

19  
Lij



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

-----  
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
"ARAGON"

DISEÑO DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL  
PARA ANALISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS DE  
ACERO UTILIZANDO EL METODO DEL ELEMENTO  
FINITO, CASO ISOPARAMETRICO EN 2D.

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**INGENIERO EN COMPUTACION**  
**P R E S E N T A :**  
**ESCOBAR MORENO LIZ ROCIO E.**

ASESOR: INGENIERO ROBERTO PLANCO BAUTISTA



SAN JUAN DE ARAGON, EDO. DE MEX.

SEPTIEMBRE DE 1996.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ARAGÓN

DIRECCIÓN

LIZ ROCIO E. ESCOBAR MORENO  
PRESENTE.

En referencia a su atento escrito de fecha 5 de junio del año en curso, en el que solicita cambio de asesor en su trabajo de Tesis intitulado "DISEÑO DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANALISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS DE ACERO UTILIZANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO. CASO ISOPARAMETRICO EN 2D", mismo que propone sea dirigido por el profesor, Ing. ROBERTO BLANCO BAUTISTA con fundamento en el punto 6 y siguientes del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"

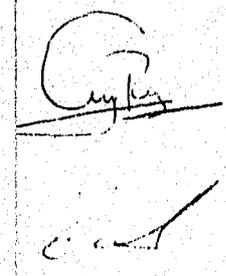
San Juan de Aragón, Edo. de Méx., a 5 de junio de 1996.

EL DIRECTOR

  
M en f CLAUDIO C. MERRIFIELD CASTRO



c e p Unidad Académica.  
c e p Jefatura de Carrera de Ingeniería en Computación.  
c e p Asesor de Tesis.  
CCMC/AIR/vr



*Dedicatoria :*

Dedico esta tesis a todas aquellas personas que de forma directa o indirecta contribuyeron a su realización; es decir, desde la profesora que me enseñó a leer hasta las personas encargadas de revisarla, así como a mi familia. Sin embargo, quiero hacer especial mención en mi madre la señora Esperanza Moreno Hernández y mis hermanas Evangelina y Patricia Escobar Moreno, todas ellas grandes mujeres y a quienes debo el haber llegado a este momento. Asimismo quiero agradecer al Ingeniero Roberto Blanco Bautista, el enorme apoyo que me brindó.

Gracias también a las siguientes personas :

Ingeniero Manuel Martínez Ortiz  
Ingeniero Gabriel Álvarez Bautista  
Ingeniero Silvia Vega Muystoy  
Señora Gloria Gallardo

Asimismo, agradezco a todas las instituciones en las que recibí tan excelente instrucción.

Sinceramente, gracias por todo y por tanto.

septiembre de 1996.

## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	i
<b>1) ANTECEDENTES</b>	1
1.1) Fuerza	2
1.2) Par	10
1.3) Centroide	15
1.4) Esfuerzo	18
<b>2) MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	21
2.1) Métodos Gaussianos	23
2.2) Método de Gauss - Doolittle	33
2.3) Método de Runge - Kutta	38
<b>3) RESISTENCIA DE MATERIALES</b>	40
3.1) Resistencia de materiales	41
3.2) Teoría elástica	44
3.3) Esfuerzos y deformaciones	50
3.4) Metodología del diseño	61
<b>4) ANÁLISIS DE ESFUERZOS</b>	66
4.1) Esfuerzos y deformaciones en placas de acero	67
<b>5) SIMULACIÓN</b>	83
5.1) Concepto de simulación	84
5.2) Simulación determinística	89

<b>6) MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ( MEF )</b>	92
6.1) ¿ Qué es el elemento finito ?	94
6.2) Diferentes tipos de elementos	102
6.3) Caso isoparamétrico en 2D	106
6.4) MEF en el elemento individual	107
6.5) MEF y el ensamble de elementos	111
<b>7) APLICACIÓN</b>	115
7.1) Entrada de datos	116
7.2) Proceso de cálculo	125
7.3) Interpretación de resultados	126
7.4) Toma de decisiones	127
<b>CONCLUSIONES</b>	129
<b>APÉNDICE A. APROXIMACIÓN NUMÉRICA Y ERRORES</b>	133
<b>APÉNDICE B. TABLAS MÁS IMPORTANTES</b>	136
<b>APÉNDICE C. ANÁLISIS BENEFICIO - COSTO DEL SOFTWARE DISEÑADO</b>	144
<b>APÉNDICE D. EJEMPLOS</b>	147
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	153

**INTRODUCCIÓN**

## INTRODUCCIÓN

Esta investigación es de vanguardia, es un tópico que a nivel teórico es poco conocido, aunque es altamente aplicado en casi todas las ramas de la ciencia ( mecánica, eléctrica, electrónica, hidráulica, astronomía, mecánica de suelos, geología, matemáticas, arquitectura, economía, ingeniería genética, ciencias biológicas, etc. ).

Debido a que es un tema muy extenso, el desarrollo se limitará al estudio de una aplicación especial del método : desarrollo lineal de análisis de esfuerzos en estructuras de acero en dos dimensiones, en el caso isoparamétrico; ésto estará sustentado por el marco teórico correspondiente ( métodos numéricos, simulación, matemáticas, mecánica, resistencia de materiales y método del elemento finito ).

Pareciera que es un problema puramente del campo de la ingeniería mecánica, pero las herramientas que requiere pertenecen a la ingeniería en computación; es necesario el dominio de un lenguaje de programación, técnicas de programación, estructuras de datos, bases de datos, graficación por computadora, métodos numéricos y desarrollo de modelos matemáticos. Ésta representa una buena oportunidad para demostrar que la ingeniería en computación se puede emplear en cualquier campo.

Actualmente en el mercado ya existen algunos paquetes que tratan sobre elementos finitos, desarrollados por empresas transnacionales, tales como Cosmos, Ansis, Phoenix, Algor, entre otros; éstos son vendidos con una gran cantidad de módulos, la mayoría de los cuales no se llegan a utilizar porque no están vinculados con la tarea que se está desempeñando. Lo anterior origina una serie de problemas, tales como: existe un gran desperdicio de este recurso, los costos se elevan debido a que se compra el software y los equipos adecuados para su instalación y funcionamiento ( deben cumplir requisitos especiales de memoria principal, de espacio en disco duro, coprocesador matemático, velocidad de procesamiento, interfaces, monitores de alta resolución, candados físicos de seguridad ); además el comprender y manipular estos paquetes implica tomar cursos especializados de capacitación en estas áreas, ya que los paquetes están diseñados de

acuerdo a las políticas propias de cada casa comercial; y por si fuera poco, todos estos paquetes trabajan por lotes lo que trae como consecuencia que el sistema no sea "amigable" al usuario.

Con el desarrollo que se está proponiendo, se pretende diseñar un software que pueda ser procesado en una computadora personal con requerimientos mínimos, que no sea necesaria una capacitación especial y que resuelva sólo el caso específico de la aplicación.

Partiendo de esta idea, se establecen los objetivos generales y particulares.

### **Objetivo general**

Diseñar e implantar un software para resolver problemas inherentes al análisis de esfuerzos a través del método del elemento finito.

### **Objetivos particulares**

- \* Desarrollar una metodología que permita solucionar problemas de análisis de esfuerzos en estructuras, de una manera sencilla y comprensible.
- \* Proporcionar un marco teórico adecuado para comprender este método.
- \* Reducir los costos de diseño y operación.
- \* Dar a conocer un método numérico de solución de ecuaciones lineales simultáneas para sistemas de gran escala, adaptado para utilizarse en computadora personal.

La investigación es de tipo documental y experimental; documental porque se investigará en diferentes fuentes bibliográficas y experimental porque se harán varios

ejemplos para demostrar que el programa de computadora está funcionando perfectamente.

La fuente de donde se obtuvo información del problema es el Departamento de Investigación y Desarrollo de la Fábrica de Implementos Petroleros y la Empresa Kalsi Eng. Inc. de Houston, Texas.

Esta tesis se ha dividido en siete capítulos y cuatro apéndices. Los capítulos 1 y 2 constituyen primordialmente los antecedentes para comprender este estudio, pero debido a sus diferencias, se han separado. Así, el capítulo 1 trata sobre algunos conceptos esenciales de la mecánica, tales como fuerza, par, centroide y esfuerzo.

En el capítulo 2 se estudian algunos métodos numéricos para resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas; se inicia explicando los métodos Gaussianos, para después entender con total claridad el método de Gauss - Doolittle y el de Runge - Kutta, los cuales son empleados por el método del elemento finito.

El capítulo 3 está dedicado a la teoría de la resistencia de materiales, desde lo básico hasta la metodología de diseño empleada; y constituye un excelente preámbulo para el capítulo 4 denominado Análisis de Esfuerzos. Con estos dos capítulos se entra propiamente al tema central de esta investigación.

El capítulo 5 es sobre simulación, la importancia se encuentra en que el método del elemento finito hace uso de ella.

En el capítulo 6 se proporciona la teoría del elemento finito, desde una definición básica hasta el ensamble de elementos.

En el capítulo 7 se explica el software que se diseñó.

Y en los apéndices se suministra información adicional, la cual ayuda a complementar la investigación. En el apéndice A se proporcionan los conceptos básicos de la aproximación numérica y errores.

El apéndice B contiene las tablas que se utilizan en diferentes capítulos de esta tesis; se hace referencia a ellas escribiendo la letra B seguida del número correspondiente, así la tabla B.1 es la tabla 1 del apéndice B.

En el apéndice C se detalla el análisis beneficio - costo del software diseñado.  
Finalmente, en el apéndice D se proporcionan varios ejemplos de esta aplicación.  
De antemano, se agradece la atención prestada a este trabajo de investigación.

## **CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES**

## CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

Para iniciar el desarrollo de este tema de investigación, es imprescindible conocer algunos conceptos fundamentales de la mecánica. La completa comprensión de éstos es vital, ya que se emplearán continuamente aquí.

### **1.1) Fuerza**

Una fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro cuerpo que cambia el estado de movimiento del cuerpo sobre el que actúa; ésta implica acciones mutuas de dos cuerpos.

La unidad de medida de la fuerza en el Sistema Internacional de Unidades es el Newton; sin embargo, en la práctica es más común emplear la libra ( Sistema Inglés ). En la aplicación que se presenta aquí, la fuerza se expresará en libras.

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo se producen efectos internos y externos; los efectos internos de una fuerza sobre un cuerpo no rígido o elástico son producir tensiones y deformaciones en el cuerpo.

Los efectos externos consisten en cambiar el movimiento o engendrar fuerzas resistentes ejercidas sobre el cuerpo dado; dependen de las características propias de la fuerza, tales como :

- a) Su intensidad o magnitud.
- b) Su línea de acción.
- c) El sentido.

El efecto externo de una fuerza sobre un cuerpo rígido es el mismo para todos los puntos de aplicación a lo largo de la línea de acción.

Una fuerza puede representarse por medio de un vector. Su dirección se simboliza a través de un vector trazado paralelamente a la línea de acción de la fuerza, el sentido

mediante una punta de flecha sobre el segmento y la magnitud de la fuerza por la longitud del segmento, de acuerdo a una escala establecida; tal como se muestra en la figura 1.1

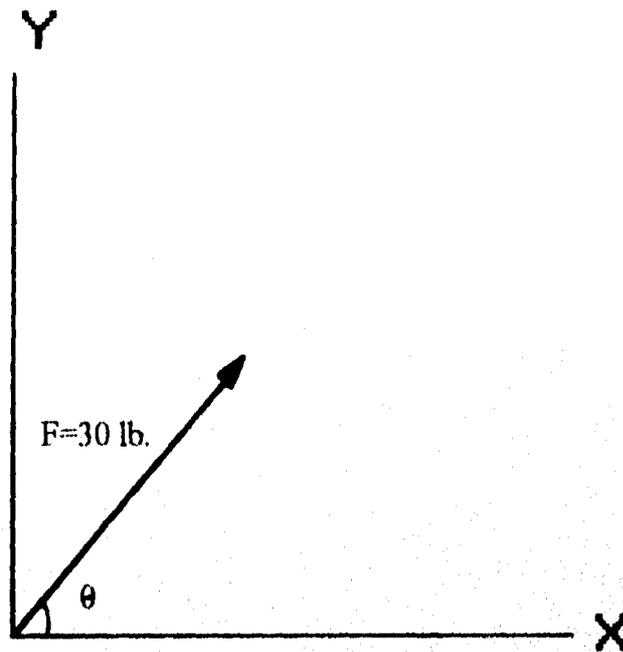


FIGURA 1.1 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA FUERZA

El diagrama que representa el cuerpo y las líneas de acción de las fuerzas que actúan sobre él, recibe el nombre diagrama de espacios o de posiciones.

Un número de fuerzas tratadas como un grupo, constituye un sistema de fuerzas. Un sistema de fuerzas es **concurrente** cuando las líneas de acción de todas las fuerzas se cortan en un punto común. Un sistema de fuerzas es **coplanar** cuando las fuerzas se hallan en un mismo plano. Un sistema **paralelo** es aquel en que las líneas de acción de las fuerzas son paralelas. Si las fuerzas tienen la línea de acción común se dice que el sistema es **colineal**. Ahora bien, un sistema de fuerzas puede descomponerse o componerse. El proceso de reducir un sistema de fuerzas a un sistema similar más sencillo recibe el nombre de **composición** y el de transformar una fuerza a un sistema

equivalente menos simple se denomina **descomposición**. Las dos o más fuerzas en las que puede descomponerse una fuerza dada reciben el nombre de componentes.

La composición y descomposición de fuerzas puede hacerse por métodos gráficos o algebraicos; aquí sólo se presentará el método algebraico.

Para realizar la composición de un sistema de fuerzas, considérese el sistema de la figura 1.2

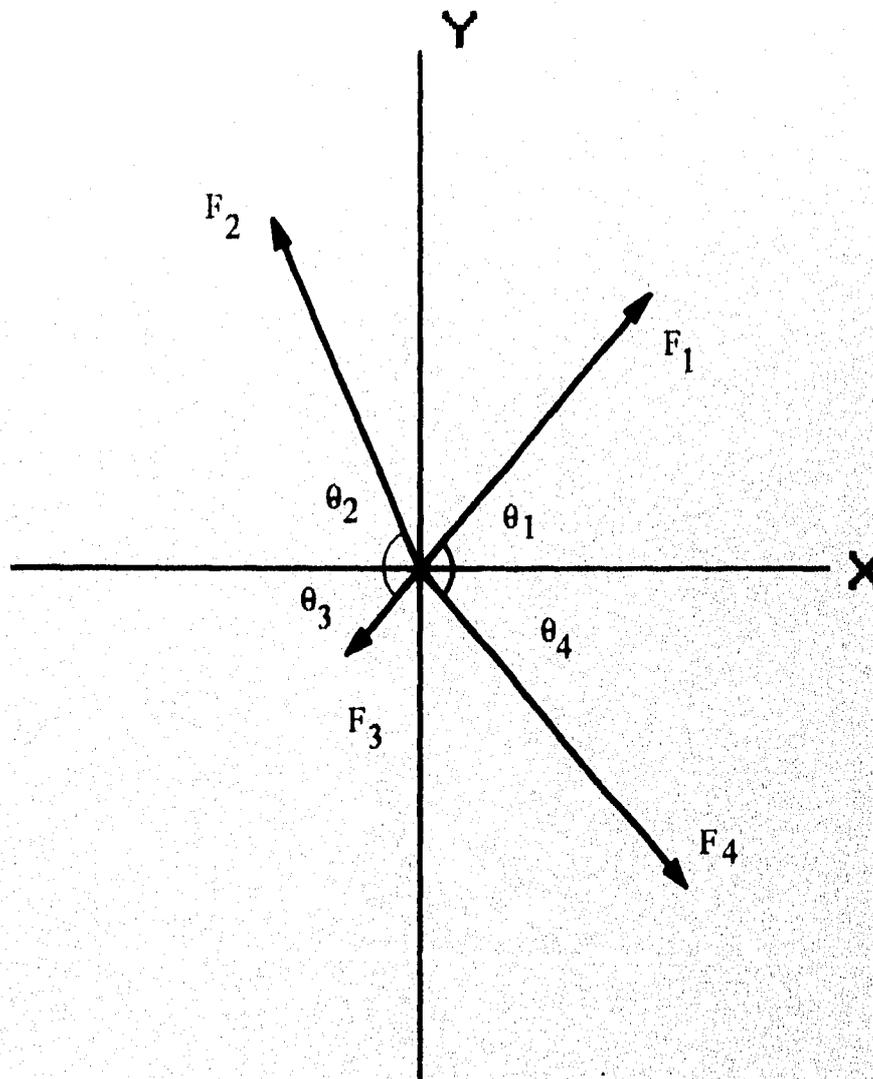


FIGURA 1.2 SISTEMA DE FUERZAS

Después de realizar las reducciones pertinentes, el sistema quedará como se aprecia en la figura 1.3

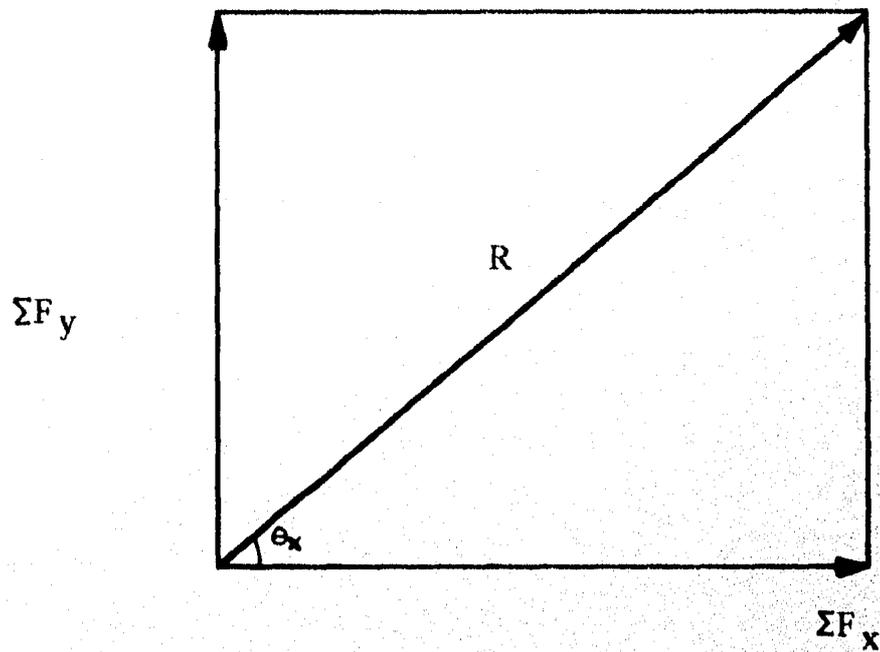


FIGURA 1.3 COMPOSICIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS

La magnitud de la resultante de un sistema de fuerzas se obtiene por la ecuación :

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

Y el ángulo de la resultante, respecto al eje  $X$  positivo, queda determinado por :

$$\text{tg} \theta_x = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

Para explicar el procedimiento de descomposición, supongamos que se quiere descomponer la fuerza de la figura 1.4

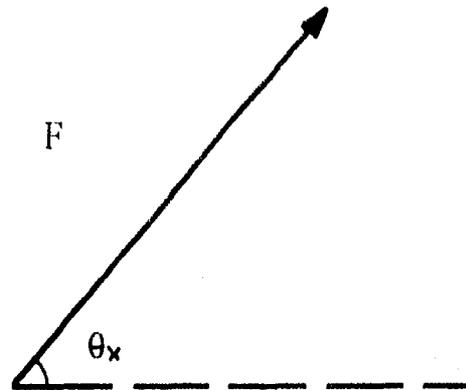


FIGURA 1.4 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA

Las magnitudes de las componentes se calculan con las fórmulas :

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \operatorname{sen} \theta_x$$

Si estas expresiones se extienden a las direcciones de los ejes **X**, **Y** y **Z** se obtiene :

$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

en las que  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  son los ángulos que forma la fuerza con los tres ejes, tal como se observa en la figura 1.5

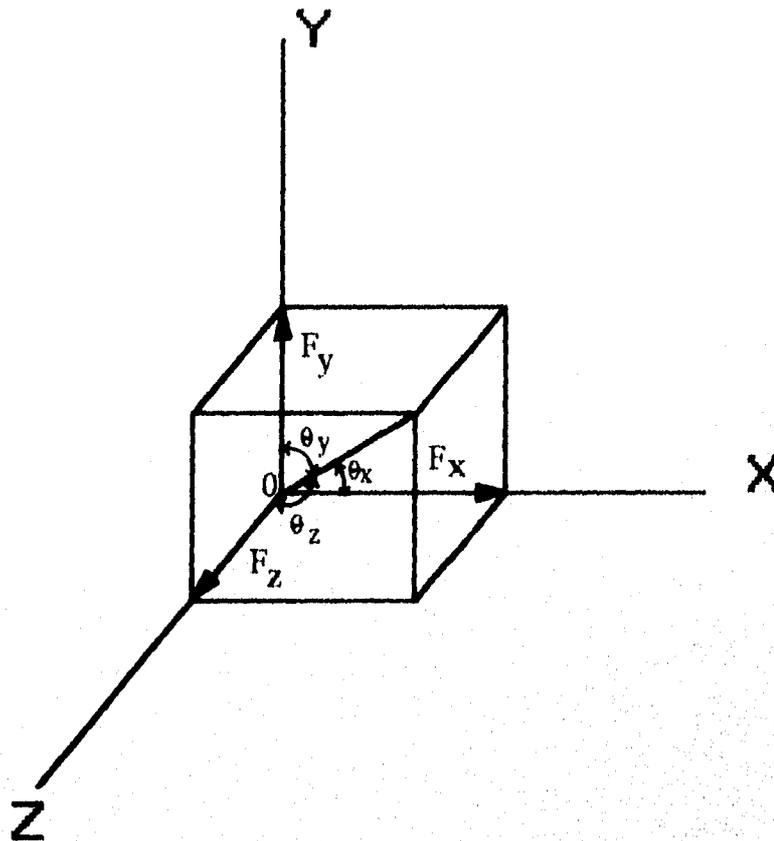


FIGURA 1.5 COMPONENTES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

La descomposición de una fuerza en dos componentes es de importancia especial, su utilidad radica en que las componentes pueden calcularse por medio de expresiones algebraicas muy sencillas.

Una fuerza puede producir momentos cuando es perpendicular al eje de referencia, sin cortarlo; el **momento de una fuerza** es el producto de la magnitud por la distancia a un eje de referencia. El signo del momento de una fuerza con respecto a un punto se considera positivo si el sentido de la rotación es contrario al de las manecillas del reloj.

Cuando se desea calcular el momento de una fuerza respecto a un eje que no es perpendicular a su línea de acción, éste puede hallarse descomponiendo la fuerza en dos componentes, una perpendicular y otra paralela al eje de momentos; de aquí se observa que el momento de la componente perpendicular es igual al momento de la fuerza dada, puesto que el momento de la componente paralela es cero.

La importancia física del momento reside en el hecho de que es una medida de la tendencia de la fuerza a hacer girar el cuerpo sobre el cual actúa, alrededor del eje de referencia.

Los momentos pueden expresarse en Kg-m, Kg-cm, lb-pulg., etc.

Ejemplo 1.1 : En la figura 1.6, R es la resultante de las otras cuatro fuerzas que se indican. Hallar la magnitud, dirección y sentido de la fuerza F.

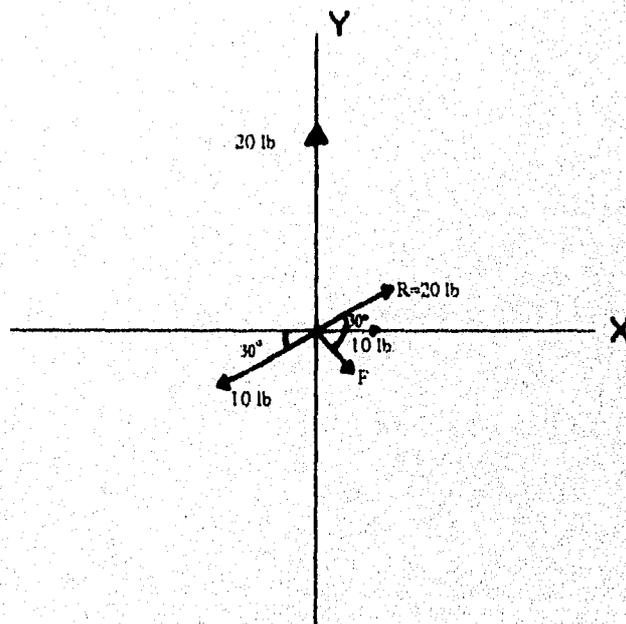


FIGURA 1.6 EJEMPLO 1.1

**Solución :**

Datos :

$$R = 20\text{lb.}, \theta_r = 30^\circ$$

$$F_1 = 10\text{lb.}, \theta_1 = 0^\circ$$

$$F_2 = 20\text{lb.}, \theta_2 = 90^\circ$$

$$F_3 = 10\text{lb.}, \theta_3 = 210^\circ$$

$$F = ?, \theta_r = ?$$

Empleando la descomposición de una fuerza, se calculan las componentes de R :

$$\Sigma F_x = 20 \cos(30^\circ) = 17.4\text{lb.}$$

$$\Sigma F_y = 20 \sin(30^\circ) = 10\text{lb.}$$

Ahora, utilizando las fórmulas de composición, se obtiene :

$$\Sigma F_x = 17.40$$

$$17.40 = 10 \cos(0^\circ) + 20 \cos(90^\circ) + 10 \cos(210^\circ) + F \cos \theta_r$$

$$\Sigma F_y = 10$$

$$10 = 10 \sin(0^\circ) + 20 \sin(90^\circ) + 10 \sin(210^\circ) + F \sin \theta_r$$

Al hacer las operaciones matemáticas resulta :

$$\begin{aligned} F \cos \theta_f &\cong 16 \\ F \sin \theta_f &\cong -5 \end{aligned}$$

De donde se determina que :

$$\begin{aligned} F &\cong 16.76 \text{ lb.} \\ \theta_f &\cong 341.10^\circ \end{aligned}$$

\*\*\* Nota : Aquí, en todos los valores, se tomaron únicamente dos dígitos decimales; esta exactitud, es más que apropiada para esta aplicación.

## 1.2) Par

El sistema de fuerzas formado por dos fuerzas que obran sobre líneas de acción paralelas, no colineales, de igual magnitud y sentido opuesto, recibe el nombre de **par**. Un par no puede reducirse a ningún sistema de fuerzas más simple. Para estudiar los pares de fuerzas es conveniente representarlos por medio de un vector y es necesario indicar todas sus características. La magnitud del par sería la longitud del vector; la orientación de éste se determina trazando el vector perpendicular al plano del par. El sentido del par se manifiesta por una punta de flecha sobre el vector.

El hecho de poder representar un par de una manera completa por un vector es de una trascendencia considerable en los problemas que entrañan la composición y descomposición de pares. Dadas estas consideraciones, se puede establecer el esquema de un par, el cual es presentado en la figura 1.7

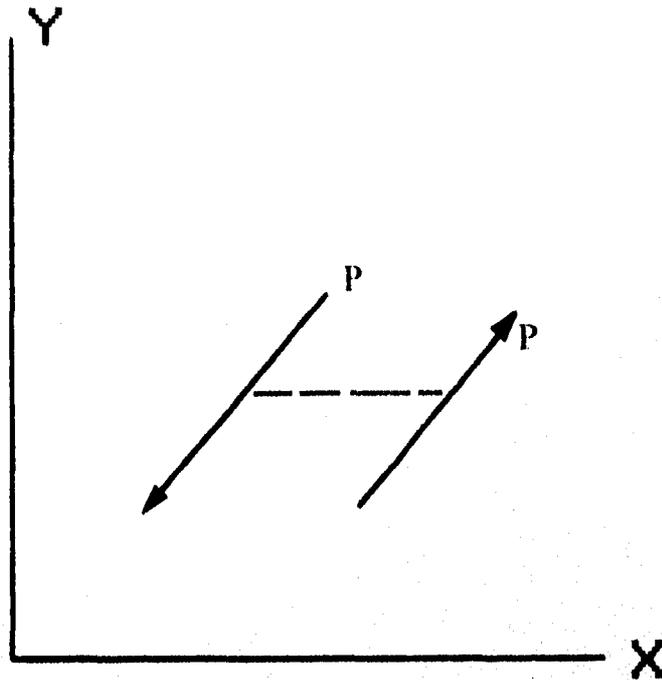


FIGURA 1.7 ESQUEMA DE UN PAR

El **momento de un par** es igual al producto de la magnitud de una de las fuerzas del par por la distancia entre las líneas de acción de las dos fuerzas; éste es el mismo para diferentes magnitudes y líneas de acción de las fuerzas, siempre que el momento del par y su sentido permanezcan constantes y que no cambie la orientación del plano del par.

El efecto externo de un par aplicado a un cuerpo rígido es producir un cambio en el movimiento de rotación del mismo o desarrollar un par resistente debido a las acciones de otros cuerpos sobre el cuerpo en cuestión; es decir, produce o impide una rotación. El efecto externo de un par depende de :

- a) La magnitud del momento del par.
- b) El sentido de la rotación del par.
- c) La orientación del plano.

Las modificaciones que pueden hacerse a un par sin que se alteren sus características son :

a) Un par puede ser trasladado a una posición paralela en su plano o en cualquier plano paralelo.

b) Puede hacerse girar en su plano.

c) Puede variarse la magnitud de las dos fuerzas del par y la distancia entre ellas siempre que permanezca constante el producto de una de las fuerzas por la distancia entre las dos.

De las transformaciones de un par se deduce que la resultante de dos pares es un par cuyo momento es la suma algebraica de los momentos de los dos pares.

Si se combina con una fuerza ocurrirá una traslación de la línea de acción de la fuerza a una posición paralela, quedando inalterados su magnitud y su sentido.

Ejemplo 1.2 : Usando las transformaciones de un par, reemplazar el par que aparece en la figura 1.8, por otro par equivalente cuyas fuerzas sean verticales y actúen en los puntos C y D.

