tenemos que [ver ec. (3.54)]

$$\Phi_g = -\frac{1}{2} {}^F R_{0i0j}(\tau) x^i x^j \quad (3.79)$$

$$(\mathbf{A}_g)_i = \frac{1}{3} {}^F R_{0jik}(\tau) x^j x^k \quad (3.80)$$

en donde

$${}^F R_{\alpha\beta\gamma\delta}(\tau) = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_{(\beta)}^\nu \lambda_{(\gamma)}^\rho \lambda_{(\delta)}^\sigma \quad (3.81)$$

es la curvatura medida por un observador central³ Entonces definimos el campo gravitoelectrónico \mathcal{E} y el campo gravitomagnético \mathcal{B} en completa analogía con la electrodinámica

$$\mathcal{E}_i(\tau, \mathbf{x}) = {}^F R_{0i0j}(\tau) x^j \quad (3.82)$$

$$\mathcal{B}^i(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} {}^F R_{jkol}(\tau) x^l. \quad (3.83)$$

Esta definición concuerda con la identificación que se hace de las componentes "eléctricas" y "magnéticas" del tensor de Riemann. El tensor de curvatura de Riemann generalmente consiste de componentes "eléctricas", "magnéticas" y "espaciales", pero en una región plana de Ricci, las componentes "espaciales" se dan en términos de las componentes "eléctricas". Las ecuaciones (3.82) y (3.83) contiene la información completa del campo gravitacional a lo largo de la trayectoria. Además nos permiten expresar las ecuaciones del campo gravitacional en un sistema de Fermi en una forma análoga a las ecuaciones de Maxwell.

³Se le llama observador central al que mide en su sistema local de Lorentz localizado sobre la línea de mundo

Para reproducir una analogía completa de la electrodinámica clásica necesitamos, además, la ley de la fuerza de Lorentz. En un sistema de Fermi esta ecuación a primer orden en la velocidad es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q_E \mathcal{E} + q_B \frac{dx}{dt} \times \mathcal{B} \quad (3.84)$$

donde m es la masa inercial de una partícula de prueba y q_E y q_B son las cargas gravitoelectricas y gravitomagnéticas de la partícula, respectivamente. Del teorema gravitacional de Larmor [43] se obtiene que $q_E = -m$ y $q_B = -2m$ y los signos negativos se deben a la naturaleza atractiva de la gravitación. La ecuación (3.84) resulta la ecuación generalizada de Jacobi [44] que es la ecuación de movimiento de una partícula de prueba, libre, respecto al observador central, válida a primer orden en x y dx . Esta correspondencia entre la ecuación de desviación geodésica y la ley de la fuerza de Lorentz es un resultado notable, pues permite, en principio, introducir el tensor de energía-momento para el gravitoelectromagnetismo en completa analogía con la habitual deducción del tensor de energía-momento del electromagnetismo. Sin embargo, existe una diferencia, el tensor de energía-momento para el electromagnetismo se define globalmente, mientras que para el gravitoelectromagnetismo se tiene que definir solo en un tubo angosto a lo largo de la trayectoria temporal del observador en el espacio-tiempo. La invariancia traslacional en tiempo y espacio es finalmente responsable de la existencia de leyes de conservación de la energía y el momento, respectivamente, como en el caso del tensor de energía-momento en el espacio-tiempo de Minkowski. Similarmente, la existencia del pseudotensor gravitacional puede justificarse en un espacio-tiempo asintóticamente minkowskiano. Por otro lado, el tensor de energía momento gravitoelectromagnético podría atribuir su existencia a una región inercial de Fermi en la forma de un cilindro minkowskiano delgado en el espacio-tiempo a lo largo de la trayectoria temporal del observador.

Ahora, es posible definir un tensor gravitacional de Faraday en un sistema de Fermi como

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = -{}^F R_{\alpha\beta 0i} x^i \quad (3.85)$$

el cual contiene las ecuaciones (3.82) y (3.83). Entonces definimos el tensor de energía-momento, asociado a $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en la forma usual como

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathcal{F}^{\alpha}_{\gamma} \mathcal{F}^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\gamma\delta} \mathcal{F}^{\gamma\delta} \right) \quad (3.86)$$

el cual es simétrico y sin traza por construcción. Al sustituir la ec. (3.85) en la ec. (3.86) resulta que $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ es cero sobre la trayectoria del observador central ($x = 0$); esto esencialmente es una consecuencia del principio de equivalencia de Einstein. Por otra parte, $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ es diferente de cero en una vecindad de esta trayectoria pues el campo gravitoelectromagnético inicialmente varía linealmente respecto a la distancia fuera del marco del observador central. Imaginemos un segundo observador, con una línea de mundo separada solo una distancia infinitesimal del observador central. Si establecemos un segundo

