01087

dej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA

PROCESOS DE CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO EN EL PRIMER AÑO DE LA PREPARATORIA. ALGUNAS ALTERNATIVAS PARA SU DESARROLLO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN PEDAGOGIA

P R E S E N T A :

HECTOR ALBERTO GARCIA ROMERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL ANGEL CAMPOS HERNANDEZ

MEXICO, D. F. 1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL PRIMER AÑO DE LA PREPARATORIA. ALGUNAS ALTERNATIVAS PARA SU DESARROLLO.

Héctor Alberto García Romero

RESUMEN

Se parte de la consideración de las Matemáticas como el estudio de las estructuras y la aplicación lógica de la razón humana, así como también la articulación de un cuerpo de conocimientos e información. Se discuten los problemas asociados a la ineficacia de los métodos de enseñanza tradicionales y deficiencias en el aprendizaje escolar. Se presenta una evaluación del estado actual de conocimientos en dominios de la didáctica del álgebra. El marco teórico seleccionado incorpora modelos del aprendizaje cognitivo y del procesamiento humano de la información. A partir de un análisis estructural del aprendizaje se discute la forma en que ciertos procesos cognitivos se presentan durante el desarrollo de algunos productos notables y su respectiva factorización algebraica. Dicho análisis se realizó con el propósito de cualificar el nivel de demanda cognitiva de la tarea y por ende, su complejidad. De este modo, el estudio lógico y psicológico quedó establecido. Éste último resultó del descubrimiento de ciertos procesos cognitivos presentes al momento de ejecutar la tarea. Separadamente, se diseñó una serie de tareas que fueron experimentadas con dos poblaciones diferentes de alumnos de bachillerato. Los instrumentos de análisis presentan la información proporcionada por los alumnos considerando tanto el conocimiento declarativo como el procedural. Se rastrearon los caminos seguidos por los alumnos detectando estrategias, secuencias de acciones, obstáculos cognitivos y tiempos de ejecución. De este modo, se hace la diferencia entre alumnos expertos, medios y novatos. Se explica el acceso al conocimiento mediante la ejecución de sub-procesos y encadenamientos nucleares; la evolución conceptual, por medio de equilibraciones y adaptaciones a nuevas situaciones. Finalmente, se proponen estrategias didácticas para la generación de zonas de desarrollo próximo para el enriquecimiento instrumental de habilidades y procesos cognitivos basados en la estructura global del conocimiento y el flujo dinámico de la información.

PROCESS OF CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE IN THE FIRST GRADE OF HIGH SCHOOL. SOME ALTERNATIVES FOR ITS DEVELOPMENT.

Héctor Alberto García Romero

ABSTRACT

Mathematics is considered the study of structures and the application of logical human reasoning and also as an entirety of knowledge and information. Several problems related to inadequancy of traditional teaching practices and very poor assessment of student's work are presented as well as the actual knowledge in the mastering of the didactics of Algebra. The selected theoretical frame includes cognitive learning models and human's information processes theory. Beginning with a structural learning analyse, the role, notation and formation of cognitive entities and processes during the growth of some special products and factoring are discussed. This analysis was done for cualifying the cognitive task demand level and so, its complexity degree. In this way, psychological and cognitive characteristics of the task were established. The research into the organization of mathematical content at an advanced level shows some cognitive processes during the task execution. Separately, a series of activities were designed and experimented with two different groups of students from different high schools. The instruments of analysis have shown all objects, processes and schemas concerning various kinds of construction in student's thinking. Declarative and procedural knowledges are involved. Strategies, actions sequences, cognitive obstacles and execution records were organized in several processes followed by representation. Significative differences between elementary (novices) and advanced (experts) mathematical thinking are exposed. Knowing access situation is being explained by the way of sub-processes execution system and nuclear linkings; conceptual evolution, for equilibria and adaptations to new situations. Finally, pedagogical strategies are proposed for generating proximal developmental zones to increase instrumental skills and cognitive processes based on global mathematical thinking and dynamic task development information.

à Roselyne †
ma chère amie

"Le premier oblateur: Agni, regardez-le!
Il est chez les mortels la lumière immortelle!
Fidèle, il vient de naître, il habite chez nous;
lui, l'immortel, il croît grâce à son être propre.

Lumière fidèle, instalée pour qu'on voie:
c'est la pensée, c'est le plus vite des oiseaux!
Et tous les dieux, à l'unisson, d'un même cœur,
s'en viennent à bon droit vers ce pouvoir unique?

Au loin s'envole mon ouïe, au loin ma vue,
au loin cette lumière installée dans mon cœur,
et ma pensée aux intuitions qui portent loin;
que vais-je dire? oui, que vais-je découvrir?"

Rig-Veda, 6, 9, 4-6

A mis padres, Gilberto García y Lilia Romero:
hermanos, sobrinos y demás familiares

por su gran apoyo, cariño, comprensión y estímulo
para ver realizados mis sueños e ilusiones.

A mis profesores:

Miguel Ángel Campos,

por su compromiso, dedicación, aprecio y voluntad de compartir sus conocimientos y experiencias en beneficio de nuestros alumnos;

Sandra Castañeda,

por participarme los secretos de la cognición, motivarme en el camino del éxito y también por su gran energía e imaginería;

Ricardo Sánchez,

por su consejos, recomendaciones metodológicas, refuerzos en la búsqueda del conocimiento y por sus valiosos saberes.

A:

Jesús Aguirre C., Armando Martínez C., Sara Rosa Medina, Ángel Díaz Barriga, y Enrique Ruíz Velasco,

por haberme dado la oportunidad de participar con ellos durante mi formación académica y haber sugerido las correcciones pertinentes a la presente.

A mis amigos y compañeros.

Maricela Martínez
Julio César Castañeda y Magali Bernal
Carlos Soto y Alma Parra
Alejandro Olguín y Verónica Loza
Caro Cosío y Jorge Ortega
Nora Hernández
Carlos Lázaro

Ma. de la Luz Veites
Rogelio Romo
Lourdes Olavarría

Loreto Cruz
Gaby Riquelme
Alejandro Latorre
Héctor Ongay
Maricela Álvarez
Lilia Sánchez

Rita Vergara

por su valiosa estima,
gran capacidad de ver lo hermoso
de la vida y más aún, por su ***Amistad.***

A mis alumnos.

Graciela Carmona y Rogelio Esteban
Gaby Gálvez y Francisco Calleja
Pablo Ortíz y Adriana Valencia
Gonzalo López
Oscar Yasser Noriega
Blanca Porras
Guillermo Zamora
Jacqueline Lozano
Mario Martínez
Lorena Evelia García
Froylan Isabel
Daniel Bastida
Lucía Castrejón
José Carlos Rodríguez
Francisco Durán
Carla Sánchez
Raúl Bernal

y muy especialmente a todos aquellos alumnos que de una manera u otra participaron en la realización de este proyecto.

Gracias por su entrega.

Indice

PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN EL PRIMER AÑO DE LA PREPARATORIA.
ALGUNAS ALTERNATIVAS PARA SU DESARROLLO

INDICE

Introducción

INTRODUCCIÓN

La creciente preocupación y necesidad de disponer de una teoría sobre el aprendizaje cognoscitivo que explique los procesos de construcción del conocimiento y sirva de guía para el proceder didáctico según una metodología investigativa en la que diversos supuestos hipotéticos puedan confrontarse y corregirse con los datos aportados por la evaluación del aprendizaje, ha generado en el mundo entero una amplia investigación sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos.

El conductismo se ha mostrado incapaz de dar respuesta satisfactoria. Como se sabe, el núcleo central de esta teoría descansa en dos principios fundamentales: por un lado el asociacionismo, supuesto de corte empirista ya que mantiene la tesis de que los conceptos complejos provienen por asociación de impresiones e ideas simples, y por el otro, en el de correspondencia lineal entre la estructura de dicho conocimiento y de la realidad.

Como alternativa al asociacionismo, en el terreno de la psicología, al empirismo y positivismo en el de la filosofía de la ciencia, surge un amplio movimiento que defiende la tesis de que el conocimiento es el resultado de un proceso de construcción incesante tanto a nivel individual como colectivo. Tal movimiento recibe genéricamente la denominación de *constructivismo.*

La obra de los postulados epistemológicos de la ciencia ha puesto de relieve que la construcción de las teorías científicas, lejos de obedecer a las reglas lógicas o cualquier otro tipo de algoritmos, es un proceso abierto, lleno de bifurcaciones y alternativas de evolución, en el cuál influyen tanto factores de carácter racional (Popper, 1959; Toulmin, 1972 y Lakatos, 1978) como irracional (Kuhn, 1962). Siendo ello así, nociones como objetividad y verdad absolutas, tan apasionadamente defendidas por el empirismo y el positivismo, quedan relativizadas; en realidad, son cualidades atribuidas en función de los criterios de la comunidad científica de una época determinada, criterios que, como los conceptos, van evolucionando.

En el campo de la psicología se produce también una evolución paralela. Dentro de la psicología cognitiva aparecen diversas corrientes constructivistas que postulan la existencia, además de procesos de asociación de ideas simples para dar lugar a ideas más complejas, de procesos de reestructuración conceptuales en forma tal que generan un conocimiento no reducible a la experiencia y que no es mero reflejo de la estructura de la realidad. Así puedo decir que, al contrario que el de asociación, el fenómeno de la reestructuración es de carácter no rectilíneo[1].

Así pues, existe un nuevo consenso emergente (Novak, 1988): el constructivismo, que afecta a distintas áreas del conocimiento: psicología, epistemología y filosofía de la ciencia.

---

[1] Para tener una idea más amplia ésta noción la relaciono a la no linealidad o secuencialidad de una estructura, es decir a su carácter reticular (Marcombo, 1987.p.39).

El trabajo que aquí presento se enmarca en esta corriente constructivista. En los últimos años han aparecido dentro de la misma diversos modelos de aprendizaje conceptual que intentan dar cuenta de la resistencia que ofrecen al cambio los denominados preconceptos, ideas alternativas, ideas espontáneas, errores conceptuales, conceptos previos... etc. Sin embargo, a mi juicio, no se ha logrado un modelo lo suficientemente articulado que, además de ofrecer una explicación de la resistencia al cambio de los conceptos previos y de los factores que influyen en el mismo, dé cuenta de cómo tiene lugar la evolución conceptual de las personas, del porqué los conceptos se organizan en jerarquías conceptuales y de la impredicibilidad del aprendizaje conceptual.

Del mismo modo que el avance de la ciencia normal y de fases de cambio, la evolución conceptual de las personas transitaría por fases de asimilación (los nuevos fenómenos pueden ser explicados por la estructura conceptual existente) y por fases de acomodación (cuando la estructura conceptual se muestra inadecuada para explicar los fenómenos satisfactoriamente, requiriendo, entonces, una reestructuración conceptual). En mi opinión, tal operación resulta metodológicamente incoherente por cuanto, en el caso de la evolución de las teorías científicas el contexto de su desarrollo es el de una comunidad científica, mientras que en el del aprendizaje de conceptos ocurre a título individual, aunque, desde luego, no hayan de desdeñarse los aspectos comunales e interactivos en el seno del aula. Igualmente, estimo que no se justifica adecuadamente la existencia de una pauta dinámica común entre ambos hechos evolutivos.

Está claro que la concepción constructivista no sirve igual para todo lo que configura un centro escolar ni para todas las tareas que tiene encomendadas un profesor. Su utilidad reside, a mi parecer, en que permite la formulación de determinadas preguntas nucleares para la educación ya que admite contestarlas desde un marco explicativo articulado y coherente. Además ofrece criterios para abundar en las respuestas que requieren informaciones más específicas. Pero la concepción constructivista es útil por algo más. Por un lado, se explicita y contribuye así al ejercicio de contraste con las "teorías" de los profesores, y por el otro, porque no es un marco excluyente, sino abierto, en la medida en que debe profundizar todavía mucho en sus propios postulados, y en la medida en que necesita enriquecerse, en general y para cada situación educativa concreta, con aportaciones de otras disciplinas. Es una aproximación optimista, si se me permite, ya que es parte de lo que se posee y entiende.

El modelo teórico de aprendizaje que deseo realizar pretenderá explicar fenómenos que otros modelos soslayan y servir como marco de referencia para futuras investigaciones. Esta investigación es de corte teórico-experimental con un acercamiento cognitivo.

La investigación está dividida en siete capítulos. Los tres primeros constituyen la indagación misma del problema de investigación y del estado actual del conocimiento, mientras que los capítulos cuatro, cinco y seis conforman todas aquellas actividades de sistematización, experimentación, presentación y análisis de resultados que llevé a cabo. La última fase la representan las alternativas de desarrollo del conocimiento matemático en el primer año de la preparatoria.

La fundamentación teórica la oriento, en una primera instancia, a algunas teorías cognitivas del aprendizaje como de la Didáctica de la Matemática en sí misma. En el capítulo 1, analizo y reconozco las teorías existentes desde una postura teórica e identificando. enseguida, las bases sobre las que se pueda construir la Didáctica de las Matemáticas como una ciencia estable.

En el capítulo 2 parto del objeto propio a la Didáctica del Álgebra, estudio sus antecedentes y pongo a la luz el trabajo mexicano. Esto posibilitará la construcción de una secuencia de aprendizaje que refleje los logros de la investigación teórica y contemple el grado de avance del estado actual del conocimiento. Metodológicamente utilizo entrevistas individuales para analizar las dificultades conceptuales y procedimentales, a través de las cuales, los alumnos tratan una situación determinada. En el mismo capítulo 2, diseño y planeo el experimento. El tema de la tarea organizadora adquiere características propias cuando se aborda desde el campo del álgebra simbólica que se han enfocado al registro y reporte de las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando se les solicita resolver la tarea mismas que organicé en el capítulo 4.

Para el diseño experimental recopilo y clasifico la información que me parece fiable, con fines de integrar los conocimientos sobre el tema, para obtener conclusiones generales a partir de resultados parciales. Desarrollo también una descripción del estado de resolución del problema (capítulo 3), señalando aspectos pendientes de mi investigación y planteo nuevos problemas de investigación relacionados al mío. Aquí hago un análisis exhaustivo de los niveles de demanda de los problemas algebraicos planteados. Desarrollo modelos estructurales de aprendizaje que vinculan un contenido específico y una habilidad cognitiva determinada. Agrego un apartado sobre los conocimientos previos que los individuos deben poseer para acceder correctamente al nuevo conocimiento. En el capítulo 4, describo precisamente cómo diseñé los instrumentos de investigación, mientras que en el capítulo 5, hago una presentación completa de los resultados obtenidos en la experimentación. Al mismo tiempo consideré el ir interpretándolos. La estrategia que seguí es la de presentar un resultado e interpretarlo inmediatamente después ya que de lo contrario perdería la riqueza que la ocasión merece.

A partir de la interpretación del método y estrategias de resolución de las tareas organizadoras empleados por los sujetos, desprendo conjeturas consistentes en la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar "lo representado", es decir. en el caso de los Productos Notables y la Factorización Algebraica, operar las variables (capítulo 6).

En el capítulo 7 y último. planteo la necesidad de contar con un conocimiento bien estructurado como objetivo de la enseñanza, y además, propongo la creación de zonas de desarrollo próximo para asistir en la enseñanza de las matemáticas como una ayuda ajustada.

La fundamentación teórica la oriento, en una primera instancia, a algunas teorías cognitivas del aprendizaje como de la Didáctica de la Matemática en sí misma. En el capítulo 1, analizo y reconozco las teorías existentes desde una postura teórica e identificando, enseguida, las bases sobre las que se pueda construir la Didáctica de las Matemáticas como una ciencia estable.

En el capítulo 2 parto del objeto propio a la Didáctica del Álgebra, estudio sus antecedentes y pongo a la luz el trabajo mexicano. Esto posibilitará la construcción de una secuencia de aprendizaje que refleje los logros de la investigación teórica y contemple el grado de avance del estado actual del conocimiento. Metodológicamente utilizo entrevistas individuales para analizar las dificultades conceptuales y procedimentales, a través de las cuales, los alumnos tratan una situación determinada. En el mismo capítulo 2, diseño y planeo el experimento. El tema de la tarea organizadora adquiere características propias cuando se aborda desde el campo del álgebra simbólica que se han enfocado al registro y reporte de las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando se les solicita resolver la tarea mismas que organicé en el capítulo 4.

Para el diseño experimental recopilo y clasifico la información que me parece fiable, con fines de integrar los conocimientos sobre el tema, para obtener conclusiones generales a partir de resultados parciales. Desarrollo también una descripción del estado de resolución del problema (capítulo 3), señalando aspectos pendientes de mi investigación y planteo nuevos problemas de investigación relacionados al mío. Aquí hago un análisis exhaustivo de los niveles de demanda de los problemas algebraicos planteados. Desarrollo modelos estructurales de aprendizaje que vinculan un contenido específico y una habilidad cognitiva determinada. Agrego un apartado sobre los conocimientos previos que los individuos deben poseer para acceder correctamente al nuevo conocimiento. En el capítulo 4, describo precisamente cómo diseñé los instrumentos de investigación, mientras que en el capítulo 5, hago una presentación completa de los resultados obtenidos en la experimentación. Al mismo tiempo consideré el ir interpretándolos. La estrategia que seguí es la de presentar un resultado e interpretarlo inmediatamente después ya que de lo contrario perdería la riqueza que la ocasión merece.

A partir de la interpretación del método y estrategias de resolución de las tareas organizadoras empleados por los sujetos, desprendo conjeturas consistentes en la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar "lo representado", es decir, en el caso de los Productos Notables y la Factorización Algebraica, operar las variables (capítulo 6).

En el capítulo 7 y último, planteo la necesidad de contar con un conocimiento bien estructurado como objetivo de la enseñanza, y además, propongo la creación de zonas de desarrollo próximo para asistir en la enseñanza de las matemáticas como una ayuda ajustada.

Capítulo

1

La Construcción del Conocimiento

1. *LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO*

JUSTIFICACIÓN

Las matemáticas gozan de aplicación muy extendida. Están compuestas por conceptos y generalizaciones cuantitativas con sus respectivas propiedades y relaciones así como de un modo de razonamiento lógico propio. A semejanza del lenguaje verbal del hombre, consisten en formas simbólicas arbitrarias dotadas de reglas de construcción e interpretación, organizadas en sistemas lógicos que permiten al ser humano pensar, utilizar y comunicar ideas cuantitativas y sus interrelaciones con un alto grado de precisión.

Las matemáticas, que pueden considerarse principalmente como un estudio de la estructura y una aplicación lógica de la razón humana, es también un cuerpo de conocimientos e información. Su contenido es el fruto de un método basado en la postulación y la deducción, especialmente útil en las ciencias físicas y sociales, y que interviene directamente en la mayoría de los caminos de la aventura humana. Si bien este contenido no es ni absoluto ni incontrovertible, proporciona la sustancia del pensamiento matemático. Así, la matemática actual se relaciona con el estudio de la estructura, la creación de sistemas de ideas, la búsqueda de la generalización por medio de la razón y la lógica, y la abstracción sistemática del contenido. Es parte del reino de lo simbólico.

PROBLEMÁTICA

Entre las preocupaciones de la investigación educativa, dos problemas merecen atención: por un lado, la ineficacia de los métodos de enseñanza utilizados actualmente junto con todos los componentes teóricos asociados a ellos, ineficacia que puede comprobarse por el exceso de alumnos reprobados, el gran número de deserciones y la deficiencia académica con que llegan los alumnos a las escuelas de educación superior; por otro lado, el poco interés por el tipo de contenido cultural y matemático que se enseña, y que se registra por indicadores como la ineficacia académica de los estudiantes y la incapacidad de las personas de mayor nivel cultural para aplicar sus conocimientos de manera concreta y efectiva, como el caso de aquellos ingenieros que han olvidado el álgebra elemental. Ya que el conocimiento de la ciencia y la cultura favorece en el hombre la formación de una conciencia crítica y una inteligencia no-dependiente.

Iniciar una investigación seria sobre cualquier asunto representa una tarea cuyos alcances no son sencillos de predecir y cuyas dificultades son imposibles de prever. Normalmente el investigador se encuentra con información desordenada e incoherente, en situaciones en apariencia sin relación alguna con fenómenos sobre los cuales se ignora todo o se guarda una opinión errónea y llena de prejuicios; pero particularmente las dificultades son mayores, si en la investigación no se cuenta con un aparato teórico adecuado. Si nos centramos en un tema de investigación en particular como el análisis del aprendizaje cognitivo, vemos que se requieren conocer ciertas habilidades: las que posee el alumno, las que son necesarias para aprender un contenido particular, así como también, el desarrollarlas.

1. LO QUE BUSCAMOS

En lo que a nosotros respecta, pretendemos hacer un análisis estructural del aprendizaje, con el propósito de discutir la forma en que ciertos procesos cognitivos se presentan y son aprovechados por los alumnos, durante el desarrollo y adquisición de algunos contenidos matemáticos en el nivel de enseñanza medio superior. Con ello propondremos un modelo teórico del aprendizaje cognitivo que se base en los procesos de construcción del aparato cognitivo y contemple la interacción entre la adquisición de conocimiento y el desarrollo de habilidades.

Para ello es indispensable revisar la literatura existente en cuanto a las habilidades del estudiante, procesos de construcción del conocimiento que constituyen articulaciones dinámicas de información como los datos, conceptos y proposiciones complejas que a su vez se estructuran por medio de relaciones de carácter lógico como la clasificación, jerarquización o secuenciación; y ciertos modelos de aprendizaje y procesos cognitivos puestos en juego durante la resolución de problemas.

En el modelo de aprendizaje cognitivo de Case (1978, 1980) ya se integran los elementos del modelo piagetiano y del procesamiento de información concernientes a ciertas habilidades intelectuales. Partiremos de sus afirmaciones conjuntándolas a aquellas expuestas en el modelo de aprendizaje jerárquico de Gagné (1962) para establecer las siguientes premisas que den inicio a nuestra investigación.

