2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

ANALISIS ESTRUCTURAL DE LOS PRINCIPALES INDICADORES MACROECONOMICOS Y FORMULACION DE ALTERNATIVAS DE DECISION QUE FOMENTEN EL DESARROLLO NACIONAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

FELIPE DE JESUS RUIZ HERNANDEZ

ASESORA: ING. ELVIRA BEATRIZ CLAVEL DIAZ.

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEX., MARZO DE 1999.

A Dios, Por haberme bendecido con nacer en el seno de una familia maravillosa y darme la dicha de alcanzar juntos este día. Nunca podré saldar esta deuda.

A mis padres:

Jesús Ruiz y Evangelina Hernández, quienes con su entrega, dedicación, sacrificio, cuidados, ejemplo y amor incondicional, cimentaron las bases de lo que de bueno existe en mi. Sois participes de todos mis aciertos, pero de ninguno de mis yerros.

A mi hermano, Gigi, entrañable compañero de juegos, inquietudes, sueños e ideales.

A mi Patria, que a pesar de las vicisitudes que atraviesa no debe de perder la fe en sí misma, en su propia identidad y riqueza espiritual. No desfallezcamos ante las tribulaciones, ni ante los enemigos de dentro y de fuera. Como ha dicho el poeta:

Eres los Estados Unidos,
Eres el futuro invasor
De la América ingenua que tiene sangre indígena,
Que aún reza a Jesucristo y aún habla en español..

Tened cuidado ¡Vive la América española!
Hay mil cachorros sueltos del León Español.
Se necesitaría, Rooselvelt, ser por Dios mismo,
El riflero terrible y el fuerte cazador,
Para poder tenernos en vuestras férreas garras.

Y, pues contáis con todo, falta una cosa: ¡Dios!

Ruben Dario

AGRADECIMIENTOS

A la Ing. Beatriz Clavel Díaz

Gracias por todo el tiempo que me ha dedicado. En cada sesión de trabajo sus acertados comentarios y recomendaciones contribuyeron tanto al desarrollo del proyecto, como a mi formación profesional. Es usted un ejemplo de excelencia académica y amor a la vida docente. Sepa que en verdad le estimo y respeto.

A los profesores:

Lic. Gloria Araiza

Fis. Carlos Curiel

Act. Hugo Reyes

M.A. Leticia Rivas

Por todas las atenciones recibidas y sus valiosos comentarios, los cuales enriquecieron en fondo y forma a este proyecto.

A la Universidad, mi Alma Mater.

A todos aquellos, familiares, compañeros y maestros, que me han brindado su cariño y amistad.

"Pues los que despreciaron la sabiduría no solo sufrieron el daño de no conocer el bien, sino que dejaron a los vivientes un monumento de su insensatez"
(Proverbios, 10,8).

Contenido

Introducción

Durante los últimos 25 años, México ha vivido en una crisis económica crónica, con ciertos períodos relativamente estables, alternando con otros períodos verdaderamente insostenibles, lo que ha mermado la calidad de vida de sus habitantes.

En éstos años se han vuelto parte del vocabulario de uso cotidiano términos como balanza de pagos, recesión, nivel de precios, devaluación, etcétera; términos que la mayoría de los mexicanos quizás no alcanzan a comprender, pero sí perciben perfectamente cómo sus niveles de vida se han ido deteriorando día con día exponencialmente, a pesar de los pactos y planes de desarrollo económico concertados entre los diferentes sectores sociales y productivos.

¿ A que factores se debe que México viva esta situación de crisis caótica?, ¿ Por qué se importa más de lo que se exporta ?, ¿ Por qué se han deteriorado los niveles de vida de la población?, ¿ Por qué las continuas devaluaciones del peso?, y finalmente, ¿ Por qué no se han corregido de una vez todos estos problemas económicos ?.

Existe una rama del conocimiento que trata de dar respuesta a estas interrogantes, la *macroeconomía*, la cual estudia el comportamiento de la economía como un todo; reduciendo los complicados detalles de la economía a cuestiones esenciales que resulten manejables. Su objetivo es analizar el comportamiento global de la economía, y de las políticas económicas que influyen en el consumo, la inversión, la balanza de pagos, los determinantes de las variaciones de los salarios y precios, las políticas monetarias y fiscales, tales como la cantidad de dinero, el presupuesto del sector público, los tipos de interés y la deuda pública.

Sin embargo, parece ser que en el caso particular de México esta rama del saber humano, o los que la ejercen, han sido rebasados por los problemas existentes y no han contribuido o no lo han hecho de la manera apropiada al desarrollo nacional. Por desarrollo se entiende no solamente crecimiento económico, lo cual se ha logrado frecuentemente durante los últimos años, sino una mejor calidad de vida de sus habitantes.

Muchas voces han clamado que no se ha logrado un desarrollo sostenido, porque siempre se están copiando los modelos de otras naciones: en un principio fuimos proteccionistas, posteriormente estatistas, luego vino el impulso privatizador y ahora se tiende a la apertura comercial y a la globalización

En consecuencia, no sería muy infundado suponer que se ha sabido proponer alguna alternativa de desarrollo nacional viable. Pudiera incluso afirmarse, que se ha carecido del rigor de una metodología científica o siquiera de un análisis teórico, y de ahí los constantes cambios de timón.

Tal afirmación es falsa. Lo que sucede es que existen diferentes escuelas o corrientes económicas cada una con sus propios análisis teóricos, pero que pretenden dar respuesta a los mismos problemas, de tal forma que nuestros gestores económicos han cambiado de ideas muchas veces, variando sus políticas de sexenio a sexenio. ¿ Por qué los continuos cambios de políticas ? ¿Por qué se convencen que cierta teoría no es tán buena y la cambian por otra ? ¿ Cómo detectar si cierta abstracción teórica es compatible con la realidad ?.

En principio, el propósito al analizar un problema, es describir y obtener conclusiones, e incluso construir una teoría a partir de un conjunto de hipótesis y postulados, que se validan o refutan a través de algún proceso de investigación o razonamiento.

La teoría es, por su misma naturaleza, una abstracción del mundo real. Es un artificio para seleccionar los factores y relaciones esenciales que dentro de un sistema o modelo permitan estudiar y analizar la esencia del problema libre de muchas complicaciones del mundo real.

Cualquier teoría económica es entonces necesariamente una abstracción del mundo que la rodea, pues la inmensa complejidad de la economía real la hace imposible de entender al momento y con todas sus implicaciones. Por lo tanto el proceso de razonamiento es elegir aquellos factores que parecen primordiales y las relaciones relevantes entre ellos. Tal esquema analítico se denomina modelo económico, puesto que es una representación esquemática y aproximada de la economía real.

En otros países, sobre todo en los del llamado "primer mundo", se ha desarrollado una metodología o enfoque de investigación que al paso del tiempo se ha vuelto una herramienta básica en la toma de decisiones: *la economía matemática*, que no es una escuela o una rama expresa de la economía, es más bien una aproximación al análisis económico en la que se emplea simbología matemática cuando se expone o construye el modelo del fenómeno bajo estudio; y que recurre a teoremas matemáticos ya desarrollados como fundamento en el proceso de razonamiento y solución del problema.

La diferencia, entre el análisis económico clásico y una aproximación matemática a éste, consiste en que en el segundo las hipótesis y conclusiones se establecen con símbolos matemáticos, más que con palabras, y con funciones o relaciones, en vez de frases, mientras que para la resolución o planteamiento del problema hace uso de procedimientos matemáticos

Considerando que los símbolos y palabras son equivalentes, importa poco si se recurre a unos u otros. El modelo será entonces tan confiable como la teoría que lo sustente.

Sin embargo es irrebatible que el uso de simbología es más eficaz en el razonamiento deductivo y más oportuno por la brevedad y exactitud del razonamiento. Además la lógica matemática obliga al analista a explícitar y depurar sus hipótesis en cada etapa del razonamiento.

Se llega a escuchar la crítica de que una teoría derivada de las matemáticas es inevitablemente "no realista". Si se aceptará que el enfoque matemático carece de realismo, se podría concluir que cualquier teoría carece de realismo, pues todas siguen el mismo proceso deductivo que la teoría matemática, lo cual es una conclusión que no puede aceptarse

Por lo tanto se puede afirmar que es completamente válido reescribir las hipótesis ya formuladas en cuanto al modelo de comportamiento de las variables en cuestión, mediante una representación matemática relacionando un determinado número de variables, unas con otras. dando forma a ecuaciones, las cuales proveen forma matemática al conjunto de hipótesis

Así el modelo matemático normalmente consistirá de un conjunto de ecuaciones diseñadas para describir la estructura e interrelaciones entre las diferentes variables de un sistema económico.

Aplicando a estas ecuaciones, la teoría matemática correspondiente, se podrá deducir un conjunto de conclusiones, como consecuencia lógica de aquellas hipótesis. El modelo en si resume la teoría relevante al sistema bajo consideración.

Hasta este momento el análisis ha sido esencialmente teórico, tanto en el análisis económico, como en la aproximación matemática, de aquí que se necesite validar o cotejar el modelo desarrollado contra el mundo real. Esto se logra a través de la *aproximación econométrica*, que combina los hechos y la teoría .

Los eventos del mundo real, relacionados con el fenómeno bajo estudio, se presentan a través de un conjunto de hechos relevantes, los cuales se aglutinan en un conjunto de datos, que representan observaciones históricas de estos hechos. Por lo general estos datos deben de ser refinados de alguna manera para su manejo dentro del modelo.

La combinación del modelo teórico con los datos relevantes, nos llevará al análisis estructural (formulación del modelo econométrico), en el cual ciertas magnitudes, conocidas como parámetros o multiplicadores, cuantificarán la respuesta de una variable con respecto a otra u otras, así como proveerá una forma de medir y probar empíricamente, y en su caso refutar relaciones sugeridas por la teoría económica. Estos parámetros son estimados a través de la *teoría econométrica*, que en sí es una extensión de los métodos de inferencia estadística (modelos de regresión múltiple, modelos multiecuacionales, pruebas de signigicación, etc.) en el análisis de fenómenos económicos.

La econometría es pues el fundamento matemático ideal en la formulación de modelos económicos: en cuanto combina el análisis económico con los hechos reales, por medio de la inferencia estadística, para así obtener una visión sistematizada de los problemas económicos y dar sustento real al razonamiento económico. Por tanto se puede considerar a la econometría como la aplicación del mundo real a la economía ó bien como una forma sistemática de estudiar la historia económica .

Una vez desarrollado el modelo, se le podrá utilizar con dos *propósitos: formulación* de pronósticos y evaluación de políticas.

El formular pronósticos es el uso del modelo estimado para predecir valores cuantitativos, de ciertas variables, fuera del universo de la muestra de datos utilizada. Los pronósticos son básicos para la toma de decisiones y planeación, por ejemplo la compra de materias primas y la contratación de personal adicional con base a que se espera un aumento de la demanda de ciertos productos

La evaluación de políticas, tiene lugar cuando se utiliza el modelo para seleccionar una política o acción, dentro de un conjunto de diferentes políticas, con el propósito de maximizar los beneficios o reducir los costos.

La selección de la *alternativa más conveniente, entre todas* las posibles, indicará la política que se implementará en el mundo real.

En cualquier caso la selección de cierta política, produce valores específicos sobre las variables internas del modelo en el período actual. Tales valores se vuelven predefinidos para los periodos subsecuentes, de tal manera que explican el comportamiento futuro del modelo. conectándose la evaluación de políticas con los hechos.

Para la realización de este proyecto se han estructurado cuatro capítulos, a saber:

En el primer capítulo se presenta el marco teórico matemático necesario para la construcción y estimación de los modelos uniecuacionales, donde se expresa una relación causa-efecto entre una variable dependiente y un conjunto de variables predefinidas. Tales modelos pueden representar muchas situaciones económicas del tipo de ecuación simple. Sin embargo, son inadecuados para modelar fenómenos más complejos, cuando la distinción entre causa y efecto desaparece, es decir modelos interdependientes.

En el segundo capítulo se analizarán los conceptos, teoremas y procedimientos algebraicos, probabilistas y estadísticos que dan sustento a los procesos de construcción, identificación, estimación y validación de los modelos multiecuacionales o interdependientes. De hecho los modelos multiecuacionales son una generalización de los uniecuacionales, así como el tipo de modelos que mejor pueden explicar el comportamiento de una economía nacional.

Posteriormente, en el tercer capítulo, se desarrollará un modelo econométrico de los principales indicadores macroeconómicos nacionales, a partir de un conjunto de hipótesis analíticas elaboradas de acuerdo a las principales corrientes del pensamiento macroeconómico que explicarán en forma matemática las interrelaciones entre estos indicadores. Las hipótesis propuestas serán cotejadas con los hechos reales, mediante el análisis estadístico, hasta alcanzar un modelo estadísticamente confiable.

Finalmente en el cuarto capítulo, se propondrán alternativas de decisión en las políticas fiscales y monetarias gubernamentales, a través de la programación matemática y/o de la simulación de escenarios, que actúen como incentivos del desarrollo nacional.

Simbología

$i = 1,2,\ldots,n$ señala el número de observación bajo estudio, donde n es el tamaño muestral.

ε_i, u_i es el término de perturbación estocástica en la i-ésima observación

x_{ij} valor predeterminado de la j-ésima variable explicativa en la iésima observación.

$\mathbf{x}_j$ vector de la j-ésima variable independiente en la iésima observación.

y_i valor tomado por la variable dependiente en la i-ésima observación

$\beta_1 \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ coeficientes estructurales

β vector de k x 1 coeficientes a ser estimados

$\hat{\beta}$ vector de los coeficientes estimados o pronosticados de alguna forma

$E(\hat{\beta})$ valor esperado de un estimador

$\hat{y}_i$ es el valor pronosticado de y_i.

σ^2 varianza

$\hat{s}^2$ varianza muestral

$g.l$ grados de libertad

$Var(u_i)$ varianza de una variable aleatoria

$Cov(u_i u_j)$ covarianza entre dos v a

y vector que contiene los n valores observados en la variable dependiente

$\mathbf{X}$ matriz de los n valores tomados por las k variables predeterminadas.

u vector que agrupa los n términos de perturbación estocástica en cada observación.

I matriz identidad de n x n

$\rho(\mathbf{X})$ rango de una matriz

$\mathbf{X}^{-1}$ inversa de una matriz $\mathbf{X}$.

$tr(\mathbf{M})$ traza de una matriz.

$|\mathbf{X}|$ determinante de una matriz $\mathbf{X}$

u' vector transpuesto de u

Ω matriz de covarianza de los términos de perturbación estocástica

χ^2 distribución ji-cuadrada.

N distribución normal

$pLim\ \hat{\theta}$ límite de probabilidad

$\mathbf{y}_i$ vector de g variables endógenas en la i-ésima observación del modelo multiecuacional

$\mathbf{x}_i$ vector de k variables predeterminadas en la i-ésima observación del modelo multiecuacional.

ε_i vector de g términos de perturbación estocástica en la i-ésima observación de un modelo multiecuacional.

Γ representa los coeficientes de las variables endógenas en un modelo multiecuacional

B los coeficientes de las variables predeterminadas en un modelo multiecuacional

Y matriz que agrupa las n observaciones de las g variables endógenas en modelo multiecuacional.

X matriz que agrupa las n observaciones de las k variables predeterminadas en modelo multiecuacional

E matriz de términos de perturbación estocástica en un modelo multiecuacional, cada renglón es un vector ε_t

Σ matriz de covarianzas en el modelo multiecuacional.

Π matriz de coeficientes en forma reducida en modelos multiecuacionales

u_t vector de términos de perturbación estocástica en forma reducida.

Ω matriz de covarianzas de u_t en modelos multiecuacionales

Z_i matriz de variables explicativas incluidas sean endógenas ó exógenas en la ecuación h de un modelo multiecuacional

δ_i vector que agrupa los coeficientes a estimar la ecuación h de un modelo multiecuacional

r_t vector que representa las l variables exógenas de control en un modelo multiecuacional

y^* vector columna de gn x 1, que agrupa los g vectores de las variables endógenas dependientes, con sus respectivas n observaciones en un modelo multiecuacional.

δ^* vector que agrupa los g vectores de coeficientes a estimar en un modelo multiecuacional

ε^* vector columna de gn x 1 elementos, que agrupa los g vectores de los términos de perturbación estocástica de cada ecuación, con sus respectivas n observaciones

Z^* matriz que agrupa las g matrices de variables explicativas en un modelo multiecuacional, con sus respectivas n observaciones

Capitulo I

Modelos Uniecuacionales

1.1 Introducción

Dicta un axioma filósófico "*Prius est esse, quam taliter esse*", es decir, "*Primero es ser, que tal ser*". De manera que, esta verdad indiscutible justifica la presencia de este capítulo, el cual tiene por objeto presentar como punto de partida un marco teórico adecuado para que el lector pueda acceder con facilidad a los conceptos y desarrollos de los capítulos subsecuentes, puesto que se pretende ampliar, en la medida de lo posible, la audiencia de está investigación y difundir el uso de los modelos matemáticos como herramientas de decisión. En principio se presenta la naturaleza de los modelos econométricos uniecuacionales y los supuestos generales bajo los que se puede construir y estimar un modelo uniecuacional. Posteriormente se analizarán las diferentes aproximaciones existentes en el proceso de estimacíon, las propiedades de los estimadores obtenidos, así como las complicaciones y medidas remediales cuando no se cumple alguno de los supuestos generales.

1.2 Definición y supuestos generales

Un *modelo* por definición es una representación de cierto fenómeno, sea un sistema o un proceso El fenómeno se modela con el objeto de explicarlo, pronosticarlo o controlarlo. Existen tantos tipos de modelos como campos en que aplicarlos. Entre los más usuales destacan los modelos físicos, lógicos y algebraicos. Cada uno de los cuales es una alternativa para representar el fenómeno bajo análisis.

El *modelo algebraico* representa un sistema del mundo real a través de un sistema de ecuaciones. Un *modelo econométrico* es un tipo especial de modelo algebraico, donde se representa un sistema conformado por un conjunto de relaciones *estocásticas* entre las variables de dicho sistema Se le llama estocástico puesto que se incluye al menos una o más variables aleatorias [1]

[1] Intriligator Michael, Econometric Models, Techniques & Applications, Prentice-Hall, New Jersey, p 22

El modelo puede ser tanto *lineal* como *no lineal* Por linealidad se entiende que el modelo sea lineal en los parámetros, no en las variables del modelo, por lo que una función cuadrática, se considera lineal. El asumir que sea lineal es muy importante, puesto que provee teoremas matemáticos y estadísticos concernientes a tales modelos para el cálculo de los valores tomados por las variables en dichos modelos. Así mismo, cualquier función puede ser aproximada a una función lineal, dentro de cierto rango, a través de la expansión de Taylor El que los modelos sean lineales puede justificarse también desde el punto de vista del análisis económico, puesto que muchas interelaciones económicas son lineales por naturaleza

Frecuentemente, los trabajos en economía y administración de empresas muestran que muchas relaciones económicas son del tipo de ecuación simple. En tales modelos se expresa una variable dependiente Y como una función lineal de una ó mas variables explicativas. En estos modelos se plantea como supuesto implícito que la relación causa-efecto, si existe, entre Y y las variables explicativas es unidireccional; es decir las variables explicativas son la causa y la variable dependiente es el efecto.

Con el propósito de comprender la naturaleza estocástica de tales modelos, considérese una función lineal del consumo, donde a cada nivel de renta y, se obtiene un consumo específico, dado por $a + by$. Sin embargo, este razonamiento no es muy conveniente puesto que pueden estarse omitiendo otras variables. cuya influencia sea fehaciente, además existen errores intrínsecos a la medición de las variables, por lo que resulta más razonable estimar al consumo como un promedio de $a + by$. En general el consumo caerá dentro de cierto intervalo dado por

$$C = a + by \pm \Delta, \tag{1.1}$$

donde Δ, indica el intervalo (nivel por debajo o arriba del promedio), que puede tomar la variable, con un alto grado de confiabilidad.

El valor de Δ puede ser determinado asumiendo que C es una variable aleatoria con cierta función de densidad. Frecuentemente, en base al teorema del límite central se asume que esta función de densidad será normal, por lo que Δ puede seleccionarse de manera que se incluya al 90% de la distribución de C en un intervalo de confianza (Fig. 1 1). Es así que se tomará $a + by$ como la media de la distribución de C

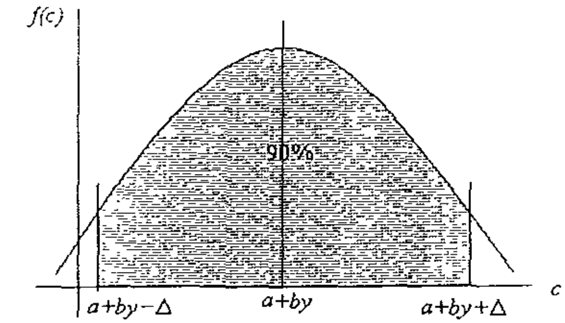

Figura 1.1
Distribución normal para el consumo C.

Si ahora se consideran todos los valores posibles de *y*, se observa que a cada nivel de *y*, corresponde una función de distribución de *C*.

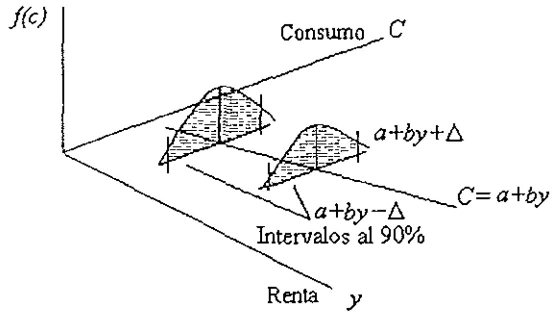

Figura 1.2
Relación estocástica entre el consumo y la renta.

Algebraicamente, la naturaleza estocástica de esta relación, puede generalizarce a *k* variables explicativas como

$$y_i = \beta + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \tag{1.2}$$

donde el subíndice i = 1,2,..., n, representa la iésima observación y ε_i es el término de *perturbación estocástica.*[2]

Este término estocástico se refiere a variables aleatorias no observadas, con ciertas propiedades como media, varianza y covarianza. Son estocásticos puesto que los valores tomados por estas variables no son conocidos con certeza.

En general se presume que cada ecuación del modelo econométrico, diferente de las identidades (ecuaciones por definición) o de alguna condición de equilibrio, contiene un termino de perturbación estocástica

[2] *Ibidem* p. 40.

La inclusión de un término de perturbación estocástica en el modelo es básico para el empleo de las herramientas de inferencia estadística al estimar los parámetros del modelo.

Los modelos econométricos pueden ser estáticos o dinámicos

Un *modelo estático* no tiene una dependencia explícita del tiempo, es decir, el tiempo no es esencial en el modelo. Agregar el subíndice de tiempo a las variables observadas no convierte al modelo estático en dinámico.

El *modelo dinámico* es aquel donde el tiempo juega un papel importante, es decir, si existen variables autoregresivas, rezagadas o diferencias de variables a lo largo del tiempo. Por lo tanto si alguna ecuación del modelo es una ecuación diferencial o en diferencia, entonces el modelo es dinámico. El tiempo también juega un papel importante si las variables y sus tasas de cambio son explícitamente consideradas como ecuaciones diferenciales.

El modelo uniecuacional puede ser de regresión lineal simple, donde solo existe una sola variable explicativa, ó múltiple si se considera un caso más general de la regresión lineal, donde existen k-1 variables y k parámetros a estimar, en el cual el último parámetro es la intersección con el origen.

El modelo de regresión lineal múltiple puede ser escrito, como

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} x_{i,j}\beta_j + u_i = \mathbf{x}_i\beta + u_i, \tag{1.3}$$

donde $i = 1,2,\ldots,n$ es un subíndice que señala el número de observación bajo estudio, $x_{i,j}$ está dada de antemano para todo i,j; es decir, es una variable no estocástica, cuyo valor es el de la j-ésima variable explicativa en la i-ésima observación, y_i representa el valor tomado por la variable dependiente en la i-ésima observación, u_i es el término de perturbación estocástica en la i-ésima observación, el último coeficiente β_k es la intersección con el origen y por tanto $x_{i,j} = 1$ para toda i, $\mathbf{x}_i$ es el correspondiente vector de la j-ésima variable independiente en la i-ésima observación y β es el vector de k x1 parámetros a ser estimados.

El problema será obtener los estimadores de los k-1 desconocidos parámetros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$, la intersección con el origen β_k, y la varianza σ^2.

Sobre este modelo se establecen los siguientes supuestos básicos:

$$E(u_i) = 0, \tag{1.4}$$

$$Var(u_i) = \sigma^2 < \infty \text{ para toda } i. \tag{1.5}$$

$$Cov(u_i u_j) = 0 \text{ para todo par } i,j, \text{donde } i \neq j. \tag{1.6}$$

Estos supuestos conciernen a los términos de perturbación estocástica, los cuales representan a variables aleatorias no observadas. Se establece que cada uno de los términos de perturbación estocástica tiene como valor esperado cero.

En (1.5) se establece que todos los términos de perturbación estocástica tienen la misma varianza y que es finita, este supuesto es conocido como condición de *homocedasticidad.* Por lo contrario sí la varianza no es constante ni finita se dirá que el modelo presenta *heterocedasticidad.*

Finalmente (1.6) establece que cada par de términos de perturbación estocástica tiene covarianza cero. Este supuesto es conocido como *ausencia de correlación serial.*

El modelo puede ser expresado de una manera más conveniente, en notación matricial. Por lo cual se definen las siguientes matrices:

Sea **y** un vector de n x 1, que contiene los n valores observados en la variable dependiente,

$$\underset{n\,x\,1}{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Sea $\mathbf{X}$ la matriz de n x k, de los n valores tomados por las k variables predeterminadas, en cada punto de la muestra, por tanto

$$\underset{n\,x\,k}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & .. & .. & x_{1,k-1} & 1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & .. & .. & x_{2,k-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & . & 1 \\ x_{n,1} & x_{n,2} & .. & .. & x_{n,k-1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

cuyo rango esta dado por $\rho(\mathbf{X}) = k < n$.

Sea **u** el vector de n x 1 que agrupa los términos de perturbación estocástica observados en cada punto de la muestra, de manera que

$$\underset{n \times 1}{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \qquad (1.9)$$

Sea β el vector que se conforma de los parámetros a estimar, entonces

$$\underset{k \times 1}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

De modo que el modelo uniecuacional de *k* variables y *n* observaciones puede escribirse:

$$\underset{n \times 1}{\mathbf{y}} = \underset{n \times k}{\mathbf{X}} \underset{k \times 1}{\beta} + \underset{n \times 1}{\mathbf{u}}, \qquad (1.11)$$

$$E(\mathbf{u}) = 0, \qquad (1.12)$$

$$Cov(\mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbf{I}, \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{X} \text{ es una matriz fija, donde } \rho(\mathbf{X}) = k < n, \qquad (1.14)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de n x n.

La expresión (1.12) significa que la media de todos los términos de perturbación estocástica es cero. Es coherente con la interpretación de $\mathbf{u}$ como un vector de términos de perturbación estocástica. De hecho esta condición es la misma que en (1.4), pero en notación matricial.

Es correcto asumir que la esperanza del modelo está dada por

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta + E(\mathbf{u}) = \mathbf{X}\beta, \qquad (1.15)$$

en el entendido que la matriz $\mathbf{X}$ y el vector β contienen números predefinidos, y en consecuencia no son estocásticos De esta manera los valores esperados de la variable dependiente son precisamente la porción sistemática del modelo

El supuesto estadístico en (1.13) se puede expresar por la matriz de covarianza:

$$Cov(\mathbf{u}) = E\left[(\mathbf{u} - E(\mathbf{u}))(\mathbf{u} - E(\mathbf{u}))'\right] = E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I}, \qquad (1.16)$$

donde $\mathbf{u}'$ es el vector transpuesto de $\mathbf{u}$.

La expresión (1 16) puede desglosarce como

$$\begin{bmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1u_2) & \cdots & Cov(u_1u_n) \\ Cov(u_2u_1) & Var(u_2) & \cdots & Cov(u_2u_n) \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ Cov(u_1u_2) & Cov(u_1u_2) & \cdots & Var(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Esta expresión resume en una sola los supuestos de homocedasticidad y ausencia de correlación serial, establecidos en (1.5) y (1.6) respectivamente. Es decir, se asume que *la varianza de los términos de perturbación estocástica permanece constante y finita* σ^2 *a lo largo del tiempo* (condición de homocedasticidad), por tanto los términos en la diagonal principal de la matriz en (1.17) serán σ^2. Por lo que toca a la ausencia de correlación serial, ésta establece que cada par de términos de perturbación estocástica diferentes tienen una covarianza cero, lo cual esta dado en los elementos fuera de la diagonal principal de (1.17).

1.3 Estimación de parámetros poblacionales

Como se ha mencionado el primer objetivo del modelo es el obtener estimadores de los k-1 desconocidos coeficientes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$, la intercepción con el origen β_k, y la varianza σ^2, empleando las matrices de datos **X** e **Y**. Existen diferentes maneras de obtener dichos estimadores, siendo las aproximaciones más populares a través de *mínimos cuadrados ordinarios* y de *máxima verosimilitud*.

1.3.1 Estimación por mínimos cuadrados ordinarios

Es del dominio público que los residuales en la iésima observación están dados por la diferencia entre el valor observado y el supuesto por el modelo, es decir

$$\hat{u}_i = y_i - x_i\hat{\beta} = y_i - \hat{y}_i, \tag{1.18}$$

donde $i = 1,2,..n$, $\hat{\beta}$ es el vector de los coeficientes estimados de alguna forma e $\hat{y}_i$ es el valor pronosticado de y_i, tal que $\hat{y}_i = x_i\hat{\beta}$.

Obviamente los residuales definidos en (1 18) están basados en ciertos valores particulares para el vector $\hat{\beta}$.

En la figura (1 3) se presenta un conjunto de residuales, para cierto valor particular de $\hat{\beta}$. Es entonces necesario encontrar aquel conjunto de valores particulares para $\hat{\beta}$, tal que la distancia de los residuales a la recta pronosticada sea mínima.

Una aproximación intuitiva sería minimizar la suma de los residuales, sin embargo, como se observa en la figura (1.3) algunos residuales pasan por debajo de la recta pronosticada (negativos) y otros por arriba de ésta (positivos), de manera que al sumarlos se cancelarían por los signos contrarios.

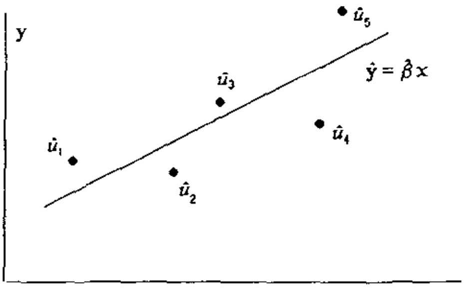

Figura 1.3
Dispersión de los residuales respecto a una línea dada.

Por lo tanto para eliminar el problema de los signos contrarios, es conveniente emplear la suma cuadrada de los residuales, dada por

$$S = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \mathrm{x}_i \hat{\beta}\right)^2 \tag{1.19}$$

la cual será minimizada por la elección de $\hat{\beta}$.

En notación matricial el vector de residuales se expresa por

$$\underset{n\times 1}{\hat{\mathbf{u}}} = \underset{n\times 1}{\mathbf{y}} - \underset{n\times k}{\mathbf{X}} \underset{k\times 1}{\hat{\beta}}, \tag{1.20}$$

cuya correspondiente suma de cuadrados está dada por

$$\mathrm{S} = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \left(\mathrm{y} - \mathrm{X}\hat{\beta}\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{X}\hat{\beta}\right). \tag{1.21}$$

Efectuando la correspondiente transposición y multiplicación de matrices, se obtiene

$$\mathrm{S} = \mathrm{y}'\mathrm{y} - 2\,\hat{\beta}\,\mathrm{X}'\,\mathrm{y} + \hat{\beta}\,\mathrm{X}'\mathrm{X}\,\hat{\beta}. \tag{1.22}$$

Por tanto, los estimadores que más se acerquen a la recta pronosticada, los que minimizan la suma cuadrada de los residuales, serán la solución al problema de optimización,

$$Min_{\hat{\beta}} S. \tag{1.23}$$

De acuerdo a la teoría del cálculo diferencial las condiciones necesarias y suficientes para minimizar una función S consisten en que todas las derivadas parciales de primer orden con respecto al vector de parámetros sean iguales a cero, luego entonces

$$\frac{\delta S}{\delta \beta} = -2\,\mathrm{X}'\,\mathrm{y} + 2\,\mathrm{X}'\mathrm{X}\,\hat{\beta} = 0,$$

$$X'X\hat{\beta} = X'y.$$

De la condición de rango en (1.14), la matriz $X'X$ es una matriz cuadrada de orden k, es no singular y en consecuencia tiene inversa. Por tanto, puede afirmarse que el estimador por mínimos cuadrados para el vector de coeficientes es

$$\hat{\beta} = [X'X]^{-1}X'y. \tag{1.24}$$

Que es en sí el estimador por mínimos cuadrados para el vector de coeficientes.

En (1.21) se definió la suma cuadrada de los residuales, para un valor dado de $\hat{\beta}$. Si ahora se substituye a $\hat{\beta}$ por su estimador por mínimos cuadrados ordinarios se tendrá

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = (I - X[X'X]^{-1}X')y. \tag{1.25}$$

Defínase la matriz $\mathbf{M}$ como

$$M = (I - X[X'X]^{-1}X'), \tag{1.26}$$

la cual se conoce como la matriz fundamental idempotente de mínimos cuadrados. Es una matriz simétrica, puesto que $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$, y es idempotente por el hecho $\mathbf{M} = \mathbf{MM} = \mathbf{M}^2$.[3]
De manera que el vector de residuales estará dado por

$$\hat{u} = My. \tag{1.27}$$

Estas propiedades son empleadas para escribir la suma cuadrada de los residuales como

$$\hat{S}(\hat{\beta}) = y'My = y'(I - X[X'X]^{-1}X')y. \tag{1.28}$$

Esta expresión será muy útil en el análisis de regresión, como se analizará mas adelante.

Con el objeto de calcular el valor esperado del estimador $\hat{\beta}$ se substituye el valor de $\mathbf{y}$, dado en (1.20), en la definición del estimador obteniéndose

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) = [X'X]^{-1}X'X\beta + [X'X]^{-1}X'u$$

$$\hat{\beta} = \beta + [X'X]^{-1}X'u, \tag{1.29}$$

de manera que bajo los supuestos del modelo clásico de regresión, al aplicar el operador esperanza sobre esta última expresión se obtiene

$$E(\hat{\beta}) = \beta. \tag{1.30}$$

[3] *Ibidem* p. 96.

Este resultado significa que si se calcula $\hat{\beta}$ para diferentes muestras, el promedio de los mencionados valores, coincide con el verdadero valor poblacional.

En lo que concierne a la varianza y covarianza de los estimadores obtenidos, es de todos conocido que la covarianza para una v.a. se define como la diferencia cuadrada entre el valor real y el valor esperado del estimador, de tal forma que para el caso de los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios su covarianza está dada por

$$Cov(\hat{\beta}) = E\left[\left[\beta - E(\hat{\beta})\right]\left[\beta - E(\hat{\beta})\right]'\right]. \tag{1.31}$$

Por (1.30) se sabe que $E(\hat{\beta}) = \beta$, así como por (1.29) $\hat{\beta} - \beta = \left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$, por consiguiente

$$Cov(\hat{\beta}) = E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right].$$

Retomando los supuestos estocásticos sobre la covarianza de **u** y asumiendo que **X** es una variable predeterminada se concluye que

$$Cov(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'Cov(\mathbf{u})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Simplificando se obtiene que la matriz de covarianza para el estimador es

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \tag{1.32}$$

1.3.2 Estimación por máxima verosimilitud

En la estimación por mínimos cuadrados ordinarios no se hizo ninguna suposición sobre la distribución de probabilidad de los términos de perturbación. Sin embargo en la estimación por máxima verosimilitud se supone que los términos de perturbación estocástica están distribuidos independientemente, idénticamente y normalmente con media cero y varianza σ^2. De manera que si **u** es un vector columna de n elementos que agrupa a los términos de perturbación estocástica, dicho vector tendrá una distribución multivariada normal con media 0 y matriz de covarianza Ω, es decir

$$\mathbf{u} \rightarrow N(E(\mathbf{u}),\Omega) = N(0,\sigma^2\mathbf{I}). \tag{1.33}$$

Esta expresión es coherente con el supuesto de media cero para los términos de perturbación establecido en (1.12) y con los supuestos de homocedasticidad y ausencia de correlación serial establecidos en (1.13).

Bajo dichos supuestos, la función de densidad multivariada normal está dada por

$$f(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-n/2}|\Omega|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{u} - E(\mathbf{u})]'\Omega^{-1}[\mathbf{u} - E(\mathbf{u})]\right) \tag{1.34}$$

Dicha expresión se reduce a

$$f(\mathbf{u}) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{u}'\mathbf{u}\right).$$

Puesto que no se conoce al vector $\mathbf{u}$, se empleará su estimador $\hat{\mathbf{u}}$, dado en (1.20). Entonces la función de máxima verosimilitud para el caso multivariado será

$$f(\hat{\mathbf{u}}) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})\right)$$

Esta función será maximizada por la elección de los parámetros desconocidos $\hat{\beta}$ y σ^2.

$$\underset{\beta,\sigma}{Max}\ln f(\hat{\mathbf{u}}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})$$

Al maximizar con respecto a $\hat{\beta}$ se observa que el único término que envuelve al término $\hat{\beta}$ es el último, por tanto maximizar esta función es equivalente a minimizar

$$S = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}, \tag{1.35}$$

que es la suma cuadrada de los residuos.

Por consiguiente el estimador de máxima verosimilitud del vector de coeficientes $\hat{\beta}$ es exactamente el mismo que al obtenido a través de mínimos cuadrados, es decir,

$$\hat{\beta} = [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}. \tag{1.36}$$

Respecto a la estimación de σ^2, basta con derivar la función de densidad respecto a σ:

$$\frac{\delta \ln f(\hat{\mathbf{u}})}{\delta\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = 0.$$

Resolviendo para σ se obtendrá el estimador de la varianza común de los términos de perturbación estocástica, el cual estará dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 = \frac{1}{n}\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}. \tag{1.37}$$

Generalmente este estimador de la varianza es ajustado a los grados de libertad del problema, n-k, donde k grados de libertad fueron perdidos al estimar los parámetros $\hat{\beta}$. Dicho estimador ajustado, denotado por $\hat{s}^2$, está entonces definido por

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-k}\,\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^{\,2} = \frac{n}{n-k}\,\hat{\sigma}^2 . \tag{1.38}$$

Defínase ahora la razón

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}.^4 \tag{1.39}$$

Retomando por (1.37) que $\hat{\sigma}^2$ es equivalente a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos de perturbación estocástica sobre el tamaño de la muestra n, puede substituirse dicho resultado en (1.39), de manera que

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\right)^2 . \tag{1.40}$$

Puesto que las $\hat{u}_i$ convergen en probabilidad a las u_i, y se ha establecido que las u_i siguen una distribución normal con media cero y varianza σ. Luego entonces la expresión (1.40) es una suma cuadrada de variables normales estándar que se distribuye como una ji-cuadrada.[5]

Por tanto es válido establecer el resultado

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \chi^2 . \tag{1.41}$$

Por (1.38) se sabe que $\hat{\sigma}^2 = \hat{s}^2\,\frac{(n-k)}{n}$, que al substituir en (1.41) da

$$\frac{(n-k)}{\sigma^2}\,\hat{s}^2 = \chi^2 .$$

Con objeto de obtener la distribución del estimador ajustado a n-k grados de libertad, puesto que se pierden k observaciones al estimar los k parámetros poblacionales del vector $\hat{\beta}$, se despeja $\hat{s}^2$ de la expresión anterior, obteniéndose

$$\hat{s}^2 \approx \frac{\hat{\sigma}^2}{n-k}\,\chi^2_{(n-k)} . \tag{1.42}$$

1.4 Propiedades de los estimadores en los modelos uniecuacionales

Bajo los supuestos del modelo clásico de regresión, es decir, estableciendo de antemano que los términos de perturbación están distribuidos independientemente, idénticamente y

---

[4] *Ibidem* pp. 101

[5] Consulte apéndice A, sección A.1.

normalmente. Los estimadores de mínimos cuadrados y máxima verosimilitud cumplen las siguientes propiedades.

1.4.1 Lineales

La primera propiedad de los estimadores es su linealidad. El vector de estimadores es un estimador lineal si y solo si es lineal en la muestra de datos. Es claro que en $\hat{\beta}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$, $\hat{\beta}$ es lineal sobre los datos de la variable dependiente **y**.

1.4.2 Insesgados

Un estimador es insesgado si y solo si su valor esperado es el verdadero valor de la población, es decir si se cumple

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta. \tag{1.43}$$

Para el caso del estimador $\hat{\beta}$ ya se ha demostrado en (1.30) que bajo los supuestos del modelo clásico de regresión

$$E(\hat{\beta})=\beta. \tag{1.44}$$

Por tanto queda demostrado que el estimador por mínimos cuadrados es insesgado.

Por lo que concierne al estimador por máxima verosimilitud para la varianza, dado en (1.33), su valor esperado está dado por:

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left[\frac{1}{n}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}\right] \tag{1.45}$$

$$=\frac{1}{n}E(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})=\frac{1}{n}E\left[(\mathbf{X}\beta+\mathbf{u})'\mathbf{M}(\mathbf{X}\beta+\mathbf{u})\right]$$

$$=\frac{1}{n}E[\beta'\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{X}\beta]+\frac{1}{n}E[\beta'\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{u}]+\frac{1}{n}E[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{X}\beta]+\frac{1}{n}E[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}]$$

$$=\frac{1}{n}E[\beta'\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{X}\beta]+\frac{1}{n}E[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}].$$

Se sabe por (1.26) que $\mathbf{M}=\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$, entonces el primer término de la expresión anterior se reduce a

$$\frac{1}{n}E\left[\beta'\mathbf{X}'\left(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\right)\mathbf{X}\beta\right]=\frac{1}{n}E\left[\left(\beta'\mathbf{X}'-\beta'\underbrace{\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{X}\right)\mathbf{X}\beta\right]=0.$$

Por tanto

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}E(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{n}E[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}].$$

Empleando el concepto de traza de una matriz[6] y el hecho de que los elementos fuera de la diagonal principal de u son todos cero, se tiene que

$$E(\hat{\sigma}^2)\frac{1}{n}E[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}] = \frac{1}{n}E[tr[\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}]].$$

Puesto que la traza de una matriz y el valor esperado son operadores lineales se pueden intercambiar, obteniéndose

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}tr[\mathbf{M}E[\mathbf{u}'\mathbf{u}]]. \tag{1.46}$$

Por la definición de **M**, dada en (1.26), se sigue que

$$tr(\mathbf{M}) = tr(\mathbf{I}) - tr(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}).$$

Como se sabe la traza de una matriz identidad, es igual al orden de dicha matriz, por tanto la traza del primer miembro es n.

Para el segundo miembro, en base a las propiedades de la traza de matrices se tiene

$$tr(\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = tr(\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) = tr(\mathbf{I}),$$

donde I es una matriz identidad de orden k, de manera que la traza del segundo miembro de **M** es k Entonces puede establecerse que

$$tr(\mathbf{M}) = n - k.$$

Substituyendo este resultado en (1.46) se obtiene que

---

[6] La traza de una matriz cuadrada de orden n se define como la suma de los n elementos a lo largo de su diagonal principal.

$$tr(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Entre la propiedades de la traza de una matriz cuadrada se tiene:

$tr(\mathrm{I}) = n$

$tr(\mathrm{A}') = tr(\mathrm{A})$

$tr(\mathrm{AA}') = tr(\mathrm{A'A})$

$tr(k\mathrm{A}') = k\, tr(\mathrm{A}')$

Si A y B son del mismo orden, entonces $tr(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = tr(\mathrm{A}) + tr(\mathrm{B})$

$tr(\mathrm{ABC}) = tr(\mathrm{BCA}) = tr(\mathrm{CAB})$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-k}{n}\sigma^2. \tag{1.47}$$

Por consiguiente $\hat{\sigma}^2$ es un estimador sesgado de la varianza

Por lo que toca al estimador $\hat{s}^2$, establecido en (1.42), su valor esperado esta dado por

$$E(\hat{s}^2) = \frac{n}{n-k} E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n}{n-k}\,\frac{n-k}{n}\sigma^2 = \sigma^2. \tag{1.48}$$

Por tanto $\hat{s}^2$ es un estimador insesgado de σ^2.

1.4.3 Asintóticamente insesgados

El sesgo de un estimador se define como la diferencia entre el valor esperado del estimador y el parámetro poblacional, es decir,

$$\mathrm{B}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta. \tag{1.49}$$

De tal forma que un estimador es asintóticamente insesgado sí

$$Lim_{n\to\infty}\ \mathrm{B}(\hat{\theta}) = 0. \tag{1.50}$$

Es decir conforme el tamaño de la muestra se incrementa sin limite alguno, el valor esperado de los estimadores es igual al verdadero valor del parámetro poblacional.

Para el caso del estimador de la varianza, denotado por $\hat{\sigma}^2$ se tendrá

$$Lim_{n\to\infty}\ \mathrm{B}(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \frac{n-k}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = Lim_{n\to\infty} -\frac{k}{n}\sigma^2$$

$$Lim_{n\to\infty}\mathrm{B}(\hat{\sigma}^2) = 0 \tag{1.51}$$

Por lo tanto $\hat{\sigma}^2$ es un estimador asintóticamente insesgado de σ^2

1.4.4 Eficientes

Un estimador es más eficiente que otro si tiene una menor dispersión alrededor del verdadero valor poblacional, es decir, una menor varianza.

El error cuadrático medio de cualquier estimador $\hat{\theta}$ se define como

$$\mathrm{M}(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]. \tag{1.52}$$

Al desarrollar la expresión, y substituir θ por $E(\hat{\theta})$ en base al concepto de sesgo se obtiene

$$\mathrm{M}(\hat{\theta}) = Var\ (\hat{\theta}) + \left[\mathrm{B}(\hat{\theta})\right]^2. \tag{1.53}$$

Por lo que el error cuadrático medio coincide con la varianza del estimador, si el estimador del parámetro es insesgado, es decir si $B(\hat{\theta}) = 0$.

Ahora se define que un estimador $\hat{\theta}_1$ es al menos tan eficiente como otro estimador $\hat{\theta}_2$ si

$$\mathbf{M}(\hat{\theta}_1) \leq \mathbf{M}(\hat{\theta}_2) \text{ ó } \mathbf{M}(\hat{\theta}_1) - \mathbf{M}(\hat{\theta}_2) \leq 0. \tag{1.54}$$

Se debe de recordar que este concepto de eficiencia, basado en el error cuadrático medio, toma en cuenta tanto a la varianza como el sesgo de los estimadores.

En el caso vectorial, es decir estimación de muchos parámetros, se define la matriz de *coerrores cuadráticos medios* como

$$\mathbf{M}(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)'\right], \tag{1.55}$$

de tal forma que el vector de estimadores $\hat{\theta}_1$ será al menos tan eficiente como el vector de estimadores $\hat{\theta}_2$ si para la diferencia

$$\mathbf{M}(\hat{\theta}_1) - \mathbf{M}(\hat{\theta}_2) \tag{1.56}$$

su forma cuadrática es una matriz negativa semidefinida.[7]

Para comprender este resultado nótese que es equivalente a establecer que $\hat{\theta}_1$ es al menos tan eficiente como $\hat{\theta}_2$, si al premultiplicar y postmultiplicar el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}_1$ por algún vector renglón a diferente de cero, es decir al obtener la forma cuadrática $\mathbf{a}\mathbf{M}(\hat{\theta}_1)\mathbf{a}'$, el escalar resultante no es más grande que el escalar obtenido de la forma cuadrática resultante de premultiplicar y postmultiplicar el error cuadrático medio del estimador $\hat{\theta}_2$ por el mencionado vector **a**, esto es $\mathbf{a}\mathbf{M}(\hat{\theta}_2)\mathbf{a}'$. De manera que para cualquier vector a se cumpla

$$\mathbf{a}[(\mathbf{M}(\hat{\theta}_1) - \mathbf{M}(\hat{\theta}_2)]\mathbf{a}' \leq 0, \tag{1.57}$$

que no es más que la forma cuadrática de la matriz dada en (1.56).

---

[7] Dados una matriz cuadrada simétrica **A** y un vector columna x, su forma cuadrática se define como

$Q(A) = x'Ax$

Se dice de esta forma cuadrática que:

$Q(A)$ es positiva definida si $Q(A) > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq 0$

$Q(A)$ es negativa definida si $Q(A) < 0$, para todo $\mathbf{x} \neq 0$

$Q(A)$ es positiva semidefinida si $Q(A) \geq 0$, para toda $\mathbf{x}$ y $Q(A) = 0$ para alguna $\mathbf{x} \neq 0$

$Q(A)$ es negativa semidefinida si $Q(A) \leq 0$, para toda $\mathbf{x}$ y $Q(A) = 0$ para alguna $\mathbf{x} \neq 0$

En lo que concierne a los estimadores por mínimos cuadrados, bajo el supuesto que los términos de perturbación están distribuidos independientemente, idénticamente, con media cero y varianza finita y constante, estos son los mejores estimadores lineales y insesgados; es decir los de mejor eficiencia.[8]

Lo anterior, también se cumple para los estimadores de máxima verosimilitud, pero bajo el supuesto adicional de que los términos de perturbación estocástica están distribuidos independientemente, idénticamente y normalmente con media cero y varianza σ^2.

Ya es conocido que $\hat{\beta}$ es lineal en y, así mismo es insesgado puesto que $E(\hat{\beta}) = \beta$.

Con el propósito de probar que los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios son los más eficientes, es decir, los mejores de todos los estimadores lineales insesgados, considérese el estimador

$$\hat{\hat{\beta}} = \left[(X'X)^{-1}X' + P\right]y, \tag{1.58}$$

donde **P** es una matriz de perturbación no estocástica de *k* x *n*, representando la perturbación del estimador de $\hat{\beta}$. El estimador $\hat{\hat{\beta}}$ se vuelve el estimador de mínimos cuadrados, si y solo si **P** se anula. Por tanto (1.58) define un conjunto completo de estimadores, que son determinados una vez que una matriz **P** es dada. Por construcción este conjunto consiste de todos los estimadores que son lineales en **y**. Bajo ciertas condiciones apropiadas los estimadores en este conjunto son insesgados, substituyendo la definición de y, dada en (1.20), en (1.58) se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\hat{\beta}} &= \left[(X'X)^{-1}X' + P\right]\left[X\beta + u\right]\\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u + PX\beta + Pu.\end{aligned}$$

Calculando valores esperados, todos lo términos se anulan, excepto β y $PX\beta$, entonces $\hat{\hat{\beta}}$ es insesgado si y solo si

$$PX = 0. \tag{1.59}$$

De manera que **P** puede ser cualquier matriz de perturbación sujeta a la condición anterior. Este conjunto de estimadores contiene todos los estimadores lineales insesgados de β.

---

[8] *Ibidem* p 107

Para demostrar que este estimador es el más eficiente entre toda esta clase, se requiere calcular los errores cuadráticos medios $M(\hat{\beta})$ y $M(\hat{\hat{\beta}})$, que en este caso coinciden con las matrices de covarianza $Cov(\hat{\beta})$ y $Cov(\hat{\hat{\beta}})$, puesto que $\hat{\hat{\beta}}$ y $\hat{\beta}$ son estimadores insesgados.

La matriz de covarianzas para $\hat{\beta}$ se ha definido anteriormente como

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \tag{1.60}$$

Por lo que corresponde a $\hat{\hat{\beta}}$ su matriz de covarianzas será

$$Cov(\hat{\hat{\beta}}) = E\left[(\hat{\hat{\beta}} - \beta)'(\hat{\hat{\beta}} - \beta)\right],$$

donde

$$\hat{\hat{\beta}} = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{P}\right](\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) = \beta + \left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\,\mathbf{u} + \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}.$$

Por consiguiente la diferencia

$$\hat{\hat{\beta}} - \beta = \left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\,\mathbf{u} + \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}.$$

De manera que

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\hat{\beta}}) &= E\left[\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}\right]\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}\right]'\right] \\ &= E\left[\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}\right]\left[\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \beta'\mathbf{X}'\mathbf{P} + \mathbf{u}'\mathbf{P}'\right]\right] \end{aligned}$$

En base a que $E(\mathbf{u}) = 0$ y a la condición (1.59) la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\hat{\beta}}) = {} & E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{uu}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] + E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{uu}'\mathbf{P}'\right] + E\left[\mathbf{Puu}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] \\ & + E\left[\mathbf{Puu}'\mathbf{P}'\right]. \end{aligned}$$

También es conocido que $E\left[\mathbf{uu}'\right] = \sigma^2\mathbf{I}$, por consiguiente

$$Cov(\hat{\hat{\beta}}) = \sigma^2\left[E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] + E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}'\right] + E\left[\mathbf{PX}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] + E\left[\mathbf{PP}'\right]\right].$$

En esta expresión se cancelan los términos intermedios por la condición (1.59), por tanto

$$Cov(\hat{\hat{\beta}}) = \sigma^2\left[E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] + E\left[\mathbf{PP}'\right]\right] = \sigma^2\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{PP}'\right]. \tag{1.61}$$

Es ahora que se puede calcular la diferencia entre (1.60) y (1 61), obteniéndose

$$Cov(\hat{\beta}) - Cov(\hat{\hat{\beta}}) = -\sigma^2\,\mathbf{PP}', \tag{1.62}$$

cuya forma cuadrática es una matriz semidefinida negativa, de manera que por (1.56) queda demostrado que $\hat{\beta}$ es el más eficiente estimador dentro del conjunto de estimadores insesgados, es decir es el mejor estimador lineal insesgado puesto que tiene mínima varianza dentro de la clase de los estimadores lineales insesgados.

1.4.5 Consistentes

Como se ha demostrado anteriormente es razonable esperar que un buen estimador de un parámetro θ sea cada vez mejor a medida que crece el tamaño de la muestra, esto es que conforme la información de una muestra aleatoria se vuelve mas completa, la distribución de muestreo de un estimador se encuentra cada vez más concentrada alrededor del parámetro θ. El estimador de θ es en sí una variable aleatoria, cuya cercanía respecto al parámetro verdadero θ puede expresarce en términos probabilísticos. En particular considérese la probabilidad de que la distancia entre el estimador y el parámetro objetivo $|\hat{\theta} - \theta|$ sea menor que un número real positivo ε arbitrario. Esta probabilidad $P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| \leq \varepsilon\right)$ debería estar cerca de la unidad para valores grandes de n, si el razonamiento es correcto. Si esta probabilidad tiende a la unidad cuando $n \to \infty$, entonces se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador consistente de θ ó que $\hat{\theta}$ converge en probabilidad a θ. De donde se puede definir:

Un estimador $\hat{\theta}$ es consistente de θ si y sólo si, para cualquier número positivo ε

$$\underset{n \to \infty}{Lim}\ P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| \leq \varepsilon\right) = 1. \tag{1.63}$$[9]

Lo cual es equivalente a

$$\underset{n \to \infty}{Lim}\ P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{1.64}$$

Esta propiedad puede escribirse en forma más compacta a través del concepto límite de probabilidad, como

$$pLim\ \hat{\theta} = \theta. \tag{1.65}$$

Lo que establece que la variable aleatoria $\hat{\theta}$ converge en probabilidad al verdadero valor poblacional de θ.

---

[9] *Ibidem* p 105

Si un estimador converge al verdadero valor poblacional de θ, conlleva que es *asintóticamente insesgado*, y que su varianza disminuye conforme n crece puesto que se acerca al verdadero parámetro poblacional, lo cual se conoce como *asintóticamente cierto*.

En otras palabras, las condiciones suficientes que $\hat{\theta}$ debe cumplir para ser consistente son:

$$Lim_{n\to\infty}\ B(\hat{\theta}) = 0, \tag{1.66}$$

$$Lim_{n\to\infty}\ Var(\hat{\theta}) = 0, \tag{1.67}$$

donde $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)$.

Estas dos condiciones se sintetizan en la siguiente afirmación:

Un estimador insesgado $\hat{\theta}$ para θ, es un estimador consistente, si $Lim_{n\to\infty}\ Var(\hat{\theta}) = 0$.[10]

Por lo que concierne a los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios, dados por $\hat{\beta}$, estos serán consistentes bajo los supuestos del modelo clásico, y el supuesto adicional de que la matriz $1/n(\mathbf{X'X})$ converge a una matriz no singular $\mathbf{Q}$, cuando $n \to \infty$, es decir

$$Lim_{n\to\infty}\ 1/n(\mathbf{X'X}) = \mathbf{Q}. \tag{1.68}$$

Para comprobar la consistencia del estimador $\hat{\beta}$, bastará con demostrar que es asintóticamente insesgados y que su varianza tiende a cero cuando la muestra crece.

Respecto a la primera condición, se le sabe cierta, dado que si los estimadores $\hat{\beta}$ son insesgados, luego entonces son asintóticamente insesgados.

Se sabe por (1.32) que la matriz de covarianza del estimador por mínimos cuadrados ordinarios está dada por

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}, \tag{1.69}$$

la cual se puede escribir como

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}\left[1/n(\mathbf{X'X})\right]^{-1}. \tag{1.70}$$

Esta última forma es adecuada para calcular el límite cuando $n \to \infty$, obteniendo

$$Lim_{n\to\infty}\ Cov(\hat{\beta}) = Lim_{n\to\infty}\ \frac{\sigma^2}{n}\left[1/n(\mathbf{X'X})\right]^{-1}$$

---

[10] Para la demostración de esta afirmación consulte apéncice A, sección A 2

$$Lim_{n\to\infty} Cov(\hat{\beta}) = Lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} Q^{-1} = 0, \tag{1.71}$$

donde Q^{-1} es la matriz a la que converge $1/n(X'X)$.

Puesto que el estimador por mínimos cuadrados es tanto asintóticamente insesgado como asintóticamente cierto, se concluye que es un estimador consistente de β.

1.5 El modelo de regresión lineal normal

Hasta el momento no se han hecho supuestos respecto a la distribución probabilística de las u_t solo se ha supuesto que su valor esperado es cero, que tienen varianza finita y constante, también conocido como homocedasticidad, y que no están correlacionadas, es decir son independientes entre ellas mismas.

Con estos supuestos los estimadores de mínimos cuadrados satisfacen los criterios de ser insesgados y de varianza mínima. Si el objetivo es únicamente la estimación puntual el método de los mínimos cuadrados ordinarios será suficiente, pero si el objetivo es hacer inferencias sobre los verdaderos valores de los parámetros estimados o construir intervalos de confianza se necesita especificar la distribución de probabilidad de las u_t, puesto que al ser los estimadores vía MCO funciones lineales de las u_t, sus correspondientes distribuciones probabilísticas dependerán de la distribución de las u_t.

Puesto que las distribuciones de probabilidad de los estimadores son necesarias para desarrollar inferencias respecto al verdadero valor de los parámetros poblacionales se concluye la importancia de la distribución de probabilidad de las u_t. Se sabe que las u_t representan la influencia combinada (sobre la variable dependiente) de un gran número de variables independientes que no se introducen explícitamente en el modelo. Se espera que la influencia de estas variables omitidas sea pequeña, y que en el mejor de los casos aleatoria, pero gracias al teorema del límite central[11] se puede demostrar que sí existe un número apreciable de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, la distribución de su suma tenderá a seguir una distribución normal a medida que el número de estas variables aumenta. Este teorema justifica que se pueda representar el comportamiento de los términos de perturbación estocástica como una distribución normal.

---

[11] Para la demostración del teorema del límite central y de esta afirmación consulte apéndice A, sección A.3

Con el supuesto de normalidad se pueden obtener fácilmente las distribuciones probabilísticas de los estimadores del modelo $\hat{\beta}$, debido a que una propiedad de la distribución normal es que cualquier función lineal de variables normalmente distribuidas también está normalmente distribuida.[12]

Además con el supuesto de normalidad se puede extender el uso del estimador para la varianza, dado por la función de máxima verosimilitud (1.36), y así construir intervalos de confianza para los estimadores.

1.5.1 Intervalos de confianza.

Debido a fluctuaciones muéstrales es posible que una sola estimación del valor poblacional difiera del valor verdadero, aunque en un muestreo repetido se espera que su valor mediosea igual al verdadero $E(\hat{\beta})=\beta$. En estadística la confiabilidad de un estimador puntual se mide a través del error estándar o la varianza, por tanto en lugar de basarse únicamente en la estimación puntual, se proporcionará la probabilidad de que el verdadero parámetro se encuentre dentro de cierto rango, alrededor del estimador puntual.

Suponga que se desea averiguar que tan cerca está $\hat{\beta}$ de β. Con este fin, se puede tratar de encontrar dos números positivos δ y α, donde este último se encuentra entre 0 y 1, de tal manera que la probabilidad de que el intervalo aleatorio $(\hat{\beta}-\delta, \hat{\beta}+\delta)$ contenga el valor verdadero de β sea $1-\alpha$. En notación matemática:

$$P(\hat{\beta}-\delta \leq \beta \leq \hat{\beta}+\delta) = 1-\alpha. \qquad \mathbf{(1.72)}$$

La ecuación muestra que un estimador de intervalo, en contraste con un estimador puntual, es un intervalo construido de tal manera que tenga una probabilidad $1-\alpha$ de incluir dentro de sus límites el verdadero valor del parámetro.

Tal intervalo, si es que existe, se conoce como intervalo de confianza. La diferencia $1-\alpha$ se denomina como coeficiente de confianza y a α se le conoce como nivel de significancia.

A partir del análisis anterior es de esperarse que si se conoce el muestreo o las distribuciones probabilísticas de los estimadores, se pueden hacer afirmaciones sobre su intervalo de confianza

[12] Consulte apéndice A, sección A.4

Asumiendo que los términos de perturbación estocástica están normalmente distribuidos, entonces los coeficientes β_j también estarán normalmente distribuidos, y el estimador de la varianza $\hat{s}^2$ como se ha demostrado anteriormente (1.42) sigue una distribución χ^2 Por tanto en notación matemática se tendrá

$$N(\beta, Cov(\beta)) = N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}). \tag{1.73}$$

Por lo que será factible construir intervalos de confianza y pruebas de inferencia estadística respecto a los verdaderos valores poblacionales de los coeficientes β_j.

En particular $\hat{\beta}_j$ está distribuido normalmente con media β_j y varianza $\sigma^2 (X'X)_{j,j}^{-1}$, que es el jésimo elemento de la diagonal principal de la matriz de covarianzas. Entonces si se define la variable z como

$$z = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}}, \tag{1.74}$$

de tal forma que z estará distribuida como una normal estándar con media cero y varianza uno Parece entonces que se puede utilizar la distribución normal para hacer afirmaciones probabilísticas sobre β_j, si se conoce la verdadera varianza poblacional σ^2.

Sin embargo puesto que se desconoce el valor de σ^2, se le substituye por su estimador $\hat{s}^2$, quedando la razón o estadístico

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}}. \tag{1.75}$$

Esta nueva variable o estadístico tiene una distribución t con n-k grados de libertad.[13] Por tanto, la distribución t será apropiada para efectuar inferencias respecto a los verdaderos valores poblacionales de los β_j.

Por principio puede construirse un intervalo de confianza para β_j, es decir,

$$P\,(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \tag{1.76}$$

donde $t_{\alpha/2}$ es el valor obtenido de la distribución t para un nivel significancia de $\alpha/2$ y n-k grados de libertad.

[13] Consulte apéndice A, sección A 5

Al substituir t por su definición en (1 75) se obtiene

$$P\left(-t_{\alpha_2} \le \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}} \le t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha .$$

Reordenando la expresión

$$P\left(\hat{\beta}_j - t_{\alpha_2} \sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}} \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}\right) = 1-\alpha .$$

Esta expresión proporciona el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para β_j, el cual puede escribirse más brevemente como:

$$\beta_j \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}} . \qquad \textbf{(1.77)}$$

Entonces podrá seleccionarse una α, de tal manera que el 90% ó el 95 % de los valores que pueden tomar los estimadores estén incluidos en el intervalo.

Ahora se puede formular la siguiente regla de decisión:

Construya un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para β_j. Si el valor de β_j bajo H_0 cae dentro de este intervalo de confianza, se puede aceptar H_0, pero si cae fuera del intervalo se rechaza H_0.

1.5.2 Pruebas de hipótesis y significación de los coeficientes estimados.

Es del dominio público que, en las llamadas pruebas de hipótesis el problema que se intenta resolver es si cierta observación o hallazgo es compatible con una determinada hipótesis, es decir, lo suficientemente cerca del valor hipotético, de manera que se acepte la hipótesis inicialmente enunciada.

La hipótesis enunciada se conoce como hipótesis nula, y se denota mediante el símbolo H_0.

La hipótesis nula generalmente se prueba contra una hipótesis alterna, que se denota como H_1 y que puede afirmar, por ejemplo que el verdadero valor de β_j es diferente de lo propuesto por H_0.

La hipótesis alterna puede ser simple o compuesta. Para ejemplificar $H_1: \beta_j = 3.5$ es una hipótesis simple y $H_1: \beta_j \neq 1.5$ es una hipótesis compuesta.

La teoría de pruebas de hipótesis se preocupa por desarrollar reglas o procedimientos para decidir si se acepta o rechaza la hipótesis nula. Uno de estos procedimientos es la prueba de significancia, donde la variable (estadístico o estimador) bajo consideración tiene cierta distribución probabilística y las pruebas de hipótesis involucran o encierran afirmaciones sobre los valores de los parámetros de dicha distribución. Por ejemplo ya es conocido que con el supuesto de normalidad $\hat{\beta}_j$ tiene una distribución normal, donde la media es igual a β_j. Si se formula la hipótesis de que β_j=1, se está haciendo una afirmación sobre uno de los parámetros de la distribución normal, es decir la media.

Una prueba de significancia es un procedimiento mediante el cual se utilizan los resultados de la muestra para verificar la falsedad o veracidad de una hipótesis. La idea fundamental consiste en utilizar un estadístico de prueba (estimador) y la distribución muestral de dicho estadístico bajo la hipótesis nula. La decisión de aceptar o rechazar H_0 se toma sobre la base del valor del estadístico obtenido a partir de los datos disponibles.

Bajo el supuesto de normalidad sabemos que t, dada en (1.75), tiene una distribución t con n-k grados de libertad. Si el valor verdadero de β_j se especifica en la hipótesis nula, el valor t puede calcularse fácilmente a partir de la muestra disponible, pudiendo servir por tanto como estadístico de prueba. Y puesto que este estadístico de prueba se distribuye como una t, es posible hacer afirmaciones sobre el intervalo de confianza, como la siguiente

$$P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j^*}{\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha\,,$$

donde β_j^* es al valor de β_j bajo H_0 y $t_{\alpha/2}$ son los valores de t que se obtienen de la tabla de distribución t para un nivel de significancia de $\alpha/2$ y n-k grados de libertad.

Si se ordena la expresión anterior en términos de $\hat{\beta}_j$ se tiene

$$P(\beta_j^* - t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}} \leq \hat{\beta}_j \leq \beta_j^* + t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}) = 1-\alpha\,, \tag{1.78}$$

lo cual proporciona el intervalo en el que $\hat{\beta}_j$ se encontrará con una probabilidad de $1-\alpha$, dado que $\hat{\beta}_j = \beta_j^*$. El intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ establecido por la expresión anterior se conoce como región de aceptación (de la hipótesis nula), mientras que las regiones fuera del intervalo se conocen como regiones de rechazo ó críticas. Los límites de confianza, es decir los valores extremos del intervalo de confianza reciben el nombre de valores críticos.

En el procedimiento de intervalos de confianza se trata de establecer los límites dentro de los cuales se puede encontrar el β_j verdadero, pero desconocido; mientras que en la prueba de significancia se plantea un valor hipotético para β_j, buscando comprobar si el $\hat{\beta}_j$ calculado se encuentra dentro de ciertos límites razonables (de confianza) con respecto al valor de la hipótesis.

En la práctica no existe necesidad de estimar explícitamente el intervalo de confianza, se puede calcular el valor de t que aparece y observar si se encuentra dentro de los valores t críticos o fuera de ellos.

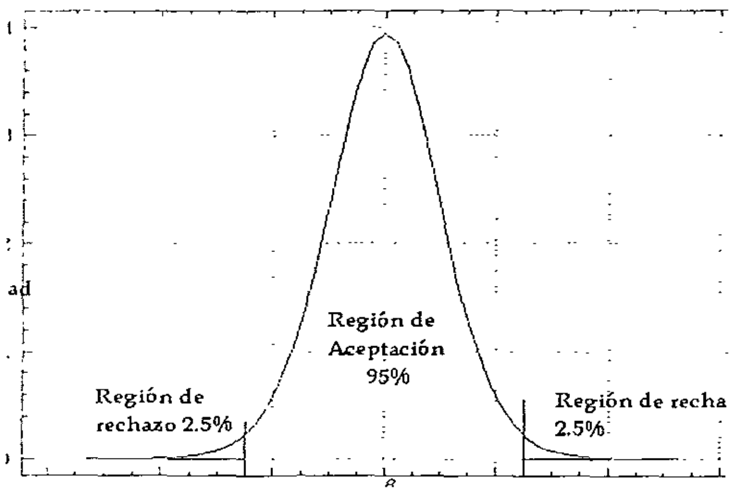

Figura 1.4
Región de aceptación del 95% para la hipótesis nula.

Puesto que se utiliza la distribución t, el procedimiento desarrollado se denomina prueba . Se dice que un estadístico es estadísticamente significativo si el valor del estadístico de prueba se encuentra en la región crítica .

Una hipótesis nula que frecuentemente se evalúa en los procesos de investigación es H_0: $\beta_j = 0$, lo cual implica que el coeficiente es nulo, es decir el objetivo es averiguar si la variable explicativa x_i determina a la variable y, de alguna forma. Si por principio no existe relación entre x_i, y entonces no tendrá sentido obtener algún estimador para β_j.

Esto es bastante sencillo de probar a través de un intervalo de confianza ó mediante la prueba de significancia t. Pero es aún más sencillo adoptar la regla práctica de significancia 2-t, a saber:

Si el numero de grados de libertad es de 20 ó más y el nivel de significancia α se fija en el 0.05, entonces la hipótesis nula $\beta_j = 0$ se puede rechazar en favor de la hipótesis alterna $\beta_j \neq 0$ si el valor

$$t = \left| \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{s}^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}} \right|$$

excede a 2.

Se utiliza el valor absoluto de t, puesto que se sabe que se rechaza $H_0: \beta_j = 0$ si el valor de t es mayor o menor que cero significativamente, por lo que se tomará el valor absoluto del estadístico t

Si se examina la tabla t, se observa que para g.l. de 20 ó más a un nivel α del 0.05 es un valor superior a 2 (en términos absolutos). En consecuencia si se encuentra que el valor t es de 2 ó mayor, ni siquiera se tiene que consultar la tabla t para evaluar la significancia del coeficiente estimado. Por supuesto siempre se debe de consultar la tabla t en situaciones donde los g.l. sean menores a 20 ó el nivel de significancia α sea diferente de 0.05

Otra importante estadístico de significación es la prueba F, la cual evalúa la significancía de la regresión como un todo, al probar la existencia de una relación lineal entre la variable dependiente y el conjunto de variables explicativas especificadas en el modelo.

Del apéndice A 7, se sabe que la suma de los cuadrados, $\| \dot{y} \|^2$, puede descomponerse en dos sumas. la suma de los cuadrados explicados por la regresión, $\| \hat{y} \|^2$, y la suma de los cuadrados no explicados por la regresión, $\| \hat{u} \|^2$, lo cuál conlleva el análisis de la varianza para la regresión, que se resume en la tabla (1.1).

Tabla 1.1 Análisis de varianza para el modelo.

	Suma cuadrada	g.l.	Media cuadrada
Explicado por la regresión	$\| \hat{y} \|^2$	k - 1	$\|\hat{y}\|^2 / (k-1)$
Residuales, no explicados	$\| \hat{u} \|^2$	n - k	$\|\hat{u}\|^2 / (n-k)$

La razón de las medias cuadradas, que en este caso coincide con el cociente de la varianza explicada sobre la varianza no explicada, se distribuye como una F con k - 1 y n - k g.l.