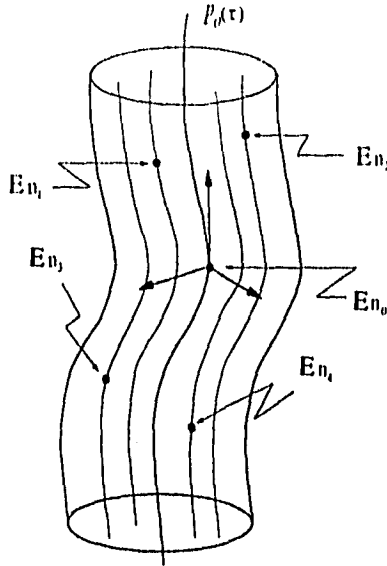


Figura 3.2: Marco de Fermi. El observador central mide la energía en su sistema inercial local y define la superenergía tomando el promedio de las energías que otros observadores análogos, reportan en una esfera de radio propio ϵL .

sistema de Fermi sobre esta trayectoria y nuestra construcción del tensor de energía-momento gravitoelectromagnético se repite, entonces este tensor también se anularía a lo largo de la segunda trayectoria pero daría un resultado finito sobre la trayectoria original de referencia. De estas consideraciones concluimos que el tensor de energía momento propio a lo largo de la trayectoria de un observador debe definirse a través de un proceso estadístico. En cualquier tiempo propio τ promediamos el tensor dado por la ec. (3.86) sobre un tubo limitante, a lo largo de la línea de mundo. Mas precisamente considerese una esfera de radio propio ϵL , $0 < \epsilon \ll 1$, centrada alrededor de $x = 0$ a un tiempo dado τ , de tal forma que

$$T^{\alpha\beta}(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-2} \langle T^{\alpha\beta} \rangle \quad (3.87)$$

en donde los paréntesis angulares denotan la operación de tomar el promedio sobre la esfera. Aquí L es una escala de longitud invariante constante que además no está especificada. Puede ser, en la práctica, una longitud de escala característica para el problema en consideración (e.g. en el campo exterior de un hoyo negro de masa M , L puede ser M), o en ausencia de una escala natural en el espacio-tiempo, como en el caso

de un campo puro de radiación gravitacional, uno puede usar a L como la longitud de Planck. Promediando en esta esfera, usando el hecho que $\langle x^i x^j \rangle = (c^2 L^2 / 3) \delta_{ij}$, uno puede expresar la ecuación (3.87) en coordenadas arbitrarias como

$$T_{\mu\nu} = \frac{L^2}{12\pi} T_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(a)}^\rho \lambda_{(a)}^\sigma \quad (3.88)$$

en donde $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ es simétrico y sin traza en el primer par de índices y simétrico en el segundo par de índices por construcción y está dado por

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(R_{\mu\epsilon\rho\zeta} R_{\nu}^{\epsilon\zeta\sigma} + R_{\mu\zeta\sigma\epsilon} R_{\nu}^{\epsilon\zeta\rho} \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\rho\gamma} R^{\alpha\beta\gamma\sigma} \quad (3.89)$$

Este tensor es idéntico con el definido por Bel [27] en 1958 con $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ y coincide con la ec. (3.8). Es importante destacar que en nuestra deducción gravitoelectromagnética no se han hecho restricciones sobre el tensor de Ricci, entonces nuestras últimas dos ecuaciones definen la parte gravitoelectromagnética del tensor local de energía-momento de un campo gravitacional general. Además el tratamiento lineal de los campos en las ecuaciones (3.82) y (3.83) es suficiente para obtener los resultados generales en las ecs. (3.88) y (3.89) pues los términos de orden mayor se descartarían de la ecuación (3.87) en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Para definir el tensor gravitacional de energía momento local, en un evento del espacio-tiempo necesitamos ahí un observador geodésico con giróscopos ideales (i.e. en un marco de Fermi) en este caso tendremos

$$T_{(a)(b)} = \frac{L^2}{12\pi} T_{(a)(b)(c)(d)} \lambda_{(c)}^\mu \lambda_{(d)}^\nu \quad (3.90)$$

para el observador (pues $\lambda_{(a)}^\mu$ es su cuadrivelocidad) y se puede calcular el tensor de energía-momento para cualquier otro observador, en ese evento, por medio de una transformación de Lorentz aplicada a $T_{(a)(b)}$. Además, las cantidades físicas locales definidas de esta manera (i.e. densidad de energía, flujo de energía, y las fuerzas gravitacionales) tiene ahora su propia dimensionalidad como consecuencia de haber introducido la escala constante de longitud L .