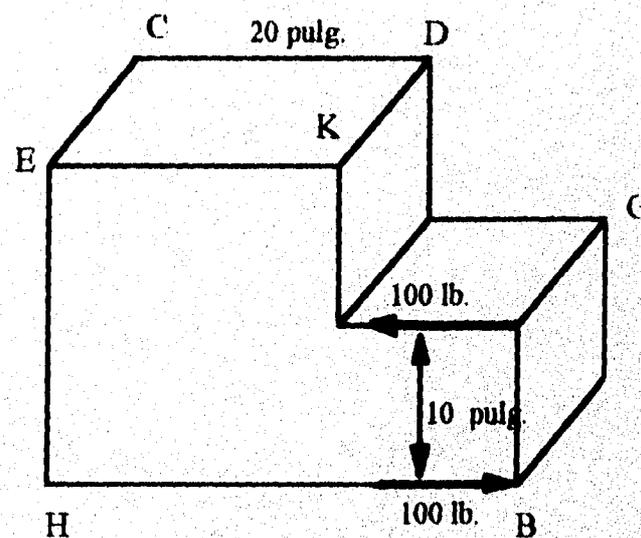
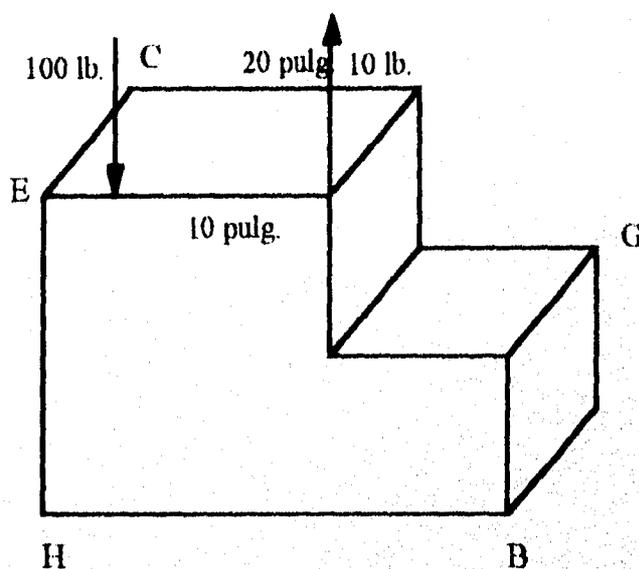


FIGURA 1.8 EJEMPLO 1.2

**Solución :**

El par anterior puede ser girado  $90^\circ$  en su plano y trasladado después ( transformaciones **b** y **a** ) hasta llevarlo a la posición indicada por la figura 1.9



**FIGURA 1.9 ROTACIÓN Y TRANSLACIÓN DEL PAR**

Aplicando la transformación **c**, disminuir las fuerzas de 100 lb. a 50 lb. y aumentar el brazo de 10 pulg. a 20 pulg.; ésto se aprecia en la figura 1.10

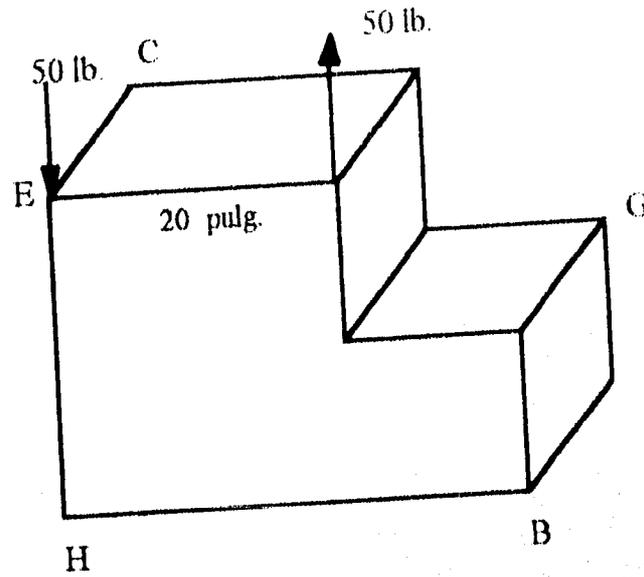


FIGURA 1.10 TRANSFORMACIÓN c DEL PAR

Finalmente, empleando la transformación a, el par puede trasladarse a un plano paralelo ( figura 1.11 ).

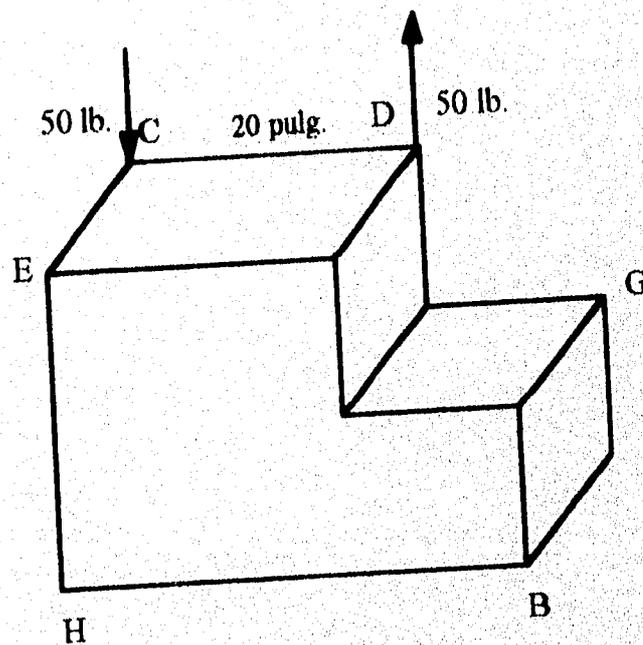


FIGURA 1.11 TRANSFORMACIÓN a DEL PAR

El par de la figura 1.11 tiene el mismo momento, orientación y sentido que el de la figura 1.8, por consiguiente, si se aplica al cuerpo producirá el mismo efecto externo que el que originaría el par inicial.

### 1.3) Centroide

El centroide de una superficie es el punto de la misma, cuya distancia a un eje cualquiera multiplicada por el área es igual al momento de la superficie respecto del eje y se expresa como  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Las coordenadas del centroide de una superficie  $y = f(x)$  se obtienen con las expresiones matemáticas

$$\bar{x} = \frac{\mu_y}{A} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\mu_x}{A}$$

donde A es el área, que puede calcularse por medio de una integral definida que es particular para cada superficie; y  $\mu$  es el momento de masa respecto al eje indicado por el subíndice. Las expresiones que definen a  $\mu$  son :

$$\mu_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad \text{y} \quad \mu_y = \int_a^b [xf(x)] dx$$

Las ecuaciones anteriores dan a entender que el centroide de una superficie es el punto en el que puede concebirse concentrada toda el área de modo que el momento del área concentrada con respecto a un eje cualquiera sea igual al momento del área real distribuida, con respecto a ese mismo eje.

El término centroide se usa a veces en un sentido restringido aplicándolo únicamente a las figuras y cuerpos geométricos en los que no interviene ninguna idea de masa, por tal motivo se usa el término **centro de masas** para designar aquel punto de un cuerpo físico en el que podría interpretarse concentrada la masa del mismo, de modo que su momento con respecto a un eje o a un plano cualquiera sería igual a la suma de los momentos de los elementos de masa del cuerpo, con respecto al mismo eje o plano.

Otro término estrechamente asociado con el centroide es el **centro de gravedad**. El centro de gravedad de un cuerpo se define generalmente como el punto del mismo en el que actúa el peso del cuerpo cualquiera que sea su posición; y al hallar el centro de gravedad interviene el momento de un sistema de fuerzas.

Generalizando, la coordenada  $\bar{x}$  del centroide de una longitud  $L$ , de una superficie de área  $A$ , de un cuerpo de volumen  $V$ , o de una masa  $M$  puede hallarse partiendo de las siguientes ecuaciones :

$$\bar{x} = \frac{M_x}{V}$$

donde  $M_x = \pi \int_a^b (x[f(x)]^2) dx$  y  $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ .

Las coordenadas  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  pueden hallarse por ecuaciones similares.

Un punto íntimamente relacionado con el centro de gravedad es el **centro de presión**. Si una presión está uniformemente distribuida sobre una superficie plana dada, el centro de presión es el punto de aplicación de la resultante de las presiones ejercidas en los diversos puntos del cuerpo.

Ejemplo 1.3 : Calcular la coordenada  $\bar{X}$  del centroide del cono circular recto de la figura 1.12

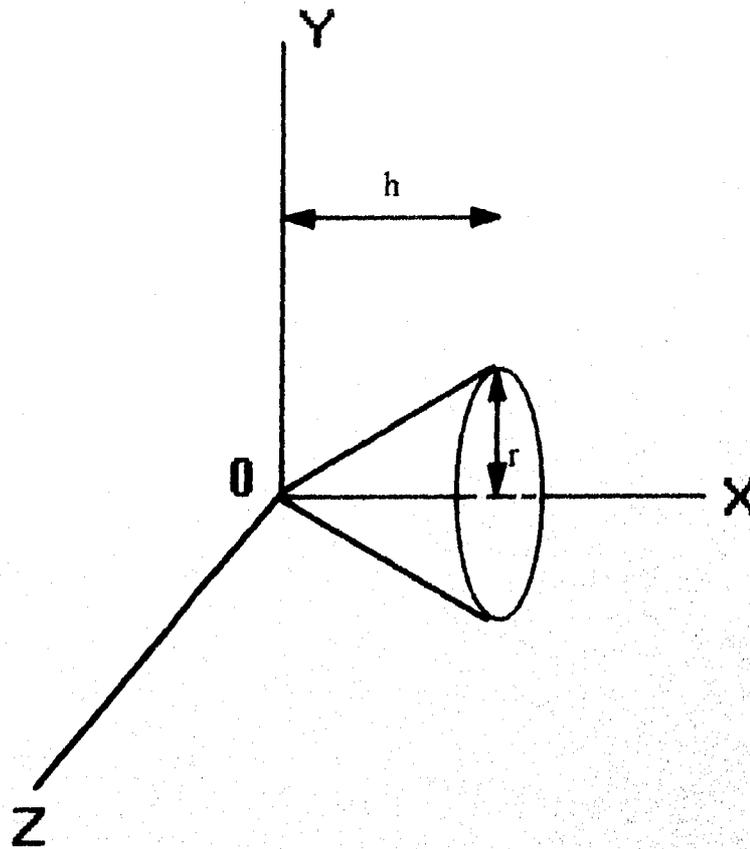


FIGURA 1.12 EJEMPLO 1.3. CONO CIRCULAR RECTO

**Solución :**

La expresión para el volumen de un cono circular recto es :

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

Sustituyendo esta fórmula en las expresiones que determinan al centroide de un cuerpo y haciendo las operaciones matemáticas pertinentes, se llega a :

$$V = \frac{\pi^3 r^4 h^3}{27}$$

$$\mu_{yz} = \frac{\pi^3 r^4 h^4}{36}$$

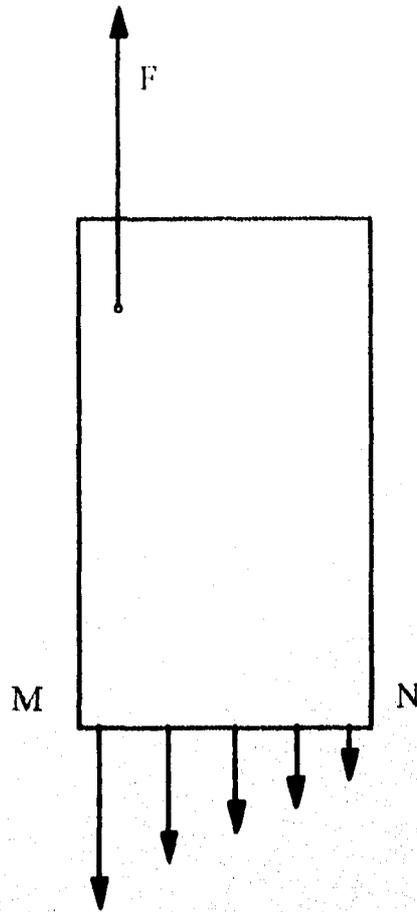
Por lo tanto :

$$\bar{x} = \frac{3}{4}h$$

#### 1.4) Esfuerzo

Sea una barra prismática cargada en su extremo, tal como se indica en la figura

1.13



**FIGURA 1.13 BARRA PRISMÁTICA**

Partiendo de la figura, se observa que el esfuerzo es la resistencia que ofrecen los componentes internos de un cuerpo a la acción de la fuerza externa a modificar el estado inicial del cuerpo. Se consideran concentradas en una sola fuerza resistente distribuida sobre el área total de acción; así el esfuerzo, se denota por :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Donde  $\sigma$  = esfuerzo,  $F$  = fuerza externa y  $A$  = área.

Un esfuerzo tiene las dimensiones de fuerza dividida entre área (  $F/L^2$  ) y puede expresarse en distintas unidades, como kilogramos por centímetro cuadrado (  $Kg./cm^2$  ), libras por pulgada cuadrada (  $lbs./pulg.^2$  ), etc.

Los esfuerzos no pueden medirse experimentalmente; sin embargo, hay muchas técnicas para calcular la deformación; y esto es de gran ayuda porque es posible estimar el estado de esfuerzo en un punto, después de computar el estado de deformación.

La deformación es el estado final que guarda un cuerpo después de haber sido afectado por una fuerza ( de tensión o compresión ), ocurre porque no hay cuerpos perfectamente elásticos. La deformación queda definida por la fórmula :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

donde  $\varepsilon$  es la deformación ( cantidad adimensional ),  $\sigma$  el esfuerzo y  $E$  el módulo de Young o de elasticidad del material en cuestión.

**Ejemplo 1.4 :** Determinar el esfuerzo total en una varilla cilíndrica de acero, cuya deformación es igual a  $0.7 \times 10^{-3}$ .

**Solución :**

Por tablas ( tabla B.1), se sabe que para el acero  $E = 27.6 \times 10^6$   $lb./pulg.^2$ , por lo tanto

$$\sigma = 0.7 \times 10^{-3} \times 27.6 \times 10^6 = 19.32 \times 10^3$$
  $lb./pulg.^2$ .

Estos temas serán tratados con mayor profundidad en capítulos posteriores.

## **CAPÍTULO 2. MÉTODOS NUMÉRICOS**

## CAPÍTULO 2. MÉTODOS NUMÉRICOS

Los modelos matemáticos de procesos naturales o físicos inevitablemente contienen algunos **errores inherentes** que resultan de la comprensión incompleta del fenómeno natural, la naturaleza estocástica o aleatoria de los procesos mismos, así como de las incertidumbres de medidas experimentales. A menudo el modelo incluye sólo las características pertinentes del proceso físico, es decir, se excluyen las irrelevantes.

Aunque se pudiera desarrollar un modelo libre de errores matemáticos, éste no podría ser resuelto exactamente en una computadora digital, ya que ésta únicamente puede ejecutar un número limitado de operaciones aritméticas simples : sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, las divisiones son una serie de restas sucesivas, y las restas son sumas de un tipo especial; también las multiplicaciones son una serie de sumas sucesivas; en concreto, una computadora digital sólo realiza sumas; otra limitación es que todas las computadoras tienen registros computacionales y memorias finitas, lo que implica que sólo un subconjunto discreto de los números reales racionales puede ser generado, manipulado y almacenado.

Lo anterior significa que operaciones como diferenciación, integración y evaluación de series infinitas no pueden ser implantadas directamente en una computadora digital; es decir, se debe recurrir a técnicas auxiliares para hacer este tipo de cálculos, estos procedimientos coadyuvantes son los métodos numéricos.

Existen métodos numéricos para realizar integraciones, invertir matrices, resolver sistemas de ecuaciones, etc. ; aquí se describirán algunos métodos gaussianos para encontrar el valor de las incógnitas en sistemas de ecuaciones y otros para resolver ecuaciones diferenciales, particularmente el método de Runge - Kutta. Se estudian estos métodos porque se emplean para aplicar correctamente el método del elemento finito.

## 2.1) Métodos Gaussianos

Considérese el sistema de ecuaciones lineales siguiente :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

El sistema anterior también se puede expresar como :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

O también como  $Ax = b$ , donde  $A$  es la matriz de coeficientes,  $b$  es el vector de términos independientes,  $x$  es el vector de incógnitas a determinar que deben satisfacer simultáneamente al conjunto de ecuaciones.

Para resolver este sistema, el primer paso es reemplazar la segunda ecuación por el resultado de adicionarle la primera ecuación multiplicada por  $-a_{21}a_{11}$ . De manera similar, se sustituye la tercera ecuación por el resultado de sumarle la primera ecuación multiplicada por  $-a_{31}a_{11}$ .

El resultado es el sistema :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3\end{aligned}$$

en el cual  $a'$  y  $b'$  son los nuevos coeficientes que resultaron de las manipulaciones matemáticas hechas. Ahora, se multiplica la segunda ecuación ( del sistema obtenido ) por  $-a'_{32} / a'_{22}$  y se suma el resultado a la ecuación tres. El resultado es el sistema triangular :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3$$

donde  $a''_{33}$  y  $b''_3$  se obtienen de las operaciones aritméticas realizadas previamente.

El sistema ya está listo para ser resuelto por el proceso de sustitución hacia atrás, el primer valor que se calcula es el de  $x_3$  de la última ecuación; ésto permite que  $x_2$  se obtenga de la segunda ecuación, y después  $x_1$  se encuentra partiendo de la ecuación uno.

Cabe señalar que siempre deben tomarse como pivotes los elementos de la diagonal principal.

El método descrito anteriormente es conocido como eliminación gaussiana, y aunque parece primitivo a primer vistazo, resulta ser muy conveniente para ser implantado en máquinas automáticas.

**Ejemplo 2.1 : Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones**

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2$$

$$4x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 6$$

**Solución :**

Se toma como pivote el primer renglón, se multiplica por 2 y se le suma el segundo renglón multiplicado por 3. También se multiplica por 4 y se le adiciona el tercer renglón multiplicado por -3.

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10$$

$$0x_1 + 22x_2 - 17x_3 = 14$$

$$0x_1 + 20x_2 - 46x_3 = 22$$

Posteriormente se toma como pivote el segundo renglón, el cual es multiplicado por -20, y se le agrega el tercer renglón multiplicado por 22 :

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10$$

$$0x_1 + 22x_2 - 17x_3 = 14$$

$$0x_1 + 0x_2 - 672x_3 = 204$$

Ahora se encuentran los valores de las incógnitas, mediante la sustitución hacia atrás :

$$x_1 = 8/3$$

$$x_2 = 45/112$$

$$x_3 = - 17/56$$

Muchas otras personas se han basado en este método para crear otras técnicas más eficientes y eficaces para resolver sistemas de ecuaciones, por ello se habla de métodos como de Gauss - Jordan, Gauss - Seidel, etc., donde el segundo nombre corresponde al nombre de la persona que desarrolló la técnica.

El método de **Gauss - Jordan** se basa principalmente en dos operaciones matriciales elementales :

- a) intercambiar un par de ecuaciones
- b) multiplicar una ecuación por una constante y sumarla algebraicamente a otra.

**Ejemplo 2.2** : Determinar la solución  $x$  del siguiente sistema aplicando el método de Gauss - Jordan

$$\begin{aligned}4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -5 \quad \rightarrow \text{pivote} \\x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 5 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 31 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7\end{aligned}$$

**Solución :**

Al realizar los pasos indicados por el método, el sistema queda de la siguiente manera :

$$\begin{aligned}4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -5 \\0x_1 - 0.25x_2 + 3.25x_3 - 1.25x_4 &= 6.25 \\0x_1 + 4.25x_2 - 1.25x_3 + 6.25x_4 &= 34.75 \\0x_1 - 0.5x_2 + 1.5x_3 + 0.5x_4 &= 9.5\end{aligned}$$

Se checa cuál es el valor absoluto mayor y se coloca en el **segundo renglón** ( el primer renglón permanece inmóvil ).

$$4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -5$$

$$0x_1 + 4.25x_2 - 1.25x_3 + 6.25x_4 = 34.75 \rightarrow \text{pivote}$$

$$0x_1 - 0.25x_2 + 3.25x_3 - 1.25x_4 = 6.25$$

$$0x_1 - 0.5x_2 + 1.5x_3 + 0.5x_4 = 9.5$$

De la segunda iteración, resulta :

$$4x_1 + 0x_2 + 2.12x_3 + 1.41x_4 = 19.53$$

$$0x_1 + 4.25x_2 - 1.25x_3 + 6.25x_4 = 34.75$$

$$0x_1 + 0x_2 + 3.18x_3 - 0.88x_4 = 8.29 \rightarrow \text{pivote}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 1.65x_3 - 0.24x_4 = 5.41$$

A partir de aquí, la primera y segunda ecuaciones permanecen inmovibles; entonces se toma como pivote la tercera ecuación. En la siguiente iteración se obtiene :

$$4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 14$$

$$0x_1 + 4.25x_2 + 0x_3 + 5.9x_4 = 38.01$$

$$0x_1 + 0x_2 + 3.18x_3 - 0.88x_4 = 8.29$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0.22x_4 = 1.11 \rightarrow \text{pivote}$$

Ahora, los renglones 1, 2 y 3 no se mueven; se toma como pivote a la ecuación 4.

Finalmente el sistema queda de la siguiente manera :

$$4x_1 = 3.91$$

$$4.25x_2 = 8.24$$

$$3.18x_3 = 12.73$$

$$0.22x_4 = 1.11$$

Por lo tanto :

$$x_1 \approx 0.98$$

$$x_2 \approx 1.94$$

$$x_3 \approx 4$$

$$x_4 \approx 5$$

Los valores reales son :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$  y  $x_4 = 5$ .

Se deduce que a través de este método se obtiene una exactitud altamente aceptable, si se hubiera aumentado el número de decimales considerados, la exactitud sería mayor. Ésto significa que hay error de truncación y de redondeo, para más información consúltese el apéndice correspondiente.

Otro método es el de **Gauss - Seidel**, que se describe enseguida. Dado el sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Se despeja de cada ecuación, la incógnita respectiva, utilizando las fórmulas :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n)$$

⋮

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})$$

Ahora supone que el sistema es recursivo y que todas las incógnitas están en la  $k$ -ésima iteración; es decir, queda de la forma :

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \dots - a_{3n}x_n^k)$$

⋮

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \dots - a_{nn}x_n^{k+1})$$

donde  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  ( hasta un valor finito).

Como el método es de aproximaciones sucesivas se requiere de un conjunto de valores iniciales para las incógnitas, que se obtienen de alguna de estas maneras :

$$x^0 = (0, 0, 0, \dots, 0)^T$$

$$x^{(0)} = \left( \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \frac{b_3}{a_{33}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right)^T$$

en las cuales T denota al vector transpuesto.

Cuando se usa el método de Gauss - Seidel, debe verificarse que se cumple el criterio de convergencia, dado por la expresión :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Ejemplo 2.3 :** Dado el siguiente sistema lineal de ecuaciones, encontrar la solución aplicando el método de Gauss - Seidel

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 0x_3 - 15x_4 &= -11 \\0x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 2x_4 &= 16 \\0x_1 + 12x_2 + x_3 - x_4 &= 9 \\-16x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= -30\end{aligned}$$

**Solución :**

Aplicando el criterio de convergencia :

$$i = 1$$

$$|1| \neq |-14|$$

$$i = 2$$

$$|2| \neq |13|$$

$$i = 3$$

$$|1| \neq |11|$$

$$i = 4$$

$$|1| \neq |-14|$$

Se observa que ninguna de las ecuaciones cumple con el criterio, se reacomoda el sistema de tal forma que la mayoría de las ecuaciones cumplan :

$$-16x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = -30$$

$$0x_1 + 12x_2 + x_3 - x_4 = 9$$

$$0x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 16$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 - 15x_4 = -11$$

El primer paso es despejar las incógnitas :

$$x_1 = \frac{1}{-16}(-30 - 2x_2 - 0x_3 - x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{12}(9 - 0x_1 - x_3 + x_4)$$

$$x_3 = \frac{1}{11}(16 - 0x_1 - 2x_2 - 2x_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{-15}(-11 - x_1 - x_2 - 0x_3)$$

Como solución inicial se obtiene :

$$x^0 = (1.88, 0.75, 1.45, 0.73)$$

Para  $k = 0$

$$x^1 = (2.01, 0.69, 1.19, 0.91)^T$$

Para  $k = 1$

$$x^2 = (2.02, 0.73, 1.16, 0.91)^T$$

Para  $k = 2$

$$x^3 = (2.02, 0.73, 1.16, 0.92)^T$$

Para  $k = 3$

$$x^4 = (2.02, 0.73, 1.15, 0.92)^T$$

Para  $k = 4$

$$x^5 = (2.02, 0.73, 1.15, 0.92)^T$$

Como estos valores son iguales a los obtenidos en la iteración anterior, es decir hay convergencia, ésta es la solución.

## 2.2) Método de Gauss - Doolittle

Debido a que el método del elemento finito a menudo genera un sistema de ecuaciones lineales simultáneas relativamente grande es imprescindible utilizar una computadora digital. Para asegurar soluciones sistemáticas y eficientes, se hace imperativo utilizar métodos matriciales de análisis, los cuales deben representar la unión del álgebra y el análisis numérico. Una excelente alternativa es el empleo del método de **Gauss - Doolittle**.

Las dos aproximaciones básicas para la solución de grandes sistemas de ecuaciones son la iteración y la eliminación. Como ya se explicó, la eliminación gaussiana es un procedimiento donde la matriz **A** es transformada a una forma triangular, en la cual pueden encontrarse los valores de las incógnitas por métodos directos. Posteriormente se hacen correcciones en la estimación original de los valores desconocidos, el proceso se hace una y otra vez, hasta que el tamaño de las correcciones resulta despreciable.

Existen múltiples utilizaciones de los métodos iterativos para grandes sistemas de ecuaciones generadas en la aplicación del método del elemento finito para problemas tridimensionales. Sin embargo, con el mejoramiento del hardware de las computadoras digitales, las técnicas de eliminación han probado ser mucho más versátiles y confiables.

En particular, la matriz de coeficientes producida en el análisis casi siempre es simétrica y con muy pocos elementos ( dispersas ). La forma general para una matriz de coeficientes obtenida en un problema de elemento finito bidimensional se aprecia en la figura 2.1

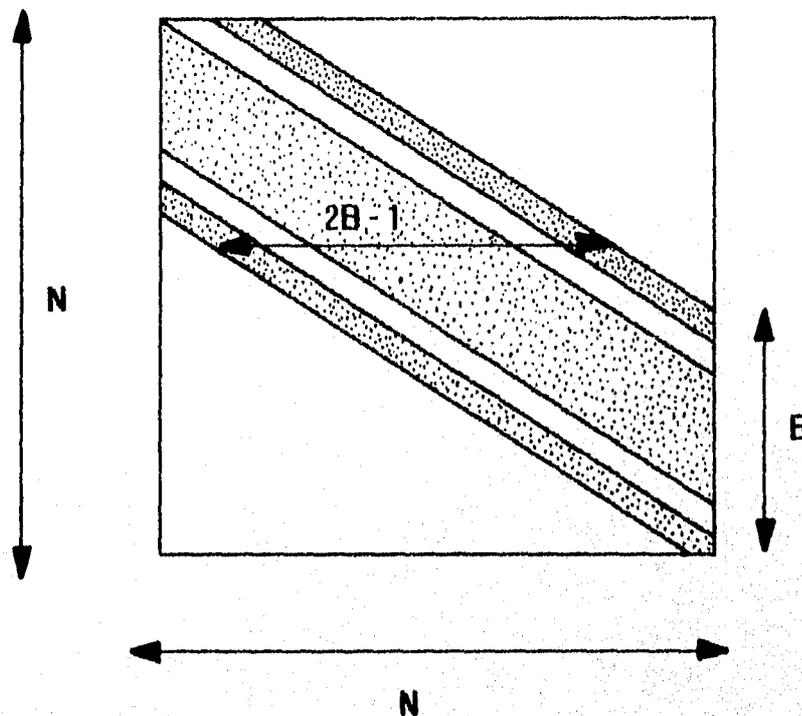


FIGURA 2.1 FORMA GENERAL DE UNA MATRIZ DE COEFICIENTES BANDADA

Únicamente las zonas sombreadas de la matriz de orden  $N \times N$  contienen elementos diferentes de cero. Si se indica con  $2B$  el ancho de banda de la matriz, donde  $B$  es la semibanda o el ancho de media banda, se logrará economizar la cantidad de datos almacenados, al tomar en cuenta que en realidad la matriz de coeficientes es simétrica, lo que significa que sólo es necesario guardar la porción  $N \times B$  de la matriz en cuestión, tal como se señala en la figura 2.2

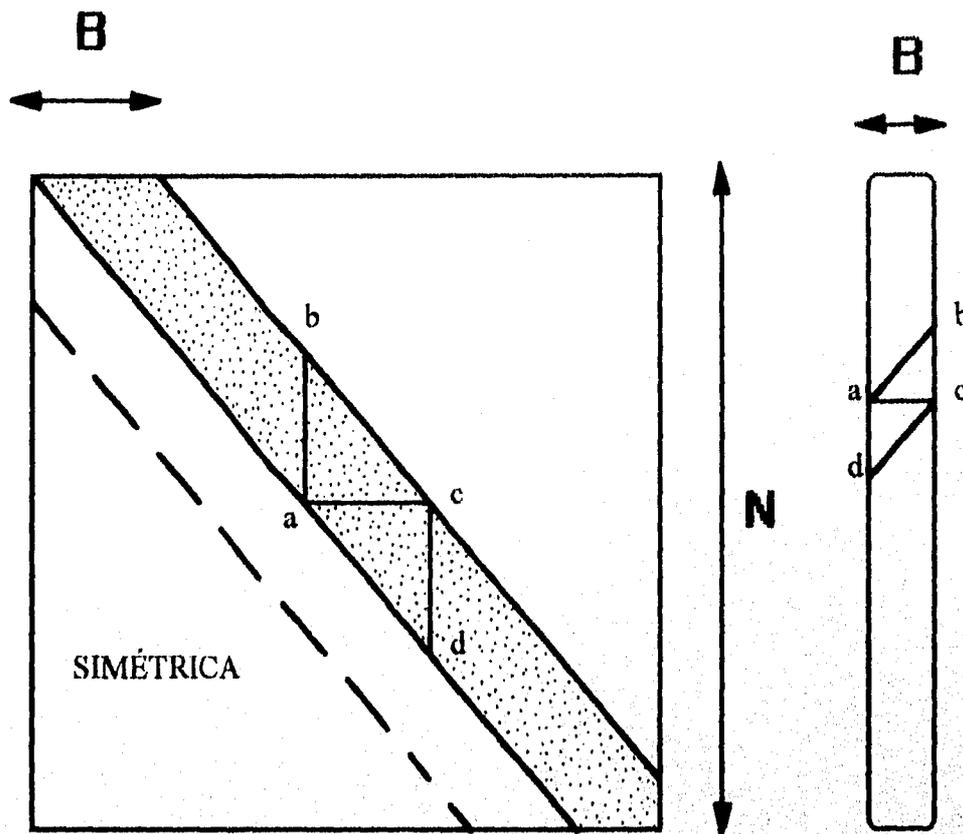


FIGURA 2.2 ALMACENAMIENTO BIDIMENSIONAL DE LA BANDA SUPERIOR DE UNA MATRIZ DE COEFICIENTES SIMÉTRICA

Para sistemas de ecuaciones extremadamente vastos, aún este método de almacenamiento puede ser inadecuado; por tal motivo, la matriz es dividida como se muestra en la figura 2.3

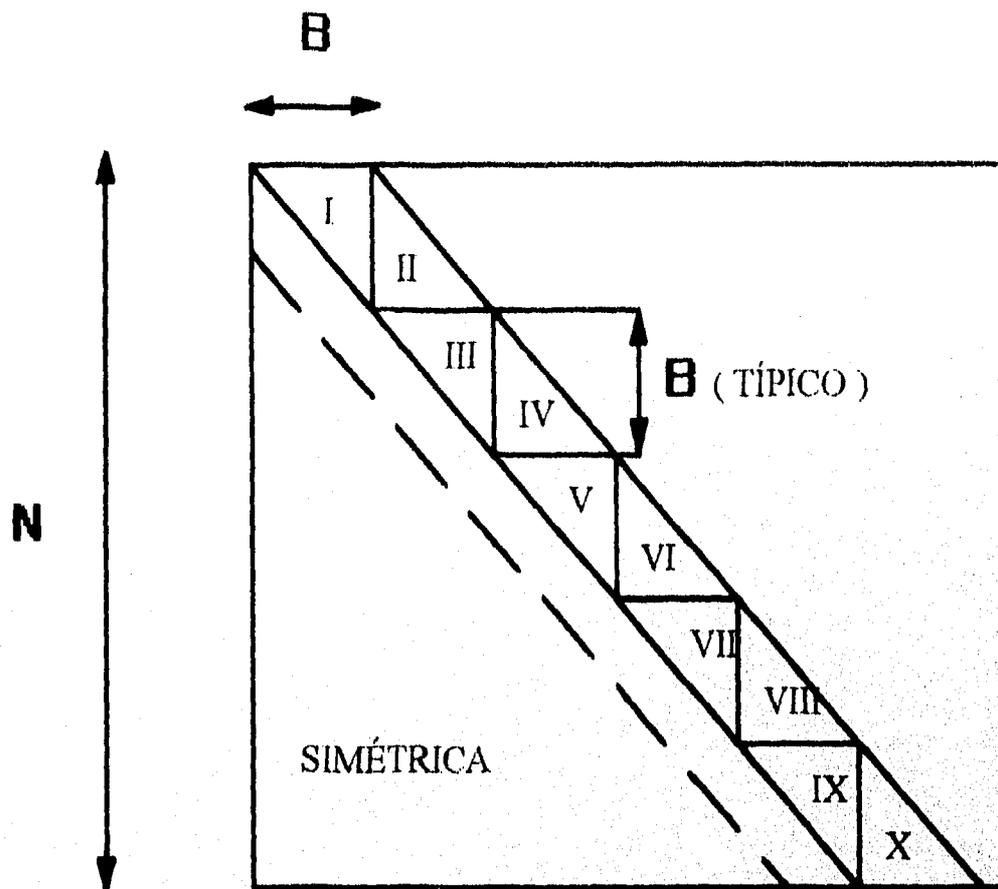


FIGURA 2.3 FORMA DIVIDIDA DE LA BANDA SUPERIOR DE UNA MATRIZ DE COEFICIENTES SIMÉTRICA

A causa de la simetría de la matriz de coeficientes, se puede solucionar el sistema de ecuaciones por eliminación, sin emplear el pivoteo. Ésto representa una magnífica ventaja, porque el pivoteo destruiría la naturaleza bandada de la matriz. Asimismo, sin pivoteo, la eliminación llevada a cabo utilizando un renglón afecta solamente el triángulo de los elementos dentro de la banda debajo de este renglón.