Para comprobar lo anterior, asúmase que los términos de perturbación estocástica se distribuyen normalmente, luego entonces, las dos sumas $\|\hat{\mathbf{y}}\|^2$ y $\|\hat{\mathbf{u}}\|^2$ se distribuyen independientemente como una χ^2 con k -1 y n - k g.l respectivamente. Es conocido que una distribución F, se define como el cociente de dos distribuciones χ^2 independientes, después de dividir cada una sobre sus respectivos g.l.[14] Por tanto el cociente se distribuye como una F con k -1 y n - k g.l, es decir,

$$\mathbf{F} = \frac{\|\hat{\mathbf{y}}\|^2/(k-1)}{\|\hat{\mathbf{u}}\|^2/(n-k)} \approx \mathbf{F}(k-1, n-k).$$

Este estadístico prueba la hipótesis nula de que todos los coeficientes de la regresión son diferentes de cero, es decir,

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 \cdots \beta_n = 0$$

Si el cociente excede el estadístico F(k -1, n - k) para cierto valor particular de confianza, entonces se rechaza la hipótesis nula de no dependencia de las variables explicativas, de manera que la evidencia estadística aclara que los coeficientes son diferentes de cero.

1.5.3 Notas sobre aceptar ó rechazar una hipótesis y el nivel de significancia α.

Si con base en una prueba de significancia, por ejemplo la prueba t, se decide aceptar la hipótesis nula, lo cual significa que en base a la evidencia de la muestra no se tiene razón alguna para rechazarla, no se está diciendo que la hipótesis nula sea cierta sin lugar a dudas. Al aceptar una hipótesis nula se debe estar consciente de que puede existir otra hipótesis nula igualmente compatible con los datos. Para ejemplificar piense en un jurado, el cual emite el veredicto de que un acusado "no es culpable", en lugar de decir de que "es inocente"; de la misma manera la conclusión de una prueba estadística es de "no rechazar" en vez de "aceptar".

Debe de tenerse en cuenta que para formular la hipótesis nula y alternativa es común que el fenómeno que se esté estudiando sugiera la naturaleza de estás hipótesis.

Por tanto las expectativas teóricas o trabajo empírico previo pueden ser confiables para formular hipótesis. No obstante, independientemente de como se formen las hipótesis, éstas deben de establecerse antes de llevar a cabo la investigación empírica, de otra manera se

---

[14] Intrilligator Michael, *Op Cit.*, pp 128, 617.

caería en un razonamiento de tipo circular o en aseveraciones que se cumplen por sí mismas. Lo anterior implica que si se formulan hipótesis después de examinar los resultados empíricos, puede surgir la tendencia de formular hipótesis de forma que justifiquen los resultados obtenidos.

Por lo que concierne al nivel de significancia α resulta claro que la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula depende fundamentalmente de α, el nivel de significancia, o la probabilidad de cometer un error del tipo I, es decir la probabilidad de rechazar la hipótesis verdadera. Si se trata de reducir el error del tipo I, inmediatamente aumenta el error del tipo II y viceversa, es decir, dado el tamaño de la muestra, si se trata de reducir la probabilidad de rechazar la hipótesis verdadera, al mismo tiempo se está aumentando la probabilidad de aceptar la hipótesis falsa. Por lo que existe una disyuntiva entre estos dos tipos de errores. Ahora bien la única manera en la que se puede dilucidar esta disyuntiva consiste en averiguar los costos relativos a los dos tipos de errores. En consecuencia sí el error de rechazar la hipótesis nula cuando ésta sea cierta (error tipo I) es costoso en relación con el error de no rechazar la hipótesis nula cuando ésta sea falsa (error tipo II), es razonable fijar la probabilidad del primer tipo de error a niveles bajos. Si por el contrario el costo de cometer el error de tipo I es bajo con respecto al costo de cometer el error de tipo II, es conveniente que la probabilidad del primer tipo de error sea alta, disminuyendo así la probabilidad de error tipo II.

Infortunadamente pocas veces se conoce el costo de cometer estos tipos de errores, razón por la cual se utiliza generalmente valores para α del 1, 5, ó máximo del 10%; a la vez que se selecciona un estadístico de prueba que disminuya al máximo posible la probabilidad de cometer el error de tipo II.

1.6 Estimación en el caso de Violación de los Supuestos Clásicos

Los estimadores, intervalos de confianza y pruebas de inferencias desarrollados hasta este momento se han basado en los siguientes supuestos:

- La varianza de los términos de perturbación estocástica es constante homosedasticidad.
- La ausencia de correlación alguna entre los términos de perturbación estocástica.
- La independencia entre las variables explicativas.

Sin embargo cuando no se cumple alguno de estos supuestos los estimadores obtenidos no serán insesgados o el mismo modelo puede no estar correctamente especificado (exclusión de variables relevantes o el uso de formas funcionales incorrectas).

Por tanto debe estudiarse qué pasa en la ausencia de dichos supuestos, examinar sus consecuencias, sugerir métodos para detectar dicha ausencia y analizar las medidas remediales conducentes a obtener estimadores que posean las propiedades estadísticas deseables.

1.6.1 Multicolinealidad

Uno de los supuestos del modelo de regresión múltiple es la condición de rango

$$\rho(\mathbf{X}) = k\,, \tag{1.79}$$

la cual significa que las columnas de la matriz **X** de n x k, conformada de las observaciones de las variables explicativas, sean linealmente independientes. Bajo este supuesto se sigue que el producto $\mathbf{X'X}$ es no singular, por consiguiente es invertible y se pueden obtener los estimadores vía mínimos cuadrados $\hat{\beta}$.

Sin embargo, sí alguna de las columnas de la matriz **X**, es una combinación lineal de las otras columnas, entonces la condición de rango no se cumple $\rho(x) < k$, lo que implica

$$|\mathbf{X'X}| = 0\,. \tag{1.80}$$

Por lo tanto $\mathbf{X'X}$ es una matriz singular que no puede ser invertida. Esta situación es conocida como *multicolinealidad perfecta*, en donde las ecuaciones normales de mínimos cuadrados no pueden ser resueltas para obtenerse los estimadores de $\hat{\beta}$.

El problema de multicolinealidad puede presentarse:

- Si alguna de las variables explicativas es constante sobre la muestra, entonces es un múltiplo de la unidad de variable para medir la intersección.
- Si una columna de **X** es entonces un múltiplo de otra.
- Si los datos de las variables explicativas han sido obtenidos, promediando los datos de otras variables explicativas incluidas en el modelo.

Una situación de multicolinealidad perfecta es fácil de identificar, por la imposibilidad de calcular la matriz inversa de $\mathbf{X'X}$. Para afrontar está situación se pueden remover del modelo aquellas variables explicativas, que sean combinaciones lineales de otras variables explicativas, y posteriormente volver a estimar sin estas variables

Desafortunadamente por lo general las situaciones que se enfrentaran no serán de multicolinealidad perfecta, pero en su lugar se tendrán problemas de multicolinealidad, en donde si bien $X'X$ es no singular, está muy cercana a serlo, en el sentido de que $|X'X| \approx 0$.

En este caso los datos de las variables explicativas tienen la propiedad de que aunque no son una exacta combinación de las otras variables explicativas, los valores de una o más de éllas son casi dados por cierta combinación de los valores de los otras.

Esta situación en la que las variables explicativas tienden a moverse juntas, es muy frecuente en los estudios empíricos, particularmente en el estudio de series de tiempo.

El problema de multicolinealidad es uno de los más ambiguos, significantes y difíciles problemas en la econometría aplicada, puesto que los datos económicos por su naturaleza tienden a moverse conjuntamente, reflejando factores comunes, tendencias y ciclos.

Por ejemplo, si se trabaja con una serie de tiempo de datos económicos, se encontrará que los componentes del producto nacional bruto tienden a moverse conjuntamente, por lo que incluir dos o más de estos agregados entre las variables explicativas en un modelo de regresión conllevará inevitablemente a enfrentarse con un problema de multicolinealidad.

Si el valor del determinante es aproximadamente cero, entonces su inversa $[X'X]^{-1}$ tenderá a tener elementos muy grandes en la diagonal principal, puesto que al tomar el recíproco de un número cercano a cero se obtienen valores muy grandes.

De manera que al evaluarse el estadístico t para cada uno de los coeficientes estructurales, pocos de éstos parecerán ser significativamente diferentes de cero, puesto que los radios de t tenderán a ser pequeños, dado que se emplea en esta fórmula los elementos de la diagonal principal de $[X'X]^{-1}$.

Al mismo tiempo el coeficiente de determinación R^2 será muy alto, y la prueba F dará valores muy altos, sustentándose la hipótesis de que no todos los coeficientes del modelo son ceros, es decir que el modelo desarrollado tiene cierto poder de explicación.

Es así que, si se presentan estadísticos t muy bajos conjuntamente a estadísticos F muy altos, se indica la presencia de un problema de multicolinealidad. Lo que significa que el conjunto de variables explicativas en verdad tiene peso sobre la variable dependiente, pero el efecto separado de cada una de las variables explicativas no se puede aislar, por lo que no puede ser distinguido.

Además, en la presencia de multicolinealidad, los coeficientes estimados de algunas de las variables explicativas son típicamente sensitivos a la inclusión ó exclusión de las otras variables explicativas.

Por su parte, las estimaciones son sensibles a los datos usados en la estimación, la adición de nuevos datos producirá grandes cambios en los parámetros estimados. Es decir las estimaciones son imprecisas e inestables en la presencia de multicolinealidad

El problema de multicolinealidad puede ser visto como un reflejo del hecho de que los datos no son lo suficientemente ricos en términos de variación independiente de las variables explicativas para estimar adecuadamente el modelo especificado.

Para afrontar la multicolinealidad se cuenta con diferentes aproximaciones:

Una aproximación es aumentar el tamaño de la muestra de datos, para facilitar la estimación del modelo especificado. Se puede pensar que esto no tiene sentido, si los datos adicionales son del mimo tenor que los datos ya contemplados. Lo que pude ayudar es el uso de datos de diferente tipo, específicamente datos que exhiban diferencias significativas de aquellos que ya están contemplados en el modelo. Si datos que representan una diferente situación se agregan al modelo, entonces la nueva muestra presentará una menor multicolinealidad.

Por ejemplo, en un modelo macroeconómico frecuentemente se excluyen datos no representativos, correspondientes a períodos de guerra, o de inestabilidad social. Esta exclusión de datos puede excluir períodos en el que el modelo no es aplicable, sin embargo su inclusión en el modelo puede reducir el problema de multicolinealidad. De aquí es necesario encontrar el balance entre la exclusión de datos con cierta variabilidad y los que si impiden que el modelo sea aplicable. Por lo general es mejor abolir los extremos que excluir todos los períodos no representativos, para los cuales los datos resultantes exhibirán alta multicolinealidad, y el otro extremo, donde se aceptan todos los períodos críticos, lo que provocaría que los datos no reflejen la realidad, y el modelo no sería aplicable.

Simplificar el modelo a los datos disponibles, puesto que como se le ha especificado originalmente está pidiendo mucho a los datos disponibles Por su naturaleza la multicolinealidad significa que algunas de las variables explicativas presentadas, no contienen mucha información adicional o relevante sobre las otras variables del modelo. Esto sugiere simplificar el modelo mediante la eliminación de algunas de las variables explicativas (como en el caso de multicolinealidad perfecta) o promediar o agregar ciertos grupos de variables. Por ejemplo, un modelo del mercado de capitales puede incluir diferentes tipos de tasas de interés, lo que llevará a un problema de multicolinealidad, que puede ser reducido promediando las tasas de interés mas representativas

Una evidente dificultad con esta aproximación es conocer que variables se deben eliminar, y cuales se deben de promediar; por lo general no es muy aparente que variables se deben de excluir, lo que se debe de hacer es reestructurar el modelo de acuerdo a las hipótesis de trabajo.

Los coeficientes de correlación simple y los de correlación parcial pueden ayudar a sugerir que variables se pueden excluir del modelo, puesto que valores absolutos altos de correlación simple entre dos variables explicativas sugieren que alguna de las variables puede ser omitida del modelo, o que estas variables pueden ser promediadas.

La siguiente aproximación al problema es estar consciente del problema de multicolinealidad y no tratar de hacer ningún cambio ni al modelo especificado, ni a los datos involucrados. Por ejemplo, si el modelo está diseñado con base a una bien formulada teoría será inapropiado cambiar sus especificaciones, puesto que cualquier cambio, como omitir variables, inducirá un error de especificación dentro del análisis, creando inconsistencias en todos los demás estimadores del modelo.

Los errores de especificación pueden acarrear mas problemas, por lo que el remedio puede ser peor que la enfermedad. Dejar las cosas como se presentan, es consistente con el punto de vista de que la multicolinealidad es una propiedad de la población bajo estudio.

El hecho de que no se pueda aislar la influencia de cada variable, conlleva a la estimación equivoca de los parámetros.

El seleccionar la aproximación correcta al modelo: aumentar los datos, reducir el modelo ó vivir con el problema, depende de los propósitos del estudio. Por ejemplo si el modelo está bien fundamentado teóricamente será inapropiado cambiar sus especificaciones; pero si el modelo refleja solamente las relaciones causales sobre que variables deben de ser consideradas relevantes, entonces debe de cambiarse la especificación del modelo. Si se tienen nuevos datos, estos deben de utilizarce inmediatamente.

El propósito del estudio también juega un papel importante. Si el objetivo es el pronóstico, entonces la multicolinealidad no representa un grave problema, puesto que se pueden obtener buenos pronósticos, a pesar de la presencia de multicolinealidad, dado que las mismas relaciones entre variables explicativas usualmente existen en el periodo de pronóstico. No obstante si el propósito es el análisis estructural, específicamente discernir las influencias por separado de cada variable explicativa, la multicolinealidad se vuelve un grave problema que debe de ser eliminado.

1.6.2 Heterosedasticidad

El problema de heterosedasticidad se presenta cuando el supuesto de que la varianza de los términos de perturbación es finita y permanece constante a lo largo de la muestra no se cumple Es decir se presenta alguna de las siguientes situaciones:

$$Var(u_i) \neq Var(u_j), \tag{1.81}$$

donde $i \neq j$.

$$Var(u_i) = \infty \text{ para alguna } i, \tag{1.82}$$

de manera que los elementos a lo largo de la diagonal principal de E(**u'u**) no son iguales, o no son finitos.[15]

El caso mas común de heterosedasticidad se presenta cuando la varianza no permanece constante a lo largo de la muestra.

La heterosedasticidad tiene dos implicaciones importantes para la estimación.

La primera es que los estimadores por mínimos cuadrados son aún lineales y consistentes (en el caso de varianza finita, pero diferente), pero ya no son eficientes, no son de mínima varianza, dejando de ser los mejores estimadores dentro de la clase de los estimadores lineales consistentes.

La segunda consecuencia es que las varianzas estimadas de los estimadores por mínimos cuadrados son sesgadas, de manera que las pruebas de significación estadística, tales como la t y la F ya no son válidas, así como los intervalos de confianza serán innecesariamente amplios. De aquí que sea importante detectar la presencia de heterosedasticidad, y en caso de presentarse, corregirla.

No existen reglas fijas para detectar la presencia de heterosedasticidad en un modelo, pero si existen métodos formales e informales, la mayoría basados en el análisis de los residuales, considerándolos como una estimación de los términos de perturbación estocástica.

[15] Intriligator Michael, *Op Cit* pp. 128, 617.

Frecuentemente la naturaleza del modelo sugiere la presencia de heterosedasticidad. Por ejemplo un modelo de aprendizaje, puesto que a medida que una persona aprende, sus errores de comportamiento se hacen más pequeños conforma transcurre el tiempo, de manera que la varianza disminuirá conforme pase el tiempo.

En otras ocasiones cuando no existe información a priori acerca de la presencia o ausencia de heterosedasticidad en el modelo, se puede efectuar el análisis de regresión bajo el supuesto de que no existe heterosedasticidad, y posteriormente analizar los residuales estimados al cuadrado, para tratar de encontrar algún comportamiento sistemático. Al examinar los residuales pueden presentarse patrones como los de la figura (1.7), donde se gráfica el valor estimado de $\hat{Y}$, contra los residuales al cuadrado $\hat{u}_i^2$, con el propósito de averiguar si el valor promedio estimado del modelo $\hat{Y}$ está sistemáticamente relacionado con el residuo al cuadrado $\hat{u}_i^2$. En la figura (1.7.a) se observa que no existe un patrón sistemático entre las dos variables, sugiriéndose la ausencia de heterosedasticidad, sin embargo las otras figuras muestran relaciones lineales o hasta cuadráticas entre $\hat{u}_i^2$ y $\hat{Y}$.

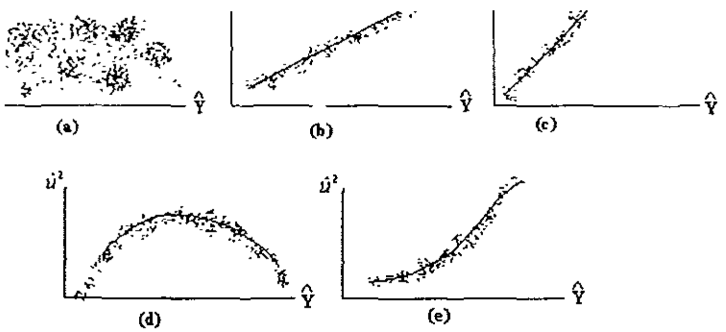

Figura 1.7
Posible patrón de comportamiento de los residuales en un modelo de regresión.

Se puede proceder de la misma manera con cualquier variable explicativa del modelo, es decir, graficar cierta X_i contra los residuales $\hat{u}_i^2$, de manera que se detecte algún patrón de comportamiento.

En caso de haberse detectado un patrón de relación positivo entre los residuales y alguna variable explicativa, se puede aplicar la siguiente prueba.

Por simplicidad supóngase el siguiente modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i. \qquad (1.83)$$

Además supóngase una relación positiva entre X_i y σ_i^2, en este caso particular será

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i, \tag{1.84}$$

donde σ^2 es una constante.

Este supuesto indica que conforme crecen los valores de X_i, σ_i^2 será mayor Si este resulta ser el caso, es altamente probable la presencia de heterosedasticidad en el modelo. Para evaluar esta teoría se siguen los siguientes pasos:

1. Ordenar las observaciones, conforme a los valores de la variable explicativa X_i, en orden ascendente.
2. Omitir del modelo *c* observaciones centrales, *c* se específica a priori, y dividir las restantes *n-c* observaciones en dos grupos de $(n-c)/2$ observaciones, cada uno.
3. Calcular regresiones separadas para cada uno de los conjuntos obtenidos y obtener las sumas cuadradas de los residuales para cada uno, denotadas por SRC1 y SRC2. Cada uno de estos modelos tiene $(n-c)/2$ *-k* grados de libertad, donde *k* es el número de parámetros a estimar.
4. Calcúlese la razón: $\lambda = SRC1/SRC2$

Si se supone que los u_i siguen una distribución normal, lo cual normalmente ocurre, y si el supuesto de homosedasticidad es válido, entonces se sabe que la suma de v.a. normalmente distribuidas conforma una distribución χ^2, y que a su vez la razón de dos distribuciones χ^2 tiene una distribución *F*, donde los grados de libertad para el numerador y el denominador son $(n-c)/2$ *-k*.

Si al calcular λ para cierto modelo, su valor excede al valor crítico de *F* al nivel de significancia que se halla establecido, se puede proceder a rechazar la hipótesis de homosedasticidad, pudiéndose concluir que existe una gran probabilidad de que exista heterosedasticidad.

En caso de haberse detectado la presencia heterosedasticidad, o de algún patrón sistemático, se puede proceder a efectuar una transformación del modelo, tal que se elimine la heterosedasticidad.

Como se ha reiterado, la heterosedasticidad no destruye las propiedades de insesgamiento y consistencia de los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios, sin embargo dejan de ser eficientes, restando credibilidad a las pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Por tanto es necesario introducir medidas remédiales.

En vez de evaluar al modelo lineal, dado por

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t, \tag{1.85}$$

se correrá la regresión sobre

$$\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 \ln X_t + u_t. \tag{1.86}$$

Este nuevo modelo reduce frecuentemente el problema de heterosedasticidad. Esto se debe a que las transformaciones logarítmicas reducen las escalas de medición para las variables. Una ventaja adicional de la transformación logarítmica es que el coeficiente de la pendiente β_1 mide la elasticidad Y_t con respecto a X_t, es decir el cambio porcentual en Y_i ante un cambio porcentual en X_t, mientras que en el modelo original se mide únicamente la tasa de cambio de Y_t con respecto al crecimiento de una unidad de X_t. Cabe señalar que esta transformación sólo es aplicable si todas las observaciones son mayores que cero, de lo contrario se obtendrían valores indeterminados. Si se presentase está situación tendría que recurrirse a alguna otra transformación.

1.6.3 Correlación serial

Uno de los supuestos más importantes del modelo clásico es que los errores ó perturbaciones estocásticas no están correlacionados entre éllos, es decir, son aleatorios. Si se viola este supuesto se tiene un problema de correlación serial, también conocida como autocorrelación, en la cual los términos de perturbación estocástica no son independientes unos de otros, es decir

$$Cov(u_i u'_j) \neq 0, \tag{1.87}$$

para alguna $i \neq j$, de manera que el término de perturbación estocástica del período actual estará relacionado con los términos de perturbación de períodos anteriores.[16]

Esta última afirmación esta en oposición con el supuesto de que los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz de covarianzas E(**uu'**) son todos cero. Es decir el modelo clásico supone que el término de perturbación asociado a alguna observación no está influenciado por el término de perturbación asociado a cualquier otra observación.

El problema de correlación serial es frecuente, cuando se utilizan series de tiempo, puesto que los términos de perturbación estocástica reflejan variables no incluidas explícitamente

[16] *ibidem* p 159.

en el modelo, las cuales pueden cambiar lentamente a través del tiempo. Por ejemplo, series de tiempo como el PIB, producción, precios, desempleo presentan ciclos que partiendo de la parte más baja de la recesión comienzan la recuperación económica todos tienden a subir, por lo que el valor de una observación en un momento del tiempo será mayor que sus valor anterior. Por lo tanto parecerá que las observaciones sucesivas serán interdependientes unas de otras.

Una causa general de un problema de correlación serial es una deficiente especificación del modelo, particularmente la exclusión de variables relevantes en el modelo ó el uso de una forma funcional incorrecta. Así mismo, en un modelo que utilice datos de series de tiempo, por ejemplo, la relación entre el gasto de consumo y el ingreso, no es extraño encontrar que el nivel de gastos de consumo de un determinado período depende, entre otras cosas, de los gastos de consumo del período anterior. Un modelo como este se conoce como autoregresivo, debido a que una de las variables explicativas corresponde al valor rezagado de la variable dependiente. El razonamiento de un modelo como éste es sencillo. Los consumidores no cambian sus hábitos de consumo con frecuencia debido a razones de tipo psicológico, social o tecnológicas. Pero si no tomamos en cuenta el término rezagado, el término de error resultante reflejará un patrón sistemático debido a la influencia del consumo rezagado sobre el consumo actual.

Si bien en presencia de correlación serial los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados serán aún lineales, insesgados, y consistentes, pero no tendrán más mínima varianza. Por consiguiente los estimadores no serán eficientes. Así mismo los estimadores de la varianza de los términos de perturbación estocástica serán sesgados.

Por lo que respecta a las pruebas estadísticas, como la prueba t de significación de los coeficientes, la prueba F de significación de todo la regresión, o cualquiera otra hipótesis sobre los coeficientes de regresión serán por lo general inválidas. Por lo antes mencionado, es estrictamente necesario probar la presencia de correlación serial y, en caso de que se le detecte, proceder a corregirla

El más frecuente caso de correlación serial es el primer orden, donde se presenta una relación lineal entre los términos sucesivos de perturbación estocástica, de modo que adquiere la forma de un proceso de Markov de primer orden, también conocido como un modelo autoregresivo de primer orden, dado por

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2,t} + \ldots + \beta_n x_{n,t} + u_t, \tag{1.88}$$

$$u_t = \rho\, u_{t-1} + v_t, \tag{1.89}$$

donde ρ es un parámetro desconocido $|\rho| < 1$, v_t es el residuo de la función de primer orden para los términos de perturbación estocástica, que se asume si satisface los supuestos del modelo de regresión lineal, es decir

$$E(v_t) = 0, \tag{1.90}$$

$$Cov(v_i v_j) = 0, \text{ para todo par } i,j, \text{ tal que } i \neq j, \tag{1.91}$$

$$Cov(v_i v_i) = \sigma_t^{\,2}. \tag{1.92}$$

Si en el modelo original (1.88) se regresa un período de tiempo y se premultiplica por ρ, se obtiene

$$\rho\, y_{t-1} = \rho\, \beta_1 + \rho\, \beta_2 x_{2,t-1} + \rho\, \beta_n x_{n,t-1} + \rho\, u_{t-1}.$$

Si se toman diferencias respecto a (1.88) se obtiene el modelo transformado

$$y_t - \rho\, y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_{2,t} - \rho\, x_{2,t-1}) + .. + \beta_n(x_{n,t} - \rho\, x_{n,t-1}) + (u_t - \rho\, u_{t-1})$$

$$= \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_{2,t} - \rho\, x_{2,t-1}) + .. + \beta_n(x_{n,t} - \rho\, x_{n,t-1}) + v_t, \tag{1.93}$$

donde v_t reemplaza a $u_t - \rho\, u_{t-1}$.

Este modelo transformado expresa la variable $y_t - \rho\, y_{t-1}$ como combinación lineal de las variables en $x_t - \rho\, x_{t-1}$. En el modelo obtenido (1.93) se puede comprobar la presencia o ausencia de correlación serial de primer orden a través de la hipótesis nula

$$H_o: \rho = 0,$$

bajo la cual el modelo de correlación serial de primer orden se reduce al modelo clásico. El estadístico de prueba para está hipótesis es el de Durbin-Watson[17] $\hat{d}$, el cual se define como

$$\hat{d} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}, \tag{1.94}$$

donde $\hat{u}_t$ es el i-ésimo residuo por mínimos cuadrados. Este estadístico es la razón de la suma de los cuadrados, de las sucesivas diferencias de los residuales, sobre la suma

[17] Para un análisis teórico del mencionado estadístico consulte J. Durbin & C S Watson, "*Testing for serial correlation in least squares regression*", Biometrika, USA, 1951, pp. 159-177, Vol. 38

cuadrada de los residuales. La suma en el numerador va desde 2 a n, por la presencia del término $\hat{u}_{t-1}$, mientras la suma en el numerador va de 1 a n.

Si se desarrolla el cuadrado del numerador se obtiene

$$\hat{d} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t^2 - 2\hat{u}_{t-1}\hat{u}_t + \hat{u}_{t-1}^2)}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}.$$

Para una muestra suficientemente grande, se sabe que

$$\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2 \approx \sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2,$$

de manera que $\hat{d}$ puede ser aproximado como

$$\hat{d} = \frac{\sum_{t=2}^{n}2\hat{u}_t^2 - \sum_{t=2}^{n}2\hat{u}_{t-1}\hat{u}_t}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}.$$

$$\hat{d} = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{i-1}\hat{u}_i}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}\right). \qquad \textbf{(1.95)}$$

Al estimar el modelo en (1.88) por mínimos cuadrados ordinarios se obtienen los residuales, procediéndose a estimar el modelo autorregresivo en (1.89) como en un problema de regresión simple, obteniéndose el estimador

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{i-1}\hat{u}_t}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_{i-1}^2}, \qquad \textbf{(1.96)}$$

el cual para una n suficientemente grande es equivalente a

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}\hat{u}_t}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}. \qquad \textbf{(1.97)}$$

Si se substituye este último resultado en (1.95) se tendrá

$$\hat{d} \approx 2(1 - \hat{\rho}).$$

Retomando que ρ fluctúa en el intervalo $-1 \leq \rho \leq 1$, se implica

$$0 \leq d \leq 4 \tag{1.98}$$

Resulta evidente que si $\rho=0$ entonces $\hat{d} \approx 2$. En este caso se indica la ausencia de correlación serial de primer orden. Por tanto si d es aproximadamente igual a 2, se puede suponer que no existe correlación de primer orden, sea positiva ó negativa.

Suponga que $\hat{u}_t$ y $\hat{u}_{t-1}$ son usualmente del mismo signo, tal es el caso de correlación serial positiva de primer orden. La suma de $\hat{u}_t\,\hat{u}_{t-1}$ dará una cantidad positiva, por lo que $\hat{d}$ tendrá un valor significativamente por debajo de 2, es decir si $\hat{\rho} \approx 1$, entonces $\hat{d} \approx 0$. Por lo que entre más cerca de cero este $\hat{d}$, mayor será la evidencia de una correlación serial positiva

Procediendo de manera análoga si $\hat{u}_t$ y $\hat{u}_{t-1}$ son de signo opuesto, su producto $\hat{u}_t\,\hat{u}_{t-1}$ tenderá a ser negativo, por lo que $\hat{d}$ estará significativamente por arriba de 2, es decir, si $\hat{\rho} \approx -1$, entonces $\hat{d} \approx 4$. Por lo que entre más cerca de cuatro esté $\hat{d}$, mayor será la evidencia de una correlación serial negativa de primer orden.

El otro caso ocurre cuando los errores tienden a cambiar de signo alternadamente, es decir observación tras observación, entonces el producto de las $\hat{u}_t\,\hat{u}_{t-1}$ en su mayoría tendrán un signo negativo, por lo que su suma será negativa, y en consecuencia el valor de $\hat{d}$ estará significativamente por arriba de 2, indicando correlación serial negativa de primer orden, aunque en realidad no lo sea. Sin embargo, aunque no se indique qué tipo de correlación serial exista, *si se detectará cuando no se presente.*

El estadístico de Durbin-Watson se basa en los siguientes supuestos:

- El modelo de regresión incluye el término de intersección.
- Las variables explicativas son no estocásticas o fijas para muestreos repetidos.
- La correlación en caso de presentarse se genera a través de un esquema autoregresivo de primer orden.
- El modelo de regresión no incluye el valor o los valores rezagados de la variable dependiente como una de las variables explicativas, por lo cual la prueba no es aplicable a modelos autoregresivos.

Existen tablas para valores significativos del estadístico de Durbin-Watson, basadas en la distribución normal de los estimadores, las cuales para una muestra de tamaño n y un número k de coeficientes a estimar indican las fronteras inferior y superior (d_L y d_U) para cierto nivel de confianza, tales que si el valor d calculado en la ecuación cae fuera de estos valores críticos se puede tomar una decisión sobre la posible presencia de correlación serial positiva o negativa; pero a diferencia de las pruebas t ó F no existe un único valor crítico que pueda llevar al rechazo o aceptación de la hipótesis nula de que no existe correlación serial de primer orden entre las perturbaciones.

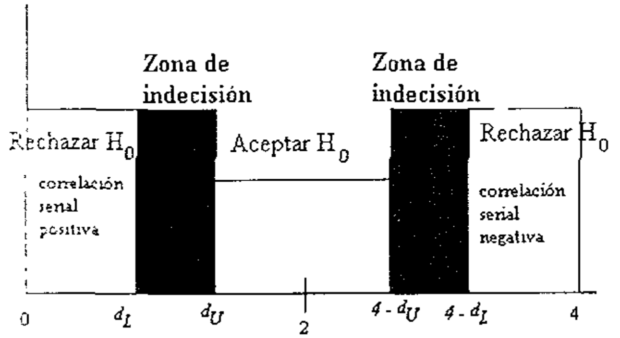

Figura 1.8
Zonas de aceptación, indecisión y rechazo para el estadístico de Durbin-Watson.

En el caso de que no se pueda tomar una decisión sobre la presencia ó ausencia de correlación serial se puede utilizar otra aproximación estadística, la prueba de independencia χ^2 para los residuos.

Considérese una tabla de residuales con dos columnas, una registra los residuos en el período t, la otra en el período t - 1. Concéntrese ahora únicamente en el signo de estos residuales, con la que se elaborará una *tabla de contingencia o dependencia* de 2 x 2, que será un arreglo tabular (matriz), donde las filas representarán la clasificación de acuerdo a una variable, en este caso los residuos en el período t - 1, y las columnas representarán la clasificación de acuerdo con otra variable, los residuos en el período t. Cada variable tendrá un espacio muestral de dos eventos posibles: si los residuales son positivos ó negativos.

Tabla 1.2 Contingencia teórica.

	(A) Número de residuos positivos en el periodo t	(B) Número de residuos negativos el periodo t	Total
(C) Número de residuos positivos en el periodo t-1	P(AC)	P(CB)	
(D) Número de residuos negativos en el periodo t-1	P(AD)	P(DB)	
Total	P(AC) + P(AD)	P(CB) + P(DB)	

Cada elemento i,j indicará la probabilidad conjunta de por ejemplo cierto número de residuales negativos en el período t, con cierto número de residuales positivos en el período t-1

Tómese, por ejemplo, un total de 25 residuales $\hat{u}_t$, con obviamente solo 24 $\hat{u}_{t-1}$. Puesto que no existe predecesor a la primera observación, por tanto, sólo se considerarán 24 residuos y se omitirá el primer $\hat{u}_t$. De éstos se supondrá que 12 de éllos fueron positivos en el período t y el t-1 conjuntamente. y 10 negativos tanto en t como en t-1; un residual negativo en t y uno positivo en t-1; y un residual negativo en t conjuntamente con un positivo en t-1.

Si los residuales fueran verdaderamente aleatorios, es decir bajo la hipótesis nula de que los residuales sean aleatorios, la frecuencia esperada o teórica en cada celda i,j sería el producto de los totales marginales de las filas y columnas dividido por el gran total.

Tabla 1.3 Contingencia observada versus contingencia teórica.

	No. de residuos > 0 en el período t	No. de residuos < 0 en el período t	Total
No. de residuos > 0 en el período t-1	observaciones = 12 Valor Teórico= 7.0	observaciones = 1 Valor Teórico = 5.95	13
No. de residuos < 0 en el período t-1	observaciones = 1 Valor Teórico= 5.95	observaciones = 10 Valor Teórico = 5 041	11
Total	13	11	24

Si se define o_t como la frecuencia observada y a f_t como la frecuencia teórica y bajo la hipótesis nula de que las $\hat{u}_t$ están distribuidas en forma independiente, se sabe que la suma de razones, dada por

$$\sum \frac{(o_t - f_t)^2}{f_t}, \tag{1.99}$$

posee una distribución χ^2 con (r-1)(c-1) grados de libertad, donde r es el número de filas y c es el número de columnas. En la tabla de contingencias desarrollada los grados de libertad siempre serán uno, puesto que la mencionada tabla será de 2 x 2.

Por tanto, si en una aplicación el valor calculado de χ^2 excede el valor crítico del χ^2 (al nivel de significancia seleccionado), se puede rechazar la hipótesis de independencia; de lo contrario se acepta

Una vez que la correlación serial ha sido detectada a través del estadístico de Durbin-Watson ó la prueba de independencia χ^2 existen dos posibles soluciones, ambas provocan un cambio en la especificación del modelo. La primera es incluir mas variables explicativas, lo cual es válido debido a que las perturbaciones estocásticas están conformadas por la acción implícita de estas variables, que al presentarse explícitamente puede anular la correlación serial. Sin embargo, si no es justificable teóricamente la inclusión de otras variables en el modelo se puede estimar el modelo transformado en (1.93), aprovechando que los términos de perturbación estocástica en este modelo siguen un esquema autoregresivo de primer orden, como el dado (1.89), el cual si satisface los requerimientos del modelo clásico (varianza constante, valor esperado cero y ausencia de correlación serial), para lo cual antes de proceder se requiere la estimación del parámetro ρ.

Por lo general, se estima primero el modelo original, y se emplean estas estimaciones para obtener los residuales $\hat{u}_i$ y $\hat{u}_{i-1}$, y entonces estimar a ρ, a través de una regresión lineal simple en el modelo autoregresivo de primer orden, obteniéndose la expresión en (1.97).

Se han desarrollado otros métodos para la estimación de ρ, entre los cuales destacan los métodos numéricos como el *proceso Iterativo de Cocrane-Orcutt*, el cual se basa en la estimación de los residuos $\hat{u}_i$ para obtener información sobre el valor desconocido de ρ.[18]

Existen otras alternativas para la estimación de ρ, como la aproximación por máxima verosimilitud para obtener los parámetro directamente, sin tener que recurrir a técnicas iterativas. Sin embargo se debe de tener presente que cuando se utiliza un estimador en vez del verdadero valor, los coeficientes de MCO estimados tienen las mismas propiedades óptimas usuales solo asintoticamente, es decir para muestras grandes. De la misma manera los procesos de pruebas de hipótesis convencionales serán válidos asintóticamente.

1.6.4 Estimación por Mínimos Cuadrados Generales (MCG).

Como se ha mencionado en presencia de heterosedasticidad o correlación serial en un modelo los estimadores por mínimos cuadrados ya no serán los más eficientes.

Con objeto de manejar tanto la heterosedasticidad como la correlación serial se define

$$Cov(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu'}) = \sigma^2\Omega, \qquad \textbf{(1.100)}$$

[18] Consulte apéndice A, sección A 6.

donde Ω es una matriz dada simétrica y definida positivamente, de orden n, y σ^2 es un parámetro desconocido.[19]

Cuando se cumplen los supuestos de homosedasticidad y ausencia de correlación serial, Ω es la matriz identidad, la cual también se conoce como matriz de *perturbaciones esféricas*[20] No obstante, en su forma general, permite el trabajo con perturbaciones *no esféricas*.[21]

Si se asume que los términos de perturbación estocástica están distribuidos normalmente con media cero y matriz de covarianza $\sigma^2\Omega$, denotado por

$$u \approx N(0,\ \sigma^2\Omega).$$

Los estimadores pueden entonces ser obtenidos a través de la técnica de máxima verosimilitud.

La función de densidad normal multivariada está dada por

$$f(u) = (2\pi)^{-n/2}|\Omega|^{-1/2}\sigma^{-n} Exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}u'\Omega^{-1}u\right), \tag{1.101}$$

cuya función logaritmo es

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\Omega| - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\Omega^{-1}\left(y - X\hat{\beta}\right), \tag{1.102}$$

la cual será maximizada por la elección de una $\hat{\beta}$ y de una σ.

Máximizar ln$L$, por la elección de una $\hat{\beta}$ requiere que se minimice el término

$$S(\Omega) = \left(y - X\hat{\beta}\right)'\Omega^{-1}\left(y - X\hat{\beta}\right),$$

que es una suma ponderada del cuadrado de los residuos y el producto cruzado de los residuales, las ponderaciones son los elementos de la matriz inversa Ω^{-1}. La suma ponderada de los cuadrados se reduce a la suma ordinaria de los cuadrados de los residuos de S, en el caso de perturbaciones esféricas. Si se expande $S(\Omega)$

$$S(\Omega) = y'\Omega^{-1}y - 2\hat{\beta}'X'\Omega^{-1}y + \hat{\beta}'X'\Omega^{-1}X\hat{\beta}$$

La primer condición de orden para que se minimice $S(\Omega)$ es

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\hat{\beta}'} = -2X'\Omega^{-1}y + 2X'\Omega^{-1}X\hat{\beta} = 0.$$

[19] Intriligator Michael, *Op cit.*, p. 165
[20] Cuando se cumplen tanto el supuesto de homosedasticidad, como el de ausencia de correlación serial
[21] Cuando no se cumplen alguno de los supuestos de homosedasticidad y de ausencia de correlación serial.

Asumiendo que el rango de X es completo, la matriz $(X'\Omega^{-1}X)$ es no singular, por lo que el estimador puede ser escrito como

$$\hat{\beta}(\Omega) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\, X'\Omega^{-1}y\,, \tag{1.103}$$

donde $\hat{\beta}(\Omega)$ es el estimador general por mínimos cuadrados(MCG), el cual se reduce al estimador por mínimos cuadrados ordinarios, si $\Omega = I$, es decir en el caso de perturbaciones esféricas

De manera análoga a los mínimos cuadrados ordinarios, es importante analizar la distribución de los estimadores por MCG. En particular, la matriz de covarianza proveerá información sobre los errores estándar que es útil en las pruebas de significación para los coeficientes estimados. Usando la aproximación conocida, la matriz de covarianzas de los estimadores por MCG será

$$Cov\left(\hat{\beta}(\Omega)\right) = \sigma^2\, (X'\Omega^{-1}X)^{-1}. \tag{1.104}$$

Este resultado generaliza la matriz de covarianza para los mínimos cuadrados ordinarios.

Para usar este resultado, es decir para computar los errores estándar y los intervalos de confianza es necesario estimar σ^2. Un estimador insesgado de σ^2 es dado por maximizar (1.115), respecto a σ, y ajustarlo para el número de grados de libertad como

$$\hat{S}^2(\Omega) = \frac{1}{n-k}\left[\hat{u}(\Omega)\right]'\Omega^{-1}\left[\hat{u}(\Omega)\right], \tag{1.105}$$

donde $\hat{u}(\Omega)$ es el vector de los residuales $\hat{u}(\Omega) = y - X\hat{\beta}(\Omega)$.

Si los términos de perturbación están distribuidos normalmente se sigue que

$$\hat{\beta}(\Omega) \approx N\left(\beta, \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1}\right)$$

El estimador por MCG satisface todas las propiedades del teorema de Markov, es lineal, insesgado y el mejor de todos los estimadores lineales insesgados, mientras que el estimador por mínimos cuadrados ordinarios es aún lineal e insesgado, pero no es el más eficiente, en el caso de perturbaciones no esféricas.

Si la matriz de covarianzas está dada, los estimadores por MCG son los estimadores más eficientes y a su vez consistentes.

Con el objeto de demostrar estas afirmaciones, basta con demostrarse que los MCG son equivalentes a los mínimos cuadrados ordinarios, después de una transformación adecuada, de manera que se extienden a los estimadores por MCG, las propiedades de los primeros.

Un resultado matemático del álgebra lineal establece que cualquier matriz simétrica definida positivamente **A**, puede ser escrita como el producto $\mathbf{P'P}$, donde **P** es una matriz no singular Debido a que Ω es una matriz simétrica y definida positivamente, su inversa Ω^{-1} también lo será, de manera que se puede escribir como $\Omega^{-1} = \mathbf{P'P}$, donde **P** es no singular

Si se substituye este resultado en el estimador de MCG, se obtiene

$$\hat{\beta}(\Omega) = (\mathbf{X'P'PX})^{-1}\mathbf{X'P'Py}, \tag{1.106}$$

que coincide con el estimador vía mínimos cuadrados ordinarios del modelo transformado

$$\mathbf{Py} = \mathbf{PX}\beta + \mathbf{Pu}, \tag{1.107}$$

donde

$E(\mathbf{Pu}) = \mathbf{P}E(\mathbf{u}) = 0,$

$E(\mathbf{Puu'P'}) = \mathbf{P}E(\mathbf{uu'})\mathbf{P'} = \sigma^2\mathbf{P}\Omega\mathbf{P'} = \sigma^2\mathbf{I},$

PX esta dada, y $\rho(\mathrm{PX}) = k < n$.

De manera que todas las observaciones son ponderadas por la matriz **P**, y **Pu** satisface todos los supuestos usuales del modelo clásico. Por tanto la aproximación por mínimos cuadrados ordinarios puede aplicarse al modelo, una vez que este ha sido transformado.

Dado que en la práctica, la matriz de covarianzas Ω no está dada, y es además desconocida e inobservable, el uso de los estimadores MCG requiere la construcción de una matriz de covarianzas apropiada. Para lo cual será necesario distinguir entre heterosedasticidad y correlación serial, cuando se construya dicha matriz.

En el caso de *heterosedasticidad, ausencia de correlación serial*, la matriz de covarianza es

$$Cov(u) = \sigma^2\,\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \tag{1.108}$$

donde σ_i^2 es la varianza del i-ésimo término de perturbación estocástico.

De manera que, omitiendo a σ^2 la cual se cancela en (1.99), la inversa usada en los estimadores vía MCG es

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}, \tag{1.109}$$

cuyos elementos a lo largo de la diagonal principal son los recíprocos de las correspondientes varianzas de los términos de perturbación estocástica. Ésta será la matriz que en teoría se debe usarse en los estimadores MCG, en el caso de heterosedasticidad y ausencia de correlación serial. Si las n varianzas están dadas el estimador MCG puede ser calculado.

Si las n varianzas no están dadas, entonces no se pueden estimar los MCG, dado que es imposible estimar la varianza de cada término de perturbación con una sola observación, es posible no obstante dividir la muestra en varias submuestras, cada una consistente de dos o más observaciones, para entonces calcular la muestra de cada submuestra como la varianza de las variables dependientes en esta submuestra; y usar los resultados obtenidos como los recíprocos en el estimador de MCG. La matriz Ω^{-1} será entonces:

$$\Omega^{-1} = \left(\begin{array}{ccc:cc:c:cc} 1/\sigma_1^2 & \cdot & \cdots & & & & & \\ \vdots & 1/\sigma_1^2 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & 1/\sigma_1^2 & & & & & \\ \hdashline & 0 & & 1/\sigma_2^2 & \cdot & \cdots & 0 & \\ & & & \vdots & 1/\sigma_2^2 & & & \\ \hdashline & \vdots & & & \cdot & & \vdots & \\ \hdashline & 0 & & & 0 & \cdots & 1/\sigma_n^2 & \cdots \\ & & & & & & \vdots & \vdots \end{array}\right), \tag{1.110}$$

donde σ_1^2 es la varianza de la primer submuestra, σ_2^2 es la varianza de la segunda muestra y así sucesivamente. Obviamente se requiere alguna información teórica a priori de acuerdo al modelo bajo estudio, para organizar las submuestras de una forma razonable.

Por lo que corresponde al *modelo de correlación serial sin heterosedasticidad*, suponiendo un modelo autorregresivo de primer orden, la correspondiente matriz de covarianza de los términos de perturbación estocástica será

$$\sigma^2\,\Omega = E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \vdots & . & \vdots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & & .. & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.111}$$

que es equivalente a

$$Cov(u_i, u_j) = \sigma^2 \rho^{|i-j|}, \tag{1.112}$$

donde ρ es el parámetro del proceso autorregresivo de primer orden, tal que $|\rho| < 1$ y σ^2 es definida como

$$\sigma^2 = \sigma_v^2/(1-\rho^2). \tag{1.113}$$

La expresión (1.126) se obtiene del modelo autorregresivo

$$u_i = \rho\, u_{i-1} + v_i = \rho(\rho\, u_{i-2} + v_{i-1}) + v_i = v_i + \rho\, v_{i-1} + \rho^2\, v_{i-2} + \dots$$

$$= \sum_{S=0}^{\infty} \rho^s v_{i-s},$$

cuyo valor esperado esta dado por

$$E(u_i) = \sum_{S=0}^{\infty} \rho^s E(v_{i-s}) = 0.$$

La varianza de u_i, dado que las v_i están serialmente correlacionadas será entonces

$$Var(u_i) = E(u_i^2) = E(v_i^2) + \rho^2 E(v_{i-1}^2) + \rho^4 E(v_{i-2}^2) + \dots$$

Bajo el supuesto de homosedasticidad es válido afirmar

$$Var(u_i) = (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots)\sigma_v^2.$$

A través de una conocida serie de potencias es equivalente a:

$$Var(u_i) = \sigma_v^2/(1-\rho^2)$$

Por lo que concierne a (1.112) la covarianza para u_i y u_{i-1} esta dada por:

$$Cov(u_i, u_{i-1}) = E(u_i, u_{i-1}) = E((v_i + \rho\, v_{i-1} + \rho^2\, v_{i-2} + \dots)(v_{i-1} + \rho\, v_{i-2} + \rho^2\, v_{i-3} + \dots))$$

$$Cov(u_i, u_{i-1}) = E((v_i + \rho(v_{i-1} + \rho\, v_{i-2} + \dots))(v_{i-1} + \rho\, v_{i-2} + \rho^2\, v_{i-3} + \dots))$$

$$Cov(u_i, u_{i-1}) = \rho\, E((v_{i-1} + \rho\, v_{i-2} + \rho^2\, v_{i-3} + \dots)^2) = \sigma^2\,\rho$$

Si se procede similarmente para $Cov(u_i, u_{i-2})$ se obtiene

$$Cov(u_i, u_{i-2}) = \sigma^2\,\rho^2,$$

que se extiende a

$$Cov(u_i, u_j) = \sigma^2 \rho^{|j-i|}.$$

De manera que la matriz de covarianzas está completamente definida por los parámetros σ^2 y ρ, que pueden ser estimados a través de $\hat{s}^2$ y los métodos de estimación enumerados para ρ anteriormente.

1.7 Resumen y conclusiones

El propósito de este capítulo ha sido dar una visión general del uso y formulación de modelos matemáticos como representación de los fenómenos reales, haciendo énfasis en el uso de la aproximación matemática como herramienta viable en la formulación de hipótesis de investigación, así como en la toma de decisiones. Un caso particular de tales modelos, son los modelos uniecuacionales econométricos, los cuales son el medio adecuado para ligar los hechos con la teoría económica, cuando existe una relación *causa-efecto*, es decir, unidireccional entre la variable dependiente (efecto) y una o más variables explicativas (causa). El objeto de tales modelos es estimar y/o predecir el valor promedio de la variable dependiente, con base en los valores dados de las variables explicativas. Para tal efecto, y bajo ciertos supuestos teóricos sobre los términos de perturbación estocástica, se ha presentado la aproximación vía mínimos cuadrados ordinarios, la cual produce estimadores lineales, insesgados y de varianza mínima.

Si, además, se asume que los términos de perturbación estocástica están distribuidos normalmente con media cero y varianza uno, los estimadores obtenidos tendrán distribuciones conocidas, y es entonces posible la construcción de intervalos de confianza y de pruebas de significancia estadística respecto a dichos estimadores.

Si los supuestos sobre los términos de perturbación estocástica no se cumplen, como en el caso de los problemas de correlación serial y heterosedasticidad, los estimadores dejan de ser insesgados y consistentes. Por consiguiente se hace necesario el detectar la presencia de tales problemas, para después proceder a su corrección, que generalmente no es un método definido, sino una serie de lineamientos generales que ayudan a deshacerse del problema y así obtener estimaciones al menos consistentes.

Sin embargo, existen fenómenos reales en los que se presenta una influencia en los dos sentidos entre las variables económicas, es decir, un conjunto de variables explican el comportamiento de una variable dependiente en una ecuación, mientras que en otras ecuaciones la variable dependiente de la primera ecuación explica el comportamiento de las variables explicativas de la primera ecuación, que ahora son dependientes. Dicho tipo de relación se conoce como *interdependiente*.

Si bien los modelos uniecuacionales son una muy buena herramienta para las relaciones causa-efecto, no lo son tanto, cuando existen relaciones de interdependencia entre las diferentes variables del fenómeno puesto que no las toman en cuenta, de manera que no será posible modelar y/o cuantificar la influencia de cada variable en los fenómenos de naturaleza interdependiente, los cuales son los más comunes en un modelo macroeconómico como el que se pretende desarrollar en este proyecto.

Capitulo II

Modelos Multiecuacionales

2.1 Introducción

En este capítulo se estudiarán *los modelos multiecuacionales o de ecuaciones simultáneas*, donde la relación en un solo sentido ó unidireccional entre variables no tiene mucho significado, esto ocurre cuando no solamente Y está determinada por las X, sino que además algunas de las X están a su vez determinadas por Y. Es decir, existe una relación en las dos direcciones ó simultánea entre Y y algunas de las X, entonces la distinción entre variable dependiente y las variables explicativas pierde valor. De manera que, en estos modelos se tiene un conjunto de variables que se pueden determinar simultáneamente a través de las restantes variables. En estos modelos se tiene mas de una ecuación; una para cada una de las variables mutua o conjuntamente dependientes, es decir, una por cada variable interdependiente.

Posteriormente se considerará el problema de la identificación, por el cual se entiende la posibilidad o imposibilidad de encontrar estimaciones numéricas para los coeficientes estructurales del modelo. El problema de la identificación se debe a que el mismo conjunto de variables puede ser compatible con diferentes ecuaciones estructurales, es decir, con diferentes modelos. Es asi, que si se construye una ecuación precio-cantidad, no se sabe si se está estimando la oferta o la demanda, puesto que en ambas funciones aparecen el precio y la cantidad. Es esencial resolver el problema de identificación antes de proceder a la estimación, puesto que si se desconoce que se está estimando, ésta no tendrá ningun sentido.

Finalmente, se analizarán diversos métodos para la estimación de los coeficientes estructurales en los modelos multiecuacionales, considerando las ventajas y limitaciones de cada uno de estos. Tales métodos pueden ser de dos clases: *información límitada* e *información completa* Como se analizará en detalle, el proceso de estimación es bastante complejo, debido a la variedad de circunstancias que pueden darse al construir el modelo.

2.2 Naturaleza de los sistemas de ecuaciones simultáneas

Un modelo de ecuaciones simultáneas determina los valores de un conjunto de variables, denominadas como variables endógenas, en términos de otro conjunto de valores observadas, denominadas como variables predeterminadas.

El modelo lineal de ecuaciones simultáneas puede ser representado en su forma estructural como el sistema de g ecuaciones simultáneas

$$\underset{1\times g}{\mathbf{y}_i}\ \underset{g\times g}{\Gamma} + \underset{1\times k}{\mathbf{x}_i}\ \underset{k\times g}{\mathrm{B}} = \underset{1\times g}{\varepsilon_i}\ , \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{y}_i$ es el vector de g variables endógenas en la i-ésima observación, $\mathbf{x}_i$ es el vector de k variables predeterminadas (exógenas ó endógenas retrasadas) en la i-ésima observación, mientras que ε_i es el vector de g términos de perturbación estocástica en la i-ésima observación. El índice i va de 1 hasta n, donde n es el tamaño de la muestra, es decir el número de observaciones. Las matrices de coeficientes a ser estimadas son Γ y B que representan respectivamente los coeficientes de las variables endógenas y de las predeterminadas. La matriz Γ es cuadrada y se asume no singular, mientras B generalmente no es cuadrada. La forma estructural contiene g ecuaciones que conjuntamente determinan, para cada observación, los valores de las g variables endógenas, dadas las k predeterminadas variables, los g términos de perturbación estocástica, y los $g^2 + g\,k$ coeficientes del sistema.

Las n observaciones de cada una de las g variables endógenas se agrupan en la matriz

$$\underset{n\times g}{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1g} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2g} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{ng} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{y}_i$ es el vector de datos sobre las g variables endógenas en la observación i.

De manera análoga las n observaciones de cada una de las k variables predeterminadas pueden ser agrupadas en la matriz de datos

$$\underset{n\times k}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & & . \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

donde $\mathbf{x}_i$ es el vector de datos sobre las k variables predeterminadas en la observación i.

Con estás matrices de datos, el sistema de ecuaciones simultáneas se puede presentar como

$$\underset{n\times g}{\mathbf{Y}}\ \underset{g\times g}{\Gamma} + \underset{n\times k}{\mathbf{X}}\ \underset{k\times g}{\mathbf{B}} = \underset{n\times g}{\mathbf{E}}, \tag{2.4}$$

donde **E** es la matriz de g x g , y cada uno de sus renglones es un vector ε_i de los términos de perturbación estocástica.

Este sistema es una generalización del modelo uniecuacional al modelo de g variables endógenas, que se reduce al modelo uniecuacional cuando $g = 1$, donde la matriz **Y** se vuelve el vector columna **y**; al normalizar la ecuación la matriz Γ se vuelve un solo elemento -1; la matriz **B** se convierte en el vector β ; y la matriz **E** se vuelve el vector **-u**.

El problema de estimación en las ecuaciones *simultáneas* es el usar la matrices **X** e **Y** para estimar los parámetros del sistema (2.4), denotados por las matrices de coeficientes Γ, **B** y la matriz de covarianzas Σ. Algunos de estos coeficientes pueden ser especificados a cierto valor *a priori*, en base a alguna consideración teórica. Por lo general, algunos de ellos serán especificados a cero, indicando que cierta variable no participa en una determinada ecuación.

Existe una indeterminación trivial en cada una de las ecuaciones estructurales en que al multiplicar todos los términos por una constante diferente de cero, no cambia el significado de la ecuación. Esta indeterminación es eliminada por normalización la cual, usualmente, envuelve escoger un valor numérico específico diferente de cero, para cada uno de los parámetros diferentes de cero en cada ecuación. Una normalización frecuentemente usada, transforma todos los elementos de las diagonal principal de Γ a -1, es decir $\gamma_{hh} = -1$, para toda h, asumiendo que $\gamma_{hh} \neq 0$. Esta normalización es equivalente a multiplicar la ecuación h por la constante $-1/\gamma_{hh}$. De esta manera la ecúación h puede ser escrita en notación de suma como

$$y_{ih} = \sum_{\substack{h'=1 \\ h'\neq h}}^{g} y_{ih'}\gamma_{h'h} + \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_{jh} - \varepsilon_{ih},\ h = 1,2,\dots,g. \tag{2.5}$$

En está forma la y_{ih} juega un papel comparable al de la variable dependiente de un modelo uniecuacional, mientras que las $y_{ih'}$ (para toda $h' \neq h$, donde $\gamma_{h'h} \neq 0$) y las x_{ij} (para toda j, donde $\beta_{jh} \neq 0$) juegan un rol comparable al de las variables explicativas en el modelo uniecuacional.

Las y_{ik} son variables explicativas endógenas, cuya presencia diferencia a los modelos de ecuaciones simultáneas de los uniecuacionales.

Regresando a la forma estructural, *típicamente se asume* que los renglones de términos de perturbación estocástica ε_i satisfacen ciertos supuestos.

En primer lugar se asume que tienen media cero:

$$E(\varepsilon_i) = \underset{1xg}{0} \tag{2.6}$$

Este supuesto es una generalización del modelo uniecuacional, *donde* $E(u_t) = 0$

En segundo lugar la matriz de covarianzas de los ε_i se asume que es la misma en cada observación

$$Cov(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i'\varepsilon_j) \underset{gxg}{\sum} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma 1g \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2g} \\ \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{g1} & \sigma_{g2} & \cdots & \sigma_{gg} \end{pmatrix}, \text{para toda } i \tag{2.7}$$

y Σ es la matriz simétrica positiva definida de varianzas y covarianzas

Esta matriz generaliza al modelo multiecuacional el supuesto de homosedasticidad del modelo uniecuacional, de hecho se reduce a éste cuando $g = 1$.

El tercer supuesto es que los ε_i no estén correlacionados sobre la muestra

$$E(\varepsilon_i'\varepsilon_j) = \underset{gxg}{0}, \text{ para toda } i, j \text{ tal que } i \neq j \tag{2.8}$$

Es decir que cada término de perturbación estocástica no está correlacionado con algún otro término de perturbación estocástica (incluyendo el mismo) sobre cualquier punto sobre la muestra. Este supuesto es también una generalización del supuesto de ausencia de correlación serial en le modelo uniecuacional $Cov\,(u_t\, u_s) = 0$.

Este supuesto se satisface si los términos de perturbación estocástica son independientes e idénticamente distribuidos en toda la muestra, con media cero y matriz de covarianza Σ.

Bajo estos supuestos los términos de perturbación estocástica no están correlacionados a lo largo de la muestra, mientras que los términos estocásticos de perturbación entre las diferentes ecuaciones pueden estar correlacionados.

Esté *fenómeno* de correlación entre los términos de perturbación estocástica de diferentes ecuaciones es de hecho la esencia de los sistemas de ecuaciones múltiples y la principal razón por la que debe de estimarse como un sistema, en lugar de como un conjunto de ecuaciones aisladas.

En el caso del modelo uniecuacional esta situación es similar al tratar con sistemas de ecuaciones simultáneas. Cuando se asumen supuestos adicionales sobre la distribución de los términos de perturbación ε_i, generalmente se asume que se distribuyen independientemente, idénticamente y normalmente en cada observación, de manera que:

$$\varepsilon_i \approx N(0, \Sigma) \tag{2.9}$$

Puesto que se asume que Γ es una matriz no singular, es entonces posible resolver para el vector de variables endógenas y_i, postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1}. Por consiguiente el resultado es

$$\underset{1\times g}{y_i} = -\underset{1\times k}{x_i}\underset{k\times g}{B}\underset{g\times g}{\Gamma^{-1}} = \underset{1\times g}{\varepsilon_i}\underset{g\times g}{\Gamma^{-1}}, \tag{2.10}$$

el cual es equivalente a

$$\underset{1xg}{y_i} = \underset{1xk}{x_i}\underset{kxg}{\Pi} + \underset{1xg}{u_i}, \tag{2.11}$$

donde:

$$\underset{kxg}{\Pi} = -\underset{kxg}{B}\underset{gxg}{\Gamma^{-1}} \tag{2.12}$$

$$\underset{1xg}{u_i} = \underset{1xg}{\varepsilon_i}\underset{gxg}{\Gamma^{-1}} \tag{2.13}$$

A la ecuación (2.11) se le conoce como la *forma reducida*, la cual expresa cada una de las variables endógenas y_i como una función lineal de las variables predeterminadas x_i y de los términos de perturbación estocástica u_i.

La matriz de coeficientes Π es conocida como la matriz de coeficientes en forma reducida, y u_i es conocido como el vector de términos de perturbación estocástica en forma reducida.

Los supuestos estocásticos hechos sobre ε_i implican condiciones correspondientes sobre u_i, puesto que esté vector es una función lineal de los términos de perturbación de las ecuaciones estructurales.

De donde se sigue que:

$$E(u_i) = 0 \text{ , para toda } i \tag{2.14}$$

De tal manera que al aplicar el operador esperanza a todo el modelo en forma reducida, se encuentra que este es correcto en que

$$E(\mathbf{y}_i) = \mathbf{x}_i \Pi \tag{2.15}$$

Por lo que toca a la covarianza se tiene

$$Cov(\mathbf{u}_i) = E(\mathbf{u}'_i\, \mathbf{u}_i) = \Gamma^{-1\prime}\, E(\varepsilon_i{}'\varepsilon_j)\, \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1\prime}\, \Sigma\, \Gamma^{-1} = \Omega, \text{ para toda } i \tag{2.16}$$

En esté caso Ω es la matriz de covarianzas de $\mathbf{u}_i$. Dado que Σ es una matriz simétrica y definida positivamente, entonces Ω también lo es. De la última igualdad se observa que premultiplicando por Γ' y postmultiplicando por Γ

$$\Sigma = \Gamma'\, \Omega\, \Gamma, \tag{2.17}$$

se muestra la relación existente entre la matriz de covarianzas de la forma estructural Σ y la de la forma reducida Ω.

De (2.8) y de (2.13) se tiene

$$E(\mathbf{u}'_i\, \mathbf{u}_j) = 0, \text{ para toda } i, j \text{ tal que } i \neq j. \tag{2.18}$$

Por lo que, $\mathbf{u}_i$ al igual que los ε_i no presentan correlación a lo largo de la muestra.

Las ecuaciones (2.14), (2.16), (2.18) conforman los supuestos estocásticos del modelo en forma reducida.

Si, además, se asume que los términos de perturbación estocástica del modelo estructural están distribuidos normalmente como en (2.9), entonces en base a (2.13) se concluye:

$$\mathbf{u}_i \approx N(0, \Omega). \tag{2.19}$$

Por consiguiente, al ser el vector $\mathbf{y}_i$ una combinación lineal de las $\mathbf{u}_i$, se obtiene

$$\mathbf{y}_i \approx N(\mathbf{x}_i \Pi, \Omega). \tag{2.20}$$

Las observaciones de las variables endógenas y las predeterminadas tanto en la forma estructural como para la forma reducida pueden agruparse en las matrices de datos:

$$\underset{n \times g}{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}, \quad \underset{n \times k}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

las cuales generalizan las matrices de datos para una ecuación uniecuacional, puesto que estás matrices se reducen a una ecuación simple, cuando $g = 1$.

Estas matrices pueden ser escritas compactamente como la matriz combinada de datos

$$\underset{n\times(g+k)}{\left[\mathbf{Y}|\mathbf{X}\right]}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} y_{11} & \cdots & y_{1g} & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ y_{n1} & \cdots & y_{ng} & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{array}\right], \tag{2.22}$$

donde cada renglón resume los datos de todas las variables endógenas y predeterminadas en una observación particular, mientras que cada columna resume todos los valores que toma cierta variable del sistema a lo largo de la muestra.

Cada una de las ecuaciones en forma reducida puede ser estimada como una ecuación simple. De manera que los coeficientes de la ecuación h, agrupados en la columna h-ésima de la matriz Π, denotada por

$$\underset{k\times 1}{\Pi_h}=\begin{bmatrix}\Pi_{1h}\\ \Pi_{2h}\\ \vdots \\ \Pi_{kh}\end{bmatrix},\ h=1,2,\ldots,g, \tag{2.23}$$

pueden ser estimados a través de mínimos cuadrados ordinarios como

$$\underset{k\times 1}{\hat{\Pi}_h}=\underset{k\times k}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}\underset{k\times n}{\mathbf{X}'}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}y_{1h}\\ y_{2h}\\ \vdots \\ y_{nh}\end{pmatrix}}, \tag{2.24}$$

donde se asume que $\rho(\mathbf{X})=k$, de manera que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ es no singular. Agrupando estas g columnas se conforma la matriz de coeficientes en forma reducida.

Por consiguiente, el conjunto de todos los estimadores por MCO de todo el sistema en forma reducida puede ser representado como

$$\underset{k\times g}{\hat{\Pi}}=\underset{k\times k}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}\underset{k\times n}{\mathbf{X}'}\underset{n\times g}{\mathbf{Y}}, \tag{2.25}$$

donde cada columna de está matriz se compone de todos los parámetros estimados en una de las ecuaciones en forma reducida.

Los estimadores en (2.25) son lineales, insesgados y *consistentes para* la forma reducida en (2.11), puesto que se han obtenido al aplicar la aproximación por MCO a cada una de las ecuaciones en forma reducida, las cuales se sabe cumplen los supuestos del teorema de Markov y el de consistencia para los mínimos cuadrados ordinarios presentados en el capítulo anterior.

La matriz de covarianzas de los términos de perturbación estocástica para las ecuaciones reducidas Ω puede ser estimada usando la generalización matricial de un modelo uniecuacional como

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n-k}\,\hat{u}'\hat{u} = \frac{1}{n-k}\,(Y - X\hat{\Pi})'\,(Y - X\hat{\Pi})$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n-k}\,Y'\,(I - X(X'X)^{-1}X')\,Y, \tag{2.26}$$

donde $\hat{u}$ es la matriz de los residuales por mínimos cuadrados e $\mathbf{I} - X(X'X)^{-1}X'$ es la matriz fundamental idempotente de MCO, que se analizó en el capítulo anterior. Este estimador es insesgado y consistente para Ω.

Bajo ciertas condiciones que se analizarán mas adelante los estimadores por MCO de los parámetros de las formas reducidas Π y Ω resumen toda la información relevante que puede ser obtenida de la muestra, pueden ser utilizados para estimar posteriormente los parámetros estructurales de $\mathbf{B}$, Γ y Σ.

La estimación directa de $\mathbf{B}$, Γ y Σ es generalmente no solo sesgada, sino también inconsistente, puesto que las ecuaciones en forma estructural frecuentemente incluyen variables explicativas endógenas. Mientras que los estimadores obtenidos vía la forma reducida son generalmente consistentes. De ahí la importancia de emplear la forma reducida en el proceso de estimación en vez de estimar las ecuaciones en forma estructural directamente

2.3 El problema de la identificación.

El problema de la identificación radica en obtener estimadores de los parámetros estructurales, las matrices B, Γ, Σ, partiendo de los parámetros estimados en la forma reducida Π y Ω.

Se dice que una ecuación estructural está *exactamente identificada ó justamente identificada* si y solo si existe una única manera de calcular sus parámetros en base a los parámetros de la forma reducida. De la misma manera se dice que la ecuación está *sobreidentificada* si existe mas de una manera de calcular sus parámetros con base a los parámetros de la forma reducida, lo que nos llevará a restricciones en los parámetros de la forma reducida. Así pues, una ecuación estructural *no está identificada (subidentificada)* en el caso de que no exista manera de calcular los parámetros estructurales en base a los parámetros de la forma reducida.

Puesto que los parámetros en forma reducida resumen toda la información relevante disponible en la muestra de datos, una ecuación estructural esta identificada si y solo si todos los parámetros que le pertenecen pueden ser estimados, dados todos los parámetros de la forma reducida.

Se dice que un sistema de ecuaciones estructurales esta identificado si y solo si cada ecuación del sistema está identificada; si alguna ecuación no *está identificada entonces* el sistema no está identificado.

En cualquier modelo econométrico que envuelva ecuaciones simultáneas la identificación del sistema es de crucial importancia. Si una ecuación está perfectamente identificada, entonces puede ser estimada a través de la estimación por MCO de la forma reducida, usando la técnica de MC indirectos. Si una ecuación está sobreidentificada existen diversas aproximaciones que pueden ser utilizadas en su estimación. Mientras que si una ecuación no está identificada no puede ser estimada, por lo que el *sistema debe de ser* reespecificado para eliminar las ecuaciones subidentificadas.

2.3.1 Identificación con restricciones lineales con valor cero

Con el objeto da facilitar el proceso de identificación, supóngase la ausencia de términos de perturbación estocástica, es decir las matrices Σ y Ω no aparecen como parte del problema, de tal manera que la forma estructural se reduce a

$$y\Gamma + xB = 0, \tag{2.27}$$

cuya correspondiente forma reducida es $y = x\Pi$, donde el subíndice ha sido *i* suprimido. Las interelaciones entre los parámetros de la forma reducida y los parámetros de la forma estructural están dados por

$$\Pi = -B\Gamma^{-1}. \tag{2.28}$$

El problema de identificación es el emplear la información a priori dada en la especificación del modelo para poder determinar estimaciones de Γ y B, a partir de la estimación de los parámetros en forma reducida Π.

En el caso de restricciones cero la información a priori toma la forma de ceros en las matrices de coeficientes Γ y B, representando respectivamente variables endógenas y predeterminadas excluidas de ciertas ecuaciones.

Considérese ahora, sin pérdida de generalidad, que las ecuaciones pueden ser renumeradas, de tal manera que la estimación de la primera ecuación estructural puede ser escrita como

$$(y_1, y_2, \ldots, y_g)\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{g_1 1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1, x_2, \ldots, x_k)\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{k_1 1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 . \qquad \textbf{(2.29)}$$

Aquí solamente las primeras columnas de las matrices Γ y B son indicadas, correspondiendo a la primera ecuación a ser estimada. Se asume que puede haber ceros en ambas columnas, y el orden de las variables ha sido cambiado, es decir las variables han sido renumeradas, de manera que cualquier cero se sitúe al final de cada una de las dos vectores columna de parámetros. En particular de las g variables endógenas se asume que solo las primeras g_1 participan en la primera ecuación. Las restantes $g - g_1$ variables endógenas que son omitidas de la ecuación son situadas en las últimas posiciones del renglón $(y_1, y_2, \ldots, y_g)$ de manera que la primera columna de la matriz Γ termine en $g - g_1$ ceros.

Similarmente de las k variables predeterminadas se asume que solamente las primeras k_1 variables participan en la primera ecuación. Las restantes variables predeterminadas son colocadas en las últimas posiciones del vector $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, de manera que la primera columna de las matriz B termine en $k - k_1$ ceros

La primera ecuación entonces puede ser escrita como

$$\gamma_{11} y_1 + \gamma_{21} y_2 + \ldots + \gamma_{g_1 1} y_{g_1} + \beta_{11} x_1 + \beta_{21} x_2 + \ldots + \beta_{k_1 1} x_{k_1} = 0 \qquad \textbf{(2.30)}$$

Si se recuerda los parámetros de la forma estructural están dados por $\Pi = -B\Gamma^{-1}$, de manera que si se postmultiplica por la matriz Γ, se obtiene

$$\Pi\,\Gamma = -B \qquad \textbf{(2.31)}$$

Si ahora se consideran solamente las primeras columnas de Γ y B, correspondientes a las primeras ecuaciones de la forma estructural, y asignando valores cero como se ha hecho anteriormente, la matriz Π puede ser particionada de manera que la primera ecuación puede ser representada como

$$\begin{array}{c} \\ k_1 \\ k-k_1 \end{array}\left[\begin{array}{c|c} \Pi_1 & \Pi_3 \\ \hline \Pi_2 & \Pi_4 \end{array}\right]_{\begin{array}{cc} g_1 & g-g_1 \end{array}} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{g_1 1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{k_1 1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.32)$$

donde $\Pi_1,...,\Pi_4$ son submatrices de Π correspondientes a las variables incluidas y excluidas de la primera ecuación. La submatriz Π_2 por ejemplo es una matriz de $k\text{-}k_1 \; x \; g_1$ Desarrollando la multiplicación de matrices se obtienen dos conjuntos de ecuaciones:

$$\underset{k_1 x g_1}{\Pi_1}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{g_1 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{k_1 1} \end{pmatrix} \text{ con } k_1 \text{ ecuaciones} \qquad (2.33)$$

$$\Pi_2\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{g_1 1} \end{pmatrix} = 0 \text{ con } k - k_1 \text{ ecuaciones} \qquad (2.34)$$

El problema de identificación es en esté caso resolver estás ecuaciones simultáneas para las γ's y las β's, dadas las estimaciones de Π.