1) Una vez que el individuo desarrolla ciertas habilidades intelectuales, al utilizarlas las incorpora a otras más complejas (estructuras) por el simple hecho de utilizarlas.

2) El manejo de nueva información ante nuevas experiencias requiere de una "cierta capacidad de memoria de trabajo" en un nivel de desarrollo.

3) El "requerimiento previo" especifica una jerarquía de aprendizaje. Un análisis de protocolos provee una jerarquía de tareas señalando cuáles destrezas deben adquirirse antes de otras.

4) El carácter mediador de un "proceso requerido" facilita la estrategia y generación de habilidades algebraicas en una situación de aprendizaje dada.

Nuestras herramientas y métodos para el logro de lo buscado

Para producir la adquisición del proceso tendremos que diagnosticar, por una parte, las categorías que utiliza un sujeto en una situación dada mediante un "análisis estructural" de acuerdo al tipo de actividad requerida y, por otro lado, determinar una serie de actividades que faciliten el uso de estrategias mejores, de manera que el individuo utilice su capacidad de memoria de trabajo eficientemente.

El modelo que resulte de nuestras consideraciones anteriores, permitirá: a) establecer relaciones específicas entre procesos de acuerdo a contenidos específicos, b) agregar elementos fundamentales de la teoría cognitiva y del procesamiento de la información (Wagner y Sternberg, 1984), c) anexar modelos de aprendizaje cognitivo como los de Gagné (1962, 1978), d) añadir algunos planteamientos neopiagetianos replanteando algunas de sus nociones en sentido más amplio (Campos y Gaspar, 1989) y e), integrar ideas sobre la resolución de problemas tanto a nivel algorítmico como de interpretación (Campos, 1988b y 1990; Castañeda y López, 1988).

2. ALGO ACERCA DEL PENSAMIENTO

Paradigma de la Cognición

Después de un prolongado dominio del conductismo, se produjo el cambio en el "paradigma". Kuhn (1962), considera a éstos como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica. Este cambio, en las ciencias del pensamiento, con frecuencia se conoce como *revolución cognitiva*. A pesar de que la definición resulta exagerada, no se puede objetar en contra de que en las décadas de los sesenta y setenta comenzó a desarrollarse, intensamente, la psicología, y la ciencia de la cognición. En ellas el hombre es considerado como un sistema independiente que *procesa la información*. Se supone que en la regulación de la conducta desempeñan un papel principal las *estructuras cognoscitivas* y los *procesos intelectuales superiores*. Se subraya la importancia de la conciencia en la vida del individuo. Hablando más claramente, se puede decir que los "cognoscitivistas" ante todo investigan el pensamiento del hombre.

Doble naturaleza del pensamiento

El análisis comparativo de la conducta de las personas que vivieron en diferentes épocas históricas, confirma la hipótesis de que, en principio, la estructura del pensamiento humano permanece invariable, no depende de la época y de las tradiciones culturales. Durante el periodo de la época de la Grecia Antigua y hasta nuestros días no han cambiado, cualitativamente, los parámetros del intelecto, tales como las fases del desarrollo del intelecto, la capacidad de simbolizar, la naturaleza del funcionamiento de la memoria persistente y ordinaria, la estructura del pensamiento intuitivo y analítico, ni tampoco las ilusiones cognoscitivas. Tampoco han cambiado las limitaciones del proceso de transformación de la información. Gracias a ello, el hombre contemporáneo es capaz de comprender la conducta de los antiguos griegos y sus obras filosóficas y literarias.

López Rupérez (1990), ofrece una primera aproximación en este sentido cuando a través de un proceso histórico hace una relación entre los aspectos epistemológicos y cognoscitivos hacia el ofrecimiento de alternativas didácticas. Así, las teorías son vistas como un sistema de juego, axiomas, leyes y elementos deductivos entran en armonía para generar una *concepción estándar*.

En la literatura psicológica y filosófica se encuentra la capacidad de pensamiento probabilístico, o sea, pensamiento en situaciones indeterminadas, no definidas, causales. El hombre que vivió pasada la época de Pascal, se orienta mucho mejor en las situaciones indeterminadas que el hombre antiguo. Se comporta más racionalmente durante el juego al azar, comprende mejor los elementos de riesgo que se observan en el mercado o que encierran las soluciones tecnológicas modernas. Al mismo tiempo, esta tesis no puede considerarse convincente. En un hecho que el mundo moderno ha devenido indefinido, en el que con mayor frecuencia se requiere operar con conceptos probabilísticos, en comparación con los tiempos muy antiguos. Pero, de aquí no se desprende que las personas que vivieron en épocas pasadas no posean (potencialmente) las posibilidades del pensamiento probabilístico. Bachelard (1934), dice en un principio que la dificultad no está en el contenido que se va a transmitir sino en el aprendiz. Para Bachelard el sujeto es evolucionista ya que pasa a través de varios estados.

Dentro de un contexto educativo podemos hacer ciertas analogías; considerando al estímulo-respuesta como núcleo del conductismo, nos podemos preguntar ¿qué factores constituyen el estímulo para que el estudiante elabore una respuesta?, ¿qué universo de estímulos están asociados a un universo de realidades? El estudiante no responde, el muestra únicamente esas realidades (teoría muestral del estímulo), de aquí se rompe esa teoría. Ya no era un problema determinista como Pavlov lo decía, sino se vuelve probabilístico. Se introduce el concepto de variabilidad incluyendo ahora un problema metodológico. Existen problemas complejos nuevos. Para Skinner no era necesario estudiar eso, ya no tenía caso el mapear las cadenas estímulo-respuesta; ¿qué es entonces lo que origina esas desviaciones en los encadenamientos?, hay cosas que no se ven, elementos de entidades abstractas superiores y complejas. De aquí nace el concepto de la terminología de la información acerca de la inteligencia artificial que llega a sustituir el problema de la conducta, y por consecuencia, del aprendizaje. La teoría de la información sustituye lo abstracto y cambia al ser psicológicamente. Con esta noción (unidad de información) cambia la teoría. Ahora existe un cambio conceptual, un nuevo desarrollo la cuál describe una de las formas de hacer investigación. Existe una nueva visión acerca del comportamiento humano, ya no es necesario estimular, ahora es preciso saber cómo lo hace. El término comportamiento pierde su valor.

A pesar de que las estructuras fundamentales del pensamiento son relativamente constantes, en cada época de turno cambia el contenido codificado en la memoria. Las imágenes y los conceptos del hombre moderno en relación con la técnica, la evolución de los organismos vivos o del desarrollo social, se diferencian notablemente de las imágenes y los conceptos de las personas de la época helénica, lo que no precisa sustentación. Recurriendo a la terminología cibernética, podemos decir que, en lo que existe la civilización, se ha modificado el aspecto conceptual del pensamiento (*software*) "programática", y no su aseguramiento material (*hardware*) "mecatrónica".

El problema de los procesos complejos estriba en que existe una cierta *dinámica* en el resultado. Con ello viene la noción de "*memoria*". La información que se contempla como un proceso dinámico, es una caja de depósito de recuerdos para ser la base de la estructura conceptual y procedural de lo que llamamos conocimiento.

La afirmación de la invariabilidad de la estructura fundamental del pensamiento, contradice las tesis del historicismo fundamental del pensamiento y también las del historicismo radical, según el cual, el hombre, al cambiar el mundo, se cambia simultáneamente a sí; esto significa que también su pensamiento. Este punto de vista expresado por el científico A. R. Luriyá (1974), no nos parece del todo correcto. El desarrollo de la técnica y la cultura no ejerce una influencia de fondo sobre la estructura del pensamiento, sobre la memoria de larga duración, sobre las limitaciones e ilusiones cognoscitivas. Ejerce influencia sobre el contenido que codifica la memoria.

A pesar de que las bases de la estructura del pensamiento no han sufrido grandes cambios en el periodo histórico de la civilización, cambiaron sustancialmente los puntos de vista sobre el mismo. En unas épocas lo consideraban sistema racional, seguro, capaz de resolver todos los problemas de la humanidad. En otras, se dudaba de sus posibilidades creativas y analíticas. Basta con comparar la época de la Ilustración con la del Romanticismo.

A pesar de que tampoco en nuestros días han desaparecido las contradicciones (y, seguramente nunca desaparecerán), las investigaciones científicas permiten ver en forma más realista la estructura y el funcionamiento del pensamiento. En el curso de su conocimiento, los psicólogos, filósofos y psiquiatras cada día valoran más críticamente sus posibilidades. Este hecho confirma la aseveración de que cuanto mejor conocemos el objeto tanto más claramente vemos sus limitaciones y debilidades: el conocimiento es, ante todo, el acto de liberación de las ilusiones y confusiones. H. A. Simon (1957), uno de los más connotados economistas y psicólogos contemporáneos, escribía: "Las capacidades del pensamiento humano para formular y resolver los problemas complejos, son pocas, en comparación con la magnitud de esos problemas. Por eso, precisamente, las soluciones que propone el hombre no responden a los criterios de la racionalidad objetiva, incluso, a veces, ni se acercan a ellos".

Si se está de acuerdo en que las posibilidades del pensamiento del hombre son limitadas, entonces el diagnóstico de Simon es demasiado unilateral. Ha omitido una serie de parámetros sustanciales del intelecto. El pensamiento del hombre tiene doble naturaleza: en dependencia de cuáles son los problemas que resuelve, puede ser racional e irracional, creativo y reproductivo, consistente e inconsistente, falso y seguro.

El pensamiento del hombre posee incuestionables méritos, tales como, por ejemplo, la capacidad para simbolizar y formar estructuras cognoscitivas jerárquicas y abstractas. En un sistema creador y trascendental: traspasa los límites de la información existente, forma el cuadro del mundo propio. Muchos actos pensadores tienen carácter consistente y orientado hacia un fin.

Por otra parte, el intelecto del hombre es un sistema limitado: la capacidad de su memoria operativa no sobrepasa la mágica cifra de 7 ± 2 elementos. Como heurístico, el sistema falla con frecuencia, está sujeto a diversas confusiones e ilusiones, confunde los mitos con los acontecimientos reales. El conocimiento general en la ciencia no es posible. No se debe pensar, según Bachelard, en la generalización ya que implica razones de no similitud para explicar otro conocimiento. Existiría un peligro cuando se trata de establecer conocimientos de una cosa nueva con la anterior y el usar el lenguaje como explicación. Se debe usar el término como efecto de explicación.

Sólo este doble punto de vista sobre el intelecto del hombre permite comprender sus posibilidades intelectuales y sus limitaciones cognoscitivas, permite valorar, en forma realista, su papel en la regulación de la actividad de transgresión.

Pensamiento: medio - código - contenido

El pensamiento representa en sí una formación cognitiva, localizada en el cerebro del hombre. En forma similar a cualquier sistema complejo, le son inherentes tres rasgos característicos. El medio en que se codifica, el contenido referente al mundo externo e interno y el código con el cuál se representa merecen un examen aparte.

El Medio en la Formación Cognitiva

Como medio, el pensamiento posee determinada estructura estable, con la que está relacionada su competencia general, el sistema de memoria de larga duración y ordinaria, intelectualidad, capacidades, velocidad de procesamiento de la información, etc.

Las funciones más importantes del pensamiento del hombre son predisposiciones relativamente constantes que, en gran medida, determinan el nivel y la calidad de los procesos de asimilación, procesamiento y conservación de la información. De ellas depende que tan rápido aprenda el hombre, que tan eficaz piensa y cuán hábilmente utiliza la lengua.

Los psicólogos contemporáneos conceden particular importancia a las dos características más generales del pensamiento humano. En primer lugar, su portador es capaz de asimilar, conservar y reproducir la información que llega del mundo circundante y de su propio organismo. Esta información le sirve de base para orientarse en el medio. En segundo lugar, el pensamiento representa en sí un sistema creador capaz de formular nuevas hipótesis científicas, de crear imágenes artísticas y estructuras cognitivas. Quizá el rasgo más importante de este medio sea esta capacidad de traspasar los marcos de la información y de construir nuevas y simbólicas estructuras. Debido a esta estructura, el pensamiento del hombre, con frecuencia, recibe el nombre de *sistema reproductor generativo.*

Piaget (1956), durante sus 40 años de trabajo plantea que todo es transicional, son solo momentos que se retardan y a eso lo llama periodo. Interpreto así que el orden no se puede cambiar, la adquisición es lineal y constante. Dentro del formalismo, la hipótesis deductiva es discutida, tolerable y comparable. Los enunciados del individuo son implicativos. Existe una diferencia metodológica entre la forma (estructura) y el contenido. Su teoría constructivista se basa en el hecho de que el conocimiento se construye en momentos.

Códigos del Pensamiento

El código del pensamiento es un lenguaje por medio del cual el hombre presenta el contenido referente al mundo y a sí mismo. La percepción va junto con los esquemas coordinados, el aparato perceptivo difiere para el mismo Piaget, del aparato operatorio.

La capacidad perceptiva va en función del sujeto. Así, el empirista capta la realidad que ahí está, la supone. Para que sea considerado acto de aprendizaje, este mismo individuo tiene que edificar la realidad, construyendo e interiorizando la imagen percibida.

Código Analógico

En la vida tienen mucha importancia dos tipos de códigos de pensamiento. El primero es el código analógico. Por su mediación, el individuo presenta los objetos reales y acontecimientos en forma de imágenes y representaciones. En este caso el lenguaje es concreto e ininterrumpido. La representación analógica del contenido recuerda los objetos reales y acontecimientos. El ejemplo más conocido de empleo de este código puede ser el mapa del terreno.

Este código corresponde a las etapas concreta y concreta-formal, el individuo presenta obstáculos en la construcción del conocimiento (Bachelard, op. cit.) y lo hace por medio de asociaciones, que cuando llegan a estabilizarse forman un esquema, una estructura. La cantidad de asociaciones que el individuo haga, le permitirá asimilar fácilmente las operaciones y podrá acceder al conocimiento, aprehenderá cualquier objeto de su realidad.

Con este mecanismo no se puede ser empirista, la realidad no está ahí, sino que se construye. El individuo responde al medio, se condiciona a él. Toulmin (1977), considera a la disciplina como subconjunto inscrito dentro de una ecología, donde el individuo se adapta por medio de procesos de diferenciación.

El problema básico de la Didáctica de las Matemáticas es el lograr que los estudiantes usen todas sus habilidades disponibles y desarrollen otras para la comprensión y utilización adecuada de los contenidos matemáticos. El grado de desarrollo y estructuración dependerá de los contenidos previos. Para Toulmin, todo concepto es una microinstitución intelectual, para que el individuo los adquiera tiene que aprender a efectuar cálculos aritméticos, si se requieren; identificará magnitudes empíricas que entren en juego en los cálculos y además reconocerá situaciones y problemas particulares. Su manejo didáctico deberá ir ligado al contenido de la disciplina.

Algunas habilidades que intervienen en el código analógico son la clasificación, conservación, seriación, proporcionalidad, asociación o correlacional, funcional y proposicional. Estas habilidades han sido utilizadas por Karpluz (1978), solamente que él las aplicó en el estudio del aprendizaje de las matemáticas. Para fines analíticos, estas habilidades las consideraré y definiré en términos de procesos.

Según Piaget, el individuo se va representando cosas. A medida que construye, racionaliza. Biggs (1980), propone que el individuo posee una "estructura de resultados observables de aprendizaje", el sujeto tiene unas estructuras de conjunto (*bagaje*) que puede corresponder o no a su realidad. En el proceso de desarrollo el sujeto tiene una estructura que le permite reconocer un algoritmo de reglas, si no existiese eso, entonces habría un desequilibrio o desfase.

Agregaré los mecanismos del procesamiento de la información en la teoría cognitiva y de ello derivaré algunas implicaciones educativas poniendo un interés especial en el desarrollo de ciertas habilidades cuando los estudiantes resuelvan tareas organizadoras. Considerando los trabajos de Wagner y Sternberg (1984), explicaremos como la gente procesa y representa mentalmente descomponiendo en secuencias sucesivas los procesos. Esto implica de alguna manera a la formación de conceptos, que según Park (1984), es un proceso que se dimensiona en la información de un "prototipo de clase de concepto" en la memoria y el desarrollo de una habilidad cognitiva para utilizar ese "prototipo de clase" con el propósito de evaluar diferencias y semejanzas entre nuevos ejemplos.

En el "Reporte de un programa general de resolución de problemas", Simon (1957), genera directrices en torno a las unidades de conducta informativa (conceptos) análoga a la entrada en una caja negra (el presente) y la conducta deseada a la salida (imagen). Se van logrando salidas deseadas conforme a las imágenes. Si el resultado de la prueba siguiente es congruente a la imagen anterior, por lo tanto, se considera que hubo logro.

Sternberg, destaca la noción de proceso elemental de la información: *metacomponentes* como la forma de ejecutar y tomar decisiones en la resolución de problemas*: componentes de logros* en las tareas (*encodage*, inferencia) *y componentes de la adquisición de conocimientos* en el nuevo aprendizaje e información consecuencial.

Al análisis del proceso de formación conceptual (análisis cognitivo de tareas) se permite entenderlo como un proceso de construcción (formación de "modelos conceptuales" mediante codificación) y reconstrucción (mediante articulaciones de otros procesos cognitivas) mucho más complejo y denso que una simple identificación de relaciones y atributos.

Código Analítico

El código analítico se distingue por otras particularidades. Se forma en fases más tardías de la ontogenésis, y su empleo implica la existencia de capacidad para el pensamiento abstracto. Utilizando el código analítico, el individuo presenta los objetos y acontecimientos reales con ayuda del lenguaje natural, de la simbología matemática y de la lógica proposicional

En la Didáctica de las Matemáticas, esta capacidad es de suma importancia ya que las habilidades solicitadas a los estudiantes del nivel medio superior en la resolución de problemas, tienen mucho que ver con la capacidad de análisis.

Piaget trata de investigar cómo conocemos en la etapa última del desarrollo psicogenético, llega a este estado de análisis por medio de un razonamiento hipotético-deductivo que el individuo debe de poseer. En este sentido los neopiagetianos (Biggs, 1980), agregan que cuando la estructura tiene rasgos especiales es dinámica conforme a la estructura operatoria. Las asociaciones, relaciones, capacidad de deducción, se van convirtiendo en encadenamientos lógico-formales. Para que la estructura de conjunto esté articulada es necesario que al menos dos procesos cognitivos estén asociadas para armonizar tal conjunto.

En los estadios hipotético-deductivos, aparecen problemas funcionales, el "*decalage*" es por tanto una respuesta funcional a una estructura. Algunos autores se deshacen del término "desarrollo" por no considerarlo funcional, ya que el tiempo es un factor estructurador o simplemente indicador de momentos. Aparece un nuevo factor dentro de las teorías, el "espacio" geométrico, abstracto e inclusive filosófico. Si por aquí queremos alentar nuestro estudio, procederemos a identificar el *núcleo*, estimando a que distancia lógica se encuentra del objeto, como se pueden relacionar sus elementos y que es lo que sucede en su *cinturón protector*, manifestando que es lo superfluo y lo importante de esos conocimientos (Lakatos, 1978).

De este modo, el núcleo conceptual es más demandante, así, el criterio a tomar dentro del espacio lógico, es la dificultad (nuestro primer indicador). El problema que se desprende de todo lo anterior, es conocer ahora la distancia lógica, los niveles... Aunque en Piaget (1956) se citen algunos componentes de desarrollo, Biggs (1980), los interpreta justificando que el desarrollo no es problema conceptual. Adiciona que una teoría evolutiva, no es necesaria para explicar un fenómeno cognoscitivamente. Entonces, creo yo que no necesariamente podemos basarnos en el desarrollo ya que estructura cognitiva puede ser la misma entre la de un niño y un adulto, la diferencia estribaría en la funcionalidad.

Las teorías que dicen que el problema es el nivel, la estructura no depende de las etapas previas; desde el punto de vista teórico, no es necesario explicarlas con lo que no es esencial ponerlas en función del tiempo, sino del espacio lógico (dificultades, complejidad). En la naturaleza del problema de nivel no interesa expresar los problemas de desarrollo ya que no son cuestiones de su objeto de estudio. La teoría no impide, *a priori*, darle flexibilidad a la nueva interpretación. Hay que recordar que esto no es una teoría acabada, se plantea como línea de investigación. Si tratásemos de dimensionarla, nuestro problema se podría convertir en metodológico. El tiempo no debe ser concepto, sino indicador. Por tanto, las estructuras lógicas las consideraremos atemporales. El proceso se dará entre la estructura lógica y psicológica. El tiempo no será constructo que ayude a explicar el fenómeno.

En lo relacionado a los esquemas de pensamiento deductivo, Halford (1980) menciona que el individuo selecciona un modelo a una estructura similar a la que tiene. El mismo individuo puede cambiar o negar el modelo que tenía y él mismo empezar a construir uno nuevo. Así el modelo se convierte en un grupo de ideas con el que funciona la persona. Lo que interesa es la estructura interna de la persona. Gibson (1986) añade que si un individuo plantea una hipótesis, entonces tendrá diversas maneras de enfrentar a la realidad. Existe entonces un ordenamiento en la relación lógico-conceptual para resolver problemas. Aquí no entra en juego la subjetividad sino lo importante es el ordenamiento. Esto último lo toma en consideración para fundamentar que la lógica debe ser la coraza de un programa de matemáticas.

En modelo de Halford permite ligar un nuevo concepto al anterior, cosa que para el desarrollo de la inteligencia de Piaget quedaría aparte.

George Miller (1988) trabajó con modelos matemáticos sobre la información, mostrando que para ciertas unidades informativas (enunciados), las personas retienen diferentemente.