3.8 Aplicación a una Onda Plana

Para ilustrar el resultado considerese una onda gravitacional plana dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + U^2(e^{2h} dy^2 + e^{-2h} dz^2) \quad (3.91)$$

la cual se propaga sobre el eje x y está linealmente polarizada. En donde se tiene

$$U = U(u) \quad h = h(u) \quad \text{con} \quad u = t - x \quad (3.92)$$

y se relacionan mediante la ecuación resultante de las ecuaciones de Einstein.

$$U'' + h'^2 U = 0 \quad (3.93)$$

aquí la prima indica diferenciación respecto respecto a u .

Vamos a considerar un sistema de coordenadas en donde los observadores, localizados en coordenadas espaciales fijas, siguen trayectorias geodésicas. Además el sistema natural de tetradas $\lambda_{(a)}^\mu$, asociado a dichos observadores es no rotante. Los elementos de la tetrada se calculan del elemento de línea y con la ecuación

$$\lambda_{(a)}^\mu \lambda_{(b)}^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu} \quad (3.94)$$

de donde los únicos elementos diferentes de cero son

$$\lambda_{(0)}^0 = 1 \quad \lambda_{(1)}^1 = 1 \quad \lambda_{(2)}^2 = U^{-1} \exp(-h) \quad \lambda_{(3)}^3 = U^{-1} \exp(h) \quad (3.95)$$

con esto tenemos todo para calcular el tensor de energía-momento local para el campo gravitacional $T^{(\alpha)(\beta)}$. Con los elementos de la métrica y sus derivadas podemos calcular los símbolos de Christoffel y con estos el tensor de curvatura de Riemann, introduciéndolos en la ec. (3.90) obtenemos $T^{\mu\nu\rho\sigma}$. Finalmente con la ec. (3.89) llegamos al resultado⁴

$$T^{(\alpha)(\beta)} = \frac{L^2}{8\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} k^2(u) \quad (3.96)$$

en donde se encuentra que $K(u)$ resulta

$$K(u) = h'' + 2 \frac{U'}{U} h' \quad (3.97)$$

Además, si $K(u) = 0$ tenemos que el espacio-tiempo es plano. Entonces todas las componentes diferentes de cero de $T_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ las podemos obtener de las ec.(3.96) y (3.97) utilizando

$$T_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = T_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(a)}^\mu \lambda_{(b)}^\nu \lambda_{(c)}^\rho \lambda_{(d)}^\sigma \quad (3.98)$$

Analizando el resultado nos damos cuenta que concuerda con lo que esperabamos. Por un lado, la única componente diferente de cero de las fuerzas gravitacionales es la presión local de la radiación sobre el eje x y además, el unico flujo de energía-momento es a lo largo del mismo eje. En conclusión, hemos obtenido el resultado de nuestra energía gravitacional local de una forma nueva, a través de nuestro tensor de superenergía.

Ahora solo nos resta aplicar estos conceptos para el caso de una onda gravitacional rotante.

⁴Este complicado cálculo tensorial se realizó con el sistema computacional algebraico REDUCE.

Capítulo 4

Superenergía para una Onda con Rotación

4.1 Introducción

En este capítulo se discutirá el concepto de energía local, a través del tensor gravitacional de superenergía, para el caso de una solución con simetría cilíndrica en el vacío para las ecuaciones del campo gravitacional, que representa ondas gravitacionales con rotación. Nuestro espacio en consideración, no es asintóticamente plano, entonces el concepto de energía, momento y esfuerzos, no tienen sentido en la interpretación común de la relatividad general. Sin embargo, podemos introducir aquí, el tensor local gravitoelectromagnético o también llamado de superenergía, definido en el capítulo anterior y realizar nuestro objetivo. Este tensor gravitacional de superenergía da una interpretación física natural del de Bel-Debever-Robinson (BDR). Entonces, estudiaremos el tensor de BDR para ondas gravitacionales libres, con rotación. Esta clase de ondas se estudió por primera vez en 1990 [22] [21]. La solución investigada es especial, pues es el único miembro de la clase de soluciones de la ecuación de Einstein, que representa la propagación de ondas gravitacionales con rotación. [47]

4.2 Geodésicas del Espacio-Tiempo Cilíndrico con Rotación.

Para determinar la densidad de energía del campo de radiación, medida por un observador localizado sobre una geodésica, es necesario primero determinar las geodésicas y los marcos inerciales locales sobre ellas. Para esto tendremos que encontrar, una solución para la ecuación geodésica, o sea, nuestras geodésicas. Después, elijiremos una y tendremos que construir una tetraeda sobre ella, que sera nuestro marco inercial local, con la condición que satisfagan.