Es fácil observar que el proceso consiste en obtener las γ's, para posteriormente substituirlas en la primera ecuación y así obtener las β's. Entonces el problema de identificación se reduce a obtener las γ's, o dicho de una manera más técnica a que las γ's sean únicas después de la normalización.

El sistema de la ecuación es un sistema homogéneo de $k - k_1$ ecuaciones lineales con g_1 incógnitas. Este sistema tiene una solución no trivial única si y solo si la matriz de coeficientes satisface la siguiente condición de rango

$$\rho(\Pi_2) = g_1 - 1, \qquad (2.35)$$

lo cual significa que la submatriz izquierda tiene rango igual al número de variables endógenas incluidas menos una.

Nótese que este sistema de ecuaciones tiene $k - k_1$ ecuaciones lineales homogéneas con g_1 incógnitas, a saber $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{g_1 1}$. Si la matriz de coeficientes Π_2 tiene rango g_1, la única solución podría ser la solución trivial donde $\gamma_{11} = 0, \gamma_{21} = 0, \ldots, \gamma_{g_1 1} = 0$. Si el rango de la matriz fuera menor que g_1-1, entonces existiría un número infinito de soluciones no triviales. Solamente cuando el rango es $g_1 - 1$ existe una solución única no trivial para el sistema. A la expresión (2.35) se le conoce como *condición de rango de identificación*. Es necesaria y suficiente para la identificación de la primera ecuación.

Puesto que Π_2 es una matriz de $k - k_I$ por g_1, se sigue que para que la condición de rango se satisfaga es necesario que $k - k_I \geq g_I - 1$, lo cual significa que el número de variables predeterminadas excluidas debe de ser de al menos el número variables endógenas incluidas menos una A esta condición se le conoce como *condición de orden de identificación*, es necesaria pero no suficiente para la identificación. Puesto que es fácil de verificar, solo se deben de contar los ceros en las columnas correspondientes de Γ y de B, usualmente se le evalua antes que a la condición de rango.

Si la condición de orden no se cumple entonces la ecuación está subidentificada. Si la ecuación es identificada y la condición de orden se cumple exactamente entonces la ecuación está exactamente identificada. Mientras que si la condición de orden se cumple estrictamente como una desigualdad, entonces la ecuación está sobreidentificada.

Puede formularse entonces la siguiente tabla de decisión:

Tabla 2.1 Condiciones de orden

Estatus de la ecuación	Condiciones	
Sobreidentificada	$\rho(\Pi_2) = g_I - 1$	$k - k_I > g_I - 1$
Exactamente identificada	$\rho(\Pi_2) = g_I - 1$	$k - k_I = g_I - 1$
subidentificada		$k - k_I < g_I - 1$
no identificada	$\rho(\Pi_2) \leq g_I - 1$	$k - k_I \geq g_I - 1$

Una ecuación subidentificada no puede ser identificada puesto que la matriz Π_2 tiene muy pocos renglones para satisfacer la condición de rango. Si $k - k_I \geq g_I - 1$, satisfaciendo la condición de orden, no obstante la ecuación puede no estar identificada, ya que la condición de orden es necesaria paro no suficiente. En consecuencia, debe de quedar en claro que la condición de rango es la única que es necesaria y suficiente para la identificación de una ecuación.

La condición de rango establecida en (2.35) puede ser formulada de forma que resulte más fácil su cálculo.

Sea A la matriz de todos los coeficientes estructurales del modelo desarrollado definida como

$$\underset{(g+k)\mathrm{x}g}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathrm{B} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \gamma_{11} & \\ \vdots & \Gamma_0 \\ \gamma_{g_1 1} & \\ \hline 0 & \Gamma_1 \\ \hline \beta_{11} & \\ \vdots & \mathrm{B}_0 \\ \beta_{k_1 1} & \\ \hline 0 & \mathrm{B}_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} g_1 \\ \\ g-g_1 \\ \\ k_1 \\ \\ k-k_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & g-1 \end{array} \end{array}, \tag{2.36}$$

donde $\Gamma_0, \Gamma_1, \mathrm{B}_0$ y B_1 son las submatrices que forman las últimas $g-1$ columnas de Γ y de B. La condición (2.35) es equivalente a la condición

$$\rho \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ -- \\ \mathrm{B}_1 \end{bmatrix} = g-1. \tag{2.37}$$

Lo cual significa que la ecuación estará identificada si se puede construir al menos una matriz, cuyo rango sea $g-1$, a partir de la *matriz de coeficientes relevantes*, conformada de los coeficientes de las variables (endógenas y predeterminadas) excluidas de esa ecuación, pero incluidas en las restantes ecuaciones del modelo.

Con objeto de comprobar la equivalencia entre (2.35) y (2.37), nótese que al efectuar el producto de $\mathrm{A}\Gamma^{-1}$, y empleando la definición de $\Pi = -\mathrm{B}\Gamma^{-1}$ se obtiene

$$\mathrm{A}\Gamma^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ -- & -- \\ 0 & \mathrm{I} \\ -- & -- \\ -\Pi_1 & -\Pi_3 \\ -- & -- \\ -\Pi_2 & -\Pi_4 \end{array}\right], \tag{2.38}$$

donde las $\mathrm{I}'s$ denotan a una matriz identidad.

Definase ahora a $\overline{\mathrm{A}}$ como la matriz de $[(g-g_1)+(k-k_1)]\mathrm{x}g$

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \Gamma_1 \\ \hline 0 & \mathrm{B}_1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \quad g\text{-}1 \end{array} & \end{array}. \tag{2.39}$$

De manera que el producto

$$\overline{\mathrm{A}}\Gamma^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I} \\ \hline -\Pi_2 & -\Pi_4 \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} g_1 & \quad g-g_1 \end{array} & \end{array}.$$

Por otra parte se define a $\overline{\Pi}$ como la matriz cuadrada no singular de orden $[(g-g_1)+(k-k_l)]$ dada por

$$\overline{\Pi} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline -\Pi_4 & -\mathrm{I} \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} g-g_l & \quad k-k_l \end{array} & \end{array} \tag{2.40}$$

Si ahora se efectúa le producto de $\overline{\Pi}\ \overline{\mathrm{A}}\Gamma^{-1}$ se obtiene

$$\overline{\Pi}\overline{\mathrm{A}}\Gamma^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & 0 \\ \hline -\Pi_4 & -\mathrm{I} \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} g-g_l & \quad k-k_l \end{array} & \end{array} \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I} \\ \hline -\Pi_2 & -\Pi_4 \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} g_l & \quad g-g_l \end{array} & \end{array} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I} \\ \hline \Pi_2 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} g-g_l \\ k-k_l \end{array} \\ \begin{array}{cc} g_l & \quad g-g_l \end{array} & \end{array} \tag{2.41}$$

Como se observa en (2.41) la matriz obtenida del producto de $\overline{\Pi}\ \overline{\mathrm{A}}\Gamma^{-1}$, se conforma de cuatro submatrices, de las cuales en dos de ellas todos sus elementos son ceros, y no afectan la independencia lineal entre los vectores, ni el número de renglones ni el de columnas, por tanto se puede concluir que el rango de esta matriz será la suma del rango de la submatriz identidad, denotado por $\rho(\mathrm{I})$ y el rango de la submatriz Π_2, denotado por $\rho[\Pi_2]$.

La submatriz identidad es de rango $(g-g_1)$, mientras que el rango de la submatriz Π_2 aun se desconoce. Por tanto

$$\rho\left[\overline{\Pi}\overline{\mathrm{A}}\Gamma^{-1}\right] = \rho[\Pi_2] + (g-g_1)$$

Retomando los conceptos del álgebra lineal, se sabe que el rango de una matriz no se altera, si se premultiplica y postmultiplica por dos matrices no singulares, es así que dado que $\overline{\Pi}$ y Γ^{-1} son dos matrices no singulares se puede afirmar que

$$\rho\left[\overline{\mathbf{A}}\right]=\rho\left[\overline{\Pi A}\Gamma^{-1}\right]=\rho\left[\Pi_{2}\right]+(g-g_{1})$$

Si se recuerda en la definición de $\overline{\mathbf{A}}$, su primer vector columna está conformado por ceros, por tanto, al obtener su rango este vector es eliminado, puesto que es linealmente dependiente con los otros vectores de $\overline{\mathbf{A}}$. Por consiguiente,

$$\rho\left[\overline{\mathbf{A}}\right]=\rho\begin{bmatrix}\Gamma_{1}\\ --\\ \mathbf{B}_{1}\end{bmatrix}=\rho\left[\Pi_{2}\right]+(g-g_{1}).$$

Por lo tanto, se deduce que

$$\rho\begin{bmatrix}\Gamma_{1}\\ --\\ \mathbf{B}_{1}\end{bmatrix}=g-1$$

si y solo si $\rho\left[\Pi_{2}\right]=g_{1}-1$.

De tal manera, queda demostrada la equivalencia entre (2.35) y (2.37).

2.3.2 Identificación en el caso de restricciones lineales generales

El hecho que los coeficientes de las matrices Γ y $\mathbf{B}$ sean valores cero, es un caso particular de *las restricciones lineales*. Ahora se analizará el caso general de las restricciones lineales, donde los valores *a priori* para ciertos coeficientes de Γ y $\mathbf{B}$ pueden ser cualquiera constante diferente de cero.

En principio, se utilizará una notación diferente que facilitará la identificación en el caso de restricciones lineales generales.

Se define a la matriz **A** como

$$\underset{(g+k)\times g}{\mathbf{A}}=\left(\frac{\Gamma}{\mathbf{B}}\right)=\left(\mathbf{a}_{1},\mathbf{a}_{2},\ldots,\mathbf{a}_{g}\right)=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1g}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{g1} & \gamma_{g2} & \cdots & \gamma_{g3}\\ --- & --- & --- & ---\\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1g}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kg}\end{pmatrix}, \qquad (2.42)$$

donde $\mathbf{a}_{h}$ es el h-ésimo vector columna de la matriz **A**. Dicho vector resume todos los coeficientes en la ecuación h del sistema, para $h=1,2,\ldots,g$, es decir

$$\mathbf{a}_{h}=\left(\gamma_{1h},\gamma_{2h},\ldots,\gamma_{gh}|\beta_{1h},\beta_{2h},\ldots,\beta_{kh}\right)'.$$

En esta notación la forma estructural puede ser escrita como

$$(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)\mathbf{A} = (\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)\left(\frac{\Gamma}{\mathbf{B}}\right) = \varepsilon_i\,, \tag{2.43}$$

donde $i = 1,2, .., n$.

Así mismo, la h-ésima ecuación del sistema estructural puede ser escrita como

$$(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i)\mathbf{a}_h = \varepsilon_{h,i} \tag{2.44}$$

donde $h = 1,2,...,g$

La información a priori sobre la h-ésima restricción del sistema puede presentarse como

$$\underset{r_h x(g+k)}{\Phi_h}\ \underset{(g+k)x1}{\mathbf{a}_h} = \underset{r_h x1}{\mathbf{0}},$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \varphi_{h_{1,1}} & \varphi_{h_{1,2}} & \cdots & \varphi_{h_{1,g+k}} \\ \varphi_{h_{2,1}} & \varphi_{h_{2,1}} & \cdots & \varphi_{h_{2,g+k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{h_{r,1}} & \varphi_{h_{r,2}} & \cdots & \varphi_{h_{r,g+k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,h} \\ \vdots \\ \gamma_{1,h} \\ \hline \beta_{1,h} \\ \vdots \\ \beta_{k,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

donde Φ_h es una matriz dada y cada uno de sus renglones implica una restricción lineal sobre $\mathbf{a}_h$. Por su parte los $\mathbf{r}_h$ renglones de la matriz resumen todas las restricciones a priori sobre la h-ésima ecuación estructural.

Si, por ejemplo, un renglón de Φ_h fuera (0 1 0 .. 0), esto impondría la restricción de que $\gamma_{2h} = 0$, y en general los renglones de Φ_h son vectores unitarios cuando representan una restricción cero sobre la ecuación h, es decir cuando requieren que cierta variable sea excluida de la ecuación. Si ahora por ejemplo g = 3 , y un renglón de Φ_h fuera (1 0 0 1 0 .. 0) esto significaría que $\gamma_{11} = -\beta_{11}$. Por consiguiente cualquier restricción lineal puede ser expresada, y se explica que la expresión (2.45) impone $\mathbf{r}_h$ restricciones sobre la ecuación h

La información a posteriori del sistema (es decir los valores de los coeficientes que obtendremos en base a la estimación) tiene la forma

$$\Pi = -\mathbf{B}\Gamma^{-1},$$

lo cual es equivalente a

$$\Pi\Gamma + \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Si ahora se define la matriz **W** como la matriz conformada por la matriz de coeficientes y la matriz identidad

$$\underset{k\times(g+k)}{\mathbf{W}} = \underset{k\times(g+k)}{(\Pi|\mathbf{I})}, \text{ donde } \rho(\mathbf{W}) = k.$$

Por tanto toda la información a posteriori del sistema puede ser expresada por la ecuación

$$\mathbf{WA} = 0.$$

$$\mathbf{WA} = \underset{k\times(g+k)}{(\Pi|\mathbf{I})}\begin{pmatrix}\Gamma\\ \hline \mathbf{B}\end{pmatrix} = \Pi\Gamma + \mathbf{B} = 0.$$

En particular para la h-ésima ecuación la información a posteriori se resume en el sistema con k restricciones en $g + k$ incógnitas

$$\underset{k\times(g+k)}{\mathbf{W}}\ \underset{(g+k)\times 1}{\mathbf{a}_h} = 0. \tag{2.46}$$

Esta ecuación presenta las k restricciones sobre los coeficientes de la h-ésima ecuación obtenida de la información a posteriori de la forma reducida.

Ahora las restricciones a priori de (2.45) y las restricciones a posteriori de (2.46) para cada ecuación h pueden ser combinadas en un sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\underset{(r_h+k)\times(g+k)}{\begin{pmatrix}\Phi_h\\ \hline \mathbf{W}\end{pmatrix}}\ \underset{(g+k)\times 1}{\mathbf{a}_h} = \underset{(r_h+k)\times 1}{0}, \quad h = 1,2,\ldots,g.$$

Este sistema resume las $r_h + k$ restricciones sobre la ecuación h. Esta ecuación está identificada si el sistema de $r_h + k$ ecuaciones homogéneas con $g + k$ incógnitas tiene una solución no trivial.

Esta solución no trivial es única si y solo si la matriz del sistema satisface la condición de rango

$$\rho\underset{(r_h+k)\times(g+k)}{\begin{pmatrix}\Phi_h\\ \hline \mathbf{W}\end{pmatrix}} = g + k - 1. \tag{2.47}$$

Nótese que este sistema de ecuaciones tiene $r_h + k$ ecuaciones homogéneas lineales con $g + k$ incógnitas, a saber los elementos de $\mathbf{a}_h$. Si la matriz de coeficientes tiene rango $g + k$, la única solución podría ser la solución trivial donde $\mathbf{a}_h = 0$.

Si el rango de la matriz *fuera menor que* $g + k - 1$ entonces existiría un número infinito de soluciones no triviales. Solamente cuando el rango es $g + k - 1$ es que existe una solución única no trivial para el sistema.

Una condición equivalente a (2.46) es la *condición general de rango de identificación*, denotada por

$$\rho\underset{r_h\times g}{\left(\Phi_h \mathbf{A}\right)} = g\text{-}1. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Con objeto de demostrar que las condiciones (2.47) y (2.48) son equivalentes recuérdese el concepto del álgebra lineal del *kernel* de una transformación lineal.

El kernel de una transformación $\mathbf{M}$ es el conjunto de todos los vectores columna $\mathbf{z}$ tales que $\mathbf{Mz} = 0$, es decir, el conjunto de vectores columna transformados en el vector cero por la transformación $\mathbf{M}$.

En el caso particular que se está analizando supóngase que

$$\rho\underset{(r_h+k)\times(g+k)}{\begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ \mathbf{W} \end{pmatrix}} = g + k\text{-}1,$$

pero que $\rho\underset{r_h\times g}{\left(\Phi_h \mathbf{A}\right)} \neq g\text{-}1$, lo cual significa que no es posible que si $\rho\begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} = g+\ k\text{-}1$ entonces el $\rho\underset{r_h\times g}{\left(\Phi_h \mathbf{A}\right)}$ sea igual a g -1.

Se sabe que la h-ésima columna de $\Phi_h \mathbf{A}$ sólo contiene ceros, debido a las restricciones impuestas al modelo, por tanto el rango de $\Phi_h \mathbf{A}$ se reduce, y si además se recuerda que $\rho\underset{r_h\times g}{\left(\Phi_h \mathbf{A}\right)} \neq g\text{-}1$ entonces $\rho\underset{r_h\times g}{\left(\Phi_h \mathbf{A}\right)} < g\text{-}1$.

Se sabe que la dimensión del kernel ó nulidad de una matriz más el rango de la matriz (número de vectores linealmente *independientes*) es igual a la dimensión del espacio vectorial. Por consiguiente si el rango es menor ó igual a g-2 y la dimensión del espacio vectorial es g, entonces se concluye que el kernel está formado a lo menos por dos vectores columna linealmente independientes, a los que denominaremos v y w.

A partir de la definición del kernel se sabe que

$$\Phi_h \mathbf{A}\, v = 0\ ,\ \Phi_h \mathbf{A}\, w = 0.$$

definen

$$\tilde{\mathrm{v}} = \mathbf{A}\mathrm{v}\ ,\ \tilde{\mathrm{w}} = \mathbf{A}\mathrm{W},$$

donde v y w son independientes, por consiguiente $\tilde{\mathrm{v}}$ y $\tilde{\mathrm{w}}$ también los son, asumiendo que $\rho(\mathbf{A}) = g$.

Sin embargo, se tendrá:

$$\Phi_h \tilde{\mathrm{v}} = \Phi_h \mathbf{A} \, v = 0$$

$$\Phi_h \tilde{\mathrm{w}} = \Phi_h \mathbf{A} \, w = 0$$

Asi mismo, se sabe que $\mathbf{WA} = \mathbf{0}$, por consiguiente:

$$\mathbf{W}\tilde{\mathrm{v}} = \mathbf{WA}v = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{W}\tilde{\mathrm{w}} = \mathbf{WA}w = \mathbf{0}$$

Si ambos resultados se agrupan en una sola expresión:

$$\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \tilde{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \tilde{\mathrm{v}} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \tilde{\mathrm{w}} = \begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \tilde{\mathrm{w}} = 0.$$

Con lo que se obtiene que existen al menos dos vectores columna independientes entre si, cuyo producto por la transformación se vuelve el vector cero. Lo cual significa que el kernel de la transformación $\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix}$ está formado por al menos dos vectores columna. Por tanto, el rango de está transformación es

$$\rho \underset{(n_h+k)x(g+k)}{\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix}} < g + k - 1,$$

lo cual contradice el supuesto de que si $\rho\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} = g + k\text{-}1$ no es posible que el $\rho(\Phi_h \mathbf{A})$ sea igual a g -1.

Si ahora se supone lo inverso, $\rho(\Phi_h \mathbf{A}) = g$ -1, pero que $\rho\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \neq g + k$-1, es decir, que no sea posible que si $\rho(\Phi_h \mathbf{A}) = g$ -1 entonces,

$$\rho\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} = g + k\text{-}1.$$

En principio, se sabe que

$$\begin{pmatrix} \Phi_h \\ \hline \mathbf{W} \end{pmatrix} \mathbf{a}_h = 0,$$

puesto que $\begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ W \end{pmatrix} a_h = 0$ y $\Phi_h a_h = 0$.

De donde se sigue que

$$\rho \begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ W \end{pmatrix} < g+k-1,$$

puesto que se supone que $\rho \begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ W \end{pmatrix} \neq g+k-1$.

Por consiguiente, existen al menos dos vectores columna linealmente independientes, ya que la suma del rango más la dimensión del kernel es la dimensión del espacio vectorial. Llámese a estos vectores $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$. Si se recuerda las columnas de **A** forman una base para el kernel, por lo tanto existen dos vectores independientes v y w, tales que

$$\tilde{v} = \mathbf{A}v \ , \ \tilde{w} = \mathbf{A}w \text{, pero}$$

$$\Phi_h \mathbf{A}v = \Phi_h \tilde{v} = 0 \ , \ \Phi_h \mathbf{A}w = \Phi_h \tilde{w} = 0,$$

donde los vectores $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ están en el kernel de Φ_h, puesto que están en el kernel de $\begin{pmatrix} \Phi_h \\ -- \\ W \end{pmatrix}$.

Luego entonces v y w son dos vectores independientes del kernel de $\Phi_h \mathbf{A}$, lo cual implica que $\rho(\Phi_h \mathbf{A}) < g-1$, sea una contradicción. Entonces queda demostrada la equivalencia de las dos condiciones de rango (2.47) y (2.48).

Está es una condición necesaria y suficiente para la identificación de la h-ésima ecuación, preferible a (2.47), puesto que envuelve menos cálculos.

A partir de (2.48), y del hecho de que la multiplicación de una matriz por otra no puede incrementar su rango, (pero si puede volver linealmente dependientes a sus vectores columna) se sigue que una condición necesaria para la identificación es

$$\rho(\Phi_h) \geq g-1, \qquad \textbf{(2.49)}$$

la cual se conoce como *condición de orden de identificación*, no obstante que envuelva un rango en su evaluación, debido a que es una condición necesaria, pero no suficiente para la identificación. En virtud de que sólo depende de Φ_h es una vía fácil para determinar si una ecuación se encuentra subidentificada, perfectamente identificada o sobreidentificada. Las reglas a seguir en la identificación de orden se presentan en la tabla (2.2).

Tabla 2.2 Identificación de orden

Estatus de la ecuación	Condiciones	
Sobreidentificada	$\rho(\Phi_h A) = g - 1$	$\rho(\Phi_h) > g - 1$
Exactamente identificada	$\rho(\Phi_h A) = g - 1$	$\rho(\Phi_h) = g - 1$
subidentificada		$\rho(\Phi_h) < g - 1$
no identificada	$\rho(\Phi_h A) < g - 1$	$\rho(\Phi_h) \geq g - 1$

De aquí se observa claramente que una condición necesaria para que la condición general de orden se cumpla es

$$r_h \geq g - 1, \tag{2.50}$$

lo cual significa que el número de restricciones lineales impuestas sobre cada ecuación es como mínimo el número de variables endógenas del sistema, menos una. Por ejemplo, en un sistema de dos ecuaciones con dos variables endógenas al menos debe imponerse una restricción lineal sobre cada ecuación del sistema para que se le pueda identificar. Si está condición no se cumple la ecuación estará subidentificada y en consecuencia no se le podrá identificar Si no existen restricciones a priori, la ecuación solo puede ser identificada en un modelo uniecuacional, cuando la forma reducida y la forma estructural son equivalentes.

2.4 Sistemas Recursivos.

Un caso particular de los sistemas de ecuaciones simultáneas es el sistema recursivo, en el cual las variables endógenas y las ecuaciones estructurales pueden ser ordenadas de tal forma que Γ, la matriz de coeficientes de las variables endógenas, sea una matriz triangular y que Σ, la matriz de varianzas y covarianzas de los términos de perturbación estocástica, sea una matriz diagonal.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1g} \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2g} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{gg} \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_g^2 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

El primer conjunto de condiciones de la matriz de coeficientes, requiere que las ecuaciones estructurales puedan ser expresadas de tal forma que ninguna ecuación incluya aquellas variables endógenas incluidas en ecuaciones posteriores, es decir, en renglones de Γ subsecuentes. La segunda de estas condiciones sobre la matriz de covarianzas requiere que todas las covarianzas entre los términos de perturbación estocástica en cualesquiera par de diferentes ecuaciones sean nulas. Debe de notarse que el primer conjunto de condiciones, sobre los coeficientes, no es por sí mismo adecuado; mientras que las condiciones sobre la covarianza son esenciales para que el sistema sea recursivo.

Un sistema recursivo puede ser escrito a través de la normalización usual de los elementos en la diagonal, bajo los supuestos mencionados, como:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{k} \beta_{j1} x_j - \varepsilon_1$$

$$y_2 = \gamma_{12}\, y_1 + \sum_{j=1}^{k} \beta_{j2} x_j - \varepsilon_2$$

$$y_3 = \gamma_{13}\, y_1 + \gamma_{23}\, y_2 + \sum_{j=1}^{k} \beta_{j3} x_j - \varepsilon_3$$

$$\vdots$$

$$y_g = \sum_{h=1}^{g-1} \gamma_{hg} y_h + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jg} x_j - \varepsilon_g$$

Por tanto, cada variable endógena es explicada en términos de las variables predeterminadas, los términos de perturbación estocástica, y las variables endógenas de índice inferior.

El supuesto de que la matriz de covarianzas de los ε's, la matriz Σ, sea diagonal asegura que los términos de perturbación contemporáneos no están correlacionados.

Por consiguiente, cada ecuación se justifica per se, y su termino de perturbación estocástica no afecta a las otras ecuaciones dentro del sistema. Toda variable endógena está predeterminada con respecto a las ecuaciones de mayor índice en que la dirección del flujo de impulso es solamente de ecuaciones de índice inferior a ecuaciones de índice superior. Este flujo unidireccional se puede representar por:

Todas las variables predeterminadas y ε_1 determinan a y_1, entonces y_1 todas las variables predeterminadas y ε_2 determinan a y_2, y así sucesivamente.

Los modelos recursivos son siempre exactamente identificados, esto es que con la restricción cero en Γ y Σ es siempre posible inferir los coeficientes estructurales diferentes de cero con base a los coeficientes en forma reducida.

2.5 Estimación

Como se ha analizado con anterioridad el modelo lineal de g ecuaciones simultáneas puede ser representado en su forma estructural como

$$\underset{1\times g}{\mathbf{y}_i}\ \underset{g\times g}{\Gamma} + \underset{1\times k}{\mathbf{x}_i}\ \underset{k\times g}{\mathbf{B}} = \underset{1\times g}{\varepsilon_i}\,, \tag{2.53}$$

donde $\mathbf{y}_i$ es el vector de g variables endógenas en la i-ésima observación, $\mathbf{x}_i$ es el vector de k variables predeterminadas (exógenas ó endógenas retrasadas) en la i-ésima observación, y finalmente ε_i es el vector de g términos de perturbación estocástica en la i-ésima observación. El índice i va de 1 hasta n, donde n es el tamaño de la muestra, es decir, el número de observaciones. Las matrices de coeficientes a ser estimadas son Γ y $\mathbf{B}$ que representan respectivamente los coeficientes estructurales de las variables endógenas y de las predeterminadas respectivamente.

El problema de la estimación es emplear las matrices de observaciones $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{y}_i$ para obtener los parámetros del sistema, es decir las matrices de coeficientes Γ y $\mathbf{B}$. Existen diferentes alternativas para la estimación de los sistemas de ecuaciones simultáneas: *Mínimos Cuadrados Ordinarios, los métodos de información limitada y los métodos de información completa.*

La aproximación por Mínimos cuadrados ordinarios (MCO) expresa cada ecuación del sistema como una ecuación sencilla y lo estima empleando la técnica de mínimos cuadrados Esta aproximación es idéntica a la discutida en el capítulo anterior, donde las variables endógenas **Y**, y las variables exógenas **X** incluidas constituyen el conjunto de las variables explicativas. Esta aproximación ignora cuáles de las variables explicativas son endógenas, y cuales son exógenas puesto que todas se toman como explicativas. Por otra parte, no se hace uso de la información de las variables excluidas de la ecuación, pero que forman parte del sistema. En esta aproximación los estimadores resultantes serán sesgados e inconsistentes, debido a la inclusión de las variables endógenas entre el conjunto de variables explicativas.

La aproximación vía información limitada estima cada ecuación aisladamente, como en los MCO, pero a diferencia de ésta, hace la distinción entre variables explicativas endógenas y las variables exógenas incluidas. Así mismo, utiliza la información de las variables excluidas de la ecuación a estimar, pero que, forman parte del sistema tanto como variables exógenas como endógenas. La aproximación por información limitada abarca diferentes metodologías como Mínimos cuadrados indirectos (MCI), mínimos cuadrados de dos estados y estimadores de máxima verosimilitud limitada.

Por su parte, *los métodos de información completa*, Mínimos Cuadrados de tres etapas y la aproximación por estimadores de máxima verosimilitud de información completa, estiman todos los parámetros de las ecuaciones estructurales simultáneamente, empleando toda la información disponible sobre cada una de las ecuaciones del sistema.

2.5.1 Estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios

Está aproximación aplica Mínimos Cuadrados Ordinarios a cada una de las ecuaciones del modelo separadamente, ignorando la distinción entre variables endógenas y variables exógenas incluidas. Es, de hecho, la aproximación más simple a la estimación de *parámetros en un sistema de ecuaciones simultáneas.*

Así mismo, no hace uso de toda la información disponible concerniente a las variables no incluidas en la ecuación a estimar. Como se analizará más adelante, esta aproximación produce estimadores sesgados e inconsistentes.

Con objeto de ilustrar esta aproximación escríbase la primera ecuación del sistema como:

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + \varepsilon_1 = (Y_1|X_1)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \hline \beta_1\end{pmatrix} + \varepsilon_1 = Z_1\delta_1 + \varepsilon_1, \tag{2.54}$$

donde Z_1 agrupa los datos sobre las $g_1 - 1 + k_1$ variables explicativas incluidas sean endógenas ó exógenas,

$$\underset{n\times(g_1-1+k_1)}{Z_1} = \underset{n\times(g_1-1\mid k_1)}{(Y_1 \mid X_1)}, \tag{2.55}$$

δ_1 es el vector que agrupa todos los coeficientes a ser estimados en la ecuación,

$$\underset{(g_1-1+k_1)\times 1}{\delta_1} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \hline \beta_1\end{pmatrix}\begin{matrix}g_1-1\\ k_1\end{matrix}. \tag{2.56}$$

Los estimadores por MCO de los coeficientes son obtenidos de la misma forma que en el modelo uniecuacional, por tanto

$$\underset{MCO}{\hat{\delta}_1} = [Z_1' Z_1]^{-1} Z_1' y_1, \tag{2.57}$$

donde la inversa existe si Z_1 tiene rango de $g_1 - 1 + k_1$. Si se expresa el estimador de MCO en términos de la forma original se tiene:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_1 Y_1 & Y'_1 X_1 \\ X'_1 Y_1 & X'_1 X_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ X'_1 \end{pmatrix} y_1 \tag{2.58}$$

Como se ha analizado en el capítulo anterior los MCO de un modelo uniecuacional son sesgados de acuerdo al teorema de Gauss-Markov y además son consistentes. Cabe recordar que dichas propiedades de los estimadores obtenidos vía MCO se basan en el supuesto de que las variables explicativas sean números dados y en consecuencia *estadísticamente* independientes de los términos de perturbación estocástica. Este supuesto no se cumple en los modelos multiecuacionales, puesto que, las y_1 son variables endógenas que no son estadísticamente independientes de los términos de perturbación estocástica, ya que, son una combinación lineal de los términos de perturbación y de las variable exógenas, aun en el *límite de probabilidad*.[1] El resultado es que en un sistema de ecuaciones simultáneas los estimadores por MCO son sesgados y generalmente inconsistentes.

El sesgo e inconsistencia de los estimadores por MCO puede demostrarse si se substituye y_1 por $Z_1\delta_1 + \varepsilon_1$ en (2.57), obteniéndose:

$$\hat{\delta}_{1_{MCO}} = [Z_1' Z_1]^{-1} Z_1'[Z_1\delta_1 + \varepsilon_1]$$

$$\hat{\delta}_{1_{MCO}} = [Z_1' Z_1]^{-1} Z_1' Z_1\delta_1 + [Z_1' Z_1]^{-1} Z_1' \varepsilon_1$$

$$\hat{\delta}_{1_{MCO}} = \delta_1 + [Z_1' Z_1]^{-1} Z_1' \varepsilon_1 \tag{2.59}$$

Si se aplica el operador esperanza a (2.59) se tiene

$$E[\hat{\delta}_1] = \delta_1 + E[[Z_1' Z_1]^{-1} Z_1' \varepsilon_1].$$

En un sistema uniecuacional el segundo término se anularía, puesto que las variables explicativas son números dados no estocásticos, o pueden serlo, pero estadísticamente independientes de los términos de perturbación estocástica. Sin embargo, en el modelo multiecuacional Z_1 incluye variables endógenas Y_1, las cuales son estocásticas y dependientes de los términos de perturbación; por tanto el segundo término no se anula, lo cual implica que los estimadores por MCO son sesgados, es decir,

$$E(\hat{\delta}_1) \neq \delta_1. \tag{2.60}$$

[1] En el capítulo anterior se encuentra un breve análisis del concepto límite de probabilidad y sus implicaciones.

El sesgo no se anula aún cuando el tamaño de la muestra crece, por lo que los MCO son asintóticamente sesgados. Tampoco se anulan en el limite de probabilidad por lo que también son inconsistentes:

$$p\lim(\hat{\delta}_1) = \delta_1 + p\lim\left(\frac{1}{n}Z'_1 Z_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}Z'_1 \varepsilon_1\right) \neq \delta_1 . \tag{2.61}$$

En términos de los datos y coeficientes originales los estimadores por MCO se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \hline \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y'_1 Y_1 & Y'_1 X_1 \\ \hline X'_1 Y_1 & X'_1 X_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \hline X'_1 \end{pmatrix} \varepsilon_1 . \tag{2.62}$$

En donde, como se ha demostrado con anterioridad, al aplicar el operador esperanza sobre la expresión el segundo término del lado derecho no se anula, aún en el límite de probabilidad, puesto que, las variables endógenas explicativas no son independientes de los términos de perturbación estocástica

El sesgo de los MCO está dado por el valor esperado de la diferencia entre los coeficientes estimados y sus valores reales.

$$E\left(\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \hline \beta_1 \end{pmatrix}\right) = E\left[\begin{pmatrix} Y'_1 Y_1 & Y'_1 X_1 \\ \hline X'_1 Y_1 & X'_1 X_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \hline X'_1 \end{pmatrix} \varepsilon_1 \right]. \tag{2.63}$$

Y este sesgo no se anula, aún asintóticamente, como se ha demostrado con anterioridad.

No obstante que los estimadores obtenidos por MCO son sesgados e inconsistentes, no pueden ser totalmente descartados como una técnica de estimación en los sistemas de ecuaciones simultáneas, puesto que tiene la propiedad de presentar eficiencia e insensibilidad a los errores de especificación.[2] De hecho, los MCO son utilízados como una parte del proceso de estimación en los diferentes métodos de estimación alternos.

2.5.2 Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI).

Los mínimos cuadrados indirectos son una metodología que se agrupa dentro de las de información limitada, que puede ser utilizada para obtener estimadores consistentes en el caso de una ecuación exactamente identificada. Recuérdese que en el caso de una ecuación exactamente identificada existe una correspondencia uno a uno entre los parámetros

[2] Significa que si otra ecuación dentro del modelo esta mal diseñada, ésto no afectará en la estimación de la ecuacion bajo estudio, puesto que no se toma en cuenta a las variables excluidas de dicha ecuación

estructurales y los parámetros de la forma reducida, por consiguiente, los parámetros estimados en la forma reducida pueden emplearse para inferir indirectamente los parámetros estructurales, de ahí el nombre de Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI).

Esta aproximación envuelve dos fases. La primera es la estimación de los parámetros de la forma reducida $\hat{\Pi}$ utilizando MCO. La segunda fase, que es posible si y solo si la ecuación está exactamente identificada, consiste en la estimación de los parámetros estructurales Γ y B, a través de la relación entre estos parámetros y los parámetros de la forma reducida y las restricciones de identificación. Cabe señalar que si la ecuación está sobreidentificada está aproximación no funcionará y se deberán buscar atrás alternativas, aplicables a ecuaciones tanto exactamente identificadas como sobreidentificadas.

A partir de la forma reducida

$$\underset{n\times g}{Y} = \underset{n\times k}{X}\,\underset{k\times g}{\Pi} + \underset{n\times g}{U}, \tag{2.64}$$

donde $\Pi = -B\Gamma^{-1}$, $U = E\Gamma^{-1}$, X e Y son las matrices de datos.

En esta forma la variable dependiente en cada ecuación es la única variable endógena presente, dado que fue construida en base a la normalización y a las restricciones cero establecidas a priori.

Al obtener su estimador vía mínimos cuadrados, lo cual es válido puesto que las variables explicativas están predeterminadas y, por ende, no correlacionadas con los términos de perturbación estocástica, se obtiene

$$\underset{k\times g}{\hat{\Pi}} = \underset{k\times k}{(X'X)^{-1}}\,\underset{k\times n}{X'}\,\underset{n\times g}{Y} \tag{2.65}$$

Este estimador es equivalente a estimar cada ecuación de la forma reducida aisladamente a través de MCO, puesto que, cada columna de $\hat{\Pi}$ es la matriz ponderada $(X'X)^{-1}X'$ multiplicada por la columna de la matriz Y correspondiente a la variable dependiente en aquella forma reducida particular.

Considérese ahora una ecuación exactamente identificada, cuya matriz de variables endógenas Y se particiona en

$$\underset{n\times g}{Y} = \left(\underset{n\times 1}{y_1} \;\vdots\; \underset{n\times(g_1-1)}{Y_1} \;\vdots\; \underset{n\times(g-g_1)}{Y_2}\right), \tag{2.66}$$

donde y_1 corresponde a la variable endógena dependiente, Y_1 corresponde a las g_1 -1 variables endógenas explicativas, y Y_2 a las $g - g_1$ variables endógenas excluidas.

La matriz de valores predeterminados $\mathbf{X}$ puede ser similarmente particionada en

$$\underset{n\times k}{\mathbf{X}} = \left(\underset{n\times k_1}{\mathbf{X}_1} \vdots \underset{n\times(k-k_1)}{\mathbf{X}_2} \right), \tag{2.67}$$

donde $\mathbf{X}_1$ corresponde a las k_1 variables exógenas explicativas incluidas, y $\mathbf{X}_2$ a las $k - k_1$ variables exógenas excluidas.

Por consiguiente, la forma reducida puede expresarse como

$$\left(\underset{n\times 1}{\mathbf{y}_1} \Big| \underset{n\times(g_1-1)}{\mathbf{Y}_1} \Big| \underset{n\times(g-g_1)}{\mathbf{Y}_2} \right) = \left(\underset{n\times k_1}{\mathbf{X}_1} \Big| \underset{n\times(k-k_1)}{\mathbf{X}_2} \right) \begin{pmatrix} \Pi_1^0 & \Pi_1^{00} & \Pi_3 \\ \hline \Pi_2^0 & \Pi_2^{00} & \Pi_4 \end{pmatrix} + $$

$$\left(\underset{n\times 1}{\mathbf{u}_0} \Big| \underset{n\times(g_1-1)}{\mathbf{u}_1} \Big| \underset{n\times(g-g_1)}{\mathbf{u}_2} \right), \tag{2.68}$$

(columnas de Π: 1, g_1-1, $g-g_1$)

donde los términos de perturbación estocástica han sido particionados en la misma forma que $\mathbf{Y}$, correspondiendo la primera partición a la variable dependiente, la segunda a las variables explicativas, y la última a las variables endógenas excluidas.

Por su parte, la matriz de coeficientes de la forma reducida Π es particionada en seis submatrices para efectuar la multiplicación de matrices. Sus columnas han sido divididas para que concuerden en primer lugar con la variable endógena dependiente, las g_1 -1 variables endógenas explicativas, y las g - g_1 variables endógenas excluidas. Sus renglones han sido agrupados con el propósito de que concuerden con las k_1 variables exógenas explicativas incluidas, y con las k - k_1 variables exógenas excluidas. Por ejemplo la *submatriz* Π_2^{00} *es una matriz de* $(k - k_1) \times (g_1 - 1)$. Si la ecuación a ser estimada fuera exactamente identificada, entonces $(k-k_1) = (g_1 - 1)$, de manera que sería una matriz cuadrada

Se sabe que la correspondencia entre la forma estructural y la forma reducida está dada por

$$\Pi\Gamma = -\mathbf{B}. \tag{2.69}$$

Por tanto, para la primera ecuación, que envuelve sólo las primeras columnas de Γ y $\mathbf{B}$, se substituye la matriz particionada Π dada en (2.69), obteniéndose

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Pi_1^0 & \vdots\ \Pi_1^{00} & \vdots\ \Pi_3 \\ \hline \Pi_2^0 & \vdots\ \Pi_2^{00} & \vdots\ \Pi_4 \end{pmatrix} \\ \scriptstyle 1 \quad g_1-1 \quad g-g_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 \\ \hline \gamma_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

De aquí, se obtienen dos conjuntos de ecuaciones, donde se substituyen los elementos de Π por los estimadores $\hat{\Pi}$, de la misma manera que los coeficientes estructurales de la primera ecuación son suplantados por sus estimadores $\hat{\gamma}_1$ y $\hat{\beta}_1$

$$-\hat{\Pi}_1^0+\hat{\Pi}_1^{00}\,\hat{\gamma}_1 = \hat{\beta}_1 \qquad k_1 \text{ ecuaciones} \tag{2.71}$$

$$-\hat{\Pi}_2^0+\hat{\Pi}_2^{00}\,\hat{\gamma}_1 = 0 \qquad k - k_1 \text{ ecuaciones} \tag{2.72}$$

Como se mencionó anteriormente si la ecuación a estimar está exactamente *identificada*, entonces Π_2^{00} es una matriz cuadrada. Si, además, es no singular se puede resolver el segundo conjunto de ecuaciones, obteniéndose

$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\Pi}_2^{00^{-1}}\,\hat{\Pi}_2^0. \tag{2.73}$$

La solución en (2.73) se substituye en (2.71), para obtener los valores correspondientes $\hat{\beta}_1$,

$$\hat{\beta}_1=\hat{\Pi}_1^0-\hat{\Pi}_1^{00}\,\hat{\Pi}_2^{00^{-1}}\,\hat{\Pi}_2^0 \tag{2.74}$$

Por consiguiente, (2.73) y (2.74) son los estimadores vía MCI, que pueden presentarse como

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\hat{\Pi}_2^{00}\right)^{-1}\hat{\Pi}_2^0 \\ \hline \hat{\Pi}_1^0-\hat{\Pi}_1^{00}\left(\hat{\Pi}_2^{00}\right)^{-1}\hat{\Pi}_2^0 \end{pmatrix}. \tag{2.75}$$

Si bien los estimadores vía MCI son sesgados al igual que los MCO, son consistentes a diferencia de éstos, puesto que es conocido que las funciones continuas de estimadores consistentes son también estimadores consistentes y, como se ha visto, los MCI son funciones continuas de los estimadores $\hat{\Pi}$ de la forma reducida y a su vez estos estimadores $\hat{\Pi}$ son *consistentes partiendo del hecho de que fueron* obtenidos a través de aplicar mínimos cuadrados ordinarios a la forma reducida.

2.5.3 Mínimos Cuadrados de dos etapas

Un método de estimación, dentro del grupo de las metodologías de información limitada, que puede ser utilizado en la estimación tanto de una ecuación exactamente identificada como de una ecuación sobreidentificada en un sistema de ecuaciones simultáneas, es la estimación vía Mínimos Cuadrados de dos etapas (MC2E).

En principio, considérese el sistema de la forma:

$$y_1 = Y_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \tag{2.76}$$

El problema al aplicar directamente MCO a la ecuación anterior es la presencia de variables endogenas explicativas Y_1, las cuales están correlacionadas con los términos de perturbación estocástica, aun en el límite de probabilidad. Si estas variables pudieran ser suplantadas por otras variables relacionadas, pero que no estén correlacionadas en el límite de probabilidad con los términos de perturbación estocástica, el estimador resultante sería consistente.

La aproximación vía mínimos cuadrados de dos etapas utiliza los estimadores de la forma reducida para substituir las variables endógenas explicativas por sus estimadores. De esta manera Y_1 es reemplazada por $\hat{Y}_1$, el valor estimado de cada una de las variables endógenas explicativas en cada observación mediante la forma reducida.

Por tanto, el estimador resultante de substituir Y_1 por $\hat{Y}_1$, es

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{Y}'_1 \hat{Y}_1 & \hat{Y}'_1 X_1 \\ \hline X'_1 \hat{Y}_1 & X'_1 X_1 \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{Y}'_1 \\ \hline X'_1 \end{pmatrix} y_1 \tag{2.77}$$

Esta primera fórmula del estimador por MC2E indica que se obtienen estimadores de todos los coeficientes de una ecuación en el sistema, dados los datos de la variable endógena dependiente y_1, de todas las variables exógenas incluidas X_1, y de los valores estimados de las variables endógenas explicativas Y_1. Estos valores estimados son determinados, así mismo, a partir de los coeficientes de la forma reducida, utilizando solamente los datos de las variables exógenas del sistema. En consecuencia, el estimador es una combinación lineal de todas las variables exógenas, no solamente de las incluidas en la ecuación.

El nombre de mínimos cuadrados de dos etapas proviene del hecho de que en la primera fase se utilizan MCO para estimar los coeficientes de la forma reducida y así obtener $\hat{Y}_1$. Mientras que, en la segunda fase se vuelve a utilizar MCO para estimar los coeficientes de la forma estructural, substituyéndose Y_1 por $\hat{Y}_1$. Se observa claramente que la estimación vía MC2E envuelve dos fases, en cada una de las cuales se utilizan los MCO en la *estimación de un sistema de g* ecuaciones, aquellos de la forma reducida en la primera fase y aquellos de la forma estructural en la segunda fase.

Como se ha mencionado el estimador vía MC2E parte de $\hat{Y}_1$, por tanto, será importante especificar más formalmente el cálculo de estos estimadores para las variables endógenas explicativas. Se parte de la forma reducida

$$\underset{n \times g}{Y} = \underset{n \times k}{X} \underset{k \times g}{\Pi} + \underset{n \times g}{u}, \tag{2.78}$$

cuyo estimador $\hat{\Pi}$ por MCO está dados por

$$\hat{\Pi} = (X'X)^{-1} X' Y .$$

En este caso, todas las variables exógenas son tratadas como variables explicativas en cada una de las g regresiones, una para cada variable endógena El estimador $\hat{\Pi}$ consistirá de g columnas, cada una representando los estimadores de los coeficientes en tal regresión. Las estimaciones de las variables endógenas $\hat{Y}_1$ son obtenidos en base a $\hat{\Pi}$ y los datos sobre todas las variables exógenas del modelo X como:

$$\underset{n \times g}{\hat{Y}} = \underset{n \times k}{X} \underset{k \times g}{\hat{\Pi}} = X (X'X)^{-1} X' Y , \tag{2.79}$$

donde $Y = X \hat{\Pi} + \hat{u} = \hat{Y} + \hat{u}$, y $\hat{u}$ es la matriz de residuales de la forma reducida.

A semejanza de las particiones que se han efectuado anteriormente se agrupará en variables incluidas y excluidas de la ecuación a ser estimada. Entonces, se puede escribir el sistema como

$$\left(\underset{n \times 1}{y_1} \;\vdots\; \underset{n \times (g_1 - 1)}{Y_1} \;\vdots\; \underset{n \times (g - g_1)}{Y_2} \right) = \left(\underset{n \times k_1}{X_1} \;\vdots\; \underset{n \times (k - k_1)}{X_2} \right) \begin{pmatrix} \Pi_1^0 & \Pi_1^{00} & \Pi_3 \\ \Pi_2^0 & \Pi_2^{00} & \Pi_4 \end{pmatrix}_{\substack{1 \quad g_1 - 1 \quad g - g_1}} + \left(\underset{n \times 1}{u_0} \;\; \underset{n \times (g_1 - 1)}{u_1} \;\vdots\; \underset{n \times (g - g_1)}{u_2} \right). \tag{2.80}$$

Solucionando para las variables de interés, es decir, las variables endógenas explicativas en la ecuación a ser estimada se obtiene

$$Y_1 = X_1 \hat{\Pi}_1^{00} + X_2 \hat{\Pi}_2^{00} + \hat{u}_1 = \hat{Y}_1 + \hat{u}_1 \tag{2.81}$$

Por tanto, $\hat{Y}_1$, la matriz de valores estimados para las variables endógenas explicativas, esta dada como la combinación lineal de las variables exógenas

$$\hat{Y}_1 = X_1 \hat{\Pi}_1^{00} + X_2 \hat{\Pi}_2^{00} . \tag{2.82}$$

Más aún, se puede expresar como

$$\hat{Y} = \left(\hat{y}_1 \;\vdots\; \hat{Y}_1 \;\vdots\; \hat{Y}_2 \right) = X \hat{\Pi} = X (X'X)^{-1} X' Y$$

$$\hat{Y}_1 = X (X'X)^{-1} X' \left(y_1 \;\vdots\; Y_1 \;\vdots\; Y_2 \right). \tag{2.83}$$

De manera que, $\hat{Y}_1$ puede presentarse como una función lineal de la actual Y_1, es decir,

$$\hat{Y}_1 = X\,(X'X)^{-1}\,X'\,Y_1.$$

Entonces, $\hat{Y}_1$ puede ser también expresada como la actual Y_1 menos los residuos relevantes de la forma reducida

$$\hat{Y}_1 = Y_1 - \hat{u}_1. \tag{2.84}$$

A su vez, $\hat{u}_1$ puede expresarse en términos de la matriz fundamental idempotente de mínimos cuadrados ordinarios M, definida en el capítulo anterior, como

$$\hat{u}_1 = M\,Y_1 = (I - X\,(X'X)^{-1}\,X')\,Y_1. \tag{2.85}$$

La ultima formulación de $\hat{Y}_1$, en (2.84), indica que puede ser obtenida a partir de los datos de las variables endógenas explicativas Y_1 al substraer los residuos relevantes de la forma reducida $\hat{u}_1$ con el propósito de purgar a las variables de cualquier dependencia estadística de los términos estocásticos.

Si se combina (2.84) con (2.76), se pueden interpretar los MC2E en términos de la ecuación original como

$$y_1 = (\hat{Y}_1 + \hat{u}_1)\gamma_1 + X_1\beta_1 + \varepsilon_1,$$

que es equivalente a

$$y_1 = \hat{Y}_1\gamma_1 + X_1\beta_1 + v_1, \tag{2.86}$$

donde $v_1 = \hat{u}_1\gamma_1 + \varepsilon_1$.

El estimador por mínimos cuadrados de dos etapas será el estimador por MCO de (2.86), que es exactamente el mismo presentado en (2.76), pero donde las variables endógenas explicativas han sido reemplazadas por valores estimados a partir de la forma reducida

Si ahora se substituye (2.84) en (2.77) se obtiene una fórmula equivalente para el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} Y'_1 Y_1 - \hat{u}_1'\hat{u}_1 & Y'_1 X_1 \\ \hdashline X'_1 Y_1 & X'_1 X_1 \end{array}\right)^{-1} \begin{pmatrix} Y'_1 - \hat{u}_1 \\ \hdashline X'_1 \end{pmatrix} y_1 \tag{2.87}$$

La submatriz superior izquierda de la matriz a invertir en (2.87) se obtiene de

$$\hat{Y}'_1\hat{Y}_1 = (Y'_1 - \hat{u}'_1)(Y_1 - \hat{u}_1) = \hat{Y}'_1 Y_1 - \hat{u}'_1 Y_1 - Y'_1\hat{u}_1 + \hat{u}'_1\hat{u}_1$$

Por (2.85) se sabe que $\hat{u}_1 = M\,Y_1$, y retomando que M es tanto simétrica como idempotente.[3] Por consiguiente se obtienen las siguientes identidades:

$$\hat{u}'_1\,Y_1 = Y'_1\,M\,Y_1 = Y'_1\,\hat{u}_1,$$

$$\hat{u}'_1\,\hat{u}_1 = Y'_1\,M\,M\,Y_1 = Y'_1\,M\,Y_1 = Y'_1\,\hat{u}_1.$$

De estas identidades se sigue que

$$\hat{Y}'_1\,\hat{Y}_1 = (Y'_1 - \hat{u}'_1)(Y_1 - \hat{u}_1) = \hat{Y}'_1\,Y_1 = Y'_1\,Y_1 - \hat{u}'_1\,\hat{u}_1. \qquad (2.88)$$

Por su parte, la submatriz superior del lado derecho en (2.87) se obtiene de

$$\hat{Y}'_1 X_1 = (Y'_1 - \hat{u}'_1)\,X_1.$$

Por (2.85) se sabe que $\hat{u}'_1 = Y'_1\,M$, por tanto

$$\hat{Y}'_1 X_1 = (Y'_1 - Y'_1\,M)\,X_1,$$

entonces por el hecho de que

$$M\,X = \left(I - X\,(X'X)^{-1}\,X'\right)X = 0, \text{ se tiene}$$

$$\hat{Y}'_1 X_1 = Y'_1\,X_1. \qquad (2.89)$$

El mismo desarrollo se aplica para obtener la submatriz inferior del lado izquierdo en (2.87)

La única diferencia del estimador vía MC2E dado en (2.87), con el estimador obtenido a través de mínimos cuadrados ordinarios, es la corrección de las variables endógenas explicativas Y_1 empleando los residuales $\hat{u}_1$, obtenidos de la estimación vía MCO en la forma reducida

Se ha mencionado con anterioridad que el estimador por MC2E está definido sólo para una ecuación que esté exactamente identificada o sobreidentificada. Esto se puede inferir del hecho de que la matriz a invertir en (2.87) es de orden $g_1 - 1 + k_1$, de la misma manera que para la ecuación sea exactamente identificada o sobreidentificada, se requiere que satisfaga la condición de orden

$$g_1 - 1 + k_1 \le k. \qquad (2.90)$$

No obstante, la matriz a invertirse en (2.87) consiste de combinaciones de los elementos de la matriz X, donde $\hat{Y}_1 = Y_1 - \hat{u}_1$ representa combinaciones lineales de X a partir de que $\hat{Y}_1 = X_1\,\hat{\Pi}_1^{(0)} + X_2\,\hat{\Pi}_2^{(0)}$. La matriz a invertirse no puede tener rango mayor al de la matriz

[3] Por simétrica se entiende $M' = M$, Mientras que por idempotente se refiere a que $M = M^2$

original X, es decir, mayor que *k*. Si está condición no se cumple la ecuación está subidentificada y la matriz no puede ser invertida, por tanto, el estimador por mínimos cuadrados se encontrará indefinido. Si la condición se cumple, la matriz *tiene rango completo* y en consecuencia puede invertirse si la ecuación está exactamente identificada o sobreidentificada.

También se ha mencionado que los estimadores obtenidos por MC2E son equivalentes al estimador por MCI *en el caso de que la ecuación esté exactamente identificada*; para demostrarlo se expresará la ecuación a ser estimada en términos de la forma reducida, combinando (2.86) en (2.82)

$$y_1 = (X_1 \hat{\Pi}_1^{\infty} + X_2 \hat{\Pi}_2^{\infty})\gamma_1 + X_1\beta_1 + v_1, \tag{2.91}$$

donde $v_1 = \hat{u}_1 \gamma_1 + \varepsilon_1$

Al ordenar términos

$$y_1 = X_1(\hat{\Pi}_1^{\infty} \gamma_1 + \hat{\beta}_1 \beta_1) + X_2 \hat{\Pi}_2^{\infty} \gamma_1 + v_1, \tag{2.92}$$

que se puede agrupar como

$$y_1 = \left(X_1 | X_2\right)\left(\begin{array}{c} \hat{\Pi}_1^{\infty}\gamma_1 + \beta_1 \\ \hline \hat{\Pi}_2^{\infty}\gamma_1 \end{array}\right) + v_1 = X\left(\begin{array}{c} \hat{\Pi}_1^{\infty}\gamma_1 + \beta_1 \\ \hline \hat{\Pi}_2^{\infty}\gamma_1 \end{array}\right) + v_1. \tag{2.93}$$

El estimador por mínimos cuadrados ordinarios para esta expresión estará dado por

$$\left(\begin{array}{c} \hat{\Pi}_1^{\infty}\hat{\gamma}_1 + \hat{\beta}_1 \\ \hline \hat{\Pi}_2^{\infty}\hat{\gamma}_1 \end{array}\right) = (X'X)^{-1} X' y_1 = \left(\begin{array}{c} \hat{\Pi}_1^{0} \\ \hline \hat{\Pi}_2^{0} \end{array}\right). \tag{2.94}$$

que es simplemente la primera columna de la matriz estimada de la forma reducida. Esta identidad siempre es válida para los MC2E, sin embargo, si la ecuación está exactamente identificada, entonces, $\hat{\Pi}_2^{\infty}$ será una matriz cuadrada y si, además, se supone que no es singular; se puede resolver para $\hat{\gamma}_1$ y $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\gamma}_1 = [\hat{\Pi}_2^{\infty}]^{-1} \hat{\Pi}_2^{0}, \tag{2.95}$$

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\Pi}_1^{0} - \hat{\Pi}_1^{\infty} [\hat{\Pi}_2^{\infty}]^{-1} \hat{\Pi}_2^{0}, \tag{2.96}$$

los cuales son precisamente los estimadores por MCI analizados anteriormente.

Por último, se ha mencionado que los estimadores por MC2E son consistentes, pero a semejanza con los mínimos cuadrados ordinarios, son sesgados Recuérdese que en la estimación por mínimos cuadrados ordinarios la inclusión de Y_i dentro del conjunto de variables explicativas daba lugar a obtener estimadores inconsistentes. Sin embargo, en los MC2E Y_1 ha sido reemplazada por $\hat{Y}_1$, que consiste de una combinación lineal de variables exógenas, de tal forma que todo el conjunto de variables explicativas, sean tanto exogenas (X_1) como combinaciones lineales de estas variables exógenas ($\hat{Y}_1$), no están correlacionadas en el límite de probabilidad con los términos de perturbación estocástica, asegurándose así la consistencia de los estimadores. Para probarlo más formalmente escríbase:

$$y_1 = (\hat{Y}_1 | X_1)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \hline \beta_1 \end{pmatrix} + \nu_1 = \hat{Z}_1\, \delta_1 + \nu_1, \tag{2.97}$$

cuyo estimador por MC2E está dado por

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}_{MC2E} = \hat{\delta}_{1_{MC2E}} = (\hat{Z}'_1\, \hat{Z}_1)^{-1}\, \hat{Z}'_1\, y_1, \tag{2.98}$$

donde $\hat{Z}_1$ agrupa las estimaciones de las variables endógenas y a las variables exógenas incluidas, es decir

$$\underset{n\times(g_1-1+k_1)}{\hat{Z}_1} = \left(\underset{n\times(g_1-1)}{\hat{Y}_1} \mid \underset{n\times k_1}{X_1}\right) \tag{2.99}$$

Substituyendo (2 97) en (2.98) se obtiene

$$\hat{\delta}_{1_{MC2E}} = \delta_1 + (\hat{Z}'_1\, \hat{Z}_1)^{-1}\hat{Z}'_1\, v_1 \tag{2.100}$$

Con objeto de comprobar si el estimador es sesgado o insesgado se calcula el valor esperado de (2.100):

$$E\left[\hat{\delta}_{1_{MC2E}}\right] = \delta_1 + E\left[(\hat{Z}'_1\, \hat{Z}_1)^{-1}\hat{Z}'_1\, v_1\right] \tag{2.101}$$

Por lo general, el segundo término no se anula, de modo que el estimador por MC2E es generalmente sesgado.

$$E\left[\hat{\delta}_{1_{MC2E}}\right] \neq \delta_1 \tag{2.102}$$

Respecto a la consistencia del estimador por MC2E, se empieza por multiplicar a (2 100) por n n, de modo que se obtenga una expresión equivalente donde se pueda calcular el límite de probabilidad:

$$\hat{\delta}_{1_{MC2E}} = \delta_1 + \left[\tfrac{1}{n}\hat{Z}'_1\, \hat{Z}_1\right]^{-1}\left[\tfrac{1}{n}\hat{Z}'_1\, v_1\right] \tag{2.103}$$

Si se asume que

$$p\lim\left[\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Z}}'_1\,\hat{\mathbf{Z}}_1\right]=\mathbf{Q}_1\,, \tag{2.104}$$

donde $\mathbf{Q}_1$ es una matriz no singular, entonces:

$$p\lim\hat{\delta}_{1_{MC2E}}=\delta_1+\mathbf{Q}_1^{-1}\;p\lim\left[\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Z}}'_1\,\mathbf{v}_1\right]. \tag{2.105}$$

Por tanto, el estimador por MC2E será consistente si

$$p\lim\left[\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Z}}'_1\,\mathbf{v}_1\right]=\begin{bmatrix}p\lim\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Y}}'_1\,\varepsilon_1\\ p\lim\tfrac{1}{n}\mathbf{X}'_1\,\varepsilon_1\end{bmatrix}=0\,, \tag{2.106}$$

donde v_1 es reemplazado por ε_1, puesto que $p\lim\left[\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Z}}'_1\,\hat{\mathbf{u}}_1\right]=0$.

El término $\tfrac{1}{n}\mathbf{X}'_1\,\varepsilon_1$ se anula debido a que las variables son exógenas y, en consecuencia, no están correlacionadas con los términos de perturbación estocástica en el límite de probabilidad

Por lo que toca a $p\lim\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Y}}'_1\,\varepsilon_1$, si se substituye el valor de $\hat{\mathbf{Y}}_1$, dado por (2.91), se llega a

$$p\lim\tfrac{1}{n}\hat{\mathbf{Y}}'_1\,\varepsilon_1 = \;p\lim\tfrac{1}{n}\left[\mathbf{X}_1\hat{\Pi}_1^{\infty}+\hat{\Pi}_2^{\infty}\right]\varepsilon_1\,. \tag{2.107}$$

Dado que tanto $\mathbf{X}_1$ como $\mathbf{X}_2$ no están correlacionadas con ε_1 en el límite de probabilidad se sigue

$$p\lim\tfrac{1}{n}\left[\mathbf{X}_1\hat{\Pi}_1^{\infty}+\hat{\Pi}_2^{\infty}\right]\varepsilon_1=0\,.$$

Por consiguiente, el estimador vía MC2E es consistente, es decir,

$$p\lim\hat{\delta}_{1_{MC2E}}=\delta_1\,. \tag{2.108}$$

2.5.4 Variables instrumentales

Los estimadores vía variables instrumentales pueden interpretarse como una generalización de todas las aproximaciones, vía información limitada, que se aplican en un sistema de ecuaciones simultáneas. Considérese nuevamente la forma estructural

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{Z}_1\delta_1+\varepsilon_1=\left(\mathbf{Y}_1|\mathbf{X}_1\right)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ --\\ \beta_1\end{pmatrix}+\varepsilon_1\,, \tag{2.109}$$

donde Z_1 agrupa los datos sobre las g_1-1+k_1 variables explicativas incluidas, es decir,

$$\underset{n(g_1-1+k_1)}{\mathbf{Z}_1}=\underset{n(g_1-1+k_1)}{\left(\mathbf{Y}_1\,|\,\mathbf{X}_1\right)} \tag{2.110}$$

δ_1 es el vector que agrupa todos los coeficientes estructurales en la ecuación

$$\underset{(g_1-1+k_1)\times 1}{\delta_1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ -- \\ \beta_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1-1 \\ k_1 \end{matrix} . \tag{2.111}$$

Si se premultiplica a la expresión (2.109) por $\mathbf{Z}_1$ se tiene

$$\mathbf{Z}_1'\, \mathbf{y}_1 = \mathbf{Z}_1'\, \mathbf{Z}_1 \delta_1 + \mathbf{Z}_1'\, \varepsilon_1 .$$

En un modelo uniecuacional sería válido cancelar el término $\mathbf{Z}_1'\, \varepsilon_1$, puesto que, se asume que las variables explicativas son exógenas y, en consecuencia, no están correlacionadas con loc términos de perturbación estocástica. Sin embargo, en un sistema de ecuaciones simultáneas no puede justificarse, dado que, las variables explicativas endógenas en $\mathbf{Z}_1$ no son estadísticamente independientes de ε_1.

No obstante, supóngase que existe un conjunto de variables $g_1 - 1 + k_1$ (el mismo número que en $\mathbf{Z}_1$) que no estén correlacionadas con los términos de perturbación ε_1, pero que al *mismo tiempo estén correlacionados con* $\mathbf{Z}_1$ Tales *variables* son conocidas como *variables instrumentales*. Los datos sobre estas variables se agrupan en la matriz $\mathbf{W}_1$, donde el subíndice se refiere a la primera ecuación. Premultiplicando por $\mathbf{W}'_1$ se obtiene

$$\mathbf{W}'_1\, \mathbf{y}_1 = \mathbf{W}'_1\, \mathbf{Z}_1 \delta_1 + \mathbf{W}'_1\, \varepsilon_1 , \tag{2.112}$$

donde el término $\mathbf{W}'_1\, \varepsilon_1$ se anula, en virtud de que las variables en $\mathbf{W}_1$ se asumen ya no están correlacionadas con ε_1. Resolviendo para δ_1 se obtiene

$$\hat{\delta}_{1_{IV}} = \hat{\delta}_{1IV}(\mathbf{W}_1) = (\mathbf{W}'_1\, \mathbf{Z}_1)^{-1}\, \mathbf{W}'_1\, \mathbf{y}_1 . \tag{2.113}$$

el cual es el *estimador general vía variables instrumentales*, que como se indica en $\hat{\delta}_1(\mathbf{W}_1)$, es una función que depende de la selección de las variables instrumentales

Este estimador es ampliamente utilizado, y representa una clase completa de estimadores cada uno definido por $\mathbf{W}_1$, la matriz de datos de las variables instrumentales. Cabe señalar que todos los estimadores analizados hasta el momento son miembros de está clase y pueden interpretarse como estimadores vía variables instrumentales para ciertos valores particulares de $\mathbf{W}_1$.

Por ejemplo, el estimador por mínimos cuadrados ordinarios:

$$\underset{MCO}{\hat{\delta}_1} = \underset{IV}{\hat{\delta}_1(\mathbf{Z}_1)} = [\mathbf{Z}_1'\, \mathbf{Z}_1]^{-1}\, \mathbf{Z}_1'\, \mathbf{y}_1 . \tag{2.114}$$

donde la misma Z_1 es utilizada como la matriz de datos para las variables instrumentales; sin embargo, la selección de estás variables instrumentales no satisface los supuestos de independencia de los términos de perturbación estocástica.

Por lo que concierne al estimador vía mínimos cuadrados indirectos, donde la ecuación está exactamente identificada, el número de variables instrumentales $g_1 - 1 + k_1$ es igual al número de variables exógenas en el sistema k. En tal situación, todas las variables exógenas pueden ser utilizadas como variables instrumentales, de manera que W_1 es simplemente X, por consiguiente,

$$\underset{MCI}{\hat{\delta}_1} = \hat{\delta}_1(X) = [X' Z_1]^{-1} X' y_1 . \tag{2.115}$$

De manera similar, el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas puede ser expresado como un estimador obtenido vía variables instrumentales. Nótese, en principio, que las únicas variables que pueden ser tratadas adecuadamente como variables instrumentales son las variables endógenas explicativas Y_1, puesto que, las variables exógenas incluidas X_1 pueden ser utilizadas como sus propias variables instrumentales. En esta aproximación, como se ha analizado, las variables endógenas explicativas serán reemplazadas por sus valores estimados $\hat{Y}_1$, que fungirán como variables instrumentales. Por lo tanto, W_1, la matriz de variables instrumentales estará dada por

$$\underset{MC2E}{W_1} = \left(\hat{Y}_1 \mid X_1\right) = \hat{Z}_1 , \tag{2.116}$$

consistiendo de los valores estimados de las $g_1 - 1$ variables endógenas explicativas y los valores actuales de las k_1 variables exógenas incluidas.

Entonces, el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas puede denotarse como el estimador por variables instrumentales

$$\underset{MC2E}{\hat{\delta}_1} = \hat{\delta}_1\left(\hat{Z}_1\right) = [\hat{Z}'_1 Z_1]^{-1} \hat{Z}_1 y_1 \tag{2.117}$$

Se sabe por (2.110) y por (2.116) que el producto de que $\hat{Z}'_1 Z_1$ es equivalente a.

$$\left(\hat{Y}_1 \mid X_1\right)' \left(Y_1 \mid X_1\right) = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1'Y_1 & \hat{Y}_1'X_1 \\ Y_1'X_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

Por (2.88) se conoce que, $\hat{Y}_1'Y_1 = \hat{Y}_1'\hat{Y}_1$, así como por (2.89) se sabe que, $\hat{Y}'_1 X_1 = Y'_1 X_1$, de manera que al substituir (2.88) y (2.89) en (2.118) se obtendría el mismo resultado que al haber multiplicado $\hat{Z}'_1 \hat{Z}_1$ en vez de $\hat{Z}'_1 Z_1$.

Es así que, si $\hat{Z}'_1 Z_1 = \hat{Z}'_1 \hat{Z}_1$, se vuelve a obtener el estimador por MC2E, definido en la sección anterior

$$\hat{\delta}_{\underset{MC2E}{1}} = \hat{\delta}_1\left(\hat{Z}_1\right) = [\hat{Z}'_1 \hat{Z}_1]^{-1} \hat{Z}_1 y_1 \tag{2.119}$$

En lo que concierne a las propiedades estadísticas del estimador vía variables instrumentales, esté es consistente si se cumplen las condiciones en (2.122) y (2.123).

Para comprobar estas condiciones se substituye el estimador general de variables instrumentales, dado por $\hat{\delta}_{1IV}(W_1) = [W'_1 Z_1]^{-1} W'_1 y_1$ en la primera ecuación estructural $y_1 = Z_1\delta_1 + \varepsilon_1$, obteniéndose

$$\hat{\delta}_{1IV} = [W'_1 Z_1]^{-1} W'_1 y_1 = [W'_1 Z_1]^{-1} W'_1 [Z_1\delta_1 + \varepsilon_1]$$

$$\hat{\delta}_{1IV} = \delta_1 + [W'_1 Z_1]^{-1} W'_1 \varepsilon_1. \tag{2.120}$$

De manera que, al buscar su limite de probabilidad se tiene

$$\text{p}\lim \hat{\delta}_{1IV} = \delta_1 + \text{p}\lim \left(\frac{1}{n} W'_1 Z_1\right)^{-1} \text{p}\lim\left(\frac{1}{n} W'_1 \varepsilon_1\right). \tag{2.121}$$

Si se recuerda que en esta aproximación, las variables instrumentales no están asintóticamente correlacionadas con los términos de perturbación estocástica, resulta que

$$\text{p}\lim\left(\frac{1}{n} W'_1 \varepsilon_1\right) = 0. \tag{2.122}$$

Y que a su vez están asintóticamente correlacionadas con las Z_1, de manera que convergen en el limite de probabilidad a una matriz Q_1.

$$\text{p}\lim\left(\frac{1}{n} W'_1 Z_1\right) = Q_1, \tag{2.123}$$

donde Q_1 existe y es no singular Bajo estos dos supuestos sobre W_1 se sigue que, $\hat{\delta}_{1IV}$ es un estimador consistente si

$$\text{p}\lim \hat{\delta}_{1IV} = \delta_1. \tag{2.124}$$

Entonces, si existe un conjunto de variables instrumentales que satisfagan las condiciones en (2.122) y (2.123), se obtendrá un estimador consistente.

Si se retoman los estimadores analizados hasta ahora se observa que el estimador por mínimos cuadrados ordinarios no es consistente porque no cumple la condición en (2.122), mientras que, el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas es consistente puesto que cumple ambas propiedades.