Este procedimiento permite realizar la eliminación con pocas submatrices marcadas en la figura anterior.

La técnica de solución directa generalmente favorecida es la descomposición Gauss - Doolittle de la matriz simétrica. Esta eliminación descompone la matriz simétrica  $[S]$  como sigue :

$$[S] = [L_1][D][L_1]^T$$

donde  $[L_1]$  es una matriz triangular inferior unitaria y  $[D]$  es una matriz diagonal.

Se debe retener el producto  $[D][L_1]^T$  y escribir esta matriz bandada triangular superior en la banda superior de  $[S]$ . Usando la matriz de coeficientes descompuesta, se puede resolver para cualquier lado derecho por operaciones secuenciales de reducción hacia adelante y solución hacia atrás.

$$[L_1][y] = [b]$$

$$[D][L_1]^T[x] = [y]$$

El procedimiento descrito toma ventaja de la naturaleza dispersa y la estructura bandada y simétrica de la matriz de coeficientes, y fue diseñado para completar el proceso de eliminación o descomposición en una secuencia que minimizará el tiempo de solución y la cantidad de memoria requerida.

Los ejemplos para este método se reservan para ser tratados en el apéndice C.

### 2.3) Método de Runge - Kutta

El propósito de este método es calcular el valor de  $f(x,y)$  en varios puntos seleccionados estratégicamente cerca de la curva de solución en el intervalo  $(x_n, x_n+h)$ , y combinar estos valores de tal forma que se produzca una buena exactitud en el incremento calculado  $y_{n+1} - y_n$ .

Las fórmulas que definen a este método se proporcionan a continuación :

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n), \\k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \\k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3),\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Estas expresiones parecen muy complicadas a primera vista, pero en realidad son muy fáciles de programar. La función  $f$  es calculada cuatro veces en cada paso.

Es de importancia especial escoger un buen tamaño del paso con el fin de estimar el error cometido en la integración de cada paso y para alcanzar la exactitud requerida.

Ejemplo 2.4 : Utilícese el método de Runge - Kutta de cuarto orden para integrar la ecuación diferencial  $y' = x + y$ . Si la condición inicial es que  $y_0(0) = 1$  y el tamaño del paso es  $h = 0.1$ .

**Solución :**

$$k_1 = 0.1000$$

$$k_2 = 0.1100$$

$$k_3 = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1210$$

$$y(0.1) = 1.1103$$

Los métodos del tipo de Runge - Kutta se llaman métodos de un paso, pues sólo emplean la información del último paso calculado. Con ésto, ellos tienen la capacidad de realizar el siguiente paso con un tamaño de paso diferente, y son ideales para comenzar la solución en dónde sólo se dispone de las condiciones iniciales. Sin embargo, después de que la solución ha comenzado, se puede obtener información adicional acerca de la función y sus derivadas.

Se han desarrollado fórmulas de Runge - Kutta de mayor orden ( quinto, sexto ), pero la conclusión general, es que la precisión adicional es más que compensada por el esfuerzo de cálculo también adicional. En otras palabras, no hay mejoría significativa en la eficiencia sobre esquemas de cuarto orden.

## **CAPÍTULO 3. RESISTENCIA DE MATERIALES**

## **CAPÍTULO 3. RESISTENCIA DE MATERIALES**

Este capítulo es el más propicio para estudiar el problema de cómo relacionar la resistencia de un elemento con las cargas externas que se le aplican, esto es porque ya se poseen los conocimientos fundamentales que se manejan en el área que cubre el presente trabajo de investigación. Por otra parte, constituye un excelente preámbulo para posteriormente tratar el análisis de esfuerzos en placas de acero.

### **3.1) Resistencia de materiales**

Aunque algunos de los fundamentos de la estática de cuerpos rígidos fueron conocidos por los científicos de la antigua Grecia, no se les dio el tratamiento adecuado; es hasta el Renacimiento cuando se les empieza a considerar. Primero Leonardo da Vinci y después Galileo se interesaron en la estática de los cuerpos deformables y en las propiedades mecánicas de los materiales.

Galileo en su libro intitulado "*Dos nuevas ciencias*", presentó la primera discusión escrita de las propiedades de los materiales estructurales y el primer tratamiento de la resistencia de las vigas. Gracias a sus trabajos, se incrementó el interés en este campo de estudio.

En 1678, Robert Hooke formuló su famosa y sencilla ley sobre la relación existente entre fuerza y deformación. La Ley de Hooke simplificó grandemente el análisis matemático que involucraba esta área. Subsiguientemente, Jacobo Bernoulli determinó la ecuación diferencial de una barra cargada lateralmente.

Leonardo Euler continuó el estudio de la acción flexionante de vigas y también investigó el efecto torsional de una barra comprimida axialmente.

La primera discusión entendible de los esfuerzos en las fibras de una viga cargada lateralmente fue presentada en 1776 por Coulomb; después él mismo sentó las bases de

la teoría para la torsión de barras. Ulteriormente, Navier clarificó el problema de flexión en vigas.

En breve, puede decirse que Coulomb y Navier son los principales autores del material que hoy se conoce como **Resistencia de Materiales**.

Cronológicamente, el desarrollo de la ciencia de resistencia de materiales siguió al progreso de las leyes de la estática. La estática considera los efectos externos de una fuerza actuando sobre un cuerpo; ésto es, la tendencia de las fuerzas a cambiar el estado de movimiento de un cuerpo. La resistencia de materiales trata sobre los efectos internos de las fuerzas; es decir, proporciona una explicación más entendible acerca del comportamiento de los sólidos bajo múltiples cargas.

Tal vez el caso más simple a considerar sea el de una barra vertical de sección transversal constante ( inicialmente recta ), cargada en sus extremos por un par de fuerzas colineales, opuestamente dirigidas coincidiendo con el eje longitudinal de la barra y actuando a través del centroide de cada sección transversal. Para que haya equilibrio estático, las magnitudes de las fuerzas deben ser iguales. Si las fuerzas están dirigidas desde la barra como en la figura 3.1, se dice que la barra está en tensión.



FIGURA 3.1 BARRA EN TENSIÓN

Pero si están dirigidas hacia la barra, se genera un estado de compresión; ésto se observa en la figura 3.2



FIGURA 3.2 BARRA EN COMPRESIÓN

Bajo la acción de este par de fuerzas aplicadas se producen fuerzas resistentes internas dentro de la barra, cuyas características pueden estudiarse al imaginar un plano que pasa a través de la barra en cualquier parte de su longitud y que está orientado en forma perpendicular al eje longitudinal de la barra. Tal plano se designa como a - a ( figura 3.3 ).

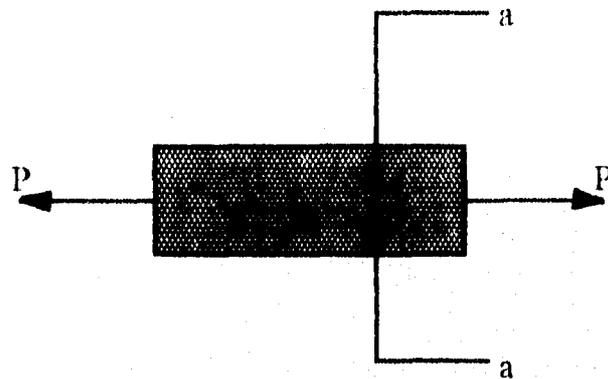


FIGURA 3.3 BARRA CON PLANO a - a

Este plano no debe estar muy próximo a ninguno de los extremos de la barra. Si para propósitos de análisis se separa la porción derecha de la barra, tal como en la figura 3.4, entonces su efecto debe ser reemplazado por una fuerza uniforme que se ejerza sobre el segmento izquierdo.



FIGURA 3.4 CORTE DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL

Por esta técnica, de introducir un plano cortante, las fuerzas internas originales ahora resultan externas con respecto a la parte remanente del cuerpo. Para compensar la porción izquierda de la barra, este efecto debe ser una fuerza horizontal de magnitud  $P$ .

sin embargo, esta fuerza  $P$  es realmente la resultante de las fuerzas distribuidas que obran sobre esta sección transversal en una dirección normal a ella.

Ahora se asume que las fuerzas están distribuidas uniformemente sobre la sección transversal. Tal distribución, probablemente nunca sea realizada exactamente debido a la concentración aleatoria de los granos cristalinos que constituyen a la barra. El valor exacto de la fuerza ejercida sobre algún pequeño elemento de área de la sección transversal, es una función de la naturaleza y orientación de la estructura cristalina en ese punto. Mas, la variación sobre la sección transversal completa es descrita en forma aproximada, con la exactitud usada en ingeniería, suponiendo una distribución uniforme.

En lugar de hablar de fuerza interna sobre un pequeño elemento de área, es quizá mejor y más significativo tratar la fuerza normal sobre un área unitaria de la sección transversal. La intensidad de la fuerza normal por unidad de área es llamada **esfuerzo normal** y se expresa en unidades de fuerza por unidades de área. La frase **esfuerzo total** se usa a veces para denotar la fuerza axial resultante en unidades de fuerza. Si las fuerzas aplicadas a los extremos de la barra causan tensión, entonces se trata de un esfuerzo de tensión; pero si la barra está en compresión, es un esfuerzo de compresión.

Es esencial que la línea de acción de las fuerzas aplicadas en los extremos cruce el centroide de cada sección transversal de la barra.

### 3.2) Teoría elástica

La carga axial mostrada en la figura 3.3 ocurre frecuentemente en problemas de diseño de máquinas y estructuras. Para simular en el laboratorio este tipo de carga ( tensión axial ), una probeta es sostenida en sus extremos por agarraderas de máquinas de prueba, ya sean eléctricas o hidráulicas.

En un esfuerzo por normalizar las técnicas de pruebas de materiales, la **ASTM** ha hecho prescripciones para materiales mecánicos y no metálicos, tanto para pruebas de

tensión como compresión axial. Aquí se mencionan dos tipos de probetas, uno para placas de metal con espesores de  $\frac{3}{16}$ " ( ver figura 3.5 ) y otro para metales con grosor superior a 1.5" ( figura 3.6 ).

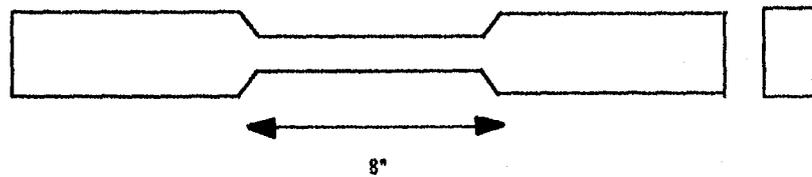


FIGURA 3.5 PROBETA PARA PLACA DE METAL CON ESPESOR DE  $\frac{3}{16}$ "

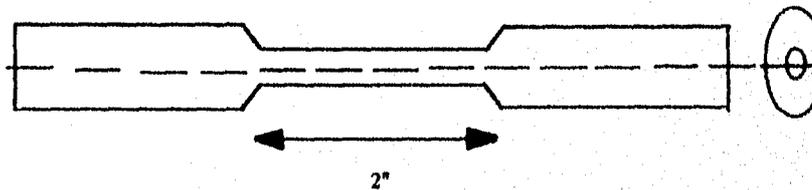


FIGURA 3.6 PROBETA PARA PLACA DE METAL CON ESPESOR SUPERIOR A 1.5"

Las dimensiones que se muestran son las especificadas por la ASTM, pero los extremos de las probetas pueden ser de cualquier forma para que haya una buena fijación de las abrazaderas de la máquina para prueba de carga axial. La porción central de la probeta es más angosta que sus extremos para que la falla no ocurra en las abrazaderas y los filetes redondeados evitan concentraciones de esfuerzo en la región de transición de las dos dimensiones laterales. Ordinariamente, se recurre a un medidor de longitud normal para medir los alargamientos en la probeta por medio de dos pequeños agujeros marcados en la superficie de la barra tanto en la de 2" como en la de 8".

Supóngase, que una de estas probetas ha sido colocada en una máquina de prueba de tensión - compresión y que se le aplica gradualmente una fuerza de tensión en los extremos. El alargamiento por unidad de longitud, el cual es llamado deformación normal e indicado por  $\epsilon$ , puede encontrarse al dividir el alargamiento total  $\delta$  entre la longitud  $l$ .

$$\epsilon = \frac{\delta}{l}$$

La deformación es una cantidad adimensional. La frase **deformación total** se utiliza para expresar el alargamiento en unidades de longitud.

Como la carga axial es aumentada paulatinamente por movimientos, el alargamiento sobre la longitud medida es anotado en cada movimiento de carga, ésta se continúa hasta que se fracture la probeta. Conociendo el área de sección transversal original de la probeta, el esfuerzo normal denotado por  $\sigma$  se puede obtener para cualquier valor de carga axial usando la relación :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

donde  $F$  es la carga axial y  $A$  es el área de sección transversal original.

Teniendo numerosos pares de valores de esfuerzo normal  $\sigma$  y deformación normal  $\epsilon$  se puede obtenerse el diagrama esfuerzo - deformación, colocando a  $\sigma$  como ordenadas y a  $\epsilon$  como abscisas. Tal diagrama puede tomar una amplia variedad de formas como se ilustra en la figura 3.7, de acuerdo a los diferentes materiales usados en ingeniería.

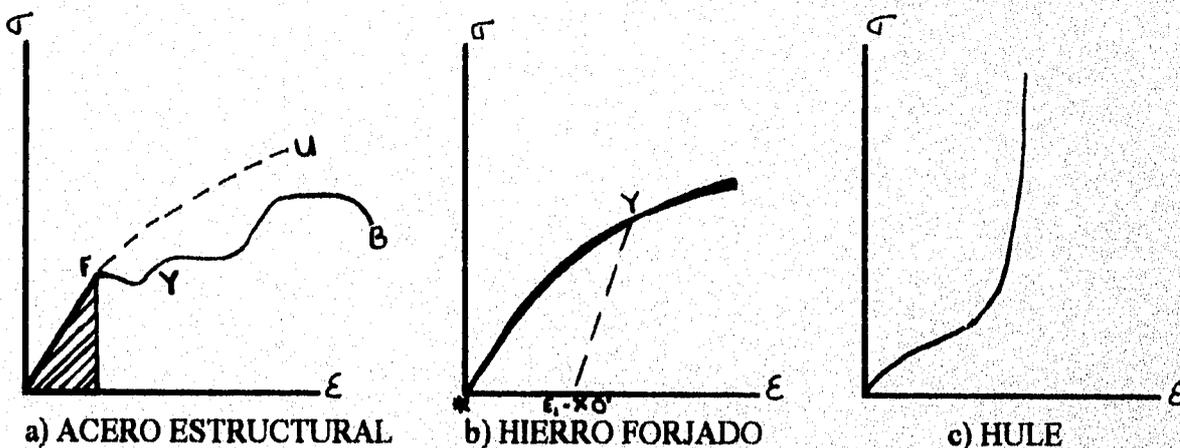


FIGURA 3.7 DIAGRAMA ESFUERZO - DEFORMACIÓN

Los materiales metálicos empleados en ingeniería son usualmente clasificados en dúctiles y frágiles. Un **material dúctil** es el que tiene relativamente grande una deformación a la tensión sobre el punto de ruptura ( por ejemplo acero estructural o aluminio ); mientras que un **material frágil** posee una deformación relativamente pequeña sobre tal punto. Una deformación arbitraria de 0.05 pulg. / pulg. se toma frecuentemente como la línea que divide estas dos clases de materiales, el hierro forjado es ejemplo de material frágil.

Para un material cuya curva esfuerzo - deformación es similar a la de la figura 3.7 a, es evidente que la relación entre esfuerzo y deformación es lineal para pequeños valores de deformación. Esta razón lineal entre alargamiento y fuerza axial fue primeramente enunciada por Sir Robert Hooke en 1678 y se denomina Ley de Hooke. Para describir este rango de acción lineal inicial del material se puede escribir :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

donde E es la pendiente de la sección recta OP de la curva esfuerzo - deformación en la figura 3.7 a.

La cantidad E es la razón del esfuerzo unitario a la deformación unitaria y es el módulo de elasticidad del material en tensión, también se le llama módulo de Young. Ya que la deformación unitaria  $\epsilon$  es un número puro, es evidente que E tiene las mismas unidades que el esfuerzo. Para muchos materiales comunes usados en ingeniería, el módulo de elasticidad en compresión es aproximadamente igual al encontrado en tensión.

Cabe señalar que el comportamiento de los materiales bajo cargas está restringido a esta región lineal de la curva esfuerzo - deformación.

Partiendo del esquema 3.7 a, se pueden mencionar otras características trascendentes de la resistencia del material. Ellas son :

a) La ordenada en el punto F se conoce como **límite de proporcionalidad** y es el máximo esfuerzo que puede ser desarrollado durante una prueba de tensión simple, tal que el esfuerzo sea una función lineal de la deformación. Para un material que tenga una curva esfuerzo - deformación como la de la figura 3.7 b no existe límite de proporcionalidad.

b) La ordenada en un punto casi coincidente con F representa al **límite elástico**, y es el máximo esfuerzo que puede desarrollarse durante una prueba de tensión simple tal que no haya una deformación residual o permanente cuando la carga es retirada totalmente.

Para muchos materiales, el valor numérico del límite elástico y el de proporcionalidad son casi idénticos, razón por la cual estos términos se usan frecuentemente como sinónimos. En los casos donde la distinción entre los dos valores es evidente, el límite elástico es casi siempre mayor que el límite de proporcionalidad.

c) La región donde la curva esfuerzo - deformación se extiende desde el origen hasta el límite de proporcionalidad se denomina **rango elástico**.

d) La región donde la curva esfuerzo - deformación se extiende desde el límite de proporcionalidad hasta el punto de ruptura es el **rango plástico**.

e) La ordenada en el punto Y en el cual existe un aumento en la deformación sin que se incremente el esfuerzo se llama **punto de cedencia** del material. Después de que la carga ha progresado al punto Y, se dice que toma lugar la cedencia. Algunos materiales exhiben puntos de cedencia superior e inferior.

f) La ordenada en el punto U, la máxima ordenada de la curva, se conoce como **resistencia última o resistencia a la tensión** del material.

g) La ordenada en el punto B se llama **resistencia a la ruptura** del material.

h) El trabajo hecho sobre una unidad de volumen del material, como una simple fuerza a la tensión que es gradualmente aumentada desde cero hasta que el límite de proporcional sea alcanzado se define como el **módulo de resiliencia**. Y puede calcularse como el área bajo la curva esfuerzo - deformación desde el origen hasta el límite de

proporcionalidad y se representa como el área sombreada en la figura 3.7 a; las unidades de esta cantidad pueden ser pulg.-lb./ pulg.<sup>3</sup> o cm.-Kg./cm.<sup>3</sup>. Así la resiliencia de un material es su habilidad para absorber energía en el rango elástico.

i) El trabajo hecho sobre un volumen unitario de material, como una simple fuerza a la tensión que es paulatinamente aumentada desde cero hasta el valor que cause la ruptura se define como **módulo de rigidez**. Éste puede calcularse como el área completa bajo la curva esfuerzo - deformación desde el origen hasta la ruptura. La rigidez de un material es su habilidad para absorber energía en el rango plástico del material.

j) La relación de la disminución del área de la sección transversal en la fractura dividida entre el área original y multiplicada por cien se llama **porcentaje de reducción en el área**. Hay que notar que cuando sobre una barra actúan fuerzas de tensión, el área en la sección transversal disminuye; pero, las operaciones para el esfuerzo normal son hechas generalmente sobre las bases del área original, este es el caso para la curva de la figura 3.7 a. Como las deformaciones se aumentan a cada instante, es más importante considerar los valores instantáneos del área de la sección transversal; si ésto se lleva a cabo, la verdadera curva de esfuerzo - deformación es obtenida. Tal curva corresponde a la línea punteada de la figura 3.7 a.

k) La relación del aumento en la longitud después de la fractura dividida entre la longitud inicial, multiplicada por cien es el **porcentaje de alargamiento**.

Tanto el porcentaje de reducción en el área como el porcentaje de alargamiento son medidas de la ductilidad del material.

Las características de resistencia antes mencionadas se emplean para seleccionar el esfuerzo de trabajo. Todos los esfuerzos de trabajo estarán dentro del rango elástico del material, éste se determina dividiendo el esfuerzo a la cedencia o el esfuerzo último entre un número llamado factor de seguridad. La elección del factor de seguridad se fundamenta en el juicio y experiencia del diseñador. En ocasiones, los factores de seguridad se explican en los manuales de diseño.

La curva esfuerzo - deformación no lineal de un material frágil, obsérvese la figura 3.7 b, caracteriza a otras medidas de resistencia que no pueden introducirse si la curva esfuerzo - deformación tiene una región lineal. Entre éstas se hallan :

a) La ordenada a la curva esfuerzo - deformación tal que el material tiene una deformación permanente predeterminada o ajuste cuando la carga es quitada se llama **resistencia a la cedencia** del material. El ajuste persistente a menudo se toma de 0.002 ó 0.0035 por pulgada. Naturalmente, estos valores son arbitrarios. En la figura 3.7 b,  $e_1$  está denotada sobre el eje de deformación y la línea OY se dibuja paralela a la tangente inicial a la curva.

b) La ordenada en Y representa al **esfuerzo de cedencia** del material, algunas veces llamado esfuerzo de prueba.

c) La pendiente de la tangente a la curva esfuerzo - deformación en el origen de la gráfica se conoce como **módulo tangente** del material.

Los materiales poseen otra característica que debe tomarse muy en cuenta durante un diseño : el **coeficiente de expansión lineal**; éste se define como el cambio de longitud por unidad de longitud de una barra recta sujeta a un cambio de temperatura de un grado y se designa por la letra  $\alpha$ . El valor de este coeficiente depende sólo de la escala de temperatura empleada, habitualmente se utiliza la escala Fahrenheit. Bajo esta escala, el coeficiente para el acero es  $6.5 \times 10^{-6}$  por  $1^\circ\text{F}$ . Los cambios en la temperatura en una estructura elevan los esfuerzos internos tanto como las cargas aplicadas.

### 3.3) Esfuerzos y deformaciones

Para evitar riesgos en el producto el ingeniero en diseño debe calcular que los esfuerzos nunca excedan la resistencia calculada. En la figura 3.8 se ilustra un elemento de esfuerzo tridimensional y se muestran los esfuerzos normales.

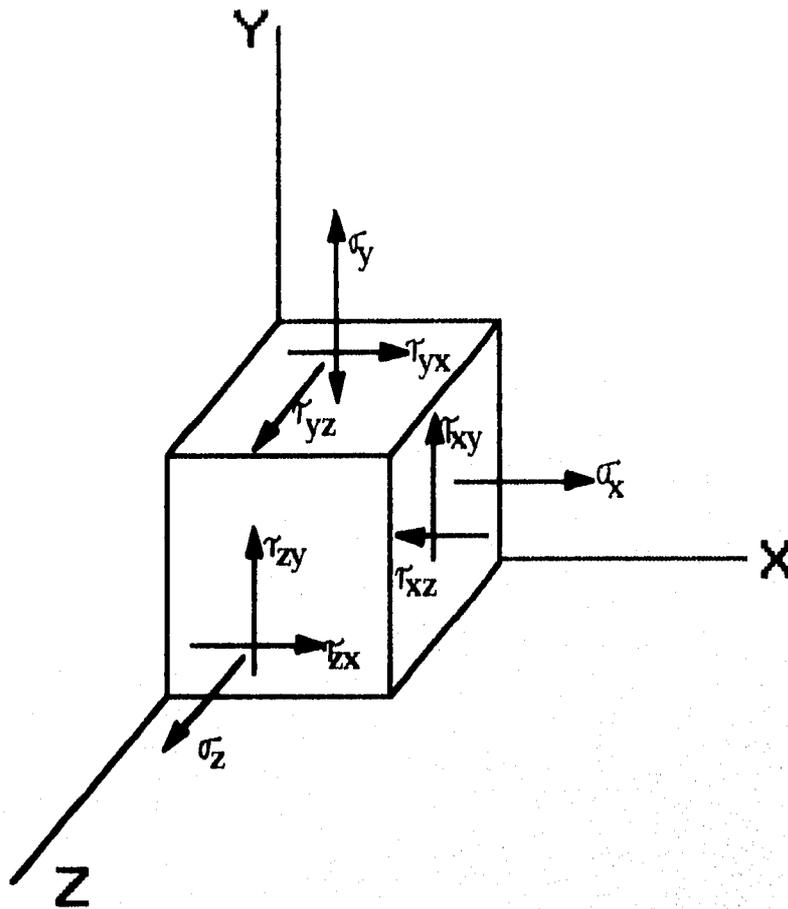


FIGURA 3.8 ESTADO DE ESFUERZO TRIDIMENSIONAL

Se muestran tres esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , todos positivos; y seis esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{xz}$  también positivos. El elemento está en equilibrio estático, por lo tanto :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Los esfuerzos normales dirigidos hacia afuera del elemento se consideran positivos y son de tensión. Los cortantes son positivos si actúan en la dirección positiva de un eje

de referencia. El primer subíndice de una componente de esfuerzo cortante indica el eje coordenado, que es perpendicular a la cara del elemento; el segundo indica el eje de coordenadas paralelo a dicha componente.

La figura 3.9 ilustra un estado de esfuerzo plano o biaxial, que es lo más tradicional.

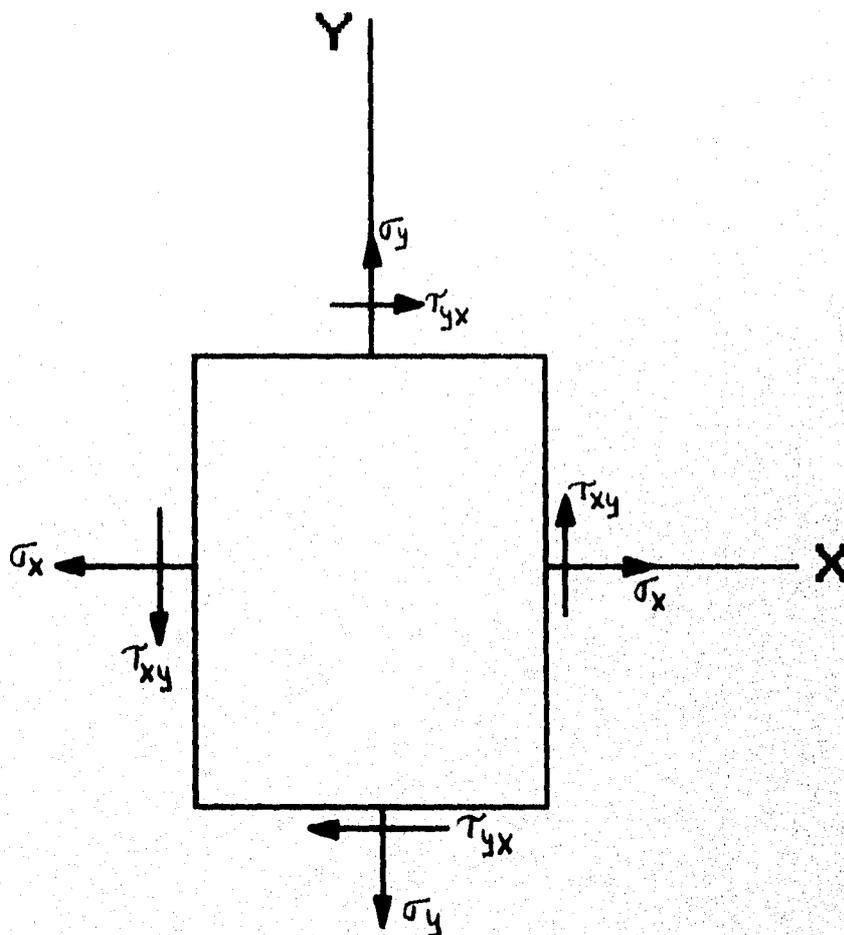


FIGURA 3.9 ESTADO DE ESFUERZO PLANO O BIAxIAL

En este caso únicamente los esfuerzos normales se tratarán como positivos o negativos. El sentido de las componentes de un esfuerzo cortante se especificará de acuerdo con el sentido de las manecillas del reloj (igual o contrario).