Campos (1988b, 1990) retoma las ideas anteriores y propone una metodología de carácter lógico-proposicional con el doble objeto de estudiar el discurso producido por estudiantes, de esta manera está en posición de elaborar mapas de terreno que representan el aprendizaje cognoscitivo. A su vez, describe al aprendizaje como "el proceso de construcción de representaciones de la realidad que posee varias dimensiones interrelacionadas". Estas ideas nos convencen ya que el propósito nuestro es el considerar a las matemáticas como una estructura discursiva en tanto que se busca un conjunto estructurado de reglas y símbolos.

El hombre adulto es capaz de utilizar diferentes códigos. En algunos casos, un mismo contenido se anota, tanto en código analógico como en analítico. Por ejemplo se puede recodificar, presentar el mapa del terreno con ayuda de ecuaciones matemáticas, ..., etc. A pesar de que entre ambos tipos de código no existe una diferencia drástica, pueden considerarse como relativamente autónomos. Las investigaciones modernas han mostrado que, en la mayoría de las personas, el contenido en imágenes está codificado en el hemisferio derecho del cerebro, el abstracto, en el izquierdo. Y, como la civilización científico-técnica se caracteriza más por el código analítico, podemos considerar que esta civilización es la "civilización del hemisferio izquierdo" (Arenas, 1993; Booth, 1984; Case, 1980a).

3. APRENDIZAJE Y PENSAMIENTO

En el curso del aprendizaje y del pensamiento, el hombre codifica en la memoria diversos contenidos. Éste guarda relación con el medio natural y social con los fenómenos culturales y con su propia persona. Desde el punto de vista de este contenido, adquieren particular significado dos sistemas, denominados sistema cognoscitivo y sistema operativo.

Sistema Cognoscitivo

El *Sistema Cognoscitivo* contiene información sobre el mundo, la cultura y sobre sí mismo. Tiene carácter descriptivo o valorativo, relacionado con los hechos o las valoraciones y, fundamentalmente, cumple la función de carácter orientador. Gracias a este sistema, el hombre comprende lo que ocurre a su alrededor, es capaz de prever acontecimientos futuros.

La definición del aprendizaje en la génesis del conocimiento es aquella que por medio de asimilaciones y acomodaciones el sujeto equilibra sus operaciones para atrapar la nueva situación.

El individuo desempeña un papel activo en el conocimiento del mundo y de su propia persona. Al crear el sistema cognoscitivo, selecciona, transforma y reconstruye la información que le llega desde el exterior. Codificándola en forma analógica, analítica o en modelo de imágenes creando, de esta manera, las estructuras abstractas. Los psicólogos han establecido una serie de interesantes particularidades que acompañan a los procesos de percepción, memorización y transformación de la información y que inciden en la actividad de transgresión.

Una de las particularidades es el fenómeno de elaboración. Consiste ésta en que la información se complementa y se enriquece. Al mismo tiempo la elaboración puede enmascarar y borrar los conocimientos fundamentales sobre el mundo (Kuhn, 1962). El aporte piagetiano en términos constructivistas para explicar la génesis del conocimiento es bastante coherente; es sólido, congruente, denso, para la explicación de la elaboración lógica del conocimiento. Razones por las cuales deseamos apoyarnos para la elaboración de ciertas explicaciones de lo que resulte en nuestra investigación.

El otro fenómeno digno de atención pudiera ser la reconstrucción del contenido, ya que en el curso de la memorización, las personas reorganizan la información que poseen: reducen el texto estudiado, omiten algunos de sus elementos, cambian la secuencia de éstos, lo que, a veces, origina un aumento de su estructura lógica.

Las asignaturas construidas sobre la base de una misma ciencia, pueden diferenciarse por su lógica. Salmina y Sorokin (1981), consideran que la elección de la lógica óptima está determinada por los objetivos y tareas de enseñanza. Además, la estructuración del contenido deberá corresponder a las leyes psicológicas que rigen la asimilación, esto en matemáticas lo consideramos como un conocimiento generado científicamente y que formaliza una realidad.

Sistema Operativo

Así como el sistema cognitivo permite decir que ocurrió, el *sistema operativo* hace posible obtener respuesta a la pregunta *¿cómo ocurrió?* El primero incluye la información declarativa, el segundo es el "almacén" de la información de carácter procedural.

En el curso del aprendizaje social y de la solución de problemas, el individuo codifica en la memoria duradera información sobre los programas y estilos de la actividad. Son los algoritmos matemáticos y la heurística del pensamiento creador, las directivas tecnológicas y organizativas, las reglas lingüísticas y las habilidades motoras, las estrategias de la toma de decisiones y la técnica del autodesarrollo. La información contenida en el sistema operativo, como norma, se percibe mejor y se actualiza más fácilmente, en comparación con la información fijada en el sistema cognoscitivo. La creatividad matemática, según Ervynck (1991) contribuye en los primeros estados del desarrollo de la teoría matemática, y más aún como resultado de las conjeturas de la experiencia individual en el contexto matemático, a la búsqueda de soluciones innovadoras de los problemas.

El mapa operatorio mostrado por Piaget (1952), da la idea clara de la asimilación que el individuo adquiere cada vez que se encuentra a un nuevo fenómeno, esta capacidad de interacción y adaptación del sujeto y el objeto hacen que un aprendizaje se logre. El aparato operatorio de Piaget, funciona todo el tiempo, mientras que el individuo está despierto, hace cosas. Sabe sumar, restar, multiplicar, pero ¿cuál es la lógica subyacente a todo ello?

Las operaciones pueden ser consideradas como "sistemas de producción" (Sternberg, 1980). Existe comparación entre diferentes perspectivas: analogías, *encoding*, inferencias, mapeos, aplicación y respuesta. El individuo construye los conceptos por asociación utilizando imágenes visuales que interactuan con el medio ambiente interno y externo.

Para la educación, considerando que el individuo descompone el conocimiento, asociándolo, ..., etc., nos preguntamos ¿cómo ocurre esa asociación de elementos? Para respondernos pondremos en marcha un análisis de componentes idéntico al procesamiento.

Los significados se asocian a la experiencia bajo un universo semántico ordenado. La memoria se considerará como una estructura y proceso, será un concepto no tangible.

La técnica que seleccionaremos para estudiar los sistemas de producción de los alumnos será la de los *Códigos Selectivos*. El individuo opera con un proceso y una estructura por tanto tiene una memoria. La memoria es un constructo, es un modelo teórico de accionar del individuo.

El concepto será una unidad de información equivalente a la estructura lógica del conocimiento (Ausubel, 1983). Las unidades semánticas en la construcción de conceptos será conforme a la teoría de la información. Al momento que el individuo selecciona elementos para definir conceptos precisos, toma una unidad de información, la procesa y construye una nueva, es decir, existió un procesamiento. Para Ausubel este ordenamiento equivale a una organización de la cuál parte una clasificación. Asociados entre ellos mismos logramos las *habilidades* y el proceso resultante será metacognitivo. Los procesos serían el *punto de anclaje* a nivel pedagógico y no de la consistencia de las teorías.

Puede haber conjunción entre las tres perspectivas de la inteligencia: Psicometría, piagetiana y procesamiento de la información. La aproximación que se nos hace más apropiada, para los fines y propósitos descritos al inicio de este capítulo, es la de ligar las dos últimas enunciadas.

Es posible analizarlas conjuntamente a partir del siguiente diagrama donde se ejemplifica que para pasar de un nivel inicial a otro final de conocimientos, es necesario considerar el esquema original al cual se le encadenan ciertos conocimientos para llegar al próximo nivel. Esto, cuando el nuevo conocimiento, observado por acciones y comportamientos de los sujetos, se incorpora al anterior.

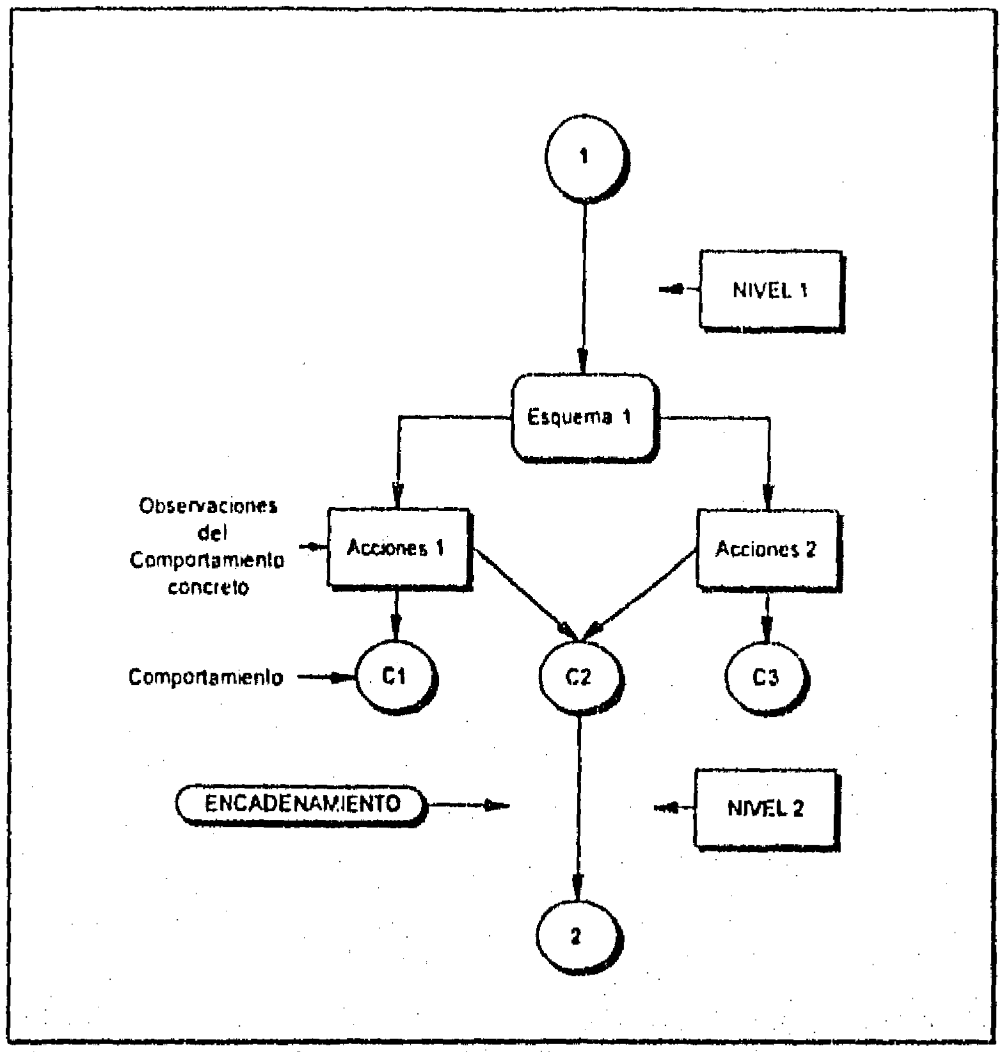


Diagrama 1. Conjunción de las teorías piagetiana y procesamiento de la información.

¿Cómo está basada la acción, en un comportamiento único, en dos, se comparte o qué sucede? La acción es un comportamiento generalizable. Hay que separar *los componentes semánticos* de la oración, de su discurso. El procesamiento de la información nos auxiliará acerca del "cómo se hace la separación" y las ideas de Piaget sobre el "cómo se asocian a otra o cómo forman una nueva". En el procesamiento de la información en un esquema se toma la "habilidad" para cierto "nivel". ¿Qué mecanismos, elementos, procesos de una actividad cualquiera permiten construir una habilidad? El contexto varía con la edad pero el contenido será organizado o menos organizado, se darán diferentes componentes de clasificación y las respuestas serán diferentes entre ellos mismos.

El contenido de enseñanza define el nivel con el cuál el alumno se tendrá que enfrentar (prerequisitos). Así Halford defiende y argumenta que el nivel debe ser coherente a la realidad. A nivel cognitivo, se le debe de demandar al estudiante al pasar de un estado a otro de la tarea solicitada para que exista un *cambio conceptual*.

En el procesamiento de la información, el contenido es lo importante; los comportamientos quedan en un plano secundario (Kirby, 1980). En cognición, las diferencias individuales pueden ser la pauta para el aprendizaje. La información pasa a través de los sentidos convirtiéndose en nivel perceptivo.

Kirby (1980), sobrepone las cuatro fuentes de la teoría de la cognición: Psicométrica, desarrollo cognitivo, procesamiento de la información y la neuropsicología dando como resultado una explicación funcional del organismo, algo que sucede, es secuencial, definida en momentos o etapas. Los *buffers* como mediadores en estas posibilidades le ayudan a explicar la percepción. No lo creemos exagerado pero, por falta de conocimiento biológico funcional, no nos atrevemos a tomar sus ideas generales. Modestamente nos quedamos convencidos únicamente con la teoría piagetiana y el procesamiento de la información. Para Kirby, el concepto de estrategia requiere rutas alternas, se puede iniciar o terminar comúnmente, pero las líneas para llegar (alternativas), son diversas.

En didáctica, considero que hay que ir reorientando el proceso y sus respectivas alternativas, pues la media que se utiliza en ese proceso es la que debiera guiar a toda la clase.

Al parecer, no hay recetas en la resolución de problemas, se tienen sugerencias, fases ordenadas pero no es lineal esta resolución.

De los tres componentes del pensamiento: portador-código-contenido, el primero es el más estable y determinado. A su vez, los sistemas más indefinidos son el cognoscitivo y el operacional. El contenido que ambos encierran varía con el desarrollo de la civilización y la adquisición de experiencia individual.

Si el mecanismo de aprendizaje es propio a Piaget, la adquisición del saber sucederá entonces bajo la forma del procesamiento de información.

Se analizarían en este caso, los procesos entre un esquema y otro, para que operen por medio de una equilibración y el sujeto acceda de esta forma, al conocimiento.

4. APLICACIÓN DE LAS TEORÍAS EXPUESTAS

Las partes aplicativas de las teorías mencionadas tratarán sobre los estudios de las estructuras conceptuales. Esa estructuración podrá ser comparada con la estructura de la comunidad científica o simplemente con la del profesor.

¿Cómo se traduce ese análisis estructural del aprendizaje a una estrategia docente? Si lo que requerimos a nivel de conceptos es el apropiado, entonces tendrá coherencia, será completo y no tendrá mecanismos sueltos ..., no se pierden estructuras previas como lo dice Ausubel. Para enseñar se cuenta con las relaciones de tiempo y espacio, se pueden medir esas relaciones para seleccionar rutas de aprendizaje, redes conceptuales.

Teniendo estructuradas un gran número de rutas, podremos traducirlas a nivel didáctico. La lógica es atemporal, pero el aprendizaje no lo es. Es tarea indispensable suponer que las actividades tienen que ir retomando los elementos de la ruta argumentativa. De aquí se parte a buscar el núcleo de la ruta y al diseño de estructuras conceptuales para un curso. Ese núcleo será lo mínimo a aprender, en términos de Ausubel corresponden a los anclajes.

Faltarían ver los mecanismos que existen para acceder realmente al conocimiento del núcleo. Se ha ilustrado la idea de las unidades de información que es la asociación proposicional que va a definir conceptos. La aproximación teórica de los núcleos nos servirá para ver si es plausible llevarlo a cabo en clase, pero sería objeto de otra investigación, una tarea titánica, pero no imposible.

Pedir a los profesores que reconozcan los núcleos conceptuales implica el darles las bases para que enseñen eficazmente lo más relevante de su materia.

El profesor debe reconocer que el alumno tiene un conocimiento previo, debe de tenerlo presente para planear su actividad. La estrategia del profesor (lógica y coherente), puede ser percibida de diferentes modos, puede ser que el alumno las siga sin ayuda del profesor. Pero, ¿qué es lo que demanda el conocimiento que se va a transmitir?, ¿cuál es ese nivel de demanda?, por tanto, ¿cuál será el nivel de respuesta del alumno?

Prawat (1989), menciona que el acceso es a través de la organización del conocimiento de base, el usar estrategias y el de mostrar o crear disposiciones. Se tienen además dos dimensiones: la organización y el tener conciencia (*awareness*). Hay que calificar ese concepto previo y si es de una forma u otra, ¿qué hay que hacer con él para que se convierta en conocimiento? Hay que localizar el núcleo, para que el alumno no se ande por lo superfluo. El conocimiento no sólo son las asociaciones, sino las estrategias.

Por otro lado podemos ver como está estructurado el desempeño académico a través de factores constructos teóricos como lo cita Walberg (1988), la calidad del estudiante y la motivación. Su modelo es compensativo, si los factores no son los que el individuo requiere para lograr su objetivo entonces fracasará. Si a esto tuviésemos que agregar los factores sociales intervinientes en el proceso educativo, el modelo a proponer se volvería demasiado complejo. Sin dejar su importancia de lado, nos limitaremos únicamente a la construcción cognitiva del sujeto.

En algún estudio separado, se podría ligar la estructura lógica del pensamiento, al contenido epistemológico de la disciplina a transmitir.

Para lograr nuestro modesto objetivo o factor de productividad, se estudiarán únicamente momentos en el *desempeño*, se podrán analizar las condiciones espacio-temporales y se tendrá mucho cuidado en la variabilidad de las tareas.

Finalmente, recordemos que el aprendizaje es continuo en todas partes; con lo que se tiene se aprende en cualquier momento. Piaget argumenta que el aprendizaje es permanente. Pero si el modelo de Walberg (1988), representa los factores de interacción, el desempeño es también un proceso continuo que induce al acceso al conocimiento por medio de las estrategias y estructuras cognitivas. El problema no solo será del individuo sino de todo el sistema.

El carácter procesual de la tarea será estatizado momentáneamente por razones analíticas. Cada autor revisado es para nosotros un descriptor y se pueden considerar "teorías" para efecto del estudio.

Capítulo

2

El Método de Investigación

2. EL MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

LA DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA

Antecedentes

En el estudio que presento acerca de las líneas de investigación en didáctica del álgebra, me restringiré a los grupos de trabajo más conocidos en México, aunque sin duda, existan otros además de la Unidad Académica de los Ciclos Profesional y de Posgrado, CCH, UNAM (UACPyP) y el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV). Por medio de una investigación documental, encontré además que los antecedentes de ellos se encuentra a comienzos de la década de los setenta, cuando la Secretaría de Educación Pública encargó al CINVESTAV la elaboración de libros de texto gratuitos para las escuelas primarias.

Fue precisamente ahí cuando se confronta un equipo de investigación del Departamento de Matemáticas con los problemas concretos de la enseñanza de esta ciencia, así como de la percepción de la realidad de dicha problemática en las diferentes regiones del país, que algunos especialistas tomaron conciencia de la necesidad de la creación de una sección abocada por entero a trabajar en la educación matemática. Puedo señalar entre los objetivos principales de estos grupos el desarrollar investigación sobre los procesos de aprendizaje de las matemáticas y sus métodos de enseñanza; la elaboración de materiales adecuados a diversos niveles escolares, tanto para los maestros como para los alumnos; y el diseño de programas de maestría y doctorado en esa nueva área.

Una vez creada la Sección de Matemática Educativa en 1975 y teniendo como punto de partida el marco señalado, una de las líneas de investigación en didáctica del álgebra fue el desarrollo curricular. Sin embargo, aunque esta problemática se encuentra muy vinculada al proceso mismo de la enseñanza, ello no implicó un abandono de problemas teóricos de investigación que cobrarían sentido a la luz de trabajos en los que posibilita el análisis histórico-crítico, por ejemplo, la construcción de secuencias de aprendizaje, que reflejan los logros de la investigación teórica. A su vez, la historia de las ideas se vería enriquecida por las nuevas hipótesis encontradas al poner a prueba las secuencias pedagógicas en los sistemas educativos nacionales.

Cabe señalar, además, en este proceso de formación de la nueva disciplina de matemática educativa en nuestro país, las influencias de los trabajos realizados principalmente en Francia, Inglaterra y Estados Unidos han tenido gran relevancia. Estas ultimas investigaciones fueron decisivas, como describiré más adelante, en los trabajos sobre didáctica del álgebra en la década de los ochenta en México.

La investigación en matemática educativa se desarrolló en Francia a lo largo de líneas específicas. Esta especificidad se debió, creo yo, a sus propias tradiciones filosóficas y científicas. Por ejemplo, el concepto de *obstáculo epistemológico* (Bachelard) dio origen al *obstáculo didáctico* (Brousseau). Se presentan nuevos conceptos teóricos tales como *campo conceptual, teorema factual, cálculo de relaciones, variables y efectos didácticos, sistemas de significantes y contrato didáctico,* entre otros. Algunas perspectivas metodológicas son analizadas, enfatizando la necesidad de usar una variedad de métodos y la importancia de experimentos en el aula. El trabajo de G. Glaeser (1981) marca como uno de los objetivos más importantes de la didáctica de las matemáticas, determinar los obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje de esta ciencia. Basándose en métodos históricos y epistemológicos, el autor lleva a cabo un examen de los documentos del pasado que le permiten detectar algunos de estos obstáculos. Plantea además la necesidad de emprender experiencias con los alumnos para investigar las consecuencias que estos conflictos epistemológicos ocasionan en la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, no puedo dejar de mencionar las influencias de los psicólogos Piaget y Wallon así como la del pedagogo R. Krykowoska. De la mayor importancia para la didáctica del álgebra es el trabajo del matemático H. Freudenthal (1978), que se enfrenta con el problema de convertir el álgebra simbólica, por medio de la enseñanza, en un lenguaje para ser aprendido y utilizado. Esto conlleva al estudio de las condiciones en que la práctica de este lenguaje sea posible, debido a que no se emplea con frecuencia en la vida cotidiana y la sintaxis algebraica no es adquirida en forma natural por el sujeto.

En relación a estudios que pretenden introducir la investigación experimental en la enseñanza, mencionaré aquellos trabajos en los que se advierten cambios conceptuales en la transición de la aritmética al álgebra, pues en la literatura especializada se carece de artículos que traten exclusivamente los procesos reversibles de pensamiento algebraico.