En cuanto a la varianza de los estimadores obtenidos, recuérdese que la varianza es una medida de dispersión de la distribución de los datos.[4] Por tanto, la varianza de algún coeficiente j, del vector de coeficientes estructurales $\hat{\delta}_1$, estará dada por

$$V = E\left(\hat{\delta}_{1j} - \delta_{1j}\right)^2. \tag{2.125}$$

De manera análoga, la covarianza para algún par de coeficientes i,j estará dada por

$$Cov\left(\hat{\delta}_{1j}\ \hat{\delta}_{1i}\right) = E\left(\hat{\delta}_{1j} - \delta_{1j}\right)\left(\hat{\delta}_{1i} - \delta_{1i}\right). \tag{2.126}$$

Por consiguiente, la matriz de covarianzas que abarca todas las posibles combinaciones de varianzas y covarianzas para el conjunto de estimadores $\hat{\delta}_1$ estará dada por

$$Cov\left(\hat{\delta}_1\right) = E\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)'. \tag{2.127}$$

Luego entonces, la matriz de covarianza asintótica para un estimador $\hat{\delta}_1$ estará definida por

$$\lim Cov\left(\hat{\delta}_1\right) = \frac{1}{n}\,\mathrm{p}\lim\left[n\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)'\right] = \frac{1}{n}\,\mathrm{p}\lim\left[\left[\sqrt{n}\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)\right]\left[\sqrt{n}\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)'\right]\right], \tag{2.128}$$

esto es, $\frac{1}{n}$ veces el límite de la matriz de covarianzas de $\sqrt{n}\left(\hat{\delta}_1 - \delta_1\right)$.

Para el estimador vía variables instrumentales, está definición implica que

---

[4] Como se ha mencionado la varianza es una medida de dispersión, donde los datos θ_j que se desvían del valor medio μ_θ son elevados al cuadrado, y ponderados por su frecuencia o una función de su probabilidad de ocurrencia, obteniéndose la conocida formula:

$$V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\theta_j - \mu_\theta\right)^2$$

Que es equivalente al valor esperado de la diferencia $\left(\theta_j - \mu_\theta\right)$ elevada al cuadrado.

$$V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\theta_j - \mu_\theta\right)^2 = E\left(\theta_j - \mu_\theta\right)^2$$

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_{1\,IV}\right)=\frac{1}{n}\,\mathrm{p}\lim\left(\frac{1}{n}\,W'_1\,Z_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\,W'_1\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_1\,W_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\,Z_1'\,W_1\right)^{-1}. \tag{2.129}$$

Se sabe que $E(\varepsilon_1\,\varepsilon'_1)=\sigma_{11}I=\sigma_1{}^2I$. Por tanto al substituir esta identidad en (2.129) se tiene

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_{1\,IV}\right)=\frac{1}{n}\,\sigma_1{}^2\,\mathrm{p}\lim\left(\frac{1}{n}\,W'_1\,Z_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\,W'_1\,W_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\,Z_1'\,W_1\right)^{-1}. \tag{2.130}$$

A partir de la definición de la varianza, se puede estimar $\sigma_1{}^2$ de la primera ecuación como

$$\hat{\sigma}_1{}^2=\frac{1}{n}\,\varepsilon_1\,\varepsilon'_1=\frac{1}{n}\left(y_1-Z_1\hat{\delta}_1\right)'\left(y_1-Z_1\hat{\delta}_1\right). \tag{2.131}$$

Empleando estos resultados la matriz asintótica de covarianzas para el estimador de mínimos cuadrados de dos etapas estará dada por

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_{1\,MC2E}\right)=\frac{1}{n}\,\sigma_1{}^2\,\mathrm{p}\lim\left(\frac{1}{n}\,\hat{Z}'_1\,\hat{Z}_1\right)^{-1}=\frac{1}{n}\,\sigma_1{}^2\,\mathrm{p}\lim\begin{bmatrix}\hat{Y}_1'Y_1 & Y_1'X_1\\ X_1'Y_1 & X_1'X_1\end{bmatrix}^{-1}, \tag{2.132}$$

donde la varianza $\sigma_1{}^2$ puede ser consistentemente estimada a través de $\hat{\sigma}_1{}^2$, dada por (2.131), empleando el estimador de mínimos cuadrados de dos etapas o cualquiera otro que sea consistente en vez de $\hat{\delta}_1$.

El estimador consistente obtenido de la matriz asintótica de covarianzas puede ser utilizado para construir intervalos de confianza de los parámetros estructurales, así como para probar hipótesis respecto a éstos, de la misma manera que en el modelo uniecuacional. Por ejemplo, los errores estándar asintóticos, dados por la raíz cuadrada positiva de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianzas asintótica pueden ser utilizados para construir pruebas asintóticas t de significación estadística.

Puede afirmarse que el mayor problema al estimar a través de variables instrumentales es, simplemente, obtener un conjunto de variables instrumentales que no estén correlacionadas con los términos de perturbación estocástica al mismo tiempo que estén, suficientemente, correlacionadas con las variables explicativas relevantes. Más aun, las estimaciones son usualmente muy sensibles a la elección de las variables instrumentales, lo que conlleva a un serio problema en la selección de dichas variables.

2.5.5 Estimación con variables endógenas rezagadas.

Las variables dependientes a menudo tienden a reaccionar al cambio en alguna de las variables explicativas sólo después de cierto lapso de tiempo. Esta reacción rezagada sugiere la inclusión variables explicativas rezagadas en la formulación del modelo, por lo que al modelo se le conocerá como dinámico. En tales modelos, en vez de tener una respuesta instantánea, existe una estructura de tiempo de respuesta gradual de la variable dependiente a un cambio en las variables explicativas.

Pueden existir muchas razones para que se presente un rezago en un sistema, es decir un lapso de tiempo entre el cambio en la variable explicativa y un cambio en la variable dependiente. Las razones pueden ser:

- *Técnicas*: La producción necesita cierto tiempo para terminarse; los insumos de la industria pueden subir un día de precio, pero el efecto sobre el precio al consumidor se observará hasta que el productor renueve su stock de insumos y lleve sus productos al mercado.
- *Institucionales*: Toma tiempo responder a eventos externos y reglas lo que lleva a respuestas rezagadas
- *Psicológicas*: Las decisiones frecuentemente están basadas en los hábitos y las expectativas, es decir, están basadas en hechos pasados.

Por todas estás razones, las variables rezagadas aparecen a menudo en un modelo econométrico. Estas variables pueden ser tanto exógenas, como endógenas. En el primer caso se puede llevar a cabo el proceso de estimación, por alguno de los métodos analizados anteriormente. Sin embargo, en el caso de modelos con variables endógenas rezagadas, es decir, autoregresivos la estimación tendrá que ser diferente. Uno de tales modelos en su forma más simple puede ser

$$y_t = \lambda\, y_{t-1} + \beta\, x_t + v_t\,, \tag{2.133}$$

donde $0 < \lambda < 1$, y_t es la variable dependiente, y_{t-1} es la variable dependiente rezagada, x_t es la variable explicativa y v_t es el término de perturbación estocástica.

Los procesos de estimación analizados hasta el momento no pueden ser aplicados a estos modelos autoregresivos La razón tiene dos aspectos: la presencia de variables explicativas estocásticas y la posibilidad de correlación serial.

La técnica apropiada para la estimación en estos modelos depende fundamentalmente del comportamiento de los términos de perturbación estocástica v_t.

Si los v_t están distribuidos independientemente e idénticamente con media cero y varianza constante.

$$E(v_t) = 0 \tag{2.134}$$

$$E(v_t\ v_s) = \begin{cases} \sigma_v^{\ 2},\ \text{si } t = s \\ 0, \quad \text{si } t \neq s \end{cases} \tag{2.135}$$

Al aplicar mínimos cuadrados ordinarios u otra aproximación a la ecuación (2.133) se obtendrán estimadores consistentes, asintóticamente eficientes y asintóticamente normales Así mismo, serán estimadores de máxima verosimilitud si los v_t se distribuyen normalmente. Sin embargo, debido a la presencia de la variable endógena rezagada y_{t-1} que no es independiente del término v_{t-1} los estimadores obtenidos serán sesgados. Por ejemplo, en el modelo más simple

$$y_t = \lambda\ y_{t-1},$$

su correspondiente estimador por mínimos cuadrados ordinarios será

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}}.$$

Asumiendo que, y_t es medida como desviaciones de su valor medio, entonces

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum(\lambda y_t + v_t)y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}} = \lambda + \frac{\sum v_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}}$$

Al aplicar el operador esperanza, se observa claramente que el valor esperado del segundo término del miembro derecho es diferente de cero, por tanto, el estimador no será insesgado

Por consiguiente, la estimación en estos modelos producirá estimadores consistentes, aunque tiendan a ser sesgados (en muestras pequeñas). Intuitivamente, la razón de esta consistencia es que aunque y_{t-1} depende de v_{t-1}, no está correlacionado con el termino de error del período actual v_t. En consecuencia, en tanto que v_t sea serialmente independiente, y_t también será independiente o por lo menos no estará correlacionado con v_t, satisfaciéndose así el supuesto de no correlación entre las variables explicativas y el término de perturbación estocástica.

Ahora, supóngase que los términos de perturbación estocástica v_t están correlacionados serialmente, es decir, siguen un proceso de Markov de primer orden

$$v_t = \rho\, v_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{2.136}$$

donde $\varepsilon_t \approx N(0,\sigma_\varepsilon^2)$

En este modelo, los términos de perturbación estocástica están correlacionados entre ellos, de tal manera que las perturbaciones pasadas, que tuvieron influencia sobre las variables endógenas rezagadas, también influenciarán a las perturbaciones de períodos subsecuentes, en consecuencia las variables endógenas rezagadas estarán correlacionadas con las variables endógenas subsecuentes, obteniéndose estimadores insesgados e inconsistentes.

Para ejemplificar retómese el caso más simple:

$$y_t = \lambda\, y_{t-1} + v_t \tag{2.137}$$

Si se rezaga la expresión y se multiplica por ρ se tiene

$$\rho\, y_{t-1} = \lambda\, \rho\, y_{t-2} + \rho\, v_{t-1}.$$

Combinando está expresión con (2.136)

$$y_t - \rho\, y_{t-1} = \lambda\,(y_{t-1} - \rho\, y_{t-2}) + \varepsilon_t,$$

despejando en términos de y_t,

$$y_t = (\rho + \lambda)\, y_{t-1} - \rho\,\lambda\, y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

cuyo estimador por mínimos cuadrados ordinarios es

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}} = \lambda + \frac{\sum(\rho+\lambda)y_{t-1}^2 - \rho\lambda\sum y_{t-1}y_{t-2} + \sum \varepsilon_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}}$$

$$\hat{\lambda} = \rho + \lambda - \rho\,\lambda\,\frac{\sum y_{t-1}y_{t-2}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}} + \frac{\sum \varepsilon_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^{\ 2}}$$

Tomando límites de probabilidad:

$$p\lim \hat{\lambda} = \rho + \lambda - \rho\,\lambda\; p\lim \hat{\lambda}.$$

De manera que

$$p\lim \hat{\lambda} = \frac{\rho+\lambda}{1+\rho\lambda}.$$

Demostrándose la falta de consistencia del estimador. Por tanto, los estimadores por mínimos cuadrados ordinarios o cualquier otra aproximación, serán inapropiados en caso de que existan variables endógenas rezagadas y correlación serial entre los términos de perturbación estocástica.

Los estimadores no solamente serán sesgados sino que ni siquiera son consistentes; es decir, aun en el caso de que el tamaño de la muestra aumente indefinidamente, los estimadores no se aproximarán a sus verdaderos valores poblacionales.

Es así que, se vuelve de vital importancia detectar la presencia o ausencia de correlación serial entre los términos de perturbación estocástica antes de efectuar la estimación del modelo

2.5.6 Pruebas de correlación serial en presencia de variables endógenas rezagadas.

En un principio, el problema de probar la independencia serial de los errores en un modelo de regresión, se ha basado en el supuesto de que las variables explicativas eran constantes, o podían ser tratadas como tales ignorándose la situación en la que algunas de las variables explicativas fueran variables rezagadas dependientes. Las pruebas se aplicaban sin tomar en cuenta la presencia de variables dependientes rezagadas.

Sin embargo, como se ha visto con anterioridad, es posible que exista correlación serial en los errores v_t, hecho que genera problemas de estimación, relativamente, complejos en el modelo autoregresivo. La cuestión es, entonces, cómo detectar la presencia de correlación serial en los términos de perturbación estocástica que aparecen en un modelo autoregresivo.

El estadístico d de Durbin-Watson,[5] analizado en el capítulo anterior, no puede utilizarce para detectar correlación serial de primer orden en los modelos que incluyan variables endógenas rezagadas, debido a que uno de sus supuestos es que el modelo de regresión no incluya valores rezagados de la variable endógena como una de las variables explicativas, puesto que al presentarse una variable endógena como variable explicativa resulta evidente que esta variable estará correlacionada con sus propios valores subsecuentes, por lo cual la prueba no es aplicable a modelos autoregresivos.

No obstante, recientemente se ha propuesto una prueba para muestras grandes, denominada h, que detecta correlación serial de primer orden en los modelos con variables endógenas

[5] Para un análisis teórico más profundo del mencionado estadístico consulte "Testing for serial correlation in least squares regression", J. Durbin & C.S. Watson, Biometrika 1951 Vol. 38, Pgs 159-177

rezagadas.[6] Su estadístico está dado por

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - n[Var(\hat{\alpha}_2)]}}\,, \tag{2.138}$$

donde n es el tamaño de la muestra, $Var(\hat{\alpha}_2)$ es la varianza del coeficiente de la variable dependiente Y_{t-1} y $\hat{\rho}$ es la estimación de ρ, el coeficiente de correlación serial dado por

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}\,.$$

Para un tamaño de muestra grande se ha demostrado que si $\rho = 0$, entonces el estadístico h *sigue una distribución normal estandarizada*, por tanto la significancia estadística de un h observado se puede determinar fácilmente con base en la tabla de la distribución normal estandarizada

Así mismo, $\hat{\rho}$ puede obtenerse de la definición del estadístico de Durbin-Watson, dada en (1 111), de manera que

$$h \approx (1 - \tfrac{1}{2}d)\sqrt{\frac{n}{1 - n[Var(\hat{\alpha}_2)]}}\,. \tag{2.139}$$

Por lo tanto los pasos aplicados en el cálculo del estadístico h son:

1 Estimar por medio de mínimos cuadrados ordinarios
2. Calcular el valor de la $Var(\hat{\alpha}_2)$.
3 Calcular $\hat{\rho}$ y h.
4. Suponiendo que el tamaño de la muestra, n, es grande se tiene que $h \approx AN(0,1)$, es decir h tiene una distribución asintóticamente normal con media cero y varianza unitaria.[7] Entonces a partir de la distribución normal se sabe que

$$P[-1.96 \le h \le 1.96] = 0.95\,,$$

lo cual implica que la probabilidad de que h, una v.a. normal estándar cualquiera, se encuentre entre -1 96 y 1.96 es aproximadamente del 95%. Por tanto, la regla de decisión es

a) Si $h > 1.96$, rechazar la hipótesis nula de que no hay correlación serial positiva de primer orden (si existe correlación serial).

---

[6] La justificación teorica de este estadístico de prueba se presenta en el articulo "Testing for Serial Correlation In Least Squares Regression when some of the regressions are laged dependent variables", J Durbin, Econometrica 1970 No 38, Pgs. 410-21

[7] *Ibidem*

b) Si $h < -1.96$. rechazar la hipótesis nula de que no hay correlación serial negativa de primer orden (si existe correlación serial).

c) Si h se encuentra entre -1.96 y 1.96, no se rechaza la hipótesis nula de que no existe correlación serial de primer orden, sea positiva o negativa.

Cabe señalar las siguientes características del estadístico h:

- No importa cuantas variables X o cuantos valores rezagados de Y estén incluidos en el modelo, para calcular h, se necesita considerar únicamente la varianza del coeficiente de Y_{t-1} .
- La prueba es aplicable para muestras grandes, sin embargo, en muestras pequeñas su uso no está plenamente justificado.
- La prueba no es aplicable si $n Var(\hat{\alpha}_2)$ es mayor o igual a 1, puesto que, no se puede calcular la raíz de segundo grado de un número negativo.

2.5.7 Estimación con Variables Endógenas Rezagadas y Correlación Serial.

Como se ha visto anteriormente, una forma de presentar un sistema de ecuaciones simultáneas es emplear matrices de datos, de tal forma que se puede generalizar el modelo uniecuacional al modelo de g variables endógenas

$$\underset{n \times g}{\mathbf{Y}}\ \underset{g \times g}{\Gamma} + \underset{n \times k}{\mathbf{X}}\ \underset{k \times g}{\mathbf{B}} = \underset{n \times g}{\mathbf{E}}, \tag{2.140}$$

donde $\mathbf{Y}$ es la matriz de n observaciones por g variables endógenas, $\mathbf{X}$ es la matriz de n observaciones por k variables predeterminadas, sean exógenas ó endógenas rezagadas, $\mathbf{E}$ es una matriz de g x g, donde cada renglón de $\mathbf{E}$ es el vector ε_t de los términos de perturbación estocástica.

Las matrices de coeficientes a ser estimadas Γ y B, que representan respectivamente los coeficientes de las variables endógenas y de las predeterminadas, pueden estimarse por alguna de las aproximaciones analizadas anteriormente, aun si incluyen variables endógenas rezagadas como variables explicativas, si los términos de perturbación estocástica no están correlacionados serialmente.

Si se supone que dichos términos de perturbación están correlacionados serialmente se tiene

$$\underset{n \times g}{\mathbf{Y}}\ \underset{g \times g}{\Gamma} + \underset{n \times k}{\mathbf{X}}\ \underset{k \times g}{\mathbf{B}} = \underset{n \times g}{\mathbf{E}} + \underset{n \times g}{\mathbf{U}_{-1}}\ \underset{g \times g}{\mathbf{R}}, \tag{2.141}$$

donde U_{-1} indica la presencia de correlación serial de las variables con los términos de perturbación estocástica en el período de tiempo anterior, **R** es una matriz diagonal, que contiene a los coeficientes de correlación serial. Dichos coeficientes oscilan entre -1 y 1, indicando la existencia de un modelo autoregresivo de primer orden.

Recuérdese que en esta notación todos los elementos sobre la diagonal principal de Γ son iguales a -1

Se hacen los siguientes supuestos:

- $E[\mathrm{E}]=0$.
- $E[\varepsilon_t\varepsilon_t']=\Sigma$, $t=1,2,\dots n$. Σ es una matriz definida positiva.
- $E[\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}']=0$, es decir no existe correlación serial entre diferentes periodos de tiempo.

Se estimará cada una de las ecuaciones aisladamente, por tanto, se comenzará con la primera ecuación, la cual puede escribirse como

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{y}_1}=\underset{n\times g}{\mathbf{Y}_1}\underset{g\times 1}{\Gamma}+\underset{n\times k}{\mathbf{X}}\underset{k\times 1}{\mathbf{B}}+\underset{n\times 1}{\mathbf{U}_{-1}}\underset{1\times 1}{\mathbf{R}}+\underset{n\times 1}{\mathbf{E}}, \tag{2.142}$$

que se puede generalizar para cualquier ecuación h como:

$$\mathbf{y}_h=\mathbf{Y}_h\gamma_h+\mathbf{X}_h\beta_h+\mathbf{u}_h, \tag{2.143}$$

$$\mathbf{u}_h=\mathbf{r}_{h,h}\mathbf{u}_{h_{-1}}+\varepsilon_h, \tag{2.144}$$

donde $\mathbf{y}_n$ es un vector de 1 x n valores, representa a la variable dependiente en la ecuación h. $\mathbf{Y}_h$ es una matriz de g-1 x n, que consta de g -1 variables endógenas (diferentes de la primera $\mathbf{y}_h$) incluidas en la ecuación h, $\mathbf{X}_h$ es una matriz de k x n que contiene a las k variables predeterminadas incluidas en la ecuación h, $\mathbf{u}_h$ y ε_h son vectores de 1 x n, que contienen a los términos de perturbación de la ecuación h del modelo, $r_{h,h}$ es el elemento en el renglón h y la columna h de **R**, γ_h y β_h son vectores de 1 x g y de 1 x k respectivamente, que corresponde a los coeficientes estructurales de las variables $\mathbf{Y}_h$ y $\mathbf{X}_h$ respectivamente.

Las ecuaciones (2.143) y (2.144) pueden ser escritas para algún valor r como

$$\mathbf{y}_h-r\mathbf{y}_{h_{-1}}=\gamma_h(\mathbf{Y}_h-r\mathbf{Y}_{h_{-1}})+\beta_h(\mathbf{X}_h-r\mathbf{X}_{h_{-1}})+(r_{h,h}-r)\mathbf{u}_{h_{-1}}+\varepsilon_h \tag{2.145}$$

En (2.145) ε_h se encuentra correlacionado con $\mathbf{Y}_h$, mientras que $\mathbf{u}_{h_{-1}}$ está correlacionado con $\mathbf{Y}_{h_{-1}}$ y con las demás variables endógenas rezagadas en $\mathbf{X}_h$ y $\mathbf{X}_{h_{-1}}$. La ecuación puede ser estimada consistentemente por el siguiente procedimiento el cual, prácticamente, es la estimación por MCO de dos etapas, pero empleando en la primera etapa estimadores vía variables instrumentales, en vez de MCO. Este procedimiento garantizará estimadores consistentes como se ilustrará a continuación.

1. Seleccione un conjunto de variables instrumentales que no estén correlacionadas con ε_h, y que al menos incluyan en dicho conjunto a las variables $y_{h_{-1}}, Y_{h_{-1}}, X_h, X_{h_{-1}}$. Efectúese la regresión de cada Y_h, es decir de todas las variables endógenas incluidas en la ecuación h como variables explicativas, y calcúlese los valores pronosticados para Y_h (denotado como $\hat{Y}_h$). Es decir, se estimará la forma reducida, empleando las restricciones teóricas a priori.

   Es conocido que, un estimador por variables instrumentales, para la ecuación j está dado por

$$\hat{\delta}_j = (W'_j Z_j)^{-1} W'_j y_j, \tag{2.146}$$

   donde:

$$Z_j = \left(Y_j \mid X_j\right),$$

$$\hat{\delta}_j = \begin{pmatrix} \gamma_j \\ -- \\ \beta_j \end{pmatrix} \begin{matrix} g_j - 1 \\ k_j \end{matrix},$$

   y W'_j es el conjunto de variables instrumentales, que en este caso debe incluir al menos $y_{h_{-1}}, Y_{h_{-1}}, X_h, X_{h_{-1}}$.

   Por tanto $W_j = \left[y_{h-1} | Y_{h-1} | X_h | X_{h-1}\right]$, será una matriz de n x ($g_h + k_h + k_h$).

   $j \neq h$, es decir este proceso se aplicará a las demás ecuaciones del modelo, donde aparezcan como variables endógenas, aquellas que en la ecuación h actúan como variables explicativas.

2. Para una r inicial se estima la ecuación (2.145) vía mínimos cuadrados ordinarios, empleando los valores pronosticados $\hat{Y}_h - rY_{h,t-1}$ en vez de $Y_h - rY_{h,t-1}$, y se calcula la suma cuadrada de los residuales de la regresión como

$$y_h - ry_{h_{-1}} = \gamma_h(Y_h - rY_{h_{-1}}) + \beta_h(X_h - rX_{h_{-1}}) + (r_{hh} - r)u_{h_{-1}} + \varepsilon_h. \tag{2.147}$$

   despejando para y_h,

$$y_h = \left[Y_h - rY_{h-1} \; X_h - rX_{h-1} \; u_{h-1} \right] \begin{bmatrix} \gamma_h \\ \beta_h \\ r_{hh} - r \end{bmatrix} + \varepsilon_h ,$$

cuyo estimador por mínimos cuadrados ordinarios, estará dado por

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_h \\ \hat{\beta}_h \\ \hat{r}_{hh} - r \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} Y_h - rY_{h-1} \\ X_h - rX_{h-1} \\ u_{h-1} \end{bmatrix} \left[Y_h - rY_{h-1} \vdots X_h - rX_{h-1} \vdots u_{h-1} \right] \right]^{-1} \left[Y_h - rY_{h-1} \vdots X_h - rX_{h-1} \vdots u_{h-1} \right] y_h \qquad (2.148)$$

Se repite el paso anterior para diferentes valores de r entre -1 y 1, o se emplea un procedimiento iterativo, de tal forma que se seleccione aquella r y sus correspondientes estimaciones de γ_h y β_h, tales que su suma cuadrada de residuales sea la mas pequeña de las observadas, puesto que obviamente dicha estimación será la que presente menor margen de error.

La consistencia de este procedimiento, se puede comprobar de la siguiente manera:

En la expresión (2.145) súmese al miembro izquierdo el vector $\mathbf{Y}_h$, de la misma manera súmese el vector $\hat{\mathbf{Y}}_h$ en el miembro derecho. Suponiendo que los estimadores obtenidos en le proceso sean consistentes, entonces cuando crezca el tamaño de la muestra se estará sumando lo mismo en ambos miembros de la igualdad, por tanto no se altera esta

$$y_h - ry_{h-1} + Y_h = \gamma_h (Y_h - rY_{h-1}) + \beta_h (X_h - rX_{h-1}) + (r_{h,h} - r) u_{h-1} + \varepsilon_h + \hat{Y}_h . \qquad (2.149)$$

Denótese ahora la diferencia entre el valor pronosticado y el valor observado como $\hat{V}_h = Y_h - \hat{Y}_h$. Por tanto (2.149) se puede escribir como

$$y_h - ry_{h-1} = \gamma_h (Y_h - rY_{h-1}) + \beta_h (X_h - rX_{h-1}) + (r_{h,h} - r) u_{h-1} + \varepsilon_h - \hat{V}_h . \qquad (2.150)$$

De la expresión (2.143) se sabe que $u_{h-1} = -y_{h-1} + Y_{h-1}\gamma_{h-1} + X_{h-1}\beta_{h-1}$ que, como se observa, es una combinación lineal de las variables $y_{h-1}, Y_{h-1}, X_{h-1}$ que fueron usadas como variables instrumentales en la primera etapa Por tanto, como es bien conocido, en una regresión el vector de residuales ($\hat{V}_h$) es ortogonal a los valores explicados por la regresión, puesto que, éstos se encuentran en el plano (u_{h-1}). Por los supuestos establecidos, u_{h-1} y ε_h no están correlacionadas. Parece lógico suponer que la suma cuadrada de residuales más pequeña ocurre en el punto donde $r_{hh} = r$, quedando como termino de error $\varepsilon_h - \hat{V}_h$, el cual no está correlacionado ni con $(Y_h - rY_{h-1})$, ni con $\beta_h (X_h - rX_{h-1})$.

Al desarrollar el cuadrado de los residuales de (2.150), dado por $(r_{hh} - r)\mathbf{u}_{h_{-1}} + \varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h$, se obtiene la expresión

$$\left[(r_{hh} - r)\mathbf{u}_{h_{-1}} + (\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)\right]^2 = \left[(r_{hh} - r)\mathbf{u}_{h_{-1}}\right]^2 - 2(\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)(r_{h,h} - r)\mathbf{u}_{h_{-1}} + \left[(\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)\right]^2, \quad (2.151)$$

la cual obviamente se reduce a $\left[(\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)\right]^2$ si $r_{h,h} = r$.

Sin embargo, este término no es necesariamente el más pequeño. Solamente lo será si los vectores $\hat{\mathbf{V}}_h$ y $\mathbf{u}_{h_1}$ son ortogonales entre si. Para comprobarlo se desarrolla.

$$\left[(\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)\right]^2 = \varepsilon_h^2 - 2\varepsilon_h\hat{\mathbf{V}}_h + \hat{\mathbf{V}}_h^2 = \varepsilon_h^2 - 2(\mathbf{u}_h - r_{hh}\mathbf{u}_{h_{-1}})\hat{\mathbf{V}}_h + \hat{\mathbf{V}}_h^2$$

$$\left[(\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h)\right]^2 = \varepsilon_h^2 - 2\mathbf{u}_h\hat{\mathbf{V}}_h + 2r_{h,h}\mathbf{u}_{h_{-1}}\hat{\mathbf{V}}_h + \hat{\mathbf{V}}_h^2,$$

el cual se reduce a

$$\varepsilon_h^2 - 2\mathbf{u}_h\hat{\mathbf{V}}_h + \hat{\mathbf{V}}_h^2, \text{ si y solo si } \hat{\mathbf{V}}_h \text{ y } \mathbf{u}_{h_1} \text{ son ortogonales.}$$

Ahora, es claro el por qué debe emplearse a las variables $\mathbf{y}_{h_{-1}}, \mathbf{Y}_{h_{-1}}, \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_{h_{-1}}$ como variables instrumentales en la primera etapa de la estimación: a menos que, $\hat{\mathbf{V}}_h$ y $\mathbf{u}_{h_1}$ sean ortogonales, lo que implica que su producto interno sea cero, la suma cuadrada mínima de los residuales no ocurre necesariamente en el punto donde $r_{hh} = r$

Otra manera de entender esto, es escribir (2.150) suponiendo que $r_{hh} = r$. Se obtiene

$$\mathbf{y}_h = r_{hh}\mathbf{y}_{h_{-1}} + \gamma_h\hat{\mathbf{Y}}_h - r_{h,h}\gamma_h\mathbf{Y}_{h_{-1}} + \beta_h\mathbf{X}_h - r_{hh}\beta_h\mathbf{X}_{h_{-1}}) + \varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h. \quad (2.152)$$

El método consiste entonces en seleccionar las estimaciones de r_{hh}, γ_h y β_h, tales que, la suma de los residuales de (2.152) sea mínima. El caso cuando $r_{hh} = 0$ corresponde a una estimación por mínimos cuadrados ordinarios de dos etapas.

El término de error $\varepsilon_h - \hat{\mathbf{V}}_h$ en (2.152) tiene las siguientes propiedades estadísticas:

1. Su valor esperado es cero puesto que, $\hat{\mathbf{V}}_h$ consiste de la diferencia entre el valor observado y el valor pronosticado por el modelo, tiene vector de medias cero
2. No está correlacionado con las variables $\mathbf{y}_{h_{-1}}, \hat{\mathbf{Y}}_h, \mathbf{Y}_{h_{-1}}, \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_{h_{-1}}$, puesto que $\mathbf{y}_{h_{-1}}, \mathbf{Y}_{h_{-1}}, \mathbf{X}_h, \mathbf{X}_{h_{-1}}$ fueron empleadas como variables instrumentales en la primera etapa de la estimación y por tanto $\hat{\mathbf{V}}_h$ es ortogonal a ellas.

La ecuación (2 152) puede entonces considerarse una ecuación no lineal con un término de error, cuyas propiedades estadísticas son suficientes para asegurar estimadores consistentes al minimizar la suma cuadrada de los residuales, con respecto a $r_{h,h}, \gamma_h$ y β_h, obteniéndose un sistema de ecuaciones, cuya solución para $r_{h,h}$ esta dada por

$$\hat{r}_{h,h} = \frac{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})(y_h + \hat{\gamma}_h \hat{Y}_h + \hat{\beta}_h X_h)'}{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})} . \quad (2.153)$$

Dado que $\hat{Y}_h = Y_h - \hat{V}_h$ y recordando que $\hat{V}_h$ es ortogonal a $y_{h_{-1}}, Y_{h_{-1}}, X_{h_{-1}}$ esta misma ecuación es equivalente a

$$\hat{r}_{h,h} = \frac{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})(y_h + \hat{\gamma}_h Y_h + \hat{\beta}_h X_h)'}{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h X_{h_{-1}})} . \quad (2.154)$$

Esta fórmula puede ser empleada para elaborar un procedimiento que calcule sucesivos valores de r en forma iterativa. Se toma como valores iniciales a una r dada y las correspondientes matrices de coeficientes estructurales γ_h y β_h obtenidas en el proceso de estimación. Dichas matrices se denotarán como $\gamma_h^{(0)}$ y $\beta_h^{(0)}$. Se calcula entonces

$$r^{(1)} = \frac{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h^{(0)} Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h^{(0)} X_{h_{-1}})(y_h + \hat{\gamma}_h^{(0)} Y_h + \hat{\beta}_h^{(0)} X_h)'}{(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h^{(0)} Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h^{(0)} X_{h_{-1}})(y_{h_{-1}} + \hat{\gamma}_h^{(0)} Y_{h_{-1}} + \hat{\beta}_h^{(0)} X_{h_{-1}})} \quad (2.155)$$

El valor $r^{(1)}$ se emplean entonces para obtener nuevas estimaciones $\gamma_h^{(1)}$ y $\beta_h^{(1)}$ de γ_h y β_h, las cuales se emplean para obtener $r^{(2)}$; y así se continua sucesivamente hasta obtener dos estimaciones consecutivas de r, que no varíen significativamente mas allá de cierto límite de tolerancia.[8]

Como se ha observado, en este método todas las variables predeterminadas y rezagadas del modelo se emplean como variables instrumentales. El único inconveniente de esta metodología es la gran cantidad de variables instrumentales empleadas, las cuales disminuyen los *grados de libertad de los estimadores*.[9] No obstante, con base a las consideraciones teóricas a priori en la formulación del modelo, el número de variables instrumentales puede reducirse sensiblemente.

---

[8] Por límite de tolerancia se entiende que la diferencia $r^{(i+1)} - r^{(i)} < \varepsilon$, donde ε es una constante que señala el grado de error tolerado.

[9] Por disminución de grados de libertad se entiende que al aumentar el número de variables involucradas en el modelo conlleva el aumento del número de parámetros a estimar, sin que aumente el tamaño de la muestra, lo cual implica una degradación en la calidad de los resultados obtenidos a partir de la muestra

2.5.8 Mínimos cuadrados de tres etapas.

Los métodos de estimación analizados hasta el momento han sido estimadores de una sola ecuación dentro de un sistema de ecuaciones simultáneas. En contraste, la aproximación por mínimos cuadrados de tres etapas (MC3E) es una técnica de información completa, donde se estiman todos los parámetros de las ecuaciones estructurales simultáneamente Como su nombre lo implica los estimadores por mínimos cuadrados de tres etapas pueden ser considerados como una extensión de los estimadores por mínimos cuadrados de dos etapas (MC2E) De hecho, las dos primeras etapas de la estimación por MC3E son aquellas que conforman la estimación vía mínimos cuadrados de dos etapas. La primera etapa es la estimación de todos los coeficientes de la forma reducida usando los mínimos cuadrados ordinarios, la segunda etapa es la estimación de todos los coeficientes estructurales aplicando los mínimos cuadrados de dos etapas a cada una de las ecuaciones estructurales.

La tercera etapa consiste en la estimación generalizada por mínimos cuadrados de todos los coeficientes estructurales del sistema, empleando una matriz de covarianzas para los términos de perturbación estocástica de las ecuaciones estructurales que es estimada con base a los residuales obtenidos en los mínimos cuadrados de dos etapas. El utilizar la información contenida en esta matriz de covarianzas tiene el efecto de aumentar la eficiencia. De hecho en términos de la bondad del estimador, los estimadores obtenidos vía mínimos cuadrados de tres etapas son una mejora a los obtenidos vía mínimos cuadrados de dos etapas, puesto que aunque ambos son consistentes, los mínimos cuadrados de tres etapas son asintóticamente más eficientes que los obtenidos por mínimos cuadrados de dos etapas Su ventaja radica en el uso de la información de la correlación de los términos de perturbación estocástica de las ecuaciones estructurales con el propósito de mejorar su eficiencia asintótica

Además, los mínimos cuadrados de tres etapas puede ser vistos como una extensión de los mínimos cuadrados generalizados a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde las variables endógenas explicativas están presentes en algunas o todas las ecuaciones. Si no existen variables endógenas explicativas en el sistema, es decir, si Γ es una matriz diagonal, el sistema se reduce a un aparentemente conjunto de ecuaciones no relacionadas.

Considérese nuevamente la ecuación estructural, para la h-ésima ecuación del sistema, la cual contiene g_h variables endógenas y k_h variables exógenas que puede expresarse como

$$\underset{}{y_h} = \left(\underset{n \times (g_h - 1)}{Y_h} \;|\; \underset{n \times k_h}{X_h} \right) \left(\frac{\gamma_h}{\beta_h} \right) + \underset{n \times 1}{\varepsilon_h}, \tag{2.156}$$

que es equivalente a

$$y_h = \underset{n \times (g_h - 1 + k_h)}{Z_h} \; \underset{(g_h - 1 + k_h) \times 1}{\partial_h} + \underset{n \times 1}{\varepsilon_h}, \tag{2.157}$$

donde $h = 1,2,..\,,g$, donde g es el número de ecuaciones en el modelo, $\mathbf{Z}_h$ agrupa los datos de las $g_h - 1 + k_h$ variables explicativas incluidas en la h-ésima ecuación sean endógenas o exógenas, δ_h agrupa todos los coeficientes a ser estimados en la ecuación .

Se asume que todas las ecuaciones están exactamente identificadas o sobreidentificadas, así como que todas las identidades han sido eliminadas.

Con el objeto de que sea posible la estimación simultánea de todas las ecuaciones del modelo se requiere agrupar las g ecuaciones de dicho modelo en un solo conjunto de matrices.

En principio, los g vectores de las variables endógenas dependientes se agruparán en un solo vector columna de gn x 1, que contenga a las g variables dependientes del modelo, con sus respectivas n observaciones, es decir,

$$\underset{gn \times 1}{y^{*}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_g \end{bmatrix}. \tag{2.158}$$

Así mismo, los términos de perturbación estocástica de cada ecuación son agrupados para formar un vector columna de gn x 1 elementos, denotado como

$$\underset{gn \times 1}{\varepsilon^{*}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_g \end{bmatrix}. \tag{2.159}$$

Análogamente, los g vectores de coeficientes son apilados para formar el vector columna δ^{*}, el cual contiene los k^{*} coeficientes a ser estimados,

$$\underset{k \times 1}{\delta^{*}} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_g \end{bmatrix}, \tag{2.160}$$

donde k^{*} está dado por

$$k^* = \sum_{h=1}^{g} (g_h - 1 + k_h). \tag{2.161}$$

Las variables explicativas también son agrupadas en una sola matriz

$$\underset{gn \times k^*}{Z^*} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \mid X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 \mid X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & Y_g \mid X_g \end{bmatrix}, \tag{2.162}$$

donde cada matriz a lo largo de la diagonal principal de la matriz Z^* contiene todos los datos de las variables explicativas en una sola ecuación.

En esta notación todas las g ecuaciones del sistema pueden ser escritas como

$$\underset{gn \times 1}{y^*} = \underset{gn \times k^*}{Z^*} \underset{k^* \times 1}{\delta^*} + \underset{gn \times 1}{\varepsilon^*}, \tag{2.163}$$

cuyo problema de estimación es el encontrar el vector de coeficientes δ^*, dados los datos agrupados en Z^* e y^*.

Los supuestos del modelo uniecuacional sobre los términos de perturbación también son válidos en el modelo multiecuacional, de manera que se pueden generalizar a esté como

$$E(\varepsilon^*) = 0. \tag{2.164}$$

Por su parte los supuestos de homosedasticidad y de ausencia de correlación serial pueden generalizarce al caso multiecuacional como:

$$Cov(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^* \varepsilon^{*\prime}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \dots & \sigma_{1g}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \dots & \sigma_{2g}I \\ \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{g1}I & \sigma_{g2}I & \dots & \sigma_{gg}I \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I, \tag{2.165}$$

donde $\Sigma \otimes I$ es el producto de Kroenecker de ambas matrices [10]

[10] El producto de Kronecker de una matriz con otra matriz consiste en multiplicar cada elemento de la matriz de la izquierda por toda la matriz del lado derecho, empleando la regla de multiplicación por un escalar.

$$\underset{m x n}{A} \otimes \underset{p x q}{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix}$$

Las propiedades básicas de este producto son:

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$
$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$
$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$
$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

En esta expresión, la matriz de covarianzas ha sido particionada en bloques, donde cada bloque es un elemento de la matriz Σ n x n veces la matriz identidad. En el caso de una ecuación simple (g =1), el producto de Kroenecker se reduce a $\sigma^2 I$, que en este caso es la matriz de covarianzas.

Cada bloque es una matriz diagonal, que refleja la independencia entre los términos de perturbación no contemporáneos. No obstante los términos de perturbación contemporáneos si pueden estar correlacionados, como lo reflejan los elementos de Σ.

Por ejemplo, la matriz $\sigma_{11}I$ representa la matriz de covarianzas para la primera ecuación. Los elementos iguales en la diagonal principal de este bloque representan la varianza constante de los términos de perturbación estocástica de la primera ecuación en cada observación, mientras que los elementos cero, fuera de la diagonal principal de esté bloque, representan el supuesto de ausencia de correlación serial entre los términos de perturbación de la primera ecuación en diferentes observaciones.

La matriz $\sigma_{12}I$ se refiere a la primera y segunda ecuaciones del sistema es, también, una matriz diagonal, donde los elementos iguales sobre la diagonal principal representan el supuesto de una covarianza constante sobre las observaciones contemporáneas para la primera y segunda ecuaciones, y donde los elementos cero fuera de la diagonal principal *representan el supuesto de que los términos de perturbación estocástica* de la *primera* y segunda ecuaciones no están correlacionados en diferentes observaciones.

Al modelo dado en (2.163) se le pueden asignar sus correspondientes estimadores. Por ejemplo, el estimador por mínimos cuadrados ordinarios estará dado por

$$\underset{MCO}{\hat{\delta}^{*}} = \left(Z^{*\prime}Z^{*}\right)^{-1} Z^{*\prime} y^{*}. \tag{2.166}$$

Este estimador agrupa en un solo vector a los estimadores vía mínimos cuadrados ordinarios para cada una de las h ecuaciones de la forma:

$$\underset{MCO}{\hat{\delta}^{*}_{h}} = \left(Z_h{}'Z_h\right)^{-1} Z_h{}' y_h \tag{2.167}$$

Así mismo, el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas para (2.163) puede escribirse como

$$\underset{MCO2E}{\hat{\delta}^{*}} = \left(\hat{Z}^{*\prime}\hat{Z}^{*}\right)^{-1} \hat{Z}^{*\prime} y^{*}, \tag{2.168}$$

que es la misma expresión para el estimador por mínimos cuadrados ordinarios, excepto por el hecho de que las variables explicativas son suplantadas por sus valores estimados $\hat{\mathbf{Z}}^{*}$, los cuales están dados por

$$\hat{\mathbf{Z}}^{*}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{Z}}_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \hat{\mathbf{Z}}_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\mathbf{Z}}_g\end{bmatrix}, \tag{2.169}$$

que es equivalente a

$$\hat{\mathbf{Z}}^{*}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{Y}}_1|\mathbf{X}_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \hat{\mathbf{Y}}_2|\mathbf{X}_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\mathbf{Y}}_g|\mathbf{X}_g\end{bmatrix}. \tag{2.170}$$

Esta matriz consta de los valores estimados para todas las variables endógenas explicativas y de los valores para todas las variables exógenas en cada una de las ecuaciones del modelo. Se sabe por (2.99) que

$$\hat{\mathbf{Z}}_1=\left\{\hat{\mathbf{Y}}_1 \mid \mathbf{X}_1\right\}. \tag{2.171}$$

Así mismo, se sabe por (2.83) que

$$\hat{\mathbf{Y}}_1=\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{Y}_1 \tag{2.172}$$

De manera análoga, $\mathbf{X}_1$ se puede denotar como

$$\mathbf{X}_1=\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\,\mathbf{X}_1. \tag{2.173}$$

De tal forma, que al substituir (2.172) y (2.173) en (2.171) se obtiene

$$\hat{\mathbf{Z}}_1=\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\left(\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{X}_1\right), \tag{2.174}$$

que coincide con los estimadores por MC2E para la ecuación h dados por

$$\hat{\mathbf{Z}}_h=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\,\mathbf{Z}_h \tag{2.175}$$

Por consiguiente, este resultado se puede extender a la matriz apilada $\hat{\mathbf{Z}}^{*}$ como.

$$\hat{\mathbf{Z}}^{*}=\mathbf{X}^{*}\left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\,\mathbf{Z}^{*}, \tag{2.176}$$

donde $\mathbf{X}^{*}$ está dada por

$$\underset{gn \times gk}{X^{*}} = \begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ . & \vdots & & \\ 0 & 0 & .. & X \end{bmatrix} = \underset{g \times g}{I} \otimes \underset{n \times k}{X} . \qquad (2.177)$$

Al substituir (2.176) en (2.168) el estimador por mínimos cuadrados de dos etapas en notación apilada estará dado por

$$\hat{\delta}^{*}_{MC2E} = \left[Z^{*\prime} X^{*} \left(X^{*\prime} X^{*}\right)^{-1} X^{*\prime} Z^{*}\right]^{-1} Z^{*\prime} X^{*} \left(X^{*\prime} X^{*}\right)^{-1} X^{*\prime} y^{*} . \qquad (2.178)$$

Por otra parte, empleando las propiedades del producto de Kroenecker este estimador puede escribirse como

$$\hat{\delta}^{*}_{MC2E} = \left[Z^{*\prime} I \otimes X \left(X'X\right)^{-1} X' Z^{*}\right]^{-1} Z^{*\prime} [I \otimes X \left(X'X\right)^{-1} X'] y^{*} \qquad (2.179)$$

Si bien, en base al sistema (2.163) se han asentado algebraicamente los estimadores dados por (2 168) y (2.179), su empleo no es recomendable. El estimador por mínimos cuadrados dado en (2.168) no toma en cuenta la distinción entre variables endógenas explicativas y variables exógenas incluidas, por lo que es sesgado e inconsistente.

Por su parte, el estimador por minimos cuadrados de dos etapas (MC2E), dado por (2.179), sí toma en cuenta esta distinción en cada ecuación, pero no toma en cuenta la posible correlación entre las variables endógenas explicativas de una ecuación y los términos de perturbación estocástica en las otras ecuaciones.

Esta correlación, entre los términos de perturbación en diferentes ecuaciones, conlleva la correlación de las variables endógenas dependientes con los términos de perturbación en otras ecuaciones. Dicha correlación está dada por los bloques de la matriz de covarianzas (2.165) que caen fuera de la diagonal principal. Por ejemplo, el bloque $\sigma_{12} I$ representa la correlación serial entre la primera y la segunda ecuación, que resulta en la correlación de la primera variable endógena y_1 con el término de perturbación contemporáneo de la segunda ecuación ε_2. Si los elementos fuera de la diagonal principal son nulos, significa que las variables endógenas y los términos de perturbación estocástica no están correlacionados. Sin embargo, si estos elementos no se anulan es posible aumentar la eficiencia asintótica de los estimadores por MC2E al tomar en cuenta explícitamente sus correlaciones. Esta mejora asintótica, es en sí lo que distingue a los estimadores por mínimos cuadrados de tres etapas

El estimador por mínimos cuadrados de tres etapas es de hecho una extensión del estimador por mínimos cuadrados generalizados, analizado en el capítulo anterior, pero aplicándose para todo el sistema y tomando en cuenta la matriz de covarianzas.

En este momento, es conveniente demostrar que los estimadores por MC2E para una ecuación h, son equivalentes a estimar por mínimos cuadrados generalizados (MCG) la misma ecuación h, empleando todas las variables exógenas como variables instrumentales, es decir, premultiplicando a dicha ecuación h por sus variables exógenas.

Defínase a la ecuación h como

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{Z}_h \, \partial_h + \varepsilon_h . \qquad \textbf{(2.180)}$$

Al emplear las variables exógenas de esta ecuación como variables instrumentales se obtiene

$$\mathbf{X}' \, \mathbf{y}_h = \mathbf{X}' \, \mathbf{Z}_h \, \partial_h + \mathbf{X}' \, \varepsilon_h . \qquad \textbf{(2.181)}$$

Se supone que $\mathbf{X}'$ y ε_h podrían estar correlacionados, de tal forma que dicha correlación está dada por

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}' \, \varepsilon_h) = \mathbf{X}' \mathrm{Cov}(\varepsilon_h) \mathbf{X} \; = \sigma^2 \, \mathbf{X}' \, \mathbf{X} . \qquad \textbf{(2.182)}$$

A esta ecuación se le aplica el estimador por MCG, el cual se define como

$$\hat{\partial}_h = \left[\mathbf{X}_h ' \Omega^{-1} \mathbf{X}_h \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \Omega^{-1} \mathbf{y}_h , \qquad \textbf{(2.183)}$$

donde se substituirá: $\mathbf{y}_h = \mathbf{X}' \, \mathbf{y}_h$, $\mathbf{X}_h = \mathbf{X}' \, \mathbf{Z}_h$ y $\Omega = \sigma^2 \, \mathbf{X}' \, \mathbf{X}$.

De tal forma, el estimador por MCG queda

$$\hat{\partial}_h = \left[\mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h ' \left[\sigma^2 \mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{Z}_h \right]^{-1} \mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h \left[\sigma^2 \mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{y}_h .$$

Efectuando operaciones algebraicas de inversión de matrices se tiene:

$$\hat{\partial}_h = \left[\mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h ' \tfrac{1}{\sigma^2} \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{Z}_h \right]^{-1} \mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h \tfrac{1}{\sigma^2} \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{y}_h ,$$

$$\hat{\partial}_h = \sigma^2 \left[\mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h ' \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{Z}_h \right]^{-1} \mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h \tfrac{1}{\sigma^2} \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{y}_h ,$$

$$\hat{\partial}_h = \left[\mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h ' \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{Z}_h \right]^{-1} \mathbf{Z}_h ' \mathbf{X}_h \left[\mathbf{X}'\mathbf{X} \right]^{-1} \mathbf{X}_h ' \mathbf{y}_h , \qquad \textbf{(2.184)}$$

el cuál es exactamente equivalente al estimador por MC2E dado en (2.178).

Es, ahora, válido proceder de la misma forma en el modelo dado en (2.163). Se utilizarán todas las variables exógenas como instrumentales en cada ecuación del sistema, lo que implica que se premultiplica a (2.163) por $\mathbf{X}^{*}{}'$, que su vez esta definida como

$$\underset{gn \times gk}{X^{*\prime}} = \begin{bmatrix} X' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X' & \dots & 0 \\ \vdots & . & & \\ 0 & 0 & \dots & X' \end{bmatrix}. \tag{2.185}$$

De donde se obtiene el sistema

$$X^{*\prime} y^{*} = X^{*\prime} Z^{*} \delta^{*} + X^{*\prime} \varepsilon^{*}. \tag{2.187}$$

El estimador resultante de aplicar mínimos cuadrados generalizados (MCG) a (2.187) es de hecho el estimador por mínimos cuadrados de tres etapas (MC3E):

$$\underset{MC3E}{\hat{\delta}^{*}} = \left[Z' X^{*} \left[Cov(X^{*\prime}\varepsilon^{*})\right]^{-1} X^{*\prime} Z^{*}\right]^{-1} \cdot Z' X^{*} \left[Cov(X^{*\prime}\varepsilon^{*})\right]^{-1} X^{*\prime} y^{*}, \tag{2.188}$$

cuya matriz de covarianza, esta dada por

$$Cov(X^{*\prime}\varepsilon^{*}) = X^{*\prime}\, Cov(\varepsilon^{*}) X^{*} = X^{*\prime}\, (\Sigma \otimes I)\, X^{*}, \tag{2.189}$$

donde Σ esta dada por (2.165).

Por consiguiente, el estimador vía mínimos cuadrados tres etapas (MC3E) puede ser escrito como

$$\underset{MC3E}{\hat{\delta}^{*}} = \left[Z' X^{*} \left[X^{*\prime}(\Sigma \otimes I) X^{*}\right]^{-1} X^{*\prime} Z^{*}\right]^{-1} \cdot Z' X^{*} \left[X^{*\prime}(\Sigma \otimes I) X^{*}\right]^{-1} X^{*\prime} y^{*}. \tag{2.190}$$

El estimador resultante es tanto consistente como asintóticamente más eficiente que el estimador obtenido a través de MC2E, puesto que toma en cuenta la covarianza en Σ. Si todas las funciones estuvieran exactamente identificadas o si la matriz de covarianza fuera diagonal, entonces, el estimador de mínimos cuadrados de tres etapas se reduce al estimador por MC2E dado por (2.178) y (2.179).

Todos los componentes del estimador de tres etapas diferentes de la matriz de covarianza son obtenidos directamente de los datos. Sin embargo, por lo general Σ se desconoce, y debe de ser estimada. Esta es, en sí, la razón por la cual se conoce a este método como de tres etapas El resultado de las primeras dos etapas proveé la información necesaria sobre los residuales, para poder estimar la matriz de covarianza. En particular, Σ es estimada como

$$\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{hh'}), \tag{2.191}$$

donde

$$\hat{\sigma}_{hh'} = \frac{1}{n}\, \hat{\varepsilon}'_{h}\, \hat{\varepsilon}_{h'} = \frac{1}{n} \left(y_{h} - Z_{h}\hat{\delta}_{h}\right)' \left(y_{h'} - Z_{h'}\hat{\delta}_{h'}\right),\ h,h' = 1, 2, \dots, g. \tag{2.192}$$

Se asume que $\hat{\Sigma}$ será una matriz no singular, con objeto de poder plantear el estimador por MC3E en una forma más conveniente de calcular, lo que requiere la inversa de $\hat{\Sigma}$.

$\hat{\delta}_{\cdot}$ es el vector de los estimadores obtenidos a través de MC2E, es decir

$$\hat{\delta}_h = \hat{\delta}_{h_{MC2E}} . \qquad (2.193)$$

De tal forma que las dos primeras etapas son desarrolladas sólo con el propósito de obtener la estimación de Σ.

Otra forma de presentar el estimador por mínimos cuadrados de tres etapas, es empleando nuevamente las propiedades del producto de Kroenecker, de manera que se puede plantear:

$$X^{*} = I \otimes X , \qquad (2.194)$$

$$Cov(X^{*\prime}\varepsilon^{*}) = X^{*\prime}\, Cov(\varepsilon^{*})X^{*} = X^{*\prime}(\Sigma \otimes I)\, X^{*} . \qquad (2.195)$$

De tal forma que substituyendo (2.194) en (2.195) resulta

$$Cov(X^{*\prime}\varepsilon^{*}) = (I \otimes X')(\Sigma \otimes I)(I \otimes X) = \Sigma \otimes (X'X). \qquad (2.196)$$

Si se substituye este resultado en el estimador por mínimos cuadrados de tres etapas en (2.190) y se cambia a Σ por su estimador $\hat{\Sigma}$ en (2.191) se obtiene

$$\hat{\delta}^{*}_{MC3E} = \left[Z^{*\prime}\, [\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)]^{-1} X' Z^{*}\right]^{-1} \cdot Z^{*\prime}[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X']\, y^{*} \qquad (2.197)$$

En resumen la estimación de tres etapas abarca:

1. *Estimar la forma reducida.*
2. *Estimación de cada ecuación estructural vía mínimos cuadrados ordinarios de dos etapas.*
3. *Obtener estimadores de todo el sistema vía MCG, después de haber usado todas las variables exógenas como variables instrumentales, y donde la matriz de covarianza es estimada a través de los residuales de los estimadores de mínimos cuadrados de dos etapas.*

Por otra parte, el estimador por MC3E será consistente si y solo si

$$p\lim \hat{\delta}^{*}_{MC3E} = \delta^{*} . \qquad (2.198)$$

Así como, asintóticamente más eficiente que los MC2E si la matriz resultante de la diferencia entre sus respectivas matrices de covarianza es una matriz negativa semidefinida.

$$A = \lim\, Cov(\hat{\delta}^{*}_{MC3E}) - Cov(\hat{\delta}^{*}_{MC2E}) . \qquad (2.199)$$

Es decir, su forma cuadrática, dada por $x'Ax$, es siempre ≤ 0 para cualquier valor x y que $x'Ax = 0$, para alguna $x \neq 0$.

Se sabe que los procedimientos de estimación de información limitada, hasta ahora vistos, pueden interpretarse como un caso particular del estimador por variables instrumentales. Esta misma interpretación puede extenderse a los estimadores de información completa, con el objeto de demostrar la consistencia y superior eficiencia del estimador por mínimos cuadrados de tres etapas.

Partiendo del modelo en notación apilada

$$\underset{gn \times 1}{y^*} = \underset{gn \times k^*}{Z^*} \underset{k \times 1}{\delta^*} + \underset{gn \times 1}{\varepsilon^*} \tag{2.200}$$

Al cual, por analogía con los estimadores por variables instrumentales de información limitada, se le puede definir un estimador general por variables instrumentales de δ^* como

$$\hat{\delta}^*_{VI} = \hat{\delta}^*_{VI}(W^*) = (W^{*\prime}Z^*)^{-1} W^{*\prime} y^*. \tag{2.201}$$

Se observa claramente que el estimador por mínimos cuadrados ordinarios (2.166) es un caso particular de las variables instrumentales cuando W^* es simplemente el conjunto de todas las variables explicativas Z^*.

De manera análoga, el estimador vía mínimos cuadrados de dos etapas (2.168) es equivalente al estimador de variables instrumentales

$$\hat{\delta}^*_{MCO2E} = \hat{\delta}^*_{VI}[I \otimes X(X'X)^{-1}X']Z^*, \tag{2.202}$$

donde W^* es el conjunto de estimadores de todas las variables explicativas $\hat{Z}$, dado por $W^* = \hat{Z} = X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Z^* = [I \otimes X(X'X)^{-1}X']Z^*$.

Por lo que concierne al estimador vía mínimos cuadrados de tres etapas es equivalente al estimador de variables instrumentales

$$\hat{\delta}^*_{MCO3E} = \hat{\delta}^*_{VI}[[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X']Z^*], \tag{2.203}$$

donde $W^* = [\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X']Z^*$

Una vez que se ha mostrado que los métodos de estimación de dos y tres etapas son un caso particular del estimador general de variables instrumentales, se puede demostrar la consistencia de ambos estimadores, si se demuestra la consistencia del estimador por variables instrumentales.

Se empieza por substituir en $\hat{\delta}^*_{VI} = (W^{*\prime}Z^*)^{-1} W^{*\prime} y^*$, el valor de $y^* = Z^* \delta^* + \varepsilon^*$, obteniéndose

$$\hat{\delta}^*_{VI} = (W^{*\prime}Z^*)^{-1} W^{*\prime}(Z^* \delta^* + \varepsilon^*) = \delta^* + (W^{*\prime}Z^*)^{-1} W^{*\prime}\varepsilon^* \tag{2.204}$$

Para probar que el estimador es consistente, no se puede emplear el operador esperanza que es lineal, puesto que, el estimador obtenido no es lineal. Por lo tanto, se define al estimador en una forma alterna en la que se pueda tomar el límite de probabilidad directamente

$$\hat{\delta}^*_{VI} = \delta^* + (\tfrac{1}{n} W^{*\prime}Z^*)^{-1} \tfrac{1}{n} W^{*\prime}\varepsilon^*. \tag{2.205}$$

De manera, que al calcular el limite de probabilidad

$$p\lim \hat{\delta}^*_{VI} = p\lim \delta^* + p\lim \frac{1}{n}(W^{*\prime}Z^*)^{-1}\, p\lim \frac{1}{n} W^{*\prime}\varepsilon^*. \tag{2.206}$$

Si se retoma el supuesto de que las variables instrumentales no están correlacionadas asintóticamente con los términos de perturbación estocástica se tiene

$$p\lim \frac{1}{n} W^{*\prime}\varepsilon^* = 0 \tag{2.207}$$

Así mismo, se asume que las mismas variables instrumentales si están correlacionadas asintóticamente con las Z^*'s de modo que

$$p\lim \frac{1}{n}(W^{*\prime}Z^*)^{-1} = Q^*, \tag{2.208}$$

donde se asume que Q^* será una matriz no singular.

Por consiguiente,

$$p\lim \hat{\delta}^*_{VI} = p\lim \delta^* + 0\,(Q^*) = \delta^*, \tag{2.209}$$

quedando demostrado que una estimador por variables instrumentales es consistente, siempre y cuando se cumplan los supuestos (2.207) y (2.208). Tal es el caso de los estimadores por MC2E y los de MC3E. Si estos supuestos no se cumplen como con el estimador por MCO el estimador será inconsistente.

Con objeto de detectar cual estimador es más eficiente se calculará la matriz de covarianza asintótica del estimador por variables instrumentales.

Por la definición de la matriz de covarianza, se sabe que

$$Cov(\hat{\partial}^*_{VI}) = [\,(\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^*)(\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^*)'\,]. \tag{2.210}$$

Una forma alterna de (2.210), que permite calcular el límite de probabilidad es

$$\lim\ Cov(\hat{\partial}^*_{vi}) = \frac{1}{n}\ p\lim\ [n(\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^*)(\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^*)']. \tag{2.211}$$

Al substituir el valor de $\hat{\delta}^*_{VI}$, dado por (2.204) en la diferencia $\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^*$ de (2.211) se obtiene

$$\hat{\delta}^*_{VI} - \delta^* = \delta^* + (W^{*\prime}Z^*)^{-1}\ W^{*\prime}\varepsilon^* - \delta^* = (W^{*\prime}Z^*)^{-1}\ W^{*\prime}\varepsilon^*$$

$$\lim\ Cov(\hat{\partial}^*_{vi}) = \frac{1}{n}\ p\lim\ \left\{n\left[(W^{*\prime}Z^*)^{-1}W^{*\prime}\varepsilon^*\right]\left[(W^{*\prime}Z^*)^{-1}\ W^{*\prime}\varepsilon^*\right]'\right\}$$

$$\lim\ Cov(\hat{\partial}^*_{vi}) = \frac{1}{n}\ p\lim\ \left\{\left(\frac{1}{n}W^{*\prime}Z^*\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}W^{*\prime}\varepsilon^*\varepsilon^{*\prime}W^*\right)\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}W^*\right)^{-1}\right\}$$

Así mismo, se sabe que $E(\varepsilon^*\varepsilon^{*\prime}) = \Sigma \otimes I$. Por tanto la matriz de covarianza asintótica para cualquier estimador obtenido por variables instrumentales está dada por

$$\lim\ Cov(\hat{\partial}^*_{vi}) = \frac{1}{n}\ p\lim\ \left\{\left(\frac{1}{n}W^{*\prime}Z^*\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}W^{*\prime}(\Sigma\otimes I)W^*\right)\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}W^*\right)^{-1}\right\}, \tag{2.212}$$

donde W^* denota la matriz de variables instrumentales.

Si se substituye W^* por la matriz de variables instrumentales empleada en la estimación vía MC2E se obtiene

$$\lim\ Cov\left(\hat{\delta}^*_{MC2E}\right) = \frac{1}{n}\ p\lim\ \left\{\left(\frac{1}{n}((I\otimes X(X'X)^{-1}X')Z^*)'Z^*\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}W^{*\prime}(\Sigma\otimes I)W^*\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}W^*\right)^{-1}\right\},$$

que al emplear las propiedades de transposición de matrices[11] se simplifica a

$$\lim\ Cov\left(\hat{\delta}^*_{MC2E}\right) = \frac{1}{n}\ p\lim\ \left\{\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}(I\otimes X(X'X)^{-1}X')Z^*\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}(\Sigma\otimes X(X'X)^{-1}X')Z^*\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n}Z^{*\prime}(I\otimes X(X'X)^{-1}X')Z^*\right)^{-1}\right\} \tag{2.213}$$

De manera análoga, si se substituye en (2.212) a W^* por la matriz de variables instrumentales empleada en la estimación vía MC3E se obtiene

[11] $(AB)' = B'A$
$A'B = B'A$

$$\lim Cov\left(\hat{\delta}^{*}_{MC3E}\right)=\frac{1}{n}\, p\lim\left\{\left(\frac{1}{n}Z^{*}(\Sigma^{-1}\otimes X(X'X)^{-1}X')Z^{*}\right)^{-1}\right\}, \quad (2.214)$$

donde la matriz Σ puede ser estimada a través de (2.191), empleando el estimador por MC3E.

Al substituir (2.213) y (2.214) en la prueba de eficiencia dada por (2.199), se obtiene una matriz, cuya forma cuadrática es definida negativa, corroborando que el estimador vía mínimos cuadrados de tres etapas es más eficiente que el de mínimos cuadrados de dos etapas.

2.6 Resumen y conclusiones

El propósito de este capítulo ha sido presentar los modelos de ecuaciones simultáneas y así proveer el marco teórico necesario para la construcción, identificación y estimación del modelo macroeconómico que se desarrolla en el siguiente capítulo, el cual, como se verá, es un modelo multiecuacional, aunque algunas de sus ecuaciones pudieran tratarse como modelos uniecuacionales, en el caso de que sus variables predeterminadas no tengan relaciones de interdependencia con otras variables endógenas del modelo.

La característica esencial de los modelos multiecuacionales es que la variable dependiente de una ecuación puede aparecer como variable explicativa en otra ecuación del sistema. Por tal razón, dicha variable dependiente explicativa se convierte en estocástica, estando por lo general correlacionada con el término de perturbación estocástica de la ecuación en la cual aparece como variable explicativa. En tal situación los métodos de estimación tradicionales no pueden aplicarse puesto que los estimadores obtenidos son inconsistentes, es decir, no convergen a su verdadero valor aunque crezca el tamaño de la muestra.

Antes de proceder a la estimación del modelo, por alguna vía alterna, es necesario solucionar el problema de la identificación, el cual consiste en comprobar si existe una única manera de calcular numéricamente los coeficientes estructurales del modelo con base a los coeficientes estimados de la forma reducida. En otras palabras, significa que el mismo conjunto de datos puede ser compatible con diferentes funciones estructurales.

Para establecer si una ecuación está o no identificada se emplean las condiciones de rango y orden de identificación. La primera de estas, es solo una condición necesaria, pero no necesaria y suficiente como la segunda.

Suponiendo que una ecuación está identificada existen varios métodos para obtener sus coeficientes estructurales. Estos métodos pueden ser de dos clases: de información limitada o de información completa. En los primeros se estima cada ecuación aisladamente, teniendo en cuenta cualquier restricción que aparezca en dicha ecuación, sin preocuparse de las restricciones impuestas sobre las restantes ecuaciones del modelo. Dentro de está categoría se encuentran los MCI y los MC2E. Los estimadores obtenidos son consistentes, aunque no satisfacen las propiedades de insesgamiento y de varianza mínima.

Por otra parte, en el caso de que una ecuación estructural contenga variables endógenas rezagadas, éstas estarán correlacionadas con los valores actuales de las variables endógenas, obteniéndose estimadores sesgados e inconsistentes. En tal situación se ha presentado un método de información limitada, el cual soluciona iterativamente el problema de estimación.

Por lo que toca a los métodos de información completa, se estiman todas las ecuaciones simultáneamente, teniendo en cuenta todas las restricciones en tales ecuaciones. En esta categoría se encuentra el estimador vía MC3E. Generalmente si el modelo está correctamente especificado y las variables bien medidas los estimadores obtenidos serán de mínima varianza, es decir, más eficientes que los obtenidos por alguna otra aproximación. Sin embargo, los resultados obtenidos son extremadamente sensibles a errores de especificación o de medición, puesto que al estimarse simultáneamente un error en una variable o en una ecuación se propagará al sistema completo. En contraste, en los métodos de información limitada un error de especificación queda confinado únicamente a la ecuación mal especificada, mientras que una variable mal medida sólo trasciende a las ecuaciones que involucren a dicha variable. Más aún, los métodos de información completa al estimar todos los parámetros simultáneamente requieren que el tamaño de la muestra sea mayor que en los métodos de información limitada.

En el otro extremo, si la correlación entre los términos de perturbación estocástica en diferentes ecuaciones es alta y no existe la posibilidad de errores de medición, o de especificación y el tamaño de la muestra no es un problema seria recomendable emplear MC3E.

De lo antes mencionado, puede concluirse que los estimadores vía MC2E, son los más apropiados para el modelo multiecuacional que se desarrolla en el proyecto, dado que son consistentes, reducen la sensibilidad a un error de especificación o de medición en las variables y no requieren el uso de muestras tan grandes, como los métodos de información completa. Además, en el caso de que se presenten variables endógenas rezagadas como variables explicativas los métodos de información completa no contemplan cómo atacar tales modelos, mientras que con el método de información limitada iterativo, presentado en el apartado 2.5.7 se pueden obtener estimaciones consistentes.

FALTA PAGINA

No. 126

Capitulo III

Análisis, diseño y construcción del modelo

3.1 Introducción

En este capítulo se desarrollará un modelo multiecuacional de los principales indicadores macroeconómicos de la economía Mexicana. En principio se partirá de un conjunto de hipótesis e identidades básicas, construidas conforme a los postulados de las principales escuelas del pensamiento económico, que expliquen las relaciones estructurales entre los principales indicadores macroeconómicos. Estas formulaciones teóricas posteriormente se irán volviendo progresivamente mas complejas y específicas, conforme se avance en el análisis del pensamiento macroeconómico, así como al enriquecerlas con base a la teoría matemática hasta obtener expresiones algebraicas finales, conocidas como ecuaciones de comportamiento e identidades.

Las expresiones algebraicas darán forma al modelo. Cada una de estas expresiones será identificada, es decir, se comprobará que se puedan obtener estimaciones de sus parámetros estructurales, y así proceder a la estimación de tales parámetros, los cuales cuantifican la relación o respuesta de una variable con respecto a otra, así como proveen una forma de medir, probar y/o refutar estadísticamente las relaciones sugeridas por la teoría con los hechos reales. La estimación se llevará a cabo con el más conveniente de los métodos presentados en el capítulo anterior, de acuerdo a la naturaleza de la expresión y/o sus características

3.2 El análisis macroeconómico

El análisis macroeconómico estudia el comportamiento global de la economía y de las políticas que influyen en el consumo, la inversión, la oferta monetaria y la balanza de pagos, los determinantes de las variaciones de los salarios y precios, las políticas monetarias y fiscales, la cantidad de dinero, el presupuesto del sector público, los tipos de interés y la deuda pública. Pretende reducir los complicados detalles de una economía nacional a cuestiones esenciales que resulten manejables. Estas cuestiones esenciales consisten en las interacciones de los mercados de bienes, de trabajo, y de los activos de la economía.[1]

La macroeconomía trata de dar una explicación teórica, así como una solución práctica a tres cuestiones fundamentales:

- El *desempleo*, problema persistente ante el cual algunos economistas piensan que no puede hacerse nada más allá de crear programas de subsidio para desempleados, mientras otros consideran que es el estado al que toca implementar políticas fiscales, como disminuir las tasas impositivas y/o elevando el gasto público, que disminuyan el desempleo. Se puede decir que los altos índices de desempleo representan un problema social y político que deriva en el deterioro de la calidad de vida, produciendo angustia y en ocasiones daños irreparables a los individuos de la comunidad. En contraparte cuando todos los factores de la producción se están empleando y todo aquel que desea trabajar encuentra trabajo en un período de tiempo razonable se dice que la economía se encuentran en el *pleno empleo.*[2] Dicho status es difícil de cuantificar, por lo cual se ha adoptado como definición del pleno empleo al promedio de las tasas de desocupación observadas, durante períodos de crecimiento y estabilidad económica.
- La *inflación*, un proceso de aumento de precios constantes, que deviene en un poder de compra decreciente de cierta suma nominal de dinero. También se le puede medir como la tasa porcentual de incremento del nivel de precios durante un período de tiempo determinado. Se busca mantenerla en niveles bajos, dado que frecuentemente da pie a redistribuciones indeseables del ingreso real, ya que aquellos cuyo ingreso monetario aumenta a menor tasa que la inflación perderán, tal es el caso de los pensionados y muchas veces de los asalariados. Así mismo, inhibe el ahorro, ya que el valor real de cierta suma depositada puede disminuir con el tiempo si los precios suben a mayor ritmo que las tasas de interés. Por otra parte una tasa de inflación alta provoca que los productos internos se vuelvan mas caros para los compradores extranjeros, de manera que una inflación alta conlleva una reducción de competitividad en los mercados mundiales, con la consecuente reducción de las exportaciones y de la renta nacional. Sin embargo, el controlar la inflación requiere implementar políticas restrictivas de la

[1] Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, Macroeconomía, 5a. edición, Mcgraw-Hill / Interamericana, México D.F., Febrero 1993, pp. 3-4.