1. la condición de ortonormalidad, ec. (3.32)
2. la ecuación geodésica, i.e., que los elementos de la tetraeda se muevan en transporte paralelo, ec. (3.38)

Lo que haremos sera determinar las geodésicas a través de minimizar la acción de la métrica. Entonces, empezando con la métrica de nuestro espacio dado por la ec (2.2), hacemos que nuestro lagrangiano sea

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} [e^{2\gamma-2\psi}(-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + \mu^2 e^{-2\psi}(\omega\dot{t} + \dot{\varphi})^2 + e^{2\psi}\dot{z}^2] \quad (4.1)$$

en donde el punto representa derivación respecto al parametro, i.e., $\dot{t} = dt/d\lambda$, etc. Como vemos que el lagrangiano no depende de φ y z , existen dos constantes de movimiento p_φ y p_z dados por

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu^2 e^{-2\psi}(\omega\dot{t} + \dot{\varphi}) \quad (4.2)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = e^{2\psi}\dot{z} \quad (4.3)$$

Ademas se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda}(\omega p_\varphi - e^{2\gamma-2\psi}\dot{t}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{2\gamma-2\psi}\dot{\rho}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \quad (4.5)$$

Ahora, centrando nuestra atención en geodésicas "radiales" tales que los momento asociados con movimientos azimutales y verticales desaparezcan, es entonces conveniente escribir

4.2. GEODÉSICAS DEL ESPACIO-TIEMPO CILINDRICO CON ROTACIÓN. 71

las ecuaciones de movimiento en términos de coordenadas radiales u y v . Encontramos que las ecuaciones (4.2)-(4.3) se reducen a

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^{2\gamma-2\psi} \frac{du}{d\lambda} \right) = (e^{2\gamma-2\psi})_{,v} \frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^{2\gamma-2\psi} \frac{dv}{d\lambda} \right) = (e^{2\gamma-2\psi})_{,u} \frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} \quad (4.7)$$

Lo cual implica que $e^{2\gamma-2\psi} \frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda}$ es una constante sobre la trayectoria. Esta constante se hace cero para una geodésica nula, por lo que las geodésicas nulas "radiales" corresponden a $u = t - \rho = \text{constante}$ o $v = t + \rho = \text{constante}$, en donde λ es el parámetro afin sobre la trayectoria. Nuestro principal interés es sobre las geodésicas "radiales" tipo tiempo, para las cuales ya se ha encontrado una solución $\lambda_{(a)}^u = \lambda_{(a)}^v = u^a$, entonces, haciendo $\lambda = \tau$, donde τ es el tiempo propio sobre la trayectoria. Y definiendo

$$\dot{U} = \frac{du}{d\tau} \quad y \quad \dot{V} = \frac{dv}{d\tau} \quad (4.8)$$

tenemos

$$\dot{U}\dot{V} = e^{2\psi-2\gamma} \quad (4.9)$$

De ec. (4.6) y (4.7) obtenemos que

$$\dot{U}_v \dot{V}^2 = \dot{V}_u \dot{U}^2 \quad (4.10)$$

La solución general se da por

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^{-1} \quad (4.11)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)^{-1} \quad (4.12)$$

donde $S(u, v)$ es cualquier solución de la ecuación diferencial

$$4 \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = e^{2\gamma-2\psi}. \quad (4.13)$$

Esta es de hecho, la ecuación de Hamilton-Jacobi para geodésicas radiales tipo tiempo y S sobre la trayectoria difiere, por una constante, del tiempo propio.

Es más sencillo si se ilustra una clase de soluciones de la ecuación (4.13) por medio de una separación de variables, esto es

$$S(u, v) = -c_1 \alpha^p(v) - c_2 \beta^q(u) \quad (4.14)$$

en donde $p = 4 - \sqrt{6}$, $q = 4 + \sqrt{6}$, c_1 y c_2 son constantes positivas tales que

$$c_1 c_2 = \frac{1}{5l^2} \quad (4.15)$$

Para continuar el análisis de esta solución a la ecuación geodésica, es necesario dar explícitamente los valores $\alpha(v)$ y $\beta(u)$, que como mencionamos en la sección 2.6 son funciones de sus arbitrarias de sus argumentos. Consideremos

$$\alpha(v) = l_0^{-1/2} v \quad \text{y} \quad \beta(u) = l_0^{-1/2} u \quad (4.16)$$

donde l_0 es una constante. Usando (4.16) la solución (2.44) toma la forma

$$-ds^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^{-\sqrt{6}} \left[\frac{8}{l_0^2} (uv)^3 (dt^2 - d\rho^2) - \frac{1}{l_0^2} (uv)^2 \left(\frac{8}{l_0} \rho dt + d\phi \right)^2 - dz^2 \right] \quad (4.17)$$

En un artículo reciente [47] demostramos que todas las soluciones que representan la propagación de ondas gravitacionales libres con rotación se pueden escribir como (4.17), mediante una transformación apropiada de coordenadas. Es decir, la elección (4.16) no representa de ninguna manera una limitación a nuestra solución general (2.44).