Ahora, supóngase que el elemento de la figura 3.9 es cortado con un plano inclinado, el cual tiene un ángulo  $\phi$  con respecto al eje X, como se aprecia en la figura 3.10

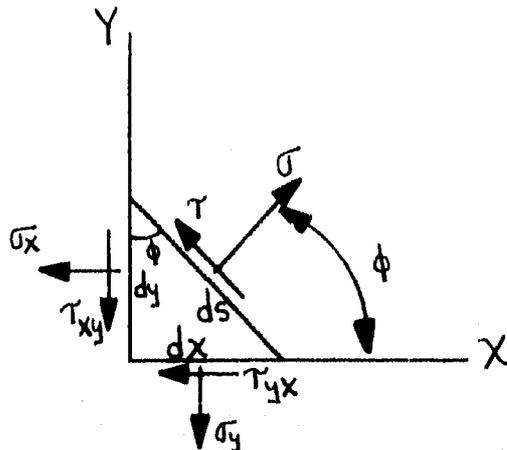


FIGURA 3.10 ELEMENTO DE ESFUERZO BIAxIAL CORTADO POR UN PLANO INCLINADO

Los **esfuerzos principales** máximo y mínimo representados por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  se obtienen de las expresiones :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Los dos esfuerzos cortantes máximos serán :

$$\tau_1 = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_2 = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Y el ángulo por :

$$\operatorname{tg} 2\phi = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Con frecuencia en el diseño se plantea la hipótesis de que hay una distribución uniforme de esfuerzo. Generalmente, al resultado obtenido con esta conjetura se le llama tensión pura, compresión pura o cortante puro. La hipótesis de **esfuerzo uniforme** significa que si se corta la barra en una sección transversal, alejada de ambos extremos, y se separa una de las mitades, es posible sustituir su efecto aplicando una fuerza uniformemente distribuida de magnitud  $\sigma A$  en el extremo cortado. Entonces se dice que el esfuerzo  $\sigma$  está uniformemente distribuido y se calcula por la siguiente ecuación :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Como se dijo anteriormente, la elasticidad es la propiedad por la que un material puede recobrar su forma y dimensiones originales cuando se anula la carga que lo deformaba. La **Ley de Hooke** establece que el esfuerzo en un material es directamente proporcional a la deformación que lo produce, los materiales que obedecen la ley de Hooke son elásticos.

Para la condición de que la deformación sea proporcional al esfuerzo se tiene :

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

donde **E** y **G** son las constantes de proporcionalidad. Como las deformaciones son valores adimensionales, E y G tienen las mismas unidades que el esfuerzo. La constante E se

llama módulo de elasticidad y la constante G recibe el nombre de módulo de elasticidad al cortante o bien módulo de rigidez. Sin embargo, tanto E como G son índices de la rigidez, o resistencia a la deformación, de los materiales. Estas dos constantes representan propiedades fundamentales de éstos.

Al sustituir  $\sigma = F/A$  y  $\varepsilon = \delta/l$  en la ecuación anterior y reordenar, se consigue la ecuación :

$$\delta = \frac{Fl}{AE}$$

Ésta sirve para calcular la deformación total de una barra, cargada axialmente a tensión o compresión.

Los experimentos demuestran que cuando un cuerpo se somete a tensión, no sólo se le producirá una deformación axial ( alargamiento ), sino también una deformación lateral ( estrechamiento ). Poisson demostró que estas dos deformaciones son proporcionales entre sí, dentro de los límites de la Ley de Hooke.

La constante de proporcionalidad se define como :

$$\nu = - ( \text{deformación lateral} / \text{deformación axial} )$$

y se conoce como *razón o relación de Poisson*. Estas mismas relaciones se verifican para la compresión, pero en este caso se produce una deformación lateral de ensanchamiento.

Estas tres constantes elásticas están relacionadas entre sí como sigue :

$$E = 2G(1 + \nu)$$

En la tabla B.2 se dan valores de la relación de Poisson para diversos materiales.

Recuérdese que los esfuerzos no pueden medirse experimentalmente; sin embargo hay muchas técnicas experimentales que se utilizan para medir la deformación. Por consiguiente, si se sabe qué relación hay entre el esfuerzo y la deformación, es posible calcular el estado del esfuerzo en un punto, después de medir el estado de deformación.

Se define como **deformaciones principales** a las que ocurren en la dirección de los esfuerzos principales. Además, en las caras de un elemento alineado en las direcciones principales, las deformaciones por cortante son nulas. Las tres deformaciones correspondientes a un estado de esfuerzo uniaxial son :

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1$$

Se usa el signo menos para indicar deformaciones por compresión. Debe notarse que, en tanto, que el estado de esfuerzo es uniaxial, el de deformación es triaxial.

Se dice que un estado de esfuerzo es triaxial cuando ninguno de los esfuerzos principales es igual a cero. En este caso, las deformaciones principales son :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$$

En función de estas deformaciones, los esfuerzos principales son :

$$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{1-\nu-2\nu^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{1-\nu-2\nu^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{E\varepsilon_3(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1-\nu-2\nu^2}$$

Hasta aquí sólo se ha considerado, en el alargamiento de una barra, el efecto debido a la carga  $F$ . Si la longitud de la barra es grande, su propio peso puede producir un esfuerzo adicional considerable, que debe tomarse en cuenta. En este caso el esfuerzo máximo se produce en la sección recta superior. Representando con  $\gamma$  el peso por unidad de volumen de la barra, el peso total será  $A\gamma l$  y el esfuerzo máximo vendrá dado por :

$$\sigma_{\max} = \frac{F + A\gamma l}{A} = \frac{F}{A} + \gamma l$$

Aquí  $\gamma l$  representa el esfuerzo producido por el peso de la barra. El peso de la porción de barra situado por debajo de una sección recta a la distancia  $x$  del extremo inferior es  $A\gamma x$ , entonces el esfuerzo estará dado por :

$$\sigma = \frac{F + A\gamma x}{A}$$

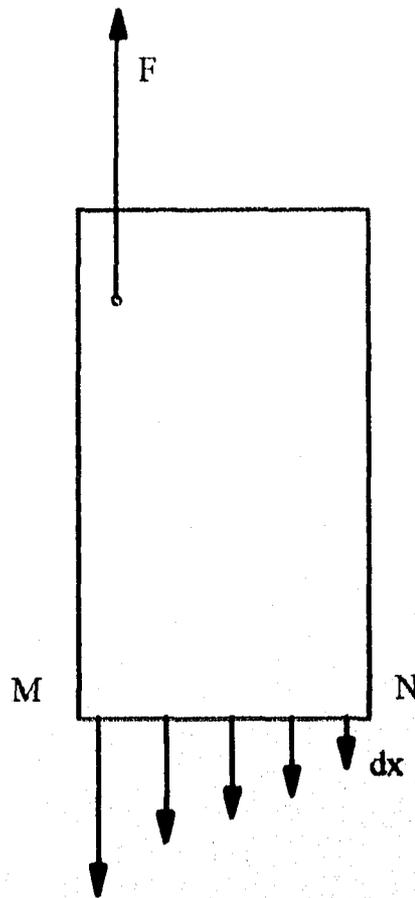
Anteriormente se mencionó que es importante considerar el factor de seguridad. En este caso la sección de seguridad se calcula con la fórmula :

$$A = \frac{F}{\sigma_t - \gamma l}$$

$\sigma_t$  es el esfuerzo de trabajo.

De la ecuación previa se observa que el incremento de longitud de la barra hace aumentar la sección recta de seguridad  $A$ .

Para calcular el alargamiento total de una barra prismática sometida a la acción del esfuerzo de extensión  $F$  en el extremo y su propio peso, se considera primeramente el alargamiento de un elemento de longitud diferencial  $dx$  separado de la barra por dos secciones rectas infinitamente próximas, como en la figura 3.11



**FIGURA 3.11 BARRA PRISMÁTICA**

Puede suponerse que es tan corta la longitud  $dx$ , el esfuerzo es constante y viene dado por la fórmula antes mencionada. Entonces el alargamiento  $d\delta$  será :

$$d\delta = \frac{F + A\gamma x}{AE} dx$$

El alargamiento total de la barra se obtendrá sumando los alargamientos de todos los elementos, es decir con la expresión :

$$\delta = \int_0^l \frac{F + A\gamma x}{AE} dx = \frac{l}{AE} \left( F + \frac{1}{2} A\gamma l \right)$$

Ejemplo 3.1 : El elemento de la figura 3.12 está sometido a la acción de los esfuerzos  $\sigma_x = 350 \text{ lb. / pulg.}^2$ ,  $\sigma_y = 210 \text{ lb. / pulg.}^2$ ,  $\tau_{xy} = 70 \text{ lb. / pulg.}^2$ . Determinar las magnitudes y direcciones de los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

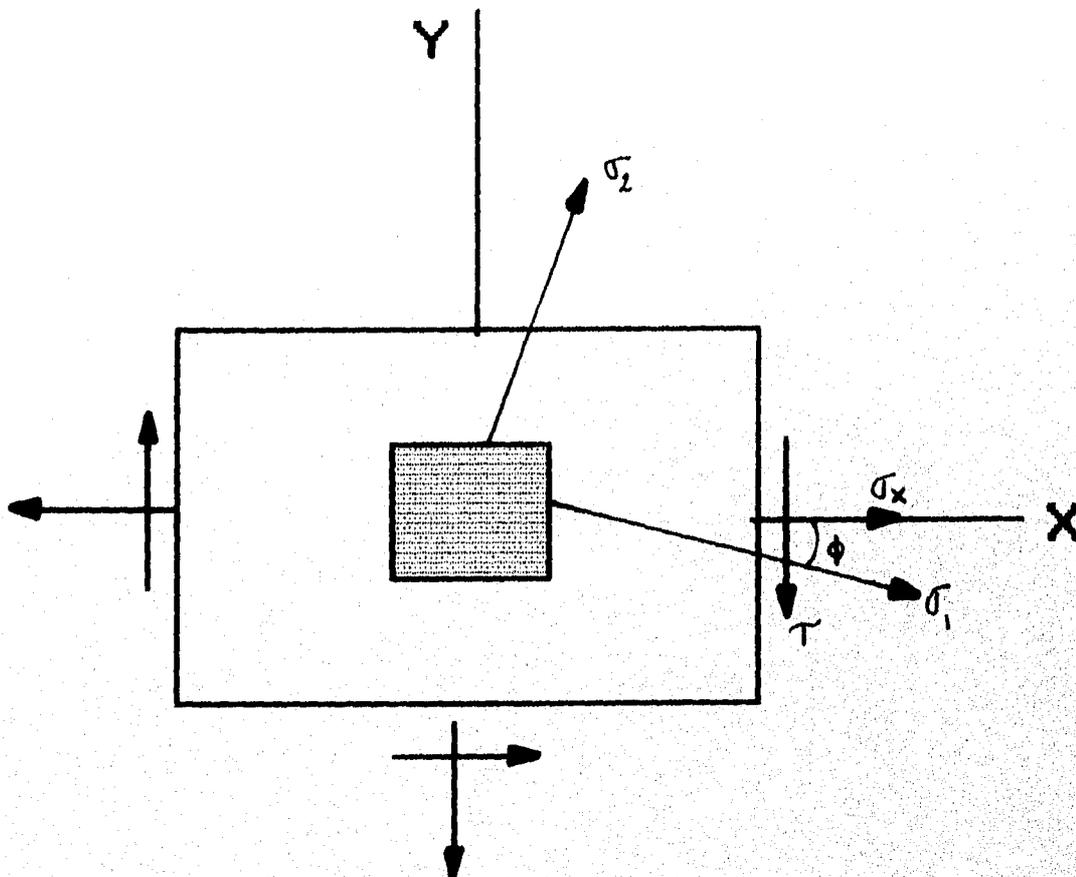


FIGURA 3.12 EJEMPLO 3.1

**Solución :**

$$\sigma_1 = \frac{350 + 210}{2} + \sqrt{\left(\frac{350 - 210}{2}\right)^2 + (70)^2} \cong 379/b.$$

$$\sigma_2 = \frac{350 + 210}{2} - \sqrt{\left(\frac{350 - 210}{2}\right)^2 + (70)^2} \cong 181/b.$$

$$\operatorname{tg} 2\phi = -\frac{2(70)}{350 - 210} = -1 \Rightarrow 2\phi = -45^\circ$$

$$\therefore \phi = -22.5^\circ$$

Toda esta discusión se ha basado en la suposición de que dos características prevalecen en el material : es isotrópico y homogéneo.

### 3.4) Metodología del diseño

Expuestas ya las ideas principales de la resistencia de materiales, ahora se puede proporcionar la metodología a seguir en un diseño.

El **diseñar** consiste en formular un plan para satisfacer una necesidad, la cual debe ser plenamente identificada; es decir, el propósito fundamental del diseño es la obtención de un resultado final al que se llega por medio de una acción determinada o por la creación de algún objeto.

El diseño involucra varias fases, ellas se aprecian en la figura 3. 13

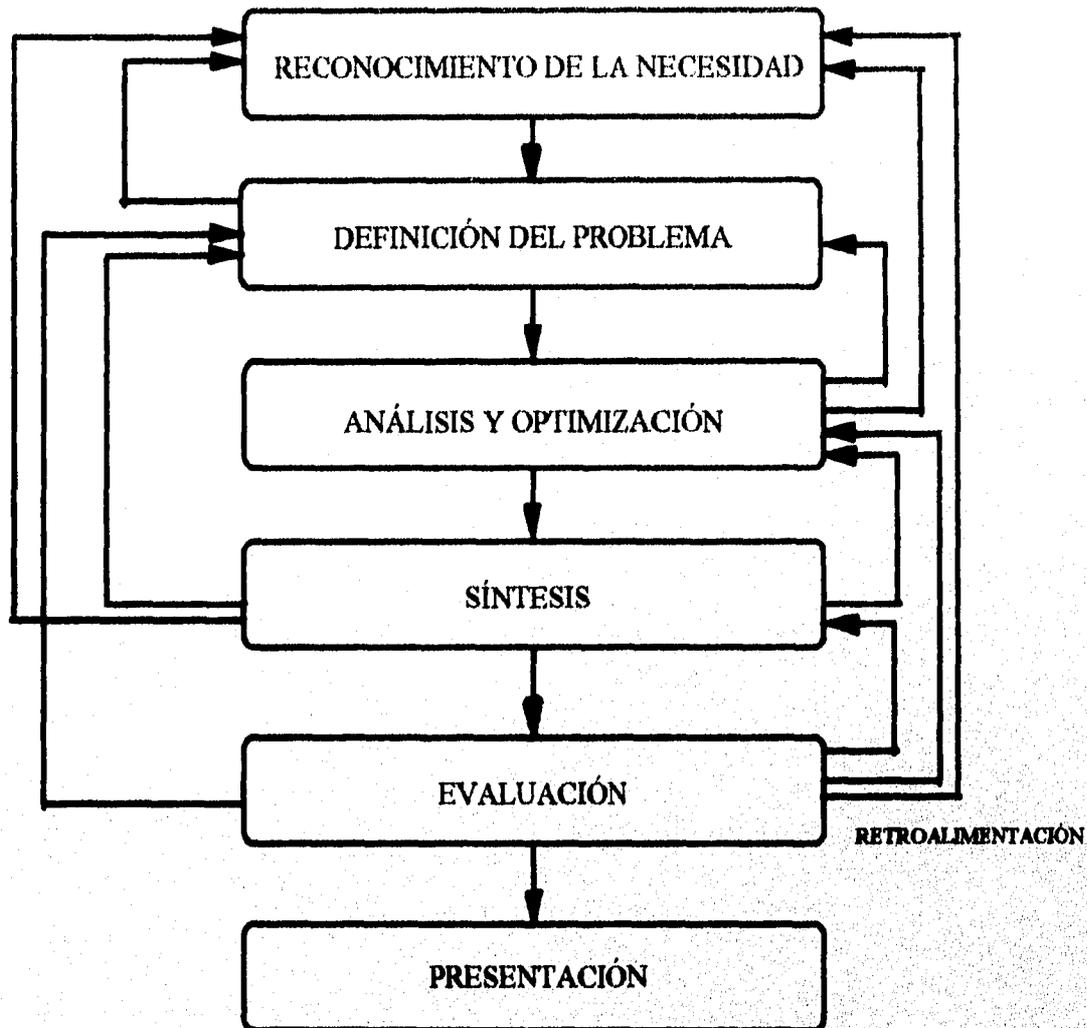


FIGURA 3.13 FASES DEL DISEÑO

El **reconocimiento de la necesidad** y expresarla en determinado número de palabras es una actividad creativa, pues la mayoría de las veces una necesidad puede manifestarse simplemente como un vago descontento, o bien, por la intuición de una dificultad o en la sensación de que algo no está bien. Por lo general, las necesidades se identifican a partir de una circunstancia adversa.

La **definición del problema** debe abarcar todas las condiciones que debe cumplir el objeto que se diseñará. Tales disposiciones son las cantidades de entrada y salida, las características y dimensiones del espacio que deberá ocupar el objeto, así como todas las

limitaciones de estas cantidades. Las especificaciones definen el costo, la cantidad de piezas a fabricar, la duración esperada, el intervalo o variedad de capacidades, la temperatura de trabajo y la confiabilidad.

Para **el análisis y la optimización** es indispensable que se ideen o imaginen modelos abstractos del sistema que admitan alguna forma de análisis matemático (modelos matemáticos). Se aceptará el que reproduzca lo mejor posible al sistema físico real.

El siguiente paso es la  **síntesis** de una solución óptima, ésta no podrá efectuarse antes de efectuar el análisis y la optimización, puesto que se debe examinar el sistema a diseñar, para determinar si su funcionamiento cumple con los requerimientos establecidos.

La  **evaluación** es una fase significativa del proceso total de diseño, pues es la demostración definitiva de que un diseño es acertado; ésta incluye pruebas con un prototipo.

La etapa final es la  **presentación**, ella representa un trabajo de venta de las ideas a las personas interesadas en el diseño.

El diseño es un proceso iterativo en el que se pasa por varias etapas, se evalúan los resultados y luego se vuelve a una fase anterior del proceso.

Existen factores que deben considerarse en un diseño mecánico (algunos pueden resultar críticos), éstos son :

- \* Resistencia
- \* Confiabilidad
- \* Condiciones térmicas
- \* Corrosión
- \* Desgaste
- \* Fricción o rozamiento
- \* Procesamiento
- \* Utilidad
- \* Costo

- \* Seguridad
- \* Peso
- \* Ruido
- \* Estilización
- \* Forma
- \* Tamaño
- \* Flexibilidad
- \* Control
- \* Rigidez
- \* Acabado de superficies
- \* Lubricación
- \* Mantenimiento
- \* Volumen.

Algunos de estos factores se refieren directamente a las dimensiones, al material, al procesamiento o procesos de fabricación, o bien, a la unión o ensamble de los elementos del sistema. Otros se relacionan con la configuración total del sistema.

Otro aspecto importante en el diseño es el factor de seguridad. El **factor de seguridad** se aplica al factor utilizado para evaluar la condición segura de un elemento; éste se define como :

$$n = \frac{F_u}{F}$$

Donde  $F$  son las acciones a las que se somete el elemento mecánico y  $F_u$  es el valor límite de  $F$ .

Frecuentemente se usa el término margen de seguridad. Este margen está dado por la expresión :

$$m = n - 1$$

El factor de seguridad se emplea en la ingeniería de diseño para considerar las incertidumbres que pueden ocurrir cuando las cargas reales son aplicadas al elemento diseñado y construido.

Otro punto substancial es la **confiabilidad**, ésta es una medida estadística de la probabilidad de que un elemento mecánico esté en servicio. Esta cantidad se denota con la letra **R** y se encuentra en el intervalo  $0 \leq R < 1$ . Una confiabilidad de  $R = 1$  no puede obtenerse, ya que significa que la falla es absolutamente imposible.

## **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESFUERZOS**

## **CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE ESFUERZOS**

Cuando un material tan importante como el acero, ha sido estudiado con el microscopio, se ha observado que consiste de cristales de varios tipos y diferentes orientaciones, lo anterior pone de manifiesto que el acero está muy lejos de ser homogéneo; sin embargo, la experiencia ha demostrado que los métodos de solución de la teoría elástica ( basados en las suposiciones de homogeneidad e isotropía ) aplicados a estructuras de acero proporcionan resultados de gran exactitud.

### **4.1) Esfuerzos y deformaciones en placas de acero**

La figura 4.1 representa una placa con reacciones  $R_1$  y  $R_2$  en sus apoyos y cargada con las fuerzas concentradas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ .

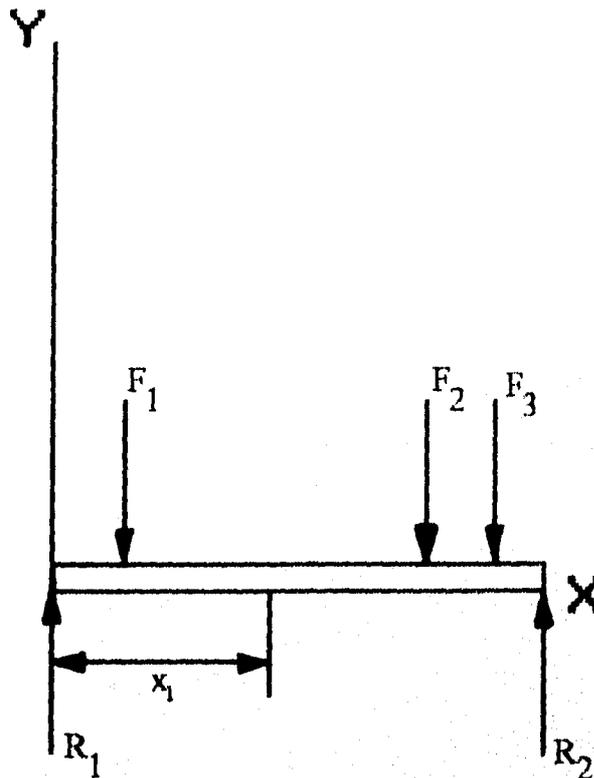


FIGURA 4.1 PLACA SIMPLEMENTE APOYADA

La dirección asignada al eje  $Y$  determina la convención de signos para las fuerzas.

Las cargas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  son negativas porque actúan en la dirección opuesta a la del eje  $Y$ , por lo tanto  $R_1$  y  $R_2$  son positivas.

Si la placa se corta según una sección situada en  $x = x_1$ , y se separa la parte de la izquierda como cuerpo libre, entonces debe haber una fuerza cortante interna  $V$  y un momento flexionante  $M$  que actúan en la sección cortada para mantener el equilibrio. La fuerza cortante se determina sumando todas aquellas que queden a la izquierda de dicha sección. El momento flexionante es la suma de los momentos de las fuerzas citadas, tomados con respecto a un eje que esté en esa sección y sea perpendicular al plano de las fuerzas. La fuerza cortante y el momento flexionante están relacionados por la ecuación :

$$V = \frac{dM}{dx}$$

A veces una carga distribuida causa una flexión. En estos casos, la relación entre V y M será :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -\omega$$

donde  $\omega$  es una carga vertical hacia abajo, expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud. La carga  $\omega$  está uniformemente distribuida. Las distribuciones más generales se pueden definir mediante la ecuación :

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

donde q es la intensidad de la carga distribuida, por lo tanto  $q = -\omega$ .

Si se integran las ecuaciones previas, entre los límites  $X_A$  y  $X_B$ , se obtiene :

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{X_A}^{X_B} q dx = V_B - V_A$$

que establece que el cambio en la fuerza cortante desde A hasta B es igual al área del diagrama de carga entre  $X_A$  y  $X_B$ .

De manera semejante :

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{X_A}^{X_B} V dx = M_B - M_A$$

Ésta expresión indica que el cambio en el momento flexionante desde A hasta B es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre  $X_A$  y  $X_B$ .

Ejemplo 4.1 : La figura 4.2 muestra una placa OC de 18 pulgadas de largo, cargada en A con una fuerza concentrada de 50 lb. y en B con otra de 70 lb. Determinar las reacciones  $R_1$  y  $R_2$ .

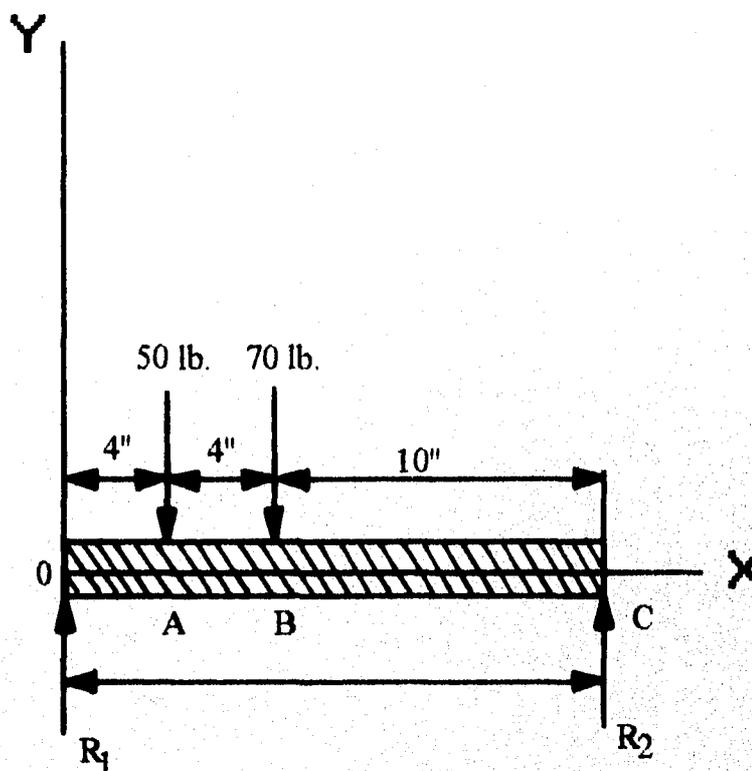


FIGURA 4.2 EJEMPLO 4.1

**Solución :**

Aplicando el teorema de momentos, se calculan  $R_1$  y  $R_2$ .

$$M = F_1 d_1 + F_2 d_2 - R_2 d_T$$
$$M = 50 \times 4 + 70 \times 8 - R_2 \times 18$$

Por lo tanto :

$$R_2 = \frac{760}{18} = 42.2 \text{ lb.}$$

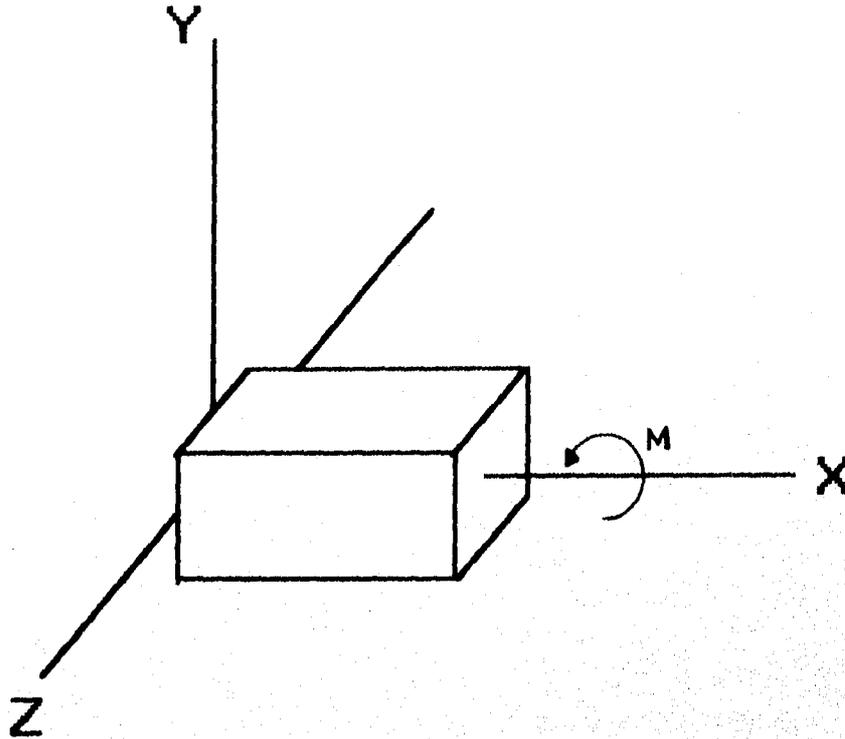
y

$$R_1 = 120 - R_2$$
$$R_1 = 77.8 \text{ lb.}$$

Recuérdese, que ya antes se dijo que hay esfuerzos normales y cortantes. Para deducir las relaciones correspondientes a los esfuerzos normales por flexión, se harán las siguientes idealizaciones :

- a) La placa de acero se somete a flexión pura ( la fuerza cortante es cero y no hay cargas axiales o de torsión ).
- b) El material es isotrópico y homogéneo.
- c) El material cumple la Ley de Hooke.
- d) La placa de acero es inicialmente recta y su sección transversal es constante en toda su longitud.
- e) La placa tiene un eje de simetría en el plano de la flexión.
- f) Las dimensiones de la placa son tales que sólo puede fallar por flexión y no por aplastamiento, corrugación o pandeo lateral.
- g) Las secciones transversales planas permanecen así durante la flexión.

En la figura 4.3 se ilustra una parte de una placa de acero en la que actúa el momento flexionante positivo  $M$ .