[2] Bannock Graham, Baxter R & Rees Ray, Diccionario de Economía, 2a. edición, Trillas, México D.F., Noviembre 1990, p. 274

demanda, que pueden tener altos costos sociales como el incremento del desempleo, o la disminución de la producción.[3]

- La *producción*, aquí el problema radica en identificar sus determinantes para entonces poder incrementar su tasa de crecimiento. Una tasa de crecimiento elevada, significa que la producción de bienes y servicios está creciendo, permitiendo que aumente la calidad de vida. Así mismo, una tasa de crecimiento alta lleva implícita una mayor oferta de plazas laborales.[4] Es pues en si un objetivo y una esperanza para cualquier nación

Existen dos conceptos fundamentales para analizar el comportamiento de la producción, el desempleo y la inflación son *la demanda agregada* y *la oferta agregada.*

- La demanda agregada es la demanda total de bienes y servicios de una economía. Depende obviamente del nivel de precios y del poder adquisitivo. Puede estimularse a través de la política fiscal y monetaria (tasa de interés).[5]
- La oferta agregada describe la producción que las empresas están dispuestas a ofrecer a diferentes niveles de costos; se ve afectada por la política fiscal y los costos.[6]

Es decir, para promover el crecimiento económico se puede actuar de dos maneras: promoviendo la demanda de productos, o bien abaratando los costos de producción de los productos, para aumentar la oferta. Si no existiesen limitaciones en la producción un incremento de la demanda puede basarse en el aumento de los salarios y del gasto público, aumentando la producción y el empleo. Sin embargo, si la economía se encuentra cerca del pleno empleo (es decir ya no se puede producir más, puesto que ya no existen recursos humanos y materiales para hacerlo) se reflejará primordialmente en un aumento en los precios (inflación). Es aquí, cuando la oferta puede solucionar el panorama pues al facilitarse la producción y la inversión a través de estímulos fiscales como la reducción de impuestos o de políticas monetarias que bajen los intereses se abaratan los costos de producción.

La demanda insuficiente significa desempleo, capacidad ociosa y producción perdida. Por su parte la demanda excesiva significa elevación general de los precios y de los ingresos monetarios que no producen ninguna ganancia, ni beneficio en términos de producción o

[3]Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit.*, p. 205
[4]Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit.*, pp. 13-15.
[5]Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit.*, p. 124.
[6]Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit.*, pp. 27-28.

crecimiento de la renta real.[7] La demanda debe de crecer de tal forma que se mantenga el pleno empleo y la utilización plena de la capacidad a precios estables. La economía no funcionará satisfactoriamente a menos que se estén alcanzando continuamente niveles más elevados de producción, renta y empleo.

En los primeras ecuaciones estructurales que se propongan nos concentraremos en la oferta agregada como determinante del nivel de producción, considerándose al nivel de precios (costos) como dado y constante.

Si la economía está funcionando por debajo de su nivel potencial, es decir existen recursos sin utilizar, entonces se pueden emplear políticas que fomenten la demanda. Por el contrario si la economía esta funcionando cerca del pleno empleo, cualquier intento de expandir la producción presionara al alza de precios, en vez de aumentar la producción.

Ante estas cuestiones fundamentales se han desarrollado diferentes teorías económicas, muchas veces con puntos de vista comunes, otras veces enfrentados. Siendo las mas representativas e importantes:

- Los *Monetaristas*: Quienes suponen que los mercados funcionan mejor si no se interviene en ellos.
- Los *Keynesianos*: Proponen la intervención activa del gobierno, la cual puede mejorar notablemente el funcionamiento de la economía
- Los *Clásicos*: Suponen que los individuos actúan racionalmente, buscando su propio interés en mercados que se ajustan rápidamente a condiciones cambiantes, por lo tanto la intervención del gobierno sólo empeora las cosas.[8]

Para alcanzar niveles deseados de inflación, crecimiento y desempleo los gestores de la política económica tienen a su disposición dos importantes herramientas que potencialmente influyen en la economía:

- La *política monetaria* controlada por el banco central del país. Sus instrumentos son las variaciones de las tasa de interés y la oferta monetaria (la cantidad de dinero en circulación).
- La *política fiscal* bajo el control del poder ejecutivo o la hacienda. Sus instrumentos son las tasas impositivas (impuestos) y el gasto público.[9]

[7] *Ibidem* pp. 29-31.
[8] *Ibidem* pp. 32-34
[9] *Ibidem* pp 31

Las políticas de estabilización son políticas monetarias y fiscales ideadas para moderar las fluctuaciones de la economía (tasas de crecimiento, inflación y desempleo). Sin embargo, sí se observa el comportamiento histórico de éstas tasas se podría concluir que no han tenido mucho éxito, debido a la incertidumbre respecto de su funcionamiento.

Para los monetaristas la cantidad de dinero es el determinante fundamental del nivel de precios y de la actividad económica, puesto que el crecimiento excesivo del dinero es el responsable de la inflación, así como su crecimiento inestable es responsable de las fluctuaciones en la economía. Tienden naturalmente a defender una política de crecimiento reducido y constante de la oferta monetaria; es decir establecer una norma de crecimiento del dinero.

Los Keynesianos y/o activistas consideran que no hay una relación estrecha entre el crecimiento del dinero y la inflación y que el crecimiento monetario es solo uno mas de los determinantes que afectan a la renta. Sostienen que con habilidad y cuidado se deben emplear las políticas fiscales y monetarias de tal forma que se pueda controlar la economía y promover el crecimiento económico.

Los monetaristas tienden a fomentar un sector público reducido y están en contra de los déficits fiscales y en consecuencia de la deuda pública. Son partidarios de disminuir los impuestos durante los períodos de recesión y de recortar el gasto público durante las expansiones. Los activistas por el contrario defienden un papel activo del sector público, son partidarios de aumentar el gasto público y los subsidios como instrumento de crecimiento.

Por tanto, en los apartados subsecuentes se presentará una visión general de las relaciones estructurales entre las variables más significativas de una macroeconomía, así como de los problemas que está afronta, desde el punto de vista de las escuelas económicas citadas anteriormente.

3.3 La contabilidad nacional e identidades básicas

El modelo a desarrollar se basará en información histórica de todas las variables dentro del análisis, por lo que todas las variables serán dinámicas, es decir, representarán observaciones a lo largo de diferentes períodos de tiempo. Se denotará cada período de tiempo con el subíndice t. De esta forma todas las variables que se manejen estarán subindicadas por t.

Un modelo macroeconómico sencillo incluye al menos las siguientes variables: *renta nacional*, *consumo*, e *inversión*, las cuales se denotaran por Y_t, C_t y K_t respectivamente.[10]

La renta nacional mide las variaciones que tienen lugar en la producción física de la economía entre dos periodos de tiempo, se valora a precios de mercado, incluye los ingresos que reciben residentes en el país por inversiones en el exterior, menos el ingreso generado en el interior que corresponde a extranjeros residentes en el exterior. Así mismo, excluye las transacciones de mercancías ya existentes y a la llamada economía subterránea (comercio informal, actividades delictivas, etc.). También se conoce como *Producto nacional bruto*, o por sus siglas *PNB*.[11]

El consumo se define como el gasto total de una economía en bienes y servicios, que se utilizan dentro de un período específico. Mientras que la inversión es el gasto dedicado a incrementar o mantener el stock de capital: fábricas, maquinaria, oficinas, etc. utilizados en el proceso de producción.[12]

A su vez la renta nacional Y se destina para dos fines el consumo y el ahorro. De manera que la inversión estará dada por:

$$K_t = Y_t - C_t = S_t, \tag{3.1}$$

donde S_t = Ahorro, lo cual implica que la inversión es igual al ahorro.[13]

Al incorporar el sector público en el modelo, se debe de tomar en cuenta aquellas variables que maneja cualquier gobierno: sus ingresos (impuestos) y sus egresos (gasto y transferencias). De tal manera la identidad macroeconómica básica para la renta nacional estará dada por

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + TR_t - T_t, \tag{3.2}$$

[10] *Ibidem* p. 60
[11] Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit*, p. 290.
[12] Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit.*, pp. 55-56
[13] *Ibidem* p. 62.

donde G_t es el gasto del gobierno en bienes y servicios, T_t representa los impuestos, y TR_t representa las transferencias y subsidios al sector privado, pagos que se reciben sin haber hecho una actividad económica.

Parte de la renta nacional se dedica al pago de impuestos al estado, así como el sector privado recibe transferencias o subsidios de éste. Por tanto, la renta disponible para otras actividades, como el consumo y la inversión, consiste en la diferencia entre la renta y los subsidios menos los impuestos, es decir

$$YD_t = Y_t + TR_t - T_t, \tag{3.3}$$

donde YD_t es la renta disponible.[14]

Puesto que parte de la producción nacional se exporta, y parte del consumo interno es de bienes extranjeros se debe de tomar en cuenta al comercio exterior de nuestra economía, es decir al balance de exportaciones menos importaciones, dado por

$$XN_t = X_t - Q_t, \tag{3.4}$$

donde XN_t es el balance comercial, X_t las exportaciones y Q_t las importaciones.

Al incluir el comercio con el exterior la identidad macroeconómica básica deviene en

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + XN_t. \tag{3.5}$$

Puede afirmarse ahora que la renta disponible se consume o se invierte, es decir

$$YD_t = S_t + C_t$$

Por la expresión (3) es valido establecer la identidad

$$S_t + C_t = YD_t = Y_t + TR_t - T_t,$$

de la cual puede concluirse que

$$C_t = YD_t - S_t = \mathrm{Y} + TR_t - T_t - S_t, \tag{3.6}$$

Si se Substituye (6) en (5) se obtiene

$$S_t - K_t = G_t + TR_t - T_t + XN_t,$$

donde $G_t + TR_t - T_t$ representa el déficit o superávit del sector público, lo cual indica que el exceso de ahorro $S_t - K_t$ del sector privado es igual al déficit público mas el superávit comercial. Es decir, aquel sector que gaste mas de lo que recibe como renta, tiene que endeudarse con los otros para pagar el exceso de gasto.

[14] *Ibidem*

La identidad anterior hace fehaciente las relaciones entre el exceso de ahorro privado sobre la inversión (S - K), el presupuesto del gobierno ($G + TR - T$) y el sector exterior (XN). Por ejemplo, piénsese en el sector privado el cual tiene tres formas de emplear su ahorro: reinvertir, prestar a otros particulares para que estos inviertan o bien prestarle al gobierno para que financie su exceso de gasto. Si se supusiera que todo el ahorro se empleará en la inversión (K) del sector privado, es decir $S = I$, entonces el déficit del gobierno se reflejaría en un déficit comercial con el exterior.

Así mismo, el exceso de gasto o consumo sobre la renta se financia vendiendo activos o a través de préstamos (endeudamiento).

Con los elementos antes mencionados es momento de establecer la identidad macroeconómica básica como

$$C_t + K_t + G_t + XN_t = Y_t = YD_t + (T_t - TR_t) = C_t + S_t + (T_t - TR_t), \tag{3.7}$$

donde C_t es el consumo, K_t es la inversión, G_t es el gasto público, XN_t es el balance comercial, Y_t es la renta nacional, YD_t representa la renta disponible, T_t a los ingresos del estado vía impuestos, TR_t a las transferencias del estado y S_t es el ahorro.[15]

3.4 La renta y el gasto público

La interacción entre la producción y el gasto es en ambos sentidos, ya que el gasto determina la producción y la renta, y éstas variables a su vez determinan al gasto.

Por su parte, la demanda de bienes de consumo, no es autónoma, aumenta con la renta. Un país con una renta alta, tiene un alto nivel de consumo, de manera que

$$C_t = \alpha\, Y_t, \tag{3.8}$$

donde α indica el coeficiente de propensión marginal a consumir.[16]

De lo anterior, el ahorro estará dado por la parte de la renta que no se consume, es decir,

$$S_t = (1-\alpha)\, Y_t. \tag{3.9}$$

Las compras gubernamentales de bienes y servicios, así como los impuestos y las transferencias del sector público a los particulares afectan la relación entre la producción y la renta disponible, de la que dispone el sector privado (Recuérdese la identidad 3). De manera que, al introducir el sector público en el modelo para la función del consumo (8), se

---

[15] *Ibidem* p 69
[16] *Ibidem* p 84

obtiene que el consumo depende ahora de la renta disponible, después de pagar impuestos al gobierno y recibir las transferencias del mismo Tal relación puede expresarse como:

$$C_t = \alpha(Y_t + TR_t - T_t)\,. \tag{3.10}$$

De lo anterior se puede construir una estructura sencilla para la recaudación de impuestos, definirla simplemente como una fracción β de la *renta nacional*,

$$T_t = \beta Y_t\,. \tag{3.11}$$

Por otra parte, los ingresos del gobierno provienen de dos fuentes principales: impuestos a los particulares y el cobro por los servicios y productos que ofrece tanto en el país como en el extranjero. A partir de ello

$$I_t = T_t + V_t\,, \tag{3.12}$$

donde I_t representa los ingresos totales del gobierno, T_t denota la recaudación por impuestos y V_t representa los ingresos por ventas de productos y servicios al público.

En este momento surge uno de los pilares de la actividad macroeconómica: la *política fiscal*, la cual consiste de las decisiones y acciones que toma el sector público, con respecto al nivel de sus transferencias (gasto y subsidios) y a la estructura impositiva (recaudación de impuestos) que afectarán crucialmente a las demás variables macroeconómicas como la renta, el consumo y la inflación.[17]

Bajo estos supuestos existen tres posibles cambios o políticas de las variables fiscales:

- Variar las compras gubernamentales, es decir del gasto.
- Variación de las transferencias.
- Variación de los impuestos sobre la renta y consumo.

Aumentar las compras del sector público varía el gasto autónomo, puesto que aumentará la demanda agregada y en consecuencia la renta. En contraparte, el impuesto sobre la renta actúa como un estabilizador que reduce la cuantía en la que varía la producción en respuesta a una variación de la demanda autónoma.

El aumento del gasto público y la reducción de impuestos pueden ser una muy buena alternativa contra la recesión, mientras que reducir el gasto y aumentar impuestos detienen una expansión económica.

En este momento se puede definir al balance público como la diferencia entre los ingresos y los gastos del gobierno, es decir

[17] *Ibidem* p 98.

$$D_t = I_t - TR_t - G_t, \qquad (3.13)$$

donde D_t es el balance o déficit público.[18]

Cabe señalar que para aumentar el gasto y no caer en un déficit el gobierno debe aumentar sus ingresos, desplazando en muchas ocasiones la inversión y consumo privado, como se verá mas adelante y en detalle. Por otra parte, el endeudamiento de la administración pública dificulta a las empresas privadas la obtención de créditos para la inversión, pues para obtener prestamos el estado se ve obligado a ofrecer altas tasas de interés, las cuales encarecen el costo de los créditos en el mercado bancario.

El aumento del gasto no significa necesariamente que se caiga en un déficit, ya que al aumentar la renta se provoca que suba la recaudación en cierta proporción. Por lo tanto, se debe de buscar la combinación de políticas de gasto y recaudación de impuestos que promuevan el crecimiento de la renta sin caer en un déficit fiscal. El superávit público es en sí un indicador de la economía nacional, si se le tiene positivo, significa que se esta dando un incremento de la actividad económica.

3.5 Dinero, interés, renta y el Banco Nacional

Hasta ahora se había considerado al gasto autónomo y a la política fiscal como únicos determinantes de la renta. Los conceptos desarrollados hasta el momento no toman en cuenta la cantidad de dinero, ni las tasas de interés, ni mucho menos la actuación del Banco Nacional. Sin embargo, el dinero desempeña un papel fundamental en la determinación de la renta. Asimismo, las tasas de interés son un determinante importante del gasto y la política monetaria es tan importante como la política fiscal.

En este apartado se incorporan el *dinero* y la *política monetaria* en el modelo desarrollado, así como se estudia la interacción entre el *mercado de bienes* y el *mercado de activos*. También se analizarán los factores que determinan las tasas de interés, y cuáles son sus efectos sobre la renta

3.5.1 Dinero

El dinero se puede definir como todo aquello que se acepta generalmente como medio de intercambio o de pago, manteniendo su valor a lo largo del tiempo. Actualmente se compone de efectivo: billetes y monedas (pasivos del gobierno), así como de depósitos

[18] *Ibídem* p. 108

bancarios que pueden utilizarse directamente, instantáneamente y sin restricciones, así como de algunos fondos no tan líquidos (bonos y acciones).[19]

La *oferta monetaria* (dinero en circulación) consta de dos componentes: el efectivo y los depósitos bancarios A partir de ello

$$M_t = E_t + D_t, \tag{3.14}$$

donde M_t es el dinero u oferta monetaria, E_t es el efectivo y D_t denota los depósitos bancarios.

Para los Keynesianos el público necesita dinero (demanda) por tres razones, para:

- Realizar pagos (transacciones).
- Hacer frente a contingencias imprevistas, precaución,.
- Especular.

A los individuos les interesa el tener dinero por el poder de compra de éste, es decir, el valor de sus saldos monetarios expresado en términos de los bienes que pueden comprar con esos saldos. *Por consiguiente, la demanda de dinero en términos nominales aumenta* proporcionalmente a la elevación del nivel de precios cuando las variables reales como la tasa de interés, la renta real y la riqueza real permanecen constantes. En caso de que éstas variables reales si varíen, la demanda de dinero se ajustará a los cambios de la renta y las tasas de interés. Por principio la demanda de dinero en términos reales, responde negativamente al tipo de interés, que al subir disminuye la demanda de dinero, puesto que se vuelve caro el pedir prestado.[20]

Por lo que respecta a la renta, la demanda de dinero aumenta cuando se eleva el nivel de renta real. Sin embargo, si sube la demanda de dinero y no se aumenta la cantidad de dinero en circulación (oferta monetaria), entonces subirán las tasas de interés desalentándose la inversión y el crecimiento mismo de la renta en períodos subsecuentes.[21] Con el objeto de ejemplificar, supóngase una política fiscal expansiva que aumenta gasto y la renta, en consecuencia aumentará la demanda de dinero del público para poder consumir. En caso de que no aumente la cantidad de dinero en circulación subirán las tasas de interés, a consecuencia de la falta de dinero circulante. Al subir los intereses se desalentará el

[19] Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit*, p. 137
[20] Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit*, p. 146.
[21] *Ibidem* pp 148-158

crecimiento de la renta, puesto que será mas caro conseguir recursos para la inversión, que como se recordará es uno de los componentes de la renta.

Existe la opinión de que el gobierno no debe utilizar la política fiscal (aumento del gasto) para influir la demanda debido a que, como se ha expuesto, el incremento de su gasto es a expensas de la inversión privada.

Aquí se manifiesta la importancia de la oferta monetaria en la política económica, puesto que esta se debe ajustar de tal forma que se fomente el crecimiento de la renta sin aumentar las tasas de interés.

La cantidad de dinero en una economía esta determinada por el Banco Nacional o la Reserva, mediante la base monetaria (cantidad de dinero en circulación). Sin embargo, el Banco Nacional no siempre controla la base monetaria directamente, pero influye en la cantidad de dinero por medio de los siguientes mecanismos:

- Las operaciones de mercado abierto, donde la reserva compra bonos a cambio de dinero, aumentando así la cantidad de dinero. El objetivo de la operación es modificar las ofertas relativas de dinero y bonos, haciendo que varíe la rentabilidad o interés de los activos. Si compra bonos, reduce su oferta y de esta forma incrementan su precio o rebaja su rendimiento. Al ser más bajo, el público prefiere mantener el dinero.
- En una expansión monetaria el incremento de la oferta monetaria crea un exceso de oferta de dinero al que el público se ajusta reduciendo su dinero mediante la compra de otros activos. En este proceso los precios de los activos aumentan y sus rendimientos disminuyen.
- Cuando financia un déficit público, endeudándose la Secretaria de Hacienda o el Tesoro con la reserva, aumenta la base monetaria.
- Al comprar divisas (moneda extranjera) aumenta le cantidad de dinero en circulación. [22]

Con fundamento en los puntos expuestos anteriormente se puede concluir que la determinación de la renta nacional puede presentarse como un sistema donde interactúan dos componentes:

- Los mercados de activos financieros (la cantidad de dinero y las tasas de interés, es decir el funcionamiento de la política monetaria).
- Los mercados de bienes (la renta, la inversión y el gasto).

Dicho sistema se presenta gráficamente en la figura (3.1)

[22] *Ibidem* pp 159-160.

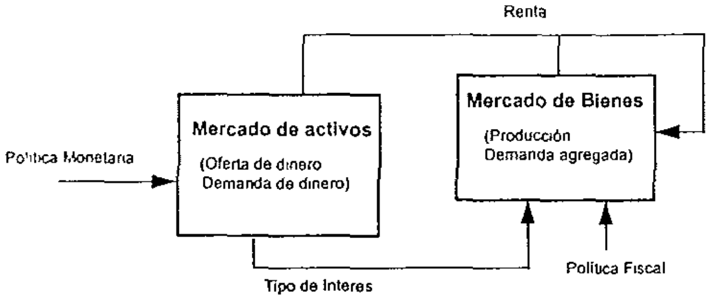

Figura 3.1 Interacción entre el mercado de activos financieros y el mercado de bienes

3.5.2 El mercado de bienes, la inversión y el tipo de interés.

Como se observa en la figura (3.1) en el mercado de bienes la producción de bienes (renta) está relacionada con la *inversión*, suponiendo que la inversión es un determinante de la renta

La inversión, como se ha mencionado anteriormente, se puede expresar como una variable dependiente de la tasa interés

$$K_t = \overline{K}_t - b\, i_t, \tag{3.15}$$

donde i_t denota la tasa de interés, b es el coeficiente de respuesta de la inversión al tipo de interés, tal que $b > 0$, $\overline{K}_t$ es el gasto de inversión autónoma, independiente tanto de la renta como del tipo de interés. Puede considerarse como la inversión necesaria para mantener los niveles actuales de producción.

La pendiente de la función indica que tan sensible es a la tasa de interés a la inversión. Si la inversión es poco sensible al tipo de interés, la recta será casi vertical, mientras que si es muy sensible será casi horizontal.

Se observa que la inversión es menor cuanto más elevada es la tasa de interés. Para ejemplificar, supóngase el gasto de una empresa en la infraestructura necesaria para su funcionamiento (maquinaria, edificios, personal, etc.). Si la empresa no dispone de capital se ve obligada a solicitar un préstamo, pero si el interés es alto se verá obligada a realizar el mínimo de inversiones, o a reducir su margen de utilidad.

Si en la identidad de la renta (1) se substituyen la definicion de inversión, dada en (15), así como la funciones de consumo y recaudación de impuestos, dadas en (10) y (11) respectivamente, se tiene

$$Y_t = C_t + K_t + \overline{G}_t = \alpha(Y_t + TR_t - T_t) + \overline{K}_t - bi_t + \overline{G}_t$$

$$Y_t = \alpha \overline{TR_t} + \alpha(1-\beta)Y_t + \overline{K_t} - bi_t + \overline{G_t}, \tag{3.16}$$

que es equivalente a

$$Y_t = \overline{A_t} + \overline{\alpha Y_t} - bi_t, \tag{3.17}$$

donde $\overline{A_t} = \alpha\overline{TR_t} + \overline{K_t} + \overline{G_t}$ es la parte de la demanda agregada independiente de la renta y el interés, $\overline{A_t} - bi_t$ es la ordenada al origen, b es el coeficiente de respuesta al tipo de interés e i_t es la tasa de interés que traslada la curva hacia arriba o hacia abajo.

Por tanto, se hace fehaciente el papel de las tasas de interés como un importante determinante de la renta nacional.

3.5.3 Los mercados de activos y la interacción con el mercado de bienes

Se ha comentado que si aumenta la demanda de dinero a consecuencia del crecimiento del consumo y de la renta, sin aumentarse la cantidad de dinero, entonces subirán las tasas de interés. Sin embargo, no se ha analizado explícitamente el papel de la cantidad de dinero en la economía, ni muchos menos los componentes del mercado de dinero o de activos.

En principio, se define al mercado de activos como aquel donde se intercambia dinero, bonos, acciones, bienes y otro tipo de riquezas.

Los activos financieros se componen del dinero (monedas y billetes) y de cualquier otro activo generador de intereses o derechos negociables sobre rentas futuras (bonos, acciones, promesas de pago, etc.). La demanda monetaria es la demanda del publico por saldos monetarios, con los cuales puede comprar o adquirir bienes.

Suponiendo que la demanda y oferta de saldos reales siempre están en equilibrio o tienden a ajustarse casi instantáneamente, se tendrá

$$L_t = M_t, \tag{3.18}$$

donde M_t es la cantidad de saldos monetarios ofrecida por el gobierno y L_t es la demanda de saldos monetarios.

La demanda de saldos reales depende del nivel de renta, puesto que el público mantiene dinero para financiar su gasto o consumo. El costo de tener dinero es lo que se deja de ganar (interés) por tener dinero en efectivo en vez de otros activos. Así, la demanda de saldos reales aumenta con el nivel de renta y disminuye con el tipo de interés,

$$L_t = Y_t^{\gamma} \frac{1}{i_t^{h}}, \tag{3.19}$$

donde L_t es la demanda de saldos monetarios, i_t es la tasa de interés o costo de capital nominal e Y_t es la renta nacional.

Si la tasa de interés es alta el público estará dispuesto a no demandar dinero, no manejará mas dinero del necesario. Así mismo, un incremento del tipo de interés, reduce la demanda de saldos reales para que se mantenga igual a la oferta fija la renta tiene que crecer.

En base al supuesto de igualdad de la demanda y la oferta monetaria, dada por la relación (18), se observa que la expresión anterior (19) se puede expresar en forma tal que la tasa de interés dependa del nivel de producción (renta) y de la cantidad de dinero en el mercado (oferta monetaria), es decir

$$i_t = Y_t^{\gamma} \frac{1}{M_t^{\delta}}, \tag{3.20}$$

donde M_t es la oferta monetaria, i_t es la tasa de interés o costo de capital nominal e Y_t es la renta nacional.

El interés crece si hay exceso de demanda de dinero y disminuye si hay exceso de oferta monetaria. Un exceso de demanda de dinero implica un exceso de oferta de otros activos (bonos, acciones). Al adquirir más dinero el público vende bonos y hace que bajen sus precios o que aumenten sus rendimientos.

Si la oferta monetaria es fija, un incremento del nivel de renta eleva la cantidad demandada de dinero, por lo que se debe acompañar de una alza al tipo de interés, tal que reduzca la demanda de dinero y se mantenga el equilibrio. De este supuesto, se concluye que la cantidad de dinero en la economía no puede ser una constante, sino una variable que se ajuste de tal manera que se mantenga o alcance cierta tasa de interés que promueva el crecimiento de la renta.

De hecho, las expresiones (19) y (20) son equivalentes solo que en la primera se establece como variable dependiente a la cantidad de dinero en circulación, mientras que en la segunda la variable dependiente es la tasa de interés.

Como se observa en las mencionadas expresiones el Banco Nacional como administrador de la oferta monetaria no puede fijar simultáneamente el tipo de interés y la cantidad de dinero en los niveles que elija como objetivos. Si por ejemplo, se desea una tasa anual del 8% se tiene que ofrecer la cantidad de dinero que se demande a esa tasa de interés. El modelo indicará en que proporción aumentar la oferta monetaria de tal forma que se alcancen las tasas de interés que promuevan el crecimiento de la renta. A esta combinación de decisiones (oferta monetaria, intereses) se le conoce como *política monetaria.*

Desde el punto de vista operativo es mucho más fácil controlar la tasa de interés que la oferta monetaria. Por consiguiente, en este modelo se propone que la oferta monetaria no debe de ser un objetivo sino un medio. Si la oferta monetaria sube o baja será para sostener o alcanzar ciertas tasas de interés que promuevan el crecimiento y la inversión productiva no la especulativa, ni los llamados capitales golondrinos, teniendo cuidado con no aumentar excesivamente la oferta monetaria puesto que puede arrastrar a un proceso inflacionario, el cual encarece los productos nacionales, cayendo las exportaciones y el consumo interno, con el consecuente desplome de la renta. Por lo antes mencionado, se empleará la expresión (20), donde la tasa de interés depende de la oferta monetaria y de la renta nacional, como medio de gestión de políticas monetarias.

Cabe apuntar que las tasas de interés también dependen del tipo de cambio, puesto que una devaluación de la moneda nacional aleja a los inversionistas, es necesario aumentar las tasas de interés cuando se presenta una devaluación o depreciación de la moneda. Por consiguiente la expresión (3.20) queda

$$i_t = Y_t^{\gamma} \frac{1}{M_t^{\delta}} tc_t^{\alpha}, \tag{3.20}$$

donde M_t es la oferta monetaria, i_t es la tasa de interés, Y_t es la renta nacional y tc_t es el tipo de cambio

Por otra parte, las tasas de interés también están en función de los costos de operación del banco, de su relación reserva-depósitos y de su eficiencia. En México la banca dista mucho de ser eficiente, de ahí que para recuperar sus altos costos de operación los bancos aumenten las tasas de interés por encima. Sin embargo, en este modelo no se tomarán en cuenta tales factores, puesto que escapan a los objetivos de la investigación.

En este momento cabe señalar algunas consideraciones muy importantes:

Al crecer la renta aumenta la demanda de dinero del público. Si la oferta de dinero no aumenta entonces subirán las tasas de interés para que la demanda de dinero sea igual a la oferta con la consecuente caída de la inversión. Sin embargo, si la oferta monetaria es variable entonces se le puede manejar de tal forma que se alcancen tasas de interés promotoras de la inversión. De donde, se observa que el aumento de la oferta monetaria provoca una disminución del interés, seguida del consecuente aumento en la inversión y la renta

Existe un retardo entre el momento en que cambia la política económica y el momento en que se manifiesta en la economía. Por ejemplo, la política monetaria no afecta a la demanda agregada con mucha rapidez, puesto que la inversión está planeada con anterioridad. Entonces, se pueden cometer errores de cálculo pues al tratar de estabilizar las cosas se empeora la situación.

Tanto las tasas de interés y la oferta monetaria, si bien son objetivos macroeconómicos, solo lo son intermedios y no son más que un medio para alcanzar el control de los objetivos fundamentales de este modelo el crecimiento, el empleo y el control del nivel de precios.

Cualquier gobierno puede manejar la oferta monetaria para alcanzar ciertos objetivos como las tasas de interés, siempre y cuando exista un superávit público. En el caso contrario, es decir, con un déficit público la oferta se vuelve dependiente del déficit, como se verá mas adelante, perdiendo el gobierno la capacidad de controlar tanto la oferta monetaria como a las tasas de interés.

Puede resultar atractivo bajar las tasas de interés radicalmente, sin embargo, puede provocar una salida de capitales masiva que llevaría a una devaluación del peso, así como a un aumento de los insumos extranjeros provocando presión al alza de los precios. Por lo tanto esta baja radical de las tasas de interés debe de ir acompañada de una economía que sea capaz de ser autosuficiente para así resistir presión inflacionista.

Por tanto, puede concluirse que una reducción de las tasas de interés debe llevarse a cabo gradualmente y cuantificando sus efectos sobre las demás variables macroeconómicas, de lo contrario cualquier acción puede ser sumamente aventurada y peligrosa. Sin embargo, es aquí cuando el modelo econométrico se vuelve una herramienta imprescindible puesto que permitirá cuantificar estas consecuencias y así seleccionar la política monetaria que devengue mejores resultados. En virtud de que el proceso debe de ser gradual, los resultados obtenidos se retroalimentan al modelo para en el siguiente período emplearlos y volver a encontrar la política óptima para ese momento.

Más adelante se analizará la relación de la oferta monetaria con el nivel de precios, con el propósito de poder controlar o cuantificar el proceso inflacionario.

3.6 La política fiscal, el desplazamiento y la combinación de políticas económicas.

Como se ha mencionado anteriormente al subir el gasto público la producción aumenta inicialmente, pero si no va acompañada de un aumento en la oferta monetaria subirán las tasas de interés, dificultándose la inversión privada, puesto que el crédito se hace más caro.

Puede presentarse el escenario de que al aumentar el gasto público no aumente la renta nacional, a consecuencia del alza de las tasas de interés. En contra parte, el escenario deseable seria que el aumento del gasto público, acompañado de una oferta monetaria acomodante aumentará la renta nacional, sin disparar las tasas de interés.

Para los monetaristas el gasto público no produce ningún efecto en la renta y solo sube las tasas de interés, desplazando la inversión privada (*efecto desplazamiento* pleno), por lo que recomiendan que no se aumente el gasto público ya que solo se logrará castigar a la inversión privada, a la que consideran más productiva que al estado.[23]

Para los keynesianos el gasto público fomenta el crecimiento de la renta, mientras que respecto al papel del dinero suponen que no existe ninguna relación de este con las tasas de interés.

Bajo estas consideraciones parece ser que la teoría macroeconómica se enfrenta al problema de tapar un hoyo mientras se hace otro: puesto que al aumentar el gasto crece aparentemente la renta, pero al mismo tiempo aumentan las tasas de interés, reduciéndose la inversión privada que obviamente reduce la renta. La cuestión se convierte entonces en decidir que combinación de gasto, oferta monetaria y tasa de interés será tal que maximice el crecimiento de la renta. Esta cuestión no puede ser resuelta por el análisis macroeconómico teórico por sí mismo. Es aquí donde la teoría econométrica empezará a aportar alternativas de solución, en virtud de que permitirá cuantificar la respuesta de una variable respecto a otras, para así determinar cual de las dos posturas teóricas se acerca mas a la realidad, o bien implementar una combinación de políticas monetarias y fiscales.

De lo anterior, como gestores de la política económica se pueden realizar tres tipos de políticas.

- Expansión fiscal con renta e interés mas alto.
- Expansión monetaria con interés mas bajo, inversión alta.

[23] *Ibidem* pp 163-164.

- Expansión fiscal acompañada de una expansión monetaria acomodante, es decir, una posición mixta, de tal forma que los intereses no suban y se mantenga la inversión, evitando el efecto desplazamiento.

Dichas políticas se resumen en el siguiente cuadro:

Tabla 3.1 Efectos de las políticas económicas en la renta y las tasas de interés.

	Renta	Interés
Expansión Monetaria	+	-
Expansión Fiscal	+	+

Puede efectuarse una política monetaria acomodante. Por ejemplo en el transcurso de una expansión fiscal, se incrementa la oferta monetaria, para evitar que suba el interés.

Hasta el momento la política a seguir por el gobierno puede parecer fácil; aumentar el gasto público y posteriormente la oferta monetaria, para evitar el efecto desplazamiento, reduciéndose simplemente el modelo econométrico a cuantificar los parámetros estructurales y así fijar la cantidad de oferta monetaria que anulará el efecto desplazamiento. Sin embargo, se está ignorando el papel del índice de precios y su estrecha relación con la oferta monetaria. Más adelante se analizarán los efectos de la oferta monetaria en el proceso inflacionario ya que la política de acomodación monetaria puede impulsar la inflación.

Es de notar, que en una economía con recursos desempleados si bien el aumento del gasto público subirá los intereses, no habrá efecto desplazamiento pues la renta aumentara a consecuencia del incremento de la actividad productiva en áreas que se encontraban ociosas

Una situación relacionada con el gasto público se presenta cuando el gobierno tiene déficit presupuestario y se endeuda con el sector privado para pagar sus excesos. Para conseguir estos recursos ofrece altos intereses al público y a la banca en la compra de bonos ó deuda pública: obviamente esto provoca que los intereses suban en el mercado, dado que, los prestamistas pondrán tasas a los deudores que les garanticen ingresos similares a los que obtendrían si le prestarán al gobierno. Esta situación es semejante al efecto desplazamiento, puesto que induce a la alza a las tasas de interés reduciéndose entonces el gasto privado y la inversión. Por lo tanto, debe evaluarse por medio de un modelo que tan conveniente es aumentar el gasto público provocando un déficit fiscal, el cual castigará a la inversión. Parece ser sumamente recomendable que el gasto público no rebase a los ingresos públicos, ya que la oferta monetaria se volvería entonces una variable dependiente del déficit y no existiría la libertad de moverla de acuerdo a objetivos fijados para las tasas de interés

¿ Cómo llevar a cabo la expansión?, ¿ Mediante un descenso de los tipos de interés y un incremento de la inversión?, ¿ A través de una reducción impositiva y el consecuente incremento del gasto privado?, ¿ Aumentando el tamaño del sector público?.

La solución a estas cuestiones fundamentales es en sí el objetivo de este proyecto: *seleccionar de la gama de políticas existentes,* aquellas que consigan simultáneamente llevar a la economía al pleno empleo y al crecimiento.

3.7 Las Relaciones Internacionales

México es una economía abierta, es decir, mantiene intercambios comerciales con otras naciones.[24] Por tanto, la economía nacional se encuentra ligada al resto del mundo a través del comercio (bienes y servicios) y de las finanzas internacionales.

El comercio surge del hecho de que una parte de la producción de un país se exporta a otros países, mientras que algunos bienes de consumo interno o bienes de capital son elaborados en el exterior.

Así mismo, como se analizará más adelante las relaciones comerciales dan lugar a una influencia muy determinante sobre el nivel de precios de nuestra economía, debido a que el aumento de bienes o materia primas que se compran en el exterior provoca que suba el nivel de precios interno. Este aumento puede deberse a una devaluación de la moneda local.

También existen fuertes relaciones internacionales en el área de las finanzas. Por principio los inversionistas pueden poseer activos en cualquier país del mundo, luego entonces, los gestores de las carteras de valores tendrán una visión mundial, por lo que moverán sus capitales hacia donde se presente los mayores rendimientos. Estos movimientos internacionales crean una relación entre los mercados de activos del interior y del extranjero, influyendo en la determinación de la renta, los tipos de cambio y la capacidad de la política monetaria nacional para afectar las tasas de interés.[25]

[24] *Ibidem* pp 201-202

[25] *Ibidem* pp. 202-203.

3.7.1 La Balanza de pagos y los tipos de cambio.

La Balanza de pagos es el registro de las transacciones de un país con el resto del mundo. Existen dos cuentas principales en la balanza de pagos: la corriente y la de capital.[26]

La *Cuenta Corriente* registra el intercambio de bienes y servicios, así como las transferencias. Los servicios influyen: fletes y pago de intereses, servicios, renta neta de inversiones (intereses y beneficios de los activos en el exterior), menos la renta generada por los activos de extranjeros. La *balanza comercial* implica solamente al comercio de bienes, es un componente de la cuenta corriente.[27]

$$CC_t = BC_t + BS_t, \tag{3.21}$$

donde CC_t es la cuenta corriente, BC_t es la balanza comercial y BS_t es el intercambio de servicios y transferencias

La *Cuenta de Capital* por su parte registra las compras y ventas de activos como las acciones, bonos y tierra.[28]

Al elaborar la balanza de pagos, cualquier transacción que de lugar a un pago al exterior (importaciones, depósitos en el exterior, etc.) va al déficit, mientras que cualquier pago a compatriotas va al superávit. A partir de lo anterior, la balanza de pagos puede definirse

$$BP_t = CC_t + FC_t, \tag{3.22}$$

donde BP_t es la balanza de pagos, CC_t es la cuenta corriente, y FC_t es la cuenta de capital.

Cuando se efectúa un pago al exterior resulta obvio que los residentes en el extranjero requieren que se les pague en sus propias monedas, por lo tanto, se plantea la cuestión de la forma en que se deben hacer los pagos.

Si la balanza de pagos nacional tiene déficit, se tiene que pagar a los extranjeros una cantidad de moneda extranjera mayor que la que reciben. El banco central y los bancos extranjeros proporcionan la moneda extranjera para hacer el pago y la cantidad neta ofrecida es conocida como " *transacciones oficiales de reservas* ".[29]

Si la balanza tiene superávit, los extranjeros tienen que conseguir los pesos necesarios para pagar el exceso de sus pagos a México, sobre sus ingresos procedentes de las ventas a México. Los pesos se los proporcionan sus bancos centrales. El cómo se proporciona la

---

[26] *Ibidem* p. 203.
[27] Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit.*, p. 59.
[28] Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit*, p. 203.
[29] *Ibidem* p. 205

moneda extranjera al público depende de la política de tipo de cambio del banco central, la cual puede ser de tres formas: tipos de cambio fijo, tipo de cambio flexible y fluctuación.[30]

Tipos de cambio Fijo

El banco central mantiene constante el precio de las monedas extranjeras, en relación con la moneda nacional, comprando y vendiendo divisas (moneda extranjera) a ese tipo de cambio fijo. Para ello tiene que mantener reservas de divisas.

Financiar cualquier superávit o déficit de la balanza de pagos que surge al tipo de cambio oficial, lo hacen comprando o vendiendo toda la moneda extranjera que no se ofrezca en las transacciones privadas. Si México tiene un déficit de Balanza de pagos respecto a EUA (es decir si se importa más de lo que se exporta, entonces no se tendrá moneda extranjera para pagar), de forma que la demanda de dólares (salida) a cambio de pesos fue mayor que la oferta de dólares (entrada) a cambio de pesos procedente de los americanos, entonces el Banco de México comprará el exceso de pesos pagándolos con dólares. Es decir, dada la oferta y la demanda del mercado, el que fija el precio tiene que cubrir el exceso de demanda o absorber el exceso de oferta, por lo cual será necesario que el banco central posea reservas de divisas. Estas reservas se venderán cuando exista un exceso de demanda de dinero y se comprarán cuando exista un exceso de oferta. Este proceso de compraventa de divisas por el Banco Central es conocido como *intervención.*

Si en un momento dado el país tuviera un déficit persistente entonces el banco agotara sus divisas y no podrá sostener el tipo de cambio, por lo que antes de llegar a este punto se verá obligado a devaluar la moneda.[31]

Tipo de cambio flexible

Los bancos centrales permiten que el tipo de cambio varíe para igualar la oferta y la demanda de divisas. Por ejemplo, si aumentan las exportaciones mexicanas, aumentará la demanda de pesos en los mercados internacionales, por lo que la tasa de cambio (precio del peso) subirá.[32]

Fluctuación limpia y sucia.

En una fluctuación limpia el Banco central no participa, por lo tanto el saldo de la balanza de pagos sería nulo. En la fluctuación sucia los Bancos Centrales compran o venden divisas para modificar el tipo de cambio.

---

[30] *Ibídem* p. 206.
[31] *Ibídem* pp. 206-207
[32] *Ibídem* pp 207-208.

En el tipo de cambio fijo a los cambios de precio de la moneda se conocen como:

- *Devaluación*: El precio de la moneda extranjera, sube por una acción oficial.
- *Revaluación*: Es lo opuesto, la moneda extranjera baja por una acción oficial.

Mientras que en el tipo de cambio flexible estos movimientos de precios se conocen por:

- *Depreciación*: abarata la moneda local.
- *Apreciación*: Se encarece la moneda local en relación con otras monedas. [33]

Medidas del tipo de Cambio

Existen diferentes formas de medir el valor de una moneda con respecto de otra u otras, siendo las mas manejadas:

- *Bilateral o Nominal*: Una moneda frente a la otra en términos nominales, es decir, tantos pesos por dólar.[34]
- Tipo de cambio *Multilateral o efectivo*: Es un índice que representa el precio de la moneda local respecto a un conjunto de monedas extranjeras, siendo cada una de ellas ponderada según su comercio internacional con la moneda local.[35]
- Tipo de cambio *efectivo real*: Mide la competitividad de un país en el comercio internacional, esta dado por la relación entre los precios de los bienes producidos en el exterior, expresados en moneda nacional y los precios de los bienes producidos en el interior.

$$R_t = tc_t P^*_t \,/\, P_t, \tag{3.23}$$

donde R_t es el tipo de cambio efectivo real, P_t es el índice de precios interior, partiendo de un año base, P_t^* es el índice de precios exterior, partiendo de un año base y tc_t es el precio de la moneda extranjera en moneda local (valor nominal).[36]

Para ejemplificar, supóngase una economía donde el tipo de cambio tc_t sea de 7.5 unidades por cierta moneda extranjera, en este caso el dólar; mientras que el índice de precios interior, partiendo de un año base P_t sea de 1.9, y el índice de precios exterior, partiendo del mismo año base P_t^* sea 1.1. Si solamente se tomará en cuenta el cociente de los índices de precios P_t^* / P_t se observaría que los precios de los bienes extranjeros costarían para

[33] *Ibidem* pp 208-210.
[34] *Ibidem* p. 211.
[35] *Ibidem*
[36] *Ibidem* pp. 212-213.

nosotros solamente el 57 %, de lo que nos cuesta adquirirlos en nuestro país, siendo obviamente preferible adquirirlos en el extranjero. Sin embargo, si se toma en cuenta el valor de la moneda nacional tc_t de 7.5, puesto que para comprar productos externos se necesita moneda extranjera, se deberá de multiplicar la razón de precios por el número de unidades de moneda nacional necesarias para adquirir una unidad de moneda extranjera (es decir multiplicar por el valor nominal de la moneda extranjera, en moneda nacional). En este ejemplo se obtiene $R_t = 4.27$, que significa que los productos extranjeros son 4.27 veces más caros para nosotros; sin embargo, en el supuesto que nuestra moneda valiera más que la moneda extranjera, por ejemplo 0.95 pesos por dólar se obtendría $R_t = 0.54$, lo que significa que los productos extranjeros nos cuestan solamente el 54% de lo que nos cuesta adqurirlo en nuestro país. Por lo tanto, entre mayor sea el valor de R_t más competitivos serán los productos nacionales en relación con los productos extranjeros. Si $R_t = 1$ entonces se esta en igualdad con los bienes externos. Si $R_t > 1$ se esta en ventaja, mientras que si $R_t < 1$ se esta en desventaja, puesto que los productos nacionales serán caros y en consecuencia se les demandará menos en el extranjero.

3.7.2 El comercio de bienes y la balanza comercial (sin incluir la cuenta de capital)

En una economía abierta, como se ha establecido anteriormente en las relaciones (3.4) y (3.5), parte de la producción interior es vendida a residentes extranjeros (exportaciones) y parte de la renta se emplea en adquirir bienes extranjeros (importaciones), por lo tanto el *gasto interior*, la *inversión* y el *consumo interno* ya no son los únicos determinantes de la producción interior.

Hasta este momento se ha definido una identidad para el balance comercial (3.4), sin embargo, no se ha propuesto que variables determinan el monto de las exportaciones y de las importaciones. En el caso de las exportaciones están van a depender principalmente de dos variables: el costo real de nuestros productos en el extranjero, y de la renta de nuestros compradores.[37] Se depende del costo real de nuestros productos en la medida en que estos sean caros o baratos para los compradores, obviamente si nuestros productos son baratos y tienen una buena calidad aumentarán nuestras exportaciones. El costo de nuestros productos está estrechamente relacionado con el tipo de cambio de nuestra moneda, por lo

[37] *Ibidem* pp. 214-215.

tanto se puede cuantificar utilizando nuevamente la expresión (3.23) que, como se ha mencionado anteriormente, mide la competitividad de un país en el comercio internacional.

La renta de nuestros compradores es también muy importante puesto que si sus economías se encuentran en expansión entonces sus compras al exterior aumentarán, mientras que si atraviesan por un período de contracción entonces nuestras exportaciones bajarán. Esta situación es fehaciente en el caso de nuestra nación, puesto que nuestro principal socio comercial es EE.UU. Además, esta situación terminó por afianzarce con *el tratado de libre comercio*, el cual abolió los aranceles y procesos burocráticos al comercio exterior con EE.UU. y Canadá.

A partir de lo anterior, se puede proponer la siguiente expresión

$$X_t = Y_t^{*\alpha} R_t^{\beta},$$

donde Y_t^* es la renta ponderada de los principales compradores extranjeros, y R_t está dada por (3.23).

Sin embargo, es difícil obtener R_t, puesto que se necesita información sobre el índice inflacionario de los principales compradores externos y todos en el mismo año base. Por tanto, en todas las expresiones que involucren al comercio exterior se le substituirá por el tipo de cambio, tc_t, el cual es un buen indicador de competitividad. Así, la expresión anterior se convierte en

$$X_t = Y_t^{*\alpha} tc_t^{\beta}. \tag{3.24}$$

Como se ha mencionado R_t es un indicador de la competitividad nacional respecto a la de otros países, que si bien no será empleado como una variable endógena del modelo, amplia el panorama de tal forma que se observa la importancia de mantener un nivel de precios interno bajo, puesto que el no hacerlo puede anular el efecto de una moneda competitiva.

Con un razonamiento semejante al que define a la función de exportaciones (24) se puede definir una función para las importaciones. En principio, las importaciones también dependen del valor real de la moneda nacional, puesto que si esta se devalúa entonces los productos extranjeros serán mas caros para los consumidores nacionales de manera que desistirán de adquirirlos, reduciéndose las importaciones y trasladando su consumo hacia bienes nacionales, exceptuándose aquellos productos que no se produzcan en la planta nacional y que sean necesarios para labores productivas. De la misma manera, una apreciación de la moneda nacional o una depreciación del dólar afectará también a la renta puesto que aumentarán las importaciones ya que el peso mexicano tendrá mayor poder adquisitivo.[38] De modo que, una depreciación o *devaluación mejorará la balanza comercial*, mientras que, una apreciación aumentará las importaciones. Así mismo, un factor que puede hacer que aumenten las importaciones es el crecimiento del consumo puesto que muchos consumidores internos gastarán parte de su renta en bienes extranjeros, los cuales no adquirirían en caso de que la economía se encontrará en una recesión o contracción. Por otra parte el aumento de la inversión se traduce en el remplazo de bienes de consumo foráneos por bienes nacionales. De lo anterior, se puede construir la función de importaciones como

$$Q_t = C_t^{\alpha} \frac{1}{tc_t^{\beta}} \frac{1}{K_t^{\beta}}, \tag{3.25}$$

donde C_t es el consumo nacional, tc_t es el tipo de cambio y K_t es la inversión.

En consecuencia, la balanza comercial será una función del tipo de cambio, de la media ponderada de las rentas con los países que se efectúan intercambios comerciales, y de la renta nacional, es decir

$$XN_t = X_t\,(Y_t^{*}, tc_t) - Q_t\,(Y_t, tc_t). \tag{3.26}$$

Resulta evidente que un aumento de la renta del exterior, permaneciendo constante todas las demás variables, mejora la balanza comercial del país que se analiza y aumenta la demanda agregada en dicho país. De manera similar, una depreciación real del tipo de cambio en el país analizado, mejora la balanza comercial y aumenta su demanda agregada, puesto que aumenta las exportaciones y reduce las importaciones.

La renta nacional y la balanza comercial.

Si se incluyen a las exportaciones e importaciones como un componente de la demanda agregada, se define a la función de la renta como

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + XN_t\,(Y_t, Y_t^{*}, tc_t). \tag{3.27}$$

Esta última expresión resalta la importancia del comercio exterior como un estimulo para aumentar la renta nacional, más aun, cuando no existe capacidad interna de consumo. Por tanto, es fundamental tomar en cuenta como afectan a la balanza comercial, las variaciones de la renta extranjera y el tipo de cambio real, lo cual se resume en la tabla (3.2).

[38] *Ibidem* p. 216

Tabla 3.2 Efectos sobre la renta y las exportaciones por variaciones en la renta extranjera o por una depreciación real.

	Renta Extranjera	Depreciación real
Renta	+	+
Exportaciones	+	+

3.7.3 La movilidad del capital (el comercio de activos)

Los movimientos internacionales de capital (comercio de activos) obedecen a las diferencias entre los rendimientos de los diferentes países (tasas de interés ofrecidas), tomando en cuenta las posibles variaciones del tipo de cambio. Así mismo, las tasas impositivas a la inversión de capitales y las restricciones a las salidas de capital son otros factores a considerar.

Sin embargo, en el caso particular de México el capital tiene una movilidad perfecta puesto que los inversionistas pueden adquirir activos con rapidez, pequeño costo de transacción y en cantidad ilimitada.

Como se recordará la balanza de pagos se compone tanto del comercio como del flujo de capitales A partir de ello, se puede definir como

$$BP_t = XN_t(Y_t, Y_t^*, tc_t) + FC_t(i_t^*, i_t, b_t), \tag{3.28}$$

donde BP_t es la balanza de pagos, XN_t es la balanza comercial, $FC_t(i_t^*, i_t, b_t)$ es el flujo de capital como una función de la tasa de interés mundial i_t^*, de la tasa de interés nacional bancaria i_t y de la tasa de rendimiento de la bolsa de valores local b_t.

El flujo de capital puede emplearse como una herramienta para financiar los déficits comerciales y así sostener cierto tipo de cambio, sin embargo, su uso requiere mucho cuidado, puesto que demanda tasas de interés altas y no se puede atener la economía de una nación a los llamados capitales golondrinos, que sin el mayor reparo pueden retirar sus capitales en cualquier momento provocando un desequilibrio en la balanza de pagos que puede dar lugar a multitud de problemas económicos: devaluación, recesión, desempleo, inflación, etc.[39]

Dado que, las altas tasas de intereses atraen inversionistas aumentando el flujo de capital, luego entonces se deduce que las políticas monetarias y fiscales influyen en la inversión extranjera. De manera que, si el gobierno quiere atraer capitales y divisas puede subir los

[39] *Ibidem* pp. 228-229.

intereses, y así financiar sus déficits e impedir salida de capital nacional. Sin embargo, el subir las tasas de interés castiga a la inversión productiva de los nacionales, ya que el costo del dinero aumenta.

Si bien México ofrece altas tasas de interés a los inversionistas, existe un alto riesgo de una devaluación o depreciación del peso mexicano, la cual, en caso de presentarse puede desaparecer instantáneamente los ahorros de un inversionista.

Por ejemplo, supóngase una economía con tasas de interés i_t del 30% anual, mientras que la tasa internacional i_t^* sea del 4%. Si se invirtieran 1000 dólares y el tipo de cambio tc_t fuera de 3.5 unidades por dólar, se tendría como capital inicial 3500 unidades que darían un rendimiento anual de 1050 unidades. Por tanto, al final del año se tendrían 4550 unidades, que al convertirlas a dólares serían 1300. Mientras que, si se invirtieran en el mercado internacional sólo se tendrían 1040 dólares.

En principio, es muy lógico invertir en esta economía ficticia, sin embargo, si la moneda de esta economía ficticia tuviera una súbita devaluación a 6.5 unidades por dólar las 4550 unidades se volverían, de un día para otro, solamente 700 dólares perdiéndose 340 dólares respecto al mercado internacional.

De donde, resulta evidente que un inversionista no arriesgará su capital en una economía externa, si ésta no le ofrece la suficiente confianza de que no se presentará una devaluación, o en caso de presentarse los intereses devengados serán lo suficientemente altos para proteger su capital. Así, el flujo de capital se puede representar como una función dependiente de la diferencia entre las tasas de interés nacionales y extranjeras, así como de la confianza en la estabilidad de esta moneda, que podría cuantificarse como el grado de devaluación pronosticado para esta economía, que debe de tomarse en cuenta al momento de ofrecer tasas de interés a los inversionistas. De lo anterior, en una economía el flujo de capital estará dado por

$$FC_t = b_t^{\gamma}\, i_t^{\alpha}\, \frac{1}{i_t^{*\beta}}. \tag{3.29}$$

Por tanto, se puede concluir que para poder bajar las tasas de interés, sin provocar una salida masiva de capitales, se debe de tener primero una moneda estable y fuerte. Esto se puede lograr si se tiene una balanza comercial con superávit y el gasto del sector público no exceda a sus ingresos, de forma que no se tengan que contratar mas prestamos en moneda extranjera.

La movilidad de Capital con tipo de cambio fijo.

Como se ha mencionado si un país eleva los intereses para contraer la economía y existe confianza en su moneda, atraerá capital externo entonces tendrá un superávit gigante y tendrá que comprar moneda extranjera para que no se aprecie su moneda, por consiguiente aumentará la cantidad de su circulante nacional, anulándose la contracción monetaria y bajando los intereses otra vez.

Por lo tanto, con tipos de cambio fijo y movilidad perfecta de capital, un país no puede tener una política monetaria independiente pues cualquier movimiento de interés genera flujos de capital, y se ha de intervenir para dejar los intereses alineados al mercado mundial. Esta política ha sido utilizada por administraciones públicas para financiar su déficit comercial y no verse obligado a conseguir préstamos, dado que la demanda de divisas para adquirir bienes externos se compensa con las divisas que entran por medio de los flujos de capital. No obstante, como se ha mencionado se dificulta la inversión productiva nacional, reduciéndose la renta y las exportaciones.[40]

Así, la oferta monetaria se puede volver una variable endógena debido al compromiso de mantener una tasa de cambio fijo. Un superávit implicará una expansión monetaria automática de la misma forma que un déficit implicará una contracción monetaria.

A pesar de ello, existen casos como el de México donde, a pesar de que suban los intereses, no se atrae una cantidad de dinero tal que genere una fuerte apreciación de su moneda, debido a la escasa confianza en dicha moneda (menos aun sí tiene un déficit comercial). En tanto no existan fuertes presiones para apreciar la moneda local la oferta monetaria no será una variable endógena.

Sin embargo, la política fiscal si es muy efectiva en este caso: por principio una política fiscal activa sube los intereses y la renta; al subir los intereses aumentan los flujos de capital, apreciándose la moneda. Con el objeto de sostener fijo el tipo de cambio el banco central aumenta la oferta monetaria y vuelven a bajar los intereses, en ese momento la renta ya habrá aumentado.

Movilidad perfecta con tipo de cambio flexible.

Sin intervención del Banco Central la balanza de pagos debe estar fija, cualquier déficit es financiado con entradas de capital privado y un superávit con salidas de capital Los ajustes

[40] *Ibídem* pp 230-234

del tipo de cambio aseguran el equilibrio de las cuentas corriente y de capital.[41]

El Banco central puede fijar la oferta monetaria a su voluntad, con tipo de cambio flexible, puesto que no existe un vínculo con la balanza de pagos, ya que no interviene en ésta.

No obstante, en tales circunstancias un aumento exógeno de la demanda mundial de nuestros bienes aumentará la producción y la demanda de dinero, cuyo crecimiento conlleva el alza de las tasas de interés entonces se atraen capitales externos y se aprecia la moneda. Por consiguiente, suben las importaciones a la vez que se vuelven más caros nuestros productos en el exterior. El proceso continua gradualmente hasta alcanzar el equilibrio comercial. Por tanto un aumento de las exportaciones, con tipo de cambio flexible, no tiene un efecto duradero.

En contraparte, una política fiscal activa provocará una expansión de la demanda la cual eleva los intereses y aprecia la moneda, en consecuencia caen las exportaciones y aumentan las importaciones, presentándose un efecto de desplazamiento pues las tasas de interés altas reducen las exportaciones.

Por lo que toca a las políticas monetarias, si se aumenta la oferta monetaria y se sostienen los precios constantes (un supuesto no muy valido), crece la renta y se deprecia la moneda, por consiguiente aumentan las exportaciones. Bajo el supuesto de precios fijos, el aumento del dinero es real, la renta crece y los intereses bajan. Luego entonces, se presenta una fuga de capitales y se deprecia la moneda, de manera que las exportaciones continuaran al alza. La depreciación termina cuando el precio de los bienes inferiores cae y aumenta la demanda interna hasta el equilibrio compatible con el interés mundial.

Resulta evidente que un tipo de cambio flexible no es conveniente para sostener una balanza comercial positiva pues a la larga tiende a alcanzare el equilibrio comercial. Por tanto, resulta necesario la intervención del estado, con el objeto de alcanzar cierto tipo de cambio óptimo para nuestra moneda, tal que no se pierda la ventaja competitiva de nuestros precios. Dicho tipo de cambio deberá sostenerse o ajustarse de acuerdo a las presiones del mercado. En otras palabras, se propone una fluctuación sucia al tipo de cambio, dada por

$$tc_t = \frac{1}{X_t^{\alpha}} Q_t^{\beta} \frac{1}{FC_t^{\gamma}} \tag{3.30}$$

donde tc_t es el tipo de cambio, FC_t es el flujo de capital, X_t representa las exportaciones y Q_t a las importaciones.

[41] *Ibidem* pp. 234-241.

De aquí, se desprende que las tasas de interés y la oferta monetaria serán instrumentos valiosos para el manejo del tipo de cambio.

3.8 La oferta y la demanda agregadas

Hasta el momento se ha supuesto que el nivel de precios es constante, sin embargo, en este apartado se supondrá que ya no lo es y que por principio está relacionado linealmente con la oferta monetaria, es decir,

$$P_t = \beta M_t, \tag{3.31}$$

donde P_t es el nivel de precios y M_t es la oferta monetaria.

A su vez, el aumentar los saldos reales en poder del público, conlleva el crecimiento de la demanda de productos. Por tanto, existe una relación entre la oferta monetaria y la renta,

$$Y_t = \alpha M_t, \tag{3.32}$$

donde Y_t es la renta nacional y M_t es la oferta monetaria .

Los coeficientes α y β cuantifican cual de las variables P_t e Y_t es más sensible a la oferta monetaria. De manera que, se podrá evaluar que tan conveniente es elevar la oferta monetaria, si solo tiene efectos inflacionistas o si en verdad aumenta la renta. En contraparte, el reducir la oferta monetaria puede provocar que se reduzca la producción y el nivel de precios (una recesión).

Se definen ahora las siguientes funciones:

- DA: La función de demanda agregada formada por las combinaciones de nivel de precios y producción, dados en (31) y (32) respectivamente, con los que el mercado de bienes y activos está en equilibrio. No es mas que la función que describe la muy conocida ley de la demanda "A mayor precio menor demanda, a menor precio mayor demanda".[42]
- SA: La función de oferta agregada, la cual describe la producción que las empresas están dispuestas a ofrecer a diferentes niveles de precios. Por tanto, es un reflejo del costo de los factores de producción, como el mercado de trabajo.[43]

La intersección de las rectas SA y DA representa el status actual de la economía, se le conoce como *punto de equilibrio.*

---

[42] *Ibídem* p. 257.
[43] *Ibídem* p 258

Para las funciones definidas anteriormente un incremento de la oferta monetaria aumenta la *renta y los precios simultáneamente*, de tal forma que la curva DA se trasladará hacia la derecha (figura 3.2). En la nueva intersección SA-DA se observa el nuevo nivel de precios y producción alcanzado.

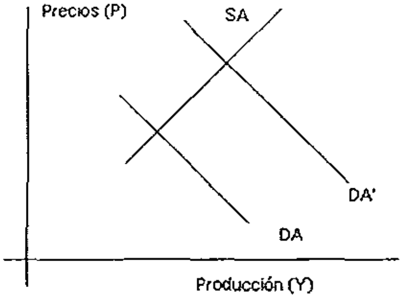

Figura 3.2
La oferta y la demanda agregadas. Un incremento de la cantidad nominal de dinero traslada la curva de demanda agregada DA a DA'.

Para los Keynesianos la curva SA siempre es horizontal, lo que significa que al nivel de precios existentes se ofrece cualquier cantidad de producto; pues al haber desempleo puede obtenerse todo el trabajo necesario al salario corriente. Por tanto, concluyen que un incremento de la oferta monetaria fomenta el crecimiento de la renta nacional.[44] Tal situación se observa en la nueva intersección SA-DA de la figura (3.3).

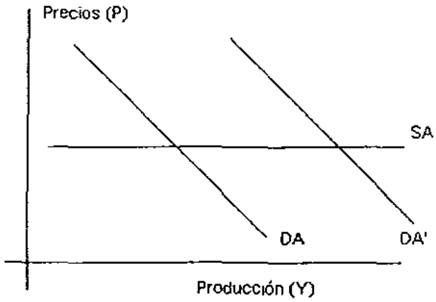

Figura 3.3
Curva de oferta Keynesiana.

Para los clásicos y monetaristas SA es vertical ya que, aunque suban o bajen los precios, siempre se produce lo mismo en virtud de que la economía siempre se encuentra en el pleno empleo y no existe necesidad de producción adicional. En consecuencia la producción es insensible a la oferta monetaria, pero la inflación no. *De ahí que, en esta teoría el* coeficiente α es nulo y el coeficiente β es muy significativo. Por tanto, un traslado de DA,

[44] *Ibídem* p. 259

debido al incremento de la oferta monetaria, solo aumenta el nivel de precios.[45] Tal situación se observa en la nueva intersección SA-DA de la figura (3.4).

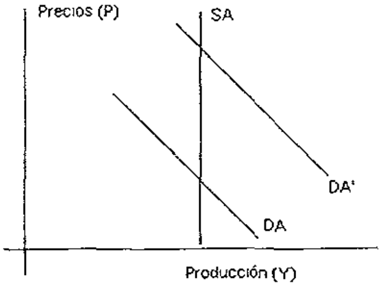

Figura 3.4
Curva de oferta clásica.

Por lo que toca a la forma de la curva DA es mas plana o no tiene pendiente, cuanto mayor es la respuesta de la inversión a una variación en la oferta monetaria que reduzca las tasas de interés. De manera que, aumenta la renta significativamente y el nivel de precios si bien aumenta lo hace en menor proporción. Por lo contrario, si la curva DA es muy inclinada implica que la política monetaria es ineficaz para aumentar la producción, puesto que no provoca una baja significativa de las tasas de interés que fomente la producción y si un alza considerable de los precios.

Una expansión fiscal, como el incremento del gasto público o la reducción de impuestos aumenta los saldos monetarios en poder del público, de manera que aumenta la demanda de productos y la curva DA se traslada a la derecha.

A continuación se resumen los efectos de una expansión monetaria y fiscal según las teorías económicas vigentes en las tablas (3.4) y (3.5).

Tabla 3.4 Efectos de una expansión fiscal.

	Producción	Interés	Precios
Keynesianos	+	+	0
Clásicos/monetaristas	0	+	+

Tabla 3.5 Efectos de una expansión monetaria.

	Producción	Interés	Precios	Saldos Reales
Keynesianos	+	-	0	+
Clásicos y monetaristas	0	0	+	0

45 *Ibidem* p. 260

En el mundo real tanto el modelo clásico, como el keynesiano difícilmente se presentarán. En su lugar los *coeficientes estructurales del modelo desarrollado* mostrarán cuál de los modelos o si una combinación de éstos se adecua a la realidad económica para así poder tomar decisiones que fomenten el crecimiento y mantengan en un nivel aceptable los precios

3.9 La Inversión

La inversión es el gasto dedicado a incrementar o mantener el *stock de capital*, el cual esta constituido por las fábricas, maquinaria, oficinas y demás bienes duraderos empleados en el proceso de producción. Cualquier gasto adicional en el stock de capital se le conoce como *inversión bruta*. Dicha inversión se compone de la inversión destinada a mantener el stock existente, también conocida como *depreciación*, y la destinada a incrementarlo, denominada como *inversión neta*.[46]

3.9.1 La inversión y el costo de capital

El *stock de capital deseado* es aquel que las empresas quisieran tener para producir y satisfacer la demanda de sus productos.[47] Depende obviamente de la renta, toda vez que si esta crece aumenta la demanda de bienes. Las empresas requieren más capital, si necesitan producir más bienes.

Así mismo, los intereses altos, consecuencia de una política monetaria restrictiva y política fiscal expansiva, reducen sensiblemente la inversión y con ello las posibilidades desarrollo. Mientras que, reducir las tasas de interés y los incentivos impositivos fomentan la inversión.

Defínase el *costo de capital*, como el costo de utilizar una unidad adicional de capital en la producción.[48] Obviamente, depende de las tasa de interés del mercado. A partir de lo anterior, una primera aproximación sería definir a la inversión como una función del costo de capital y de la renta

$$K_t = F(CU_t, Y_t), \qquad (3.33)$$

donde CU_t es el costo de capital, K_t es la inversión o stock de capital e Y_t es la renta.

[46] Ibídem pp 351-356.
[47] *Ibídem* p. 357.
[48] *Ibídem*

El costo de capital se identifico en un principio con la tasa de interés, bajo el supuesto de que la mayoría de las veces las empresas tienen que endeudarse para poder invertir durante un único período y que están pagando los intereses correspondientes a ese préstamo. Al final del período todavía le quedará capital pero es probable que este se halla depreciado a lo largo del período.

Supóngase que la empresa piensa seguir utilizando el capital restante en la producción de períodos sucesivos y que su depreciación representa simplemente el deterioro experimentado en el proceso de producción, es decir, en el desgaste físico. En consecuencia, el costo de capital ya no estará dado solamente por los costos de interés sino también por la depreciación. Suponiendo que en cada período se tiene que reinvertir una parte proporcional al stock de capital del período anterior, puesto que en aquel período se deprecio el equipo en una proporción $K_{t-1}{}^{\delta}$.[49] De lo antes mencionado, el costo de capital puede expresarse como

$$CU_t = i_t^{\alpha}\, K_{t-1}{}^{\delta}, \tag{3.34}$$

donde CU_t es el costo de capital, i_t es la tasa de interés, $K_{t-1}{}^{\delta}$ es la parte de la inversión en el periodo anterior que se deprecio, y que se debe reinvertir con el propósito de mantener la producción, es decir, el gasto en la manutención y reparación de los medios de producción. Recuérdese que la empresa está endeudándose con el objeto de producir bienes para vender en el futuro. Es, entonces, razonable pensar que los precios de los bienes que vende aumentarán paralelamente al nivel general de precios. Por consiguiente, el valor de lo que la empresa producirá en el futuro aumentará, mientras que, la cantidad nominal de intereses no lo hará en muchas ocasiones. Por lo tanto, el valor real de la deuda disminuirá con el tiempo a consecuencia de la inflación, de ahí la importancia de tomarse en cuenta la inflación al momento de calcular el costo de capital.[50] De acuerdo con este razonamiento se puede incluir a la inflación como un determinante mas del costo de capital

$$CU_t = i_t^{\alpha}\, K_{t-1}{}^{\delta}\,\frac{1}{P_t^{\gamma}}, \tag{3.35}$$

donde P_t es el nivel de precios esperado.

---

[49] *Ibidem* pp 363-64.
[50] *Ibidem* pp 364-65.

3.9.2 La Bolsa de Valores y la inversión

Hasta este momento se ha supuesto que las empresas financian su inversión endeudándose, pero también pueden hacerlo vendiendo acciones, de manera que se consigan los fondos necesarios para pagar la inversión. Los compradores de las acciones esperan obtener un rendimiento mediante dividendos o, si la empresa tiene éxito, con el incremento del valor de las acciones en el *mercado bursátil.*[51]

Cuando la bolsa se encuentra a la alza, una empresa puede conseguir mucho dinero con pocas acciones, pero si está a la baja tiene que vender muchas acciones, por lo tanto una bolsa a la alza es buena para la inversión. Defínase entonces una función para el índice de crecimiento de la bolsa de valores, el cual fluctúa de acuerdo al crecimiento de la economía, así como de la demanda de acciones en el mercado. Esta demanda puede relacionarse con los flujos de capital, que encuentran en la bolsa de valores el mercado ideal para sus operaciones. De lo anterior,

$$b_t = FC_t^{\gamma}\, Y_t^{\alpha}, \tag{3.36}$$

donde b_t es el índice de la bolsa de valores, Y_t es la renta y FC_t es el flujo de capitales.

Tomando en cuenta las variables analizadas se puede proponer un modelo para la inversión:

$$K_t = Y_t^{\lambda_1}\, b_t^{\gamma}\, \frac{1}{i_t^{\alpha}} K_{t-1}^{\partial}, \tag{3.37}$$

donde K_t es la inversión, $Y_t^{\lambda_1}$ es la medida en que la demanda de productos exige inversión adicional, b_t es el índice de crecimiento de la bolsa de valores, i_t es la tasa de interés o costo de capital nominal y K_{t-1}^{δ} es la depreciación del stock de capital.

Esta misma expresión se puede reformar en función no sólo de la renta actual sino de las rentas esperadas a futuro, es decir

$$K_t = Y_t^{\lambda_1} \ldots Y_{t+n}^{\lambda_{1+n}}\, b_t^{\gamma}\, \frac{1}{i_t^{\alpha}} K_{t-1}^{\partial}. \tag{3.38}$$

Las variaciones impositivas, lo mismo que el tipo de interés y la depreciación influyen en el costo del uso de capital. Las dos variables impositivas más importantes, en este sentido, son el *impuesto sobre la renta* y las *desgravaciones fiscales a la inversión.* La desgravación a la inversión permite a las empresas deducir de sus impuestos una cierta fracción *t* de su gasto anual en inversión.

[51] *Ibidem* p 367

Sin embargo, es difícil de presentar una desgravación fiscal en el modelo, puesto que no se tienen antecedentes históricos, pero sí se puede proponer como una política No es así con el impuesto sobre la renta, pues si se substituye la variable renta por la variable *renta disponible*, es decir la renta después de impuestos, se estará tomando en cuenta el papel de las tasa impositivas sobre la inversión. A partir de lo anterior

$$K_t = YD_t^{\lambda_1} \ldots YD_{t+n}^{\lambda_{1+n}} \, b_t^{\gamma} \, \frac{1}{i_t^{\alpha}} P_t^{\gamma} K_{t-1}^{\partial} . \tag{3.39}$$

donde YD_t es la renta disponible, dada en la expresión (4).