Introduciendo (4.16) en la ec. (4.14) tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u} = -\frac{c_1 p}{l_0^{p/2}} u^{p-1}, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial v} = -\frac{c_2 q}{l_0^{q/2}} v^{q-1} \quad (4.18)$$

con lo que las ecs. (4.11) y (4.12) quedan

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{l_0^{p/2}}{c_1 p} u^{1-p} \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{l_0^{q/2}}{c_2 q} v^{1-q} \quad (4.19)$$

Integrando se obtiene

$$u^p = -\frac{1}{2} \frac{l_0^{p/2}}{c_1} (\tau - \tau_1) \quad v^q = -\frac{1}{2} \frac{l_0^{q/2}}{c_2} (\tau - \tau_2) \quad (4.20)$$

por lo que se puede expresar a nuestras coordenadas como

$$u = l_0^{1/2} \left(\frac{\tau_1 - \tau}{2c_1} \right)^{1/p} \quad v = l_0^{1/2} \left(\frac{\tau_2 - \tau}{2c_2} \right)^{1/q} \quad (4.21)$$

y las soluciones de las ecs. (4.11) y (4.12) expresadas en (4.14) con

$$\beta(u) = \left(\frac{\tau_1 - \tau}{2c_1} \right)^{1/p} \quad (4.22)$$

$$\alpha(v) = \left(\frac{\tau_2 - \tau}{2c_2} \right)^{1/q} \quad (4.23)$$

donde τ_1 y τ_2 son constantes positivas de integración. De aquí vemos que la geodésica se desplaza hasta la hipersuperficie singular nula $u = 0$ ($v = 0$) en $\tau = \tau_1$ (o $\tau = \tau_2$).

Ahora, de nuestra transformación inversa de coordenadas,

$$t = \frac{1}{2}(u + v) \quad y \quad \rho = \frac{1}{2}(v - u) \quad (4.24)$$

y haciendo

$$\tau_1 = \tau_2 = l_0, \quad 2c_1 = l_0^{1-p/2} \quad y \quad 2c_2 = l_0^{1-q/2} \quad (4.25)$$

obtenemos

$$t = \frac{l_0}{2} \left[(1 - \tau/l_0)^{1/p} + (1 - \tau/l_0)^{1/q} \right] \quad (4.26)$$

$$\rho = -\frac{l_0}{2} \left[(1 - \tau/l_0)^{1/q} - (1 - \tau/l_0)^{1/p} \right] \quad (4.27)$$

como la geodésica es radial ($\dot{z} = 0$ y $p_\varphi = 0$), haciendo

$$\zeta = 1 - \tau/l_0 \quad (4.28)$$

nuestras geodésicas se expresan

$$t = \frac{l_0}{2} (\zeta^{1/p} + \zeta^{1/q}) \quad (4.29)$$

$$\rho = \frac{l_0}{2} (\zeta^{1/p} - \zeta^{1/q}) \quad (4.30)$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\zeta^{2/p} - \zeta^{2/q} - \sqrt{\frac{3}{2}} \zeta^{4/5} \right) + \varphi_0 \quad (4.31)$$

$$z = z_0 \quad (4.32)$$

Nótese que el parámetro de escala l_0 se relaciona con el parámetro de rotación intrínseca, l , por medio de $2l_0 = \sqrt{5}l$, además, φ_0 y z_0 son constantes. El observador que estamos considerando, comienza su movimiento en $\rho = 0$, que es regular en $\tau = 0$, y regresa a él en $\tau = l_0$ cuando es singular.

Entonces, considérese una tetraada $\lambda_{(a)}^\mu$ propagándose paralelamente sobre esta línea de mundo tipo tiempo (4.29-4.32). Es sencillo encontrar explícitamente dos de los ejes de la tetraada: el eje temporal y el espacial paralelo al eje de simetría. El eje temporal lo

tomamos de la manera estándar como la cuadvirvelocidad del observador u^μ . El eje espacial $\lambda_{(z)}^\mu$ paralelo al eje de simetría se obtiene fácilmente. De la condición de ortonormalidad (3.32) obtenemos

$$g^{zz} = \lambda_{(z)}^\mu \lambda_{(z)}^\mu = c^{-2\psi} \quad (4.33)$$

y para la expresión así obtenida se puede demostrar que satisface idénticamente la ecuación para transporte paralelo.

Usando las ecuaciones de las geodésicas (4.29)-(4.32) obtenemos

$$\lambda_{(t)}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\dot{t}, \dot{\rho}, 0, \dot{\phi}) \quad (4.34)$$

$$\lambda_{(r)}^\mu = \lambda_{(z)}^\mu = \zeta^{-3/5} \delta_2^\mu \quad (4.35)$$

y estos dos cumplen con las dos condiciones que habíamos establecido.