Booth (1984) se aboca a la investigación de las causas de los errores en álgebra a nivel secundaria y forma parte de un estudio más general, el proyecto "Conceptos en la Matemática y en la Ciencia de la Secundaria" (CSMS), llevado a cabo en Inglaterra y cuyos propósitos son investigar las causas fundamentales que ocasionan la frecuencia y persistencia de errores a través de los años y explorar la efectividad de módulos breves de enseñanza diseñados para corregir o evitar estos errores.

Matz (1982), se propuso explicar la sorprendente uniformidad de los errores cometidos por los estudiantes al resolver problemas algebraicos en el nivel medio superior. Su investigación demuestra que cierta clase de errores frecuentes en el álgebra elemental son el resultado de una adaptación sistemática del conocimiento anterior que se he generalizado o extrapolado en forma inadecuada. Esta perspectiva le permitió clasificarlos en: 1) Errores generados por la elección incorrecta de una técnica de extrapolación, 2) Errores que reflejan un conocimiento básico correcto pero diferente y 3), Errores que surgen durante la ejecución de un experimento.

Dentro de las investigaciones de corte teórico-experimental menciono los trabajos de S. Wagner y C. Kieran. Wagner (1981), por un lado, investiga las diversas interpretaciones que adquieren las literales en las expresiones algebraicas. Al referirse a las variables matemáticas, distingue tres componentes: símbolo, contexto y referente. De las relaciones entre ellas, se derivan tres roles de la variable: semántico, sintáctico y matemático. Por su parte Kieran (1982b) se aboca a la identificación de algunos factores conceptuales subyacentes al aprendizaje del álgebra elemental. Descubrió tres esquemas erróneos muy acentuados en una muestra de alumnos de 12 a 13 años de edad. La investigación la llevó a cabo antes de que los estudiantes recibieran instrucción formal en álgebra. Los esquemas identificados por medio de entrevista clínica son: 1) Esquemas de cuasi-igualdad, 2) Esquemas de redistribución y 3), Esquemas de resolución.

Por último, en cuanto a propuestas de enseñanza dentro del campo del álgebra elemental, enumero los trabajos de A. Bell y Davydov. Bell (1983), se basa en una *enseñanza con significado* que propone la utilización de modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales. Asimismo, crea situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas. Los estudios de Davydov (1974), afirman que la mayoría de los problemas aritméticos, en cuanto traspasan las fronteras del simple cálculo, muestran el mismo carácter; esto es, son enteramente problemas algebraicos que apuntan al establecimiento de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. Experimentó la introducción a los símbolos literales como un medio para describir las relaciones entre magnitudes. La notación literal se enseñó a los niños inmediatamente después de que se hubieron familiarizado con la sucesión de números cardinales y antes de aprender las fracciones. De hecho, este acercamiento ofrece la perspectiva de modificar las ideas tradicionales sobre la relación entre los números y los símbolos literales en las primeras fases de la enseñanza.

Tres etapas en la investigación de la didáctica del álgebra

De la relación de autores y/ o trabajos que han influido en las líneas de investigación sobre didáctica del álgebra actualmente en desarrollo en nuestro país, es importante hacer notar tres momentos de cambio significativo en cuanto a objeto de estudio en este campo. El primero trata de un desarrollo importante de estudios sobre habilidades matemáticas emprendido por A. Krutetskii (1976), luego se pasa al estudio de los errores algebraicos frecuentes y persistentes cometidos por los estudiantes. Este cambio importante en los objetos centrales de estudio se debe a trabajos como los de Booth y Matz, los cuales permiten un cambio de perspectiva de investigación hacia los setenta, década en la que predomina el análisis de los errores y de las estrategias utilizadas por los sujetos al abordar tareas algebraicas. Estas investigaciones tienen como finalidad indagar sobre la naturaleza de tales errores y estrategias y en algunos casos (Matz, 1982), llegar a la elaboración de un modelo teórico del pensamiento algebraico individual.

La década de los ochenta se caracteriza por un enfoque conceptualista de la investigación en educación matemática. Así, en el caso del álgebra me encuentro con estudios profundos alrededor del desarrollo de conceptos particulares, como el de *igualdad algebraica* (Kieran, 1981), *variable* (Wagner, 1981a), *número generalizado* (Küchemann, 1978), *incógnita específica de ecuación y de función* (Wagner, 1981b).

Finalmente, en un tercer momento y aún dentro de los ochenta, hay un cambio de enfoque en el que el álgebra es considerada como un lenguaje y la investigación se aboca al estudio de las vicisitudes de su aprendizaje y uso. Un antecedente importante en esta línea es el trabajo de Freudenthal, que antes señalé.

El trabajo mexicano de investigación

De la confrontación de la problemática nacional con la investigación en otros países, han surgido líneas temáticas como el análisis del curriculum escolar de álgebra, las propuestas didácticas, el análisis de errores en el uso del álgebra, la adquisición de lenguaje algebraico, el lenguaje algebraico y la resolución de problemas y la enseñanza del álgebra en ambientes computacionales. Dentro de los estudios relacionados con el uso del lenguaje algebraico para la representación de situaciones, fenómenos, procesos y generalizaciones, así como para la modelación y resolución de problemas se encuentran los trabajos de Guzmán (1993), García y Sepúlveda (1992 y 1993), Arenas (1993) y Vega y cols. (1993). De estas investigaciones se han desprendido propuestas institucionales de formación de docentes que implican la organización de cursos-taller sobre didáctica del álgebra, seminarios de evaluación y planeación del aprendizaje, innovación tecnológica y creación de materiales, entre otros.

Con la adquisición de lenguaje algebraico por parte del estudiante, se inicia en México el desarrollo de la investigación básica en didáctica del álgebra. Investigación que trata sobre los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico y que se desarrolla en el proyecto "Operación de la Incógnita" (Filloy y Rojano 1984a, 1984b, 1987). En este estudio a partir del análisis de métodos y estrategias de resolución de ecuaciones, pertenecientes a la etapa presimbólica del álgebra se desprende una conjetura, que es puesta a prueba con sujetos que se encuentran en los inicios del aprendizaje del álgebra. Dicha conjetura consiste en la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar *"lo representado"*, es decir, en el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas.

Los hallazgos encontrados en este estudio son considerados hoy en día una premisa obligada en casi toda investigación sobre la transición de la aritmética al álgebra. En lo que respecta a nuestro país a lo largo de los últimos cinco años, esta línea se continua desarrollando con variantes dentro de las temáticas específicas del álgebra como lo son: la *componente numérica*, la *noción de número generalizado* o de variable (Gallardo y Rojano, 1992) o contextos didácticos que incluyen el uso de la microcomputadora o de la calculadora (Ursini, 1991; Cedillo, 1991).

El diseño de material de apoyo al currículo en Álgebra (García, 1993) ha propiciado la creación de grupos de trabajo multidisciplinarios en el desarrollo de *software* multimedia como auxiliares en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior. Estos grupos de trabajo se preparan para dar la bienvenida al nuevo siglo con trabajos sobre la Universidad Virtual (Warren, 1995).

El tema de resolución de problemas y tareas organizadoras adquiere características propias cuando se aborda desde el campo del álgebra simbólica que se ha enfocado al registro y reporte pormenorizado de las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando se les solicita resolver problemas que convencionalmente suelen resolverse con herramientas algebraicas. Una constante en los mencionados reportes es que en la mayoría de los casos los estudiantes no utilizan el álgebra simbólica en la resolución de problemas y que cuando ocasionalmente dicho uso está presente, éste aparece con grandes deficiencias. Esto ha dado pie para que los diversos grupos de investigadores desarrollen proyectos con orientación teórico-cognitiva (Hall y cols., 1990; Cuoco, 1992) o aquellos que tratan la problemática con un acercamiento semiótico y cognitivo (Filloy y Rubio, 1992 y 1993) en el que además, los modelos de enseñanza juegan un papel fundamental.

Existe también en México un trabajo que me merece una atención especial ya que presenta una secuencia de temas matemáticos para los niveles medio superior y superior basado en el análisis estructural del aprendizaje. Aquí se discute la forma en que se involucran ciertas habilidades cognitivas en el proceso de aprendizaje de contenidos específicos. Este modelo alterno de investigación se inscribe en el estudio de niveles de operación del estudiante frente a contenidos matemáticos, ligados a procesos algorítmicos de solución de problemas (Campos, 1989).

Estas líneas de investigación inician su trayectoria en México a finales de los ochenta y cobran una gran fuerza en el primera mitad de la década de los noventa. De este modo, se han elaborado trabajos en torno al desarrollo de habilidades metacognoscitivas en la matemática (De León, 1995), didácticas especiales y procesos cognitivos (García, 1995), construcción de conocimiento en el aula (Ortíz, 1995), pensamiento matemático avanzado (Hernández, 1995), enseñando matemáticas usando el aprendizaje de los alumnos (Martínez, 1995), desarrollo de sistemas expertos (Castillo, 1995), visualización de funciones en computadora (Rodrigues, 1995) y manipulación y tecnología (Weinzweig, 1995). Con esta tendencia es posible que los trabajos próximos de investigación se podrán intensificar en esta dirección y, de manera simultánea, se estará discutiendo (como ya ocurre en otros países) qué tan importante es mantener la manipulación simbólica como un tema curricular del álgebra en el Nivel Medio y Medio Superior, ante la posibilidad de acceder a un *software* especializado en descargar al estudiante de esa tarea.

Estrategias Metodológicas

Las temáticas anteriormente mencionadas se han abordado utilizando las estrategias metodológicas que a continuación sintetizo. Para las didácticas experimentales se emplean análisis cuantitativos y cualitativos de datos. En el primer caso, la metodología está conformada por el intento de extender los diseños experimentales de las ciencias naturales a otros contextos, como los de las ciencias sociales. Este acercamiento se basa en datos que se procesan con métodos estadísticos.

Entre las propuestas cualitativas se encuentran las entrevistas individuales de tipo clínico y crítico, tal como Piaget las desarrolló, permanecen como un método esencial para el análisis de las dificultades conceptuales y de procedimientos, a través de los cuales, los alumnos dan información de una situación dada. Este tipo de entrevistas forman un componente metodológico indispensable a la hora de poner a prueba la solidez de las concepciones de los alumnos (gracias a la utilización de la contradicción), para analizar la evolución de los procedimientos que se siguen y de las concepciones que intervienen en una situación determinada lo que permite hacer una separación entre las conductas verdaderamente significativas de una concepción y los artefactos u otras respuestas anecdóticas.

Como contraparte metodológica se encuentran las experiencias de papel y lápiz, que tienen el mérito de poder ser aplicadas a grandes muestras y de que permiten hacer comparaciones múltiples.

En resumen, el marco teórico elaborado en el primer capítulo de esta obra, conjuntado con el alcance del estado actual del conocimiento en la investigación de la didáctica del álgebra, recién explicitado, es semejante a lo que Filloy y Puig (1991, p: 73) expresan en su texto:

< *La Historia de las Ideas Algebraicas se ha relevado como un elemento indispensable para adentrarse en el conocimiento de ciertos aspectos del devenir de los sistemas simbólicos dentro del conocimiento y eso, a su vez, en un formidable elemento de análisis teórico para las Ciencias de la Cognición. Algunos de los elementos discutidos... recorren interrogantes acerca de cómo los Sistemas Matemáticos de Signos predeterminan las maneras mediante las cuales analizamos los problemas que modelan en tales Sistemas de Signos. así como las estrategias de resolución y cómo se crean las líneas de fuerza que dan sentido a la concatenación de ciertos argumentos y no de otros, que serían los naturales si estuviéramos utilizando el Lenguaje Algebraico actual. Las tensiones entre los aspectos operativos y los semánticos cobran una inusitada importancia... así como la gama de obstrucciones de orden cognitivo que parecieran corresponderse con los obstáculos de orden epistemológico... Con todo ello, se tocan puntos neurálgicos de la problemática actual de la relación entre la Historia de las Ideas Algebraicas y la Didáctica de las Matemáticas*>

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL APRENDIZAJE

Fundamento para el trabajo de esta investigación

La noción de aprendizaje mediante articulación secuencial y jerarquías de tareas en situación escolar no se opone a modelos teóricos como el piagetiano ya que permite incluir aspectos fundamentales de la teoría cognitiva. Lo que se requiere entonces es un modelo que, considerando esta característica, permita el análisis de la complejidad de aprendizaje cognitivo.

El análisis estructural del aprendizaje constituye un cuerpo teórico y metodológico que retoma y contiene elementos heurísticos muy útiles en el dominio de la didáctica. De acuerdo con Bergan (1980), un modelo analítico-estructural del aprendizaje está formado por relaciones entre diversos procesos que interactúan entre sí, algunos pueden estar identificados en mayor o menor grado, pero la incidencia en el procedimiento de construcción es de vital importancia.

De este modo, es posible investigar qué relación existe entre ciertos procesos y cómo interactuan algunos de ellos, permitiendo así el aprendizaje de otro proceso. La importancia de esta situación es válida ya que permite hacer la conexión entre un proceso cognitivo y el contenido específico de aprendizaje, un aspecto no claramente establecido en los modelos de aprendizaje descritos en el capítulo anterior.

Diseño y planeación del experimento

Limitaciones en cuanto a la estrategia de estudio

Si bien es cierto que el modelo estructural del aprendizaje hace referencia a las diversas etapas de elaboración de conceptos y procedimientos a nivel individual, así como también a la detección de procesos, podría validarse mediante una investigación a nivel poblacional. Un estudio en este sentido podría consistir en realizar un seguimiento individual, analizando la estructura conceptual previa de alumnos específicos y comparándola con la estructura final después de un periodo de mediación específica. El cambio estructural cognitivo se estimaría en función de la potencia y jerarquización de sus unidades de información, así como de su posible remodelación o cambio. Sin embargo, resultaría problemático el aquilatar significativamente los múltiples factores que intervienen en el proceso: estructura conceptual previa, motivación, inteligencia, tipo de instrucción, condicionantes personales y sociales, etc., así como en qué medida han interferido con la evolución de cada alumno concreto.

Otra alternativa consistiría en abordar el problema a nivel poblacional, utilizando grupos de alumnos de similar edad y grado escolar, y evaluar fenomenológicamente la estructura cognitiva en función de la variedad de esquemas que se genere en el seno de dicha población de alumnos (variedad ya observada por Novak, 1988). Considero que, la segunda alternativa es la que más se adapta a mis necesidades y me parece la más prometedora, aunque supongo la necesidad de efectuar algunas modificaciones a la misma.

La población de estudio

La presente investigación la he realizado con estudiantes de dos escuelas del Nivel Medio Superior (NMS), donde realizo mi actividad profesional. Un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos en Ciencias Sociales y Administrativas, CECyT (antes Vocacional, IPN), llamada a partir de este momento la población A; y una preparatoria particular, que llamaré población B. Así, A pertenece al sector público mientras que B, al privado. Las edades de los alumnos oscilan entre los 15 y 16.5 años.

La muestra la componen 24 estudiantes seleccionados por la "necesidad del momento". Es decir, por sus deseos manifestados de aprender más o simplemente por llevar a cabo una serie de ejercicios en sesión de asesoría académica. Esta elección de alumnos obedece a un criterio derivado de mi propia experiencia docente, ya que a lo largo de ocho semestres consecutivos de enseñanza, constaté que los comportamientos de los alumnos de este nivel escolar son muy similares. En este periodo de enseñanza, los contenidos curriculares no se han cambiado pero se buscan alternativas hacia la forma de transmitirlos y desarrollarlos.

A continuación presento la distribución de la muestra clasificada por sexos y tipo de escuela de procedencia.

Población A, 6
Población B, 7

Población A, 6
Población B, 5

La tarea organizadora

Se trata de una serie de fichas (estímulos simbólicos), que yo mismo construí considerando ejercicios "tipo" que usualmente empleamos durante la enseñanza del álgebra y que corresponden al tema de Productos Notables[i] y su respectiva Factorización Algebraica[ii].

El conjunto de fichas se elaboró tomando como punto de partida datos empíricos acumulados durante mis observaciones a lo largo de semestres anteriores de enseñanza, resultados de exámenes, errores frecuentes cometidos por los alumnos en clase y además, errores en la resolución de tareas. Después de haber recopilado la información, diseñé la primera versión de las tarjetas organizadoras adecuándolas a los contenidos en cuestión.

Objetivos en la elaboración de la tarea organizadora

Los objetivos perseguidos en el diseño de las fichas son los siguientes:

1. Detectar algunos conceptos previos y tratar de cualificar su función y mecanismo de desarrollo.
2. Explicar los esquemas conceptuales de los alumnos con un doble propósito: por una parte, evaluar el lugar y peso relativo de los conceptos en el seno del esquema y, por otra, realizar un estudio comparativo de estos esquemas considerando la evolución de las estructuras algebraicas en las dos escuelas seleccionadas.
3. De ser posible, identificar el mayor número de núcleos conceptuales y determinar la complejidad de la tarea.
4. Estudiar la dimensión interrelación conceptual e inestabilidad de los mismos.
5. Estudiar la dimensión aplicabilidad, es decir, si los esquemas de los alumnos son consecuentes o inconsecuentes.

[i] Se llaman Productos Notables a ciertos productos (multiplicaciones) que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación (Baldor, 1991; p. 97). El producto notable es un procedimiento rutinario muy utilizado en Álgebra. Consiste en una multiplicación abreviada, como otros la llaman "una multiplicación por visualización". Este procedimiento memorístico agiliza la operatividad y es el punto inicial para el procedimiento algebraico llamado "factorización". Es tan rutinario su desarrollo que se han ideado reglas para encontrar su resultado (Paulín, 1994; p. 271).

[ii] Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión. Factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores (Baldor, 1991; p. 143). Diremos que una expresión algebraica esta factorizada completamente, si está como el producto de dos o más factores y cada uno de éstos no se puede factorizar en otros factores. Usualmente la factorización se realiza sobre un conjunto dado. A menos que se especifique otro conjunto, el conjunto que se elige es el de los números enteros. Las técnicas de factorización son fundamentales en matemáticas. Es el proceso contrario al producto notable. Por ello, es conveniente memorizar previamente cada uno de los productos notables antes de comenzar a factorizar (Paulín, 1994; p. 271).

Para cumplir dichos objetivos y teniendo presente que el estudio se realiza en dos poblaciones diferentes, las fichas también presentan las siguientes características:

1. Son independientes unas de otras.
2. Utilizan reglas generales.
3. Permiten aplicar esas reglas generales en relación a casos específicos.
4. Tienen la posibilidad de expandirse a casos particulares.
5. Facilitan la metodología de didácticas diversas.

Ejecución del experimento

Escenario y condiciones de reproductibilidad

Enumero a continuación, de manera exhaustiva, las características comunes a las dos poblaciones en estudio:

- Los alumnos tienen el mismo rango de edades.
- La enseñanza fue recibida por el mismo profesor y se fundamenta en una didáctica de procesos.
- La participación en el estudio por parte de los alumnos fue voluntaria.
- Existen tanto alumnos como alumnas.
- Los planes de estudios en ambos casos son semestrales.
- Han participado en el estudio alumnos con una excelente trayectoria académica comprobada, alumnos "medios" y también aquellos con grandes deficiencias de aprendizaje en Matemáticas.

Las diferencias principales entre las poblaciones las cito a continuación:

Población A

La experiencia se llevó a cabo al término del semestre. Los contenidos ya habían sido evaluados. El álgebra forma parte del programa de primer semestre. La función de la misma tiene sólo el carácter de recordatorio y forma por tanto, parte de un reto. Se realizó durante el turno vespertino utilizando espacios disponibles de la biblioteca con el empleo de lápiz y papel. La invitación a participar en la experiencia fue hecha a alumnos que se encontraban en el patio de la escuela o simplemente a ex-alumnos del primer semestre que iban a la escuela en busca de sus calificaciones de fin de semestre. Ellos acudieron gentilmente. No se les quitaba más de 20 o 30 minutos de su tiempo.

Población B

La experiencia se efectuó antes de que los contenidos fueran evaluados. El álgebra está contenida en el programa de segundo semestre. La función del experimento, consistió por tanto, en un entrenamiento previo a la evaluación departamental. El turno al cuál asisten los alumnos es el matutino. Se utilizó la sala de asesorías, proporcionando lápiz y papel a cada alumno participante. En tres grupos de segundo

> semestre se hizo la invitación a participar en un "entrenamiento" acerca de los procesos de factorización. Los alumnos asistieron previa cita. Por razones del examen que se avecinaba, después del experimento y con la finalidad de realimentarse entre ellos mismos, permanecían en la sala hasta por espacio de una hora.

Para ambas poblaciones el procedimiento de entrevista y observación fue el mismo. La secuencia de trabajo, consistió, primeramente, en reconocer lo que estaba escrito en la ficha de trabajo por medio de la pregunta dirigida *¿qué es?*. Ellos deberían escribir todo lo que supiesen. Luego, se les preguntaba *¿cómo se resuelve?* y los alumnos escribían el proceso de resolución o bien podían diagramar el camino a seguir. Por último era dada la consigna *¡resuélvelo!* de tal modo que los alumnos escribían su respuesta. En las tres actividades los tiempos fueron cronometrados. De esta forma estaríamos en condiciones de tener registros acerca del conocimiento declarativo (definiciones) y procedural.

A continuación presento las expresiones algebraicas estudiadas:

No. Ficha	$ProductoNotable \Leftrightarrow FactorizacionAlgebraica$	No. Ficha
0	$a(b+c) \Leftrightarrow ab+ac$	0'
1	$2x^3(3x^2-1) \Leftrightarrow 6x^5-2x^3$	1'
2	$(3a^x+a)(2a^{x-2}) \Leftrightarrow 6a^{2x-2}+2a^{x-1}$	2'
3	$(n+2)(a+1) \Leftrightarrow a(n+2)+n+2$	3'

Tabla 1. Operaciones algebraicas seleccionadas para su investigación.