**FIGURA 4.3 PLACA DE ACERO CON MOMENTO FLEXIONANTE POSITIVO**

Al aplicar el momento positivo, la superficie superior de la placa se flexionará hacia abajo al igual que el eje neutro, tal como en la figura 4.4

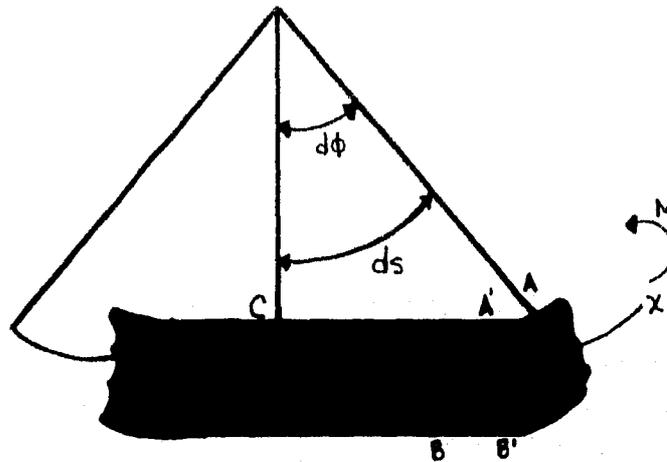


FIGURA 4.4 PLACA FLEXIONADA

Debido a la curvatura, habrá una sección AB que girará en un ángulo  $d\phi$  hasta la posición A'B', AB y A'B' son rectas, de modo que se verifica la hipótesis de que las secciones planas permanecen así durante la flexión. Si ahora se usa  $\rho$ , para denotar el radio de la curvatura del eje neutro de la placa,  $ds$  para la longitud de un elemento diferencial de dicho eje y  $d\phi$  para el ángulo entre las rectas CD y A'B', entonces, de la definición de curvatura se tiene :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \quad (a)$$

El cambio de longitud de una " fibra " es :

$$dx = yd\phi \quad (b)$$

La deformación es igual a ese cambio dividido entre la longitud original, o sea :

$$\varepsilon = -\frac{dx}{ds} \quad (c)$$

donde el signo negativo indica compresión. Al resolver simultáneamente las ecuaciones a, b y c queda :

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (d)$$

Así pues, la deformación es proporcional a la distancia  $y$  desde el eje neutro. Ahora bien, como  $\sigma = E\varepsilon$ , para el esfuerzo se tiene que :

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \quad (e)$$

En este caso se trata de una flexión pura, lo que significa que no actúan fuerzas axiales en la placa. Lo anterior puede expresarse en forma matemática, sumando todas las fuerzas horizontales que actúan en la sección transversal e igualando la suma a cero.

La fuerza que actúa sobre un elemento de área  $dA$  es  $\sigma dA$ ; por consiguiente :

$$\int \sigma dA = -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0 \quad (f)$$

La ecuación f determina la localización del **eje neutro de la sección**. La segunda integral es igual a cero y , por lo tanto, dicho eje pasa por el centroide del área.

En segundo lugar se observa que el equilibrio requiere que el momento flexionante interno, originado por el esfuerzo  $\sigma$ , sea igual al momento externo  $M$ . En otras palabras :

$$M = \int y\sigma dA = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA \quad (g)$$

La segunda integral de  $g$  es el **momento de inercia** del área transversal con respecto al eje  $Z$ . Ésto es :

$$I = \int y^2 dA \quad (h)$$

Este momento se llama también **momento de segundo orden de área**, pues esta última magnitud carece de inercia. El verdadero momento de inercia se refiere a la masa.

Si después se resuelven las ecuaciones  $h$  y  $g$ , y se reordena, queda :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (i)$$

La ecuación  $i$  sirve para determinar las deflexiones en las placas. Por último, al eliminar  $\rho$  de las ecuaciones  $i$  y  $e$  resulta :

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (j)$$

La ecuación j establece que el esfuerzo por flexión es directamente proporcional a la distancia  $y$  desde el eje neutro y al momento flexionante  $M$ . Se acostumbra hacer la sustitución  $c = y_{\text{máx}}$ , para omitir el signo negativo y escribir :

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

La expresión anterior da el valor del esfuerzo máximo. Luego, cuando se sabe qué sentido tiene el momento, se determina a simple vista si los esfuerzos máximos son de tensión o compresión.

Es común, escribir :

$$\sigma = \frac{M}{I/c}$$

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

donde  $Z = I / c$  se denomina **módulo de sección**.

**Ejemplo 4.2 :** Una placa de sección transversal T, cuyas dimensiones se indican en la figura 4.5, se somete a la acción de un momento flexionante de  $14 \times 10^3$  lb. - pulg.

Localizar el eje neutro y encontrar los esfuerzos máximos de tensión y compresión originados por la flexión. El sentido del momento es tal que produce tensión en la parte superior de la placa.

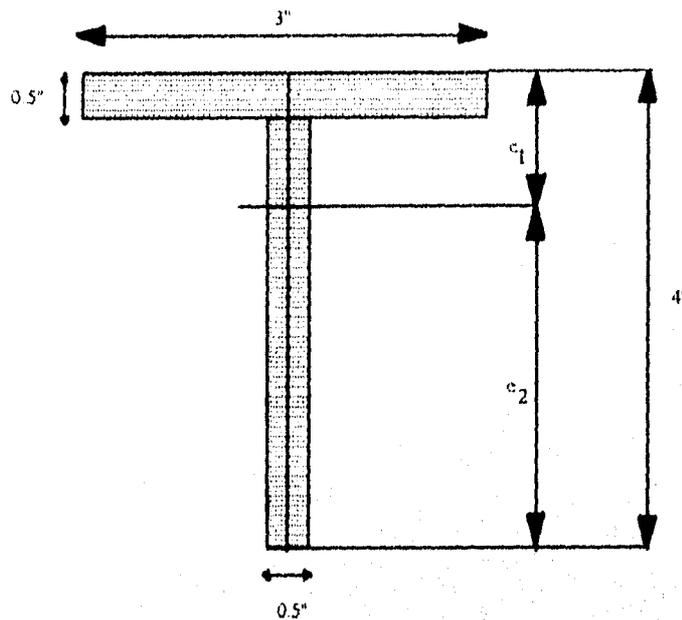


FIGURA 4.5 EJEMPLO 4.2

**Solución :**

El área total de la sección es :

$$A_r = A_1 + A_2$$

$$\therefore A_r = 3.25 \text{ pulg.}^2$$

Ahora la sección T es dividida en dos rectángulos, y se suman los momentos de estas áreas con respecto a un eje, que coincide con el borde superior.

$$3 \times 0.5 \times 0.25 + 3.5 \times 0.5 \times 2.25 = 3.25 c_1$$

De donde :

$$c_1 = 1.327 \text{ pulg.}$$

En consecuencia :

$$c_2 = 2.673 \text{ pulg.}$$

Enseguida, se calcula el momento de inercia del área de cada rectángulo con respecto a su eje centroidal horizontal.

En la tabla B.3 se halla la fórmula para obtener el momento de inercia de un rectángulo.

$$I_1 = 0.0321 \text{ pulg.}^4$$

$$I_2 = 1.787 \text{ pulg.}^4$$

Posteriormente, se aplica el teorema de los ejes paralelos para obtener el momento de inercia de toda la figura compuesta con respecto a su propio eje centroidal. El teorema establece que :

$$I_x = I_{cg} + Ad^2$$

donde  $I_{cg}$  es el momento de inercia de un área con respecto a uno de sus ejes centroidales ( los de simetría que pasan por su centro de gravedad, o centroide ) e  $I_x$  es el momento de inercia con respecto a un eje X, paralelo al centroidal y situado a una distancia  $d$  del mismo. De esta forma las distancias entre ejes para los rectángulos son :

$$d_1 = 1.077 \text{ pulg.}$$

$$d_2 = 0.923 \text{ pulg.}$$

Aplicando dos veces el teorema de los ejes paralelos, se tiene :

$$I = 5.048 \text{ pulg}^4$$

Finalmente, el esfuerzo máximo de tensión es :

$$\sigma = \frac{Mc_1}{I} = 3680 \text{ lb./pulg.}^2$$

y el esfuerzo máximo de compresión en la superficie inferior es :

$$\sigma = -\frac{Mc_2}{I} = -7400 \text{ lb./pulg.}^2$$

Para explicar los esfuerzos cortantes considérese la placa de la figura 4.6

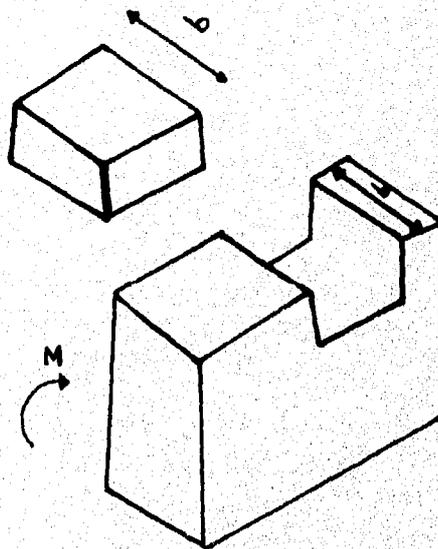


FIGURA 4.6 PLACA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Realizando un desarrollo matemático similar al anterior, se llega a :

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^0 y dA \quad (1)$$

En esta ecuación, la integral es el primer momento del área de la cara vertical con respecto al eje neutro. Este momento se designa generalmente por Q. Por consiguiente :

$$Q = \int_{y_1}^0 y dA \quad (2)$$

Con esta simplificación final, la ecuación 1 se puede expresar como :

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Al utilizar esta ecuación, obsérvese que **b** es el ancho de la sección en la distancia particular  $y_1$  a partir del eje neutro. Asimismo, **I** es el segundo momento de la sección total con respecto del eje neutro.

Lo ideal es que, al diseñar un elemento de máquina, el ingeniero disponga de los resultados de una buena cantidad de ensayos de resistencia realizados con el material particular elegido para el elemento. Esos ensayos se deben haber hecho con probetas que tengan el mismo tratamiento térmico, acabado superficial y tamaño que el elemento de diseño; además deberán efectuarse bajo las mismas condiciones de carga a que estaría expuesto el elemento durante el servicio. Tales pruebas proporcionan información muy útil y precisa e indican al ingeniero qué factor de seguridad emplear y cuál es la confiabilidad para una duración de servicio determinada.

El costo para obtener tal cantidad de datos antes de iniciar el diseño está plenamente justificado cuando la falla de esa pieza puede poner en peligro la vida humana o si se fabrica en cantidades muy grandes.

En resumen, el problema fundamental del diseñador estriba en utilizar los datos de ensayo simple a la tensión y relacionarlos con la resistencia de la pieza, con independencia del estado de esfuerzo o de las condiciones de carga.

Con frecuencia pueden seleccionarse los factores de seguridad basados en la carga, tomando en consideración las experiencias con diseños similares.

En el desarrollo de las relaciones de esfuerzo básicas, se supone que la sección transversal permanece constante y que no existen irregularidades en un elemento. Pero es un tanto difícil diseñar una máquina sin permitir algunos cambios en las secciones transversales de los elementos. Toda discontinuidad en un componente de máquina altera la distribución del esfuerzo en la proximidad de aquella característica, de manera que las ecuaciones de esfuerzo elementales ya no describen propiamente el estado de esfuerzo en la pieza o elemento. Estas discontinuidades se denominan acentuadores de esfuerzos, y las regiones en las que están se llaman áreas de concentración de esfuerzo.

Hay un factor de concentración de esfuerzo, teórico o geométrico,  $K_t$  o  $K_{ts}$ , el cual se utiliza para relacionar el esfuerzo máximo real en la discontinuidad con el nominal. Los factores están definidos por las ecuaciones :

$$K_t = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_0}$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{máx}}{\tau_0}$$

Donde  $K_t$  se utiliza para los esfuerzos normales y  $K_{ts}$  para los cortantes. El esfuerzo nominal  $\sigma_0$  o bien  $\tau_0$  es más difícil de definir, pero por lo general es el calculado por medio de las ecuaciones elementales y el área neta de la sección transversal.

El subíndice  $t$  en  $K_t$  indica convencionalmente que el valor de este factor de concentración del esfuerzo depende sólo de la configuración geométrica de la pieza; es decir, el material particular que se utiliza no influye en el valor de  $K_t$ . Por esta razón se le denomina factor teórico de concentración del esfuerzo.

Cuando se aumenta el espesor de una pieza, se origina una disminución en el valor de  $K$  y se convierte en asintótico a un valor mínimo con espesor creciente. A este valor mínimo se le denomina **factor crítico de intensidad** de esfuerzo para deformación plana, puesto que la deformación que se presenta en la dirección del espesor en la extremidad de la grieta está limitada por el material elástico que la rodea, de modo que la mayor parte de la deformación se presenta en las dos direcciones situadas en el plano de la placa.

En concreto, la concentración de esfuerzo sí tiene que considerarse cuando las partes han de hacerse de materiales frágiles o cuando estarán sometidas a cargas de fatiga. Sin embargo, aún en estas condiciones se encuentra que algunos materiales no son muy sensibles a la existencia de discontinuidades y, por lo tanto, no se tiene que usar los valores totales de los factores de concentración de esfuerzo teóricos.

## **CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN**

## CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN

Aunque la construcción de modelos está presente desde el Renacimiento, el empleo de la palabra simulación data de 1940, cuando los científicos von Neumann y Ulman resolvieron problemas de reacciones nucleares cuya solución experimental hubiera sido muy cara y el análisis matemático demasiado complicado.

La simulación ha cobrado mayor importancia a raíz del surgimiento de la computadora, porque gracias a ella se pudieron realizar múltiples problemas teóricos y prácticos.

Como se aprecia se ha repetido en varias ocasiones la palabra simulación, pero no se ha definido qué es; a continuación se proporciona un concepto de simulación.

### **5.1) Concepto de simulación**

Simulación es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender su comportamiento o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema.

La simulación es esencialmente una técnica que enseña a construir el modelo de una situación real, aunada a la realización de experimentos con el modelo; ello significa que su fundamento racional es la búsqueda constante del hombre por adquirir conocimientos relativos a la predicción del futuro.

Las razones para emplear simulación son diversas, pero entre las principales están:

a) Hace posible estudiar y experimentar con las complejas interacciones que ocurren en el interior de un sistema dado.

b) Se pueden estudiar los efectos de ciertos cambios informativos, de organización y ambientales en la operación de un sistema.

c) La observación detallada del sistema que se está simulando, conduce a un mejor entendimiento del mismo y proporciona sugerencias para mejorarlo, que de otra manera no podrían obtenerse.

d) Puede emplearse como recurso pedagógico, para estudiantes y practicantes, al enseñarles los conocimientos básicos del análisis teórico, análisis estadístico y la toma de decisiones.

e) La experiencia que se adquiere al diseñar un modelo de simulación en una computadora, puede resultar más valiosa que la simulación misma.

f) Ayuda a entender la operación del sistema, detectar las variables más importantes y entender sus interrelaciones.

g) Puede utilizarse para experimentar con situaciones nuevas, de las que se tiene poca o ninguna información, con el objeto de llegar preparados para alguna eventualidad.

h) Sirve como prueba de preservicio para ensayar nuevas políticas y reglas de decisión en la operación de un sistema, antes de tomar el riesgo de experimentar con el sistema real.

i) Proporciona un medio adecuado para dividir en partes un sistema complicado en subsistemas, los cuales pueden ser analizados de manera independiente.

j) Permite estudiar sistemas dinámicos en tiempo real, comprimido o expandido.

k) Se pueden verificar soluciones analíticas.

l) Ayuda a descubrir obstáculos y otros problemas que pueden presentarse en el funcionamiento del sistema.

m) Las conclusiones que se obtengan serán menos susceptibles a la parcialidad originada por inclinaciones particulares.

n) Se puede utilizar para entrenamiento de personal.

o) Puede ser empleada para anticipar cuellos de botella u otra dificultad que puede surgir en el comportamiento del sistema.

p) Mediante ésta se encuentran los valores óptimos de un conjunto de variables.

Un estudio de simulación requiere de varias etapas, y éstas son :

**Definición del problema** : Es necesario hacer primeramente un análisis preliminar del mismo, con el fin de determinar la interacción de los elementos dentro del sistema, las restricciones del sistema, las variables que intervienen y sus interrelaciones, las medidas de efectividad que se utilizarán para definir y estudiar el sistema, así como los resultados que se esperan obtener.

**Formulación del modelo** : Aquí se estudian todas las variables que forman parte del sistema, sus relaciones lógicas y los diagramas de flujo que describen al modelo en forma completa.

**Colección de datos** : Es muy importante que los datos sean claros y exactos para producir los resultados deseados. La información requerida por un modelo se puede obtener de registros contables, órdenes de trabajo, órdenes de compra, opiniones de expertos y / o experimentación, de condiciones aportadas por el medio ambiente, etc.

**Implantación del modelo en la computadora** : El siguiente paso es procesar el modelo en la computadora y alcanzar los resultados ambicionados.

**Validación** : A través de esta etapa es posible encontrar las deficiencias de la formulación del modelo o en los datos proporcionados al modelo. Las formas más comunes de validar un modelo son:

- a) La opinión de expertos sobre los resultados de la simulación.
- b) La exactitud con que se predicen datos históricos.
- c) La comprobación de falla del modelo de simulación al usar datos que hacen fallar al sistema real.
- d) La aceptación y confianza en el modelo por parte de la persona que hará uso de los resultados que reporte el experimento de simulación.

**Experimentación** : Consiste en generar los datos anhelados y hacer análisis de sensibilidad de los índices requeridos.

**Interpretación** : Se interpretan los resultados que arroja la simulación y en base a esto se toma una decisión.

**Documentación** : Se requieren dos tipos de documentación para utilizar de manera adecuada el modelo de simulación; esta documentación se refiere al manual de usuario y al manual de operación.

La mayoría de los modelos de simulación presentan en su etapa inicial estados transitorios, los cuales no son típicos del estado estable. Por lo tanto es necesario establecer sin ambigüedades las alternativas o cursos de acción que existen para solucionar este problema. La forma idónea de atacar es mediante :

a) El empleo de un tiempo de corrida lo suficientemente grande de modo que los periodos transitorios sean relativamente insignificantes con respecto a la condición de estado estable.

b) La exclusión de una parte apropiada de la parte inicial de la corrida.

c) El uso de simulación regenerativa.

Otro factor principal a considerar en un estudio de simulación es el tamaño de la muestra ( número de corridas en la computadora ). El tamaño de la muestra debe asegurar un nivel deseado de precisión y a la vez minimizar el costo de operación del modelo.

El tamaño de la muestra puede ser obtenido de dos maneras :

a) Previa e independientemente de la operación del modelo.

b) Durante la operación del modelo y basado en los resultados reportados por el modelo; para esta opción se utiliza la técnica estadística de **intervalos de confianza**.

La determinación de intervalos de confianza depende de si los resultados de la simulación son independientes o están correlacionados y si el sistema analizado se halla en estado transitorio o estable.

Cuando los sistemas que se investigan se encuentran en estado estable y los valores que toman las variables que interactúan en el sistema son independientes, se utilizan los métodos tradicionales de intervalos de confianza. En la determinación de los intervalos de confianza se utiliza el teorema del límite central; la expresión para calcular el intervalo de confianza es :

$$\frac{2\sigma Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Con esta fórmula se aprecia que el tamaño del intervalo será más pequeño entre mayor sea el número de observaciones que se tengan de la variable aleatoria  $X$ .

En las expresiones anteriores se asume que la varianza es conocida; sin embargo, en muchos problemas reales la varianza generalmente se desconoce. Para este tipo de situaciones, se recomienda emplear el siguiente estimador de la varianza :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores, se observa que definen un ancho de intervalo de confianza de :

$$\frac{2St_{\alpha/2, n-1}}{\sqrt{n}}$$

En breve, la simulación es una herramienta de la ingeniería de sistemas que se utiliza para la solución de problemas, cuando éstos no son factibles de resolverse por métodos analíticos o algoritmos preestablecidos. Sin embargo, su empleo requiere que el analista posea los conocimientos necesarios para la aplicación adecuada de ésta y que se cuente con la infraestructura apropiada.

Por otra parte, para obtener resultados congruentes es esencial efectuar un número considerable de corridas por computadora, ello indica que también es muy importante contar con un buen software para llevar a cabo las simulaciones del comportamiento del sistema.

## 5.2 ) Simulación determinística

Un modelo tiene diferentes variables. Éstas se emplean para relacionar un componente con otro y se clasifican como exógenas, de estado y endógenas.

Las **variables exógenas** son las independientes o de entrada del modelo y se supone que fueron preestablecidas y proporcionadas independientemente del sistema que se modela. Se pueden subclasificar en controlables y no controlables. Las variables exógenas controlables son susceptibles de manipulación o control por quien toma decisiones o crea políticas para el sistema.

Las **variables de estado** describen el estado de un sistema o uno de sus componentes en un periodo dado. Interaccionan con las variables exógenas del sistema y con las endógenas de acuerdo a las relaciones funcionales supuestas para el sistema. Su valor depende de los valores de una o más variables exógenas en algún periodo anterior y del valor de ciertas variables de salida en tiempos anteriores ( retroalimentación ).

Las **variables endógenas** dependen directamente del sistema y son generadas por la interacción de las variables exógenas con las de estado, de acuerdo con las características de operación de éste.

Los modelos de simulación se dividen en estáticos y dinámicos; los cuales se subdividen en determinísticos y probabilísticos. En la simulación probabilística se emplean variables aleatorias o probabilísticas; en tanto que en la determinística, las variables exógenas y endógenas no son variables al azar ( sus valores son conocidos y no sufren

variación ); ésto es porque se suponen relaciones exactas para las características de operación en lugar de funciones de densidad de probabilidad.

Es normal que en los sistemas económicos, financieros y administrativos se utilice ampliamente la simulación probabilística, ya que los factores que se manejan en estos modelos están sujetos a variaciones probabilísticas. En estos casos es recomendable usar el conocido Método de Montecarlo; éste requiere valores aleatorios, los cuales posteriormente serán manipulados por las funciones de forma del modelo y sometidos a procesos estadísticos, empleando las funciones de probabilidad correspondientes. Una vez obtenidos los resultados, se repite el proceso con nuevos valores aleatorios, y así sucesivamente hasta que se pueda formar un criterio de solución óptima. Cuando ya se tiene un gran número de corridas ( de mil a cinco mil ) se generan valores estadísticos que indiquen el resultado " real ".

La simulación determinística frecuentemente se aplica en modelos matemáticos que involucran a las ciencias exactas ( física, ingeniería civil, mecánica, electrónica, matemáticas puras y aplicadas, ingeniería genética, geología, etc. ). Aquí los valores de las variables usadas son determinados por las condiciones del problema y no son modificados durante cada proceso de solución. Sin embargo, en este tipo de solución es indispensable el uso de una computadora y software especializado; pues si se quisiera llevar a cabo este procedimiento vía manual, representaría un enorme gasto de tiempo, esfuerzo y dinero, además habrían demasiados errores.

En la simulación determinística es imprescindible realizar un vasto número de corridas. Éstas pueden ser desde veinte hasta varios cientos.

El criterio para establecer el número de corridas necesarias depende del tipo de problema a resolver, la complejidad del modelo matemático y la experiencia del analista.

Para el caso de análisis de esfuerzos en placas de acero por elementos finitos se sugiere la metodología descrita en la figura 5.1

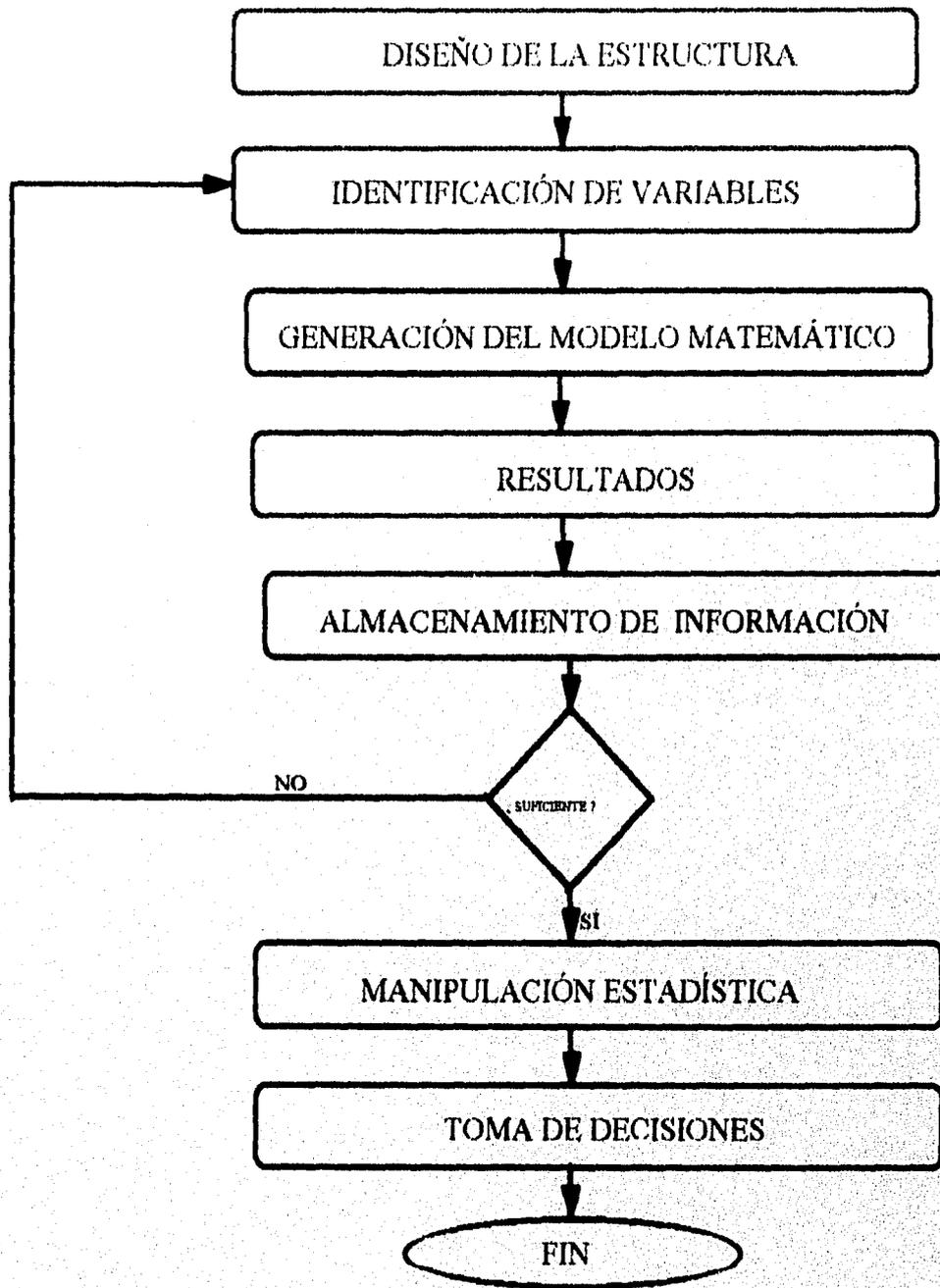


FIGURA 5.1 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO DE SIMULACIÓN DETERMINÍSTICA

**CAPÍTULO 6. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO  
(MEF)**

## CAPÍTULO 6. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ( MEF )

En ocasiones no es posible encontrar soluciones matemáticas analíticas para muchos problemas de ingeniería. Una ***solución analítica*** es una expresión matemática que da los valores deseados de una cantidad desconocida en una localidad de un cuerpo, y como consecuencia es válida para un número infinito de localidades del cuerpo.

Para problemas que involucran complejas propiedades de materiales y condiciones de frontera, los recursos del ingeniero son el empleo de los métodos numéricos; en la actualidad cada vez más situaciones de ingeniería requieren soluciones numéricas aproximadas en lugar de soluciones exactas, de forma cerrada; por ejemplo, se puede necesitar encontrar la capacidad de carga de una placa compuesta de diversos materiales con diferente rigidez cada uno y además con barrenos de diferentes formas, o bien, la concentración de contaminantes durante condiciones atmosféricas no uniformes, o tal vez, la razón del flujo de un fluido pasando a través de un conducto de forma arbitraria. Sin demasiado esfuerzo, se pueden escribir las ecuaciones gobernantes y las condiciones de frontera para estos problemas, pero se nota inmediatamente que no es tan simple hallar una solución analítica simple. La dificultad en estos tres ejemplos radica en que tanto su geometría y como alguna otra característica son irregulares o arbitrarias. Soluciones analíticas a problemas de este tipo rara vez existen.

Los recursos con que cuenta el analista vienen al rescate y proporcionan varias alternativas para la solución de este dilema. Una posibilidad es suponer simplificaciones, para ignorar las dificultades y reducir el problema a uno que pueda manejarse más sencillamente; a menudo este procedimiento conduce a serias inexactitudes, imprecisiones y / o respuestas erróneas.

Ahora que las computadoras ayudan en los cálculos, una alternativa más viable es retener las complejidades del problema y tratar de encontrar una solución numérica aproximada. Varios métodos de análisis numérico por aproximaciones han aparecido a través de los años, siendo el más común de ellos el esquema general de ***diferencias***

**finitas.** El modelo familiar de diferencias finitas ofrece una buena aproximación a las ecuaciones gobernantes. Este modelo ( formado por las ecuaciones en diferencias para un arreglo de una rejilla de puntos ) se mejora mientras más puntos haya. Con la técnica de diferencias finitas se pueden tratar problemas complicados; pero, cuando se encuentran geometrías irregulares o especificaciones inusuales de condiciones de frontera, esta técnica es bastante difícil de utilizar. Es entonces cuando otra técnica numérica más reciente entra en acción ( método del elemento finito ), éste se explica a continuación.

### 6.1) ¿ Qué es el elemento finito ?

Uno de los procedimientos numéricos más nuevos y populares que los ingenieros y científicos están usando es el método del elemento finito ( **MEF** ); el cual es esencialmente un producto de la era de la computadora digital electrónica; posee ciertas características que toman ventaja de las facilidades especiales que ofrecen las computadoras de gran velocidad. En particular, el método puede ser programado sistemáticamente para ajustar la complejidad y dificultad de los problemas que involucran materiales no homogéneos, comportamiento no lineal de la relación esfuerzo-deformación y condiciones de frontera complicadas. Otro aspecto favorable del método del elemento finito es la variedad de niveles en los cuales se puede desarrollar esta técnica.

El MEF se originó hace aproximadamente treinta años en la industria aeronáutica como un medio efectivo para analizar estructuras aerodinámicas complejas. Se inició como una extensión de los métodos matriciales para análisis estructural, pero ahora es reconocido como una herramienta versátil y poderosa que permite a una computadora solucionar casi todos los problemas previamente intratables en análisis de esfuerzos.

Cabe aclarar que el MEF no está restringido al estudio de la mecánica; aunque este hecho fue admitido hace unos quince años, hasta ahora, debido a su nobleza y

flexibilidad como herramienta de análisis, está recibiendo mucha atención en la industria y en los centros de investigación. Actualmente es aplicable a casi todos los problemas de campo o del **continuo** ( el continuo es el cuerpo físico, estructura o sólido a ser analizado ). En un problema del continuo de cualquier dimensión, la **variable de campo** ( puede ser esfuerzo, temperatura, desplazamiento, etc. ) posee infinitamente muchos valores, ya que es una función de cada punto genérico en el cuerpo o región de solución, consecuentemente el problema está ligado a un número infinito de incógnitas.

Un modelo MEF de un problema da una aproximación más precisa y exacta de las ecuaciones gobernantes. La premisa básica del MEF es que una región solución puede ser aproximada o modelada analíticamente al reemplazarla con un ensamble de elementos discretos. Ya que estos elementos pueden unirse en una variedad de formas, pueden ser usados para representar formas bastante complejas.