Para calcular las componentes restantes de la tetrad $\lambda_{(\rho)}^\mu$ y $\lambda_{(\phi)}^\mu$ necesitamos resolver explícitamente la ecuación para el transporte paralelo (3.38) junto con la correspondiente condición de ortonormalidad. Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no permite encontrar una solución sencilla que podamos utilizar para el cálculo de las magnitudes física. Sin embargo, podemos calcular las componentes de dichas magnitudes con respecto a los dos ejes (4.34) y (4.35) de la tetrad, que son de por sí los más importantes dada la simetría cilíndrica del espacio-tiempo.

4.3 Energía de una Onda Gravitacional Cilíndrica con Rotación.

En el capítulo anterior se ha definido un tensor local de energía-momento gravitoelectromagnético $T_{\mu\nu}$ para un espacio-tiempo plano de Ricci. Esto se consiguió por medio de un proceso de promediar en un marco de Fermi, sobre la trayectoria de un observador geodésico. El tensor para cualquier sistema coordenado x^μ se puede expresar

$$T_{\mu\nu} = \frac{L^2}{12\pi} T_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(t)}^\rho \lambda_{(t)}^\sigma = \frac{L^2}{12\pi} T_{\mu\nu(t)(t)} \quad (4.36)$$

en donde $\lambda_{(t)}^\mu = dx^\mu/dt$ es el vector tangente a la trayectoria tipo tiempo del observador. Y para una tetrad

$$T_{(\alpha)(\beta)} = \frac{L^2}{12\pi} T_{\mu\nu(t)(t)} \lambda_{(\alpha)}^\mu \lambda_{(\beta)}^\nu \quad (4.37)$$

4.3. ENERGÍA DE UNA ONDA GRAVITACIONAL CILÍNDRICA CON ROTACIÓN.75

Entonces, tenemos que

$$T_{(0)(0)} \equiv T_{(0)(0)(0)(0)} = \frac{L^2}{12\pi} T_{\mu\nu\rho\sigma} \lambda_{(0)}^\mu \lambda_{(0)}^\nu \lambda_{(0)}^\rho \lambda_{(0)}^\sigma \quad (4.38)$$

con $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Bel-Robinson ec.(3.89) expresado en forma alternativa

$$T_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(R_{\mu\xi\rho\zeta} R_{\nu}^{\xi\zeta} + R_{\mu\xi\sigma\zeta} R_{\nu}^{\xi\zeta}) - \frac{1}{16} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (4.39)$$

es la densidad de energía que mide un observador geodésico.

Finalmente, introduciendo los dos ejes de nuestra tetrada, encontrados en la sección anterior, en nuestra ecuación (4.38), es decir, haciendo la proyección de $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ sobre los ejes de nuestra tetrada, encontramos:

- Sobre la geodésica, la radiación gravitacional de la densidad de energía es

$$T_{(0)(0)} = \frac{36}{625\pi} \frac{L^2}{(l_0 - \tau)^4} \quad (4.40)$$

- El flujo de energía gravitacional sobre el eje de simetría, nos da

$$T_{(0)(2)} = 0 \quad (4.41)$$

como era de esperarse.

- La presión de radiación sobre el eje z esta dada por

$$T_{(2)(2)} = \frac{3}{125\pi} \frac{L^2}{(l_0 - \tau)^4} \quad (4.42)$$

Tanto la densidad como la presión medidas por el observador situado sobre la geodesica, divergen en la singularidad $\tau = l_0$, lo cual debe estar en concordancia con las singularidades de la curvatura. La escala de longitud característica, asociada a las ondas gravitacionales rotantes es l . Entonces la longitud constante L en las expresiones (4.40) y (4.42) se puede escoger que simplemente sea proporcional a $l = 2l_0/\sqrt{5}$.

Las expresiones obtenidas en (4.40) - (4.42) para el tensor de superenergía de las ondas libres con rotación tienen una forma muy sencilla y fácil de interpretar pues simplemente dicen que varían de acuerdo a la posición del observador (expresada en términos del tiempo propio τ) y tienden a infinito exactamente en aquellos lugares donde aparecen las singularidades de curvatura del espacio-tiempo.

Conclusiones.

Este trabajo ha tenido como objetivo principal estudiar una clase de soluciones exactas a las ecuaciones del campo gravitacional, en el vacío, con simetría cilíndrica que representan ondas gravitacionales con rotación, así como analizar su energía a través de una definición nueva y física. Además, cabe mencionar que fue posible compilar los resultados obtenidos en forma de un artículo que se envió para su publicación [47].