El procedimiento de aplicación fue el de mostrar una ficha a la vez. Por ejemplo, con la tarjeta número cero, $a(b+c) = ab + ac$. Primero se cubría el resultado al momento de elaborar las tres preguntas pertenecientes a los tres momentos descritos en el apartado anterior. Después, se destapaba el resultado para que el alumno se diera cuenta de su logro. Se estimulaba si acertaba, diciéndole "muy bien", "lo resolviste correctamente", "lo llevaste a cabo rápidamente", etc., o en caso contrario, se retroalimentaba. La retroalimentación, en primera instancia, la efectuaba el mismo alumno, tratando de descubrir sus propios errores. Si no los encontraba, entonces, yo mismo como mediador y empleando en cuestionamiento del tipo *Si... entonces....* y en algunos casos utilizando *la negación de la proposición*, le guiaba en su búsqueda. Con las siete tarjetas restantes, sistemáticamente, se hizo lo mismo. Además, en los lugares acordados para el experimento, pero en momentos separados, se exploraron tres secuencias didácticas diferentes para algunos de los mismos alumnos. Cuando concluimos la experiencia, les pregunté también, cuál secuencia les había parecido la mejor y por qué.

Secuencias didácticas exploradas

Tres han sido las secuencias que generalmente utilizan los profesores de Matemáticas cuando enseñan el tema de Productos Notable (PN) y Factorización Algebraica (FA). Unos prefieren enseñar todos los casos de PN y luego los de FA, logrando con ello un dominio de ambos contenidos por separado, pero cuando los alumnos se confrontan a la resolución de ejercicios variados o al hacer uso de ellos en semestres posteriores, difícilmente lo consiguen, muestra de ello han sido las evaluaciones "sorpresa" que hemos realizado durante los cursos.

De mi experiencia como coordinador de la asignatura de matemáticas, al organizar algunas reuniones de Academia, constatamos que otros profesores prefieren enseñar un PN e inmediatamente después su respectiva FA, avanzando de este modo a casos más elaborados hasta culminar con los tipos que representan mayor dificultad. Aquí los alumnos asimilan mejor y además comprenden el significado y la relación que hay entre los dos tópicos de la matemática actual.

Por otra parte están los educadores que no organizan sus contenidos y los transmiten sin relación alguna o que creen que esas secuencias didácticas estimulan la creatividad en sus alumnos o que significan simplemente "retos" al intelecto humano. Los alumnos, como consecuencia, a este nivel escolar presentan grandes problemas de reconocimiento y por tanto, de solución.

He aquí la tipificación que desarrollé según las secuencias de enseñanza descritas.

Secuencia Vertical	Las fichas se presentaron en el orden 01230'1'2'3'. Es decir, primero se avanzó en el estudio de los Productos Notables y luego por separado, reconocer y trabajar sólo con la Factorización.
Secuencia Horizontal	La seriación fue 00'11'22'33'. En otras palabras, se mostró un Producto Notable y su respectiva Factorización, otro Producto de mayor dificultad y su correspondiente Factorización, y así hasta terminar.
Secuencia Mixta	El orden era indiferente, más bien no había orden, pero era lo mismo para todos. La complejidad estaba determinada por el número de unidades de información, la calidad de éstas y la no-relación entre contenidos.

Tabla 2. Secuencias didácticas exploradas durante el estudio experimental.

Capítulo

3

El Problema Algebraico

3. EL PROBLEMA ALGEBRAICO

NIVEL DE DEMANDA DE LOS PROBLEMAS ALGEBRAICOS PLANTEADOS

En este capítulo analizaré la relación entre algunos procesos cognitivos y el aprendizaje matemático con el propósito de determinar ciertas estrategias psicopedagógicas que subyacen al aprendizaje matemático. Para ello presento a manera ilustrativa, una secuencia temática sobre el concepto de producto notable y su correspondiente factorización algebraica.

Es evidente que en el aprendizaje de las matemáticas se requieren de, por lo menos, dos niveles de habilidad: el manejo de algoritmos y la solución de problemas mediante una adecuada interpretación, a los cuales se refiere Greeno (1980) como niveles "mecánico" y "semántico", respectivamente, de la solución de problemas.

Refiriéndonos a los primeros, requieren en un principio, del manejo adecuado de ciertos procedimientos algorítmicos. El nivel algorítmico del proceso de solución de problemas es de carácter acumulativo. Estos problemas tienen una respuesta interconstruída, por lo que el efecto de la creatividad se disminuye conforme se aumenta el efecto de la mecanización. Sin embargo, es importante resaltar que el nivel algorítmico es básico para el proceso de aprendizaje matemático, ya que requiere el uso de ciertas definiciones, para evitar contradicciones, y el uso de reglas para evitar errores.

Por otro lado, los problemas de interpretación pueden ser verbales o simbólicos, ya que no siempre pueden plantearse haciendo uso exclusivo de cierto lenguaje verbal, pictórico, presentando definiciones, ecuaciones, o mezcla de todo ello. En este caso el alumno no sólo tiene que recordar un conjunto amplio de definiciones y procedimientos matemáticos, sino que tiene que determinar cuál de toda esa información disponible le permitirá hallar la solución al problema planteado. Los problemas de interpretación requieren entender un sistema de relaciones así como de proposiciones. Es un reto intelectual para el estudiante, ya que exige el uso de reglas y definiciones integradas a ciertos procesos cognitivos que le permiten llevar a cabo las relaciones adecuadas para resolver correctamente el problema.

El nivel de dificultad en el cuál se presentan los problemas tratados en clase, viene a estar determinado por la diferencia existente entre los problemas algorítmicos y los de interpretación. Los algorítmicos necesitan de una aplicación directa del conocimiento, mientras que los de interpretación requieren de la integración de esos conocimientos de manera abstracta y muy creativa. Aunque para el profesor parezca sencillo el problema algorítmico, puede resultar complejo para el estudiante y de esta manera convertirse en un problema de interpretación. No se pueden encasillar los problemas a un solo proceso de clasificación, los estudiantes pueden operar en diversas formas, su mente no necesariamente se centra a la resolución del problema (sea algorítmico o de interpretación), ya que puede estar pensando en cosas relativas a su adolescencia. Aquí menciono, basándome en mi experiencia, que el nivel de enseñanza que algunos profesores imparten no corresponde al nivel de ejercicios solicitados a los alumnos, de ahí se desprende una de las razones que conducen al fracaso o la decepción de los estudiantes por querer aprender matemáticas. El juego no es parejo.

Si hablamos del grado de destreza que se requiere para resolver cada problema, vemos que los algorítmicos hacen llamado a estructuras de razonamiento relativamente automatizadas, es decir, se requieren habilidades de recuperación de la información donde el conocimiento ya ha sido procesado y posiblemente, adquirido con anticipación. En lo que respecta a los problemas de interpretación, además de las habilidades de recuperación de la información, se requieren necesariamente una serie de procesos que permitan interconectar, en determinada forma, el conocimiento matemático. Procesos que guíen la búsqueda de soluciones y que encaminen al estudiante en la creación de un modelo matemático apropiado que le permita afrontar el problema y obtener la resolución correcta.

Habilidades Cognitivas

Son las disposiciones del intelecto que muestra el individuo para realizar tareas o resolver problemas en áreas de actividad determinadas, basándose en una adecuada percepción de los estímulos externos y en una respuesta activa que redunde en una actuación conveniente. Una habilidad cognitiva es, en sí, el grado de destreza con lo que se hace o ejecuta algo.

La habilidad cognitiva se refuerza con la ocurrencia de la capacidad, el hábito y el conocimiento del proceso a seguir. La capacidad individual para una habilidad determinada debe entenderse como una cualidad estable aunque se dé un componente innato junto al desarrollo a través de la actividad. El proceso de habituación resulta muy necesario, y produce resultados óptimos, cuando se realiza con sujetos inicialmente dotados. También se contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas mediante el conocimiento de las técnicas para llevar a cabo un proceso y a través de la información sobre cómo deben manejarse los recursos y materiales precisos.

Dada la complejidad de campos en que actúa el ser humano, puede también hablarse de diferentes tipos de habilidades, desde las puramente manuales hasta las más complejas intelectuales. El desarrollo de una habilidad suele producirse, bien mediante ensayo-error (eliminando progresivamente las actuaciones inútiles), bien mediante el aprendizaje por imitación. Pero, en todo caso, la habilidad se consolida por la eliminación de las actividades inservibles y el reforzamiento de las que conducen a una actuación eficaz.

A continuación hablaré de procesos cognitivos ya que en la actualidad el fenómeno de acumulación de habilidades está sobrepasado.

Procesos cognitivos relacionados al aprendizaje de las matemáticas

En el código analógico descrito en el primer capítulo, hemos citado los siete procesos que intervienen en el aprendizaje que nos interesa. Karplus (1978) ha utilizado estas mismos procesos para analizar el aprendizaje matemático que a su juicio son las indispensables para ejecutar ciertas operaciones matemáticas.

a) Clasificación
Es la operación que consiste en agrupar en clases, según ciertos criterios que definen la pertinencia a las mismas, los elementos de un grupo de objetos o ideas. Es el resultado de la operación. La clasificación propiamente operatoria, supone la coordinación estricta entre comprensión y extensión de clase y el dominio de la estructura jerárquica de la clasificación y, por tanto, el de la relación de inclusión. Para Piaget las operaciones de clasificación están en la base de la génesis de los conceptos. Las clasificaciones se forman conforme a la semejanza de atributos, luego se asignan los objetos nuevos a uno u otro grupo y después se forman las subclases. Se asimila la idea de relación de contención.

b) Conservación
Término utilizado por Piaget para designar la capacidad de la persona para comprender que las cantidades permanecen constantes a pesar de las transformaciones que tengan lugar en su apariencia externa. La adquisición de esta noción presupone la reversibilidad del pensamiento. Citando un ejemplo, vemos que los conceptos de conjunto y de operación sobre conjuntos son la base de un desarrollo sistemático de los números naturales. La adición de números naturales está basada en la operación de unión de conjuntos. Así, la suma de 2 + 3 se obtiene considerando un conjunto X y Y, tales que la cardinalidad $n(X) = 2$ y $n(Y) = 3$ y $X \cap Y = \phi$; esto es X y Y son ajenos. Como en la propiedad conmutativa de la adición no interesa el orden, la unión $A \cup B$ se conserva con la inversión de sus términos, quedando $A \cup B = B \cup A$.

c) Seriación
Disposición metódica de las cosas regularmente clasificadas. Es la colocación sucesiva y armoniosa de las cosas. Implica una ordenación de elementos abstractos de acuerdo a relaciones de asimetría como (<) y (>) u otras. Por ejemplo para obtener el máximo común divisor (MCD), la relación básica de la división es un instrumento primordial: dividendo = (divisor)(cociente) + residuo; (residuo < divisor). El MCD de dos números naturales se trata del mayor de los dos naturales que divide a cada uno de dos o más números. De este modo, 4 es el MCD del par ordenado (8, 20).

d) Proporcionalidad
Identificación de relaciones cuantitativas entre dos objetos o eventos y su transferencia a otro objeto o evento que posee esa relación. Una de las reglas de divisibilidad dice que un número es divisible entre 2, 5 o 10 si y sólo si, el valor del dígito de las unidades y del numeral base diez del mismo es divisible en 2, 5 o 10. En otras palabras, un número es divisible entre 2 si el dígito de las unidades es 0, 2, 4, 6 u 8; en 5, si su dígito de unidades es

0 o 5 y será divisible en 10, si su dígito en unidades es 0. Ejemplificando, el número 2436 es divisible en 2.

e) Asociación o correlacional

Relación que existe entre 2 o más variables u objetos que hace que varíen cualitativamente. No implica casualidad, sin embargo, si se puede saber el grado de asociación entre dos aspectos o procesos a través de las variaciones en las distribuciones de sus indicadores.
Matemáticamente una relación es un conjunto de pares ordenados de objetos. Supongamos el conjunto de todos los pares ordenados de todas las personas pertenecientes al conjunto universo. Entonces la frase "Miguel es hermano de Jorge" determina una partición del conjunto de todos aquellos pares que pertenecen a esa relación, es hermano de, y el otro conjunto es aquel de todos los pares que no pertenecen a esta relación.

f) Funcional

Expresa al carácter de la dependencia entre dos o mas objetos y las relaciones que existen entre los elementos de un conjunto. Una función, en matemáticas, es una relación en la que no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer elemento. Por ejemplo la relación B = { (0,0), (1,0), (3,1) }.

g) Proposicional

Proceso de enunciar afirmaciones categóricas, no ambiguas ni contradictorias, como en un encadenamiento de conceptos y relaciones. Ejemplos: "El mínimo común múltiplo (MCM) de dos números naturales es el menor de los naturales que es divisible por los dos números dados"; "El MCM de 8 y 12 es 24"; "Si un número primo divide a un producto de dos números naturales, entonces debe dividir al menos a uno de los dos números" y "El máximo común divisor de dos números puede expresarse como una diferencia de múltiplos de estos dos números".

Organización de las fichas de trabajo

Análisis cognitivo-estructural de las tareas

Para facilitar en el estudiante el uso de sus procesos cognitivos, así como para que desarrolle otros que se requieren en el aprendizaje de los productos notables y la factorización, presento este análisis en función de las actividades específicas que se pueden realizar en el aula. Aquí veremos la existencia de articulaciones secuenciales (secuencias de acciones), así como la jerarquía de procesos ligados a un contenido particular. Este análisis es lógico y psicológico y además representa la idealidad de lo que se pretende el alumno conozca y utilice.

La secuencia temática se presenta en cuatro partes: estudio lógico del caso general de factorización por término común aplicando la propiedad distributiva (cuadro 1) y el modelo estructural correspondiente a esta secuencia (figura 1); un caso específico que incluye exponentes numéricos y su respectivo modelo psicológico (cuadro 2 y figura 2); otro caso que hace llamado al principio de conservación (cuadro y figura 3), y la última secuencia, que emplea una distribución-agrupación particular (cuadro 4) así como su modelo estructural (figura 4).

Como podrá observarse, he seleccionado solamente cuatro actividades específicas que involucran un mismo principio general con el propósito de analizar la forma en que intervienen los procesos cognitivos durante el desarrollo de las mismas. Deseo enfatizar la importancia de operar sobre un contenido de enseñanza concreto, necesario para propiciar un proceso de enseñanza-aprendizaje más sólido y con sentido.

Primera secuencia

Ejercicios pertenecientes a las fichas 0 y 0':

FormaGeneral

$a(b+c) \Leftrightarrow ab+ac$

Secuencia operativa	Secuencia operativa
Nombre: Producto Distributivo Tarea: Desarrollar el producto indicado REGLA: • Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio. • Tomar en cuenta en cada caso la regla de los signos. • Se separan los productos parciales con sus propios signos. LEY: Ley distributiva de la multiplicación.	Nombre: Factorización por factor común monomio. Tarea: Descomponer en factores la expresión dada. REGLA: • Se busca un coeficiente y una literal que divida a todos los términos. • El coeficiente debe ser el máximo común divisor (m.c.d.). • La literal o literales deben ser aquellas que estén presentes en cada uno de los términos con el menor exponente. • Este término es el factor común monomio.
Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación	**Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación**
$a(b+c)=?$ $(+)por(+)=+$ $a*b=ab$ $(+)por(+)=+$ $a*c=ac$ $\text{Re}sultado$ $ab+ac$	$ab+ac \to (a); f.c.m.$ Resultado parcial uno; (primer factor) $\frac{ab}{b}$ $\frac{(+)}{(+)}=+; \frac{ab}{a}=b \to +b$ $\frac{ac}{a}$ $\frac{(+)}{(+)}=+; \frac{ac}{a}=c \to +c$ Resultado parcial dos; (segundo factor) Resultado final: $a(b+c)$

Interpretación: PN, $a(b+c)$ Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación aparecen los términos ab y ac. El signo aditivo "+" se conservó.	**Interpretación**: FA, $\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}$ $a(?+?)$ El término común divide a cada término de la expresión. El término común aparece afuera de la agrupación. El término común está ubicado al inicio de la nueva expresión. Existe conservación del signo agrupatorio.
Generalización: El algoritmo para la resolución de productos monomio por polinomio es la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación. La operación es una multiplicación.	**Generalización**: El algoritmo para factorizar polinomios con término común es el dividir a toda la expresión entre el término común. La operación es una división.

Cuadro 1. Algoritmo de resolución para caso general de factorización por término común y aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

Los procesos cognitivos para realizar estas secuencias de reglas y procedimientos los representamos en la figura 1, el lado izquierdo de la tabla corresponde al producto notable de la ficha de trabajo número cero y el lado derecho de la misma, a su respectiva factorización (ficha 0').

Identificación PN ↓ **Asociación** ↓) **Conservación** **Seriación**	**Identificación** FA ↓ **Clasificación** ↓ **Asociación** ↓) **Conservación** **Seriación**

Figura 1. Modelo estructural para la secuencia de factorizar por término común un caso general y aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

La figura 1 muestra el modelo estructural de esta secuencia. Nótese que para resolver el PN indicado existen tres procesos jerarquizados además del de *identificación* que es proceso indispensable al inicio de la ejecución. Procedimentalmente primero se *asocian* los términos, *seriando* los productos parciales y *conservando* el carácter grupal de la expresión resultante.

En la factorización existe un proceso de más, que es la de *clasificación*. Si no se conoce lo que significa el término común (T.C.) o cuando menos identificarlo y luego obtenerlo, el resultado sería incorrecto. Este proceso de *clasificar* empieza a tomar relevancia ya que en el proceso de clasificación, el núcleo informativo es precisamente el T.C., este concepto es el que define el espacio cognitivo, es el que va a determinar la complejidad de la tarea. Es, en síntesis, el primer obstáculo del problema. Como se muestra, el proceso de factorizar demanda, al menos, de un proceso de más que el procedimiento de llevar a cabo el respectivo producto notable.

Segunda secuencia

Ejercicios pertenecientes a las fichas 1 y 1':

$2x^3(3x^2-1) \Leftrightarrow 6x^5-2x^3$

Secuencia Operativa	**Secuencia Operativa**
• Signos por propiedad distributiva; (+)(+) = +, (+)(-) = -. • Coeficientes numéricos, (2)(3) = 6. REGLA: De la multiplicación de los Números Reales. • Literales. Se multiplican las literales de la misma base de acuerdo con la LEY de los exponentes. Sea $\forall x \in R, m y n \in R \Rightarrow x^m x^n = x^{m+n}$ Así, $(x^3)(x^2) = x^5$	• Coeficientes. El m.c.d. entre 6 y 2 es 2. • Literales. Entre $x^5 y x^3$, REGLA: se toma la literal con menor exponente, $\underline{x}^3$. Por tanto el f.c.m. es $2x^3$. • Coeficientes restantes, REGLA: Se divide cada término entre el f.c.m. $\frac{6x^5}{2x^3} = 3x^2$ • Signos $\frac{(-)}{(+)} = -$ $\frac{-2x^3}{2x^3} = -1$ REGLA: Todo número dividido entre sí mismo resulta la unidad. PROPIEDAD: De las fracciones. DEFINICIÓN: Coeficiente literal y potencia. TEOREMA: Si $a \in R$ y $m,n \in N$, entonces, 1er. caso $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; Si $m > n$ 2o. caso $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$; Si $m < n$ 3er. caso $\frac{a^m}{a^m} = 1$; Si $m = n$ *Resultado*, REGLA: *El f.c.m. se escribe como el coeficiente de un paréntesis y dentro del mismo los cocientes resultantes de las divisiones.* Re*sultado – final*; $2x^3(3x^2-1)$

Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación	Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación
$2x^3$ por $3x^2$ (+) por (+) = + 2 por 3 es 6 x^3 por $x^2 = x^5$, primer término $6x^5$ Ahora, $2x^3$ por -1 (+) por (-) = - 2 por 1 es 2 x^3 por $1 = x^3$, segundo término $-2x^3$ $Resultado-final;6x^5-2x^3$	$\underline{6}x^5-\underline{2}x^3$ $factores; 6/2=3$, por tanto es el 2 $2/2=1$ • Magnitud de exponentes, $x^3 < x^5$ • Primer factor, $(2x^3)$ $\frac{6x^5}{2x^3}$ (+) entre (+) es + 6 entre 2 = 3 x^5 entre x^3 es x^2, término parcial $3x^2$ $\frac{-2x^3}{2x^3}$ (-) entre (+) es - 2 entre 2 = 1 x^3 entre $x^3 = 1$, término parcial -1 • Segundo factor, $(3x^2-1)$ Resultado final: $2x^3(3x^2-1)$
Interpretación: PN, $2x^3(3x^2-1)$ Cuando se aplica la propiedad distributiva aparecen los términos $6x^5$ y $2x^3$. El signo "-" se conservó.	**Interpretación:** FA, $\frac{6x^5}{2x^3}-\frac{2x^3}{2x^3}$ $2x^3$ es el T. C. $2x^3$ dividió a toda la expresión. $2x^3$ se ubicó como primer factor. En el segundo factor se sigue un orden, separando los términos con la conservación del signo.
Generalización: El algoritmo para la resolución de productos monomio por polinomio es la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación. La operación es una multiplicación.	**Generalización:** El algoritmo para factorizar polinomios con T. C. es el dividir a toda la expresión entre el T. C. La operación es una división.

Cuadro 2. Algoritmo de resolución para la factorización por término común y aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación empleando exponentes numéricos en las literales.

Enseguida mostraré los procesos cognitivos que se requieren para llevar a cabo los procedimientos descritos en el cuadro anterior.