En esta expresión se observa claramente las disminuciones impositivas aumentan la renta disponible en manos del público, el cual tendrá recursos adicionales para la inversión.

Se puede concluir que *la inversión depende* inversamente del costo de capital y directamente el nivel esperado de la renta. Dichas variables de control pueden manipularse a través de las políticas monetarias y fiscales.

3.10 La oferta monetaria, el nivel de precios y la Teoría Cuantitativa.

En el apartado (3.8) se ha planteado la relación existente entre la oferta monetaria y el nivel de precios, sin embargo no se ha justificado esta aseveración, lo cual es el objeto de éste. Defínase la velocidad renta del dinero como el número de veces que la cantidad de dinero en una economía gira cada año para financiar el flujo anual de la renta. Es igual a la relación entre el PNB y la cantidad de dinero. Por ejemplo, en los EE.UU., durante 1988 un saldo de un dólar financio $6.27 de gasto en bienes y servicios finales o, lo que es lo mismo, el público mantuvo en promedio una cantidad inferior $0.16 por cada dólar de renta. Dicha relación se define como

$$Ve_t = YN_t / M_t , \tag{3.40}$$

donde YN_t es la renta nominal, Ve_t es la velocidad del dinero y M_t es la oferta monetaria.[52]

Así mismo, se conoce que la renta nominal es igual al producto de la renta real por el nivel de precios, es decir

$$YN_t = P_t Y_t , \tag{3.41}$$

de donde

$$M_t \, Ve_t = P_t Y_t . \tag{3.42}$$

[52] *Ibidem* p 433.

Si se supone que la economía se encuentra en el pleno empleo, la renta nacional permanecería constante, mientras que la velocidad renta no variaría significativamente, de manera que Ve_t e Y podrían considerarse como constantes. Bajo estos supuestos el nivel de precios sería directamente proporcional a la oferta monetaria, es decir,

$$P_t = \alpha M_t , \tag{3.43}$$

donde $\alpha = \dfrac{Ve_t}{Y_t}$, *es una constante.*

La ecuación anterior relaciona directamente el nivel de precios con la cantidad de dinero. Se le conoce como la ecuación cuantitativa.[53]

Esta situación, como se ha mencionado, sólo se presentará en una economía en pleno empleo, lo cual, no es el caso de nuestra nación. No obstante, señala fehacientemente otro importante papel de la oferta monetaria: el ser un determinante del nivel de precios.

Por tanto, la oferta monetaria tiene dos roles fundamentales en cualquier economía:

- Está estrechamente relacionada con las tasas de interés.
- Es un factor determinante de la tasa de variación de los precios, así como del crecimiento de la renta nacional.

3.11 Los salarios, el empleo y los precios.

El mercado de trabajo se encuentra en continuo movimiento, es decir, ingresan a el nuevos trabajadores, mientras que otros cambian de puesto de trabajo, implicando que siempre existe un *desempleo friccional*, que resulta del rezago de tiempo que se requiere para que se vuelvan a emplear los trabajadores, también es conocido como *desempleo natural,* si la economía se encuentra en el pleno empleo, dado que todo el que busca empleo lo encuentra en un tiempo razonable.[54] Esta tasa de desempleo será mas o menos constante.

Se puede construir una relación directamente proporcional entre la tasa de empleo y la tasa de crecimiento de los salarios monetarios, cuanto más elevada es la tasa de empleo mayor es la tasa de incremento de los salarios monetarios, puesto que las empresas se disputarán a la fuerza laboral y tendrán que ofrecer mejores salarios para obtener trabajadores. De la misma manera, si la tasa de empleo es baja, habrá un exceso de oferta de mano de obra, por

[53] *Ibidem* p. 434

[54] Bannock Graham, Baxter R. & Rees Ray, *Op cit.*, p. 132.

tanto las empresas podrán ofrecer menores salarios y los trabajadores se verán obligados a aceptarlos.[55] De lo anterior, se puede construir una función para el nivel de salarios reales:

$$W_t = \frac{1}{\overline{U}_t^{\varepsilon}} U'^{\lambda}_t P_t^{\gamma}, \tag{3.44}$$

donde W_t es el salario real en el período actual, $\overline{U}$ es la tasa de empleo natural, U' es la tasa de empleo observada en el período actual, y P_t es el nivel de precios.

Por tanto, si $U'_t > \overline{U}$ aumentan los salarios reales, mientras que si $U'_t < \overline{U}$ disminuyen. La función se simplifica si la razon entre la tasa natural y la observada se vuelve otra variable,

$$U_t = U'_t / \overline{U},$$

donde dicha razon se conoce coma la tasa de empleo real y se substituye en (3.44), de manera que se obtiene finalmente

$$W_t = U_t^{\varepsilon} P_t^{\gamma} \tag{3.45}$$

3.12 La demanda de producción y el empleo.

La función de producción relaciona el nivel de empleo con el nivel de producción, de este hecho se puede formular un modelo sencillo en el cual el empleo es proporcional al nivel de producción, entre más aumente la demanda de productos más mano de obra se necesitará.

$$U_t = \varphi Y_t, \tag{3.46}$$

donde U_t es la tasa de empleo e Y_t es la renta o producción.[56]

Los precios a los que se venden los productos empresariales están en función de sus costos: el costo de capital (la tasa de interés) y la oferta monetaria. Así mismo, los precios dependen de la demanda en el mercado, es decir, entre más demanda exista aumentan los precios y a menor demanda disminuyen.[57] A partir de ello, se obtiene la función estructural

$$P_t = i_t^{\beta_3} M_t^{\beta_4} Y_t^{\beta_1}, \tag{3.47}$$

donde P_t es el nivel de precios, i_t es la tasa de interés del mercado, Y_t es la renta nacional (demanda de productos) y M_t es la oferta monetaria.

Resulta obvio que una apreciación del tipo de cambio, una disminución de la tasa de interés o una reducción de la oferta monetaria puede reducir el nivel de precios. Sin embargo, la

[55] Dornbusch Rudiger & Fischer Stanley, *Op cit.*, p. 554.
[56] *Ibidem* p 567
[57] *Ibidem* pp. 595-631.

disminución excesiva de la oferta monetaria puede golpear directamente el nivel de vida de la población. Incluso una política monetaria restrictiva puede generar altos niveles de desempleo, como se analizará mas adelante.

3.13 El Consumo, la renta, la inflación y la oferta monetaria

El consumo es uno de los componentes de la identidad macroeconómica básica. De su crecimiento depende en gran medida el crecimiento de la renta nacional. Si se inhibe el consumo la economía tenderá a contraerse y podría incluso alcanzar una recesión. En apartados anteriores, se había propuesto una función muy simple para describir el consumo. Sin embargo, en este momento se establecerá su estrecha relación con otra variable que ya se ha tratado anteriormente, *la inflación.*

Por lo que toca a las políticas fiscales, un incremento del gasto o reducción de los impuestos aumenta la renta disponible y en consecuencia la demanda de productos, es decir, aumenta el consumo.

Recuérdese que la oferta monetaria es a su vez uno de los determinantes de la tasa de crecimiento de los precios. Por tanto, con el propósito de mantener estables las tasas de interés, de no provocar presión inflacionaria y fomentar el crecimiento de la demanda se debe de monitorear y ajustar constantemente la tasa de crecimiento monetario.

El controlar la inflación tiene por razón el principio de la justicia. Puesto que, la inflación tiene efectos redistributivos. Por ejemplo, si la tasa inflacionaria es más alta que las tasas de interés del mercado, entonces, el valor real de las deudas internas se reduce. De manera que, la inflación puede beneficiar a los deudores, pero perjudica a pensionados y ahorradores cuyos saldos reales se reducen. Si los impuestos, salarios e intereses estuvieran indexados, es decir, que reflejaran la inflación, no habría efectos tan dramáticos.

Las políticas de control de precios y salarios pueden reducir la inflación, trasladando la oferta agregada hacia abajo, pero también hacen bajar a la demanda al mismo tiempo. Por lo tanto, no son muy recomendables y no se buscará aplicarlas en este modelo.

Por consiguiente, el crecimiento del índice de precios, la unidad de medida de la inflación, puede mermar el poder adquisitivo de la población, lo cual se refleja en el consumo total de la economía.

Los supuestos teóricos anteriores se expresan en la siguiente función:

$$C_t = \frac{1}{P_t^{a_1}} YD_t^{a_2} O_t^{a_3}, \tag{3.48}$$

donde C_t es el consumo, YD_t es la renta disponible, P_t es la tasa de crecimiento de los precios y O_t es el gasto público.

Como conclusión se debe reducir el déficit y el crecimiento monetario, de lo contrario se acumula presión inflacionaria que en algún momento explotará y detendrá el crecimiento del consumo y la renta. Dichas acciones pueden acompañarse de políticas fiscales que fomenten el crecimiento de la renta disponible, como la reducción de los impuestos.

3.14 El Crecimiento, la inversión y la deuda externa

De lo mencionado en apartados anteriores, se puede establecer que los principales factores que determinan la tasa de crecimiento de la producción a largo plazo son:

- *Crecimiento de la demanda.*
- Crecimiento del capital o inversión productiva.
- La inversión pública.

La inversión en stock de capital se ha explicado en la expresión (39). Sin embargo, no se ha tomado en cuenta a la inversión por parte del estado, es decir, la parte del gasto público que no gasta en labores administrativas o en el sostenimiento de la burocracia, sino el gasto que se invierte en actividades como la investigación tecnológica, la educación, la infraestructura carretera, financiamientos al sector privado, etc. que coadyuven a la eficiencia de los procesos productivos, así como a elevar la calidad de vida de la población.

Obviamente, entre más se invierta en el progreso tecnológico, en la infraestructura, o en financiamientos al sector privado, es más probable que mejore la eficiencia de los procesos productivos, ahorrándose recursos que se pueden destinar al aumento y mantenimiento del stock de capital. Sin embargo, en nuestro país, el gasto en inversión pública es solo una fracción del gasto público que queda libre después del pago del servicio de la deuda, es decir

$$G_t = O_t + PD_t, \tag{3.49}$$

donde G_t es el gasto público, O_t es el gasto público disponible, que se emplea en la administración, servicios públicos e inversión pública, y PD_t representa el monto del gasto público empleado en amortizar los compromisos financieros.

Debe hacerse notar que la respuesta de toda la economía a la inversión pública no es inmediata. Piénsese en el tiempo necesario para formar un profesionista que sea útil a la nación y que pueda hacer contribuciones al manejo más eficiente de los recursos con que se cuentan Así, si se pretende establecer una expresión que incluya a la inversión pública se debe de tomar en cuenta el rezago en su respuesta. Ahora se puede proceder a incluir al gasto en inversión como un determinante mas de la inversión en stock de capital (39), que se sabe pesa en el crecimiento de la renta nacional, obteniéndose la relación estructural

$$K_t = YD_t^{\lambda_1} \ldots YD_{t+n}^{\lambda_{1+n}} b_t^{\gamma} \frac{1}{i_t^{\alpha}} K_{t-1}^{\partial} O_t^{\beta_1} \ldots O_{t-n}^{\beta_n}, \tag{3.50}$$

donde $O_t^{\beta_1} \ldots O_{t-n}^{\beta_n}$ representan la parte del gasto público disponible, que se invierte en períodos de tiempo anteriores al actual.

3.15 El Empleo

Como se ha mencionado el desempleo es un grave problema social y económico. Sin embargo, puede fomentarse el crecimiento del empleo si aumenta la demanda de productos (consumo), si se efectúan grandes inversiones en bienes de capital e infraestructura, o si el estado aumenta el gasto público en inversión, financiamiento o empresas públicas. En resumen si crece la renta, aumentará seguramente el empleo. Por otra parte, las importaciones de bienes y servicios disminuyen la demanda de bienes nacionales.

De lo anterior, la función estructural para el empleo puede construirse como

$$U_t = X_t^{\alpha_1} \frac{1}{Q_t^{\alpha_2}} K_t^{\alpha_3} O_t^{\alpha_4}, \tag{3.51}$$

donde U_t es la tasa de empleo, X_t son las exportaciones, Q_t son las importaciones, K_t es la inversión y O_t es el gasto público que queda después de pagar el servicio de la deuda pública.

Así mismo, es importante señalar que las políticas monetarias restrictivas, como la reducción de la oferta monetaria, provocan una disminución tanto del consumo como de la inversión. Luego entonces, dichas políticas conllevan un costo social muy alto, el aumento del desempleo.

3.16 El déficit presupuestario y la deuda pública

La administración pública requiere de recursos para su funcionamiento, así como para promover infraestructura y servicios públicos. Estos gastos de la administración pública se financian ya sea por impuestos, cobro de servicios que ofrece el estado, o bien por endeudamiento. Como se ha analizado anteriormente estas entradas y salidas de la administración pública dan un balance o déficit, establecido en la expresión (13).

Cuando los ingresos de la administración pública son insuficientes para afrontar sus compromisos, el estado se ve obligado a conseguir recursos de alguna forma alternativa a los impuestos. Este déficit primario o balance negativo D_t se puede financiar ya sea con la venta de activos del gobierno; emitiendo deuda interna (Cetes, bonos, etc.) que se vende al sector privado, el cual deposita dinero al gobierno; la contratación de prestamos en el exterior (Deuda externa); o si el *banco central emite dinero para financiar al gobierno*, creando base monetaria. Si el banco central hace compras al mercado abierto de deuda pública, entonces también se está creando base monetaria.[58]

De lo anterior, se puede establecer que el financiamiento del déficit público esta dado por

$$D_t = \alpha\, M_t + PI_t + PE_t + A_t, \qquad \textbf{(3.52)}$$

donde D_t es el déficit del gobierno, M_t es la emisión de dinero por el banco central (Oferta monetaria), PI_t representa los bonos comprados por el sector privado (deuda interna), PE_t representa los prestamos contratados con el exterior, A_t denota los ingresos por venta de activos del gobierno.

Si se desglosa el gasto público en sus dos componentes, dados en (3.49), y se substituye en la definición del déficit público, dada en (3.13), se obtiene

$$D_t = I_t + TR_t - (O_t + PD_t), \qquad \textbf{(3.53)}$$

donde D_t es el déficit público y PD_t es el pago de intereses por la deuda.

En el caso de que la deuda sea en moneda nacional, se puede financiar con base monetaria, pero si es en divisas, no hay opción más que negociar la deuda con los acreedores u obtener un superávit de divisas. Si se tiene superávit, la deuda pueda bajar, ya que el gobierno está en posición de comprar los bonos emitidos por si mismo con anterioridad.

---

[58] *Ibidem* pp 690-696.

Cabe señalar que no todas las emisiones de deuda están hechas con el fin de financiar el déficit; gran parte se usa para refinanciar los bonos que se están venciendo. Este proceso se conoce como *gestión de deuda.*[59]

Puede asentarse que la importancia de la deuda pública radica en que al financiar con deuda externa el déficit, parte de la riqueza nacional se traspasa a manos de extranjeros. En el siguiente período el estado tiene que pagar intereses sobre la deuda que adquirió en el pasado y también sobre la nueva deuda emitida para cubrir el déficit del período anterior. Por consiguiente, el estado se vuelve a endeudar y así sucesivamente, creciendo indefinidamente el déficit público hasta que obtenga recursos propios que le permitan eliminar su déficit o en el peor de los casos se vea obligado a traspasar o concesionar más bienes nacionales.

En el caso de deuda interna para atraer capitales privados, el estado se ve obligado a ofrecer altos rendimientos, que elevan las tasas de interés del mercado interno, luego entonces, se dificulta la formación de stock de capital (inversión) y el crecimiento de la renta nacional.

Adicionalmente, el pago de intereses de la deuda puede obligar al estado a aumentar los impuestos con el propósito de obtener más recursos, dificultando aún más la inversión y el crecimiento de la renta y el empleo.

Pueden existir dos tipo de déficit: *el efectivo*, debido a que la economía no se encuentra en el nivel de pleno empleo; y el *estructural* si la economía está en pleno empleo pero existe un gasto excesivo del gobierno.[60]

En tal situación las políticas monetarias restrictivas resultan inefectivas pues aumentan el desempleo y/o reducen el crecimiento de la economía, de manera que bajan los ingresos vía impuestos y aumenta aun más el déficit. Además, dichas políticas restrictivas suben las tasas de interés, aumentando en consecuencia el costo de la misma deuda pública.[61]

Por tanto, se deben evitar o calcular extremadamente los efectos de políticas monetarias restrictivas, que pueden conllevar el alza de intereses e incluso una posible recesión.

Se puede resolver el problema del déficit público si la economía crece, mediante un aumento de la oferta monetaria pero, si esta ya se encuentra en el nivel de pleno empleo, difícilmente crecerá la economía y si aumentará la presión inflacionaria. En tales

[59] *Ibídem* p. 695
[60] *Ibídem* p. 698
[61] *Ibídem* p. 699

condiciones se deben hacer cambios estructurales: reducir el gasto público o aumentar los ingresos públicos.

Si existe déficit del gobierno la tasa de crecimiento de la oferta monetaria se convierte en una variable dependiente de este déficit público, es decir,

$$M_t = DT_t^{\alpha}. \tag{3.54}$$

De no existir déficit público será una variable autónoma, bajo control del gobierno, es decir,

$$M_t = \overline{\mathrm{M}}. \tag{3.55}$$

Ambas expresiones pueden combinarse en una sola, la cual explique todos los diferentes comportamientos que ha tenido la deuda pública a lo largo del tiempo, obteniéndose

$$M_t = DT_t^{\alpha} + \overline{\mathrm{M}}. \tag{3.56}$$

Como se ha mencionado reiteradamente, es necesario un superávit público que permita mayor libertad al gobierno en el control de variables macroeconómicas fundamentales.

De lo anterior, se establece la siguiente restricción al gasto del gobierno:

$$\begin{gathered} G_t < I_t, \\ G_t = O_t + PD_t, \end{gathered} \tag{3.57}$$

donde I_t representa los ingresos del gobierno, G_t es el gasto público total, O_t es el gasto público disponible, después de efectuar los pagos del servicio de la deuda pública PD_t.

Lo que significa que el estado no debe gastar más de lo que recauda. Hay que recordar que el crecimiento monetario frecuentemente va ligado a los déficit presupuestarios, cuando el estado financia su déficit con oferta monetaria. Una vez que aumenta la oferta monetaria de forma excesiva se presiona al alza de precios, puesto que la oferta monetaria es un determinante del nivel de precios. De ahí que, con el propósito de controlar la inflación, sea necesario que el estado tenga finanzas sanas y así se abstenga de imprimir dinero para financiar sus gastos y solo lo haga para regular la economía.

Por todo lo anterior, el déficit presupuestario es uno de los factores de mayor peso en la inflación futura a través de la presión que ejerce sobre la oferta monetaria. Es típico que existan fuertes déficits públicos acompañados de un rápido crecimiento monetario.

Pero no debe perderse de vista que una oferta monetaria insuficiente encarece las tasa de interés, desalienta la inversión y el crecimiento. Por consiguiente, debe de buscarse la medida adecuada del crecimiento de la oferta monetaria que mantenga en un nivel aceptable tanto al nivel de precios, como a las tasas de interés. Estos hechos hacen ver fehacientemente el papel clave de la política monetaria en el desarrollo de una economía.

Ante un panorama tan sombrío existe otra alternativa, *la teoría de la oferta*, la cual propone que *los ingresos del gobierno están en función tanto de la renta nacional como de la tasa impositiva, de tal manera que una reducción de la tasa impositiva puede aumentar los ingresos netos del gobierno, si y solo sí dicha reducción fomenta el crecimiento de la renta en períodos subsecuentes.*[62]

Esta teoría se fundamenta en la curva de Laffer, la cual relaciona los ingresos vía impuestos con las tasas impositivas. La curva muestra que, a medida que la tasa impositiva aumenta, los ingresos totales crecen al principio hasta cierto punto máximo para después decrecer continuamente. Esto se explica suponiendo que si la tasa impositiva que aplica el gobierno a los ingresos de los particulares fuera del 0%, entonces el gobierno no tendría ningún ingreso vía impuestos. Por otro lado, si la tasa impositiva fuera del 100% entonces tampoco habría ingresos, puesto que nadie estaría dispuesto a trabajar, ni a producir, si el gobierno va a obtener todos los beneficios y los particulares ninguno. No obstante, entre estos puntos extremos, el sector público sí obtiene ingresos. Por consiguiente se espera que la curva comience a crecer conforme la tasa impositiva se eleva desde cero. A la larga, sin embargo, la curva tiene que volver a descender hasta cero. Luego entonces, tiene que dar vuelta en algún punto, el cual se denominará C. Este punto señala un máximo, donde con tasas impositivas inferiores a C cualquier elevación de los impuestos aumentará los ingresos públicos; mientras que con tasas superiores a C, dichos ingresos disminuyen (figura 3.5).[63]

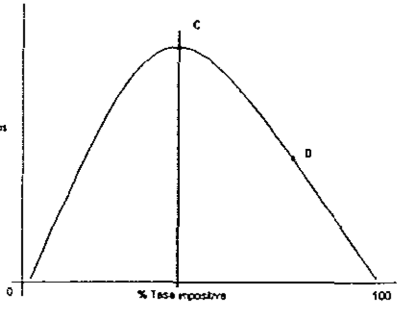

Figura 3.5
La curva de Laffer.

En el caso particular de México es muy probable que la economía se encuentre en un punto (D), con una tasa de impuestos muy alta, que reduzca tanto los ingresos, como la renta.

La esencia de este modelo es entonces acercarse lo más posible al punto C, dónde se alcanza el máximo nivel de ingresos públicos sin castigar excesivamente a la economía. Se

[62] *Ibidem* pp. 814-816.
[63] *Ibidem* pp. 708-709.

observa que la relación entre las tasas impositivas y los ingresos obtenidos, en nada es lineal. Así mismo, los ingresos por impuestos como se ha mencionado no dependen solamente de la tasa impositiva, sino también de la renta. Creándose un sistema interdependiente, puesto que la renta y la tasa impositiva determinan los ingresos del estado, a la vez que el estado al gastar y fijar tasas impositivas determina a la renta. En la figura 3.6 se observa la semejanza de la curva de Laffer con la función sinoidal: $y = \mathrm{sen}(t\pi)$ en el intervalo $\{0, \pi\}$.

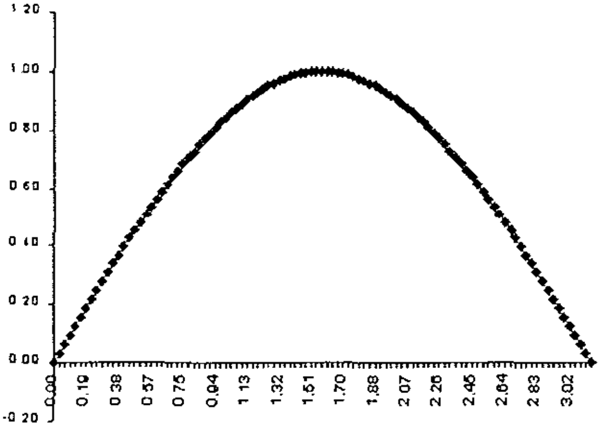

Figura 3.6
Función sinoidal
$y = \mathrm{sen}(t\pi)$ **en el intervalo** $\{0, \pi\}$.

A partir de ello, puede construirse la siguiente función no lineal que explique los ingresos del gobierno como una variable dependiente de la tasa impositiva y de la renta nacional.

$$T_t = Y_t^{\alpha} \left[\mathrm{sen}(t_t \pi)\right]^{\beta} \tag{3.58}$$

donde T_t representa los ingresos del gobierno vía impuestos, t_t es la tasa impositiva, Y_t es la renta del período de recaudación, π es la constante multiplicada por la tasa impositiva t_t, que permite que los resultados se calculen en radianes, para efectos práctico del modelo.

En esta función conforme aumente la renta nacional, aumentan los ingresos del gobierno. Sin embargo, no será así con la tasa impositiva, la cual se explica por la curva sinoidal $\left[\mathrm{sen}(t_t \pi)\right]^{\beta}$, de modo que si $t_t = 0$ los ingresos del gobierno serán nulos. Si poco a poco aumenta t_t también lo harán los ingresos, hasta cierto punto, determinado por el parámetro β, para posteriormente decrecer hasta alcanzar $t_t = 1$, dónde nuevamente los ingresos del gobierno vuelven a ser nulos. De manera que esta expresión se asemeja a la curva de Laffer.

3.17 La Renta

En sección (3.3) se han presentado identidades básicas que explican el comportamiento de la renta como una suma de sus componentes (el consumo, la inversión, las exportaciones y el gasto público). Sin embargo, no se ha pensado que la renta en los períodos de tiempo subsecuentes es una función proporcional a sus componentes actuales. Por ejemplo la inversión del período actual se convierte en bienes con el paso del tiempo. De tal forma puede construirse una función donde la renta crece conforme crece la inversión y las exportaciones de bienes y servicios, mientras que decrece proporcionalmente con las importaciones, las cuales desplazan bienes y capitales nacionales, es decir,

$$Y_t = X_t^{\alpha_1} \frac{1}{Q_t^{\alpha_2}} K_t^{\alpha_3} . \tag{3.59}$$

donde Y_t es la renta nacional, X_t representa las exportaciones, Q_t representa a las importaciones y K_t es la inversión .

3.18 Modelo Final

El modelo final, el cual es puramente teórico, estará conformado por el siguiente conjunto de expresiones estructurales e identidades; desechándose algunas de las presentadas anteriormente, puesto que sólo constituían expresiones intermedias para llegar a expresiones más complejas y teóricamente más cercanas a la realidad.

$$YD_t = Y_t + TR_t - T_t , \tag{3.3}$$

$$XN_t = X_t - Q_t , \tag{3.4}$$

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + XN_t , \tag{3.5}$$

$$I_t = T_t + V_t , \tag{3.12}$$

$$i_t = Y_t^{\gamma} \frac{1}{M_t^{\delta}} tc_t^{\beta} , \tag{3.20}$$

$$b_t = FC_t^{\gamma} Y_t^{\alpha} , \tag{3.36}$$

$$X_t = Y_t^{*\alpha} tc_t^{\beta} , \tag{3.24}$$

$$Q_t = C_t^{\alpha} \frac{1}{tc_t^{\beta}} \frac{1}{K_t^{\beta}} , \tag{3.25}$$

$$BP_t = XN_t + FC_t , \tag{3.28}$$

$$FC_t = b_t^{\gamma} i_t^{\alpha} \frac{1}{i_t^{*\beta}} , \tag{3.29}$$

$$tc_t = \frac{1}{X_t^{\alpha}} Q_t^{\beta} \frac{1}{FC_t^{\gamma}} , \tag{3.30}$$

$$W_t = U_t^{\varepsilon} \frac{1}{P_t^{\gamma}}, \tag{3.45}$$

$$P_t = i_t^{\beta_3} M_t^{\beta_4} \frac{1}{Y_t^{\beta_1}}, \tag{3.47}$$

$$C_t = \frac{1}{P_t^{\alpha_1}} Y_t^{\alpha_2} O_t^{\alpha_3}, \tag{3.48}$$

$$Y_t = X_t^{\alpha_2} \frac{1}{Q_t^{\alpha_2}} K_t^{\alpha_3}, \tag{3.59}$$

donde i_t es la tasa de interés bancaria, G_t es el gasto público total, b_t es la tasa de rendimiento bursátil, X_t representa las exportaciones, Q_t representa a las importaciones, FC_t es el flujo de capital, BP_t es el saldo de la balanza de pagos, tc_t es el tipo de cambio, i_t^* es la tasa de interés en los mercados exteriores, W_t representa los salarios, P_t es el índice de precios, I_t es el ingreso del sector público, C_t es el consumo nacional, T_t es el ingreso del sector público vía impuestos, U_t representa al empleo, V_t es el ingreso del sector público por servicios ventas, K_t es la inversión, YD_t es la renta nacional disponible, M_t es la oferta monetaria, Y_t es la renta nacional, Y_t^* es la renta ponderada de los países con los que se tienen relaciones comerciales y TR_t representa los subsidios.

El modelo desarrollado supone que el gasto público se ha desglosado en dos componentes

$$G_t = O_t + PD_t \ ,$$

donde PD_t es el gasto por el servicio de la deuda y O_t es el gasto en cualquier otro rubros. Sin embargo, no fue posible obtener información estadística de ambas variables. Por consiguiente, en aquellas relaciones estructurales, (3.50), (3.51) y (3.53), donde aparezca alguna de las mencionadas variables, se les consolidará como una sola variable, el gasto público G_t.

$$K_t = YD_t^{\lambda_1} \dots YD_{t+n}^{\lambda_{1+n}} b_t^{\gamma} \frac{1}{i_t^{\alpha}} K_{t-1}^{\partial} G_t^{\beta_1} \dots G_{t-n}^{\beta_n}, \tag{3.50}$$

$$U_t = X_t^{\alpha_1} \frac{1}{Q_t^{\alpha_2}} K_t^{\alpha_3} G_t^{\alpha_4}, \tag{3.51}$$

$$DT_t = I_t - TR_t - G_t, \tag{3.53}$$

$$M_t = DT_t^{\alpha}, \tag{3.56}$$

Se establece la siguiente restricción fiscal al gasto del gobierno, obligándolo a que no gaste mas de lo que percibe

$$G_t \leq I_t, \tag{3.57}$$

Esta condición permite que el estado tenga bajo su control la oferta monetaria, puesto que no la empleará para financiar su déficit. Luego entonces, la oferta monetaria se convierte en una variable de control, de manera que se puede retirar del modelo la ecuación (3.56).

La última ecuación estructural referente a los ingresos del gobierno será

$$T_t = YD_t^{\lambda}\left[\text{sen}(t_t \pi)\right]^{\beta}. \tag{3.58}$$

Es de señalarse que las series históricas de ingresos y egresos del gobierno se encontraron en *precios corrientes*[64], mientras que las series para la renta se encuentran a *precios de 1993*.[65] Por tanto, la renta disponible no puede calcularse a partir de la identidad (3.3). Luego entonces, la identidad (3.3) se retirará del modelo, así como en las ecuaciones (3.50), (3.51) y (3.58) se suplantará la variable renta disponible, por la renta nacional. Esta simplificación del modelo se desapega de los postulados teóricos, en especial de aquellos que sostienen que el gasto público desplaza inversión privada, por lo cual podrían presentarse errores de especificación al momento de la estimación.

Debe recordarse que este modelo hasta el momento es puramente teórico, de modo que se cotejará o validará con la realidad hasta el momento que se desarrolle la estimación de los parámetros estructurales, sobre los cuales, como se ha analizado en el capítulo anterior, se pueden realizar variadas pruebas de inferencia estadística con el objetivo de comprobar si en verdad las relaciones estructurales propuestas son estadísticamente significativas.

Con el objeto de hacer más manejable al modelo, así como de facilitar el proceso de identificación de cada una de las ecuaciones estructurales del modelo, se procede a dividirlo en dos grupos: *identidades* y *ecuaciones a estimar*. Así mismo, se vuelven a renumerar todas las expresiones del modelo y se diferencian los coeficientes estructurales al introducir índices que indiquen en que ecuación se encuentra el coeficiente y respecto de qué variable.

Por principio las siguientes identidades del modelo:

$$XN_t = X_t - Q_t,$$

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + XN_t,$$

$$BP_t = XN_t + FC_t,$$

pueden agruparse en una sola, dada por

$$Y_t = C_t + K_t + G_t + X_t - Q_t + FC_t. \tag{3.59}$$

[64] El valor nominal de la renta al momento de la observación.

[65] El valor observado de la renta es indexado respecto al índice nacional de precios al consumidor (INPC).

donde G_t es el gasto público, X_t representa las exportaciones, FC_t es el flujo de capital, Q_t representa a las importaciones, C_t es el consumo, T_t es el ingreso del sector público vía impuestos, BP_t es el saldo en la balanza de pagos, K_t es la inversión, e Y_t es la renta.

De manera similar, las identidades:

$$DT_t = I_t - G_t - TR_t,$$

$$I_t = T_t + V_t,$$

pueden integrarse, obteniéndose

$$DT_t = T_t + V_t - G_t - TR_t,$$

donde G_t es el gasto público total, DT_t es el déficit del sector público, I_t es el ingreso del sector público, nacional, T_t es el ingreso del sector público vía impuestos, V_t es el ingreso del sector público por ventas y servicios, y TR_t representa los subsidios del gobierno

Sin embargo, debido a la falta de información, se excluirá del modelo la variable TR_t. A pesar de ello, la exclusión de esta variable no es tan significativa puesto que las transferencias del gobierno a los particulares, quedan comprendidas en las cifras oficiales del gasto público G_t. Por tanto,

$$DT_t = T_t + V_t - G_t. \tag{3.60}$$

Como es evidente, el modelo que se ha desarrollado no es lineal en los parámetros estructurales, de aquí que sea necesario transformarlo a una forma lineal que permita la estimación de dichos parámetros. La transformación más conveniente para linealizar el modelo es obtener la forma logarítmica de todo el modelo. Dicha transformación se basa en dos razonamientos: el primero la facilidad de linealizar el modelo, empleando las conocidas propiedades de los logaritmos, y la segunda los coeficientes estructurales estimados medirán la *elasticidad*[66] entre las diferentes variables del modelo.

[66]En términos generales se define como una medida del grado de respuesta de una variable ante cambios en otra. Así , la elasticidad precio-demanda es el grado de respuesta de la cantidad que se demanda de un bien ante cambios en su precio. En forma numérica se determina por el cambio proporcional (porcentual) en la variable dependiente, dividida entre el cambio proporcional (porcentual) en la variable independiente. Por tanto, la elasticidad resulta en un número puro, independiente de unidad, y su magnitud se puede comparar con otras variables que se midan en otras unidades. Por ejemplo, se puede comparar la elasticidad precio-demanda de los balones de fútbol contra la elasticidad precio-demanda de los automóviles Rolls-Royce.
De manera más formal, la elasticidad se puede tomar como un cambio infinitamente pequeño en la variable x, denotado por dx, al que se encuentran sus cambios correspondientes, infinitamente pequeños en y, denotados por dy, expresándolos como proporciones, en forma respectiva, de sus valores iniciales x e y.
Por consiguiente la elasticidad de y respecto a cambios en x esta dada por la razón

$$\frac{\text{cambio proporcional en } y}{\text{cambio proporcional en } x} = \frac{\delta y/y}{\delta x/x} = \frac{\delta y}{\delta x}\frac{x}{y}$$

Así, se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones de comportamiento:

$$\ln i_t = \beta_{1,14}\ln Y_t - \beta_{1,12}\ln M_t + \beta_{1,6}\ln tc_t, \tag{3.61}$$

$$\ln b_t = \beta_{2,5}\ln FC_t + \beta_{2,14}\ln Y_t, \tag{3.62}$$

$$\ln X_t = \beta_{3,15}\ln Y_t^{*} + \beta_{3,6}\ln tc_t, \tag{3.63}$$

$$\ln Q_t = -\beta_{4,11}\ln K_t + \beta_{4,9}\ln C_t - \beta_{4,6}\ln tc_t, \tag{3.64}$$

$$\ln FC_t = \beta_{5,2}\ln b_t + \beta_{5,1}\ln i_t - \beta_{5,16}\ln i_t^{*}, \tag{3.65}$$

$$\ln tc_t = \beta_{6,3}\ln X_t - \beta_{6,4}\ln Q_t + \beta_{6,5}\ln FC_t, \tag{3.66}$$

$$\ln W_t = \beta_{7,10}\ln U_t - \beta_{7,8}\ln P_t, \tag{3.67}$$

$$\ln P_t = \beta_{8,1}\ln i_t + \beta_{8,12}\ln M_t - \ln\beta_{8,14}Y_t, \tag{3.68}$$

$$\ln \mathrm{C}_t = -\beta_{9,8}\ln \mathrm{P}_t + \beta_{9,14}\ln \mathrm{Y}_t + \beta_{9,22}\ln G_t, \tag{3.69}$$

$$\ln U_t = \beta_{10,4}\ln X_t - \beta_{10,6}\ln Q_t + \beta_{10,11}\ln K_t + \beta_{10,22}\ln G_t \tag{3.70}$$

$$\ln K_t = \beta_{11,14}\ln Y_t + \beta_{11,2}\ln b_t - \beta_{11,1}\ln i_t + \beta_{11,20}\ln K_{t-1} + \beta_{11,22}\ln G_t, \tag{3.71}$$

$$\ln T_t = \beta_{12,14}\ln \mathrm{Y}_t + \beta_{12,17}\ln[\mathrm{sen}(\mathrm{t}_t\pi)]. \tag{3.72}$$

$$\ln Y_t = \beta_{13,4}\ln X_t - \beta_{13,6}\ln Q_t + \beta_{13,11}\ln K_t \tag{3.73}$$

Así mismo, la correspondiente restricción al gasto del gobierno en forma logarítmica es

$$\ln G_t < \ln I_t, \tag{3.73}$$

donde i_t es la tasa de interés bancaria, G_t es el gasto público total, b_t es la tasa de rendimiento bursátil, X_t representa las exportaciones, Q_t representa a las importaciones, DT_t es el déficit del sector público, FC_t es el flujo de capital, tc_t es el tipo de cambio, i_t^{*} es la tasa de interés en los mercados exteriores, W_t representa los salarios, t_t es la tasa de impuestos IVA, P_t es el índice de precios, I_t es el ingreso del sector público, C_t es el consumo nacional, T_t es el ingreso del sector público vía impuestos, U_t representa al empleo, V_t es el ingreso del sector público por servicios ventas, K_t es la inversión, M_t es la oferta monetaria, Y_t es la renta nacional y Y_t^{*} es la renta ponderada de los países con los que se tienen relaciones comerciales.

Como se recordará la derivada de una variable logarítmica está dada por

$$\frac{\delta \ln x}{\delta x} = \frac{1}{x},$$

de manera que, la elasticidad es equivalente a que las variables y los parámetros estructurales se hayan convertido a variables logarítmicas antes de efectuar cualquier diferenciación, es decir

$$\frac{\delta \ln y}{\delta \ln x} = \frac{\delta y/y}{\delta x/x} = \frac{\delta y}{\delta x}\frac{x}{y}.$$

Particularizando con los estimadores vía mínimos cuadrados ordinarios y MC2E, si se obtiene el logaritmo de la suma cuadrada de los residuales y se deriva con respecto al logaritmo de cada uno de los coeficientes estructurales, los estimadores obtenidos medirán la elasticidad entre las variables.

El modelo final se presenta y renumera en forma matricial en la Tabla (3.5), con el objeto de facilitar su identificación y consecuente estimación.

Tabla 3.5 Modelo Final en forma matricial.

Var/Ec.	1_t	b_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t	Y_t^*	i_t^*	i_t	W_{t-1}	K_{t-1}	DT_t	O_t	M_t
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,14}$	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,12}$
2	0	1	0	0	$\beta_{2,5}$	$\beta_{2,6}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{2,14}$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,15}$	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{4,14}$	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,14}$	0	$\beta_{5,16}$	0	0	0	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{7,19}$	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	$\beta_{8,6}$	$\beta_{8,7}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,12}$
9	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	$\beta_{9,14}$	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{9,12}$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,9}$	1	$\beta_{10,11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,22}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	$\beta_{11,5}$	0	0	$\beta_{11,8}$	0	0	1	0	$\beta_{11,14}$	0	0	0	0	$\beta_{11,20}$	0	$\beta_{11,22}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{12,21}$	0	0	$\beta_{12,21}$	0	0	$\beta_{12,21}$	0	0
13	0	0	$\beta_{13,3}$	$\beta_{13,4}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{13,11}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

3.19 Identificación del modelo desarrollado

Como se ha analizado en el capítulo anterior, para que sea posible la estimación de cada una de las 13 ecuaciones estructurales del modelo se requiere que todas éstas estén identificadas. Cada una de estas ecuaciones está identificada si y solo si se puede construir al menos un determinante diferente de cero de orden 11 x 11, a partir de los coeficientes de las variables endógenas y predeterminadas excluidas de esa ecuación, pero incluidas en las restantes ecuaciones del modelo en forma matricial. A continuación se presenta el proceso de identificación de cada una de las ecuaciones del modelo, partiendo de su correspondiente matriz de *coeficientes relevantes*.[67]

[67]La matriz de *coeficientes relevantes* se conforma a partir de los coeficientes de las variables endógenas y predeterminadas excluidas de esa ecuación, pero incluidas en las restantes ecuaciones del modelo.

Por lo que toca a la primera ecuación del modelo, donde la *tasa de interés* es la variable dependiente, su correspondiente matriz de coeficientes relevantes esta dada en la tabla (3.6).

Tabla 3.6 Matriz de coeficientes relevantes para la primera ecuación.

Var /Ec.	b_t	X_t	Q_t	FC_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	t_t	K_{t-1}	G_t
2	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0
6	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$
11	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman los primeros once vectores columnas de la tabla (3.6), obteniéndose el determinante

$$\beta_{6,3}\beta_{3,14} + \beta_{5,2}\beta_{6,3}\beta_{3,14}.$$

De manera que, la primera ecuación se encuentra identificada.

Para la segunda ecuación del modelo, donde la variable dependiente es el *índice de la bolsa de valores*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.7).

Tabla 3.7 Matriz de coeficientes relevantes para la segunda ecuación.

Var/Ec	i_t	X_t	Q_t	fc_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	t_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
3	0	1	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0	0
4	0	0	1	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
6	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, y 12 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{3,14}\beta_{5,2}\beta_{5,15}.$$

De manera que, la segunda ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la tercera ecuación del modelo, donde la variable dependiente son las *exportaciones nacionales*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.8).

Tabla 3.8 Matriz de coeficientes relevantes para la tercera ecuación.

Var /Ec.	I_t	b_t	Q_t	FC_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t	i_t^*	i_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,13}$	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{2,13}$	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{4,13}$	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{8,13}$	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	$\beta_{9,13}$	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{10,13}$	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	$\beta_{11,13}$	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{12,13}$	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, y 12 de la matriz anterior, obteniéndose

$$-\beta_{6,5}\beta_{5,15}.$$

De manera que, la tercera ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la cuarta ecuación del modelo, donde la variable dependiente son las *importaciones nacionales*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en (3.9).

Tabla 3.9 Matriz de coeficientes relevantes para la cuarta ecuación.

Var./Ec.	I_t	b_t	X_t	FC_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	i_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las primeras 11 columnas de la matriz anterior, obteniéndose el determinante

$$\beta_{6,3}\beta_{3,14}+\beta_{5,2}\beta_{6,3}\beta_{2,5}\beta_{3,14}.$$

De manera que, la cuarta ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la quinta ecuación del modelo, donde la variable dependiente son los *flujos de capital*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en (3.10).

Tabla 3.10 Matriz de coeficientes relevantes para la quinta ecuación.

Var./Ec.	X_t	Q_t	tc_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t	Y_t^*	i_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,13}$	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{2,13}$	0	0	0	0	0
3	1	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0
4	0	1	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	$\beta_{4,13}$	0	0	0	0	0
6	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{8,13}$	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	$\beta_{9,13}$	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{10,13}$	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\beta_{11,13}$	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{12,13}$	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{1,6}\beta_{6,3}\beta_{2,13}\beta_{3,14}.$$

De manera que, la quinta ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la sexta ecuación del modelo, donde la variable dependiente es el *tipo de cambio peso-dólar*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.11).

Tabla 3.11 Matriz de coeficientes relevantes para la sexta ecuación.

Var./Ec	i_t	b_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t	Y_t^*	i_t^*	i_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,13}$	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{2,13}$	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{4,13}$	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
7	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{8,13}$	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	$\beta_{9,13}$	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{10,13}$	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	1	0	$\beta_{11,13}$	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{12,13}$	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 por 11, cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10 y 15 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{5,1}\beta_{3,14}\beta_{1,19}\beta_{4,13}.$$

De manera que, la sexta ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la séptima ecuación del modelo, donde la variable dependiente son *los salarios reales*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.12)

Tabla 3.12 Matriz de coeficientes relevantes para la séptima ecuación.

Var./Ec.	I_t	b_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	C_t	K_t	T_t^*	Y_t	Y_t^*	i_t^*	r_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	$\beta_{1,13}$	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	$\beta_{2,13}$	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	$\beta_{4,13}$	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,13}$	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{9,13}$	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,13}$	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	1	0	$\beta_{11,13}$	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{12,13}$	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman los primeros once vectores columnas de la matriz anterior, obteniéndose

$$-\beta_{3,14}\beta_{8,1}\beta_{6,3}\beta_{1,6}\beta_{10,13}+\beta_{3,14}\beta_{8,1}\beta_{5,2}\beta_{6,3}\beta_{2,5}\beta_{1,6}\beta_{10,13}.$$

De manera que, la séptima ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la octava ecuación del modelo, donde la variable dependiente es *la inflación*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.13).

Tabla 3.13 Matriz de coeficientes relevantes para la octava ecuación.

Var./Ec.	b_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	W_t	C_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	r_t	K_{t-1}	G_t
1	0	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0
4	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0
6	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$
11	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 12 de la matriz anterior, obteniéndose

$$-\beta_{6,5}\beta_{5,15}\beta_{1,6}.$$

De manera que, la octava ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la novena ecuación del modelo, donde la variable dependiente es el *consumo*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.14).

Tabla 3.14 Matriz de coeficientes relevantes para la novena ecuación.

Var/Ec.	i_t	b_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	W_t	U_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	t_t	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 12 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{6,5}\beta_{8,1}\beta_{5,15}\beta_{1,6}.$$

De manera que, la novena ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la décima ecuación del modelo, donde la variable dependiente es *el empleo*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.15).

Tabla 3.15 Matriz de coeficientes relevantes en la décima ecuación.

Var/Ec	i_t	b_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	W_t	P_t	C_t	K_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	t_t	K_{t-1}	M_t
1	1	0	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	0	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{11,17}$	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13 y 16 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{8,1}\beta_{6,5}\beta_{9,8}\beta_{1,19}\beta_{5,15} + \beta_{6,5}\beta_{9,8}\beta_{8,19}\beta_{5,15}.$$

De manera que, la décima ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la décima primera ecuación del modelo, donde la variable dependiente es *la inversión*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3.16).

Tabla 3.16 Matriz de coeficientes relevantes en la décimo primera ecuación.

Var/Ec	X_t	Q_t	FC_t	ic_t	W_t	P_t	C_t	U_t	T_t^*	Y_t^*	i_t^*	i_t	M_t
1	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0
4	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0
6	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{12,16}$	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 y 13 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{6,3}\beta_{8,19}\beta_{3,14}\beta_{5,15}\beta_{1,6}\beta_{2,5}.$$

De manera que, la décima primera ecuación se encuentra identificada.

Por lo que toca a la décima segunda ecuación del modelo, donde la variable dependiente son los *ingresos del gobierno*, su matriz de coeficientes relevantes está dada en la tabla (3 17).

Tabla 3.17 Matriz de coeficientes relevantes en la décimo segunda ecuación.

Var/Ec.	I_t	b_t	X_t	Q_t	FC_t	ic_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	Y_t^*	i_t^*	K_{t-1}	G_t	M_t
1	1	0	0	0	0	$\beta_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{1,19}$
2	0	1	0	0	$\beta_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	$\beta_{3,6}$	0	0	0	0	0	$\beta_{3,14}$	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	$\beta_{4,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$\beta_{5,1}$	$\beta_{5,2}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{5,15}$	0	0	0
6	0	0	$\beta_{6,3}$	$\beta_{6,4}$	$\beta_{6,5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	$\beta_{7,8}$	0	$\beta_{7,10}$	0	0	0	0	0	0
8	$\beta_{8,1}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{8,19}$
9	0	0	0	0	0	0	0	$\beta_{9,8}$	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\beta_{10,18}$	0
11	$\beta_{11,1}$	$\beta_{11,2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\beta_{11,17}$	$\beta_{11,18}$	0

Con objeto de encontrar una matriz de 11 x 11 cuyo determinante sea diferente de cero, se toman las columnas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 13 de la matriz anterior, obteniéndose

$$\beta_{6,5}\beta_{5,15}\beta_{1,6}.$$

De manera que. la décima segunda ecuación se encuentra identificada.

Una vez que se ha comprobado que cada una de las ecuaciones que conforman el modelo se encuentran identificadas se procede a la estimación de los parámetros estructurales.

3.20 Estimación y pruebas de significación del modelo.

El modelo desarrollado, hasta este momento, es estrictamente teórico, es una abstracción de la realidad. Por consiguiente, es necesario validar o cotejar el modelo desarrollado contra el mundo real. Esto se logra a través de la aproximación econométrica, que combina los hechos y la teoría.

Los eventos del mundo real, relacionados con el fenómeno bajo estudio, se presentan a través de un conjunto de hechos relevantes, los cuales se aglutinan en series de datos, que representan observaciones históricas de estos hechos.

Por ejemplo, para medir la renta nacional se toma la serie histórica del PIB, durante cierto período de tiempo.

En el modelo se manejan 19 variables, con igual número de series históricas. Se emplean series trimestrales, puesto que normalmente las reacciones y mediciones de la economía se dan en forma trimestral. Sin embargo, algunas de las variables tuvieron que ser interpoladas, o en otros casos extrapoladas para obtener series trimestrales. En el anexo general de la investigación se presentan todas las series empleadas, su origen, así como los ajustes que se les hallan efectuado en caso de haberse requerido.

La estimación de los parámetros estructurales, los cuales cuantificán la respuesta de una variable con respecto a otra u otras, así como proveen una forma de medir y probar empíricamente, y en su caso refutar relaciones sugeridas por la teoría económica, es en sí el objetivo de esta sección.

El modelo desarrollado está formado por un conjunto de ecuaciones simultáneas. Por tanto, es estimado vía mínimos cuadrados de dos etapas, puesto como se ha analizado en al capítulo anterior se obtienen estimadores consistentes, aunque no sean los más eficientes (de menor varianza). Además, es una aproximación de información limitada, que permite estimar una ecuación aisladamente, sin tener que preocuparse por la posibilidad de que error de especificación se extienda a las demás ecuaciones del modelo. No se emplea la aproximación por mínimos cuadrados de tres etapas, debido a que el computo por dicha aproximación requiere la utilización de matrices, cuyas dimensiones desbordan la capacidad de computo de una PC de escritorio y de una hoja de cálculo ordinaria. Con un equipo de computo más grande, así como con una herramienta de software más especializada podrian haberse obtenido estimadores más eficientes. Sin embargo, en caso de presentarse un error de especificación los resultados podrían ser peores que al emplear mínimos cuadrados de dos etapas, los cuales no dejan de ser una muy buena estimación.

Así mismo, a través de la aproximación por variables instrumentales, de la cual mínimos cuadrados es un caso particular, pueden obtenerse estimaciones para la varianza de cada ecuación.

Del capítulo anterior se conoce que la varianza de la h-ésima ecuación, se puede estimar como

$$\hat{\sigma}_h{}^2 = \frac{1}{n}\,\varepsilon_h\,\varepsilon'_h = \frac{1}{n}\left(\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1\hat{\delta}_1\right)'\left(\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1\hat{\delta}_1\right). \tag{3.74}$$

Con este resultado se construye la matriz de covarianzas asintóticas del estimador vía mínimos cuadrados de dos etapas estará dada por

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_h\right) = \frac{1}{n}\,\sigma_h{}^2\,\mathbf{p}\lim\left(\frac{1}{n}\,\hat{\mathbf{Z}}'_1\,\hat{\mathbf{Z}}_1\right)^{-1} = \frac{1}{n}\,\sigma_h{}^2\,\mathbf{p}\lim\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{Y}}_1{}'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1{}'\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_1{}'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1{}'\mathbf{X}_1\end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.75}$$

donde la varianza $\sigma_h{}^2$ puede ser consistentemente estimada a través de (3.74).

A partir de los elementos de la diagonal principal de dicha matriz, se obtiene la varianza y desviación estándar de cada una de los coeficientes estructurales estimadores.

Como se ha analizado anteriormente si se asume que los términos de perturbación estocástica están normalmente distribuidos se pueden construir intervalos de confianza para los coeficientes estructurales, así como pruebas de significación estadística.

En lo que corresponde a los intervalos de confianza, dado que la muestra es de 45 observaciones, se empleará la distribución normal para construir los mencionados intervalos, puesto que la distribución t coincide con la normal cuando la muestra excede los 30 datos, ajustada a los grados de libertad.

En lo que toca a las pruebas de significación, se emplearan las pruebas t y F, analizadas en el apartado (1.4.2). La prueba t tiene por objeto determinar estadísticamente si la variable explicativa x_t explica de alguna forma a la variable dependiente y, mientras que, la prueba F comprueba la existencia de una relación lineal entre la variable dependiente y el conjunto de variables explicativas especificadas en el modelo.

A continuación se presenta un resumen de las estimaciones, intervalos de confianza y pruebas de significación t y F para cada ecuación.

Por lo que toca a la primera ecuación, donde la variable dependiente *es la tasa de interés*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.18).

3.18 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Renta nacional	0.898	0.0590	15.047	es significativo
Tipo de cambio	0.864	0.1541	5.603	es significativo
Oferta monetaria	-0.902	0.0897	-10.05	es significativo

Ya que todas las variables ahora son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 3034.22 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas.

El correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_1^2 = 0.06409.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintótica para los coeficientes estimados de la primera ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_1\right) = \begin{bmatrix} 0.2431 & .0131 & -.0083 \\ \vdots & .0082 & -.0054 \\ \cdots & \cdots & .0035 \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln i_t = \underset{(.0590)}{0.888234} \ln Y_t - \underset{(.089724)}{.901827} \ln M_t + \underset{(0.154175)}{.863907} \ln tc_t, \tag{3.76}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{i}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_1/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{i}_t \pm 0.019.$$

Para la segunda ecuación, donde la variable dependiente *es índice de la bolsa*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.19).

3.19 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Renta nacional	0 254	0.106781	2.377	es significativo
Flujo de capitales	0.596	0.281783	2.115	es significativo

Ya que todas las variables son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 81 04 > 2 83, el estadístico F con 42 y 3 g.l al 95 % de confianza Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas.
Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_2^{\,2} = 0.2482803.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la segunda ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_2\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.00268053} & -0.00600092 \\ -0.00600092 & \mathbf{0.01688969} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln b_t = \underset{(.281783)}{.596} \ln FC_t + \underset{(0.106781)}{0.254} \ln Y_t , \tag{3.77}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.
El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{b}_t \pm 1\,96\, \hat{\sigma}_2 / \sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{b}_t \pm 0.649247.$$

Para la tercera ecuación, donde la variable dependiente son las *exportaciones*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.20).

3.20 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Tipo de cambio	0.280	0.0321	8.71	es significativo
Renta EEUU	1.357	0.0044	302.54	es significativo

Ya que todas las variables son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 166341.541 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 *g.l* al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas.
Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_3^{\,2} = 0.01988.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la tercera ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_3\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.00129617} & -0.00117721 \\ -0.00117721 & \mathbf{0.00107540} \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln X_t = \underset{(0.04484)}{1.356} \ln Y_t^{*} + \underset{(0.032169)}{0.280} \ln tc_t, \tag{3.78}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{X}_t \pm 1.96\,\hat{\sigma}_3/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{X}_t \pm 0.006.$$

Para la cuarta ecuación, donde la variable dependiente son las *importaciones*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.21).

3.21 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Constante	-71.134	17.830	-3.989	Es significativo
Consumo	7.835	2.361	3.318	Es significativo
Inversión	-1.908	1.232	-1.959	Es significativo

Ya que todas las variables son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 30.07 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_4^{\,2} = 0.145.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la cuarta ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_4\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{1.5735919} & -2.9364238 \\ -2.9364238 & \mathbf{5.8083353} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln Q_t = \underset{(2.3611)}{7.834} \ln C_t - \underset{(1.2321)}{1.908} \ln K_t - \underset{(17.830)}{71.134}, \tag{3.79}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{Q}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_4/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{Q}_t \pm 0.042.$$

Para la quinta ecuación, donde la variable dependiente son los *flujos de capital*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.22).

3.22 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Tipo de cambio	1.574784	0.494363	3.185	es significativo
Tasa de interés	-2.131453	1.091573	-1.953	no es significativo

De la tabla (3.22) puede observarse que no todas las variables explicativas son estadísticamente significativas. Por tanto, se repetirá la estimación, pero empleando otras variables explicativas como el índice de la bolsa. Los resultados se resumen en (3.23).

3.23 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Tipo de cambio	-56.291	8.52884	1.909	es significativo
Tasa de interés	-47.221	7.660903	-1.990	es significativo
Constante	-369.380	667.753	-2.533	es significativo
Índice bolsa	40.590	6.238614	-1.9227	es significativo

Ya que las variable explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 3.09 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas.

Su correspondiente estimador de varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_5^{\,2} = 0.9982.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la quinta ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}(\hat{\delta}_5) = \begin{bmatrix} 9104.26 & -0.8369.52 & -6603.29 \\ \vdots & 7827.39 & 6112.67 \\ \cdots & \vdots & 4806.13 \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln FC_t = \underset{(95.41)}{-56.29} \ln tc_t + \underset{(88.47)}{47.220} \ln i_t + \underset{(0.267761)}{40.5873} \ln b_t - 369.38, \tag{3.80}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{FC}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_5/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{FC}_t \pm 0.292.$$

Es de notar, que en esta expresión la varianza resulta muy amplia, lo cual implica que no se explica muy bien el comportamiento de la variable dependiente. Sin embargo, el objetivo de este proyecto no es aumentar los flujos de capital, los cuales siempre serán capitales golondrinos, que no pueden ser el sustento de una economía sólida.

Para la sexta ecuación, donde la variable dependiente es el *tipo de cambio*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.25).

3.25 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Exportaciones	-3.246	0.537782	-1.974	No es significativo
Importaciones	5.934	0.5584	3.106	Es significativo
Flujo Capital	2.371			
Constante	-39.970	0.059755	-0.586	No es significativo

En la tabla (3.25) puede observarse que el tipo de cambio no es estadísticamente significativo. Sin embargo, no se le excluirá del modelo, puesto que el coeficiente estimado es congruente con la teoría económica.

Con estás variables explicativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 4144.70 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_6^{\,2} = 0.216.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la sexta ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_6\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.318930} & -0.30700 & -.027087 \\ -0.30700 & \mathbf{0.295782} & .025519 \\ -.027087 & .02551953 & .00365175 \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\text{Ln}\, tc_t = \underset{(0.537782)}{-1.061322} \ln X_t + \underset{(0.558430)}{1.734319} \ln Q_t \underset{(0.059755)}{-.035028} \ln FC_t, \tag{3.81}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{tc}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_6/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{tc}_t \pm 0.066826.$$

Para la séptima ecuación, donde la variable dependiente es el *salario*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.26).

3.26 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
INPC	-1.494	0.2785	-5.361	Es significativo
Empleo	3.422	0.1127	30.345	Es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 2734.73 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_7^2 = 1.4050.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la séptima ecuación es

$$\lim \text{cov}\left(\hat{\delta}_7\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.07408157} & -0.02816023 \\ -0.02816023 & \mathbf{0.01216004} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln W_t = \underset{(0.112773)}{3.422} \ln U_t - \underset{(0.278590)}{1.493} \ln P_t, \tag{3.82}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{W}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_7/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{W}_t \pm 0.411$$

Para la octava ecuación, donde la variable dependiente es el *INPC (Índice nacional de precios al consumidor)*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.27).

3.27 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Interés	1.314	0.2670	4.919	es significativo
Renta nacional	-0.254	0.1626	-1.962	es significativo
Oferta monetaria	0.056	0.1266	1.941	es significativo

Ya que todas las variables explicativas son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 357.08 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_8{}^2 = 0.1435$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la octava ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_8\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{16.160669} & -3.169 \\ -3.169 & \mathbf{.693016} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln P_t = \underset{(.2670)}{1.313} \ln i_t + \underset{(0.1266)}{.056} \ln M_t - \underset{(.1626)}{.254} \ln Y_t, \tag{3.83}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

Retomado la forma original del modelo, el correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{P}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_8/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{P}_t \pm 0.042$$

Para la novena ecuación, donde la variable dependiente es el *consumo*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.28).

3.28 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Gasto libre	-0.016	0.0097	-1.950	es significativo
Renta nacional	0.992	0.0086	115.039	es significativo
INPC	-0.037	0.0107	-3.440	es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 2838135.07 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_9{}^2 = 0.00098.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la novena ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_9\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{.00007651} & -.00007665 & -.00008608 \\ -.00007665 & \mathbf{.00011866} & .00007970 \\ -.00008608 & 00007970 & \mathbf{.00009805} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln C_t = -\underset{(0.010725)}{0.037} \ln P_t + \underset{(0.008622)}{0.992} \ln Y_t - \underset{(.0097)}{0.016} \ln G_t, \qquad \textbf{(3.84)}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{C}_t \pm 1.96\hat{\sigma}_9/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{C}_t \pm 0.0001.$$

Para la décima ecuación, donde la variable dependiente es el *empleo*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.29).

3.29 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Importaciones	-0.356	0.0438	-8.755	Es significativo
Exportaciones	0 280	0.0588	4.755	Es significativo
Inversión	0.447	0.0419	10.639	Es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 86659.55 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_{10}^{\,2} = 0.00361.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la décima ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_{10}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{.001975} & -.001594 & -.000372 \\ -.001594 & \mathbf{.002504} & -.000905 \\ -.000372 & -.000905 & \mathbf{.0012637} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln U_t = -\underset{(0.0438)}{0.356}\ln Q_t + \underset{(0.0588)}{0.280}\ln X_t + \underset{(0.0419)}{0.447}\ln K_t, \tag{3.85}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

Retomado la forma original del modelo, el correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{U}_t \pm 1.96\,\hat{\sigma}_{10}/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{U}_t \pm 0.001.$$

Para la décima primera ecuación, donde la variable dependiente es la *inversión*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.30). Cabe señalar que si bien la teoría económica sugiere que la inversión rezagada puede ser variable explicativa de la misma inversión en períodos subsecuentes. Esto no puede sustentarse empíricamente, puesto que resulta ser linealmente dependiente de otras variables explicativas, como la renta nacional. Por tanto, se excluye a la inversión rezagada del modelo.

3.30 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Renta nacional	0.952	0.0353	26.918	es significativo
Tasa interés	-0.229	0.0432	-5.284	es significativo
Gasto	-0.019	0.0339	-1.065	No significativo

De la tabla (3.30) puede observarse que el gasto público no es estadísticamente significativo. Por tanto, se repetirá la estimación, pero solo usando como variables explicativas a la renta nacional y las tasas de interés. Los resultados se resumen en (3.31).

3.31 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Renta nacional	0.931	0.0074	124.97	es significativo
Tasa interés	-0.210	0.0288	-7.27	es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 286830.54 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza Por tanto, existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa

Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_{11}^{2} = 0\,01181.$$

Luego entonces, la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la décima primera ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}\left(\hat{\delta}_{11}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.00006262} & -0.00024024 \\ -0.00024024 & \mathbf{0.00094242} \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse en la ecuación

$$\ln K_t = \underset{(0\,0074)}{0.931} \ln Y_t - \underset{(0.0288)}{0.210} \ln i_t, \qquad \textbf{(3.86)}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el subíndice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{K}_t \pm 1.96\,\hat{\sigma}_{11}/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{K}_t \pm 0.003599.$$

Para la décima segunda ecuación, donde la variable dependiente son los *ingresos del gobierno*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.32).

3.32 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Renta nacional	0.674689	0.045771	14.741	es significativo
Tasa IVA	-1.467169	0.689933	-2.127	es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora sí son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 3994.49 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g.l$ al 95 % de confianza. Por tanto si existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa.
Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_{12}{}^{2} = 0.65240.$$

Luego entonces la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la décima segunda ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}(\hat{\delta}_{12}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.00214260} & 0.03171867 \\ 0.03171867 & \mathbf{0.48682531} \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse entonces en la ecuación

$$\ln T_t = \underset{(0.045771)}{0.674711} \ln Y_t - \underset{(0.689933)}{1.466836} \ln\left[sen(t,\pi)\right], \tag{3.87}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estimado aparecen entre paréntesis en el *subíndice* de cada uno de ellos.
El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces $\ln \hat{T}_t \pm 1.96\,\hat{\sigma}_{12}/\sqrt{n}$, que al evaluarse da

$$\ln \hat{T}_t \pm 0.19062.$$

Para la décima tercera ecuación, donde la variable dependiente es *la renta nacional*, se presenta un resumen de las estimaciones y pruebas de significación t en la tabla (3.33).

3.33 Estimaciones y pruebas de significación

Variable	Coeficiente estimado	Desv. Std	Valor t	Decisión
Exportaciones	0.702	0.1304	5.383	es significativo
Importaciones	-0.673	0.0971	-6.922	es significativo
Inversión	1.108	0.0930	11.902	es significativo

Ya que todas las variables explicativas ahora si son significativas, se procede a aplicar la prueba F, cuyo valor es 163114.30 > 2.83, el estadístico F con 42 y 3 $g\,l$ al 95 % de confianza Por tanto existe una relación lineal entre la variable dependiente y la explicativa. Su correspondiente estimador de la varianza de los términos de perturbación estocástica es

$$\hat{\sigma}_{12}{}^2 = 0.01794.$$

Luego entonces la matriz de covarianzas asintóticas para los coeficientes estimados de la décima tercera ecuación es

$$\lim \operatorname{cov}(\hat{\delta}_{13}) = \begin{bmatrix} \mathbf{.01242847} & -.00790990 & -.00449064 \\ -.00790990 & \mathbf{.00980163} & -.00184806 \\ -.00449064 & -.00184806 & \mathbf{.00627066} \end{bmatrix}.$$

Todos los resultados anteriores pueden resumirse entonces en la ecuación

$$\ln Y_t = \underset{(0\,1304)}{0.702}\ln X_t - \underset{(0\,0971)}{0.673}\ln Q_t + \underset{(0\,0930)}{1.107}\ln K_t\,, \tag{3.88}$$

donde las desviaciones estándar para cada coeficiente estímado aparecen entre paréntesis en el subindice de cada uno de ellos.

El correspondiente intervalo de confianza al 95 % para la variable endógena es entonces, que al evaluarse da

$$\ln Y_t \pm\ 0.0052.$$

Los estimadores puntuales del modelo se presentan en forma matricial en la Tabla (3.34), con el objeto de facilitar la elaboración de políticas de decisión.

Tabla 3.34 *Matriz de coeficientes estructurales estimados*

b_t	i_t	X_t	Q_t	FC_t	tc_t	W_t	P_t	C_t	U_t	K_t	T_t	Y_t
-1 000	0 000	0 000	0 000	40 590	0.000	0 000	0 000	0.000	0 000	0.000	0.000	0 000
0 000	-1 000	0 000	0.000	47.221	2 371	0 000	1 314	0 000	0.000	-0 229	0 000	0 000
0 000	0 000	-1.000	0 000	0 000	-3 246	0.000	0.000	0 000	0 280	0 000	0.000	0.702
0 000	0 000	0 000	-1 000	0 000	5.934	0 000	0 000	0.000	-0 356	0.000	0 000	-0 673
0 596	0 000	0 000	0 000	-1 000	0.000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0.000	0 000
0 000	0 864	0 280	0 000	-56 291	-1 000	0.000	0.000	0 000	0.000	0 000	0 000	0 000
0 000	0 000	0.000	0 000	0 000	0 000	-1.000	0 000	0 000	0 000	0 000	0.000	0.000
0 000	0 000	0.000	0 000	0 000	0 000	-1 494	-1 000	-0.037	0 000	0.000	0 000	0 000
0 000	0.000	0 000	7.835	0.000	0.000	0 000	0 000	-1.000	0.000	0 000	0.000	0 000
0 000	0 000	0 000	0.000	0.000	0.000	3.422	0.000	0 000	-1.000	0 000	0 000	0.000
0 000	0 000	0 000	-1 908	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 447	-1.000	0 000	1 108
0 000	0 000	0.000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0.000	0 000	0 000	-1 000	0 000
0 254	0 898	0 000	0 000	0 000	0.000	0 000	-0 254	0 992	0.000	0 952	0 675	-1.000
0 000	0 000	0 000	-71.134	-369 380	-39 970	0.000	0.000	0 000	0 000	0 000	0.000	0 000
0 000	0 000	1 357	0 000	0.000	0 000	0.000	0.000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000
0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	-1 467	0.000
0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	0 000	-0.016	0.000	-0.019	0 000	0 000
0 000	-0 902	0 000	0.000	0.000	0 000	0.000	0 056	0.000	0 000	0 000	0 000	0 000

3.21 Resumen y conclusiones

En este capítulo se han alcanzado dos objetivos del proyecto:

El primero, construir un modelo matemático de la economía nacional que explique las interrelaciones entre las principales variables macroeconómicas, con base a las más reconocidas teorías económicas. Tal modelo se conforma de un conjunto de ecuaciones simultáneas, donde el cambio de una variable respecto a otra se mide por los coeficientes estructurales.

El segundo, una vez construido el modelo, se estiman valores numéricos para los coeficientes estructurales, basándose en la evolución económica del pasado. Dichos parámetros numéricos se han calculado vía mínimos cuadrados de dos etapas. Se ha empleado esta aproximación matemática, dado que, como ha sido demostrado en el capítulo anterior, proveén estimadores consistentes, son computacionalmente más fáciles de calcular, no requieren aumentar el tamaño de la muestra, y en caso de que se presente un error de especificación en cierta ecuación, este queda confinado a dicha ecuación, sin extenderse a todo el modelo.

Cabe mencionar que, la exactitud de los coeficientes estructurales está directamente relacionada con la calidad de las fuentes de información. En este proyecto las fuentes de información son instituciones reconocidas como el Banco de México y el INEGI. Por tanto se asume que dichos datos están estadísticamente bien planteados, lo cual no significa que estén libres de errores.

Finalmente, las relaciones estructurales sugeridas por la teoría económica han sido validadas estadísticamente, es decir, aquellas variables explicativas que resultaron no ser significativas en ciertas ecuaciones, han sido eliminadas, así como aquellas ecuaciones estructurales, variables dependientes, que resultaron no tener ningún efecto estadísticamente explicativo sobre alguna otra variable dependiente del modelo. De manera, que se ha alcanzado un modelo conformado únicamente por las variables que resultaron ser significativas.

De lo anterior, puede concluirse que el modelo ha dejado de ser una abstracción teórica, para convertirse en un modelo estadísticamente confiable.

Una vez que el modelo se ha construido, estimado y validado estadísticamente puede coadyuvar a la toma de decisiones, como se analizará en el siguiente capítulo.

Capitulo IV

Formulación de Políticas de Decisión Y Pronósticos

4.1 Introducción

El objetivo final en si de este proyecto es la formulación de políticas de decisión , es decir, proponer valores para las variables fiscales y monetarias gubernamentales del modelo desarrollado, de tal manera que se alcancen ciertos objetivos específicos en las variables endógenas del modelo, como el crecimiento de la renta nacional, superávit comercial, inflación mínima, aumento de la inversión productiva, etc. Cuya consecuencia social esperada es la reducción del desempleo y la recuperación del poder adquisitivo de la población

Para determinar analíticamente dichas políticas se presentarán y analizarán diversas aproximaciones como: la aproximación instrumentos-objetivos, la adaptación de un problema de programación matemática al modelo desarrollado y la simulación de diferentes alternativas para el modelo. Esta última aproximación permite pronosticar escenarios posibles de la economía nacional, a los que conducirían las políticas macroeconómicas actuales, así como compararlas con otras alternativas, dentro de los alcances del modelo.

4.2 Análisis Estructural.

Uno de los objetivos de un estudio econométrico es emplear el modelo econométrico desarrollado para el análisis estructural. Por análisis estructural se entiende la investigación de las interrelaciones del sistema bajo consideración con el propósito de entenderlas, explicarlas y cuantificarlas. Por consiguiente, el análisis estructural envuelve la estimación cuantitativa de las interrelaciones entre las variables del sistema, es decir, la estimación de los coeficientes del sistema.

En adición a la estimación de estas matrices de coeficientes al análisis estructural le concierne la interpretación de ciertos coeficientes o combinaciones de estos. Existen dos formas de interpretar los coeficientes: elasticidad y multiplicadores.