Como un ejemplo para ver la diferencia entre el método de diferencias finitas y el MEF, sea la sección transversal de un álabe de turbina, como se ve en la figura 6.1

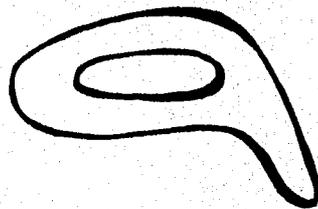


FIGURA 6.1 SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN ÁLABE DE TURBINA

Para este dispositivo, se puede necesitar encontrar la distribución de desplazamientos y esfuerzos para una carga dada, o bien, la distribución de temperatura para una determinada carga térmica. Se observa que la geometría del álabe no es tan simple.

Una malla uniforme con diferencias finitas cubriría razonablemente la hoja ( la región solución ), pero las fronteras son aproximadas por una serie de líneas horizontales y verticales ( escalera ), como se aprecia en la figura 6.2

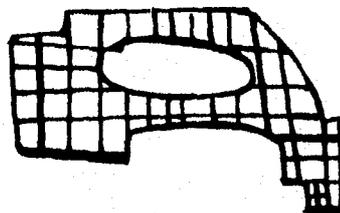


FIGURA 6.2 REGIÓN SOLUCIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS

En cambio el MEF provee una mayor propincuidad a la región y requiere menos nodos. También aproxima mejor las fronteras, ya que están formadas por líneas rectas muy pequeñas ( figura 6.3 ).

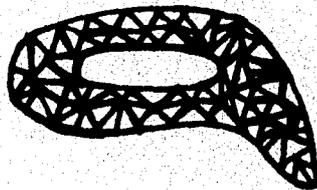


FIGURA 6.3 REGIÓN SOLUCIÓN CON MEF

Con ésto no se trata de sugerir que el MEF es decididamente mejor que las diferencias finitas para todos los problemas, sino que el MEF se adapta mejor a problemas con geometrías complejas.

El análisis mediante elementos finitos ofrece la posibilidad de simular matemáticamente estructuras físicas y sus condiciones de carga. La exactitud de un análisis depende enteramente de la información ingresada por el usuario o analista. Este tipo de análisis contempla las propiedades de los materiales lineales, elásticos e isotrópicos y es aplicable a un amplio rango de problemas de valores frontera de ingeniería. En un problema de valores de frontera, una solución es buscada en la región del cuerpo, donde las fronteras de la región de valores de las variables dependientes ( y sus derivadas ) son prescritas.

Como se dijo previamente, la base del MEF es la representación del cuerpo o estructura por medio de un ensamble de subdivisiones, este proceso se llama **discretización**. El procedimiento de discretización del elemento finito reduce el problema a uno con un número finito de incógnitas, al dividir la región solución en elementos, expresando la variable de campo desconocida en términos de funciones de aproximación dentro de cada elemento. Las **funciones de aproximación** ( llamadas también **funciones de interpolación** ) se definen en términos de los valores de las variables de campo en puntos específicos llamados **nodos** o **puntos nodales**. Los nodos usualmente limitan las fronteras de los elementos donde se considera que los elementos están conectados.

Además de los nodos en las fronteras, también un elemento puede tener algunos nodos interiores. Los valores nodales de la variable de campo y las funciones de interpolación definen completamente el comportamiento de la variable de campo dentro de los elementos. Para la representación de un problema por elemento finito, los valores nodales de las variables de campo resultan en nuevas incógnitas.

Una vez que estas incógnitas se encuentran, las funciones de interpolación definen las variables de campo a través del ensamble de elementos.

Claro que la naturaleza de la solución y el grado de aproximación depende no sólo del tamaño y número de elementos usados, sino también de las funciones de interpolación empleadas. Como es de esperarse, no es posible elegir las funciones arbitrariamente debido a que deben satisfacerse ciertas condiciones de compatibilidad. Frecuentemente las funciones se eligen de tal forma que las variables de campo o sus derivadas sean continuas a través de las fronteras de los elementos adyacentes.

Existe otra característica del MEF que lo hace diferente a otros métodos numéricos: ésta es la habilidad para formular soluciones para elementos individuales antes de realizar el ensamble que represente al problema total. Ésto significa, por ejemplo que si se trata de un problema de análisis de esfuerzos, se pueden encontrar las fuerzas, desplazamientos o las características de rigidez de cada elemento individual y después ensamblar los elementos para encontrar la rigidez de la estructura completa. En esencia un problema complejo se reduce al considerar una serie de muchos problemas simplificados.

Básicamente hay cuatro enfoques diferentes para determinar las propiedades de los elementos. El primero es llamado el **enfoque directo**, porque su origen es el método directo de rigidez del análisis estructural. Éste sugiere la necesidad de usar el álgebra matricial para tratar las ecuaciones del elemento finito, además es el más fácil de entender cuando se trabaja con el MEF por primera vez .

El segundo es el **enfoque variacional**, él es más versátil y avanzado porque usa el cálculo de variaciones. El conocimiento del enfoque variacional es necesario para trabajar más allá del nivel introductorio y extender el MEF a una amplia variedad de problemas sofisticados de ingeniería.

El tercero es el **enfoque de pesos residuales**, el cual comienza con las ecuaciones gobernantes del problema y procede sin considerar las proposiciones variacionales. Tiene la ventaja de poder extender el MEF a problemas donde el cálculo de funciones no esté disponible.

El cuarto enfoque se apoya en el **balance de la energía térmica y / o mecánica** de un sistema. No requiere proposiciones variacionales, por lo tanto incrementa considerablemente el rango de posibles aplicaciones del MEF.

Independientemente del enfoque empleado, la solución de un problema del continuo por el MEF siempre seguirá un proceso. Los pasos a seguir en el proceso de análisis de MEF son :

a) **Discretización del continuo** : El primer paso es dividir el continuo o región en elementos. En la figura 6.3 el álabe de turbina se dividió en elementos triangulares que podrían utilizarse para encontrar la distribución de temperatura o esfuerzos en él. Una amplia variedad de formas de elementos pueden utilizarse y teniendo cuidado se pueden usar diferentes formas de elementos en la misma región de solución.

En realidad, cuando se emplean diferentes formas de elementos que tienen varios tipos de componentes ( por ejemplo, placas ) es deseable y necesario utilizar diferentes tipos de elementos en la misma solución.

Para análisis en tres dimensiones, los elementos finitos pueden ser tetraedros, prismas rectangulares o hexaedros. Pese a que se han hecho algunos esfuerzos para automatizar el proceso de subdivisión, éste es esencialmente a juicio del ingeniero. Él debe decidir qué número, tamaño y arreglo de elementos finitos serán ocupados.

b) **Selección de las funciones de interpolación** : El siguiente paso es asignar nodos a cada elemento y elegir el tipo de función de interpolación que representará la variación de la variable de campo sobre el elemento. La variable de campo puede ser un escalar, un vector o un tensor de orden superior. A menudo se seleccionan polinomios como funciones de interpolación para la variable de campo, esto es debido a que son más fáciles de integrar y diferenciar. El grado del polinomio elegido depende del número de nodos asignados al elemento, la naturaleza y número de incógnitas en cada nodo, así como de ciertos requerimientos de continuidad impuestos a los nodos a lo largo de los elementos de frontera. La magnitud de la variable de campo y sus derivadas pueden ser las incógnitas en los nodos.

c) **Encontrar las propiedades de los elementos** : El paso siguiente es establecer las ecuaciones matriciales expresando las propiedades de los elementos individuales. Para llevar a cabo esto, se debe utilizar alguno de los cuatro enfoques ya mencionados ( la elección dependerá de la naturaleza del problema ).

d) **Ensamblar las propiedades de los elementos para obtener las ecuaciones del sistema** : Para encontrar las propiedades del sistema total modelado por la red de elementos, se deben ensamblar todas las propiedades de los elementos. Es decir, se deben combinar las ecuaciones matriciales que expresan el comportamiento de los elementos y formar las ecuaciones matriciales que manifiestan el comportamiento de la región solución total o sistema. Las ecuaciones matriciales del sistema tienen la misma forma que las ecuaciones para un elemento individual, excepto que contienen muchos más términos porque incluyen a todos los nodos.

El ensamble de las ecuaciones de los elementos es algo rutinario en el MEF y debe hacerse por computadora.

Antes que las ecuaciones del sistema estén listas para su solución, hay que tomar en cuenta las condiciones de frontera del problema.

e) **Resolver las ecuaciones del sistema** : El proceso de ensamble del paso anterior genera un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas, éstas deben resolverse para obtener los valores nodales desconocidos de la variable de campo. Si las ecuaciones son lineales se puede utilizar cualquier técnica gaussiana de solución y si son no lineales su solución es más difícil y deben emplearse métodos alternativos.

g) **Cálculos adicionales** : Algunas veces se necesita emplear la solución de las ecuaciones del sistema para calcular otros parámetros importantes. Por ejemplo, en un problema de lubricación, la solución de las ecuaciones del sistema proporciona la distribución de la presión dentro del sistema. De los valores nodales de la presión, se puede calcular la distribución de velocidad y flujos o quizá los esfuerzos cortantes, si es que se necesitan.

Dependiendo de la naturaleza del problema a resolver, las aplicaciones del MEF se pueden clasificar en tres categorías. En la primera están todos los problemas conocidos como **problemas de equilibrio** o **problemas independientes del tiempo**; la mayoría de las aplicaciones del MEF caen dentro de esta categoría. Para la solución de problemas del área de mecánica de sólidos, se necesita encontrar la distribución de desplazamientos, esfuerzos o temperaturas en una carga térmica o mecánica dada; en tanto, en mecánica de fluidos, se debe calcular la presión, velocidad, temperatura y algunas veces la concentración de distribuciones bajo condiciones de estado estable.

El segundo grupo corresponde a los llamados **problemas de eigenvalores** de mecánica sólida o de fluidos. Estos son problemas de estado estable cuya solución requiere la determinación de frecuencias naturales y modos de vibración de sólidos y fluidos. Aquí es posible estudiar la interacción de lagos y presas o el comportamiento de combustibles líquidos en tanques flexibles.

Otra clase de problemas de eigenvalores incluyen la estabilidad de estructuras y la estabilidad de flujos laminares.

En el tercer género se hallan los **problemas de propagación** o **dependientes del tiempo** de mecánica del medio continuo. Esta categoría está compuesta de los problemas que resultan cuando la dimensión tiempo es adicionada a los problemas de las dos categorías anteriores.

En cada rama de la ingeniería es factible emplear el MEF, ello no significa que esta metodología sea la mejor. Cuando el analista o diseñador tiene un problema del continuo a solucionar, el primer paso es decidir que técnica usar. Esto implica un estudio de los métodos alternativos de solución, la disponibilidad de la computadora, los paquetes comerciales existentes y lo más importante de todo, la cantidad de tiempo y dinero que esté dispuesto a invertir para obtener una solución.

Resumiendo, como técnica de análisis, el MEF ha alcanzado una posición inigualable, pues sirve para examinar un amplio rango de estructuras en ingeniería y componentes, desde el cuerpo humano hasta las alas de un aeroplano; por tal razón es

importante que el proceso de solución sea lo más económico posible, esto quiere decir que los matemáticos deben trabajar para fundamentar extensamente la teoría y determinar los límites de error y tasas de convergencia para problemas lineales y no lineales; también es necesario continuar la búsqueda de una mejor automatización para la carga y lectura de datos y procesos para evitar errores en redondeos y aproximaciones.

## 6.2) Diferentes tipos de elementos

La primera decisión que el ingeniero debe tomar es seleccionar la figura o configuración del elemento básico a ser empleado en el análisis. Esta elección depende de la geometría del cuerpo o estructura y del número de coordenadas independientes que son imprescindibles para describir al problema. Existen diversos tipos de elementos, entre ellos están :

a) **Elementos unidimensionales** : Cuando la geometría, propiedades del material y las variables dependientes ( como el desplazamiento ) pueden ser expresadas en términos de un sólo espacio coordenado independiente se usa un elemento unidimensional. Este tipo de elemento es utilizado para estructuras que pueden ser idealizadas.

Un elemento unidimensional puede ser representado por una línea recta cuyos extremos son los puntos nodales, en la figura 6.4 se observa un elemento unidimensional.

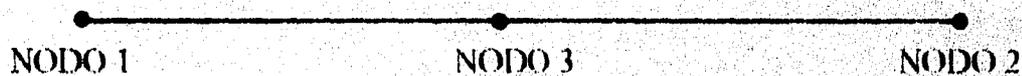


FIGURA 6.4 ELEMENTO UNIDIMENSIONAL

Los puntos 1 y 2 se denominan **nodos externos** porque representan puntos de conexión a los elementos adyacentes. El nodo 3 se conoce como **nodo interno**, y algunas veces es necesario porque no existen conexiones a otros elementos.

b) **Elementos bidimensionales** : Entre éstos están el plano de deformaciones, plano de esfuerzos y vigas. El elemento más simple para problemas bidimensionales es el triángulo ( figura 6.5 ).

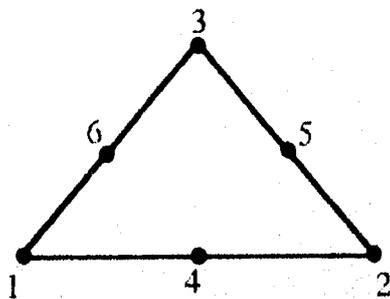


FIGURA 6.5 ELEMENTO TRIANGULAR

Existen dos arquetipos posibles de nodos externos para los elementos triangulares; los nodos de las esquinas indicados por 1, 2 y 3 son llamados **nodos externos primarios**.

Cuando hay nodos adicionales en los lados de los elementos ( nodos 4, 5 y 6 ), se hace referencia a ellos como **nodos externos secundarios**.

Esta distinción es necesaria porque los nodos secundarios tienen menos desplazamientos de interés que los nodos de la esquina.

Otros tipos comunes de elementos bidimensionales son los cuadriláteros y rectángulos, éstos se aprecian en la figura 6.6 y 6.7.

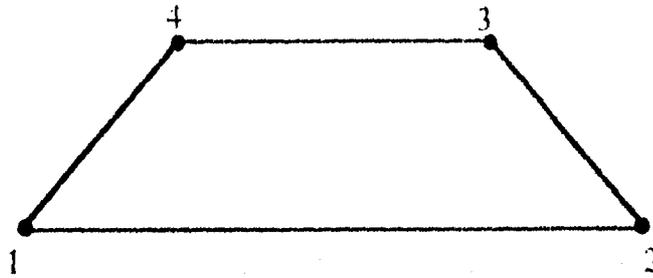


FIGURA 6.6 ELEMENTO CUADRILÁTERO

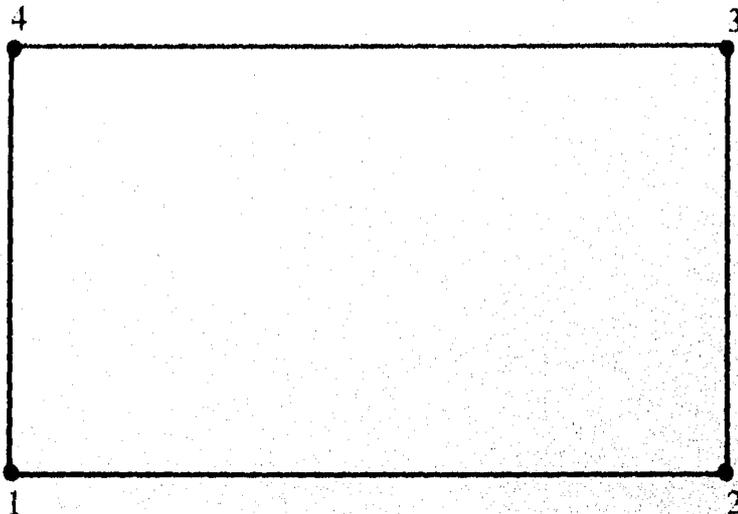


FIGURA 6.7 ELEMENTO RECTANGULAR

c) **Elemento axisimétrico** : Aquí, un sistema de coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $z$  y  $\theta$  es utilizado, todas las propiedades y variables son independientes de la coordenada  $\theta$ . Los elementos finitos empleados para estos problemas son anillos circulares, conocidos como elementos toroidales, con secciones cruzadas en el plano  $r - z$ , tal como se aprecia en la figura 6.8

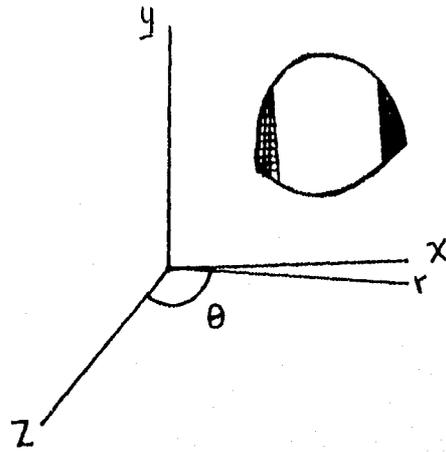
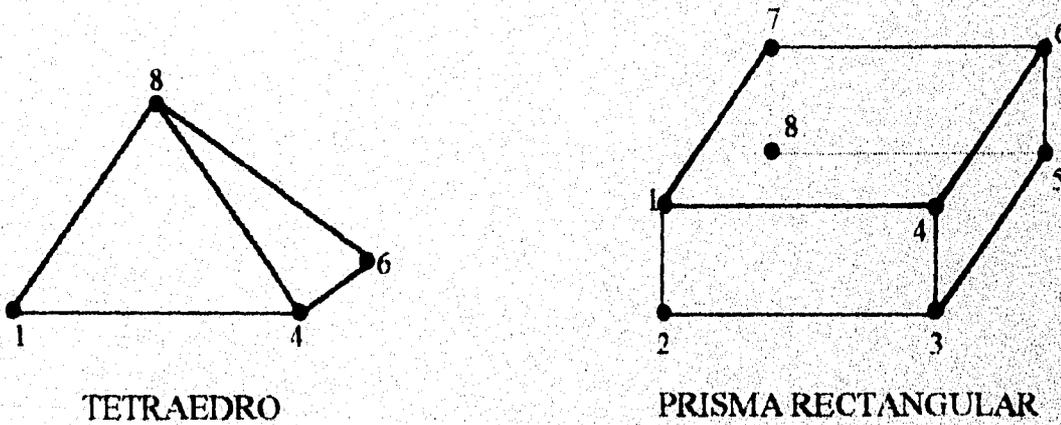


FIGURA 6.8 ELEMENTO AXISIMÉTRICO

d) **Elementos tridimensionales** : Los elementos tridimensionales con ocho nodos externos primarios son de la forma general de un hexaedro o prisma rectangular, en la figura 6.9 se aprecian unos elementos tridimensionales.



TETRAEDRO

PRISMA RECTANGULAR

FIGURA 6.9 ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

Existe otro tipo de elemento : el isoparamétrico, éste se describe a continuación.

### 6.3) Caso isoparamétrico en 2D

La formulación de modelos de desplazamiento y los cálculos de los elementos de rigidez han sido simplificados y generalizados por el concepto conocido como elemento isoparamétrico. Las principales bases de éste son el sistema de coordenadas natural y los modelos de desplazamiento e interpolación.

El sistema de coordenadas natural es un sistema local que permite la especificación de un punto dentro del elemento mediante un conjunto de números adimensionales cuyas magnitudes nunca exceden la unidad. Más aún, algunas de las coordenadas naturales tienen una magnitud unitaria en puntos nodales externos primarios.

Un sistema de coordenadas natural para una línea es mostrado en la figura 6.10

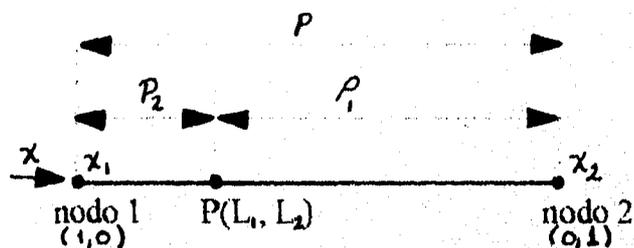


FIGURA 6.10 SISTEMA DE COORDENADAS NATURAL

Una función de interpolación, también conocida como función de forma, es una función que tiene valor unitario en un punto nodal y cero en los demás nodos.

Además de cumplir estos dos requisitos, la geometría y desplazamientos de los elementos son definidos en términos de los mismos parámetros. Este concepto ayuda a formular elementos de cualquier orden con modelos de desplazamiento isotrópicos, por este motivo satisfacen los requisitos de totalidad y compatibilidad.

Si las funciones de forma en coordenadas naturales llenan la continuidad de la geometría y desplazamientos dentro del elemento y entre elementos adyacentes, se puede mostrar que la condición de compatibilidad es satisfecha en las coordenadas globales. Se observa que los desplazamientos individuales en cualquier parte del elemento dependen sólo de los desplazamientos en los nodos.

Más aún, si el modelo de interpolación produce desplazamiento del cuerpo rígido en el sistema de coordenadas naturales local, las condiciones de desplazamiento y las constantes de estado de deformación se cumplen en las coordenadas globales.

La concepción del elemento isoparamétrico es una herramienta poderosa generalizada para construir elementos completos y conformantes de cualquier orden.

#### 6.4) MEF en el elemento individual

Es evidente que la teoría del MEF puede ser dividida en dos fases. La primera consiste en el estudio del **elemento individual** y la segunda es el estudio del **ensamble de los elementos** representando al cuerpo entero. Enseguida se explica lo concerniente al elemento individual.

La especialización más simple de la Ley de Hooke generalizada es el caso en el que se asume que el material es lineal, isotrópico y elástico. Un material isotrópico es el que tiene un punto de simetría, entonces el vector de deformación en términos de E y  $\nu$  se expresa como :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

Y en términos de los componentes de esfuerzo es :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

La solución en cada elemento debe ser casi igual al valor real, para lograrlo deben cumplirse tres condiciones :

a) Los modelos de desplazamiento deben ser continuos dentro de los elementos y los desplazamientos deben ser compatibles entre los modelos adyacentes. La primera parte de este requisito se cumple al escoger los modelos de polinomios, los cuales son inherentemente continuos. La segunda parte implica que los elementos adyacentes se deben deformar sin causar aberturas, traslapes o discontinuidades entre los elementos

b) Los modelos de desplazamiento deben incluir los desplazamientos del cuerpo rígido de un elemento. El desplazamiento de un cuerpo rígido es la deformación más elemental que puede ocurrir.

c) Los modelos de desplazamiento deben contener las constantes de estado de deformación del elemento. Deben existir combinaciones de valores de las coordenadas generalizadas que causen que todos los puntos en el elemento experimenten la misma deformación.

Los desplazamientos en los nodos, rotaciones y / o deformaciones necesarias para especificar completamente la deformación del elemento finito son los **grados de libertad del elemento**. El número mínimo de grados de libertad necesarios para un elemento dado, es determinado por la totalidad de requerimientos de convergencia, isotropía geométrica y la necesidad de una adecuada representación de los términos de la energía potencial funcional.

Considerando estas restricciones, se puede decir que el análisis en un sólo elemento finito está compuesto por los siguientes pasos :

- i) Seleccionar la configuración del elemento básico.
- ii) Escoger el modelo de desplazamiento y adoptar los desplazamientos en los nodos convenientes como las amplitudes del modelo.
- iii) Usando las relaciones apropiadas de esfuerzo y deformación, escribir los elementos de esfuerzo y deformación en términos de los desplazamientos nodales.
- iv) Sobre la base del método directo de rigidez o el principio variacional, formular la rigidez de los elementos y las cargas.
- v) Si es necesario, condensar para eliminar grados internos de libertad por el método de Gauss - Doolittle.

Una de las cantidades importantes que se desea obtener para análisis y diseño de un procedimiento de elemento finito son los esfuerzos y / o las deformaciones.

Las relaciones de desplazamiento de esfuerzo y deformación dependen de la especialización del comportamiento del material, el cual debe ser propiamente aplicado. Si  $\{ \epsilon \}$  es el vector de los componentes de deformación relevantes en un punto arbitrario dentro del elemento finito, entonces se recurre a las ecuaciones de deformación - desplazamiento y al modelo de desplazamiento para escribir :

$$\{ \epsilon \} = [B_n] \{ \alpha \}$$

$$[\varepsilon] = [B][q]$$

Donde  $[B_\alpha]$  es la matriz de deformación - desplazamiento para las coordenadas generales;  $[\alpha]$ , el vector de coordenadas generalizadas;  $[B]$ , la matriz de deformación - desplazamiento para los modelos de interpolación; y  $[q]$ , el vector de desplazamientos nodales.

Es importante notar que  $[\varepsilon]$  y  $[B_\alpha]$  o  $[B]$  son funciones de las coordenadas del espacio independiente. Sin embargo, si  $[B_\alpha]$  y  $[B]$  están en el mismo sistema de coordenadas pueden relacionarse por :

$$[B] = [B_\alpha][A^{-1}]$$

Aquí,  $[A^{-1}]$  representa las transformaciones de los desplazamientos relacionando  $[\alpha]$  con  $[q]$ .

Si  $[\sigma]$  es el vector de esfuerzos correspondiente a las deformaciones  $[\varepsilon]$ , se emplea una matriz apropiada de las ecuaciones de esfuerzo - deformación para escribir los esfuerzos en los elementos como sigue :

$$[\sigma] = [C][B_\alpha][\alpha]$$

O bien como :

$$[\sigma] = [C][B][q]$$

donde  $[C]$  es la matriz esfuerzo - deformación.

Ahora, si  $[k]$  es la matriz de rigidez de los elementos y  $[Q]$  el vector de cargas en los elementos, entonces la relación de equilibrio entre estas dos variables y el vector de

desplazamientos nodales  $[q]$  es expresada como un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas de la forma :

$$[k][q] = [Q]$$

La rigidez relaciona los desplazamientos en los puntos nodales con las fuerzas aplicadas en los puntos nodales. Los elementos de la matriz de rigidez son los coeficientes de influencia. La rigidez de una estructura es un coeficiente de influencia que suministra la fuerza en un punto sobre una estructura asociada con un desplazamiento unitario en un mismo ( o diferente ) punto.

La matriz de rigidez para un elemento depende de : el modelo de desplazamiento, la geometría del elemento y las propiedades locales del material o sus relaciones constitutivas.

### **6.5) MEF y el ensamble de elementos**

El proceso de subdivisión es esencialmente la construcción de la malla. Se tiene que decidir el número, forma, tamaño y configuración de los elementos, de tal forma que el cuerpo sea lo mejor posible simulado. El objetivo general de tal discretización es dividir el cuerpo en elementos suficientemente pequeños para que el modelo más simple de desplazamiento pueda proporcionar la solución más real. Al mismo tiempo, se debe recordar que entre más fina sea la malla mayor será el esfuerzo computacional.

La malla más fácil de construir es la regular, ésta es una subdivisión igual de tamaño y forma para todos los elementos. Para encontrar una solución aproximada útil es necesario un refinamiento de las subdivisiones en las regiones donde se esperan las concentraciones de esfuerzo. Tres condiciones deben satisfacerse para el proceso del

concentraciones de esfuerzo. Tres condiciones deben satisfacerse para el proceso del refinamiento de la malla. Estos requisitos son :

a) Cada punto en el cuerpo puede ser incluido dentro un pequeño elemento en cualquier etapa del refinamiento de la malla.

b) Todas las mallas previas deben ser contenidas en la malla más fina.

c) La misma forma y orden del modelo de desplazamiento debe ser retenido para la red refinada como para la malla previa.

Habitualmente a la subdivisión que cumple los dos primeros requisitos, se le llama red reducible.

Si elementos rectos son empleados, las fronteras curvadas son aproximadas por medio de pequeñas piezas lineales en los lados adyacentes de la frontera.

El proceso de construir las ecuaciones algebraicas para el ensamble de las ecuaciones de los elementos individuales es una rutina. La compatibilidad nodal es usada como base para este proceso. Este simple requisito establece que todos los elementos adyacentes para un nodo particular deben tener los mismos desplazamientos. La imposición de compatibilidad nodal representa la construcción del ensamble por la unión rígida las piezas o elementos a ciertos puntos de unión.

El método directo de rigidez es usado casi universalmente para ensamblar las ecuaciones algebraicas en las aplicaciones de elementos finitos. Su popularidad reside en la economía de almacenamiento del método y su facilidad de codificación. Las etapas del método directo de rigidez son :

a) Calcular la matriz de rigidez de los elementos  $[k]$  y la de cargas  $[Q]$  para cada elemento. Generalmente éstas son almacenadas en un arreglo de  $n \times n$  y uno  $n \times 1$ , respectivamente.

b) Transformar las cargas y rigideces de los elementos a coordenadas globales. La ventaja del elemento isoparamétrico es que siempre se usan coordenadas globales.

c) Si el elemento tiene grados de libertad internos, llevar a cabo el procedimiento de condensación. La matriz de multiplicadores  $[c]$ , pivotes  $[d]$  y el vector condensado de

cargas  $[ f ]$  son almacenados para la recuperación posterior de los desplazamientos internos por ecuación.

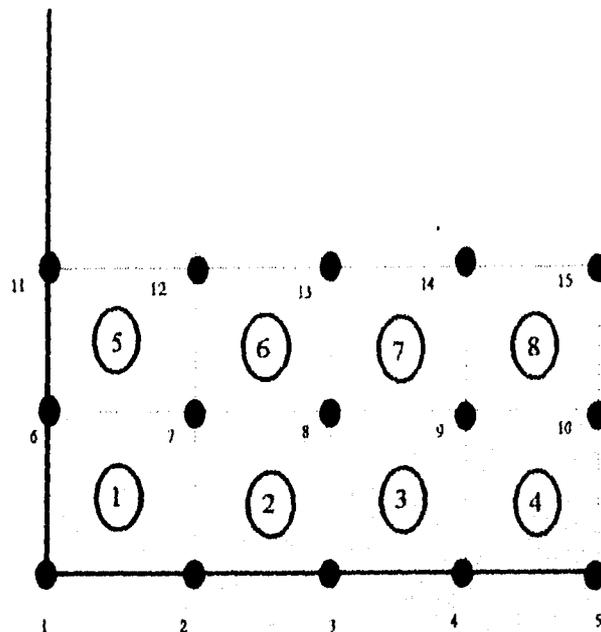
d) Utilizar un arreglo que relacione los índices nodales globales y locales para el elemento, añadir las submatrices de la rigidez de elementos  $[ k ]$  a la localidades apropiadas de la matriz de rigidez total  $[ K ]$ . Además, agregar los subvectores de las cargas de los elementos  $[ Q ]$  a la posición apropiada del vector total de cargas  $[ R ]$ .

e) Regresar al paso a y repetir el proceso hasta que todos los elementos hayan sido procesados.

Como el almacenamiento es una situación crítica, se utiliza el esquema de partición explicado en la sección 2.2.

El ancho de banda del sistema de ecuaciones final depende del tamaño de la matriz de rigidez de los elementos individuales y del sistema de notación para los nodos. Si se puede minimizar el ancho de banda, se reduce el tiempo de solución y los requisitos de almacenamiento para la matriz de rigidez total.