Se ha analizado el caso de una onda gravitacional cilíndrica, representada por una métrica que es diagonal más un término cruzado $g_{t\phi}$, el cual básicamente nos indica que la onda presenta rotación. Calculando los invariantes del tensor de curvatura para nuestra solución especial encontramos que se anulan aunque $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ por lo que según, el criterio de Bel, este espacio-tiempo describe ondas gravitacionales libres. Físicamente esto se explica al considerar al tensor de curvatura como la intensidad del campo gravitatorio y argumentar que el frente de una onda gravitacional se puede describir como una perturbación del tensor de Riemann viajando en el espacio. Debido a que esta solución pertenece al tipo III en la clasificación de Petrov y como el tensor de curvatura de este tipo tiene un eigenvector principal nulo, esto significa que la perturbación viaja a la velocidad de la luz, es decir efectivamente se trata de una onda gravitacional. Hemos detectado que una partícula libre en este campo gravitacional presenta una aceleración azimutal. Esto se comprueba al calcular la componente $\ddot{\phi}$ de las ecuaciones geodésicas encontrando que solo se anula cuando $g_{t\phi} = 0$ con lo que esta tendencia del arrastre de una partícula de prueba en este campo gravitacional es el resultado de la rotación de la onda. Por todo lo anterior, nuestra solución particular describe ondas gravitacionales con rotación. Se analizó la curvatura medida por un observador que se mueve en transporte paralelo sobre una geodésica tipo tiempo encontrándose que nuestra solución presenta singularidades. Para ilustrar el hecho, se estudiaron, el caso de un pulso de onda y una onda periódica, encontrando que las singularidades cambian constantemente su posición con el movimiento de la onda, aparecen en un cilindro y viajan en el espacio-tiempo a la velocidad de la luz.

Como en la geometrodinámica existe un problema fundamental al tratar de definir la energía gravitacional se construyó una definición física a partir del tensor de Bel-Robinson. Se sabe que en relatividad general las ondas gravitacionales transportan energía y momento. Sin embargo, el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$ para esta teoría, únicamente

representa la energía de materia, por lo que $T^{\mu\nu} = 0$ puede interpretarse sólo como una expresión local de la conservación de la energía material. La "energía del campo gravitacional", no se toma en cuenta y en términos globales debería aparecer en alguna ley de conservación. Además, en nuestro caso particular debido a nuestra geometría, nuestro espacio-tiempo no es asintóticamente plano en infinito por lo que no es posible tener una definición global de la energía del sistema. A pesar de todo, se ha podido obtener una forma alternativa nueva y física para definir la energía gravitacional de la onda de modo local. Esto se logró tomando el promedio de mediciones de la energía efectuadas por observadores en un sistema de Fermi. Para tales fines construimos el tensor de superenergía gravitacional el cual es una expresión tensorial local, basada en el tensor de Bel-Robinson, con las ventajas de poseer un completo significado físico, y ser un análogo del tensor de energía momento del campo electromagnético. Por medio de éste tensor se han obtenido los siguientes resultados. Para nuestra solución particular a la ecuación de Einstein correspondiente a la onda gravitacional con simetría cilíndrica y rotación: 1) La densidad de energía de radiación gravitacional es proporcional a un parámetro L de longitud (introducido desde nuestra definición) que nos da la dimensionalidad del problema en particular, e inversamente proporcional a $(l_0 - \tau)^4$ en donde τ es el tiempo propio medido por el observador y l_0 es una constante de integración. Además, este resultado concuerda con el análisis de las singularidades. 2) El flujo de energía gravitacional sobre el eje de simetría da un valor de cero, lo que concuerda con lo esperado. 3) La presión de radiación sobre el eje z da un valor análogo al caso de la densidad de energía, de hecho es $5/12$ del valor obtenido para la densidad.

Con esto hemos analizado las características más importantes de los campos gravitacionales generados por ondas gravitacionales con simetría cilíndrica y rotación. El tensor de superenergía que se derivó en el capítulo tres y que representa una definición local de la energía gravitacional puede ser de interés para el estudio de otros tipos de campos gravitacionales como es el caso de Hoyos Negros. Así que entonces, este será uno de los temas a tratar en futuras investigaciones.