PN **Identificación** ↓ **Asociación** ⌊ Ley de exponentes ↓ ⌊ operación suma ⟩ **Conservación** **Seriación**	**Identificación** FA ↓ **Clasificación** ⌊ conocimiento declarativo ↓ **Asociación** ⌊ Ley de exponentes ⌊ operación resta ⟩ **Conservación** ↓ **Seriación**

Figura 2. Modelo estructural para la secuencia de aprendizaje de la factorización por término común, aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación empleando exponentes numéricos en las literales.

Aquí notamos que las estructuras globales de las secuencias de los cuadros 1 y 2 son las mismas. La jerarquía y organización entre procesos es idéntica a la del ejemplo anterior. La dificultad podríamos decir que estriba en el conocimiento de una ley matemática (ley de los exponentes, caso de multiplicar expresiones de la misma base). Aparte del conocimiento declarativo de la ley (multiplicar bases iguales equivale a sumar sus exponentes), implica un saber hacer al nivel de las operaciones algebraicas. De este modo en el proceso de asociar elementos de un producto, se incluiría otro proceso (sub-asociación) para efectuar la operación.

En la factorización algebraica la *clasificación* también demanda otro nivel de conocimiento. Aquí existe una *clasificación secundaria* de lo que es un T. C. Este núcleo conceptual aparece con una primera variación, los términos se hicieron más complejos, tienen más elementos (coeficiente numérico, literal y exponente). Al llevar a cabo la *asociación* entre componentes, se hace indispensable el tener presente una *segunda asociación*. Por otro lado, la división algebraica entre términos implica además el uso correcto de otra ley (dividir bases iguales equivale a restar sus exponentes).

Haciendo uso de estas clases secundarias, *sub-clases* o *clases subordinadas* a la clase principal, a modo de conclusión, notamos que la primera estructura (PN) creció hacia el interior mismo del proceso de asociar, se construyó una sub-jerarquía; la estructura FA se incrementó en dos procesos secundarios en el dominio de la *clasificación* y la *asociación*. Estos procesos secundarios irían graficados hacia afuera de la hoja ya que de lo contrario serían eclipsados por los procesos primarios de clasificación y asociación, respectivamente. De otra manera si utilizaríamos diagramas de Venn-Euler, los procesos secundarios quedarían inscritos en los primarios. Un proceso secundario estaría contenido en uno primario. Si ahora tridimensionamos la inclusión, quedaría la figura de un cono truncado, donde la base mayor sería el proceso primario y la tapa quedaría hacia nosotros representando el proceso secundario (sub-jerarquía). Estos **sub-procesos** van más allá de lo que parece, ellos pueden ser el punto medular del funcionamiento u operatividad del núcleo conceptual. Sin ellos, la operación algebraica no podría ser resuelta satisfactoriamente. En este punto nos podemos ya ir dando cuenta del cómo es que los procesos se superponen a los contenidos, o simplemente se manifiestan como indispensables en un momento determinado del algoritmo de resolución.

Tercera secuencia

Ejercicios pertenecientes a las fichas 2 y 2':

$(3a^x + a)(2a^{x-2}) \Leftrightarrow 6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$

Secuencia Operativa	**Secuencia Operativa**
• Signos, (+) por (+) = + • Coeficientes numéricos. REGLA: De la multiplicación de los números reales. • Literales. Se multiplican las literales de la misma base de acuerdo con la LEY de los exponentes: *Resultado final*: $6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$	Hallar el m.c.d. • Coeficientes numéricos, REGLA: Se toma el mayor de los factores comunes. En este caso el 2. • Literales, REGLA: Se toma la literal de menor exponente. Para los exponentes binomiales de a 2x - 2 < x - 1; cuando *x* pertenece a los reales. SUB-REGLA: Se selecciona la parte literal con menor coeficiente así como la numérica de cada exponente binomial. Así, x < 2x y -2 < -1, de aquí el exponente del f.c.m. será (x - 2). El f.c.m. es entonces $2a^{x-2}$ • Cocientes restantes, REGLA: Se divide cada término entre el f.c.m. $\frac{6a^{2x-2}}{2a^{x-2}} = 3a^x$, primer cociente, Secuencia Operativa: PRINCIPIO: División de fracciones. LEY: De los exponentes. $a^{2x-2-(x-2)} = a^{2x-x-2+2} = a^x$ Sub-tarea: dividir, $\frac{2a^{x-1}}{2a^{x-2}} = a$ REGLA: Dividir un número entre sí mismo da la unidad, ya no se escribe, se subentiende. LEY: De los exponentes $a^{x-1-(x-2)} = a^{x-x-1+2} = a$, segundo cociente.

	El f.c.m. se escribe fuera del paréntesis y dentro del mismo los cocientes resultantes de las divisiones. $\text{Re}sultado - final; 2a^{x-2}(3a^x + a)$
Interpretación: PN, $(3a^x + a)(2a^{x-2})$ Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación aparecen los términos $6a^{2x-2}$ y $2a^{x-1}$. El signo '+' se conserva al separar los términos resultantes.	**Interpretación**: FA, $\dfrac{6a^{2x-2}}{2a^{x-2}} + \dfrac{2a^{x-1}}{2a^{x-2}}$ $2a^{x-2}(?+?)$ $2a^{x-2}$ es el T.C., corresponde a un criterio académico. El T.C. divide a toda la expresión polinomial. El T.C. se coloca generalmente como el factor de la izquierda. El factor de la derecha se ordena según la secuencia de la división. Existe principio de conservación del signo.
Generalización: El algoritmo para la resolución de productos monomio por polinomio es la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación. La operación es una multiplicación.	**Generalización**: El algoritmo para factorizar polinomios con término común es el dividir a toda la expresión entre el común. La operación es una división.
Relaciones, codificación y algoritmo para resolver la operación $3a^x$ por $2a^{x-2}$ (+) por (+) = + 3 por 2 = 6 a^x por $a^{x-2} = a^{2x-2}$ • Primer producto parcial $+6a^{2x-2}$ a por $2a^{x-2}$ (+) por (+) = + 1 por 2 = 2 a por $a^{x-2} = a^{x-1}$ • Segundo producto parcial $+2a^{x-1}$ $\text{Re}sultado - final; 6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$	**Relaciones, codificación y algoritmo para resolver la operación** $6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$ m.c.d. 6 entre 2 es 3 2 entre 2 es 1, selecciono el 2 bases, a^{2x-2} y a^{x-1} exponentes, $2x-2$ y $x-1$ 2x > x -1 > -2, selecciono a^{x-2} • Primer factor, o f.c.m., $(2a^{x-2})$ Ahora, $\dfrac{6a^{2x-2}}{2a^{x-2}}$ (+) entre (+) es + 6 entre 2 es 3 $a^{2x-2}/a^{x-2} = a^x$ • Primer término del segundo factor, $3a^x$ Luego, $\dfrac{2a^{x-1}}{2a^{x-2}}$

	(+) entre (+) es + 2 entre 2 es 1 $a^{x-1}/a^{x-2} = a$ • Segundo término del segundo factor, $+a$ Por tanto, el segundo factor es $3a^{x} + a$ $\mathrm{Re}\,sultado - final; (2a^{x-2})(3a^{x} + a)$

Cuadro 3. Algoritmo de resolución para la factorización por término común, aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación empleando exponentes literales binomiales.

La figura 3 representa esta secuencia por medio del modelo estructural. En ella observamos el carácter acumulativo del algoritmo empleado para resolver el problema. Veamos que en ambos casos (PN y FA) la estructura general es la misma a aquellas exhibidas en las figuras 1 y 2. Es decir, que como se trata de un mismo procedimiento o principio general (PN) de resolver, las operaciones algebraicas pasan primeramente por una identificación, una asociación de elementos y una seriación en la obtención de los resultados parciales por medio de una conservación de signos de agrupación. Para la factorización sucede lo mismo, claro que como ya lo habíamos dicho, este procedimiento requiere de una clasificación previa para diferenciar el núcleo conceptual, o T.C.

Aunque la estructura global es la misma a los casos señalados anteriormente, vuelven a aparecer otros sub-procesos ya que se inscriben en los procesos de asociación para el PN y en la clasificación y asociación para el procedimiento de factorizar.

En el producto notable, no solamente se hace uso del sub-proceso asociativo para operar las literales sino que se requiere de otro sub-proceso. A esto me refiero para destacar la importancia de los tres procesos de asociar (procesos 1, 2 y 3). El proceso uno es la que marcaría el inicio del procedimiento, es algo así como una asociación de bloques en *grosso*, a primera vista; luego la asociación 2, es más diferenciada ya que operaría a nivel de sub-bloques, llamándola sub-asociación. En el ejemplo equivale a asociar las literales *a* con *a*, pero para lograr esto se requiere de otra asociación (la 3) aún más fina o diferencial, para manejar debidamente el exponente y además no perder de vista la existencia del exponente unitario de la literal *a*, así como también el conservar el signo negativo del exponente *x-2*. Con este procedimiento de diferenciación, los procesos se jerarquizan y al término de la primera operación, o primera clasificación, los sub-procesos se utilizan en la misma secuencia que se siguió al inicio del procedimiento pero ahora para resolver la operación binaria equivalente a la adición para exponentes. Siguiendo con esta sucesión y apoyándome en mi experiencia profesional, si apareciese otro contenido más diferencial entonces, a ese nivel se emplearían, secuencialmente, los sub-sub-procesos de sub-sub-identificación, sub-sub-asociación y así sucesivamente. Con esto quiero decir que el mismo modelo estructural de *a(b+c)*, se repite e incrementa a medida que los elementos algebraicos se incorporan en las nuevas expresiones. Por tanto, si la secuencia del modelo estructural de aprendizaje hubiese sido aprendida significativamente en la secuencia 1, creo yo, que debería apoyar a la elaboración más compleja de nuevos conocimientos. Al transponer ese principio general a casos más elaborados, no debería presentar mayor dificultad. El caso particular, en este sentido, es la transferencia del principio a la situación exponencial *x(x-2)* que cumple con el mismo principio rector del modelo estructural 1.

Identificación PN	**Identificación** FA
↓ **Asociación** ⌊ identificación ↓ ⌊ asociación ⌊ asociación ⌊ seriación) **Conservación** ⌊ conservación **Seriación**	↓ **Clasificación** ⌊ identificación ↓ ⌊ clasificación ⌊ asociación ⌊ seriación ⌊ conservación **Asociación 1** ⌊ identificación ⌊ clasificación ⌊ asociación 2, 3) **Conservación** ↓ ⌊ proporcionalidad ⌊ seriación ⌊ conservación **Seriación**

Figura 3. Modelo estructural de los algoritmos factorizar por término común, uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con empleo de exponentes literales binomiales en las expresiones.

Ahora en lo que se refiere a la factorización algebraica, el modelo estructural es similar a los mostrados en las figuras 1 y 2. A diferencia de ellas, la clasificación del T.C. implica otros sub-procesos. Aquí también se nota la inclusión de procesos que en este caso son requisitos para avanzar en la búsqueda de la solución de la tarea. Para clasificar estos expresiones algebraicas y poder obtener el núcleo conceptual en las mismas, las dificultades son mayores. El espacio semántico en el entorno del nuevo núcleo o sub-núcleo lo constituyen ciertos sub-procesos de identificación, clasificación, asociación, seriación, conservación y uno nuevo que se hace necesario, la proporcionalidad. En este momento la demanda se incrementa ya que no solamente es el operar coeficientes y exponentes unitarios (como lo describí en el cuadro 1), sino que ahora los sub-procesos se tornan igualmente inclusivos, jerarquizados, haciéndose dinámicos entre ellos mismos. Pero, determinar entre ellos cuál es la de mayor jerarquía resulta difícil decirlo ya que existe una gran correspondencia entre los mismos. La condición de necesidad/ suficiencia, toma un giro singular. Para alguien puede resultar necesario el contar con todos los sub-procesos que enuncié, pero para otros sujetos puede ser suficiente el manejo de un menor número de procesos. Todo esto, creo yo, se deberá al nivel de competencia de cada estudiante, a la capacidad desarrollada de incluir uno o varios procesos dentro de otros, sus experiencias previas y su actitud hacia el estudio. Supuestos que trataré de demostrar mas adelante.

Retomando el proceso de asociación, observamos en el cuadro 2, que existe otro sub-proceso asociativo que emplea una sustracción de exponentes, pero, para este caso, aquí mismo se hizo necesario la inclusión de un sub-modelo estructural (muy similar a aquel mostrado en la figura 1), pero con el aumento del proceso de proporcionalidad. El modelo resultante es más demandante que los modelos anteriores ya que el número de relaciones que conforman las unidades de información es mayor, en sí, es más complejo. Existen ahora núcleos de núcleos, encadenamientos entre ellos mismos, se van superponiendo ciertos contenidos que implican diversos procesos en esa construcción y al mismo tiempo puedo hablar de un "empuje" en este proceso de elaboración. Ese encadenamiento de contenidos implica necesariamente un encadenamiento jerárquico de procesos. El conocimiento se va apoyando sobre el reconocimiento de elementos centrales y periféricos, elementos que pueden ir auxiliándome en la construcción de una secuencia educativa y al entendimiento de un proceso de aprendizaje. El término común (T.C.) original, además de haber sido manejado a nivel semántico y de funcionalidad, requiere ahora del empleo e identificación de clases o variedades de términos comunes. Aquél término que se identificó y definió en un principio del estudio, de manera general, requiere de especificidad.

En este proceso podemos visualizar claramente el carácter "anidado" de las secuencias, lo cual nos permite entender mejor el proceso de generación del conocimiento como un proceso de acumulación constructiva. En síntesis, se requiere que los estudiantes utilicen las mismos procesos que se habían identificado y utilizado anteriormente pero ahora lo hacen de manera acumulativa. A diferencia del modelo 1, el 2 permite la construcción de nuevas estructuras así como también el modelo estructural de la figura 3, donde se contempla la reordenación de procesos y conocimientos conforme a la tarea demandada. La ordenación del contenido adquiere tal importancia que ya se puede ir haciendo llamado a los procesos cognitivos que son necesarios para construir este contenido muy particular.

Cuarta secuencia

Ejercicios pertenecientes a las fichas 3 y 3':

$(n+2)(a+1)=a(n+2)+n+2$

Secuencia Operativa	**Secuencia Operativa**
PROPIEDAD: Distributiva de la multiplicación, Caso especial. REGLA: $+(n+2)$ se considera como un solo coeficiente con signo positivo, se aisla con paréntesis. * Coeficientes, REGLA: De la multiplicación de los Reales. PROPIEDAD: Reflexiva de la igualdad. $(n+2)a=a(n+2)$, * Signos: (+) por (+) = +	Caso especial, factor común polinomio, f.c.p. REGLA: La expresión no tiene un divisor común, pero sí un divisor parcial $(n+2)$. Secuencia: Agrupar el último binomio $(n+2)$, dentro de un paréntesis de tal modo que se obtengan dos grupos; $a(n+2)+(n+2)$ REGLA: Las cantidades que están dentro de los paréntesis son exactamente iguales.

PROPIEDAD: Idéntico de la multiplicación. $(n+2)(1)=n+2$ • Literales: No hay. $\mathrm{Re}\,sultado-final;a(n+2)+n+2$	PRINCIPIO: La segunda cantidad tiene un coeficiente unitario. $a(n+2)+1(n+2)$ Se obtiene el factor común de cada grupo o factor común polinomio, $(n+2)$ • Cocientes restantes. Sub-tarea: Dividir los términos entre el f.c.p. REGLA: Se divide cada grupo entre el f.c.p. $\frac{a(n+2)}{(n+2)}=a$, primer término del segundo factor. REGLA: Dividir una cantidad entre sí misma da como resultado la unidad. No se escribe como coeficiente, se subentiende. Sub-tarea: Dividir, $\frac{n+2}{n+2}=1$, segundo término del segundo factor. REGLA: Dividirse entre sí mismo es uno. REGLA: EL f.c.p. se escribe fuera del paréntesis. Es el primer factor. $(n+2)$ PRINCIPIO: Se conserva el carácter de grupo. REGLA: El segundo factor lo forman los mismos cocientes resultantes de las divisiones o sub-tareas. a y 1 PRINCIPIO: De conservación de signos para el polinomio del segundo factor. $\mathrm{Re}\,sultado-final;(n+2)(a+1)$
Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación $(n+2)(a+1)$ (+) por (+) es + $(n+2)$ por $a=(n+2)$, primer producto. $(n+2)$ por $1=n+2$, segundo producto. $\mathrm{Re}\,sultado-final;a(n+2)+n+2$ **Interpretación**: PN, $(n+2)(a+1)$ Al multiplicar todo (n+2), distributivamente, aparecen *a(n+2)* y *(n+2)*. El signo "+" del segundo factor propicia el carácter conservativo de la adición.	**Relaciones, codificación y procedimiento algorítmico para resolver la operación** $a(n+2)+\underline{n+2}$ f.c.p. $(n+2)$, primer factor. (+) entre (+) es + $\frac{a(n+2)}{(n+2)}=a$ (+) entre (+) es + $\frac{(n+2)}{(n+2)}=1$, $(a+1)$, segundo factor. $\mathrm{Re}\,sultado-final;(n+2)(a+1)$ **Interpretación**: FA, $\frac{a(n+2)}{(n+2)}+\frac{n+2}{(n+2)}$ $(n+2)(?+?)$ El T.C. es (n+2). (n+2) divide a toda la expresión.

	El T.C. se ubica generalmente a la izquierda del resultado y como primer factor. El otro factor se obtiene parciales ordenados y conservando el signo de agrupación.
Generalización: El algoritmo para la resolución de productos binomios por polinomios es el considerar al binomio como monomio aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación. La operación es una multiplicación.	**Generalización**: El algoritmo para factorizar polinomios con término común binomial es el dividir a toda la expresión entre el Común Binomio. La operación es una división.

Cuadro 4. Algoritmo de resolución para la factorización por término común y aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación. Caso especial.

Identificación PN ↓ **Asociación** grupo ↓ ⟩ **Conservación** **Seriación**	**Identificación** FA ↓ **Agrupación** ↓ **Asociación** ↓ ⟩ **Conservación** **Seriación**

Figura 4. Modelo estructural de los algoritmos para factorizar por término común binomio, empleo de la propiedad distributiva de la multiplicación binomio por polinomio.

El modelo estructural de aprendizaje mostrado en la figura 4 representa el regreso al principio general discutido en la figura 1. Para el producto notable (PN), la diferencia implícita es que se debe considerar al factor $(n+2)$ como un todo y proceder a la resolución. Cabe hacer notar que el producto pudo haberse realizado multiplicando todo por todo, es decir n por a, n por 1, 2 por a y 2 por 1, aunque válido sería el resultado, el objetivo de llevar a cabo un producto notable, no se cumpliría por la simple razón de no estar "abreviando" la operación. Para la factorización, he cambiado el nombre del proceso de clasificación por el de *agrupación* por razones de significado y entendimiento matemático. Ya que la clasificación implica un agrupamiento de clases, prefiero el término "agrupar", por los motivos señalados.

El núcleo conceptual, en este caso, tiene una variante. En los casos vistos anteriormente, esta entidad matemática consistía de un solo elemento (monomio) y ahora es de más de uno (binomio). Es preciso notar que el algoritmo de resolución requiere de una agrupación previa de elementos. De aquí mi inclinación de utilizar las nociones de "grupo", "grupos" o "agrupamiento". Los procedimientos de resolución que implican un monomio o un binomio varían cualitativamente, permitiéndome hablar de dos tipos de núcleos o entidades conceptuales. Por un lado, el *T.C. monomio* y por el otro el *T.C. polinomio* que requiere, como lo vengo de señalar, de una agrupación anterior a la ejecución total del procedimiento de resolución. A los procesos descritos en las figuras 1, 2 y 3 se les llamará entonces procesos algorítmicos por factor o "*término común monomio*", mientras que al procedimiento señalado en el modelo estructural de la última figura, le llamaremos "*factorización por agrupación de términos*" respetando la nomenclatura utilizada en los textos usualmente consultados en el nivel de enseñanza medio superior.

Las Operaciones Algebraicas y sus Agrupaciones Lógicas

El escollo de construir una teoría explicativa de la inteligencia que parta del análisis del pensamiento matemático en sus formas superiores consiste en tomar al lenguaje como reemplazo en parte a la acción. En el lenguaje como aspecto activo del pensamiento verbal, vemos una forma de reflexión, discurso, representación conceptual y procedural. Consideramos al lenguaje matemático como puramente intelectual, transparente y extraño a los engaños de la imagen. En la expresión $a(b+c) = ab + ac$, cada término designa en definitiva una acción; el signo "=" expresa la posibilidad de una sustitución, el signo "+" una reunión , "a" la acción de reproducir "a" veces $(b+c)$, y cada uno de los valores ab y ac la acción de reproducir cierto número de veces la unidad. Cada uno de esos símbolos se refiere a una acción que podría ser real, pero que el lenguaje matemático se limita a designar abstractamente, bajo la forma de acciones interiorizadas, es decir, de operaciones del pensamiento.

Ese carácter activo del razonamiento matemático ha sido notado muy bien por Goblot (op. cit. en Freudenthal, 1978, p:38); "... y menciona en su *Traité de Logique*: <deducir- dice - es construir>". Pero le parecía que la construcción operatoria se hallaba simplemente reglada por las <proposiciones anteriormente admitidas>, mientras que la regulación de las operaciones les es inmanente y está constituida por su capacidad de composiciones reversibles, o dicho de otra manera, por su naturaleza de <grupos>. Si consideramos ahora las expresiones algebraicas ejemplificadas en los cuadros anteriores como elementos del pensamiento matemático; conceptos de clases o relaciones, se encuentran en ellas el mismo carácter operatorio que en sus combinaciones.