Hay dos pasos que hay que tomar en cuenta para esta minimización. Primero, si es posible hay que evitar el uso de muchos nodos externos secundarios. Ésto puede hacerse al elegir derivadas del desplazamiento como grados de libertad adicionales en los nodos externos primarios. Segundo, se debe ejecutar una subdivisión cuidadosa y adoptar el sistema de numeración adecuado para los nodos. Así que, un aspecto esencial del proceso de discretización es la designación del sistema de numeración para los nodos y los elementos. La figura 6.11 muestra la forma más común para numerar la malla bidimensional.



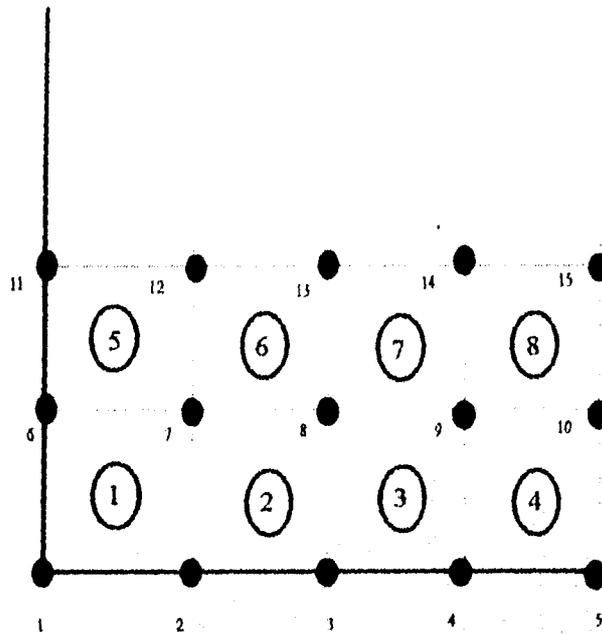
● Nodo

○ Elemento

FIGURA 6.11 NUMERACIÓN DE LA MALLA

Los nodos son numerados consecutivamente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, de acuerdo al sistema de la mano derecha. Una numeración similar es empleada para los elementos. Los datos adicionales deben ser tabulados.

Si los números de los nodos son usados como base para numerar los desplazamientos en los nodos, entonces el ancho de banda de la matriz de rigidez total depende de la diferencia más grande entre dos números de nodo externos cualesquiera para un solo elemento. Dejando a  $D$  ser la máxima diferencia que ocurre en todos los elementos del montaje, el ancho de la semibanda  $B$  está dado por  $B = (D + 1) f$ . Aquí  $f$  es el número de grados de libertad en cada nodo.



- Nodo
- Elemento

FIGURA 6.11 NUMERACIÓN DE LA MALLA

Los nodos son numerados consecutivamente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, de acuerdo al sistema de la mano derecha. Una numeración similar es empleada para los elementos. Los datos adicionales deben ser tabulados.

Si los números de los nodos son usados como base para numerar los desplazamientos en los nodos, entonces el ancho de banda de la matriz de rigidez total depende de la diferencia más grande entre dos números de nodo externos cualesquiera para un solo elemento. Dejando a  $D$  ser la máxima diferencia que ocurre en todos los elementos del montaje, el ancho de la semibanda  $B$  está dado por  $B = (D + 1) f$ . Aquí  $f$  es el número de grados de libertad en cada nodo.

## **CAPÍTULO 7. APLICACIÓN**

## **CAPÍTULO 7. APLICACIÓN**

El programa está limitado al análisis de cuerpos isotrópicos, con comportamiento lineal, elásticos, deformación plana o esfuerzo plano. Sólo se puede acomodar un caso de carga para cada problema. Los elementos usados son cuadriláteros y / o triángulos de deformación constante.

El programa se divide en una rutina principal y varias subrutinas que son controladas por el programa principal. En las tablas B.4 y B.5 se describen estas subrutinas y la nomenclatura utilizada, respectivamente.

Este software cuenta con una rutina para efectuar mapeos que transforman el elemento de una matriz ( que se halla en memoria principal ) en una dirección de disco duro y otra que lleva a cabo la acción inversa; también se implanta el método de solución para grandes sistemas de ecuaciones simultáneas conocido como de Gauss - Doolittle, ya explicado en la sección 2.2; con todo ésto se logra reducir la cantidad de memoria principal requerida y se optimiza el tiempo de proceso.

Otra característica importante del programa es que maneja archivos secuenciales y directos para ir guardando tanto los datos como los resultados.

### **7.1) Entrada de datos**

Al inicio del programa se solicitará que se estipulen valores máximos para el número de elementos, nodos, diferentes materiales a usar, cargas de tracción y máximo ancho de banda; estos valores dependerán del equipo de cómputo que se utilice.

Para capturar los datos se deben respetar las siguientes restricciones :

- a) Los datos deben introducirse en el orden en que se indica en el programa.
- b) Las unidades empleadas deben ser consistentes.

## **CAPÍTULO 7. APLICACIÓN**

El programa está limitado al análisis de cuerpos isotrópicos, con comportamiento lineal, elásticos, deformación plana o esfuerzo plano. Sólo se puede acomodar un caso de carga para cada problema. Los elementos usados son cuadriláteros y / o triángulos de deformación constante.

El programa se divide en una rutina principal y varias subrutinas que son controladas por el programa principal. En las tablas B.4 y B.5 se describen estas subrutinas y la nomenclatura utilizada, respectivamente.

Este software cuenta con una rutina para efectuar mapeos que transforman el elemento de una matriz ( que se halla en memoria principal ) en una dirección de disco duro y otra que lleva a cabo la acción inversa; también se implanta el método de solución para grandes sistemas de ecuaciones simultáneas conocido como de Gauss - Doolittle, ya explicado en la sección 2.2; con todo ésto se logra reducir la cantidad de memoria principal requerida y se optimiza el tiempo de proceso.

Otra característica importante del programa es que maneja archivos secuenciales y directos para ir guardando tanto los datos como los resultados.

### **7.1) Entrada de datos**

Al inicio del programa se solicitará que se estipulen valores máximos para el número de elementos, nodos, diferentes materiales a usar, cargas de tracción y máximo ancho de banda; estos valores dependerán del equipo de cómputo que se utilice.

Para capturar los datos se deben respetar las siguientes restricciones :

- a) Los datos deben introducirse en el orden en que se indica en el programa.
- b) Las unidades empleadas deben ser consistentes.

c) Los valores ingresados no deben ser mayores a los valores establecidos al inicio como máximos.

Todas las pantallas constan de tres secciones : encabezado, área de trabajo y línea de estado.

La primer pantalla que se visualiza, es como la que se aprecia en la figura 7.1

DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D	
Descripción :	
No. de nodos	( NNP )
No. de elementos	( NEL )
No. de materiales diferentes	( NMAT )
No. de cargas de tracción	( NOPT )
Deformación = 1 Esfuerzo plano = 2	( NBODY )
Fuerzas de cuerpo ( En Y = 1 No = 0 )	( NSLC )
¿ Están correctos los datos ?	

FIGURA 7.1 PANTALLA 1

La descripción del problema es una cadena, cuya longitud máxima es de sesenta caracteres; esto es por las limitaciones de pantalla que se tienen.

Los valores que puede tomar **NOPT** son 1 ó 2; el 1 es para calcular las deformaciones, y el 2 para obtener los esfuerzos planos; la opción 2 consume más tiempo y más recursos de cómputo (recuérdense las fórmulas de esfuerzo y deformación, previamente dadas).

En la alternativa **Fuerzas de cuerpo**, debe escribirse 1 si existen fuerzas en el cuerpo aplicadas en la dirección Y; en caso contrario, responder 0.

Después de verificar que los datos están correctos, se pasa a la pantalla 2 (figura 7.2), que sirve para capturar las propiedades de los materiales.

DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D.	
Módulo de elasticidad	(E(1))
Relación de Poisson	(PR(1))
Densidad	(RO(1))
Espesor	(TH(1))

¿ Están correctos los datos ?

FIGURA 7.2 PANTALLA 2

El programa pedirá todas estas características, tantas veces como número de materiales se hayan indicado en la pantalla 1.

Cabe aclarar que en 2D, la densidad será igual a 0 y el espesor, para fines algebraicos, valdrá 1.

En la pantalla 3 se introducen los datos correspondientes a los nodos que forman la malla de la estructura a analizar. La pantalla 3 se observa en la figura 7.3. El conjunto de datos requeridos será igual al número de nodos que tenga la malla ( especificado por **NNP** ).

DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D.	
No. de nodo	( M )
Tipo de restricción	( KODE ( M ) )
Coordenada en X	( X ( M ) )
Coordenada en Y	( Y ( M ) )
Desplazamiento o carga en X	( ULX ( M ) )
Desplazamiento o carga en Y	( VLY ( M ) )
¿ Están correctos los datos ?	

FIGURA 7.3 PANTALLA 3

Debido a la naturaleza del algoritmo generador de la malla de la estructura, no es necesario introducir manualmente todos los nodos. Basta con diseñar la numeración de los nodos de acuerdo a la convención establecida en la sección 6.5. Con esto, sólo se introducen los nodos de la primera línea sobre el eje X y la primera línea vertical completa, en caso de que no haya cargas externas: si hubiese cargas externas es necesario meter manualmente el nodo afectado. Se necesita un conjunto de datos para cada nodo. Sin embargo si algunos nodos están alineados en forma directa y son equidistantes, el conjunto de datos serán sólo para el primer y último nodo de ese grupo. Los datos para los nodos intermedios, se generarán automáticamente por interpolación lineal.

Las fuerzas y / o desplazamientos establecidos en un nodo, son identificados por **KODE**; los valores que puede tomar **KODE** son : 0 si tiene dos grados de libertad, 1 para libertad en Y, 2 si tiene libertad en X, y 3 para cero grados de libertad.

Los valores de **X ( M )**, **Y ( M )**, **ULX ( M )** y **VLY ( M )** se proporcionarán de acuerdo al sentido levógiro.

Cuando se ha terminado de verificar que los datos son correctos, aparece la pantalla 4; ésta es una tabla ordenada por número de nodo de todos los datos introducidos previamente. En esta etapa es posible corregir todavía algún dato erróneo.

En la pantalla 5, se solicitan **NEL** veces los datos para los elementos. La figura 7.4 representa a la pantalla 5.

DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D

No. de elemento	( M )
Nodo No. 1	IE ( M, 1 )
Nodo No. 2	IE ( M, 2 )
Nodo No. 3	IE ( M, 3 )
Nodo No. 4	IE ( M, 4 )
Tipo de material	IE ( M, 5 )

¿ Están correctos los datos ?

FIGURA 7.4 PANTALLA 5

Gracias a la naturaleza del algoritmo generador de la malla de la estructura, no es esencial insertar manualmente todos los elementos. La forma de numerar los elementos fue acordada en la sección 6.5.

IE ( M, 1 ), IE ( M, 2 ), IE ( M, 3 ) e IE ( M, 4 ) denotan a los cuatro nodos de esquinas I, J, K, L de un elemento cuadrilátero M. El programa también permite el uso de elementos triangulares, los cuales son indicados repitiendo el tercer nodo; ésto es IE ( M, 3 ) = IE ( M, 4 ), o bien  $k = l$ . IE ( M, 5 ) expresa el tipo de material en el elemento.

DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D

No. de elemento	( M )
Nodo No. 1	IE ( M, 1 )
Nodo No. 2	IE ( M, 2 )
Nodo No. 3	IE ( M, 3 )
Nodo No. 4	IE ( M, 4 )
Tipo de material	IE ( M, 5 )

¿ Están correctos los datos ?

FIGURA 7.4 PANTALLA 5

Gracias a la naturaleza del algoritmo generador de la malla de la estructura, no es esencial insertar manualmente todos los elementos. La forma de numerar los elementos fue acordada en la sección 6.5.

IE ( M, 1 ), IE ( M, 2 ), IE ( M, 3 ) e IE ( M, 4 ) denotan a los cuatro nodos de esquinas I, J, K, L de un elemento cuadrilátero M. El programa también permite el uso de elementos triangulares, los cuales son indicados repitiendo el tercer nodo; ésto es IE ( M, 3 ) = IE ( M, 4 ), o bien  $k = l$ . IE ( M, 5 ) expresa el tipo de material en el elemento.

La manera de proveer los nodos que integran a un elemento, se muestra en la figura

7.5

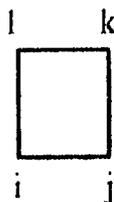


FIGURA 7.5 NODOS QUE CONSTITUYEN A UN ELEMENTO

Además se debe cumplir lo siguiente :

$$j = i + 1$$

$$l = k - 1$$

$$l - i = k - j = B$$

Donde B es el ancho de la semibanda de la matriz simétrica de coeficientes.

Cuando se ha finalizado de comprobar que los datos son correctos, se exhiben en la pantalla 6 todos los datos introducidos en forma de tabla, ordenada por número de elemento. En este paso aún se puede corregir algún dato.

Por medio de la pantalla 7 se ingresan los datos correspondientes a las superficies de tracción, en caso de que en la pantalla 1 se haya indicado que sí existen superficies de tracción en la estructura. Los datos se piden tantas veces como número de superficies de tracción se hayan indicado. En la figura 7.6 se muestra la pantalla 7.

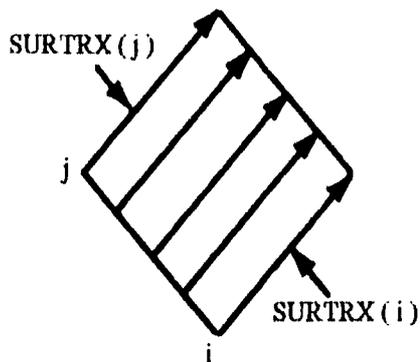
DISEÑO POR ELEMENTOS FINITOS. CASO ISOPARAMÉTRICO EN 2D.

Nodo i	( ISC ( L ) )
Nodo j	( JSC ( L ) )
Carga de tracción dirección X en el nodo i $X_i$	( SURTRX ( L,1 ) )
Carga de tracción dirección X en el nodo j $X_j$	( SURTRX ( L,2 ) )
Carga de tracción dirección Y en el nodo i $Y_i$	( SURTRY ( L,1 ) )
Carga de tracción dirección Y en el nodo j $Y_j$	( SURTRY ( L,2 ) )

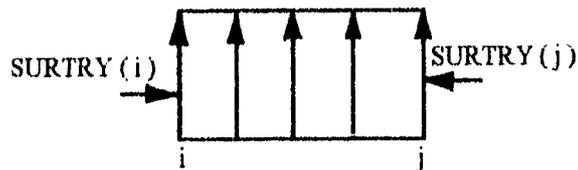
¿ Están correctos los datos ?

FIGURA 7.6 PANTALLA 7

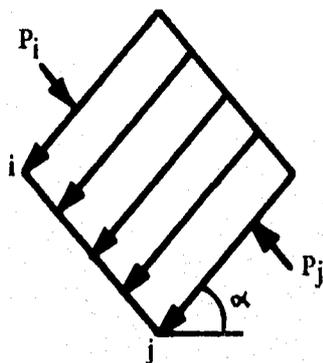
Las superficies de tracción deben especificarse solamente entre dos nodos adyacentes. Los tres casos posibles se muestran en la figura 7.7



a) Tracciones sólo en la dirección X



b) Tracción sólo en dirección Y



c) Tracción en las direcciones de X y Y

**FIGURA 7.7 CASOS POSIBLES DE SUPERFICIES DE TRACCIÓN**

Para el caso a, sólo SURTRX ( i ) y SURTRX ( j ) se introducen. Para el caso b, únicamente se ingresan SURTRY ( i ) y SURTRY ( j ). Para el caso c, puede necesitarse calcular manualmente los componentes de las tracciones. Más aún, el usuario debe multiplicar todas las intensidades de superficie por el espesor del elemento antes que las intensidades sean introducidas a la computadora.

Los signos de las tracciones siguen las direcciones de los ejes coordenados.

Aquí también existe la posibilidad de corregir algún dato.

Al terminar esta pantalla, comienza el proceso de cálculo.

## 7.2) Proceso de cálculo

Los pasos a seguir son :

- a) Inicio del programa.
- b) Leer e imprimir los datos.
- c) Si ocurre un error, abandonar el programa; en caso contrario, calcular el ancho de la semibanda de la matriz simétrica de coeficientes.
- d) Si el ancho de la semibanda es muy grande, terminar la ejecución; en caso contrario, ir al paso e.
- e) Para cada elemento :
  - \* Checar nuevamente los datos.
  - \* Calcular  $[C]$ ,  $[B]$ ,  $[k]$ ,  $[Q]$ .
  - \* Condensar nodos internos.
  - \* Almacenar  $[C]$ ,  $[B]$ , multiplicadores, pivotes y centroides de los elementos.
  - \* Adicionar  $[k]$  a  $[K]$  y  $[Q]$  a  $[R]$ .
- f) Aplicar condiciones geométricas de frontera.
- g) Si ocurre un error en las condiciones de frontera, terminar el programa; en caso contrario, calcular e imprimir los desplazamientos nodales.
- h) Para cada elemento :
  - \* Recuperar  $[C]$ ,  $[B]$ , multiplicadores, pivotes y centroides de los elementos.
  - \* Recuperar los desplazamientos y los nodos internos.
  - \* Calcular deformaciones, esfuerzos y esfuerzos principales.
  - \* Imprimir las coordenadas de los centroides, esfuerzos y esfuerzos principales.
- i) Fin del programa.

### 7.3) Interpretación de resultados

La primer pantalla de salida muestra para cada nodo de la malla, los desplazamientos tanto en la dirección X como en Y; posteriormente se exhiben los números de nodos en donde ocurren los máximos desplazamientos en ambas direcciones.

En la figura 7.8 se observa la pantalla de salida 1.

Nodo	Despl. U en X	Despl. V en Y
------	---------------	---------------

FIGURA 7.9 PANTALLA DE SALIDA 1

En la pantalla de salida 2 se presenta para cada elemento en su centroide, los esfuerzos correspondientes. Dicha pantalla mostrará los siguientes resultados :

No. Elemento	Coordenada x del centroide	Coordenada y del centroide	Esfuerzo principal en X	Esfuerzo principal en Y	Esfuerzo cortante X - Y	Intensidad de esfuerzo en X	Intensidad de esfuerzo en Y	Angulo
--------------	----------------------------	----------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------	-----------------------------	--------

Enseguida se exponen los números de elementos donde se registran los valores máximos de intensidades de esfuerzos en ambas direcciones.

Una vez que se han obtenido las dos pantallas de resultados se procede a interpretarlos.

Para placas de acero y dependiendo del tipo de que se trate, existen valores dados en las normas ( **API** , **ANSI** , **ISO** , etc. ) como máximos tanto para los desplazamientos como para los esfuerzos.

Es necesario examinar las dos pantallas, ya que al revisar la primera si se detectan desplazamientos en algunos nodos, que excedan los valores prescritos en las normas, entonces quizá ya no valga la pena examinar la pantalla 2, ya que un desplazamiento mayor que el máximo tolerado, ocasionará riesgos para el buen funcionamiento de la estructura de la que forma parte la placa.

Si todos los desplazamientos en la pantalla de salida 1 están por debajo de los valores especificados en las normas, se procede a examinar la pantalla 2. Aquí se comparan los valores de esfuerzo constante e intensidades de esfuerzo con las especificaciones del material que se está tratando. Cada material tiene sus propios valores máximos de esfuerzo cortantes e intensidades permitidos. Si existen valores que sobrepasen los indicados en la especificación, entonces se sabrá con certeza en que región sufrirá colapso la placa estudiada.

Para el acero, el desplazamiento máximo aceptable ( en números redondos ) es aproximadamente  $\frac{1}{2}$  ", no importando el espesor de la placa.

Para esfuerzos, aquí no se puede mostrar algún ejemplo ya que los valores dependen de las dimensiones de la placa en cuestión.

#### **7.4) Toma de decisiones**

Si los resultados obtenidos en la primera corrida no son satisfactorios ( si está permitido por las condiciones técnicas, administrativas y económicas de la empresa ), es necesario efectuar corridas posteriores modificando los valores de las variables exógenas y / o las de estado. Se deben realizar tantas corridas como número de combinaciones discretas se hayan calculado, hasta lograr un rango de resultados que ofrezcan las condiciones óptimas globales.

Si los resultados son satisfactorios en la primera corrida, es necesario llevar a cabo de todas maneras un número tal de corridas igual al número de combinaciones estimadas

con antelación, para lograr el rango de resultados necesarios para llegar a tener una buena toma de decisiones.

Cuando ya se tiene el rango de resultados, se procede a graficar para todos los casos, cargas - esfuerzos, cargas - deformaciones, indicando los valores de espesores y dimensiones generales para estas gráficas. La decisión tomada a partir de las gráficas son para aprobar el diseño de la placa; sin embargo, habrá que verificar que este diseño ( por condiciones de carga, propiedades del material y dimensiones ) esté acorde con los procesos de manufactura, producción, adquisición de materiales, recursos económicos, utilidades, procesos de control de calidad, etc.

Si alguna de estas condiciones se contraponen al diseño obtenido por MEF se hace necesario volver a diseñar y a hacer otra vez el número de corridas necesarias, hasta que todos los requisitos de la empresa estén conciliados; es decir, se trabaja bajo el enfoque sistémico.

## **CONCLUSIONES**

## CONCLUSIONES

Se ha llegado al final de esta investigación, y se comprueba con beneplácito que cumplió totalmente con los objetivos propuestos ( proporcionados al inicio de la misma ).

Asimismo posee los atributos que caracterizan a una investigación científica, es decir :

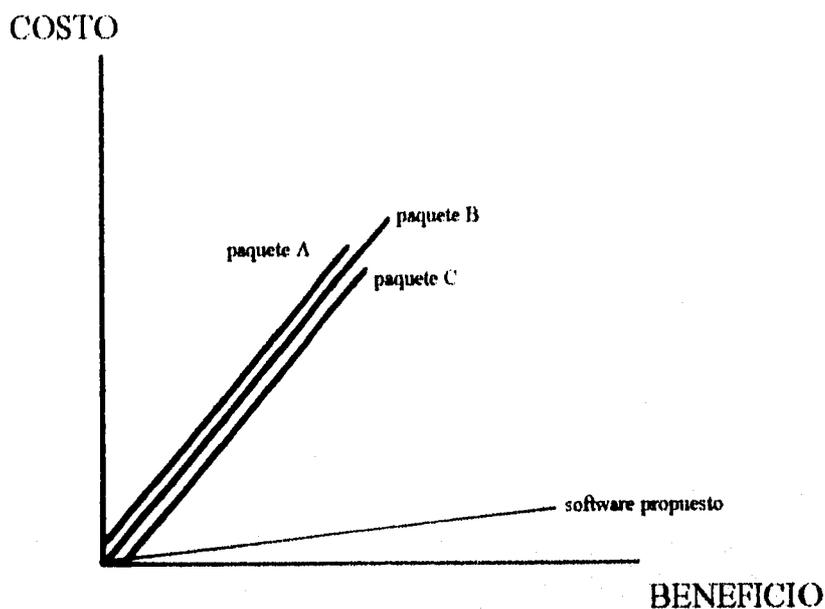
- \* Fue un estudio sistemático y objetivo.
- \* Se realizó sobre un tema claramente delimitado.
- \* Estuvo basado en fuentes apropiadas y trabajos recientes sobre el mismo tema.

\* Su meta fue llegar a una síntesis unitaria sobre el objeto de estudio, ya que no sólo aumentó el acervo de datos conocidos, sino que aclaró y creó nuevas dudas acerca de su estructuración, ordenamiento, conexión interna, de tal manera que el tema es contemplado ahora, como un todo unificado que tiene un sentido acorde a la realidad.

La calidad y confiabilidad del módulo que se ha diseñado en este trabajo de investigación están aseguradas, ya que al llevar a cabo corridas paralelas con módulos similares de Ansis, Algor, Cosmos, Phoenix y Nisa ( que son los paquetes comerciales más populares ) se obtuvieron los mismos resultados. A diferencia de todos los paquetes que se encuentran en el mercado, este módulo se puede correr en cualquier tipo de computadora ( XT, 80286, 80386, 80486, etc. ) y la capacitación para su manejo es mínima, ya que el sistema se diseñó en forma amigable.

En la siguiente gráfica se aprecia la relación beneficio - costo para este diseño, en comparación con los paquetes comerciales.

\*\*\* Nota : El análisis beneficio - costo se estudia de manera detallada en el apéndice C.



Se observa que el costo de este programa ( en relación con los paquetes comerciales ) es ínfimo.

Como se ha dicho a lo largo de toda esta investigación, el MEF es una técnica de simulación de gran utilidad para diseñar placas de estructuras. Si por ejemplo, en una empresa se requiere probar un nuevo diseño o mejorar uno existente, normalmente se tienen que hacer pruebas piloto que consisten en fabricar una o varias piezas con los diseños propuestos, lo que origina una serie de gastos en materiales, maquinaria, personal especializado, especificaciones de control de calidad, etc. Si el diseño es exitoso, terminan las pruebas, pero todo el material diseñado ya no se utilizará; en caso de que el proyecto fracase, hay que volverlo a considerar y repetir la producción piloto hasta que se alcancen resultados óptimos.

Otra alternativa más viable es el empleo de la simulación por MEF. Igual que todas las aproximaciones numéricas, el MEF está basado en el concepto de discretización; tanto en el enfoque variacional como en el residual, esta técnica reconoce la continuidad multidimensional del cuerpo. No sólo trata idealmente al cuerpo como continuo, sino que también requiere no separar el proceso de interpolación para que la solución aproximada

se extienda a cada punto dentro del continuo. No obstante, el hecho de que una solución se obtenga en un número finito de puntos nodales discretos, la formulación del modelo proporciona inherentemente una solución en todos los otros puntos.

Para finalizar, cabe aclarar que la investigación en este campo y particularmente en esta línea debe continuarse, pues es necesario extenderla a 3D y a otros campos de aplicación. También debe estudiarse el caso axisimétrico tanto en 2D como 3D.

**APÉNDICE A. APROXIMACIÓN NUMÉRICA  
Y ERRORES**

## APÉNDICE A. APROXIMACIÓN NUMÉRICA Y ERRORES

Cuando se trabaja con métodos numéricos, es necesario hacer un buen manejo de sus conceptos fundamentales; entre éstos se encuentran :

**Aproximación** : Es el cálculo o valor que no es exacto, sino que se acerca al valor verdadero.

**Precisión** : Es el número de cifras significativas que representan una cantidad o la extensión en las lecturas repetidas de un instrumento que mide alguna propiedad física.

**Exactitud** : Es la aproximación de un número o medida al valor verdadero que se intenta representar.

**Estabilidad** : Se dice que un método es estable, si para cambios o variaciones pequeñas en los datos iniciales, produce correspondientemente cambios pequeños en los resultados o si algún error que sólo se cometa al aplicarlo, tiene un efecto correctivo en su estructura.

**Convergencia** : Un método es convergente si la aplicación reiterada del algoritmo, se acerca paulatinamente a la solución, hasta alcanzarla.

Claro está, que los resultados numéricos están influenciados por diferentes tipos de errores; entre ellos se pueden mencionar los siguientes :

**Errores en los datos de entrada** : Los datos de entrada pueden ser resultado de mediciones, las cuales han sido influenciadas por errores sistemáticas o por perturbaciones temporales. También se conocen como errores inherentes. Éstos ocurren frecuentemente en mediciones físicas como voltaje, tiempo, distancia, etc.

**Errores de truncamiento** : Estos errores se cometen cuando procesos matemáticos infinitos se cortan o truncan a procesos finitos; ejemplos de este tipo de errores ocurren cuando se trunca una serie, como la de Taylor; cuando una derivada es aproximada con coeficientes diferenciales, cuando funciones no lineales se aproximen mediante funciones lineales.

**Errores de redondeo** : Si el dispositivo de cálculo que se está utilizando no puede manipular número que tengan más de  $s$  dígitos, entonces el producto exacto de dos números con  $s$  dígitos ( que contiene  $2s$  o  $2s - 1$  dígitos ) no puede emplearse en cálculos posteriores; el producto es redondeado al número máximo de cifras más significativas con las que cuenta el dispositivo.

El error se puede medir a través del error absoluto y el relativo. El **error absoluto** en una cantidad es la diferencia entre el valor verdadero ( suponiendo que se conoce ) y una aproximación al valor real. Se expresa mediante la fórmula :

$$e_a = x - \bar{x}$$

Donde  $e_a$  es el error absoluto;  $x$ , el valor verdadero; y  $\bar{x}$ , el valor aproximado.

El **error relativo** es el cociente del error absoluto entre el valor verdadero, multiplicado por cien. Es decir :

$$e_r = \frac{x - \bar{x}}{x} (100)$$

La representación gráfica de un error es la que se muestra en la figura A.1

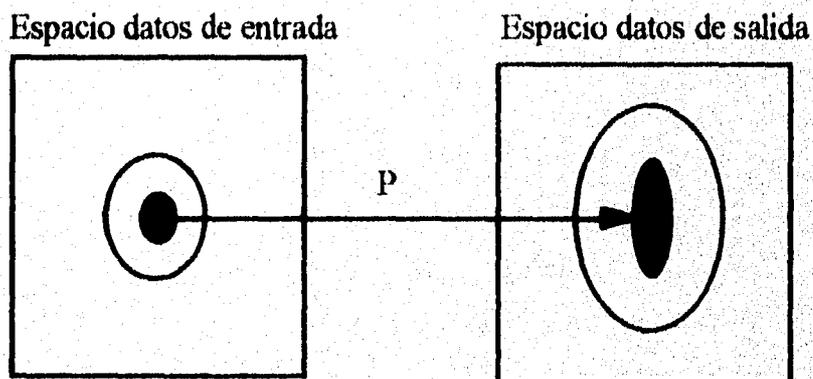


FIGURA A.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN ERROR

Un problema numérico  $P$  significa un mapeo del espacio de los datos de entrada al espacio de los datos de salida; es decir, un círculo de radio  $r$  es mapeado en una elipse cuyo eje mayor es aproximado a  $C_p r$ .