4.2.2 Elasticidad

En términos generales *la elasticidad*, se define como una medida del grado de respuesta de una variable ante cambios en otra. Puede ser interpretado como el cambio proporcional en la variable dependiente dado un cambio de unidad proporcional en una variable independiente, permaneciendo constantes las demás variables independientes. Así, la elasticidad demanda-precio es el grado de respuesta de la cantidad de bienes que se demandan ante cambios en su precio. En forma numérica, se determina por el cambio proporcional en la variable dependiente, la cantidad que se demanda, dividida entre el cambio proporcional en la variable independiente, el precio que lo causó. Por tanto, la elasticidad resulta en un número independiente de unidad, permitiendo comparar con facilidad variables que se midan en diferentes escalas y unidades.

Si la mencionada variación en la variable independiente x se supone infinitamente pequeña, denotado por ∂x, entonces el cambio proporcional en x esta dado por la razón entre el incremento sobre el valor original

$$\frac{\partial x}{x}.$$

De manera análoga, el cambio proporcional en la variable dependiente y está dado por la razón del incremento en y, denotado por ∂y, sobre el valor original en y, es decir

$$\frac{\partial y}{y}.$$

Por la definición de elasticidad se podrá establecer que el cambio proporcional de la variable dependiente con respecto a un cambio en una variable independiente está dado por

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial y}{y} \Big/ \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}. \tag{4.1}$$

Para generalizar, considérese un sistema de g ecuaciones independientes y consistentes, es decir mutuamente compatibles, en g variables endógenas y_1, y_2, ..., y_g, con m variables predefinidas α_1, α_2, ,,,, α_m (semejante a la forma estructural), definido por

$$\begin{gathered} f^1(y_1, y_2, ..., y_g; \alpha_1, \alpha_2, ,,,, \alpha_m) = 0 \\ f^2(y_1, y_2, ..., y_g; \alpha_1, \alpha_2, ,,,, \alpha_m) = 0 \\ \vdots \\ f^g(y_1, y_2, ..., y_g; \alpha_1, \alpha_2, ,,,, \alpha_m) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

Si las g funciones $f^1, f^2, \ldots, f^g$ son independientes y suficientemente dispersas entonces se sabe que el sistema puede ser resuelto, y obtenerse un conjunto de valores de equilibrio para las g variables endógenas, donde cada una de las cuales puede ser tratada como una función de las m variables independientes del modelo (semejante a la forma reducida)

$$\begin{aligned} y_1^0 &= y_1^0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \\ y_2^0 &= y_2^0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \\ &\vdots \\ y_g^0 &= y_g^0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Que se puede simplificar como

$$y_j^0 = y_j^0 \; (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \tag{4.4}$$

donde $j = 1, \ldots g$

Si se supone que estas funciones y_j^0 son diferenciables, entonces la elasticidad de y_j^0 con respecto a α_l, permaneciendo constantes las demás variables, estará dada por

$$\varepsilon_{j,l} = \frac{\partial y_j^0}{\partial \alpha_l} \frac{\alpha_l}{y_j^0} \tag{4.5}$$

donde $j = 1, \ldots, g$; $l = 1, 2, \ldots, m$.

Cualquier modelo econométrico es un caso especial de estos sistemas de ecuaciones y el desarrollo de elasticidades por consiguiente es aplicable a estos modelos.

Para ejemplificar, supóngase el caso de un modelo uniecuacional con una variable exógena, donde el valor esperado del términos de perturbación estocástica es igual a cero. De manera que, su forma estructural está dada por

$$\gamma \; y + \beta_1 \; y_{-1} + \beta_2 \; z = 0,$$

cuya correspondiente forma reducida será

$$y = -y_{-1} \frac{\beta_1}{\gamma} - z \frac{\beta_2}{\gamma}.$$

De manera que, la elasticidad de y con respecto a γ será

$$\varepsilon_{y,\gamma} = \frac{\gamma}{y} \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{y} \left(\frac{\beta_1}{\gamma^2} y_{-1} + z \frac{\beta_2}{\gamma^2} \right) = -\frac{\gamma}{y} \frac{y}{\gamma} = -1,$$

lo cual implica que un incremento de un 15% en γ, al permanecer constantes los demás parámetros, provocará un decremento del 15% para y.

Cabe mencionar la importancia central de los multiplicadores tanto para la formulación de pronósticos como para la determinación de políticas en los modelos macroeconómicos, puesto que permiten medir la respuesta de ciertas variables endógenas como el PIB o el nivel de desempleo a cambios en las variables políticas del gobierno, tanto fiscales como monetarias.

4.2.3 Multiplicadores

La forma más común de desarrollar el análisis estructural en un modelo econométrico es en términos de multiplicadores, los cuales comparan el status de cierta variable endógena antes y después de un cambio en alguna de las variables exógenas del modelo.

Por ejemplo, el multiplicador del modelo macroeconómico típico estará dado por

$$\frac{\partial Y}{\partial G},$$

indicando el efecto de un cambio en el gasto del gobierno G sobre el ingreso nacional Y. Este hecho se conoce generalmente como un multiplicador de impacto puesto que indica el efecto de un cambio en el valor actual de la variable exógena sobre el valor actual de la variable endógena.

Con el propósito de desarrollar la teoría concerniente al análisis estructural, así como a la formulación de pronósticos y de políticas es conveniente plantear otra forma más para el modelo econométrico. Se parte de la forma estructural, analizada en el capítulo anterior, la cual está dada por

$$\underset{1 \times g}{\mathbf{y}_t} \underset{g \times g}{\mathbf{\Gamma}} + \underset{1 \times k}{\mathbf{x}_t} \underset{k \times g}{\mathbf{B}} = \underset{1 \times g}{\boldsymbol{\varepsilon}_t} . \tag{4.6}$$

Si dentro del conjunto de variables predeterminadas se incluyen algunas variables endógenas rezagadas, entonces es posible presentar el modelo de otra forma, de manera que las variables endógenas rezagadas se separen del resto de las variables exógenas predeterminadas.

Si se supone que en el modelo sólo se incluyen rezagos de un período, es decir, de primer orden, y teniendo en cuenta que para aquellas variables endógenas o exógenas que no deban aparecer rezagadas un período de tiempo, su correspondiente coeficiente estructural en **B** será cero, entonces el vector de variables predeterminadas se puede particionar como

$$\mathbf{x}_t = \left(\mathbf{y}_{t-1} \mid \mathbf{z}_t\right), \tag{4.7}$$

donde $\mathbf{y}_{t-1}$ es el vector de variables endógenas rezagadas, $\mathbf{z}_t$ es el vector de las variables exógenas actuales y rezagadas un período de tiempo. Procediendo de manera similar la matriz de coeficientes estructurales **B** se particiona como

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \hline \mathrm{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

de manera que la forma estructural puede presentarse como

$$\mathbf{y}_t \underset{g \times g}{\Gamma} + \mathbf{y}_{t-1} \underset{g \times g}{\mathrm{B}_1} + \mathbf{z}_t \underset{k \times g}{\mathrm{B}_2} = \varepsilon_t . \tag{4.9}$$

Cuya correspondiente forma reducida esta dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-1}\,\Pi_1 + \mathbf{z}_t\,\Pi_2 + \mathbf{u}_t , \tag{4.10}$$

donde $\Pi_1 = -\mathrm{B}_1\Gamma^{-1}$, $\Pi_2 = -\mathrm{B}_2\Gamma^{-1}$, $\mathbf{u}_t = \varepsilon_t\Gamma^{-1}$.

Por consiguiente, el k',g' multiplicador de impacto, el cual mide la elasticidad de la g-ésima variable endógena con respecto a la k-ésima variable exógenas, estará dado por

$$\frac{\partial y_{t,g'}}{\partial z_{t,k'}} = (\Pi_2)_{k'g'}, \tag{4.11}$$

donde $g'=1,2,\ldots,g$ $k'=1,2,\ldots,k$.

Esto significa que, el $k'g'$ elemento de la matriz Π_2, es en si el $k'g'$ multiplicador de impacto, en el primer período de tiempo.

Sin embargo, este resultado puede extenderse a *largo plazo*, es decir calcular el efecto de un crecimiento sostenido y constante, durante períodos de tiempo consecutivos, en alguna variable exógena sobre la variable endógena correspondiente. Para lo cual es necesario expresar el modelo econométrico en una forma alterna, conocida como *forma final*.

En base a la forma reducida para $\mathbf{y}_t$, dada en (4.10), se puede establecer de manera análoga que la forma reducida de $\mathbf{y}_{t-1}$ estará dada por

$$\mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_{t-2}\,\Pi_1 + \mathbf{z}_{t-1}\,\Pi_2 + \mathbf{u}_{t-1} . \tag{4.12}$$

Si ahora se substituye el valor de $\mathbf{y}_{t-1}$, dado por (4.12), en (4.10) se obtiene

$$\mathbf{y}_t = \left(\mathbf{y}_{t-2}\,\Pi_1 + \mathbf{z}_{t-1}\,\Pi_2 + \mathbf{u}_{t-1}\right)\Pi_1 + \mathbf{z}_t\,\Pi_2 + \mathbf{u}_t .$$

Si se agrupan términos comunes se simplifica a

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-2}\,\Pi_1^2 + \Pi_2\left(\mathbf{z}_t + \mathbf{z}_{t-1}\,\Pi_1\right) + \Pi_1\,\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{u}_t . \tag{4.13}$$

Si se extiende el resultado en (4.10) a $\mathbf{y}_{t-2}$ se tiene

$$y_{t-2} = y_{t-3}\,\Pi_1 + z_{t-2}\,\Pi_2 + u_{t-2}. \tag{4.14}$$

Se prosigue a substituir (4.14) en (4.13), resultando

$$y_t = \left(y_{t-3}\,\Pi_1 + z_{t-2}\,\Pi_2 + u_{t-2}\right)\Pi_1^2 + \Pi_2\left(z_t + z_{t-1}\,\Pi_1\right) + \Pi_1\,u_{t-1} + u_t.$$

Al reagrupar términos, es equivalente a

$$y_t = y_{t-3}\,\Pi_1^3 + \Pi_2\left(z_t + z_{t-1}\,\Pi_1 + z_{t-2}\,\Pi_1^2\right) + \Pi_1^2\,u_{t-2} + \Pi_1\,u_{t-1} + u_t. \tag{4.15}$$

Se continua con el mismo proceso de iteración hacia atrás, hasta alcanzar el período de tiempo base, donde $t=0$, de manera que se obtendrá

$$y_t = y_0\,\Pi_1^t + z_t\,\Pi_2 + z_{t-1}\,\Pi_1 + z_{t-2}\,\Pi_1^2 + \ldots + z_1\,\Pi_1^{t-1}\big) + u_t + \Pi_1\,u_{t-1} + \Pi_1^2\,u_{t-2} + \ldots + \Pi_1^{t-1}\,u_1,$$

$$y_t = y_0\,\Pi_1^t + \sum_{j=0}^{t-1} z_{t-j}\Pi_2\Pi_1^j + \sum_{j=0}^{t-1} u_{t-j}\Pi_1^j. \tag{4.16}$$

Esta expresión se conoce como la *forma final*, desde la cual se podrán calcular los multiplicadores tanto intermedios como de largo plazo.

En esta forma cada una de las g variables endógenas se expresa como una función lineal basada en los valores de todas las variables endógenas y_0, los valores actuales y rezagados de las variables exógenas $(z_t, z_{t-1},\ldots,z_1)$, y de los valores actuales y rezagados de los términos de perturbación estocástica $(u_t, u_{t-1},\ldots,u_1)$.

Con base en la forma final del modelo econométrico (4.16), el $k'g'$ multiplicador acumulado en el periodo n estará dado por

$$\left.\frac{\partial y_{t,g'}}{\partial z_{t,k'}}\right|_{*} = \sum_{j=0}^{t-1}\left(\Pi_2\Pi_1^j\right)_{k',g'} = \Pi_2\left[\left(I + \Pi_1 + \ldots + \Pi_1^{t-1}\right)\right]_{k'g'}. \tag{4.17}$$

Si se hace $n=1$, entonces se obtendrá el caso del $k'g'$ multiplicador de impacto en el primer periodo de tiempo (4.11). Los valores finitos para n mayores que 1 proporcionarán multiplicadores acumulados intermedios, los cuales indican el cambio en cada una de las variables endógenas respecto al incremento sostenido y constante a lo largo de n períodos en cada variable exógena. Si se toma el límite cuando n tiende a infinito, y con base a que la serie de potencias $\Pi_2\left[\left(I + \Pi_1 + \ldots + \Pi_1^{t-1}\right)\right]_{k'g'}$ es una serie geométrica que converge asumiendo que $0 \le \Pi_1 < 1$, se obtiene el multiplicador a largo plazo

$$\left.\frac{\partial y_{t,g'}}{\partial z_{t,k'}}\right| = \Pi_2\left[\left(I - \Pi_1\right)^{-1}\right]_{k'g'}. \tag{4.18}$$

Este multiplicador mide el efecto sobre la variables endógena g' cuando la variable exógena k' experimenta un crecimiento constante en cada período de tiempo.

4.3 Pronósticos

Dentro de los objetivos primordiales del análisis econométrico se encuentra la predicción de valores para ciertas variables fuera de la muestra de datos disponible, es decir en otro período de tiempo. Dichas predicciones se conocen como pronósticos. Se asume que, los pronósticos serán cuantitativos, explícitos y no ambiguos y en consecuencia verificables, es decir que los pronósticos emitidos se pueden validar o refutar.

Los pronósticos están estrechamente relacionados con la formulación de políticas, de hecho la mayoría de los métodos de evaluación de políticas descansan sobre algún tipo específico de pronóstico (condicional si se basa bajo la adopción de cierta política).

Asumiendo que el vector de variables $\mathbf{y}$ será pronosticado, el problema se convierte en predecir valores para $\mathbf{y}$ en el tiempo futuro $t + h$, dadas las t observaciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_t$ y las posibles observaciones de otras variables. Se tomará que el tiempo t es el presente, y el intervalo de tiempo positivo h será llamado el horizonte del pronóstico. De manera que, cierto pronóstico puntual para $\mathbf{y}$ en el momento $t + h$ se denotará por

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h}. \tag{4.19}$$

Este pronóstico puntual puede interpretarse como el valor esperado de la distribución, empleando los datos $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_t$.

Dicho estimador puntual, puede dar lugar a una estimación por intervalos, por ejemplo del 90% de confianza

$$[\,\hat{\mathbf{y}}_{t+h}, \hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+h}\,]_{0.90},$$

definido por

$$P[\,\hat{\mathbf{y}}_{t+h} \le \mathbf{y}_{t+h} \le \hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+h}\,] = 0.90. \tag{4.20}$$

Debido a que la incertidumbre es mayor a medida que el pronóstico se aleja de los datos de la muestra, el horizonte del pronóstico deberá de acotarse. Por tanto, en el modelo desarrollado se prefiere el pronóstico a corto plazo, puesto que a medida que se extiende el horizonte del pronóstico aumenta la incertidumbre del pronóstico estimado.

Existen diferentes alternativas para elaborar un pronóstico que se pueden clasificar en aproximaciones econométricas y no econométricas.

4.3.1 Formulación de pronósticos, aproximación no econométrica

En este apartado se presentan brevemente las aproximaciones no econométricas que, como se analizará más adelante, pueden plantearse como casos particulares de la aproximación econométrica De estas aproximaciones destacan:

- **Opinión de los expertos**

La forma más antigua es la opinión de los expertos, basada sobre información de juicio que los expertos tienen en el fenómeno en cuestión. En general en esta aproximación no existe un trabajo de investigación, sino juicios y factores evaluados y ponderados subjetivamente, en base a la experiencia del experto.

- **Pronósticos persistentes**

Una forma más formal de pronosticar es el pronóstico persistente, basado en el supuesto de que el sistema tiene cierto momento, donde el futuro es una replica del pasado. El caso más simple es pronóstico de *status quo*, el cual predice que el valor actual de la variable continuará a lo largo del tiempo futuro, lo que se representa por

$$\hat{y}_{t+1} = y_t . \tag{4.21}$$

Un pronóstico de este tipo puede ser suponer que la cotización de dólar mañana será idéntica a la del día de hoy.

Otra forma simple de pronóstico persistente es el que predice el mismo cambio de un periodo al otro contínuamente

$$\hat{y}_{t+1} - y_t = y_t - y_{t-1} , \tag{4.22}$$

que es equivalente a

$$\hat{y}_{t+1} = 2y_t - y_{t-1} .$$

- **Pronósticos autorregresivos**

Una forma mas compleja y general de los pronósticos persistentes es el modelo autoregresivo, donde el pronóstico es una combinación lineal y ponderada de los valores observados anteriormente

$$\hat{y}_{t+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_{t-j} . \tag{4.23}$$

Los coeficientes a_j pueden ser especificados a priori o pueden ser estimados estadísticamente. Nótese que los pronósticos persistentes, dados en (4.21) y (4.22), pueden ser reexpresados como un caso particular del modelo autoregresivo donde $a_0 = 1$ y $a_j = 0$, para toda $j > 0$ en el primer caso, mientras que para el segundo $a_0 = 2$, $a_1 = -1$ y $a_j = 0$ para toda $j > 1$

Modelos autoregresivos de medias móviles (ARIMA) que incorporen el factor de variaciones estacionales y a los términos de perturbación estocástica son mas recomendables, puesto que existe toda una teoría conocida como metodología de Box & Jenkins que fundamenta el uso y eficiencia de éstos pronósticos.

4.3.3 Formulación de pronósticos, aproximación econométrica

La aproximación econométrica en la formulación de pronósticos se basa en la formula estructural presentada en el apartado (4.1), la cual establece

$$\mathbf{y}_t \underset{g \times g}{\Gamma} + \mathbf{y}_{t-1} \underset{g \times g}{\mathrm{B}_1} + \mathbf{z}_t \underset{k \times g}{\mathrm{B}_2} = \varepsilon_t, \tag{4.24}$$

donde $\mathbf{y}_t$ es el vector de g variables endógenas, $\mathbf{y}_{t-1}$ es el vector de las mismas g variables endógenas en el período anterior, $\mathbf{z}_t$ es el vector de k variables exógenas, ε_t es el vector de g términos de perturbación estocástica.

La correspondiente forma reducida para (4.24) esta dada por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-1} \Pi_1 + \mathbf{z}_t \Pi_2 + \mathbf{u}_t, \tag{4.25}$$

donde $\Pi_1 = -\mathrm{B}_1\Gamma^{-1}$, $\Pi_2 = -\mathrm{B}_2\Gamma^{-1}$, $\mathbf{u}_t = \varepsilon_t\Gamma^{-1}$

Dado el modelo econométrico en (4.25), un pronóstico a corto plazo de los valores para todas las variables endógenas del modelo en el próximo período estará dado por

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \mathbf{y}_t \hat{\Pi}_1 + \hat{\mathbf{z}}_{t+1} \hat{\Pi}_2 + \hat{\mathbf{u}}_{t+1}. \tag{4.26}$$

Esta predicción del valor de las variables endógenas en el próximo período consistirá de dos componentes sistemáticos y un componente de juicio.

El primer componente sistemático indica la dependencia de los valores actuales de las variables endógenas $\mathbf{y}_t$ respecto de sus valores anteriores, ponderados a través de los coeficientes estimados en $\hat{\Pi}_1$. Este término resume la dependencia sistemática de cada una de las variables endógenas de sus valores previos debido a factores como la correlación serial, un crecimiento constante o un fenómeno de rezagos distribuidos.

El segundo componente sistemático se basa en pronósticos o estimaciones de los valores futuros de las variables exógenas $\hat{\mathbf{z}}_{t+1}$ y en su matriz de coeficientes estimados $\hat{\Pi}_2$. Este término refleja la dependencia de las variables endógenas de las variables exógenas del modelo Puesto que, las $\hat{z}_{t+1}$ son variables exógenas, son determinadas por factores no tratados explícitamente en el modelo, por tanto, resulta razonable que estas variables sean estimadas en base a otros factores fuera del modelo. Un caso importante puede ser que estas variables $\hat{z}_{t+1}$ sean tratadas en base a otro modelo econométrico, o bien que sean extrapoladas a través de otro mecanismo como los modelos ARIMA, (criterios que se aplicarán en esta investigación).

El tercer componente es el componente de juicio $\hat{u}_{t+1}$, también conocido como el vector de factores adicionales, los cuales pueden ser interpretados como estimaciones de los valores futuros de los términos de perturbación estocástica, o alternativamente como ajustes para las intersecciones en cada una de las ecuaciones estructurales, es decir constantes dadas de las que partirá el pronóstico. Este componente resume los efectos de todos los factores, incluyendo las variables omitidas del modelo. Estos factores adicionales son formulados en base a juicios de factores no incluidos en el modelo. Por ejemplo, un modelo del presupuesto de cierta empresa podría *no tomar en cuenta explícitamente* la posibilidad de una huelga, pero la experiencia de los tomadores de decisiones nos indica que los contratos colectivos de trabajo están expirando el próximo año, por lo que la producción estimada para el año próximo podría ser ajustada un poco hacia abajo.

De aquí se concluye que, el pronosticar no es simplemente una actividad mecánica, puesto que incluye consideraciones subjetivas, a través de los factores adicionales, las cuales generalmente aumentan significativamente la precisión de los pronósticos formulados con el modelo econométrico.

Mientras que los factores adicionales reflejan consideraciones de juicio, la elección para los valores de $\hat{u}_{t+1}$ no debe ser guiada solamente por los factores relevantes que han sido omitidos del modelo, sino también por los residuales obtenidos al estimar el modelo y por los errores en los pronósticos anteriores.

Por ejemplo, si las características recientes del sistema son diferentes de aquellas a lo largo de toda la muestra y se espera que estas características continuaran en el período de pronóstico, o si los residuales pasados o los errores de pronóstico exhiben correlación serial positiva o un patrón cíclico, entonces sería apropiado usar los residuales recientes o los errores de pronóstico para construir factores adicionales. Una aproximación seria usar los factores adicionales de tal forma que los valores pronosticados(calculados) para las variables endógenas en las más recientes observaciones sean ajustados para tomar los mismos valores que los valores observados.

Otra forma de obtener los factores adicionales sería de tal manera que un promedio del error en los últimos pronósticos formulados se anule.

El pronóstico econométrico dado en (4.26) es conocido como un *antepronóstico* porque se elabora antes de que el evento tome lugar. En contraste, un *postpronóstico* se hace después de que el evento ocurrió, reemplazándose los valores pronosticados de las variables exógenas $\hat{\mathbf{z}}_{t+1}$ por los valores realmente observados $\mathbf{z}_{t+1}$ y entonces reemplazar los factores adicionales $\hat{\mathbf{u}}_{t+1}$ por los valores cero esperados en los términos de perturbación estocástica. De manera que, el postpronóstico está dado por

$$\hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+1} = \mathbf{y}_t \hat{\Pi}_1 + \mathbf{z}_{t+1} \hat{\Pi}_2. \tag{4.27}$$

A su vez la relación entre el antepronóstico y el postpronóstico es

$$\hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+1} = \hat{\mathbf{y}}_{t+1} + [\mathbf{z}_{t+1} - \hat{\mathbf{z}}_{t+1}]\hat{\Pi}_2 - \hat{\mathbf{u}}_{t+1}. \tag{4.28}$$

De manera que, $\hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+1}$ puede obtenerse de $\hat{\mathbf{y}}_{t+1}$, después de haber observado $\mathbf{z}_{t+1}$, corrigiendo tanto los errores al predecir las variables $[\mathbf{z}_{t+1} - \hat{\mathbf{z}}_{t+1}]$ y en los factores adicionales $\hat{\mathbf{u}}_{t+1}$. El postpronóstico es útil al hacer énfasis en la estimación explícita de partes del pronóstico, específicamente en las matrices de coeficientes estimados $\hat{\Pi}_1$ y $\hat{\Pi}_2$, y eliminando la influencia de otros elementos del antepronóstico como $\hat{\mathbf{z}}_{t+1}$ y $\hat{\mathbf{u}}_{t+1}$, los cuales por lo general no son estimados explícitamente Por ejemplo, es posible evaluar el desempeño del modelo mediante postpronósticos.

Los pronósticos presentados hasta el momento son determinísticos (puntuales), puesto que están basados en valores específicos para las variables actuales endógenas, en coeficientes fijos, y en los valores futuros de las variables exógenas y de los términos de perturbación que están ya dados. Sin embargo, todas estas variables están sujetas a la incertidumbre. Dicha incertidumbre se puede manejar a través de un intervalo de confianza para el pronóstico, el cual es conocido como *pronóstico estocástico*.

Una aproximación para la construcción de dichos intervalos es utilizar la distribución conocida de los estimadores de los parámetros estructurales y la de los términos de perturbación estocástica para determinar la distribución de probabilidad de $\hat{\mathbf{y}}_{t+1}$, como una combinación lineal de las funciones de distribución. Si además, se supone que tanto las estimaciones de los parámetros estructurales como la distribución de los términos de perturbación sigue una distribución normal, entonces la distribución de probabilidad de los pronósticos $\hat{y}_{t+1}$ también seguirá una distribución normal, de manera que será posible construir intervalos de confianza para estos pronósticos.

La formulación de pronósticos econométricos tiene grandes ventajas sobre cualquier otra vía de pronóstico, entre las que sobresalen:

- La aproximación econométrica provee una estructura útil en la cual se pueden considerar diversos factores posibles, tales como los valores anteriormente observados de las variables a pronosticar, valores de variables relacionadas en una manera explicativa, así como otros factores subjetivos o no mostrados explícitamente.
- Permite el tratamiento de varios enfoques, sintetizando factores sistemáticos y de juicio subjetivo en una sola expresión
- Se obtienen pronósticos que están interrelacionados, y que en consecuencia son consistentes unos con otros, puesto que todos cumplen las restricciones e identidades del modelo formulado, anulándose la posibilidad de pronósticos dispares o incongruentes si se obtuvieran aisladamente cada uno de ellos.
- Debido a que los pronósticos son explícitamente condicionales a los valores pronosticados de las variables exógenas $\hat{\mathbf{z}}_{t+1}$, de los factores adicionales $\hat{\mathbf{u}}_{t+1}$, de las matrices de coeficientes estimados $\hat{\Pi}_1$ y $\hat{\Pi}_2$ y de los valores actuales de las variables endógenas actuales $\mathbf{y}_t$ es posible analizar la relativa importancia de cada uno de estos elementos del pronóstico aisladamente y entonces probar la sensibilidad del pronóstico a cambios en alguna de las variables, particularmente cuando se actualizan los datos.
- Es posible comparar un antepronóstico con su correspondiente postpronóstico, de manera que se evalúe su eficiencia.
- El mayor grado de precisión comparado con cualquier otra aproximación, incluso se puede afirmar que en las aproximaciones no econométricas se hace énfasis en solo una de los aspectos del pronóstico econométrico, excluyendo los demás aspectos.

4.3.4 Pronósticos a largo plazo.

Los pronósticos a largo plazo son aquellos donde el horizonte del pronóstico h excede algún nivel predefinido h_0. Entonces el pronóstico a largo plazo esta dado por

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h},$$

donde $h > h_0$. Conformándose de los valores pronosticados para todas las variables endogenas h periodos de tiempo adelante. El nivel h_0 depende en un principio de la naturaleza de las variables a pronosticar, específicamente la razón a la que el intervalo del pronóstico se dispersa a lo largo del tiempo.

Los pronósticos a largo plazo pueden ser obtenidos desarrollando una sucesión de pronosticos a corto plazo, esto es iterando los pronósticos obtenidos de la forma reducida (4.26). Equivalentemente pueden ser obtenidos de la forma final. Usando esta aproximación el pronóstico a largo plazo esta dado por

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h} = \mathbf{y}_t \hat{\Pi}_1^h + \sum_{j=0}^{h-1} \hat{\mathbf{z}}_{t+h-j} \hat{\Pi}_2 \hat{\Pi}_1^j + \sum_{j=0}^{h-1} \hat{\mathbf{u}}_{t+h-j} \hat{\Pi}_1^j . \tag{4.29}$$

En esta formulación los pronósticos a largo plazo son explícitamente condicionales a los valores actuales de las variables endógenas, al pronóstico de los valores futuros de las variables exógenas y de los factores adicionales, así como a las matrices de coeficientes estructurales estimados. De manera que, es posible analizar los efectos de cambios en dichos aspectos para los pronósticos a largo plazo. El correspondiente postpronóstico a largo plazo esta dado entonces por

$$\hat{\hat{\mathbf{y}}}_{t+1} = \mathbf{y}_t + \hat{\Pi}_1^h + \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{z}_{t+h-j} \hat{\Pi}_2 \hat{\Pi}_1^j . \tag{4.30}$$

A su vez los pronósticos estocásticos pueden ser construidos de la misma forma que los pronósticos a corto plazo, es decir construir intervalos de confianza para los pronósticos puntuales en base a la distribución de probabilidad de los coeficientes estimados y de los términos de perturbación estocástica.

4.3.5 Eficiencia de los pronósticos

Dado un pronóstico sea a corto o largo plazo el interés se centra en su precisión y en su impacto. Varios consideraciones deben de plantearse al momento de analizar la precisión de un pronóstico:

- La propia imprecisión del modelo desarrollado, que es una simplificación de la realidad y en consecuencia omite ciertas influencias y simplifica otras.
- La imprecisión de los datos utilizados en la estimación del modelo.
- La imprecisión o sesgo encontrado al estimar los parámetros del modelo.
- Errores en el pronóstico de las variables exógenas y de los factores adicionales.

Existen muchas formas de medir la precisión de un pronóstico, una de estas es el error absoluto en el pronóstico a corto plazo $\hat{e}_{t+1}$, que para el caso particular de un pronóstico a corto plazo esta dado por

$$\hat{e}_{t+1} = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = [\, y_t \Pi_1 + z_{t+1} \Pi_2 - u_{t+1} \,] - [\, y_t \hat{\Pi}_1 + \hat{z}_{t+1} \hat{\Pi}_2 + \hat{u}_{t+1} \,], \tag{4.31}$$

es decir, por la diferencia entre el antepronóstico y el valor realmente observado.

Agrupando los términos se obtiene

$$\hat{e}_{t+1} = y_t [\, \Pi_1 - \hat{\Pi}_1 \,] + z_{t+1} [\, \Pi_2 - \hat{\Pi}_2 \,] + \hat{\Pi}_2 \, [\, z_{t+1} - \hat{z}_{t+1} \,] + [\, u_{t+1} - \hat{u}_{t+1} \,]. \tag{4.32}$$

En esta notación cada uno de los términos tiene un significado específico. El primero consiste de los errores debidos a una incorrecta estimación de la matriz de coeficientes Π_1, estos errores son ponderados por y_t. El segundo término consiste en los errores debidos a la estimación de la matriz de coeficientes Π_2, que son ponderados por los verdaderos valores de las variables exógenas z_{t+1}. El tercer término consiste de los errores al pronosticar los valores futuros de las variables exógenas, que son ponderados por la matriz de coeficientes $\hat{\Pi}_2$. El último término se conforma de los errores en los términos de perturbación estocástica, donde $\hat{u}_{t+1}$ representa a los factores adicionales.

El error absoluto $\hat{e}_{t+1}$ es en sí una variable aleatoria , puesto que es una combinación lineal de otras variables aleatorias. $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2$ y $\mathbf{u}_{t+1}$

Calculando el valor esperado de (4.32), asumiendo que las matrices de coeficientes $\hat{\Pi}_1$ y $\hat{\Pi}_2$ sean estimadores insesgados, que los términos de perturbación estocástica $\mathbf{u}_{t+1}$ tienen media cero y que los datos en z_{t+1} son valores determinísticos ya dados, se obtendrá

$$E[\, \hat{e}_{t+1} \,] = \Pi_2 [\, z_{t+1} - \hat{z}_{t+1} \,] - \hat{u}_{t+1}. \tag{4.33}$$

De manera que, el error esperado consistirá en el error al predecir las variables exógenas, ponderado por el verdadero valor de la matriz de coeficientes Π_2, menos los factores adicionales. Entonces, el pronóstico $\hat{y}_{t+1}$ será un estimador insesgado si el valor esperado del error absoluto, definido en (4.31), es cero:

$$E[\, \hat{e}_{t+1} \,] = 0. \tag{4.34}$$

En dicho caso el valor medio del valor observado y el del pronosticado coinciden

$$E[\, y_{t+1} \,] = E[\, \hat{y}_{t+1} \,]. \tag{4.35}$$

Por tanto, en base a (4.33), el pronóstico será insesgado si

$$\hat{u}_{t+1} = \Pi_2 [z_{t+1} - \hat{z}_{t+1}], \tag{4.36}$$

lo cual implica que a menos que las variables exógenas se pronostiquen sin error o de que $\Pi_2 = 0$, el no incluir factores adicionales o hacerlos valer cero provocará que se obtengan pronósticos sesgados.

Cabe señalar que para la mayoría de las variables que se someten a un proceso de pronóstico, independientemente de la unidad de tiempo empleada, existe un fenómeno de subestimación al cambio, es decir al comparar los valores pronosticados con los valores posteriormente observados se encuentra que los primeros tienden a ser menores que los valores observados. Una posible explicación de este sesgo sistemático es que todos las metodologías de pronóstico se basan en algún modelo, el cual al ser una simplificación de la realidad, asume que ciertas variables no cambian o las incluye como parte de los términos de perturbación estocástica. Al suponer que estas variables no cambian el efecto se extiende a los valores pronosticados, por lo que el resultado de esta simplificación es la tendencia sistemática a subestimar los valores de las variables pronosticadas El resultado será la mayoría de las veces un sesgo conservador al pronosticar.

4.4 Formulación de Políticas

El objetivo final del análisis econométrico, y en sí el más importante, es la formulación de *políticas* de decisión.

Por política se entiende elegir determinados valores para las variables que se pueden controlar dentro del modelo, con el propósito de alcanzar ciertos objetivos en las variables endógenas del modelo.

Las variables sobre las que se determinarán las políticas son conocidas como variables de control.

La evaluación y formulación de estás políticas está estrechamente relacionada con los pronósticos De hecho la evaluación de políticas y la formulación de pronósticos están relacionadas en un sistema con retroalimentación: los pronósticos se basan en parte sobre supuestos concernientes a las acciones de los tomadores de decisiones del gobierno; inversamente la evaluación de políticas se basa parcialmente sobre pronósticos de los efectos que producirán estas políticas.

Así como los pronósticos distinguen entre pronósticos a largo y corto plazo, la evaluación de políticas distingue también entre corto y largo plazo. Un punto de interés en la formulación de políticas es el tiempo de horizonte del plan, es decir, que alcance en el tiempo tendrán, y que alcance tendrán sus efectos.

En este proyecto se estudiaran políticas de corto plazo, puesto que a medida que los pronósticos y políticas se alejan de los datos observados, éstos tienden a alejarse de la realidad.

Para manejar la notación de políticas se dirá que se escoge una política en el tiempo t, incluyendo los datos observados en el periodo t - 1. No obstante el análisis puede ser generalizado a políticas a largo plazo, donde se elegirán políticas para el tiempo t, t+1, t+2, ..., t+h, donde h es el tiempo de horizonte del plan.

Asumiendo que el vector de variables **r** agrupa las distintas políticas a ser seleccionadas, es decir, los valores que han de tomar las variables, el problema de evaluación de políticas a corto plazo consiste en seleccionar los valores óptimos para estás variables durante el período actual t. Estas políticas se denotan por el vector $\mathbf{r}_t$.

Por su parte, una política a largo plazo se denota entonces por $\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_{t+1}, \ldots, \mathbf{r}_{t+h}$, donde h es el tiempo de horizonte del plan.

En el modelo que se ha desarrollado se pretende formular políticas macroeconómicas sobre las variables fiscales y monetarias, que como se ha mencionado con anterioridad pueden servir como instrumentos para fomentar el crecimiento económico, controlar la inflación y disminuir el desempleo.

Para formular políticas óptimas existen diversas aproximaciones, al igual que en la formulación de pronósticos, de las cuales se analizarán las más importantes.

4.4.1 Aproximaciones no econométricas

La más tradicional es formulada por grupos de individuos seleccionados de acuerdo a su experiencia, es decir, por la opinión de los expertos. Por ejemplo, en varios lugares del mundo las políticas fiscales son determinadas por el parlamento, sin embargo, los miembros del parlamento son asesorados por personal capacitado en diversas disciplinas.

El conocido *Método Delphi*, donde las opiniones de un panel de expertos son conjuntadas para obtener una política de consensos. Su principal característica, como se ha mencionado, es que el método intencionalmente evita el contacto cara a cara, con el fin de evitar la subjetividad.

Otro enfoque se basa en la continuación del status quo de las cosas, con solamente cambios graduales, esta aproximación es conocida como *incrementalismo*. En ella los tomadores de decisiones analizan cambios marginales en vez de cambios globales. Por ejemplo, en la formulación de presupuestos no se calcula un nuevo presupuesto cada año, sino que se efectúan pequeños cambios con respecto al período anterior analizándose escrupulosamente solamente ciertas variables. Esta aproximación se basa en el principio de la suficiencia, en opuesto a la optimización que se busca en el análisis econométrico. Puesto que en lugar de efectuar un cambio total a través de un presupuesto nuevo que optimice las cosas se prefiere solamente "satisfacer "o "sostener" reconociéndose las limitaciones inherentes en sus capacidades para situaciones complejas. Los tomadores de decisiones no examinan todos los posibles cursos de acción, en su lugar prefieren seleccionar cursos satisfactorios que cumplen ciertos niveles aspirados.

Sin embargo, estas aproximaciones no dejan de ser empíricas en muchos casos, pues unas carecen de un rigor científico y otras se basan en teorías puras que no son validadas en la realidad de alguna forma.

4.4.2 Aproximación econométrica

En este trabajo se propondrá la aproximación econométrica, donde para formular políticas de decisión se combina el modelo econométrico estimado con información explícita e implícita sobre los objetivos, para así evaluar que políticas puedan llevar a alcanzarlos. La política seleccionada conjuntamente con factores externos, muchas veces estocásticos, determinan las salidas del sistema, mismas que más adelante se convertirán en los hechos (datos) que en el futuro se utilizarán para replantear el modelo econométrico.

Existen diversas maneras en las que el modelo econométrico puede ser utilizado para formular políticas de decisión. Estas alternativas serán utilizadas con el modelo ya desarrollado. Recuérdese que las políticas no son más que valores predeterminados para las variables exógenas que se pueden controlar en el modelo.

Considérese la forma estructural, dada en (4.9)

$$\mathbf{y}_t \underset{g\times g}{\Gamma} + \mathbf{y}_{t-1} \underset{g\times g}{\mathbf{B}_1} + \mathbf{z}_t \underset{k\times g}{\mathbf{B}_2} = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{4.37}$$

donde las variables predeterminadas se han particionado en dos matrices: la una de variables endógenas rezagadas, y la otra de variables exógenas

Si a su vez se particiona al termino correspondiente a las variables exógenas en dos submatrices: La primera formada por aquellas variables exógenas que están fuera del control del tomador de decisiones; y la segunda formada por las variables que si están bajo el control del tomador de decisiones:

$$\underset{k\times g}{z_t B_2} = \left(z_t B_2 \,\vdots\, r_t A\right), \qquad (4.38)$$

donde el vector r_t representa las l variables exógenas que están bajo control en la investigación, sean variables monetarias o fiscales; mientras z_t es el vector de k-l variables exógenas.

Las políticas en el vector r_t también son conocidas con el nombre de instrumentos.

De manera que, (4.37) se expresa ahora como

$$\underset{1\times g}{y_t}\,\underset{g\times g}{\Gamma} + \underset{1\times g}{y_{t-1}}\,\underset{g\times g}{B_1} + z_t \underset{k\times g-l}{B_2} + \underset{1\times l}{r_t}\,\underset{l\times g}{A} = \underset{1\times g}{\varepsilon_t}, \qquad (4.39)$$

donde y_t es el vector de las g variables endógenas, también conocidas como objetivos, para las cuales se desean alcanzar ciertas metas o valores. y_{t-1} es el vector de g variables endógenas rezagadas, y ε_t es el vector de g términos de perturbación estocástica.

B_1, Γ, B_2, A son las correspondientes matrices de coeficientes estructurales para las variables del modelo.

La forma estructural puede ser resuelta para las variables endógenas actuales y_t, siempre y cuando Γ sea no singular. De manera que, la forma reducida estará dada por

$$y_t = -y_{t-1} B_1 \Gamma^{-1} - z_t B_2 \Gamma^{-1} - r_t A \Gamma^{-1} + \varepsilon_t \Gamma^{-1}, \qquad (4.40)$$

donde las variables endógenas no son más que funciones lineales de sí mismas rezagadas, de las variables exógenas, de las variables de control y de los términos de perturbación estocástica.

Existen tres aproximaciones econométricas para la formulación de políticas

i. La aproximación de instrumentos-objetivos.

ii. La optimización clásica de una función, conocida como del bienestar.

iii. La simulación del modelo.

Dichas aproximaciones funcionarán bajo los siguientes supuestos:

1. Las matrices de coeficientes han sido estimadas y están dadas por $\hat{B}_1, \hat{\Gamma}, \hat{B}_2, \hat{A}$
2. Las variables exógenas en el momento futuro $t+1$ han sido pronosticadas por algún mecanismo diferente al del modelo, tales como serie de tiempo, extrapolación, etc. Se representan por z_{t+1}
3. Los términos de perturbación estocástica tomarán ciertos valores $\hat{\varepsilon}_{t+1}$, basados en información y juicios sobre factores no incluidos explícitamente en el modelo, como en el caso de los factores adicionales que se discutirá mas adelante.

La forma estructural resultante para el momento $t + h$ será entonces

$$y_{t+h}\,\hat{\Gamma} + y_{t+h-1}\,\hat{B}_1 + z_{t+h}\,\hat{B}_2 + r_{t+h}\,\hat{A} = \hat{\varepsilon}_{t+h}, \tag{4.41}$$

cuya correspondiente forma reducida será

$$y_{t+h} = -y_{t+h-1}\,\hat{B}_1\,\hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+h}\,\hat{B}_2\,\hat{\Gamma}^{-1} - r_{t+h}\,\hat{A}\,\hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+h}\,\hat{\Gamma}^{-1}. \tag{4.42}$$

4.4.3 Aproximación instrumentos-objetivos

La primera aproximación para la evaluación de políticas es la aproximación instrumentos-objetivos. Se basa en dos supuestos.

El primero es que existen ciertos niveles deseados para cada una de las variables endógenas del modelo, dado por el vector y^0_{t+1}. Estos serán los valores fijos para los objetivos de la política

El segundo supuesto es que existen suficientes variables de control, llamadas instrumentos tales que en número sean igual o excedan al número de variables endógenas: $l \geq g$, con el objeto de que la matriz $\hat{A}$ sea no singular y se pueda resolver el modelo en términos de las variables de control.

Cuando se tiene que $l = g$, $\hat{A}$ es una matriz cuadrada y asúmase no singular, en consecuencia existe su inversa $\hat{A}^{-1}$.

Postmultiplicando la forma estructural por $\hat{A}^{-1}$ y despejando para obtener los valores óptimos de las variables de control se tiene

$$r_{t+1} = -y^0_{t+1}\,\hat{\Gamma}\,\hat{A}^{-1} - y_t\,\hat{B}_1\,\hat{A}^{-1} - z_{t+1}\,\hat{B}_2\,\hat{A}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+1}\,\hat{A}^{-1}. \tag{4.43}$$

Esta ecuación da valores óptimos para las variables instrumentales (de control) r_{t+1} como funciones lineales de sus valores deseados en las variables objetivo y^0_{t+1}, de los valores actuales de las variables endógenas y_t, de los valores pronosticados para las variables exógenas z_{t+1}, y de los valores de los términos de perturbación estocástica $\hat{\varepsilon}_{t+1}$. Esta expresión muestra la interdependencia entre políticas y objetivos. Por lo general los valores óptimos para cada variable instrumental dependen del valor de las variables objetivo.

Partiendo de la expresión (4.43), la sensibilidad de las variables políticas respecto de cada una de las variables objetivo puede ser fácilmente determinada Estas sensibilidades se resumen en

$$\frac{\partial r_{t+1}}{\partial y^0_{t+1}} = -\hat{\Gamma}\,\hat{A}^{-1}, \tag{4.44}$$

la cual mide el impacto de un cambio en algún valor objetivo y^0_{t+1} sobre alguna variable instrumento r_{t-1}. Dicho de otra forma que tanto se debe ajustar las variables políticas para alcanzar los nuevos objetivos. No se debe de confundir estos elementos con los multiplicadores, ya que los multiplicadores usualmente dan el efecto múltiple de las variables políticas sobre las variables endógenas, mientras que la expresión obtenida indica la sensibilidad de las variables de políticas óptimas a cambios en las variables objetivo. Similarmente se puede obtener el impacto de y_t, $\hat{\varepsilon}_{t+1}$ y z_{t+1} sobre las políticas óptimas r_{t+1} partiendo de (4.43)

En el caso de un modelo donde $l > g$, la matriz $\hat{A}$ no será cuadrada, ni mucho menos no singular, de manera que no se podrá resolver para r_{t+1} en (4.42). En tal caso con el objeto de obtener una matriz cuadrada $\hat{A}$ de $g \times g$, se pueden determinar a priori valores para las excedentes $l - g$ variables de control, y entonces proceder como en el caso donde $l = g$.

Sin embargo, este proceso no es muy conveniente, puesto que el modelo vuelve a adquirir subjetividad, al tener que decidirse que variables se predeterminan y cuales no.

Además la aproximación por instrumentos-objetivos tiene tres serias dificultades:

1. Asume que no existen relaciones entre los objetivos, puesto que especifica valores dados para cada uno de estos, suponiendo que los valores de un objetivo no afectan a otros objetivos y viceversa.
2. Es difícil en muchos casos determinar ciertos niveles para los objetivos
3. Solo se puede utilizar en políticas a corto plazo, específicamente de un solo período de tiempo.

4.4.4 La función del bienestar

La segunda aproximación es a través de la optimización de una función de bienestar. Por principio esta aproximación no requiere que se cumpla ninguno de los supuestos de la aproximación por instrumentos-objetivos, como los supuestos sobre el número de variables de control y endógenas en el modelo. En lugar de asumir ciertos objetivos para las variables endógenas se asume la existencia de una función del bienestar

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{y}_{t+1}, \mathbf{r}_{t+1}), \qquad \textbf{(4.45)}$$

la cual determina una escala de medida del desempeño de tanto las variables endógenas $\mathbf{y}_{t+1}$, como de las variables de control $\mathbf{r}_{t+1}$

Las variables endógenas afectan directamente la función del bienestar, mientras que las variables de control pueden afectar a la función del bienestar, si existe un costo asociado con el uso de tales variables.

La función del bienestar se basa en la existencia de ciertos valores deseados para las variables endógenas y de control, los cuales están dados por $\mathbf{y}^0_{t+1}$ y $\mathbf{r}^0_t$ respectivamente. Las políticas que se formulen en $\mathbf{r}_{t+1}$ deben de afectar a las variables endógenas $\mathbf{y}_{t+1}$, de tal manera que se alcancen dichos valores. Es así que, el máximo valor para la función del bienestar se alcanza cuando la suma de la diferencia entre los valores deseados y los asignados se vuelve cero, es decir, cuando $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}^0_{t+1}$ y $\mathbf{r}_{t+1} = \mathbf{r}^0_{t+1}$, en cuyo caso $\mathbf{W} = 0$.

Por lo cual, la función del bienestar es

$$\mathbf{W} = (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}^0_{t+1}) + (\mathbf{r}^0_{t+1} - \mathbf{r}_{t+1}). \qquad \textbf{(4.46)}$$

Con el objeto de que solo se obtengan diferencias positivas, las cuales no se cancelen por el cambio de signo, la función del bienestar se eleva al cuadrado, quedando

$$\mathbf{W} = (\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}^0_{t+1})\mathbf{E}(\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}^0_{t+1})' + (\mathbf{r}^0_{t+1} - \mathbf{r}_{t+1})\mathbf{F}(\mathbf{r}^0_{t+1} - \mathbf{r}_{t+1})' \qquad \textbf{(4.47)}$$

Las matrices **E** y **F** se suponen positivas definidas, por tanto **W** será una función convexa.[1]

---

[1]Una función $f(\mathrm{X})$ se dice que esa estrictamente convexa si, para cualesquiera dos puntos diferentes x_1 y x_2,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \text{ donde } 0 < \lambda < 1.$$

Por otra parte una función $f(\mathrm{X})$ es estrictamente cóncava si $-f(\mathrm{X})$ es estrictamente convexa y viceversa. Un caso particular de la función convexa (cóncava) es la forma cuadrática dada por

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{CX} + \mathrm{X'AX},$$

donde C es un vector constante y A es una matriz simétrica. Es conocido que $f(\mathrm{X})$ es estrictamente convexa si A es positiva definida De igual manera, $f(\mathrm{X})$ es estrictamente cóncava si A negativa definida.

Sin embargo, de acuerdo a la teoría de optimización clásica, las condiciones de Kuhn-Tucker[2], para que se pueda obtener el máximo de una función es necesario que dicha función sea cóncava Por tanto se multiplica a (4 47) por -1, obteniéndose

$$W= -\tfrac{1}{2}\,(y_{t+1}-y^{0}_{t+1})E(y_{t+1}-y^{0}_{t+1})' -\tfrac{1}{2}(r^{0}_{t+1}-r_{t+1})F(r^{0}_{t+1}-r_{t+1})' \qquad (4.48)$$

Los coeficientes de $-\frac{1}{2}$ se utilizan con el fin de que al derivar en el proceso de optimización a (4.48) se simplifiquen los coeficientes.

Es importante tener en cuenta *el significado de la función desarrollada*. Tanto la matriz **E** como la matriz **F** son matrices diagonales. Los elementos de E ponderan el costo de desviarse de los valores deseados para las variables endógenas, por ejemplo el costo de desviarse del PIB propuesto puede ser menor respecto al costo de no alcanzar la tasa de desempleo planeada Algunos de los elementos de E pueden ser ceros, en el caso de que no se considere un costo al desviarse del objetivo deseado. Por su parte los elementos de **F** ponderan el costo relativo de desviarse de los valores propuestos para las políticas. Por ejemplo, generalmente es mas costoso desviarse de la tasa impositiva propuesta, que de la oferta monetaria. Todos los elementos de la diagonal principal de **F** deben de ser diferentes de cero.

Regresando a la función general del bienestar, la optimización consiste en la elección de variables políticas r_{t+1}, de tal forma que maximicén el valor de la función del bienestar, la cual esta sujeta a las restricciones del modelo estimado vía el análisis econométrico, es decir

$$\max_{r_{t+1}} W(y_{t+1}, r_{t+1}) \text{ s.a.} \qquad (4.49)$$

$$y_{t+1}\hat{\Gamma} + y_t\hat{B}_1 + z_{t+1}\hat{B}_2 + r_{t+1}\hat{A} = \hat{\varepsilon}_{t+1}.$$

Este problema es en si un problema clásico de optimización no lineal que puede ser fácilmente resuelto al obtener la forma reducida del conjunto de restricciones en (4.49),

$$y_{t+1} = -y_t\hat{B}_1\hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+1}\hat{B}_2\hat{\Gamma}^{-1} - r_{t+1}\hat{A}\hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+1}\hat{\Gamma}^{-1}, \qquad (4.50)$$

siempre y cuando $\hat{\Gamma}$ sea no singular.

El valor de y_{t+1} obtenido del conjunto de restricciones se substituye en $W(y_{t+1}, r_{t+1})$, de tal forma que el problema se convierte en la maximización sin restricciones de

[2] Hamdy Taha, *Investigación de Operaciones*, Editorial Alfaomega, México D.F , 1987, pp. 825-850.

$$\max_{r_{t+1}} W(-y_t \hat{B}_1 \hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+1} \hat{B}_2 \hat{\Gamma}^{-1} - r_{t+1} \hat{A} \hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+1} \hat{\Gamma}^{-1}, r_{t+1}). \tag{4.51}$$

Puesto que se desea encontrar las políticas r_{t+1} que maximicen la función del bienestar se derivará a esta con respecto a r_{t+1}, la cual se denota

$$\frac{\partial W}{\partial r_{t+1}}. \tag{4.52}$$

Para encontrar dicha derivada se aplicara la regla de la cadena. Por principio derívese y_{t+1} con respecto a r_{t+1}, puesto que W es una función de y_{t+1}, obteniéndose

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial r_{t+1}} = -\hat{A}\, \hat{\Gamma}^{-1}$$

que es equivalente a:

$$\frac{\partial W}{\partial W} \frac{\partial y_{t+1}}{\partial r_{t+1}} = -\hat{A}\, \hat{\Gamma}^{-1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r_{t+1}} = -\hat{A}\, \hat{\Gamma}^{-1} \frac{\partial W}{\partial y_{t+1}}. \tag{4.53}$$

Esta última expresión establece en sí las condiciones necesarias de primer orden para encontrar el máximo de la función.

Al desarrollar las derivadas en (4.53) se obtiene

$$\frac{\partial W}{\partial y_{t+1}} = -E\,(y_{t+1} - y^0_{t+1})', \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r_{t+1}} = -F(r^0_{t+1} - r_{t+1})' = F(r_{t+1} - r^0_{t+1})'. \tag{4.55}$$

De manera que, al substituir estos resultados en (4.53), dicha expresión es equivalente a

$$F(r_{t+1} - r^0_{t+1})' = \hat{A}\, \hat{\Gamma}^{-1} E(y_{t+1} - y^0_{t+1})'. \tag{4.56}$$

Resolviendo para r_{t+1}, recordando las *propiedades de matrices transpuestas*[3], se obtiene:

$$r_{t+1} = r^0_{t+1} + (y_{t+1} - y^0_{t+1}) E (\hat{\Gamma}')^{-1} \hat{A}' F^{-1}, \tag{4.57}$$

donde y_{t+1} se calcula con base a substituir el valor deseado para r^0_{t+1} en (4.50), es decir

$$y_{t+1} = -y_t \hat{B}_1 \hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+1} \hat{B}_2 \hat{\Gamma}^{-1} - r^0_{t+1} \hat{A} \hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+1} \hat{\Gamma}^{-1}. \tag{4.58}$$

---

[3] $(AB)' = B'A'$
$(A + B)' = A' + B'$

Se puede concluir que las políticas óptimas se determinan comenzando con los niveles deseados para éstas y posteriormente ajustándolas a las desviaciones de las variables endógenas de los niveles deseados. Este resultado se conoce como una regla de decisión lineal puesto que el valor óptimo se da como una función lineal de las variables endógenas del problema

El problema con esta aproximación es que la función objetivo no siempre es fácil de formular por los tomadores de decisiones, puesto que requiere de juicios subjetivos al momento de establecer las matrices de costos **F** y **E**. Así mismo, se encuentra limitada a pronósticos a corto plazo. Sin embargo, si toma en cuenta las relaciones entre las diferentes variables del modelo. Es entonces cuando surge la necesidad de una aproximación alternativa que no descanse en la formulación de cierta función objetivo (o ciertos objetivos específicos) y que pueda formular políticas a largo plazo.

4.4.5 La simulación

Una tercera aproximación a la formulación y evaluación de políticas a través del sistema econométrico es la simulación. Esta aproximación elimina la necesidad de asumir ya sea la existencia de ciertos niveles deseados para las variables endógenas, como en la aproximación por objetivos, o bien la existencia de una bien definida función objetivo a maximizar como en la aproximación a través de la función de bienestar.

Por lo general, la simulación se refiere a la determinación del comportamiento de un sistema a través del cálculo de los valores obtenidos de un modelo estimado del sistema. Se asume que este modelo debe de ser lo suficientemente explícito para que pueda ser programado para un estudio numérico, usando una computadora. El comportamiento numérico del sistema es determinado (simulado) bajo diferentes condiciones con el propósito de analizar su respuesta a una variedad alternativas. Cada simulación es un experimento desarrollado sobre el modelo. Dicho experimento produce valores para las variables endógenas con base a las políticas propuestas para las variables de control, las variables exógenas, los términos de perturbación estocástica y las estimaciones de los parámetros estructurales.

La simulación puede tener diferentes formas:

1. *Simulación histórica*: Se refiere al cómputo de los valores estimados de las variables endógenas usando los valores de muestra observada. Estos valores estimados pueden ser

comparados con los actuales con el propósito de determinar si el modelo se ajusta a los datos históricos y así probar su eficiencia Si el modelo no se ajusta a los datos observados se le deberá de replantear.

2 *Proyección*: Se pronostican valores futuros para las variables endógenas del modelo, fuera de la muestra observada; como se ha analizado en el apartado anterior

3 *Simulación de políticas*: Determina valores para las variables endógenas del modelo de acuerdo a diferentes valores para las variables políticas que están bajo evaluación Es en si una construcción de escenarios, bajo la interrogante ¿Qué pasa con el modelo si se dan ciertos valores a las variables de control?

Para la simulación de políticas es conveniente utilizar nuevamente la forma reducida, dada en (4 50), la cual existe siempre y cuando Γ sea no singular

$$y_{t+1} = -y_t \hat{B}_1 \hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+1} \hat{B}_2 \hat{\Gamma}^{-1} - r_{t+1} \hat{A} \hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+1} \hat{\Gamma}^{-1}, \tag{4.59}$$

que expresa los futuros valores de las variables endógenas como funciones lineales de las variables de control que serán seleccionadas, de las variables endógenas actuales, de las variables exógenas futuras (pronosticadas) y de los términos de perturbación estocástica futuros. Los valores para las matrices de coeficientes están fundados en las estimaciones del mismo modelo, mientras que los valores futuros para las variables exógenas y los términos de perturbación estocástica son calculados con base a extrapolación, o algún otro modelo diferente del que se está analizando.

Se parte de un conjunto de alternativas para las variables de control, que pueden ser agrupadas en una tabla Entonces se selecciona cierto alternativa particular dada por $r_{t+1}*$ y se obtiene su correspondiente $y_{t+1}*$. Se continua evaluando diferentes conjuntos de alternativas $r_{t+1}*$ hasta que se encuentre alguna que se acerque a los objetivos deseados.

En si la simulación no es más que una experimentación con el modelo, donde en vez de probar diferentes políticas $r_{t+1}*$ en el mundo real, lo cual la mayoría de las veces resulta imposible, se les prueba dentro del mismo modelo, lo que permite evaluar sus efectos y consecuencias. Es así que, el modelo econométrico estimado se convierte en un laboratorio de experimentación, en el cual se prueban las diferentes alternativas propuestas.

Con el fin de detectar aquellas variables de control que tienen más impacto sobre las variables endógenas del modelo se emplean los multiplicadores de políticas, dados en

(4.60), los cuales miden el efecto en cada una de las variables endógenas de un cambio en cualquiera de las variables de control

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial r_{t+1}} = -\hat{A}\,\hat{\Gamma}^{-1} \tag{4.60}$$

El efecto total sobre la variable endógena g', denotado por $\Delta y_{g',t+1}$, de un cambio en cada una de las l variables de control puede medirse al sumar el efecto separado de cada una de las variables políticas como

$$\Delta y_{g',t+1} = \sum_{l'=1}^{l} \frac{\partial y_{g',t+1}}{\partial r_{l,t}} \Delta r_{l,t+1}, \tag{4.61}$$

donde $\Delta r_{l,t+1}$ indica la variación efectuada sobre la variable de control correspondiente.

Si se desearan formular políticas a largo plazo bastaría con retroalimentar los resultados para las variables endógenas, es decir, tomarlos como parte de la muestra y volver a simular el modelo. Se puede proceder así, hasta el tiempo de horizonte de las políticas, dado por $t+h$

$$y_{t+h} = -y_{t+h-1}\,\hat{B}_1\,\hat{\Gamma}^{-1} - z_{t+h}\,\hat{B}_2\,\hat{\Gamma}^{-1} - r_{t+h}\,\hat{A}\,\hat{\Gamma}^{-1} + \hat{\varepsilon}_{t+h}\,\hat{\Gamma}^{-1}, \tag{4.62}$$

donde los datos desde el período $t+1$ hasta el $t+h-1$ han sido obtenidos a través del mismo modelo, es decir, son pronósticos o aproximaciones fundadas en el modelo, que se le agregan como datos para continuar con el proceso de simulación.

Cabe señalar que la simulación combina tanto factores de juicio subjetivos como elementos objetivos. Los primeros se dan al formular el conjunto de políticas que se van a comparar, al emplear los factores adicionales, representados por $\hat{\varepsilon}_{t+1}$, así como al seleccionar cierta alternativa; mientras que la objetividad está dada por el modelo econométrico estimado

4.5 Evaluación y comparación del modelo con la realidad

Antes de proceder a la evaluación de políticas, pronósticos y simulación de escenarios posibles, es lógico tratar de probar que tanto se ajusta el modelo desarrollado a la realidad.

Una forma de probar la eficiencia del modelo desarrollado es a través de la simulación histórica de éste, es decir, el computo de las variables endógenas usando los valores de la muestra observada. Estos valores estimados son comparados con los observados con el propósito de determinar si el modelo se ajusta a los datos históricos y así probar su eficiencia.

Para tal efecto se presenta en la tabla 4.1 una comparación de los valores estimados para las variables endógenas del modelo contra los valores realmente observados de dichas variables durante el ultimo periodo de datos disponible. Es importante señalar que los valores de las variables de control y exógenas son muestrales, es decir, son reales.

Tabla 4.1 Simulación versus valores observados del segundo trimestre de 1997

	Valor observado	Extremo inferior	Estimador Puntual	Extremo Superior
Variables de control				
IVA		15 000	15.000	15.000
Gasto		150397	150397	150397
Oferta Monetaria		229,744	229,744	229,774
Renta EEUU		7016 000	7016 000	7016.000
Variables dependientes:				
Bolsa	3806.30	3065.85	4106.23	5499.98
Interés	21.56	25.62	26.10	26 59
Exportaciones	285439 09	289983 84	291673.12	293357 65
Importaciones	320344.77	301236 35	314300.29	327946 31
Flujo Capital	960.89	2146 38	2874 74	3850 63
Tipo Cambio	6.97	7 17	7 63	8.13
Salario	918151.21	499269 00	752692 89	1135328.37
INPC	3.26	3.88	4 05	4 22
Consumo	943660.44	909136 90	909397.25	909678 67
Empleo	96.72	95.90	96.00	96 10
Inversión	264207.71	247738.57	248607 98	249497.88
Ingresos Públicos	795543 00	135209 65	142603 57	151550 56
Renta Nacional	1332268 90	1288875 98	1305625 87	1332424 80

De la tabla anterior puede concluirse que el modelo es bastante acertado en la predicción de todas las variables endógenas, con excepción de los flujos de capital que siempre están sujetos a una varianza muy amplia. Sin embargo, dicha variable en el sentido económico no debe de considerarse como base del desarrollo nacional, ni siquiera como puntal del tipo de cambio, puesto que es conocido que el capital no tiene patria y en el momento que se presente una mejor alternativa o un posible riesgo de perdida emigrará a lugares más seguros. Por tanto, es muy difícil de explicar el comportamiento de los flujos de capital, más aún si para una explicación fehaciente de dicha variable deberían contemplarse mas variables, como el rendimiento de las tasas de interés y de las bolsas de valores en los principales países del mundo, así como en los mercados emergentes. Desgraciadamente dicha información no se tuvo disponible para la investigación y se tendrán que manejar los pronósticos del modelo desarrollado.

Con los intervalos de confianza al 90% (Tabla 4.1) se observa que para la mayoría de las variables endógenas, tanto el valor pronosticado por el modelo, como el observado, caen dentro del intervalo de confianza, o muy cerca de sus límites, ya sea inferior o superior. Por tanto puede aceptarse estadísticamente la confiabilidad del modelo

4.6 Evaluación de políticas, escenarios y pronósticos para el modelo desarrollado

El objetivo principal de esta investigación es elegir determinados valores para las variables de control, con el propósito de alcanzar ciertas metas en las variables endógenas del modelo Para tal efecto se han analizado tres diferentes metodologías *la aproximación por objetivos, la función del bienestar y la simulación de escenarios*

De dichas metodologías se empleara la simulación de escenarios, dado que elimina la necesidad de asumir ya sea la existencia de ciertos niveles deseados para las variables endógenas, como en la aproximación por objetivos, o bien la existencia de una bien definida función objetivo a maximizar, como en la función del bienestar. Además, la simulación es invaluable para resolver problemas en los que las técnicas analíticas, como la programación matemática, resultan inadecuadas, costosas, o simplemente no pueden resolverse debido a su complejidad.

Por otra parte, si se desearan formular políticas a largo plazo bastaría con retroalimentar los resultados para las variables endógenas, es decir, tomarlos como parte de la muestra y volver a simular el modelo para escenarios subsecuentes, lo cual no se puede hacer con las otras aproximaciones analizadas.

Aunado a estos argumentos, el modelo desarrollado se fundamenta en teorías y supuestos estadísticos, de donde resulta un poco fuera de contexto tratar de encontrar una solución óptima exacta, puesto que los coeficientes estructurales de las restricciones son estimaciones, y no se les puede tomar al pie de la letra en las restricciones de un modelo de programación matemática. Por consiguiente, es más apropiado obtener resultados estadísticamente significativos, como los que provee la simulación de escenarios.

Una vez aceptados estadísticamente los resultados del modelo se puede proceder a una evaluación estadística de las políticas económicas gubernamentales, en los principales temas de interés para el ciudadano medio.

En los últimos tiempos se han vuelto temas de intenso debate, tanto económico como político la tasa de impuesto al consumo (IVA), el FOBAPROA y el tipo de cambio del peso y el dólar. En los siguientes apartados se presentan alternativas y o evaluación de escenarios para tales problemas.

La simulación se repetirá para diferentes configuraciones tanto en las variables exógenas como en las de control. De cada escenario se seleccionará la mas probable opción, en el caso de variables exógenas, o la más conveniente, en el caso de variables de control De tal forma que, el siguiente escenario se alimente con dichas opciones Se comparará su desempeño hasta que por eliminación de opciones se hallan identificado las configuraciones mas prometedoras. Sin embargo, debido al error estadístico es imposible garantizar que la configuración que produzca el mejor comportamiento simulado sea la óptima, pero al menos debe de ser cercana a la óptima

4.6.1 El IVA

En abril de 1995, el gobierno mexicano aumentó la tasa del IVA, de 10 a 15%, es decir, 50% La excusa fue "racionalizar el consumo y fomentar el ahorro interno". La realidad es que necesitaba urgentemente recursos y, ante la falta de decisión de cortar radicalmente los gastos prefirió pasar la factura a la sociedad.[52] De la curva de Laffer, presentada en el capítulo anterior, puede observarse que los impuestos más altos no significan necesariamente mayores incrementos en la recaudación fiscal, puesto que llega el momento en que los aumentos de impuestos se traducen en una menor recaudación fiscal. En el primer semestre de 1996, la captación del IVA cayó 31.5% en relación con el mismo periodo del 95. Recientemente, el gobierno anunció que, gracias a la campaña de concientización fiscal, repuntó la captación 7.1% a finales del 96, pero ese repunte no compensó la caída del primer semestre Si se mide la recaudación fiscal proveniente del impuesto al valor agregado con la tasa de 10% en relación con el PIB y después con la de 15%, no varió significativamente la captación. Un IVA de 15% es un obstáculo para fomentar el crecimiento económico cuando a la vez cobra un impuesto sobre la renta de 34%, y otros impuestos.[53]

Un IVA de 15%, además de un estorbo al crecimiento sano, puede ser un factor para sacar de la competencia a la industria y al comercio mexicanos en un contexto de libre comercio con EEUU En casi todo ese país la tasa del IVA es aproximadamente la mitad que en Mexico

---

[52] Luis Pasos Jueves, IVA de 15% No Funciona y Estorba, Excélsior, 09 de Enero de 1997

[53] Ibidem

En la tabla 4.2 se presentan diferentes escenarios, variando la tasa del IVA, puede observarse que en comparación con la tasa vigente del 15%, la tasa del 7% resulta en mayores ingresos para el estado, confirmándose las suposiciones de la curva de Laffer Para completar tal aseveración un aumento del IVA, por ejemplo del 18% disminuye aún más la recaudación fiscal.

Tabla 4.2 Escenarios para el IVA

	IVA 15%	IVA 10%	IVA 12%	IVA 18%	IVA 7%
Variables de control:					
IVA	15.00	10.00	12 00	18.00	7.00
Gasto	150397.00	150397.00	150397 00	150397 00	150397 00
Oferta Monetaria	2700.00	2700.00	2700 00	2700 00	2700 00
Renta EEUU	7100.00	7100 00	7100.00	7100.00	7100.00
Variables endógenas					
Interés	17 96	17.96	17.96	17 96	17 96
Exportaciones	275702 66	275702.66	275702.66	275702 66	275702 66
Importaciones	344550.02	344550 02	344550 02	344550.02	344550.02
Flujo Capital	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17
Tipo Cambio	5925.82	5925 82	5925.82	5925.82	5925.82
Salario	1233998.22	1233998.22	1233998.22	1233998.22	1233998.22
INPC	2.85	2 85	2.85	2.85	2.85
Consumo	947953.28	947953.28	947953.28	947953.28	947953.28
Empleo	96.45	96 45	96.45	96 45	96.45
Inversión	280087 33	280087.33	280087.33	280087.33	280087 33
Ingresos Públicos	43483 48	76460.30	59144 31	34097 37	127447 56
Renta Nacional	1345791.73	1345791.73	1345791.73	1345791 73	1345791.73

Nota las demás variables de control y exógenas permanecen con los valores observados

Deben tomarse con precaución los resultados del IVA, puesto que no se está usando la fórmula original, que contemplaba a la renta disponible, después de impuestos, como variable explicativa los ingresos del gobierno, sino a la renta nacional antes de impuestos. Luego entonces, si bien los escenarios sugieren que una reducción de la tasa impositiva aumenta los ingresos públicos, no se tomará la reducción más drástica, sino una tasa moderada del 12 %.

Puede concluirse que es difícil incrementar el ahorro interno y la inversión, con tasas impositivas como las vigentes, y más aún aumentar los ingresos tributarios sana y permanentemente con base en campañas para intimidar a los causantes, como las actuales.

Es necesario y deseable mantener un equilibrio presupuestal, pero contraproducente tratarlo de lograr aumentando impuestos y con campañas de intimidación fiscal. Si se desea un crecimiento sano, se deben equilibrar las finanzas públicas por la vía de la reducción del gasto público y de las ventas de activos estatales, en tal forma que se permita reducir en principio el IVA a 10% y después a 7%, para ser competitivos con EU. Sin embargo, la reducción del gasto público puede ser difícil de llevarse a cabo, más aún, en caso de que se apruebe el FOBAPROA, tema del siguiente apartado.

4.6.2 El FOBAPROA

El credito que otorgan los bancos proviene en su totalidad del dinero que les confían los ahorradores, es decir, no son recursos propios de los banqueros

Una crisis bancaria se presenta cuando los deudores por diversas causas no pueden pagar los creditos que recibieron, y los ahorradores perciben que el banco no va a poder cobrar dichos creditos, enfrentando con ello la posibilidad de perder su patrimonio. Entonces puede ocurrir que quieran retirar su dinero, todos al mismo tiempo. Esta situación puede generalizarse hasta provocar el colapso del sistema bancario de un país Dicho quebranto generalizado de la banca haría perder sus ahorros a muchas personas, dificultaría la obtencion de créditos. con la consecuente disminución del consumo y de la inversión, provocando el cierre de empresas y la perdida de empleos.[55]

Para proteger el ahorro. el gobierno y los bancos de la mayoria de los países del mundo crean un seguro de depósito Dicho seguro de depósito apoya a un banco que este en problemas (le presta dinero, que posteriormente tiene que reintegrar al fondo). Cuando no alcanza lo aportado por los bancos, tiene que actuar el gobierno.

El FOBAPROA es justamente el seguro de depósito mexicano, constituido con aportaciones obligatorias de la banca. Gracias al FOBAPROA no se perdieron los ahorros de los depositantes, ni dejaron de disponer de sus ahorros cuando así lo solicitaron, en los momentos en que gran parte de los deudores no pudieron afrontar sus compromisos [56]

La pregunta que escapa a los objetivos de este proyecto pero que dejo planteada es ¿ Cómo se genero esta situación de créditos incobrables?