Ahora, una <clase> supone una clasificación, y el hecho primario está constituido por esta última, pues son las operaciones de clasificación las que engendran las clases particulares. Independientemente de una clasificación de conjunto, un término genérico no designa una clase, sino una colección intuitiva. De esta manera clasifico como sigue a las operaciones algebraicas (tabla 3), objetos de mi estudio, considerando los procedimientos de solución (cuadros 1, 2 , 3 y 4) y los modelos estructurales de los algoritmos de "producir" eficientemente y de factorizar por T.C., una expresión algebraica dada (figuras 1, 2, 3 y 4).

Producto	PN $\Leftrightarrow$ FA	Método
Distributivo Monomio Fichas 0, 1, 2	Factor Común Monomio	Término Común Fichas 0', 1', 2'
Distributivo Polinomio Ficha 3	Factor Común Polinomio	Agrupación de Términos Ficha 3'

Tabla 3. Clasificación de las fichas de trabajo según grupos representativos y núcleos o entidades conceptuales.

En el campo del pensamiento matemático constituido y representado en la sección "relaciones, codificación y procedimientos de resolución" de los cuadros 1 al 4, la realidad psicológica consiste en sistemas operatorios de conjunto donde se sigue una secuencia de procedimientos condicionados a una jerarquía de habilidades cognitivas. El problema esencial del aprendizaje cognitivo algebraico, consistirá entonces en identificar las relaciones entre habilidades y contenido. Me limitaré a analizar el trabajo real de los alumnos y concebir una explicación global de algunos patrones de razonamiento presentes al momento de realizar una tarea.

La noción de "grupo" (f.c.m. y f.c.p.), que aplico a las estructuras espaciales y temporales de las operaciones algebraicas, la he convertido desde el punto de vista instrumental, en una noción del orden y coherencia del pensamiento matemático. El lenguaje de las totalidades que emplearé en el diseño de instrumentos de análisis será un modo de descripción. Ese lenguaje lo admitiré para mis propios <agrupamientos> y lo he de adoptar también para las <formas> o estructuras elementales de información.

Conocimientos y Habilidades Previas

Para lograr un cierto grado de desarrollo y estructuración del conocimiento matemático, es necesario el presentar algunas preconcepciones necesarias para lograr tal objetivo. Los conocimientos previos o prerequisitos para llevar a cabo correctamente la tarea, supuestamente fueron aprendidos o al menos enseñados en el nivel medio de enseñanza (escuela secundaria), sino es que en el nivel elemental (escuela primaria). Utilizo la estrategia de presentar simultáneamente la asociación de un contenido a una o varias habilidades cognitivas.

Como se recuerda, el álgebra consta únicamente del uso correcto de un mecanismo formal elemental y aporta una economía de pensamiento muy considerable. Estas estructuras de información se definen como un conjunto de elementos relacionados mediante leyes, reglas y propiedades que determinan su interacción y al mismo tiempo su relación como partes integrantes de un todo. Estas estructuras quedan implícitas en las definiciones y procedimientos que pasaré a ejemplificar.

A continuación presento un cuadro que representa lo que el alumno debe traer en su intelecto y saber utilizar, es decir, el *bagaje* con el que el estudiante supuestamente se enfrentará a la nueva situación. El cuadro lo distribuyo utilizando dos tipos de herramientas con las que el estudiante empezará a edificar y apropiar el conocimiento PN - FA. Esta herramientas las represento tanto a nivel de procesos como de contenidos. Éstos, a su vez, al grado de definición y procedimiento. Utilizo las abreviaciones para los procesos siguientes: *Ide*, identificación; *Cla*, clasificación; *Aso*, asociación; *Con*, conservación; *Ser*, seriación; *Pro*, proporcional; *Fun*, funcional y *Prp*, proposicional.

PROCESO	CONTENIDO	DEFINICIÓN	PROCEDIMIENTO
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Operaciones fundamentales	Adición (+) Sustracción (-) Multiplicación (*) División (/)	Suma resta o diferencia producto cociente
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Propiedad Conmutativa	Adición Multiplicación	Sumandos: numéricos, (3 + 4 = 7); literales, (a + b = 8) Factores: numéricos, (2 * 3 = 6); literales, (ab = 15)
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Conmutación	Cambiando de lugar los sumandos / factores (permutándolos), el valor de la suma/ producto no varía.	x + y = y + x
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Símbolos de Asociación	Se emplean para tratar una expresión como si fuese un sólo número. Para sustituir el signo de multiplicar. Para cambiar el orden de las operaciones en el cálculo.	Orden en el cual se han de hacer las operaciones fundamentales. Propiedades para suprimir (..), [..], {..}.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Multiplicación	Factores en los términos. Coeficiente numérico y literal.	3 * 4s = 12s
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Término	Número o producto de números.	5, a; 3wx, 2/ 5 rst
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Factor de un término o Divisor del término	Cada uno de los números que al multiplicarse forman dicho término.	3*w*x; 2/ 5 * r * s * t
Ide, Cla, Aso, Con, Pro, Prp.	Coeficiente	Cualquier factor o grupo de factores de un término es un coeficiente del producto de los restantes factores.	3abc 3 es coeficiente numérico, abc, es coeficiente literal.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Expresión Algebraica	Consta de uno o más términos unidos por los signos + o -.	monomio, binomio, polinomio
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Potencia	Multiplicación repetida de un factor.	base^exponente= potencia.

Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Semejanza y No semejanza	Tienen (o no) la misma parte literal.	Coeficientes literales comunes. Suma y resta para asociarse.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Asociación de términos semejantes	Tienen los mismos factores literales, cada uno con la misma base y el mismo exponente.	Sumar o restar los coeficientes numéricos. Conservar el coeficiente literal común.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Ordenación	Creciente, los esponentes de una cierta letra aumentan en términos sucesivos y decreciente, cuando disminuyen.	x^3 > x^2
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Multiplicación de Monomios	Potencias de la misma base: Se conserva la base y se suman los exponentes.	x^a * x^b = x^a+b (x^a)^b = x ^a*b
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Multiplicación Monomio por Polinomio	Propiedad distributiva. Para comprobar la multiplicación de polinomios, invertir el orden del producto y efectuar la multiplicación o bien sustituir las letras por valores adecuados distintos de 0 y 1.	Ordenar cada polinomio. Multiplicar cada término de un polinomio por todos y cada uno de los del otro polinomio. Sumar términos semejantes.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	División de Monomios	Potencias de la misma base: Se restan los exponentes.	Propiedades, si $a< b$ $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $\frac{x^a}{x^a} = 1$ $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Descomposición en Factores	Un producto es el resultado de multiplicar dos o más números. Los números que se multiplican son factores o divisores de ese producto. Todo número tiene siempre dos factores o divisores que son la unidad y el propio número.	Para obtener el producto de un polinomio por un monomio se multiplica el monomio por todos y cada uno de los términos del polinomio.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Prp.	Número primo	Sólo tiene como divisores a la unidad y el propio número.	1 no es primo, 2 es el único par primo.
Ide, Cla, Aso, Con, Ser, Pro, Fun, Prp.	Factor o Divisor común	de un polinomio es un monomio que es factor o divisor de todos los términos del polinomio.	Hallar el MCD. Hallar el otro factor dividiendo cada uno de los términos del polinomio por el

		El MCD es el producto de todos sus factores comunes.	MCD (máximo común divisor).

Cuadro 5. Conocimientos y habilidades previas necesarias para abordar el tópico de Productos Notables y Factorización Algebraica.

De este modo concluyo la presentación del problema algebraico, las demandas cognitivas que implican la tarea, la complejidad de la misma y los conocimientos y procesos previos que se requiere domine el alumno para que acceda correctamente al nuevo saber. En el capítulo siguiente presentaré un procedimiento propio en el diseño de instrumentos para llevar a cabo el análisis racional de procesos de construcción de los alumnos como medio que permita especificar los supuestos implícitos sobre los procesos cognitivos que subyacen a las jerarquías de aprendizaje.

Capítulo

4

Diseño de Instrumentos

4. DISEÑO DE INSTRUMENTOS

DIMENSIONES DE ANÁLISIS

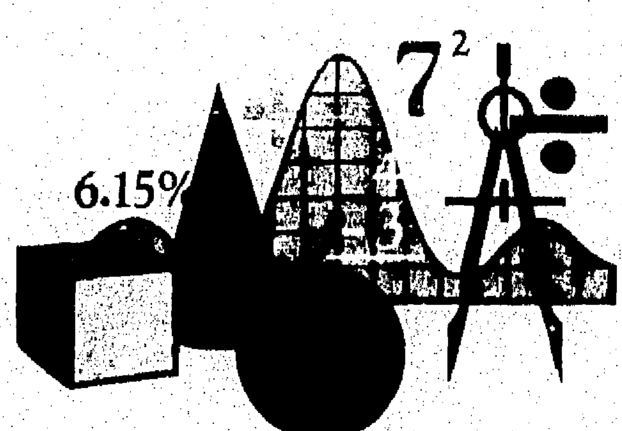
Para el diseño de instrumentos parto de asumir dos tipos de análisis en la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos. El primero considera un conocimiento declarativo y el segundo, uno procedural.

1) El conocimiento declarativo

Por conocimiento declarativo se entiende, por una parte, a aquel saber proposicional abstracto simple o complejo que poseen los alumnos, y por la otra, al conocimiento imaginal guiado por datos extereoceptivos (visual) o por datos conceptuales (mental).

Si observamos en el diagrama siguiente (número 2), el conocimiento declarativo lo caracterizan dos aspectos de cada concepto o esquema conceptual y que se desarrollan con cierta independencia para la pregunta *¿qué es?* (fase I). Una de ellas es la ***interrelación conceptual***, que valora el grado de relación que se establece entre los conceptos y más concretamente, si los conceptos se encuentran ***relacionados*** o ***compartimentados***. Con estas consideraciones, a manera de definición, podremos ir descubriendo el núcleo conceptual y su periferia.

En el pasaje evolutivo entre la pregunta *¿cómo se resuelve?* y la consigna *¡resuélvelo!*, aparece la dimensión *aplicabilidad* que estima el poder descriptivo y explicativo de los conceptos, reglas, principios y leyes, en otras palabras, el grado de racionalización de los conceptos que aplican los alumnos. De ahí, que sus dos variantes sean la *consecuencia*, cuando hay acuerdo entre el concepto que dicen poseer y el que aplican, o la *inconsecuencia*, en caso contrario. En este pasaje pretendo descubrir los procesos que ponen en juego los estudiantes al momento de resolver los problemas.



(Coherencia Interna)

Conocimiento Declarativo

FASES inicio ⇒ Interrelación Conceptual
↓ a) Relación b) Compartimentación
I ¿QUÉ ES?
⇒ Aplicabilidad
↓ a) Consecuente b) Inconsecuente

II ¿CÓMO SE RESUELVE?

Conocimiento Procedural

↓ PN ⇔ FA
(Secuencia Didáctica)
III ¡RESUÉLVELO!
↓
fin

Diagrama 2. Relaciones de análisis para el conocimiento declarativo y procedural a través de las secuencias didácticas estudiadas.

La justificación de la elección de estas dos variables, obedece a que aportan información directa del estado del esquema conceptual, son relativamente sencillas de estimar, y guardan cierto paralelismo con propuestas realizadas por filósofos de la ciencia (Lazlo, 1987) para valorar el progreso científico a través del crecimiento de dos reguladores: uno que da cuenta de la adecuación de las teorías a los hechos del mundo, y otro que tiende a aumentar el grado de generalidad y abstracción de las mismas y que se refiere a las relaciones que se establecen entre los elementos de la teoría. El desarrollo del instrumento, contemplando estas variables, lo expongo más ampliamente en la descripción de la tabla número seis.

Una de las contribuciones más importantes de la psicología cognitiva son las técnicas de representar el conocimiento y procesamiento cognitivo de las personas. En particular, los modelos de esquema que describen como las personas seleccionan e integran información en una representación coherente; los análisis de errores y del tiempo hipotético de reacción durante la consecución de los pasos para resolver un problema.

De los modelos mencionados se han obtenido diferencias considerables entre expertos y novatos solucionadores de problemas en sus aspectos vinculados con la percepción de la estructura, la organización de los elementos dados, el reconocimiento de patrones en la memoria y la calidad de transferencia hacia situaciones nuevas. Pasaré ahora a clasificarlos.

Clasificación de los Algoritmos por medio de sus representaciones

Con el fin de tener más claro y dar evidencia de la correspondencia entre las variables seleccionadas, dispongo en la tabla siguiente las dos relaciones estudiadas dando como resultado una clasificación de representaciones algorítmicas ilustrada mediante los esquemas conceptuales y procedurales (tabla 4).

Dimensión Interrelación Conceptual	**Dimensión Aplicabilidad** *Consecuencia*	**Dimensión Aplicabilidad** *Inconsecuencia*
Relación	Esquemas Coherentes/Consecuentes	Esquemas Inconsecuentes
Compartimentación	Esquemas Compartimentados	Esquemas Incoherentes

Tabla 4. Clasificación teórica de esquemas por medio de las relaciones interrelación conceptual y aplicabilidad.

Estos cuatro tipos de esquemas procedurales pertenecen a la categoría primaria, queriendo decir con esto, que sus características son de primer orden, básicas o puras. Además de éstos tipos de esquemas, se podrán encontrarán esquemas intermedios o secundarios, mismos que paso a caracterizar:

Esquemas Coherentes/Consecuentes

- ◊ Esquemas racionalizados.
- ◊ Atractores conceptuales estables: funcionan como principios explicativos y predictivos, encontrándose relacionados con conceptos periféricos.
- ◊ Resistencia al cambio.
- ◊ Denotan que ha habido aprendizaje académico significativo.
- ◊ Frecuente en científicos generalistas.
- ◊ En la construcción de la estructura las relaciones internas corresponden a las inter-operacionales.

Esquemas Compartimentados

- ◊ Esquemas racionalizados.
- ◊ Atractores menos generales, no relacionados, que funcionan como principios explicativos en un terreno concreto.
- ◊ Menor resistencia al cambio, pues los atractores son relativamente inestables.
- ◊ Denotan que ha habido aprendizaje académico significativo.
- ◊ Muy frecuente en científicos especialistas.
- ◊ En la estructura existe correspondencia y transformaciones entre las formas aislables, utilizando invariantes.

Esquemas Inconsecuentes

◊ Esquemas no racionalizados.
◊ Atractores implícitos que funcionan como principios explicativos.
◊ Los conocimientos explícitos no ofrecen resistencia al cambio, pero los implícitos sí.
◊ Denotan que hay conocimientos significativos implícitos.
◊ No se da en científicos.
◊ En la estructura existen transformaciones locales de los elementos.

Esquemas Incoherentes

◊ Esquemas no racionalizados.
◊ Atractores implícitos que funcionan como principios explicativos.
◊ Resistencia al cambio de los conocimientos implícitos.
◊ Denotan ausencia de aprendizaje significativo.
◊ No se da en el campo de especialización de ciertos científicos.
◊ En la estructura los elementos están aislados, no hay transformación ni composición.

El Análisis del pasaje *¿cómo se resuelve?* a *¡resuélvelo!* reclama del ejercicio de:

1. *La identificación de la presencia o ausencia* de ciertos componentes de la información. Dentro de las operaciones algebraicas se tiene que ahorrar eficazmente el pensamiento, buscar soluciones inmediatas pos simple inspección reconociendo elementos y clases.

2. *La identificación de la existencia de ciertas relaciones* entre algunos componentes.

3. *La identificación del tamaño y distribución* de unidades textuales que representan los diferentes componentes al momento de describir un algoritmo de resolución.

Para llevar a cabo este segundo análisis he diseñado un sistema de códigos acerca de los diferentes tipos de errores y modos escritos que alargan o acortan el trabajo de los alumnos.

Código A: Diferentes tipos de errores

+	error de suma
-	error de resta
*	error de multiplicación
Vx	valor incorrecto debido a las tablas de multiplicar
V/	valoración incorrecta del cociente debido a otras causas
(o	omisión o colocación incorrecta de paréntesis
0	omisión del cero en la operación
-v	confusión de literales
0+	cero de más en la operación
0-	cero de menos en curso de multiplicar
1+	uno de más en la operación
1-	uno de menos en la operación
No.?	confusión de cifras
fp	factor parcial

pi	producto incompleto
-P	error en la aplicación de un principio
-Pr	error al aplicar una propiedad
-R	error en la aplicación de una regla
-L	violación a una ley
-Re	relación incorrecta
f.c.m.	factor común mononio incorrecto
f.c.p.	factor común polinomio incorrecto

Código B: Modos Escritos que *alargan* el trabajo

*T*T* multiplica todo por todo

Código C: Modos escritos que *acortan* el trabajo

PN emplea el Producto Notable por visualización

La representación global de la tarea

Considero, para la elaboración de la tabla 5, la evolución global de la tarea durante la ejecución de todas las fichas de trabajo en secuencias didácticas diferentes, además trato de identificar los errores presentes a lo largo del encadenamiento de procesos de solución así como la identificación de ciertos procesos empleados por los alumnos para llegar a la solución del problema. Un error es un obstáculo para lograr con éxito la solución. La acumulación y funcionalidad de procesos cognitivos nos indicará que tan estratégico es un estudiante con respecto a otro. Identificaré la presencia (+) o ausencia (-) del proceso ya que de este modo podré darme cuenta de las carencias cognitivas de determinados alumnos. La globalización que representa este instrumento me permitirá observar el "todo" del procedimiento, es decir, notaré que fue lo que ocurrió además de cómo es que se logró. Esta misma tabla la utilizaré para analizar estructuralmente el aprendizaje cognitivo de los alumnos permitiéndome también discutir la manera en que ciertos procesos cognitivos se presentan o no, durante el desarrollo y adquisición de los productos notables y su correspondiente factorización algebraica. Con ellos mismos, me auxiliaré para proponer y desarrollar alguna alternativa dentro de un modelo teórico del aprendizaje algebraico que contemple la interacción entre la adquisición de nuevos conocimientos, el desarrollo de procesos cognitivos y compare las operaciones mentales que ejecutan los alumnos en términos de número y calidad. De este modo contribuiré al estudio del paradigma cognitivo actual de los psicólogos atendiendo siempre a los procesos mentales desarrollados por el sujeto mientras resuelve un problema.

El análisis estado-espacio ofrecerá una representación completa de los algoritmos y estructuras lógicas de una tarea e igualmente, me permitirán estudiar el efecto de la estructura del problema en la ejecución de quien lo resuelve.

Tabla 5. Descriptores.-

Apartado $PN \Leftrightarrow FA$, se refiere al caso particular entre un producto notable *(PN)* y su respectiva factorización algebraica *(FA).* Además presenta el resultado obtenido por el estudiante (respuesta).

Item/ ficha/ logro, es la consigna a cada ficha. I para *¿qué es?;* II para *¿cómo se resuelve?* y III para la ejecución *¡resuélvelo!* asociada al número de tarjeta, según secuencia didáctica estudiada, y resultado de la ejecución (1, correcto; 0, incorrecto).

Interpretación, es la traducción del camino seguido por el alumno para hallar la solución. Incorpora tanto el conocimiento declarativo (qué es el objeto matemático), como el procedural (cómo se resuelve el problema). Implica mi propia codificación.

Obstáculo, son los errores cometidos por el alumno al momento de identificar, describir y resolver el problema.

Estrategia, son el grupo de acciones que un estudiante emplea como elección deliberada de un método utilizado. Para la fase I, Identificación (*Ide*); para las fases II y III, Clasificación (*Cla*), Asociación (*Aso*), Seriación (*Ser*), Conservación (*Con*) y Proporcionalidad (*Pro*), con sus respectivos componentes de logro, "+" o "-".

Secuencia: Horizontal, alumno ______________________ NIP ___________

Apartado PN⇔FA	Item/ficha/ logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
ejercicio	I 0			
	II			
respuesta	III 1 o 0			
ejercicio	I 0'			
	II			
resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 1			
	II			
resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 1'			
	II			

resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 2			
	II			
resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 2'			
	II			
resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 3			
	II			
resultado	III 1 o 0			
ejercicio	I 3'			
	II			
resultado	III 1 o 0			

Tabla 5. Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y acciones detectadas durante la ejecución.

De la interrelación conceptual a la aplicabilidad

De acuerdo con la representación global de la tarea, las respuestas de cada alumno acerca de los temas estudiados además de sus apartados, son ubicadas en casillas correspondientes a cada uno de estos niveles de transición (el conjunto de estos niveles para un alumno determinado da lugar a lo que denomino *patrón*), con indicación además de la existencia de consecuencia o inconsecuencia en estos conceptos y con posibilidad de identificar lo esencial y o superfluo en relación al esquema general.

Para llevar a cabo un estudio a detalle, intentaré determinar la información sobre la *equitatividad* [iii] de la estructura que poseen los alumnos con determinados esquemas conceptuales, poniendo atención particular a lo que ellos "dicen saber" y lo que verdaderamente "aplican". Elaboré la tabla 6, cuyos descriptores los explico a continuación.

[iii] Por no encontrar el sustantivo apropiado de equitativo, he procedido ha denominarlo "equitatividad" pues hace referencia a la calidad o condición física y geométrica de un fenómeno a quedarse en equilibrio. "Equidad" no resultaría apropiado ya que la entiendo como el ánimo, la moderación o propensión a dejarse guiar o fallar por el sentimiento del deber o la conciencia.

Tabla 6. Descriptores.-

No. item, se refiere al número de la ficha de trabajo presentada al alumno según la secuencia mostrada.

⇒ *Pasaje I a II;*

Interrelación Conceptual

Relacionado	El alumno se encuentra en el mismo nivel para las distintas consignas.
Compartimentado	El alumno contesta en niveles diferentes para los distintos conceptos o apartados.

Aplicabilidad

C/ I Consecuencia / Inconsecuencia, para saber si el alumno tiene o no incorporados racionalmente los conceptos.