**APÉNDICE B. TABLAS MÁS IMPORTANTES**

**APÉNDICE B. TABLAS MÁS IMPORTANTES**

MATERIAL	MÓDULO DE ELASTICIDAD, E		MÓDULO DE RIGIDEZ, G	
	Mpsi	GPa	Mpsi	GPa
Abeto Douglas	1.6	11.0	0.6	4.5
Acero al carbono	30.0	207.0	11.5	79.3
Acero inoxidable	27.6	190.0	10.6	73.1
Acero níquel	30.0	207.0	11.5	79.3
Aluminio ( todas las aleaciones )	10.3	71.0	3.80	26.2
Bronce fosforado	16.1	111.0	6.0	41.4
Cobre	17.2	119.0	6.49	44.7
Cobre al berilio	18.0	124.0	7.0	48.3
Hierro fundido gris	14.5	100.0	6.0	41.4
Inconel	31.0	214.0	11.0	75.8
Latón	15.4	106.0	5.82	40.1
Magnesio	6.5	44.8	2.4	16.5
Molibdeno	48.0	331.0	17.0	117.0
Monel	26.0	179.0	9.5	65.5
Plata níquel	18.5	127.0	7.0	48.3
Plomo	5.3	36.5	1.9	13.1
Vidrio	6.7	46.2	2.7	18.6

**TABLA B.1 MÓDULO DE ELASTICIDAD Y RIGIDEZ PARA DIVERSOS MATERIALES**

MATERIAL	RELACIÓN DE POISSON
Abeto Douglas	0.330
Acero al carbono	0.292
Acero inoxidable	0.305
Acero níquel	0.291
Aluminio ( todas las aleaciones )	0.334
Bronce fosforado	0.349
Cobre	0.326
Cobre al berilio	0.285
Hierro fundido gris	0.211
Inconel	0.290
Latón	0.324
Magnesio	0.350
Molibdeno	0.307
Monel	0.320
Plata níquel	0.322
Plomo	0.425
Vidrio	0.245

**TABLA B. 2 RELACIÓN DE POISSON PARA DIFERENTES MATERIALES**

A = Área    I = Momento de inercia    J = Momento polar de inercia    Z = Módulo de sección

k = Radio de giro     $\bar{y}$  = Distancia al centroide

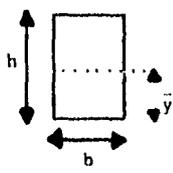
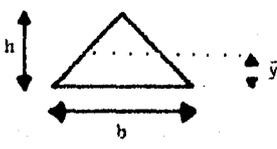
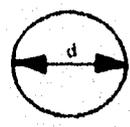
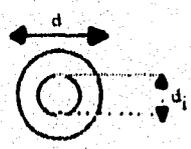
<p><b>Rectángulo</b></p> 	$A = bh$ $I = (bh^3) / 12$ $Z = (bh^2) / 6$ $k = 0.289h$ $\bar{y} = h / 2$
<p><b>Triángulo</b></p> 	$A = (bh) / 2$ $I = (bh^3) / 36$ $Z = (bh^2) / 24$ $k = 0.236h$ $\bar{y} = h / 3$
<p><b>Círculo</b></p> 	$A = (\pi d^2) / 4$ $I = (\pi d^4) / 64$ $Z = (\pi d^3) / 32$ $J = (\pi d^4) / 32$ $k = d / 4$ $\bar{y} = d / 2$
<p><b>Corona circular</b></p> 	$A = (\pi d^2) / 4$ $I = (\pi / 64) (d^4 - d_i^4)$ $Z = (\pi / 32d) (d^4 - d_i^4)$ $J = (\pi / 32) (d^4 - d_i^4)$ $k = (d^2 + d_i^2) / 16$ $\bar{y} = d / 2$

TABLA B. 3 PROPIEDADES DE LAS SECCIONES

FUNCIÓN	TAREA REALIZADA
PRINCIPAL	Lee el título del problema, calcula el ancho de la semibanda, resuelve las ecuaciones de equilibrio globales e imprime los desplazamientos.
DATAIN	Lee e imprime los datos de entrada.
ASEMBL	Inicia y ensambla la matriz de rigidez global y el vector de carga. Almacena temporalmente los datos necesarios para cálculos posteriores. Introduce las condiciones de frontera.
QUAD	Calcula la matriz esfuerzo - deformación, la matriz de rigidez, el vector de fuerzas del cuerpo y la matriz deformación - desplazamiento de los elementos cuadriláteros.
CST	Calcula la matriz de deformación - desplazamiento, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas del cuerpo de un elemento triangular de deformación.
GEOMBC	Aplica las condiciones de frontera para los desplazamientos prescritos en un nodo simple.
BANSOL	Triangulariza la matriz de rigidez bandada global por descomposición simétrica de Gauss - Doolittle o resuelve para el vector de desplazamiento correspondiente a un vector de carga en particular.
STRESS	Calcula las deformaciones, esfuerzos y esfuerzos principales. Imprime los esfuerzos y esfuerzos principales en el centroide de los elementos.

TABLA B.4 LISTA DE SUBRUTINAS

TÉRMINO	DESCRIPCIÓN
AK	Matriz de rigidez ( montaje ).
ÁREA	Área del elemento triangular.
B	Matriz [ B ] para elementos cuadriláteros.
BODYF	Contribución de carga nodal de TBODY.
BT	Matriz [ B ] para elementos triangulares.
C	Matriz esfuerzo - deformación [ C ].
CB	Matriz resultante del producto [ C ][ B ].
CF	Factor común en el cálculo de la matriz [ C ] esfuerzo - deformación.
E	Módulo de elasticidad E. En STRESS, representa las deformaciones en el centroide de los elementos.
EL	Longitud del lado del elemento donde la tracción de la superficie es determinada.
FAC	Factor para promediar las deformaciones en un elemento.
IBAND	Ancho de la semibanda de las ecuaciones de ensamble; $IBAND \leq MAXBW$ .
IE( M, I )	Arreglo de identificación del elemento. M es el número de elemento, $1 \leq M \leq NEL$ . I = 1, 2, 3, 4 denota los nodos de las esquinas del elemento e I = 5 expresa el MTYP para el elemento.
ISC, JSC	Números de los nodos i y j para el lado en el cual la superficie de tracción es establecida.
ISTOP	Índice utilizado para contar el número de errores en los datos.
I, J, K, L	Índices para los cuatro nodos del cuadrilátero en QUAD.
I, J, K	Índices para los tres nodos del elemento triangular en CST.
KODE( I )	Índice de desplazamiento y condiciones de carga concentrada en el nodo I.

TABLA B.5 DESCRIPCIÓN DE NOMENCLATURA

TÉRMINO	DESCRIPCIÓN
KKK	En BANSOL, es el Índice que designa a la función a ejecutarse. Así, KKK = 1 para triangularización de rigidez y KKK = 2 para solución retrospectiva empleando rigidez triangularizada.
MAXBW	Máximo ancho de semibanda permitido.
MAXDOF	Número máximo de grados de libertad. $MAXDOF = 2 * MAXNP$ .
MAXEL	Número máximo de elementos.
MAXMAT	Número máximo de materiales admitidos.
MAXNP	Número máximo de nodos permitidos.
MAXSLC	Número máximo de superficies de tracción.
MDIM	Máximo ancho de banda. $MDIM = MAXBW$ .
MTYP	Número máximo aceptable de tipos de material. $1 \leq MTYP \leq NMAT$
NBODY	Opción para fuerzas del cuerpo. De aquí, NBODY = 0 para ningún peso; NBODY = 1 para fuerzas en la dirección negativa del eje Y.
NDIM	Número máximo de grados de libertad. $NDIM = MAXDOF$ .
NEL	Número de elementos. $NEL \leq MAXEL$ .
NEQ	Número total de ecuaciones. $NEQ = 2 * NNP \leq MAXDOF$ .
NMAT	Número de materiales diferentes. $1 \leq NMAT \leq MAXMAT$ .
NNP	Número de puntos nodales. $NNP \leq MAXNP$ .
NOLINE	En STRESS, es el Índice para limitar la salida a 50 líneas por página.
NOPT	Opción para esfuerzo y / o deformación plana. Si NOPT = 1, entonces es deformación plana; si NOPT= 2, entonces se trata de esfuerzo plano.
NSLC	Número de superficies de tracción. $NSLC \leq MAX \leq LC$ .
PR	Relación de Poisson v.
PXI, PXJ, PYI, PYJ	Contribución nodal de la superficie de tracción en dirección X y Y.

TABLA B.5 DESCRIPCIÓN DE NOMENCLATURA ( CONTINUACIÓN )

TÉRMINO	DESCRIPCIÓN
Q	Vector de carga del elemento cuadrilátero. En STRESS, es el vector de desplazamiento.
QK	Matriz de rigidez del elemento cuadrilátero.
R	Vector de carga del ensamble. También calcula desplazamientos para el ensamble en MAIN, BANSOL y STRESS.
RO	Densidad del material.
SIG	Arreglo para esfuerzos.
SURTRX, SURTY	Componentes en X y Y de tracción distribuidas prescritas.
TBODY	Peso total del elemento triangular.
TH	Espesor th.
TK	Matriz de rigidez del elemento triangular.
TOTALA	Área total del elemento cuadrilátero.
U	Desplazamiento determinado en la dirección X o Y en GEOMBC.
ULX <sub>i</sub> , ULY <sub>i</sub>	Carga concentrada o desplazamiento en las direcciones X y Y en el nodo i.
X(I), Y(I)	Coordenadas ( x , y ) del nodo i.
XQ, YQ	Coordenadas de los nodos de un elemento cuadrilátero o triangular. XQ( 5 ) y YQ( 5 ) son las coordenadas del centroide.

TABLA B.5 DESCRIPCIÓN DE NOMENCLATURA ( CONTINUACIÓN )

**APÉNDICE C ANÁLISIS BENEFICIO - COSTO  
DEL SOFTWARE DISEÑADO**

## APÉNDICE C. ANÁLISIS BENEFICIO - COSTO DEL SOFTWARE DISEÑADO

### Beneficios obtenidos al emplear el software diseñado ( Ahorros )

#### PRUEBA PILOTO

Diseño Preliminar	\$ 15 000
Material	\$ 150 000
Mano de obra	\$ 540 000
Equipo	\$ 200 000
Especificaciones de control de calidad	\$ 240 000
Especificaciones de fabricación y ensamble	\$ 150 000
Pruebas	\$ 200 000
Soldadura	\$ 300 000
<b>Σ BENEFICIOS</b>	<b>\$ 1 795 000 ≅ 1 800 000</b>

#### Costos del software diseñado

Equipo	\$ 8 000
Capacitación	\$ 3 000
Análisis	\$ 20 000
Diseño	\$ 15 000
Implantación	\$ 2 450
Sueldo del Ingeniero Mecánico ( * )	\$ 12 000
<b>Σ COSTOS</b>	<b>\$ 60 450 ≅ \$ 61 000</b>

\* El sueldo de un Ingeniero Mecánico es aproximadamente igual a \$ 6 000 por mes.

$$\text{RELACIÓN BENEFICIO - COSTO} = \frac{1,800,000}{61,000} = 29.51 \cong 30$$

Este análisis beneficio - costo reporta que los costos del software diseñado son mínimos comparados con los beneficios obtenidos, pues se está recuperando 30 veces lo que se invirtió. Nótese que este análisis se efectuó solamente para un diseño, pero claro está que en una fábrica se realizan miles de diseños; ésto significa que los costos del software se reducen prácticamente al sueldo del Ingeniero Mecánico, ya que no se tiene que invertir nuevamente en equipo, capacitación, análisis, diseño e implantación.

Por otra parte, resulta bastante costoso efectuar pruebas piloto para verificar si el diseño es el adecuado o no en cuanto valores de esfuerzos y desplazamientos en la estructura y si realmente ese diseño es el más económico, seguro y confiable; pero quizá lo más importante aquí sea el tiempo que todo ésto consume, junto con la incertidumbre de si el diseño es adecuado y correcto. Se dice que el tiempo es lo más importante porque afecta considerablemente los intereses del cliente, ya que normalmente a él únicamente le atañe que el producto se entregue lo antes posible.

Ahora, si este problema se soluciona con técnicas de simulación y aplicando el MEF sólo basta con contar con equipo de cómputo ( PC 80286 o superior y algunos dispositivos periféricos ), software diseñado y una capacitación sencilla para iniciar la verificación del diseño del producto. Se pueden llevar a cabo tantas corridas como sea necesario, hasta que se encuentre el diseño que resulte conveniente tanto técnica y como económicamente.

**APÉNDICE D. EJEMPLOS**

### APÉNDICE D. EJEMPLOS

Considérese el ejemplo de flexión pura en una placa como la de la figura D.1

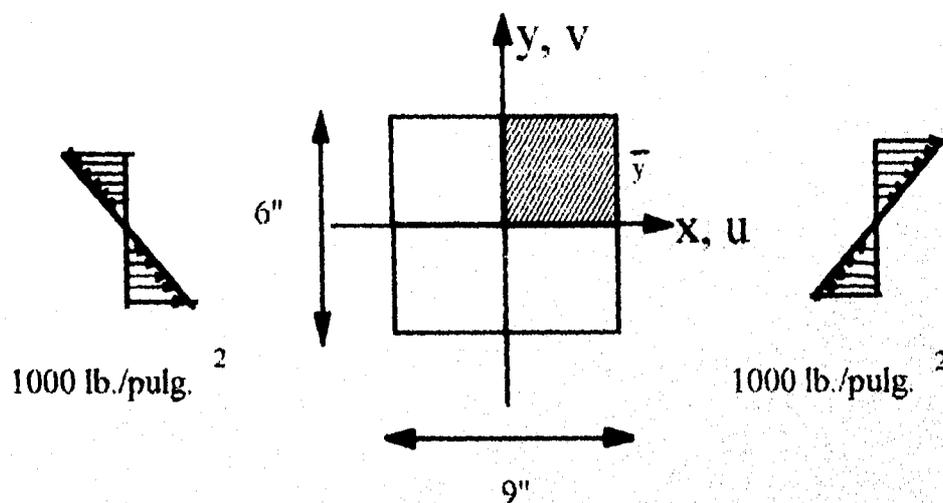


FIGURA D.1 EJEMPLO

La placa está sujeta a una distribución de esfuerzo flexionante con una intensidad máxima de 1000 lb. / pulg. <sup>2</sup>. Debido a la simetría y antisimetría respecto a los ejes X y Y ( isoparametrismo ), sólo el primer cuadrante de la placa es discretizado. Los lados OX y OY se restringen contra el movimiento horizontal.

En la figura D.2 se muestra el refinamiento de la malla para esta porción de la placa.

## APÉNDICE D. EJEMPLOS

Considérese el ejemplo de flexión pura en una placa como la de la figura D.1

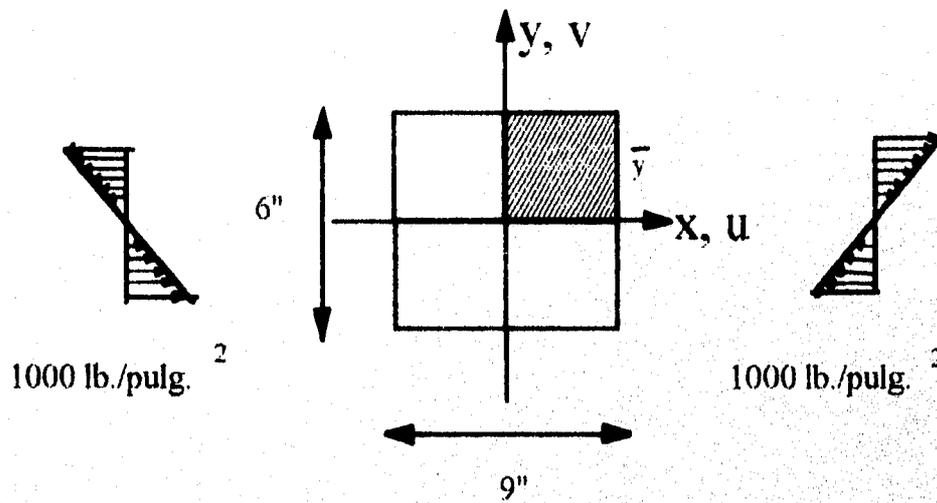


FIGURA D.1 EJEMPLO

La placa está sujeta a una distribución de esfuerzo flexionante con una intensidad máxima de 1000 lb. / pulg. <sup>2</sup>. Debido a la simetría y antisimetría respecto a los ejes X y Y ( isoparametrismo ), sólo el primer cuadrante de la placa es discretizado. Los lados OX y OY se restringen contra el movimiento horizontal.

En la figura D.2 se muestra el refinamiento de la malla para esta porción de la placa.

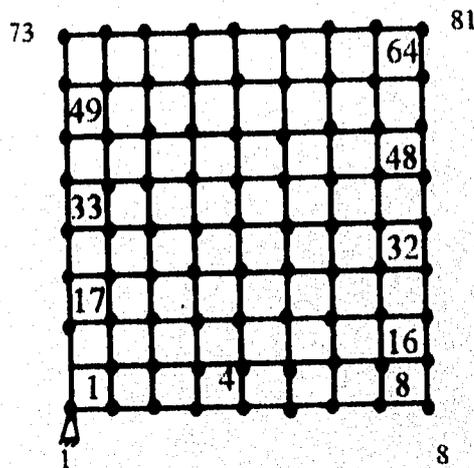
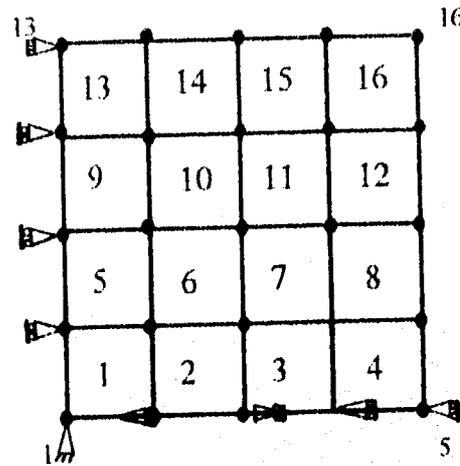
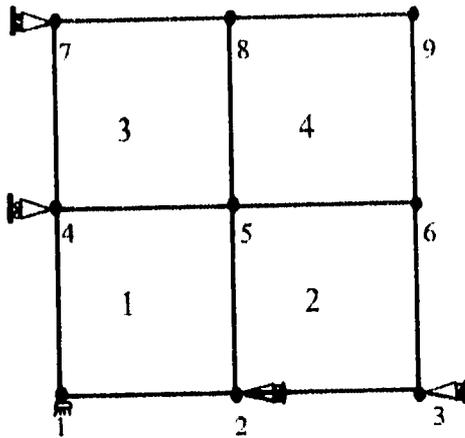


FIGURA D. 2 REFINAMIENTO DE LA MALLA

En la tabla D.1 se observa la solución por elementos finitos de acuerdo a cada división de la malla, éstos son muy aproximados a la solución exacta.

		P ( 4.5, 3 )		P ( 2.25, 1.5 )	
No. elementos	No. nodos	U	V	U	V
4	9	1.3614	- 1.1613	0.3483	- 0.2937
16	25	1.4551	- 1.2399	0.3680	- 0.3123
64	81	1.4862	- 1.2646	0.3732	- 0.3171
Por resistencia de materiales		1.5	- 1.2750	0.3750	- 0.3188

\*\*\* Los desplazamientos están en  $10^{-4}$  pulgadas.

TABLA D.1 SOLUCIONES APROXIMADAS

Se advierte que a medida que la malla es más refinada, la solución calculada va mejorando. La solución exacta se consigue mediante las fórmulas :

$$U = \frac{F}{Ey} xy$$

$$V = -\frac{F}{2Ey} (x^2 + y^2)$$

Con las siguientes condiciones del material :

$$E = 30 \times 10^6 \text{ lb./pulg.}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$h = 1 \text{ pulg. ( espesor )}$$

Otra característica de la discretización que afecta a una solución por elementos finitos es la razón de aspecto de los elementos, ésta describe la forma del elemento en el ensamble.

Para elementos bidimensionales, este parámetro se define como la razón de la dimensión más larga entre la dimensión más corta. La razón de aspecto más óptima en cualquier lugar dentro de la malla depende grandemente de la diferencia en la razón de cambio de desplazamientos en diferentes direcciones. Una razón de aspecto cercana a la unidad mejora la calidad de la solución.

Para ilustrar esto, obsérvese la figura D.3

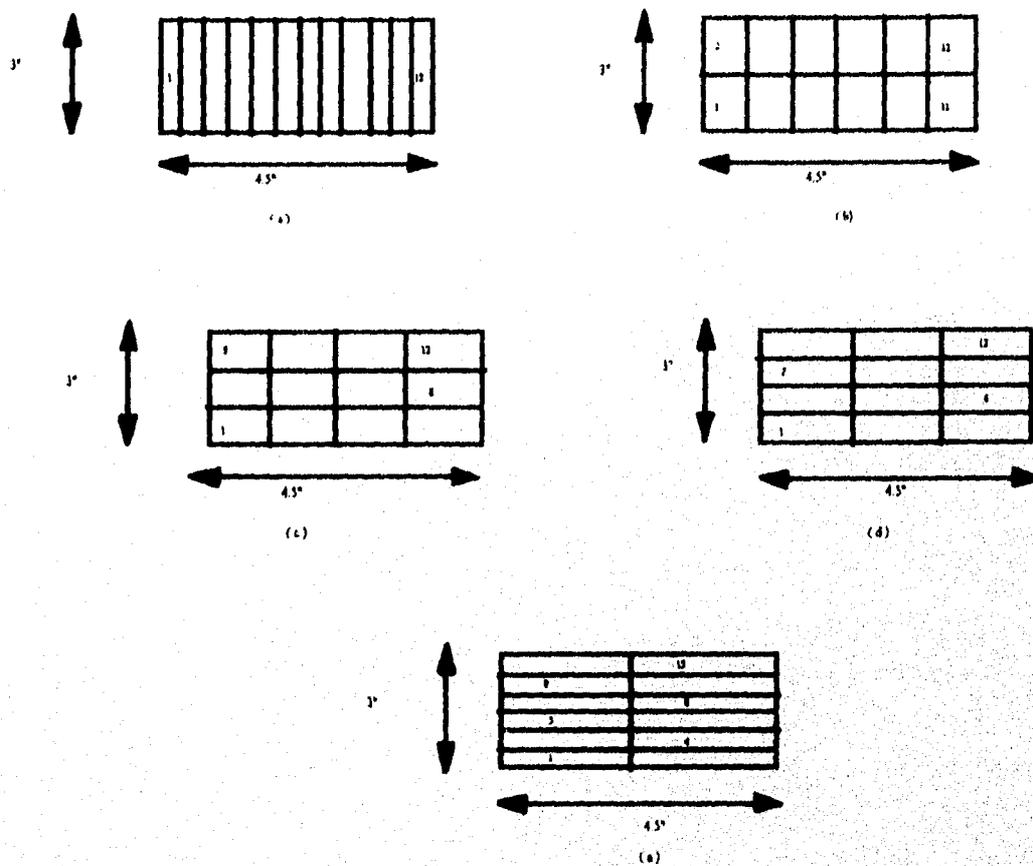


FIGURA D.3 DIFERENTES MALLAS CON ELEMENTOS RECTANGULARES

Se aprecia que las cinco mallas tienen doce elementos. En la tabla D.2 se comparan las cinco soluciones obtenidas con las respectivas mallas y la solución calculada por fórmula.

Caso	Razón de aspecto	No. elementos	No. nodos	P (4.5, 3)		P (4.5, 0)	
				U	V	U	V
a	8	12	26	1.2966	-1.1021	0	-0.9724
b	2	12	21	1.4422	-1.2272	0	-1.0910
c	1.125	12	20	1.4529	-1.2375	0	-1.0989
d	2	12	20	1.4276	-1.2182	0	-1.0835
e	4.5	12	21	1.3542	-1.1598	0	-1.0333
Exacta				1.5000	-1.2750	0	-1.1250

\*\*\* Los desplazamientos están en  $10^{-4}$  pulgadas.

TABLA D.2 SOLUCIONES APROXIMADAS CON DIFERENTES MALLAS

En la figura D.4 se contempla una gráfica de la solución con fórmula contra los resultados de la tabla D.2 en el punto P (4.5, 3). Es claro que mientras la razón de aspecto esté más cercana de la unidad, más se aproxima a la solución exacta.

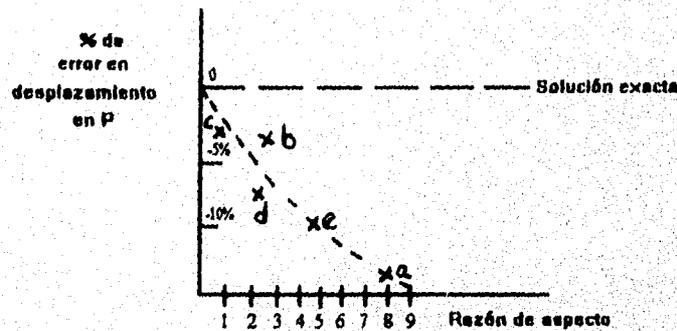


FIGURA D.4 GRÁFICA DE SOLUCIONES

**BIBLIOGRAFIA**

## BIBLIOGRAFÍA

ARGYNS, J. H.

Computer Aided Structural Analysis

Edit. ASKA

2a. ed.; Dinamarca, 1990

297 pág.

AYRES, Frank

Differential Equations

Edit. Schaum's Outline Series

6a. ed.; Estados Unidos de América, 1993

890 pág.

BAULFOR A. y Beveridge W.

Análisis Numérico Básico

Edit. C.E.C.S.A.

6a. ed.; España, 1991

1090 pág.

BARAN

Finite Element Method on Microcomputer

Edit. Prentice Hall

Estados Unidos de América, 1990

435 pág.

BECKENBACH, E. F.

Modern Mathematics for the Engineer

Edit. Mc Graw Hill

Estados Unidos de América, 1994

605 pág.

BREBBRA, C.

Finite Element Techniques in Structural Mechanics

Edit. Southampton

Inglaterra, 1995

405 pág.

CARNAHAN, B. Luther y Wilkes J.

Applied Numerical Methods

Edit. John Wiley & sons

7a. ed.; Estados Unidos de América, 1994

876 pág.

CLOUGH, R. W.

The Finite Element Method in Plane Stress Analysis

Edit. ASCE

5a. ed.; Estados Unidos de América, 1995

283 pág.

COSS, Raúl

Simulación. Un Enfoque Práctico

Edit. Limusa

5a. ed.; México, 1990

130 pág.

DAHLQUIST G.

Numerical Methods

Edit. Prentice Hall

4a. ed.; Estados Unidos de América, 1993

790 pág.

DESAI, Chandrakaut y Abel John

Introduction to the Finite Element Method

Edit. Van Nostrand Reinhold Company

9a. ed.; Suecia, 1995

578 pág.

FELIPPA, C. A.

The Finite Element Method in Solid Mechanics

Edit. American Mathematical Society

8a. ed.; Inglaterra, 1994

319 pág.

FORSYTHE, G.

Computer Solution of Linear Algebraic Systems

Edit. Prentice Hall

Estados Unidos de América, 1989

195 pág.

FORSYTHE, G.

Finite Difference for Partial Differential Equations

Edit. John Wiley and Sons

Estados Unidos de América, 1993

270 pág.

FOX, L.

Computing Methods for Scientists and Engineers

Edit. Oxford University Press

2a. ed.; Inglaterra, 1992

401 pág.

GALLAGHER, R. H.

Finite Element Analysis : Fundamentals

Edit. Prentice Hall

4a. ed.; Estados Unidos de América, 1991

432 pág.

GERE, J. M.

Matrix Algebra for Engineers

Edit. Van Nostrand Reinhold Company

5a. ed.; Suecia, 1994

373 pág.

HALL, Holowenko y Laughlin

Diseño de Máquinas

Edit. Mc Graw Hill

3a. ed.; México, 1989

489 pág.

HILDEBRAND, F. B.

Methods of Applied Mathematics

Edit. Englewood Cliffs

Estados Unidos de América, 1989

499 pág.

HOLAND, I.

The Finite Element Method in Stress Analysis

Edit. Trondheim

2a. ed.; Noruega, 1995

402 pág.

IRONS, B M.

Numerical Integration Applied to Finite Element Method

Edit. AIAAJ

Alemania, 1993

520 pág.

JAMES y Wolford

Métodos Numéricos Aplicados

Edit. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A.

2a. ed.; México, 1992

400 pág.

JENSEN, H. G. and Parks G.

Efficient Solutions for Linear Matrix Equations

Edit. ASCE

2a. ed.; Estados Unidos de América, 1996

188 pág.

LUTHE, Rodolfo

Análisis Estructural

Edit. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A.

12a. ed.; España, 1994

694 pág.

MARCAL, P. U.

Finite Element Analysis Theory and Practice

Edit. University of Alabama

2a. ed.; Estados Unidos de América, 1990

434 pág.

MARTIN, H. C.

Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method

Edit. Trend Eng.

5a. ed.; Estados Unidos de América, 1995

316 pág.

MASE, George

Continuum Mechanics

Edit. Schaum's outline series

3a. ed.; Estados Unidos de América, 1989

1091 pág.

MC LEAN y Nelson

Engineering Mechanics

Edit. Schaum publishing Co.

2a. ed.; Estados de América, 1988

405 pág.

MIKHLIN, G. S.

Approximate Methods for the Solutions of Differential and Integral Equations

Edit. Elsevier

Dinamarca, 1994

277 pág.

ODEN, J. T

Finite Elements of Non - Linear Continua

Edit. Mc Graw Hill

Estados Unidos de américa, 1992

382 pág.

POPOV, E. P.

Introduction to Mechanics of Solids

Edit. Englewood Cliffs

3a. ed.; Estados Unidos de América, 1995

389 pág.

RAINVILLE, Earl

Ecuaciones Diferenciales Elementales

Edit. Trillas

7a. ed.; México, 1990

628 pág.

SCHECHTER, R.S.

The Variational Method in Engineering

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; Estados Unidos de América, 1994

253 pág.

SEELY y Ensign

Mecánica Analítica para Ingenieros

Edit. U.T.E.H.A.

12a. ed.; México, 1993

458 pág.

SEELY y Smith

Resistencia de Materiales

Edit. U.T.E.H.A.

13a. ed.; México, 1994

670 pág.

SHIGLEY, Joseph y Mitchell, Larry

Manual de Diseño Mecánico Vol. I

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; España, 1990

230 pág.

SHIGLEY, Joseph y Mitchell, Larry

Manual de Diseño Mecánico Vol. II

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; España, 1990

230 pág.

SHIGLEY, Joseph y Mitchell, Larry

Manual de Diseño Mecánico Vol. III

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; España, 1990

230 pág.

SHIGLEY, Joseph y Mitchell, Larry

Manual de Diseño Mecánico Vol. IV

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; España, 1990

230 pág.

SPIEGEL, M.

Vector Analysis

Edit. Schaum publishing Co.

5a. ed.; Estados Unidos de América, 1991

867 pág.

TADAY, Y. y Lee, G.

Finite Element Solution to an Elastic Problem os Beams

Edit. Methods Eng.

12a. ed.; Estados Unidos de América, 1993

217 pág.

TARG, I. C.

Structural Analysis by the Matrix Displacement Method

Edit. English Electric Aviation Rept

Estados Unidos de américa, 1988

179 pág.

TAYLOR, George

Ingeniería Económica

Edit. Limusa

México, 1991

640 pág.

TIMOSHENKO S.

Resistencia de Materiales Tomo I

Edit. Espasa-Calpe S. A.

2a. ed.; España, 1994

594 pág.

TUMA y Munshi

Análisis Estructural Avanzado

Edit. Mc Graw Hill

5a ed.; México, 1992

795 pág.

ZIENKIEWICZ, O.

The finite element method in engineering science

Edit. Mc Graw Hill

4a. ed.; Estados Unidos de América, 1994

650 pág.