Puede decirse que la crisis bancaria se debe a tres causas principales:

La primera, el alza de las tasas de interés a principios de 1995, con el propósito de detener la devaluación del peso. provoco que muchos deudores suspendieran sus pagos.

La segunda. los bancos por ley están obligados a no prestar recursos mas allá de cierto porcentaje de los capitales que manejan, de tal manera que siempre exista una reserva para

---

[55] *FOBAPROA protección al Ahorro*, Comisión Nacional Bancaria y de Valores, 1998
[56] Ibidem

afrontar estas eventualidades. Sin embargo muchos de los bancos mexicanos no cumplieron tal lineamiento y el gobierno tuvo que intervenir.

La tercera, los créditos a amigos, familiares o empresas fantasmas de algunos banqueros, los cuales sabian con anterioridad que no iban a pagar sus créditos, y que el estado tendría que pagar las deuda para proteger el capital de los ahorradores.

En el caso particular de México, ante la magnitud de la cartera vencida (los prestamos incobrables) el fondo resulto rápidamente insuficiente y el estado tuvo que intervenir, es decir, compro la deuda vencida a los bancos Sin embargo, tal compra se realizo en condiciones ventajosas para la banca, el gobierno aceptó comprar a los bancos cartera vencida a un precio mas alto al que se hubiera fijado en el mercado (si se hubieran vendido los créditos vencidos a otros bancos mexicanos o extranjeros) con el objeto de impedir la quiebra de los bancos Tales operaciones, podrían igualarse a comprar un auto chocado. Por ejemplo, un crédito hipotecario incobrable por $100,000 el estado lo compró (pago al banco) en $90,000. Puede darse la situación que el estado vendiera esa deuda a un tercero, pero si se trata de cobrar (vender) la deuda al mismo precio que se compro no se venderá nunca mientras que si se vende en el mercado (un precio lógico, por decir $60,000) se avalarán las perdidas correspondientes.

Obviamente todas las perdidas que absorbe el estado es dinero de los contribuyentes que deja de gastarse en inversión, seguridad pública, educación, etc.

¿ De donde obtiene el gobierno los recursos para prestar a los bancos o comprarles deuda ? La repuesta es un poco complicada, y es el origen del debate que vivimos actualmente. El gobierno puede pagar a los bancos, con algún medio de pago aceptado universalmente, como lo es el efectivo, en divisas, títulos, en bonos extranjeros, o bien emitir *deuda pública*, es decir, bonos (promesas de pago ineludibles, de cierto capital acordado, en un determinado tiempo, y que mientras se cumple el plazo devengan cierta tasa de interés).

A decir del gobierno, convertir la deuda del FOBAPROA en deuda pública, no significa adquirir deuda nueva, sino convertir una deuda existente en otros instrumentos financieros con el fin de pagarlos a menores intereses y en otros plazos más ventajosos. No es perdonar deudas, se pretende recuperar de la mejor manera posible los créditos que están en el FOBAPROA (cobrarlos a los deudores), incluyendo a los grandes grupos capitalistas.

De tal manera, el monto del FOBAPROA asciende 552,000 millones de pesos, de los cuales es factible recuperar 220,000 millones, según palabras del propio presidente del Banco de México [57]

Ahora se pretende que el congreso valide dicha operación, es decir, volver deuda pública los apoyos a la banca. En caso de que no se apruebe los bancos no tendrán respaldo para los ahorradores.

En los últimos días se ha manejado la posibilidad de un acuerdo para reducir el monto del FOBAPROA a 360,000 millones de pesos, resultado de excluir del fondo los créditos mayores de 20 millones de pesos. En tales créditos se auditará caso por caso, antes de traspasarlos al fondo.

La importancia del FOBAPROA, radica en que si se convierte en deuda pública disminuirá necesariamente el gasto público. Así mismo el estado tendrá que buscar fuentes de financiamiento, sea con mayores impuestos o incluso con prestamos del exterior, que le permitan afrontar sus compromisos con el FOBAPROA, o bien se verá obligado a emitir papel moneda gradualmente, a medida que se venzan los primeros bonos, así como a convertir en nuevos bonos, aquellos que no pueda pagar cuando se venzan

En las siguientes tablas se simula el impacto del aumento de la oferta monetaria suponiendo que el monto del FOBAPROA se reduzca a 360,000 millones de pesos y que se pagará paulatinamente la deuda en un período de 10 años, permaneciendo las demás variables exógenas y de control como constantes, para así apreciar mejor el impacto del FOBAPROA

De lo anterior, se supondrá que cada trimestre se hará una disminución neta al monto del FOBAPROA de 9000 millones de pesos. Cabe señalar que no se están contabilizando los intereses (es lógico suponer que su tasa de interés será la de los CETES) que se pagarán a los poseedores de la deuda del FOBAPROA durante todo este tiempo No obstante se supondrán que dicha tasa será de un 15 %, de tal forma que el gasto público se reducirá trimestralmente en 10,350 millones de pesos aproximadamente. Si el estado encontrará otras fuentes de ingresos la reducción del gasto podría ser menor.

[57] Angel T. Ferreira, La rueda del Poder, Universal, 22 de Diciembre 1998

Tabla 4.3 El FOBAPROA y el gasto público

	FOBAPROA posible	FOBAPROA pesimista	FOBAPROA óptimo
Variables de control:			
IVA	12 000	12 000	12 000
Gasto	140000	130000	150000
Oferta Monetaria	400,000	400,000	400,000
Renta EEUU	7100 000	7100.000	7100 000
Variables endógenas			
Bolsa	7990.35	8750.67	7342 00
Interés	20.14	24.25	16.94
Exportaciones	317316.54	337375 38	299715 67
Importaciones	380302.96	378847 50	381662.99
Flujo Capital	8658.54	10100 41	7501.84
Tipo Cambio	9 73	12 11	7.94
Salario	1200383.74	829025.78	1694246.89
INPC	2.94	3.76	2.34
Consumo	953238.11	942541.18	963305 81
Empleo	95.75	95.63	95 87
Inversión	272952.18	261118.01	284451 12
Ingresos Públicos	59309.20	59169.94	59439.13
Renta Nacional	1351356.52	1346656.46	1355746.91

De las dos primeras columnas de la tabla anterior puede observarse que entre mayor sea la disminución del gasto público, mayor es la reducción proporcional del consumo, la renta y en consecuencia el empleo, así como la inversión, puesto que parte de esta es pública. Dicha contracción de la economía necesariamente disminuye los ingresos públicos que se aplicarán en el próximo período, lo cual es aún más preocupante, puesto que el estado tendrá menos recursos para afrontar sus compromisos.

En este momento puede apreciarse los límites y alcances del modelo. Si bien, el modelo ha señalado que una reducción de la tasa del IVA puede aumentar los ingresos públicos, dicho aumento será insuficiente para evitar la disminución del gasto público en áreas prioritarias. Luego entonces deben buscarse fuentes alternas de ingresos, sin embargo, el modelo no indica como obtener dichas fuentes. Eso solo puede hacerse con un cambio estructural como una verdadera reforma fiscal, que incluya como contribuyentes a la economía informal o un impuesto al consumo general, que reemplace la tasa del ISR. Tal tarea corresponde a los legisladores, el poder ejecutivo, autoridades hacendarías, etc. Pero al momento de evaluar y/o estudiar las políticas propuestas debe recurrirse al modelo nuevamente para cuantificar los ingresos previstos.

En la ultima columna se compara que pasa si no se disminuye el gasto en 10,000 millones, es decir, sin FOBAPROA, o bien en el caso de que se tengan recursos suficientes y no sea necesario disminuir el gasto público. Obviamente dicho escenario no mide el impacto de una quiebra del sistema bancario nacional.

De lo anterior, puede concluirse que deben buscarse nuevas fuentes de financiamiento, para afrontar el compromiso del FOBAPROA, sin que se disminuya el gasto del gobierno, y que no caigan siempre sobre las clases medias y asalariadas, pues al castigarlas se reduce aún mas la renta nacional. Aunado a lo anterior debe fortalecerse el sistema bancario con nuevos capitales, sean externos o nacionales, para que dichos capitales paguen la deuda del FOBAPROA, y esta sea lo más pequeña posible.

Como una recomendación, fuera del modelo, sería saludable reducir el gasto público en ciertas rubros burocráticos, como los subsidios a los partidos políticos y los gastos del IFE, que desplazan inversión pública en educación, seguridad o desarrollo tecnológico

4.6.3 Evaluación de la oferta monetaria y la renta de EE.UU.

En este apartado se evaluará el impacto de la oferta monetaria como variable de control, y su interrelación con una variable exógena, la renta de los EE.UU.

En la tabla 4.4 se suponen dos diferentes escenarios para la renta de EE.UU En las primeras dos columnas se supone una disminución en su renta, mientras que en la tercera se supone un aumento.

Tabla 4.4 Variación de la renta de EE.UU y oferta monetaria.

	Disminución Renta EEUU	Disminución Renta EEUU	Aumento Renta EEUU
Variables de control			
IVA	12.000	12.000	15.000
Gasto	150397	150397	150397
Oferta Monetaria	100,000	270,000	350,000
Renta EEUU	6800.000	6800.000	7100.000
Variables endógenas			
Bolsa	1202.15	1905.52	6878.78
Interés	23.65	3.24	21.99
Exportaciones	215246.98	147441.67	314666.51
Importaciones	236628.58	339248.25	363669.15
Flujo Capital	373.45	781 65	6755.49
Tipo Cambio	3.00	0 78	9.45
Salario	980041.79	1002470 05	1021520.38
INPC	3.44	0.26	3.29
Consumo	872038.99	1039278.70	941228.96
Empleo	96.53	96.85	95.83
Inversión	242839.05	413213.68	265251.74
Ingresos Públicos	56085.72	59231.15	43384.47
Renta Nacional	1243936.50	1348721.50	1341252.55

Del escenario en la tabla 4.4 pueden elaborarse importantes conclusiones La primera todo crecimiento de la renta de EE.UU. es un muy buen incentivo para la economía nacional, puesto que aumentan las exportaciones, la inversión, el consumo, los flujos de capital, e incluso el poder adquisitivo del salario, así como el porcentaje de población empleada. Así mismo, al aumentar las exportaciones el tipo de cambio pronosticado tiende a mantenerse estable. Sin embargo, un crecimiento marginal o un decremento de la renta de EE.UU. provoca todo lo contrario.

Cabe mencionar el papel de la oferta monetaria, la cual si permanece constante o no aumenta los suficiente (primera y tercera columna de la tabla 4.4) aumenta la presión sobre las tasas de interés en el escenario desarrollado, se deprecia el peso, aumenta la presión del INPC, así como disminuyen el consumo y la renta.

Por tanto, en el siguiente escenario (Tabla 4.5), se prueban diferentes configuraciones para la oferta monetaria, suponiendo un crecimiento moderado de la renta de EE.UU.

Tabla 4.5 Variación de la oferta monetaria

	Baja	Moderada	Alta
Variables de control			
IVA	15.000	15.000	15.000
Gasto	150397	150397	150397
Oferta Monetaria	350,000	300,000	400,000
Renta EEUU	7100.000	7100.000	7100 000
Variables dependientes			
Bolsa	6878.78	6404.18	7318 24
Interés	21.99	29.95	16.83
Exportaciones	314666.51	333696.89	299061.14
Importaciones	363669.15	343894.85	381715.19
Flujo Capital	6755.49	6023.84	7460.74
Tipo Cambio	9.45	11 65	7 88
Salario	1021520.38	561007 89	1716762.26
INPC	3.29	4 90	2.32
Consumo	941228.96	915945 84	963693.62
Empleo	95.83	95.78	95.87
Inversión	265251.74	244247 33	284901.16
Ingresos Públicos	43384.47	43018.62	43703.90
Renta Nacional	1341252.55	1324522.61	1355915.39

En este escenario se hace más patente el papel de la oferta monetaria, dado que una reducción del monto de la oferta monetaria eleva drásticamente las tasas de interés, inhibe la inversión, reduce el salario real y merma las exportaciones. Por otra parte, un aumento excesivo de la oferta puede reducir las tasa de interés, pero deprecia la moneda nacional. De este escenario la opción más viable es aumentar la oferta monetaria a 400,000 millones de pesos, nivel donde el tipo de cambio no se deprecia tanto, pero si se reducen las tasas de interés, se captan más flujos de capital, se fomenta la inversión, crece la economía, y en consecuencia aumenta tanto el salario real como el consumo.

Las conclusiones sobre las variaciones de la oferta monetaria no solamente son validas cuando aumenta la renta de EEUU, sino ante cualquier crecimiento de la renta, de las exportaciones, del consumo interno, o bien para mantener las tasas de interés en niveles que favorezcan la inversión y un tipo de cambio estable El monto más conveniente puede calcularse empleando el modelo desarrollado.

4.7 Resumen y conclusiones.

Con el modelo desarrollado podrían evaluarse multitud de escenarios y encontrarse configuraciones más prometedoras. Sin embargo, el encontrar una solución óptima y precisa, escapa a los alcances de este proyecto.

¿Por qué no se puede encontrar una solución óptima y precisa?

En principio, es importante señalar que la simulación sólo proporciona estimaciones estadísticas y no resultados exactos. Por tanto, la simulación debe tratarse como un experimento estadístico, a diferencia de los modelos de programación matemática, donde la solución es optima y precisa

Los resultados que se obtienen de una simulación son observaciones, sujetas al error experimental, lo cual significa que cualquier resultado, deducción o inferencia relativa al modelo simulado debe estar sujeta a todas las pruebas adecuadas del análisis estadístico.

Por lo tanto, los modelos de simulación no se construyen en el marco de un proceso de optimización. Un modelo de simulación solo mide la salida del sistema para valores predeterminados de las variables de decisión Esto quiere decir que los valores de las variables de decisión se consideran parte de los datos de entrada.

No obstante, se puede intentar obtener una solución óptima empíricamente. Se podría implementar un proceso de *optimización dentro* del *contexto* de *simulación* consistente en cambiar sistemáticamente los valores de las variables de decisión y después medir la salida mediante la ejecución de procesos estadísticos adecuados, que indiquen cual combinación de variables de decisión produce resultados prometedores. Sin embargo, tal proceso es exhaustivo y envuelve metodologías que en este momento, por su complejidad, quedan fuera del esquema del proyecto

FALTA PAGINA

No. 238

Conclusiones

Conforme al desarrollo teórico presentado en la investigación, así como con base en las pruebas de significación del modelo estimado[1] y en la evaluación del modelo[2] puede concluirse que éste presenta las siguientes ventajas sobre una abstracción teórica y/o algún otro tipo de modelo:

Permite estructurar las complicadas relaciones teóricas entre las variables económicas en expresiones algebraicas, y así explicar de una manera más fehaciente tales relaciones.

El modelo fue construido a partir de las principales teorías macroeconómicas, aunado a la enorme ventaja de que las relaciones estructurales propuestas se han validado estadísticamente, dejando de ser solamente un ensayo teórico, puesto que los coeficientes estructurales estimados se han obtenido con base a las series históricas de las variables implicadas en el modelo, lo cual ha dado veracidad y sustento real al modelo teórico. Tales coeficientes no solo cuantifican la respuesta de una variable con respecto a otra u otras, sino que además proveen una forma de medir y probar empíricamente, y en su caso refutar relaciones sugeridas por la teoría económica.

Las diferentes escuelas económicas han desarrollado políticas y lineamientos generales a seguir con el propósito de alcanzar niveles satisfactorios de crecimiento, desempleo e inflación ante la mayoría de los eventos que se presente en un momento dado. Sin embargo, estos lineamientos y políticas no calculan los valores apropiados en que se deben situar las variables de control, para la consecución de los objetivos deseados; dado que no están adaptados al caso particular de nuestra economía nacional. Estos valores sólo se pueden determinar por medio de la aproximación econométrica que enriquece al análisis económico clásico, ya que al integrarse con los datos históricos se particulariza el modelo a la circunstancia histórica, nacional y social de nuestro país.

A partir de estos lineamientos y políticas generales, se pueden proponer diferentes valores para las variables de control, sean monetarias o fiscales, de tal forma que se evalúen y

[1] Apartado 3.19
[2] Apartado 4.5

comparen sus efectos sobre el conjunto de la economía sin necesidad de probarse en el mundo real, lo cual es imposible.

De las políticas evaluadas[3] se han detectado las más prometedoras: reducción de la tasa del IVA al 12% y el ajuste proporcional de la oferta monetaria conforme a las variaciones de la economía nacional, la renta de E.E.U.U y el tipo de cambio; de manera que se fomente el desarrollo nacional. Así mismo, el modelo permite formular pronósticos, en caso de que continuen las políticas económicas actuales u otras, tal es el caso del impacto social del FOBAPROA, cuya deuda será un pesado lastre sobre el gasto público en los años venideros

Sin embargo, el modelo presenta las siguientes limitaciones:

No contempla posibles eventos inesperados como variables exógenas, así como no se ha sido lo suficientemente explícito en la construcción de ciertas ecuaciones. Tal es el caso de los ingresos petroleros del estado, los cuales están en función del precio del barril de crudo en los mercados internacionales, el cual puede elevarse o caer intempestivamente modificando los ingresos de divisas para el gobierno. No ha sido incluido, no por falta de conocimiento, sino debido a la falta de series de datos históricas compatibles en espacio y tiempo con las que si contempla el modelo. Otro punto que el modelo no contempla es una intempestiva situación de inestabilidad política que pudiera vulnerar las expectativas y estabilidad de la economía, tal es el caso de un golpe de estado o un levantamiento armado significativo.

Podría haberse construido un modelo mucho más complejo que explicará el comportamiento de la economía con mayor detalle. Tal es el caso, al analizar la función de ingresos del gobierno y emplear como indicador de las variaciones impositivas al IVA, ignorando el ISR, cuando en realidad las tasas y la estructura recaudadora es mucho más compleja, puesto que existen diferentes tasas del ISR y subsidios. La misma situación se presenta cuando se analiza la renta nacional, la cual fue tratada como una sola variable, y pudo haberse desglosado en sus principales divisiones: sector manufacturero, comercio, agropecuarios, etc Tales modelos, requerirían series históricas de las nuevas variables implicadas y una muestra de mayor tamaño, que permita la estimación de un mayor número de parámetros estructurales. Sin embargo, en esta investigación no es posible alcanzar tal

[3] Apartado 4 6

complejidad, puesto que sólo se pudo hacer uso de la información disponible en anuarios económicos, publicaciones oficiales y sistemas de consulta en servidores de Internet publicos

Otro factor que escapa al control del sustentante, pero que puede afectar la confiabilidad del modelo, es la posible falta de calidad o confianza que se tenga en la información histórica, la cual siempre puede presentar errores de sesgo en la elaboración de las muestras, o peor aun, la presencia de manipulaciones dolosas en la elaboración y recolección de información.

Por otra parte, los parámetros estimados y las predicciones están sujetos a un margen de error, por tanto siempre existirá la posibilidad de mejora. Además, como se ha analizado en su momento, cada aproximación a la estimación y elaboración de pronósticos tiene limitaciones teóricas.

Como conclusión, el modelo desarrollado, así como cualquier otro modelo econométrico, viene a ser una poderosa e invaluable herramienta que coadyuva en la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual es inherente a todo proceso económico. Sin embargo, no se le debe considerar como sustituto del análisis económico, ni como una panacea a todos los problemas económicos y sociales existentes, sino como una metodología que enriquece al análisis económico clásico. Recuérdese que el modelo será tan confiable, como confiable sea la teoría económica y datos que lo sustenten.

FALTA PAGINA

No. 242

Apéndice A

Complemento Estadístico

A.1 Distribución χ^2 de la suma cuadrada de variables normales estándar

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son variables aleatorias con distribución normal e independiente, de tal forma que $z_i \approx N(0,1)$, es decir, cada una de ellas es una variable normal estándar con media 0 y varianza 1, entonces $U=\sum z_i^2$ tiene una distribución χ^2 con n grados de libertad

Por principio defínase la función generadora de momentos de z_i^2, teniendo conocimiento de que z_i se distribuye como una normal estándar.

$$m_{z_i^2}(t) = E(e^{tz_i^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} f(z_i)dz_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} \frac{e^{-z_i^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz_i$$

$$m_{z_i^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}(1-2t)} dz_i$$

El integrando $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}(1-2t)}$ es equivalente a. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}/(1-2t)^{-1}}$

Que es un caso particular de la función de densidad normal para una variable aleatoria con media 0 y varianza $(1-2t)^{-1}$

Con el objeto de convertir el integrando en una función de densidad normal, de tal manera que la integral definida sea igual a 1, se multiplica el numerador y el denominador por la desviación estándar $(1-2t)^{-1/2}$, de manera que se obtiene:

$$m_{z_i^2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-2t)^{-1/2}} Exp\left[-\frac{z_i^2}{2}\Big/(1-2t)^{-1}\right] dz_i$$

Puesto que esta integral es igual a 1, la expresión anterior se simplifica a

$$m_{z_i^2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}$$

Al comparar $m_{z_i^2}(t)$ con las funciones generadoras de momentos se observa que es idéntica a la función generadora de momentos de la función de distribución tipo gamma con $\alpha = ½$ y $\beta = 2$

Se sabe que todas las z_i^2 son v.a independientes, por lo tanto la función generadora de momentos para la función U, estará dada por el producto de las funciones generadoras de momentos para cada z_i^2, es decir

$$m_U(t) = m_{z_1^2}(t)\, m_{z_2^2}(t) \quad m_{z_n^2}(t)$$

$$m_U(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}\,\frac{1}{(1-2t)^{1/2}} \cdot \quad \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}$$

$$m_U(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}$$

Que es exactamente igual a la función generadora de momentos de una χ^2 con n grados de libertad

A.2 Un estimador insesgado $\hat{\theta}$ de θ, es consistente, si $Lim_{n\to\infty}$ Var ($\hat{\theta}$) = 0.

Esto se puede demostrar a través de la desigualdad Tchebysheff, la cual señala que si c es un número real cualquiera y x una variable aleatoria cualquiera, en donde $E\left[\left[x-c\right]^2\right]$ es finita Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, se cumple la expresión

$$P(|x-c| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left[x-c\right]^2\right]$$

Con el propósito de comprobar esta afirmación se define a x como una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$ de manera que

$$P(|x-c| \geq \varepsilon) = \int_{|x-c|\geq\varepsilon} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{\infty} f(x)dx .$$

Se sabe que $|x-c| \geq \varepsilon$, entonces es lógico afirmar que $(x-c)^2 \geq \varepsilon^2$, de donde se desprende que la razón

$$\frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$$

Si en esta última expresión se multiplica a ambos lados por $f(x)$ y se integra a la función resultante en el mismo intervalo, no se alterará el sentido de la desigualdad, obteniéndose

$$\int_{|x-c|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-c|\geq\varepsilon} (x-c)^2 f(x)dx .$$

Si se amplía el rango de integración en el segundo miembro para que abarque desde $-\infty$ a ∞ se obtendrá un valor mayor y se cumplirá la desigualdad

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-c|\geq\varepsilon}(x-c)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx.$$

Entonces por transitividad se sigue que

$$P(|x-c|\geq\varepsilon) = \int_{|x-c|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx.$$

Nuevamente por la propiedad de transitividad se tendrá

$$P(|x-c|\geq\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx$$

Retomando el concepto de esperanza matemática de una función $g(x)$ dado por

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Y si se define $g(x) = (x-c)^2$ se tendrá que

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2 f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2}E[(x-c)^2].$$

Con lo que se demuestra la afirmación $P(|x-c|\geq\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}E[(x-c)^2]$

Sea ahora $\hat{\theta}$ un estimador para un parámetro poblacional θ, dado por una función de los n valores observados en la muestra, es decir $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ Si en la expresión anterior se hace $c = \theta$ y $X = \hat{\theta}$ se obtiene

$$P(|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}E\left[\left[\hat{\theta}-\theta\right]^2\right]$$

El segundo miembro de la expresión anterior es equivalente al error cuadrático medio, de manera que

$$E\left[\left[\hat{\theta}-\theta\right]^2\right] = Var(\hat{\theta}) + \left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2 = Var(\hat{\theta}) + \left[B(\hat{\theta})\right]^2$$

Para que el estimador sea consistente, se requiere como condición suficiente, pero no necesaria (pueden existir estimadores que sin cumplir estas condiciones sean consistentes), que sea asintóticamente insesgado (1.69) y que su varianza disminuya o tienda a cero, cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente (1.70).

Por tanto se calcula el límite cuando $n \to \infty$, suponiendo que es asintóticamente insesgado y asintóticamente cierto, es decir, que el $Lim_{n\to\infty}\ Var(\hat{\theta}) = 0$, entonces

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, P(|\hat{\theta}-\theta|\geq\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\, Lim_{n\to\infty}\, Var(\hat{\theta})$$

$$P(|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon) \leq 0$$

Por tanto la probabilidad de que la distancia entre el verdadero valor poblacional y el estimador sea mayor que cualquier $\varepsilon > 0$ se aproxima a cero, cuando $n \to \infty$.

Empleando el concepto de complemento de probabilidad se obtiene

$$P(|\hat{\theta}-\theta| < \varepsilon) = 1 - P(|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon), \text{ cuando } n \to \infty,$$

que es equivalente a

$$P(|\hat{\theta}-\theta| < \varepsilon) \to 1 \text{ , cuando } n \to \infty.$$

Lo cual significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, la probabilidad de que la diferencia entre $\hat{\theta}$ y θ difiera en menos de ε, se aproxima a 1, cuando el tamaño de la muestra crece. Esta es en si la propiedad de consistencia para cualquier estimador $\hat{\theta}$

A.3 Distribución asintótica normal de la suma de v.a. identicamente distribuidas

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables aleatorias independientes que tienen la misma distribución de probabilidad y por tanto la misma media μ y la misma varianza σ^2. Sea $y = x_1 + x_2 + , \ldots , + x_n$, cuya media esta dada por $n\mu$ y su varianza por σ^2/n

Entonces la variable aleatoria $u = (y - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ se distribuye asintóticamente como una normal con media cero y varianza 1.

Por principio

$$u = (y - n\mu)/\sigma\sqrt{n} = \left(\sum x_i - n\mu\right)/\sigma\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left(\sum x_i - n\mu\right)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\left(\sum x_i - \sum \mu\right)}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum (x_i - \mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Dado que las z_i son variables aleatorias independientes, su correspondiente función generadora de momentos esta dada por

$$m_{z_i}(t) = E\left[\exp\left(tz_i / \sqrt{n}\right)\right].$$

Es conocido que la función generadora de momentos para la suma de v.a. independientes es el producto de sus funciones generadoras de momentos individuales, de manera que

$$m_u(t) = \left\{E\left[\exp\left(tz_i / \sqrt{n}\right)\right]\right\}^n$$

Al expandir el término $tz_i/\sqrt{n}$ en una serie de Taylor se obtiene

$$\exp\left(tZ_i/\sqrt{n}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_i + \frac{t^2}{2n} z_i^2 + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} z_i^3 + \ldots$$

Si se substituye la serie de Taylor anterior en la función generadora de momentos original,

$$m_u(t) = E\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_i + \frac{t^2}{2n} z_i^2 + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} z_i^3 + \ldots\right]^n.$$

Además es conocido que $E(z_i) = 0$ y $var(z_i) = 1$, y suponiendo que $E(z_i^3) = k$, se tendrá

$$m_u(t) = \{1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}} k + \ldots\}^n = \{1 + \frac{1}{n}\{\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3\sqrt{n}} k + \ldots\}\}^n.$$

Para simplificar el resultado anterior defínase la variable

$$v = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3\sqrt{n}} k + \ldots$$

Por tanto

$$m_u(t) = \left(1 + \frac{v}{n}\right)^n.$$

Considerese el límite cuando n tiende a infinito

$$\lim_{n\to\infty} m_u(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n.$$

Por una conocida identidad se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n = e^v.$$

Esto significa que conforme n tiende a infinito, todos los términos en v, excepto el primero, tienden a cero, debido a que todos tienen potencias positivas de n en sus denominadores, por consiguiente puede deducirse que

$$\lim_{n\to\infty} m_u(t) = e^{t^2/2},$$

lo cual coincide con la función generadora de momentos para una distribución normal con media cero y varianza 1. De aquí se concluye que si la función generadora de momentos para $u = (y - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ es semejante a la de la normal estándar, a medida que crece el numero de variables sumadas n, entonces su distribución de probabilidad converge a la de una distribución normal estándar.

A.4 Distribución normal de la combinación lineal de v.a. normalmente distribuidas

Sean $y_1, \ldots, y_n$ variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con $E(y_i) = \mu_i$ y $Var(y_i) = \sigma_i^2$, con y = 1,..., n . Si se define la combinación lineal U como.

$$U = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = a_1\, y_1 + a_2\, y_2 + \ldots + a_n\, y_n$$

En donde a_i son constantes. Entonces U es también una variable aleatoria distribuida normalmente con

$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i = a_1\, \mu_1 + a_2\, \mu_2 + \ldots + a_n\, \mu_n$$

$$Var(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 = a_1^2\, \sigma_1^2 + a_1^2\, \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\, \sigma_n^2$$

Como y_i está distribuida normalmente con media μ_i y varianza σ_i^2, entonces y_i tiene la función generadora de momentos

$$m_{y_i}(t) = Exp\left(\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2} \right)$$

Por lo tanto $a_i y_i$ tiene la función generadora de momentos

$$m_{a_i y_i}(t) = E(e^{t a_i y_i}) = m_{y_i}(a_i t) = Exp\left(\mu_i a_i t + \frac{a_i^2 \sigma_i^2 t^2}{2} \right)$$

Como las variables y_i son independientes , y se sabe que si U se define como $U = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, entonces es válido afirmar:

$$m_U(t) = m_{a_1 y_1}(t)\, m_{a_2 y_2}(t)\, \ldots\, m_{a_n y_n}(t)$$

$$m_U(t) = Exp\left(\mu_1 a_1 t + \frac{a_1^2 \sigma_1^2 t^2}{2} \right) \ldots Exp\left(\mu_n a_n t + \frac{a_n^2 \sigma_n^2 t^2}{2} \right)$$

$$m_U(t) = Exp\left(t \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

La función generadora de momentos obtenida, coincide con la de una distribución normal con media $\sum_{i=1}^{r} a_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$, quedando demostrado que cualquier combinación lineal definida por U se distribuye normalmente

A.5 Distribución t de los coeficientes estimados $\hat{\beta}_j$ si se conoce la varianza muestral

De la definición de la distribución t se sabe que si , Sea z_1 es una variable aleatoria que se distribuye como una normal estándar con media cero y varianza uno; y z_2 una variable aleatoria que se distribuye como una χ^2 con r grados de libertad, siendo ambas v.a. independientes entre sí, entonces la razón de z_1 sobre la raíz positiva de z_2, dividida a su vez por sus r grados de libertad, se comporta como una distribución t con r grados de libertad, es decir

$$t = \frac{z_1}{\sqrt{z_2 / r}}.$$

En el caso particular dado en (1 75) se define a z_1 como

$$z_1 = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 (X'X)_{j,j}^{-1}}},$$

Por (1.42) se sabe que $\hat{s}^2$ se distribuye como una χ^2, de manera que se despeja en términos de χ^2 como

$$\chi^2_{(n-k)} \approx \hat{s}^2 \frac{n-k}{\sigma^2}$$

En base a este resultado, se puede definir a z_2 como

$$z_2 = \frac{\hat{s}^2 (n-k)}{\sigma^2} \Big/ (n-k)$$

Substituyendo estos resultados en la definición de la distribución t (1.75), se obtiene

$$t = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 (\mathrm{X'X})_{j,j}^{-1}}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{s}^2 (n-k)}{\sigma^2} \Big/ (n-k)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 (\mathrm{X'X})_{j,j}^{-1}}}}{\sqrt{\hat{s}^2 / \sigma^2}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{(\mathrm{X'X})^{-1}_{j,j}}}}{\sqrt{\hat{s}^2} / \sqrt{\sigma^2}}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{s}^2}\sqrt{(\mathrm{X'X})_{j,j}^{-1}}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{s}^2 (\mathrm{X'X})_{j,j}^{-1}}}$$

Que es exactamente la misma función, que se obtuvo en (1.75). Por tanto queda demostrado que (1.75) se distribuye como una t con n-k grados de libertad, justificandose el uso de la distribución t con n-k grados de libertad como estadístico de prueba para establecer intervalos de confianza de los coeficientes $\hat{\beta}_j$, así como en el desarrollo de hipótesis de inferencia estadística respecto a estos

A.6 **Estimación Iterativa del coeficiente de correlación ρ vía Cocrane-Orcutt.**

Considérese nuevamente al modelo lineal de n variables explicativas, dado en (1.88) y supóngase que los u_t se genera a través de un esquema autorregresivo. Con este modelo realizar los siguientes pasos:

1. Estimar el modelo en (1.88) por mínimos cuadrados y obtener los residuos estimados $\hat{u}_t$
2. Con los residuos estimados, evaluar la regresión

$$\hat{u}_t = \hat{\rho}\, \hat{u}_{t-1} + v_t .$$

3. Con la $\hat{\rho}$ estimada en el paso anterior, evaluar la ecuación de diferencias generalizadas, dada en (1 93),

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = \beta_1 (1- \hat{\rho}) + \beta_2 (x_{2,t} - \hat{\rho}\, x_{2\,t-1}) +. + \beta_n (x_{n,t} - \hat{\rho}\, x_{n\,t-1}) + (u_t - \hat{\rho}\, u_{t-1}),$$

equivalente a

$$y_t^* = \beta^*_1 + \beta^*_2\ x^*_{2\,t-1} + . . + \beta^*_n\, x^*_{n\,t-1} + \hat{u}^*_t ,$$

donde se define $\beta^*_j = \beta_j\ (1-\hat{\rho})$, $y^*_t = y_t - \hat{\rho} y_{t-1}$, $x^*_t = x^*_t - \hat{\rho}\ x^*_{t-1}$.

4. Substituir los valores estimados para los $\beta^*_j = \beta_j\ (1-\hat{\rho})$, obtenidos en el paso anterior, en el modelo original y volver a estimar los residuos $\hat{u}_t$, mediante

$$\hat{u}_t = y_t - \beta^*_1 + \beta^*_2\ x_{2\,t-1} + ... + \beta^*_n\ x_{n\,t-1} .$$

Con los residuales $\hat{u}_t$ obtenidos en el punto anterior volver al paso 2, obteniéndose un nuevo valor para $\hat{\rho}$.De esta manera, se puede llevar a cabo una tercera iteración y así sucesivamente, hasta el momento en que los valores sucesivos de $\hat{\rho}$ ya no difieran significativamente de una iteración a otra

A.7 Interpretación geométrica de los MCO y el coeficiente de determinación

Los estimadores por mínimos cuadrados de los modelos hasta ahora desarrollados pueden ser interpretados y derivados geométricamente, mediante los conceptos de vectores, distancia y ortogonalidad Para visualizarlo geométricamente considere el caso de una regresión lineal simple, donde el problema es estimar la intersección de una línea en una muestra de tres observaciones, por lo que el número de datos n es 3 Entonces los vectores serán:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Los dos vectores columna de **X** representan dos vectores en el espacio tridimensional como se observa en la figura (A.1), donde cada eje mide los valores de las variables en una observación. El conjunto de todas las combinaciones lineales de estos dos vectores, $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, para todos los vectores $\boldsymbol{\beta}$ es el plano **P** definido por los dos vectores. Cada vector $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ puede ser identificado como un punto en este plano, e inversamente para cada punto en el plano corresponde una $\boldsymbol{\beta}$ para la cual $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ es el punto en cuestión. Este plano es el espacio de todas las combinaciones lineales posibles de los dos vectores definidos por las tres observaciones sobre las dos variables independientes En este caso el problema de regresión se reduce a dos variables explicativas y tres datos observados. Si existen k variables explicativas y n observaciones, entonces el hiperplano es el espacio consistente de todas las combinaciones lineales de los k vectores columna en **X**, dados por $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ para todos los vectores de $\boldsymbol{\beta}$, es un subespacio de dimensión k El subconjunto complemento que contiene todos los residuos vectoriales es el espacio residual de dimensión n-k, que es el número de grados de libertad del problema. En este ejemplo el plano **P** es el espacio de dimensión dos y el espacio de los residuales es una línea, conocida como $\hat{u}$.

Los datos de la variable dependiente **y** definen un vector, que por lo general no está en el plano P El problema de la regresión es el encontrar cierto vector de constantes, conocido por $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, tal que $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, que está en el plano sea lo mas cercano al vector **y**.

Se sabe que el punto más cercano en un plano a un punto que no está en el plano es una proyección perpendicular desde el punto exterior al plano,como se aprecia en la figura (1.5).

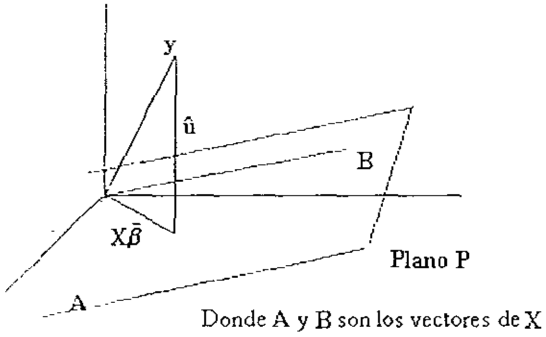

Figura A.1
Proyección perpendicular de la variable dependiente al plano formado por las variables explicativas.

Puede observarse que el vector de residuales es

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta}. \tag{a.1}$$

El hecho de que el vector de residuales $\hat{u}$ sea perpendicular a $X\hat{\beta}$ significa que el producto interno de los dos vectores se anula, es decir los dos vectores son ortogonales. El vector $X\hat{\beta}$ está de hecho definido por la condición de ortogonalidad dada por

$$(X\hat{\beta})'\hat{u} = 0$$

$$\hat{\beta}'(X'\hat{u}) = 0, \tag{a.2}$$

de manera que $X'\hat{u}$ se anule, es decir

$$X'\hat{u} = 0. \tag{a.3}$$

Para que esta última condición se cumpla, se requiere que $\hat{u}$ sea ortogonal a cada una de las k columnas de X.

Esta condición de ortogonalidad combinada con la definición de $\hat{u}$, dada en (a.1), implica

$$X'(y - X\hat{\beta}) = X'y - X'X\hat{\beta} = 0$$

Por tanto

$$X'y = X'X\hat{\beta}.$$

Se resuelve para $\hat{\beta}$, puesto que $X'X$ es no singular debido a que los vectores columna de X son linealmente independientes, de otra forma no se habría podido generar el plano de combinaciones lineales P, obteniéndose

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y, \tag{a.4}$$

que es el estimador por mínimos cuadrados.

El triángulo rectángulo formado por y, $X\hat{\beta}$ y $\hat{u}$ en la figura (A 1) ilustra la descomposición del vector y en dos componentes ortogonales.

El primero es el componente en el plano

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y,$$

el cual es el componente de y explicado por la regresión

El segundo es el vector de residuales

$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - X(X'X)^{-1}X'y = (I - X(X'X)^{-1}X')y = My,$$

el cual es el componente de y no explicado por la regresión

Usando la interpretación geométrica analizada anteriormente es posible medir la proporción de la varianza de la variable dependiente y que es explicada por la regresión $\hat{y} = X\hat{\beta}$.

Entonces

$$y = \hat{y} + \hat{u} = X\hat{\beta} + \hat{u}. \tag{a.5}$$

Asumiendo que las variables que forman el triángulo rectángulo serán medidas como desviaciones de sus valores medios, es decir, como la variación total de los valores observados de y alrededor de su media muestral.

La variable y se puede dividir en dos componentes, el primero atribuible a la línea de regresión y el segundo a fuerzas aleatorias, ya que no todas las observaciones caen sobre la línea de regresión ajustada. La suma de los cuadrados de los elementos del vector $\dot{y}$, donde $\dot{y}_i = y_i - \bar{y}$ es igual al cuadrado de la norma de $\dot{y}$, lo cual se denota como

$$\|\dot{y}\|^2 = \dot{y}'\dot{y} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum \dot{y}_i^2 .$$

Esta suma de cuadrados, cuando se divide por el número de grados de libertad, n - 1, proporciona la varianza de la variable dependiente. Frecuentemente se le conoce como la suma total de los cuadrados (STC) a ser explicados por la regresión (lo que debería explicar la regresión).

La figura (A.2) muestra que y es la hipotenusa del triángulo, mientras que $\hat{\mathrm{y}}$ y $\hat{\mathrm{u}}$ son los catetos, donde los elementos de $\hat{\mathrm{y}}$ son $\hat{y}_i - \bar{y}$

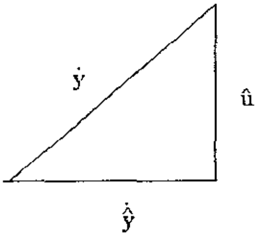

Figura A.2
Triángulo rectángulo, cuyo cateto sobre el plano es la variación explicada por el modelo ajustado, mientras que su cateto perpendicular al plano es la variación no explicada por el modelo, es decir los residuales.

Del teorema de Pitágoras se sabe que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es

$$\|\dot{\mathrm{y}}\|^2 = \|\dot{\hat{\mathrm{y}}}\|^2 + \|\hat{\mathrm{u}}\|^2,$$

mientras que los cuadrados de los catetos del triángulo rectángulo son:

$$\|\hat{\mathrm{y}}\|^2 = \hat{\mathrm{y}}\,'\,\dot{\hat{\mathrm{y}}} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum \dot{\hat{y}}_i^2\,, \tag{a.6}$$

$$\|\hat{\mathrm{u}}\|^2 = \hat{\mathrm{u}}\,'\,\hat{\mathrm{u}} = \sum \hat{u}_i^2\,, \tag{a.7}$$

donde (a 6) es la variación explicada por el modelo ajustado y (a.7) es la variación que no es explicada por el modelo, es decir los residuales. Por tanto

$$\sum \dot{y}_i^2 = \sum \dot{\hat{y}}_i^2 + \sum \hat{u}_i^2\,,$$

expresa la suma total de los cuadrados a ser explicados como la suma de los cuadrados explicados con los cuadrados no explicados. Esta ecuación es similar a (a.5), donde se expresa la descomposición en componentes explicados y no explicados como una ecuación de vectores. Asimismo, muestra la misma descomposición en términos de los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo formado por los vectores. Dado que las variables son medidas como desviaciones de sus valores medios, las longitudes cuadradas, cuando se dividen por n - 1 tienen la interpretación de varianza muestral. De manera que

$$\frac{1}{n-1}\sum \dot{y}_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum \dot{\hat{y}}_i^2 + \frac{1}{n-1}\sum \hat{u}_i^2\,,$$

donde se expresa la varianza total como la suma de la varianza explicada y la varianza no explicada.

El coeficiente de determinación R^2 para una regresión, es la proporción de la varianza total de la variable dependiente que es explicada por el modelo. Dicha proporción puede ser expresada en varias formas equivalentes:

$$R^2 = \frac{\|\dot{\hat{\mathrm{y}}}\|^2}{\|\dot{\mathrm{y}}\|^2} = \frac{\|\dot{\mathrm{y}}\|^2 - \|\hat{\mathrm{u}}\|^2}{\|\dot{\mathrm{y}}\|^2} = 1 - \frac{\|\hat{\mathrm{u}}\|^2}{\|\dot{\mathrm{y}}\|^2},$$

$$R^2 = \frac{\dot{\hat{y}}'\dot{\hat{y}}}{\dot{y}'\dot{y}} = \frac{\sum \dot{\hat{y}}_i^2}{\sum \dot{y}_i^2} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2,$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum \dot{y}_i^2}. \tag{1.90}$$

Puesto que la suma de cuadrados no puede ser negativa, entonces $0 \leq R^2 \leq 1$.

En el límite cuando todos los residuales son cero, $\|\hat{\mathrm{u}}\|^2$ se anula y $R^2 = 1$, es decir la suma total de los cuadrados es explicada por el modelo En el otro extremo, cuando todos los coeficientes son cero, $\|\hat{\mathrm{u}}\|^2$ es igual a $\|\dot{\mathrm{y}}\|^2$, entonces $R^2 = 0$, donde ninguno de la suma de los cuadrados es explicado por el modelo Por lo tanto R^2 es una medida del poder de explicación del modelo, en particular cuantifica que tan bueno es el modelo al estimar y que tanto concuerda con los datos disponibles. Por ejemplo con una $R^2 = 0.90$, el 90 % de la varianza de las variables dependientes es explicada por el modelo, con un 10 % que queda sin explicar

El coeficiente de determinación R^2 es una medida del poder de explicación del modelo, pero debe ser cuidadosamente utilizado al comparar diferentes modelos. Es inapropiado comparar modelos con diferente número de variables explicativas ó con una variable dependiente diferente. Solo es apropiado comparar modelos cuando se utilizan las mismas variables independientes y la variable dependiente es la misma. En este caso el modelo con una R^2 más alta proveerá una mejor explicación del fenómeno bajo investigación. Por ejemplo suponga que la teoría sugiere cierta relación lineal entre las variables explicativas x_i e y, pero existen diferentes maneras de medir a las variables x_i, de aquí al comparar las R^2 para diferentes alternativas de medición, será apropiado seleccionar aquel modelo que explique mejor a y.

Una medida de relación también utilizada es el coeficiente de determinación ajustada a los grados de libertad del modelo que se define como $\bar{R}^2$, donde

$$1 - \overline{R}^2 = \frac{\frac{1}{n-k}\sum \hat{u}^2_i}{\frac{1}{n-1}\sum \hat{y}^2_i}$$

Aquí los grados de libertad asociados con los residuales es n-k (como en el caso del cálculo de $\hat{\sigma}^2$, estimador insesgado de σ^2), mientras que los grados de libertad asociados con la variable dependiente son n-1 Por consiguiente el coeficiente ajustado de determinación será

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{(n-1)}{(n-k)} = R^2 - \frac{(k-1)}{(n-k)}(1-R^2). \tag{1.91}$$

En general $\overline{R}^2$ será menor que R^2 (a menos que k=1 ó R^2=1, en cuyo caso serán iguales), y es posible que $\overline{R}^2$ sea negativa. Mientras que el coeficiente no ajustado de determinación no puede decrecer a medida que se aumenta el número de variables explicativas en el modelo, el coeficiente ajustado si puede decrecer

Es buena práctica utilizar el $\overline{R}^2$ en lugar del R^2 debido a que este último proporciona un cuadro demasiado optimista del modelo, particularmente cuando el número de variables explicativas no es muy pequeño en comparación con el número de observaciones.

Anexos

Tabla A 1 Tasas de interes bancaria

Trimestre	C P P. /a
1986/01	70 21
1986/02	75 16
1986/03	84 49
1986/04	93 67
1987/01	96 11
1987/02	94 78
1987/03	92 03
1987/04	95 65
1988/01	125 19
1988/02	62 79
1988/03	40 17
1988/04	42 39
1989/01	48 46
1989/02	49 34
1989/03	41 62
1989/04	39 01
1990/01	44 70
1990/02	41 66
1990/03	31 81
1990/04	30 10
1991/01	25 71
1991/02	22 84
1991/03	21 09
1991/04	20 59
1992/01	17 93
1992/02	15 77
1992/03	19 26
1992/04	22 14
1993/01	22 27
1993/02	19 53
1993/03	16 82
1993/04	15 62
1994/01	12 24
1994/02	16 12
1994/03	17 24
1994/04	16 42
1995/01	40 89
1995/02	58 17
1995/03	37 71
1995/04	43 72
1996/01 p	38 40
1996/02	30 55
1996/03	27 21
1996/04	26 68
1997/01	22 08

p/ cifras preliminares a partir de la fecha indicada.
a/ Costo Porcentual Promedio de Captación en Moneda Nacional
Fuente: Banco de México, indicadores económicos

Tabla A 2 Índice de Precios y Cotizaciones BMV /a

Trimestre	Índice promedio
1986/01	13 26
1986/02	15 02
1986/03	24 77
1986/04	44 43
1987/01	85.49
1987/02	159 46
1987/03	321 20
1987/04	104 48
1988/01	184 18
1988/02	193 69
1988/03	194.45
1988/04	217.02
1989/01	218 76
1989/02	336 13
1989/03	418 47
1989/04	404.27
1990/01	480 68
1990/02	627 30
1990/03	547 48
1990/04	640.89
1991/01	734.02
1991/02	1089 87
1991/03	1270 86
1991/04	1352 35
1992/01	1821.05
1992/02	1735 04
1992/03	1323 69
1992/04	1724 53
1993/01	1668 75
1993/02	1627 89
1993/03	1862 37
1993/04	2417 08
1994/01	2481 96
1994/02	2341 06
1994/03	2761.78
1994/04	2370 58
1995/01	1665 68
1995/02	2077 45
1995/03	2482 64
1995/04	2704 92
1996/01 p/	2915 49
1996/02	3202 08
1996/03	3302 66
1996/04	3285 77
1997/01	3806 30

p / cifras preliminares a partir de la fecha indicada.
a/ Bolsa Mexicana de Valores
Fuente: Bolsa Mexicana de valores, S A. de C.V
Para obtener estas cifras se promediaron la más alta y la más baja observación durante el periodo.

Tabla A.3 Exportaciones de Bienes y Servicios

Trimestre	M.P.P. /a
1986/01	112765.40
1986/02	125552.20
1986/03	123019.50
1986/04	137370.20
1987/01	136907.90
1987/02	134550.00
1987/03	133850.10
1987/04	140729.50
1988/01	150035.90
1988/02	150517.60
1988/03	139427.20
1988/04	137522.80
1989/01	147794.90
1989/02	141884.90
1989/03	155622.30
1989/04	164897.40
1990/01	180744.60
1990/02	132731.30
1990/03	157587.30
1990/04	171508.30
1991/01	164625.40
1991/02	171950.10
1991/03	167170.80
1991/04	171405.20
1992/01	181278.00
1992/02	179109.80
1992/03	170501.30
1992/04	177914.40
1993/01 p/	181603.00
1993/02	185554.50
1993/03	191838.80
1993/04	207163.40
1994/01	216333.40
1994/02	223829.80
1994/03	220444.30
1994/04	239205.10
1995/01	276742.90
1995/02	294944.00
1995/03	305077.00
1995/04	319885.90
1996/01	323074.10
1996/02	349688.10
1996/03	362168.00
1996/04	385595.90
1997/01	383312.60

p/ Cifras preliminares a partir de 01/1993
a/ Millones de pesos a precios de 1993
Fuente: INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales de México.

Tabla A.4 Importaciones de Bienes y Servicios

Trimestre	M.P.P. /a
1986/01	85314.00
1986/02	87088.40
1986/03	82335.60
1986/04	83357.00
1987/01	72341.10
1987/02	81716.30
1987/03	90871.80
1987/04	110565.10
1988/01	95029.50
1988/02	116251.50
1988/03	134190.10
1988/04	140540.30
1989/01	125451.70
1989/02	141015.30
1989/03	143071.80
1989/04	163795.90
1990/01	144193.70
1990/02	157368.10
1990/03	184715.90
1990/04	200257.50
1991/01	166819.10
1991/02	193288.10
1991/03	204550.10
1991/04	226077.50
1992/01	216090.00
1992/02	237007.80
1992/03	238759.80
1992/04	253990.20
1993/01 p/	228315.30
1993/02	235932.30
1993/03	242870.00
1993/04	256318.70
1994/01	274261.30
1994/02	292312.40
1994/03	291003.80
1994/04	303742.80
1995/01	240741.00
1995/02	240076.40
1995/03	257931.80
1995/04	273776.00
1996/01	274091.90
1996/02	309982.20
1996/03	339776.30
1996/04	370099.40
1997/01	352773.90

p/ Cifras preliminares a partir de 01/1993
a/ Millones de pesos a precios de 1993
Fuente: INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales de México

Tabla A.5 Balanza de pagos de México (Flujos de Capital)

Trimestre	Millones de Dólares
1986/01	857.00
1986/02	254.80
1986/03	622 00
1986/04	981 80
1987/01	-570 10
1987/02	3389 40
1987/03	-1730 60
1987/04	-2277 50
1988/01 p	-610 60
1988/02	-1280 20
1988/03	894 10
1988/04	-166.30
1989/01	-1693 70
1989/02	1157 40
1989/03	2995 00
1989/04	717 20
1990/01	794.90
1990/02	4313.80
1990/03	1167 00
1990/04	2021 50
1991/01	6882 60
1991/02	6998 80
1991/03	3374.90
1991/04	7251.20
1992/01	5816 40
1992/02	6163 80
1992/03	6236 00
1992/04	8202.60
1993/01	9400.00
1993/02	6799.40
1993/03	7503.40
1993/04	8779 50
1994/01	11422 80
1994/02	2727 30
1994/03	4145 80
1994/04	-3711 60
1995/01	3919 20
1995/02	2180 50
1995/03	4559 10
1995/04	4746 80
1996/01	-1148 20
1996/02	1304 30
1996/03	1216 80
1996/04	1949 80
1997/01	1868 80

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica
Fuente Banco de México, Indicadores Económicos

Tabla A.6 Cotización promedio del Dólar en el Mercado Cambiario.

Trimestre	Cotización
1986/01	0 42
1986/02	0 52
1986/03	0 66
1986/04	0 83
1987/01	1.02
1987/02	1 23
1987/03	1 46
1987/04	1 77
1988/01	2 25
1988/02	2 28
1988/03	2 28
1988/04	2 28
1989/01	2 32
1989/02	2 42
1989/03	2 51
1989/04	2 60
1990/01	2 69
1990/02	2 78
1990/03	2 86
1990/04	2.92
1991/01	2.97
1991/02	3 00
1991/03	3 04
1991/04	3 07
1992/01	3 07
1992/02	3 09
1992/03	3.10
1992/04	3 12
1993/01	3.11
1993/02	3 11
1993/03	3 12
1993/04	3 13
1994/01	3 17
1994/02	3 34
1994/03	3 39
1994/04	3 60
1995/01	5 97
1995/02	6 16
1995/03	6 21
1995/04	7 34
1996/01 p/	7 53
1996/02	7.48
1996/03	7 56
1996/04	7 83
1997/01	7 86

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica
Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos.
Para obtener cifras trimestrales se promediaron las cotizaciones promedio mensuales

Tabla A.7 Sueldos y Salarios Pagados en la Industria Maquiladora de Exportación

Trimestre	Remuneración media M.P C.
1986/01	21971.70
1986/02	29292.50
1986/03	33101.50
1986/04	50964.20
1987/01	56882.60
1987/02	74131.60
1987/03	97720.30
1987/04	162325.40
1988/01	198617.80
1988/02	218845.00
1988/03	235654.00
1988/04	279115.00
1989/01	296709.00
1989/02	318392.00
1989/03	344521.00
1989/04	401739.00
1990/01	424221.00
1990/02	446010.00
1990/03	447731.00
1990/04	532430.00
1991/01	498352.00
1991/02	533925.00
1991/03	560073.00
1991/04	679263.00
1992/01	649892.00
1992/02	681964.00
1992/03	717142.00
1992/04	853967.00
1993/01	804757.00
1993/02	821496.00
1993/03	837289.00
1993/04	936023.00
1994/01	964243.00
1994/02	1002609.00
1994/03	1036687.00
1994/04	1157774.00
1995/01	1299532.00
1995/02	1444900.00
1995/03	1401707.00
1995/04	1772577.00
1996/01 p	1785787.00
1996/02	1992244.00
1996/03	2115125.00
1996/04	2633379.00
1997/01	2754314.00

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica
a/ Miles de N$ a Precios Corrientes
FUENTE: INEGI. Estadísticas de la Industria Maquiladora de Exportación
Se emplea esta serie de datos como indicador de las variaciones del salario

Tabla A.8 Índice Nacional de Precios al Consumidor

Trimestre	Variación Porcentual /a
1986/01	17.80
1986/02	17.20
1986/03	19.00
1986/04	20.40
1987/01	21.90
1987/02	23.40
1987/03	22.90
1987/04	31.00
1988/01	28.90
1988/02	7.00
1988/03	3.20
1988/04	4.20
1989/01	4.90
1989/02	4.10
1989/03	3.00
1989/04	6.30
1990/01	8.90
1990/02	5.40
1990/03	4.90
1990/04	7.30
1991/01	5.60
1991/02	3.00
1991/03	2.60
1991/04	6.10
1992/01	4.00
1992/02	2.30
1992/03	2.10
1992/04	2.90
1993/01	2.65
1993/02	1.71
1993/03	1.76
1993/04	1.61
1994/01	1.80
1994/02	1.47
1994/03	1.62
1994/04	1.94
1995/01	13.90
1995/02	15.32
1995/03	5.77
1995/04	7.79
1996/01 p/	8.12
1996/02	6.29
1996/03	4.35
1996/04	5.97
1997/01	5.49

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica
Fuente: Banco de México, Índices de Precios.
a/ Inflación Acumulada Respecto al Trimestre Anterior .

Tabla A.9 Consumo Privado

Trimestre	M P.P. /a
1986/01	688204.50
1986/02	716683.00
1986/03	707108.30
1986/04	692840.30
1987/01	657738.90
1987/02	708041.30
1987/03	719141.00
1987/04	724679.60
1988/01	672262.50
1988/02	710845.60
1988/03	716630.20
1988/04	746074.20
1989/01	714711.80
1989/02	773052.70
1989/03	784973.80
1989/04	780341.20
1990/01	754406.30
1990/02	808002.70
1990/03	838931.10
1990/04	848004.00
1991/01	783902.00
1991/02	852071.40
1991/03	867844.30
1991/04	897554.90
1992/01	818616.80
1992/02	893219.90
1992/03	906955.10
1992/04	941726.40
1993/01 p/	889347.30
1993/02	899450.20
1993/03	893663.00
1993/04	930233.60
1994/01	908939.20
1994/02	951625.20
1994/03	936576.30
1994/04	983140.20
1995/01	865682.70
1995/02	839919.70
1995/03	835499.00
1995/04	879936.50
1996/01	861236.30
1996/02	860410.50
1996/03	860384.20
1996/04	918493.90
1997/01	878727.70

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
Fuente: INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales de México
a/ Millones de Pesos a precios de 1993.

Tabla A.10 Desempleo Abierto

Trimestre	Tasa de Desempleo /a
1986/01	4.22
1986/02	4.14
1986/03	4.13
1986/04 /b	4.06
1987/01	4.40
1987/02	4.00
1987/03	4.00
1987/04	3.30
1988/01	3.50
1988/02	3.70
1988/03	4.00
1988/04	3.20
1989/01	3.20
1989/02	3.00
1989/03	3.30
1989/04	2.50
1990/01	2.50
1990/02	2.80
1990/03	3.10
1990/04	2.60
1991/01	2.70
1991/02	2.30
1991/03	2.90
1991/04	2.60
1992/01	2.90
1992/02	2.80
1992/03	2.90
1992/04	2.70
1993/01 p/	3.50
1993/02	3.20
1993/03	3.70
1993/04	3.30
1994/01	3.70
1994/02	3.60
1994/03	3.90
1994/04	3.60
1995/01	5.10
1995/02	6.30
1995/03	7.40
1995/04	6.10
1996/01	6.20
1996/02	5.60
1996/03	5.50
1996/04	4.70
1997/01	4.30

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
a/ Principales Áreas Urbanas.
b/ Los datos anteriores al primer trimestre de 1987 fueron extrapolados vía Regresión simple.
FUENTE: INEGI. Encuesta Nacional de Empleo Urbano.

Tabla A 11 Inversión en Formación Bruta de Capital y Variación de Existencias.

Trimestre	M.P.P. 1993 /a
1986 01	181107.20
1986 02	168958 00
1986 03	116801 90
1986 04	123037 30
1987 01	161082 90
1987 02	162686 30
1987 03	136989 30
1987 04	172507 00
1988 01	186309 10
1988 02	190502 40
1988 03	180053 30
1988 04	196822 00
1989 01	207383.90
1989 02	210985.60
1989 03	159612.70
1989 04	187576 50
1990 01	197939 40
1990 02	239694 70
1990 03	192064 90
1990 04	224289 50
1991/01	239439 50
1991/02	251058 00
1991/03	198422 60
1991 04	249991 10
1992/01	292469 80
1992/02	276265 60
1992 03	246052 10
1992 04	249139 90
1993 01 p/	278654 80
1993 02	270026 50
1993 03	253782 90
1993/04	252643 20
1994 01	293828 80
1994 02	292994 80
1994 03	285873 30
1994 04	287265 30
1995 01	239347.90
1995 02	169773 50
1995 03	173880 90
1995 04	172965 00
1996 01	224456 00
1996 02	239675 10
1996 03	241445 40
1996 04	258487 00
1997 01	278542 60

a/ Millones de Pesos a precios de 1993.
p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
Fuente: INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales de México

Tabla A 12 Agregados Monetarios M1

Trimestre	M.P.P.C /a
1986/01	3,582
1986/02	3,886
1986/03	4,072
1986/04	6,145
1987/01	6,485
1987/02	7,756
1987/03	9,054
1987/04	14,116
1988/01	15,581
1988/02	18,423
1988/03	18,383
1988/04	22,312
1989/01	20,685
1989/02	22,047
1989/03	23,061
1989/04	31,392
1990/01	29,319
1990/02	33,527
1990/03	33,603
1990/04	51,048
1991/01	50,590
1991/02	55,655
1991/03	66,271
1991/04	112,184
1992/01	102,609
1992/02	108,926
1992/03	105,253
1992/04	126,471
1993/01	119,753
1993/02	126,317
1993/03	125,884
1993/04	148,911
1994/01	144,031
1994/02	139,715
1994/03	138,746
1994/04	154,519
1995/01	124,206
1995/02	124,530
1995/03	130,196
1995/04	165,357
1996/01 p/	167,938
1996/02	180,015
1996/03	188,941
1996/04	232,678
1997/01	229,744

b/ En Octubre de 1991 se incorporan al medio circulante el saldo de lascuentas maestras
/a Millones de N$ a precios corrientes.
p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
Fuente: Banco de México, Indicadores Económicos.

Tabla A 13 Ingresos Totales del Sector Publico (Tributarios y Parestatales)

Trimestre	M.P.P.C. /a
1986/01	4822.30
1986/02	5241.00
1986/03	6412.80
1986/04	7606.20
1987/01	9892.70
1987/02	12763.30
1987/03	15893.40
1987/04	20553.30
1988/01	27616.40
1988/02	29265.10
1988/03	32015.60
1988/04	29616.70
1989/01	34333.10
1989/02	36705.10
1989/03	38933.20
1989/04	39116.90
1990/01	45505.90
1990/02	47134.80
1990/03	49607.50
1990/04	61238.10
1991/01	54199.80
1991/02	54392.30
1991/03	57565.70
1991/04	63450.50
1992/01	62445.80
1992/02	65116.00
1992/03	73803.90
1992/04	73105.30
1993/01	71172.50
1993/02	74150.60
1993/03	74764.70
1993/04	81432.30
1994/01	77897.40
1994/02	79797.00
1994/03	84851.10
1994/04	89488.00
1995/01 p/	89221.10
1995/02	101963.70
1995/03	101991.60
1995/04	125706.20
1996/01	123813.00
1996/02	137014.60
1996/03	141468.50
1996/04	179023.30
1997/01	166426.10

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
a/ Millones de pesos a precios corrientes
Fuente: S.H.C.P. Dirección General de Planeación Hacendaria

Tabla A 14 Producto Interno Bruto

Trimestre	M.P.P. /a
1986/01	1009456.60
1986/02	1050764.60
1986/03	969224.80
1986/04	1015667.70
1987/01	999292.40
1987/02	1052997.10
1987/03	997190.00
1987/04	1065905.80
1988/01	1025808.80
1988/02	1064177.30
1988/03	998123.20
1988/04	1080155.10
1989/01	1057159.80
1989/02	1114931.00
1989/03	1056719.50
1989/04	1114450.00
1990/01	1102620.80
1990/02	1158816.60
1990/03	1107310.90
1990/04	1194641.80
1991/01	1144606.20
1991/02	1224247.30
1991/03	1144687.70
1991/04	1242526.70
1992/01	1200758.80
1992/02	1253158.50
1992/03	1196303.40
1992/04	1278428.70
1993/01 p/	1248725.30
1993/02	1260352.00
1993/03	1211579.70
1993/04	1304126.90
1994/01	1277838.00
1994/02	1331435.10
1994/03	1267386.30
1994/04	1372142.30
1995/01	1272566.40
1995/02	1209170.40
1995/03	1165594.00
1995/04	1276369.10
1996/01	1267773.90
1996/02	1286282.50
1996/03	1246844.00
1996/04	1373569.80
1997/01	1332268.90

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
a/ Millones de Pesos a Precios de 1993
Fuente: INEGI, Sistema de Cuentas Nacionales de México

Tabla A.15 Producto Interno Bruto EE.UU.

Trimestre	B D.P. /a
1986 01	5471 03
1986 02	5506 16
1986 03	5541 29
1986 04	5576 42
1987 01	5611 55
1987 02	5646 68
1987 03	5681.81
1987 04	5716 94
1988 01	5752 07
1988 02	5787 20
1988 03	5822 33
1988 04	5857 46
1989 01	5892 60
1989 02	5927 73
1989 03	5962 86
1989 04	5997 99
1990 01	6033.12
1990 02	6068 25
1990 03	6103 38
1990 04	6138 51
1991 01	6173.64
1991 02	6208.77
1991.03	6243.90
1991 04	6279 03
1992 01	6314.16
1992 02	6349 29
1992.03	6384 42
1992 04	6419 55
1993 01	6454 68
1993 02	6489 81
1993 03	6524 94
1993 04	6560.08
1994 01	6595 21
1994 02	6630 34
1994 03	6665 47
1994 04	6700 60
1995 01	6735.73
1995 02	6770 86
1995 03	6805 99
1995 04	6841 12
1996 01	6876 25
1996 02	6911 38
1996 03	6946 51
1996 04	6981 64
1997.01	7016 77

a/ Billones de Dólares a Precios de 1992
La serie original se presenta en forma anual, por lo cual se tuvo que interpolar la serie, para así obtener los datos trimestralmente, a través del análisis de regresión simple.
Fuente: "Final results of the comprehensive revision of the national in-come and product accounts (NIPA's). May 1997" K S Lum

Tabla A.16 Tasa de Interés en EE.UU. (Rendimiento Anual).

Trimestre	Tasa Porcentual
1986/01	9 33
1986/02	8 50
1986/03	7 67
1986/04	7 50
1987/01	7 50
1987/02	8 08
1987/03	8 42
1987/04	8 83
1988/01	8 58
1988/02	8 83
1988/03	9 83
1988/04	10 17
1989/01	11 17
1989/02	11 33
1989/03	10.50
1989/04	10 50
1990/01	10.00
1990/02	10 00
1990/03	10 00
1990/04	9 83
1991/01	9 17
1991/02	8.67
1991/03	8 50
1991/04	7 33
1992/01	6 50
1992/02	6 50
1992/03	6 00
1992/04	6 00
1993/01	6 00
1993/02	6 00
1993/03	6.00
1993/04	6 00
1994/01	6.04
1994/02	6 90
1994/03	7.49
1994/04	8 13
1995/01	8 82
1995/02 p/	9 00
1995/03	8 75
1995/04	8 72
1996/01	8 33
1996/02	8 25
1996/03	8 25
1996/04	8 25
1997/01	8 26

p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
Fuente: Banco de México, Dirección de Investigación Económica.

Tabla A.17 Tasa del IVA.

Trimestre	Tasa
1986 01	15.00
1986 02	15.00
1986 03	15.00
1986 04	15.00
1987 01	15.00
1987 02	15.00
1987 03	15.00
1987 04	15.00
1988 01	15.00
1988 02	15.00
1988 03	15.00
1988 04	15.00
1989 01	15.00
1989 02	15.00
1989 03	15.00
1989 04	15.00
1990 01	15.00
1990 02	15.00
1990 03	15.00
1990 04	15.00
1991 01	15.00
1991 02	15.00
1991 03	15.00
1991 04	10.00
1992 01	10.00
1992 02	10.00
1992 03	10.00
1992 04	10.00
1993 01	10.00
1993 02	10.00
1993 03	10.00
1993 04	10.00
1994 01	10.00
1994 02	10.00
1994 03	10.00
1994 04	10.00
1995 01	10.00
1995 02	15.00
1995 03	15.00
1995 04	15.00
1996 01	15.00
1996 02	15.00
1996 03	15.00
1996 04	15.00
1997 01	15.00

a/ Impuesto al Valor Agregado
Fuente S.H.C.P. Dirección General de Planeación Hacendaria.

Tabla A.18 Gasto del Sector Público.

Trimestre	M.P.P C. /a
1986/01	6042.1
1986/02	7373.9
1986/03	9802.6
1986/04	11712.4
1987/01	13933.6
1987/02	17513.6
1987/03	21252.3
1987/04	33828.4
1988/01	37096
1988/02	39308.4
1988/03	38747
1988/04	39543.3
1989/01	38137
1989/02	41548.2
1989/03	46576.6
1989/04	48189.6
1990/01	51198
1990/02	49444.5
1990/03	50830.1
1990/04	68299.8
1991/01	52572.5
1991/02	53093.3
1991/03	57133.8
1991/04	70331.1
1992/01	56119
1992/02	57058.9
1992/03	65085.2
1992/04	80205
1993/01	64816.1
1993/02	67141.7
1993/03	73946.3
1993/04	87282.1
1994/01	76706.8
1994/02	75717.9
1994/03	85344.7
1994/04	98961.7
1995/01 p/	84469.5
1995/02	96890.9
1995/03	89948.1
1995/04	150748.5
1996/01	121422.5
1996/02	114271.1
1996/03	137038
1996/04	210822.3
1997/01	150397.5

a/ Millones de N$ a Precios Corrientes
p/ Cifras preliminares a partir de la fecha indicada
Fuente. S.H.C.P Dirección General de Planeación Hacendaria.

Bibliografía

Libros.

- Bannock Graham, Baxter R.E., Rees Ray, *Diccionario de Economía*, 2ª Edición, Editorial Trillas, México, 1990.
- Canavos George, *Probabilidad y Estadística, Aplicaciones y Métodos*, Editorial McGraw-Hill Interamericana, México, 1992.
- Chiang Alph C., *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, 3ª Edición, Mc Graw-Hill Interamericana de España, Madrid, 1987.
- DornBush Rudingen / Fischer Stanley, *Macroeconomía*, 5ª edición, Mc Graw-Hill / Interamericana, México, Febrero 1993.
- Gujarati Damodar, *Econometría*, 2ª Edición, Mc Graw-Hill, México, 1994.
- Hair Joseph, *Multivariate Data Analysis with readings*, Third edition, Editions Macmillan, NewYork EE.UU, 1992.
- Intrilligator Michael, *Econometric Models , Tecniques & Applications*, Prentice - Hall, EE UU., 1978.
- Kreyzig Erwin, *Introducción a la Estadística Matemática*, Editorial Limusa, México, 1994.
- Luenberger David, *Programación Lineal y No lineal* Adddison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.
- Méndez Ramírez Ignacio, *El Protocolo de Investigación*, 2ª Edición Editorial Trillas, México, 1994.
- Parzen Emanuel, *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones* Editorial Limusa, México, 1992.
- Taha Hamndy, *Investigación de Operaciones*, 2ª Edición, Editorial AlfaOmega, México, 1991.
- Díez Medrano Juan, *Métodos de Análisis Causal*, 1ª Edición, Centro de Investigaciones Sociológicas, Madrid, 1992.

Manuales de Software.

- <u>*Microsoft Excel Versión 5.0, Manual del usuario*</u>

Microsoft Corporation, 1994.

Anuarios y publicaciones estadísticas.

- Banco Nacional de México, <u>*Cuaderno de Información Oportuna*</u>, México Julio 1995
- Fondo Monetario Internacional, <u>*Government Finance Statistics Yearbook*</u>, EE.UU. 1993
- INEGI, <u>*El Ingreso y el Gasto Público en México*</u>, México 1993

Revistas especializadas.

- Econometrica Vol. 38, <u>*Testing for Serial Correlation In Least Squares Regression When Some Of The Regressions Are Laged Dependent Variables*</u> , pag. 410-21, Durbin 1970.
- Econometrica Vol. 38, <u>*The Estimation of Simultaneous Equation Models with Lagged Endogenous Variables and First Order Serially Correlated Errors,*</u> pag. 507-516, Ray C. Fair, 1970
- Econometrica Vol. 41, <u>*Optimal Policies for Economic Stabilization,*</u> pag 529-559, Robert S. Pindyck, 1973.