Bibliografía

- [1] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Princeton, New Jersey, 1985)
- [2] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, Malta, 1992)
- [3] I. Ciufolini y J.A. Wheeler *Gravitation and Inertia* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995)
- [4] J. Foster y J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity* (Longman, London, 1985)
- [5] B.F. Schutz y M.W. Clifford, *Gravitation and General Relativity, Encyclopedia of Applied Physics, Vol. 7*
- [6] S.T. Kip, *Sources of Gravitational Waves and Prospects for their detection, (A Caltech Goldenrod Preprint in Gravitation Physics, 1991)*
- [7] F.E. Borgnis and C.H. Papas, *Electromagnetic Waveguides and Resonators, in Encyclopedia of Physics, S. Flügge, ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1958) vol. XVI, p. 326.*
- [8] G. Beck, *Z. Physik*, **33**, 713 (1925).
- [9] A. Einstein and N. Rosen, *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937).
- [10] L. Marder, *Proc. Roy. Soc. London*, **A224**, 524 (1958).
- [11] N. Rosen, *Bull. Res. Council Israel*, **3**, 328 (1954).
- [12] N. Rosen, in *Jubilee of Relativity Theory*, editado por A. Mercier and M. Kervaire (Birkhäuser Verlag, Basél, 1956).
- [13] J. Weber and J.A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 509 (1957)
- [14] K. S. Thorne, *Phys. Rev.* **138**, B251 (1965).

- [15] J. Stackel, *J. Math. Phys.* **7**, 1321 (1966)
- [16] K. Kuchař, *Phys. Rev. D* **4**, 955 (1971).
- [17] P. Jordan, J. Ehlers, and W. Kundt, *Abh. Akad. Wiss. Mainz Math. Naturwiss. Kl.* **2** (1960).
- [18] A. S. Kompaneets, *Sov. Phys. JETP*, **7**, 659 (1958).
- [19] D. Kramer et al. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (VEB Verlag, Berlin, 1980).
- [20] W. Dietz and C. Hoenselaers (eds.) *Solutions of Einstein's Equations: Techniques and Results* (Springer Verlag, Heidelberg, 1984).
- [21] H. Quevedo y B. Mashhoon, en *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum*, Proceedings of the Conference SILARG VII, editado por J. C. D'Olivo et. al (World Scientific, Singapore, 1991), pp. 287-293. Un error topográfico ocurrió en la ecuación (9) : $\mu_{,uv}$ debe remplazarse por $\mu_{,uv}$.
- [22] B. Mashhoon y H. Quevedo, *Phys. Lett. A* **151**, 464 (1990)
- [23] J. Geheniau and R. Debever, *Bull. Acad. Roy. Belgique*, **42**, 114 (1956).
- [24] V.D. Zakharov, *Gravitational Waves in Einstein's Theory* (Halsted, New York, 1973), traducido por R. N. Sen de la edición Rusa de 1972.
- [25] F. Pirani, *Phys. Rev.* **105**, 1089 (1957).
- [26] A.C. Hearn, *REDUCE 3.3 User's Manual* (The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1987).
- [27] L. Bel, *C. R. Acad. Sci. Paris* **247** 1094 (1958); **248** 1297 (1959); *Cah. Phys.* **16**, 59 (1962).
- [28] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **245** 2482. (1957)
- [29] L. Bel, *Colloques internationaux du Centre national de la recherche scientifique*, p.119. paris. 1962
- [30] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **247** 1094. (1958)
- [31] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **247** 2096. (1958)
- [32] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **248** 1297. (1959)
- [33] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **248** 2561. (1959)
- [34] L. Bel, *Compt. Cahiers Phys.* **16** 59. (1962)

- [35] R. Debever. Bull. Bull. Soc. Math. Belgique 10 112 (1958)
- [36] A. Matte, Canadian J. Math. 5, 1 (1953)
- [37] J. Synge, Proc. Roy. Irish. Acad. A58 4, (1957)
- [38] J. Geheniau, j. y R. Debever. Bull. Acad. Roy. Belgique 42 114 (1956)
- [39] A.P. Norden, y V.V. Vishnevskii. Izvestiya Vuzov, Seriya "Matematika", 2 9 (1959)
- [40] C.W. Misner, K.S.Thorne, y J.A. Wheeler (1973) *Gravitation* W.H. Freeman and Company.
- [41] Para una discusión interesante y reciente del sistema de Fermi ver K. - P. Marzlin, Phys. Rev. D 50, 888 (1994); Gen. Rel. Grav. 26, 619 (1994).
- [42] F.K. Manasse, y C.W. Misner, J. Math. Phy. 4 735 (1963)
- [43] B.Mashhoon, Phys. Lett. A 173, 347 (1993).
- [44] B.Mashhoon, Astrophys. J. A 197, 705 (1975).Eq(A7) del apendice; D. E. Hodgkinson, Gen. Rel. Grav. 3, 351 (1972)
- [45] B.Mashhoon, Astrophys. J. A 216, 591 (1977).
- [46] B. Mashhoon J.C. McClune, y H. Quevedo, Enviado para su publicación.
- [47] B. Mashhoon, J.C. McClune, H. Quevedo y E. Chávez. Enviado a Class. Quantum. Grav.