⇒ *Pasaje II a III;*

Consecuente	El alumno aplica lo que define.
Inconsecuente	El alumno aplica conceptos distintos a los que ha definido.
x	Resulta imposible determinar si existe Consecuencia o Inconsecuencia, ya sea por naturaleza de las respuestas de los alumnos o por el propio carácter descriptivo de la consigna.
0	Cuando no responden a las preguntas, o si lo han hecho, tales respuestas carecen de sentido.
Resultado	obtenido (favorable, 1/desfavorable, 0).
A/E	Relación entre el número de aciertos y número de errores.

Secuencia: Vertical, alumno ______________ NIP ______________

	Item	0	1	2	3	0'	1'	2'	3'
I a II	**Rel**								
Interr Concep	**Com**								
II a III	**C**								
Aplica	**I**								
A/ E	**x / 0**								
	R	1 o 0	1 o 0	1 o 0	1 o 0	1 o 0	1 o 0	1 o 0	1 o 0

Tabla 6. Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

2) El conocimiento procedural

La segunda dimensión de análisis que considero, la constituye el conocimiento procedural cuyo aparato generativo lo invoco en la pregunta *¿cómo se resuelve?*. El tiempo es un "indicador" que determina el proceso de construcción. El tiempo indicará la duración que toma la creación del "espacio lógico" que pretendemos destacar y nos permitirá establecer una relación entre el empleo de procesos cognitivos y el conocimiento desarrollado.

La dispersión conceptual en el espacio lógico y tiempo

Con la visión anterior, diseñé la tabla 7 en la cual muestro el orden de presentación de las fichas, según la secuencia didáctica aplicada, con sus respectivas relaciones de tiempo de respuesta a la consigna dada. A cada ficha le corresponden tres valores de tiempo pertenecientes a las instrucciones demandadas. Además, dejo libertad en la columna "espacio lógico" para codificar y representar la aparición de un "núcleo" y su periferia.

Tabla 7. Descripción.-

Secuencia: Horizontal, alumno ____________ NIP ________

ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico	ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico
0			2		
0'			2'		
1			3		
1'			3'		

Tabla 7. Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

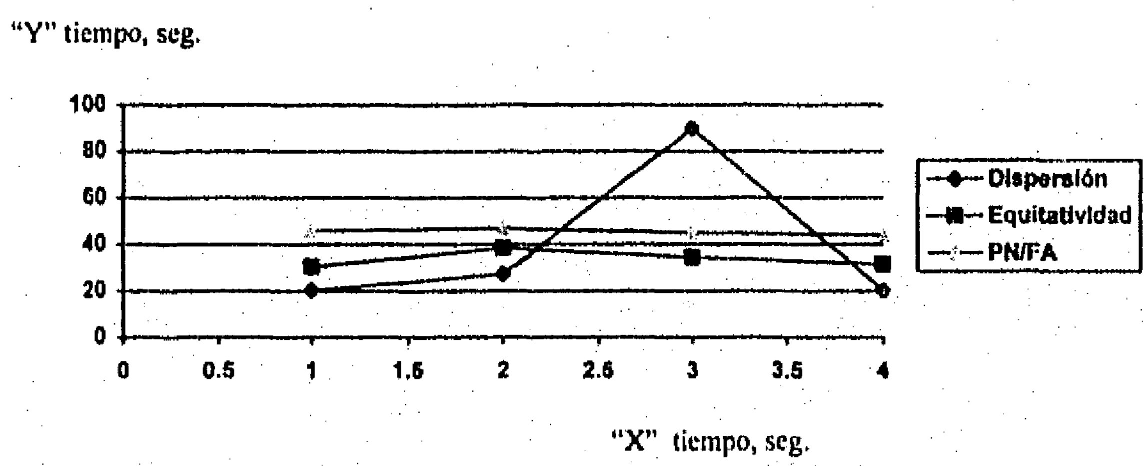
Correspondencia topológica entre el espacio y el tiempo

Si hablo de espacio lógico, bien pudiese representarlo en un gráfico bidimensional. Representar los núcleos y sus periferias en un plano cartesiano, no se puede realizar ya que el núcleo (T.C.), como tal, no cuenta con herramientas geométricas que de ellas se deriven para localizar "puntos" o pares coordenados *P(x, y)*, que sean elementos de esa graficación. Un espacio geométrico, matemáticamente hablando, es una representación cerrada o limitada, es un área definida, cuantificada, mensurable. Pero como hablo de núcleos conceptuales, identificables en estos casos como variaciones de "términos comunes", más que de espacios topológicos, son espacios semánticos. Separar los T. C. en sus respectivas partes (signo, coeficiente numérico, literal y exponente), y tratar de situarlos en un eje coordenado x, y, no podría lograrlo por la razón que expuse. No existen cuantificables en este sentido. En adición, los puntos que definen un espacio provienen, geométricamente, de una relación entre dos o más constructos así como de la dependencia que guardan entre sí. Aquí se habla entonces, de variables dependientes e independientes, dominio y contradominio de la función así como de la existencia de relaciones y proporciones, si es que las hubiese.

Una manera indirecta para estudiar los procesos de construcción de los núcleos T.C. y los procesos utilizados durante esa elaboración, a mi parecer, podría ser la de graficar el tiempo que le lleva al estudiante el resolver una tarea determinada. Cuento con los registros por ficha de trabajo y por alumno en tres momentos de la elaboración. Estos indicadores mostrarían de cierto modo, la *energía cognitiva* necesaria en el momento de trabajar con uno o varios procesos que implican un contenido en particular. Puedo hablar de una correspondencia estimada en términos de contenido (núcleo y periferia) y la herramienta de construcción (proceso) para lograr un fin. De cualquier otra forma, no me sentiría en condiciones de llevar a cabo este propósito. Las ligas correspondientes a las relaciones entre núcleos y procesos para elaborarlos, nos podrían indicar que tan estratégico es un estudiante. Si por ejemplo, en el proceso de resolver un problema que emplee núcleos complejos (ficha 2'), a un cierto alumno le toma el menor tiempo de respuesta de toda la selección de alumnos estudiados, entonces podríamos hablar de un alumno estratégico. Implícitamente haría uso de todas sus habilidades, recuperaría rápidamente su conocimiento previo y sobrepasaría cualquier dificultad. De lo contrario, un estudiante poco estratégico, tendría problemas al tratar de hacer uso de sus habilidades intelectuales cuando se enfrentara a la situación problema; a lo largo del algoritmo, posiblemente no jerarquice sus procesos, o sus niveles de interpretación sean bajos con respecto a otro alumno. Además, registraría tiempos mayores en su proceso de elaboración del conocimiento ya que encontraría un sin fin de obstáculos durante su camino de búsqueda y elaboración de la respuesta adecuada. Con lo anterior deseo justificar que el tiempo puede determinar que tan eficiente es un alumno ante una situación dada. El mismo tiempo, recordemos, que para los fines de este análisis, es un indicador, más no un factor de desarrollo. Esta interpretación es con la idea de seguir contemplando "momentos" en la construcción del conocimiento matemático.

Sin dejar de menospreciar las elaboraciones de todos los alumnos en cuestión, me parece de mayor utilidad el considerar a la secuencia didáctica como una variante en el proceso de construcción. Pretendo hacer un estudio de correspondencia entre el desenvolvimiento y presentación de un problema y su implicación procedural. Es decir, que un mismo alumno, se someterá a las secuencias horizontal y vertical en dos momentos diferentes y se analizarán sus procesos y tiempos en la resolución. En este análisis se supone que el tiempo debe estar en función del número de procesos cognitivos requeridos para resolver la tarea.

En esta perspectiva, con los valores tabulados en la tabla anterior (número 7), y con las variantes en la secuencia didáctica mostrada, he creado un sistema de graficación en dos coordenadas. Tanto para el eje de las abscisas como para el de las ordenadas, el parámetro "medida" es el tiempo de ejecución de la tarea para los tres momentos de realización de la misma. En el eje "*x*" represento los tiempos obtenidos al resolver los productos notables y en el eje "*y*" los tiempos de las factorizaciones. De esta manera podré visualizar en el plano bidimensional, por una parte, tanto la dispersión como la equitatividad para la presentación didáctica determinada para un mismo alumno. Por el otro lado, estaré en condiciones de observar y discutir el comportamiento de los núcleos y sus periferias así como también, apreciar sus tendencias a través de la correlación secuencia didáctica / sujeto. El análisis que se suscite de la interpretación de estos gráficos mostraría los elementos significativos (anclajes) en la construcción del conocimiento dando así, valor a la presentación didáctica.



Gráficos 1. Relación temporal entre la dispersión y la equitatividad.

El patrón que subyace en el conocimiento de proceduralización

Por medio del conocimiento de proceduralización y de la dispersión conceptual a través de los rasgos y propiedades descritas en los instrumentos anteriores, subclasifiqué los procesos presentes en las representaciones de los alumnos. Para lograrlo, interpreto las estructuras por medio del grupo de fenómeno al que pertenece, identifico los rasgos o propiedades del propio esquema y defino el patrón en base a la comparación y evaluación de la pertinencia del mismo, además, del sistema algebraico en el cual se agrupan todos los criterios de clasificación. Aquí relaciono el contenido lógico y el psicológico. Con la elaboración y agrupación de ciertos patrones, podré tener fundamentos para llevar a cabo la propuesta didáctica como culminación de esta obra.

Incorporo tanto el esquema como la idea que subyace detrás del procedimiento de solución y por último, describo en la tabla 8, la idea del grado de diversidad de los conceptos atractores (dispersión conceptual) así como también el informar acerca de la evolución de la estructura conceptual (equitatividad). En el último renglón, valoro los procesos cognitivos frecuentes en el procedimiento de ejecución del alumno. Lo anteriormente expuesto, me dará elementos de estimación de las formas de accionar de los sujetos a través de un proceso y una estructura.

Tabla 8. Descriptores.-

Idea Subyacente	PATRÓN
Dispersión Conceptual	Idea del grado de diversidad de los conceptos atractores.
Equitatividad	Informa sobre la estructura de los alumnos con determinados esquemas conceptuales.
Proceso	Cita los procesos cognitivos presumiblemente, utilizados durante la ejecución.

Secuencia: ____________________ alumno ______________ NIP ______________

	Apartado *PN* ⇔ *FA*
Interpretación	Grupo de fenómeno: Rasgos o propiedades:
Definición del patrón	Comparación o contraste: Evaluación de la pertinencia: Dimensión de clasificación:
Esquema Subyacente	
Idea Subyacente	
Dispersión Conceptual	
Equitatividad	
Proceso	Modelo Estructural

Tabla 8. Esquematización del Conocimiento de Proceduralización, pasaje II a III.

Los Procedimientos de las Secuencias de Acciones

Retomando las ideas de Wagner, Sternberg y Gagné, construí un último instrumento que contempla algunos componentes de logro. Para alcanzarlo, es conveniente dividir la tarea en subprocesos de proceduralización para darme cuenta de las acciones que siguen los alumnos cuando se confrontan a una consigna determinada. Así, en este instrumento de análisis (tabla 9), contemplo la creación de producciones de los estudiantes mediante el uso de códigos selectivos.

Compilación de la Regla, ____
____

"Resolver el (PN) ______________ por simple inspección. O la (FA) ______________"

P.1.	Creación de una representación proposicional
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
...	
P.2.	Creación de representaciones para ejemplificar cada paso en la secuencia de acciones
Producción 1	Si la meta es... entonces, la submeta es...
Producción 2	Si la meta es... entonces, la submeta es...
Producción 3	Si la meta es... entonces, la submeta es...

Tabla 9. Descomposición proposicional de las acciones durante la ejecución de la tarea.

De este modo termino la descripción del diseño de los instrumentos de apoyo a la investigación y pasaré a la siguiente sección para presentar los resultados obtenidos.

Capítulo

5

Resultados de Investigación y su Interpretación

5. RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN Y SU INTERPRETACIÓN

Para la interpretación de los resultados de la investigación, es conveniente que retome los conceptos empleados por diversos autores de teorías cognitivas como Wagner y Sternberg, Biggs, Halford, Miller o Campos (obras citadas en el capítulo uno), para dejar bien asentado el significado y empleo de algunos términos de la literatura cognitiva que utilizo. Así, una unidad informativa o enunciado está constituida por *chunks* (Miller, 1986). Por hábito desarrollado, hablaré de igual manera para referirme a esquemas o estructuras.

Para la selección de esquemas o estructuras psicológicas representativas revisé la literatura especializada en cognición, publicaciones y tratados generales que abordan este tema, así como a ciertas investigaciones e informes relacionados al asunto como también a la práctica y experiencia personal. Por otra parte, establezco una serie de conceptos básicos que pertenezcan al campo del análisis que pretendo, asimismo, estructuro una serie de tablas que sirvan de marco sintético para seleccionar los esquemas conceptuales representativos de la construcción del conocimiento matemático en el primer año de la preparatoria. Tales conceptos son el *núcleo conceptual*, *anclaje*, *distancia lógica*, *memoria*, *unidad de información*, *sistema reproductor generativo*, *bagaje*, *metacomponente*, *decalage*, *espacio lógico* y *almacén*, que presenté en el primer capítulo de este estudio.

Para la clasificación y selección de los esquemas, por un lado, recurrí a un perito matemático para que aportara su visión amplia y comprehensiva de la endoestructura de los Productos Notables y la Factorización Algebraica, ayudándome de este modo, a discriminar entre lo fundamental y lo accesorio, y a captar las relaciones existentes entre los diversos puntos clave de este tema. La visión de experto no es en principio didáctica ya que analiza estos temas desde su propia disciplina. Por el otro lado, me apoyé de profesionales en psicología cognitiva para que aportaran sus experiencias en la selección, clasificación y puesta en evidencia de su saber acumulado. De esta forma, unifiqué criterios de la lógica formal y de la psicología cognitiva.

A continuación pasaré a categorizar algunos de los criterios que tomé en consideración para seleccionar los esquemas de los alumnos recordando que son seis alumnas pertenecientes a la escuela *A* y siete a la *B*; seis alumnos a *A* y 5 a *B*. Los resultados que mostraré corresponden a trece estudiantes de ambas escuelas bajo las condiciones citadas en el capítulo dos de este trabajo.

Proceso tomado de la Experiencia

Lo consideré optando por un modelo de inmersión inductiva, sin esquemas previos. Conocer el campo, saber cuáles son sus conceptos y puntos fundamentales no fue suficiente. Esto constituye tan sólo el polo objetivo de los conocimientos. Luego los vinculo y filtro a través de las otras variables o criterios y condiciones que constituyen el marco de adaptación a cada situación específica.

Criterio de Representatividad

Seguí ciertos procedimientos de muestreo y recurrí a los <casos representativos>, que son punto de enlace a partir de los cuales voy desplegando el trabajo sobre los esquemas en un avance progresivo en profundidad y coordinación entre los elementos.

Criterio de Ejemplaridad

Hablé de este sentido para referirme a los esquemas de lo típico, lo representativo, lo fundamental, lo elemental, los núcleos privilegiados de cada esquema y en particular utilizo la importancia estratégica de ciertas ideas de gran alcance lógico dentro de las distintas respuestas de los alumnos. De esta manera, las nociones básicas permitirán avanzar y adquirir nuevos conocimientos acerca de las representaciones que se estudian. Por su sentido instrumental, el alumno podrá utilizar los esquemas para su propio desarrollo cognitivo y, por su sentido lógico, los utilizará para estructurar en torno a ellos distintas nociones de ese tema.

Significación Epistemológica

Respeté la estructura propia de las matemáticas como una de las condiciones fundamentales de la selección y traté de descubrir en ella, lo que Bruner denomina "nudos" estructurales, esto es, los conceptos clave que actúan de sistemas de conexión de la estructura temática. En sí, respeté la "estructura sustantiva" de la matemática. Esos nudos estructurales equivalen a los núcleos conceptuales tan citados a lo largo de este trabajo.

Transferibilidad

Privilegié aquellos aspectos con mayor poder de transferencia; es decir, aquellos datos, conceptos o habilidades cuyo dominio será beneficioso no sólo en ese tema, sino también en ortos: aprendizajes generalizables, aplicables a situaciones distintas a aquella en que aprendió.

Durabilidad

Aquí, me centré en aquellos aspectos menos perecederos, doy vuelta a lo fundamental, a lo que siempre fue necesario.

Secuenciación

Una vez seleccionados los esquemas, es preciso ordenarlos. Estos esquemas mostrarán no sólo incidencia a nivel *cuantitativo* (cantidad de aprendizaje logrado), sino también *cualitativo* (tipo de aprendizaje: más o menos significativo, con diverso nivel de estructuración interna, etc.).

Las secuencias de resolución en su sentido puramente estructural o de orden, podrán ser *simples* o *complejas*. En las secuencias puedo distinguir dos aspectos: la importancia dada a cada elemento del contenido (que puede ser cada tema, cada concepto, cada algoritmo, etc.) y el *espacio-duración* que ocupa en el desarrollo de dicha secuencia.

Para llevar a cabo el proceso de recopilación de datos, hice llamado a una nomenclatura especial. En todas las tablas que desarrollé en el capítulo anterior, existe, en la parte superior, una leyenda. La secuencia didáctica (horizontal o vertical), el nombre del sujeto y un NIP (número de identificación personal). El NIP consta de cinco caracteres, el primero (E, N o M), por si el alumno lo considero experto, novato o medio desde el principio de la experiencia y debido a su trayectoria y desenvolvimiento académico; el segundo carácter (H o M) si se trata de un alumno o de una alumna; luego se hace referencia al tipo de escuela de procedencia (A, pública; B, privada), y los dos últimos espacios para el número de alumno conforme al tipo de secuencia didáctica al cual se refiere el llenado de la tabla (10's, horizontal o 20's, vertical). Esto lo hice con el fin de identificar al inicio de la experiencia una clave y no un personaje y además tratar de ser objetivo el la selección, análisis e interpretación de esquemas. Posteriormente, después de la pre-clasificación y finalmente elección de los esquemas que presentaré, me valgo de los nombres de los alumnos ya que representan familiaridad y cierto conocimiento de su desempeño académico.

Evolución de la Estructura Algebraica

Empezaré por mostrar algunas representaciones globales de la tarea correspondientes a la interpretación codificada del esquema, obstáculos detectados y procesos encontrados relacionados a una didáctica particular. En estas tablas utilizo los códigos correspondientes a los diferentes tipos de errores y modos escritos que alargan o acortan el trabajo de los alumnos. Así se observarán las etapas interpretativas de operaciones en la evolución de la estructura algebraica. Añado además, unos breves apartados correspondientes a mis propias observaciones, procesos jerarquizados y obstáculos en el desarrollo de las estructuras de los alumnos cuando proceden a resolver un problema determinado.

Así, Gabriela (tabla 5.1) se encuentra en una fase operacional baja, con respecto a sus compañeros del estudio, ya que su esquema general no está del todo relacionado. No presenta una transformación ni composición entre sus elementos dando como resultado aparente, la ausencia de aprendizaje significativo. De las ocho tarjetas utilizadas con la misma alumna, en la secuencia horizontal, solamente tubo aciertos en la primera y en la última operación. Al momento de resolver o describir un mecanismo de solución, Gabriela comete errores graves debido a violaciones a leyes, principios y normas establecidas de solución, además de omitir paréntesis, no contemplar sus productos como totales y confundirse frecuentemente con el valor de las variables. Su lenguaje no es científico y cuando logra efectuar una proposición, lo hace de manera simple. No utiliza, en general, conectivos lógicos en la construcción de sus oraciones. Curiosamente, la alumna tiene acierto en un principio algebraico (ficha 0) y por medio de un mecanismo circular y retroalimentador, al cual fue sometida, ella misma tuvo la capacidad de dar acierto a la última actividad de la secuencia (ficha 3'). En ésta última ficha la presencia de ciertos componentes de la información es muy marcada. Su proceso de búsqueda a lo largo de la experiencia la llevó a un logro significativo. Sus unidades textuales son heterogéneas en magnitud y no se presentan suficientes relaciones entre los componentes algebraicos. El problema fundamental se observa en el proceso de identificar. Aunque la alumna no logra clasificar sus términos comunes correctamente, ella continua con el proceso asociando, seriando y conservando algunos elementos algebraicos, pero en todo caso, no logra el resultado correcto. El modelo estructural de resolución mostrado en el análisis cognitivo de tareas se sigue pero con el acarreo del error inicial. En la última actividad, aparecen los componentes de logro al nivel de sub-procesos. La doble asociación se desarrolla correctamente, dando un éxito como resultado.

Horizontal, Gabriela, NMB16

Apartado PN⇔FA	Item/ficha/logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
$a(b+c)$	I 0	mult. alg. *a.b, +, a.c		Ide
	II			
$ab+ac$	III 1	E. rel. PN, FA		Aso, Ser, Con
$ab+ac$	I 0'	E. 2 expr. alg.		-Ide
	II	Resolv. c/u. T.		
a^2+b+c	III 0	Esq. no rac.	*, Vx, -P, -Re	-Cla, -Aso
$2x^3(3x^2-1)$	I 1	Mult. alg. presen. f.c.		Ide
	II	Resol. * con 2x^3		
$2x^2(2x^3)=4x^5$	III 0	No tranf. No composc.	fp, pi	Cla, -Aso, -Ser, -Con
$6x^5-2x^3$	I 1'	resta ausuen. ap. sig.		-Ide
	II	buscar TC y resolver		
$2x^3(3x^2-1x)$	III 0		fp, Vx, -Re. -P +1	-Cla, Aso, Ser, Con
$(3a^x+a)(2a^{x-2})$	I 2	mult. polis.		-Ide
	II	resolv. lo del (..) multip. resultados		
$6a^{x-1}$	III 0	atractor implic f(explicativa)	fp, No.?	-Cla, -Aso, -Ser. -Con
$6a^{2x-2}+2a^{x-1}$	I 2'	E. 2 exp. alg.^ sum. potencias.		-Ide
	II	1) Localizar un · común entre 2 expres. 2) abrir (..) y 3) hacer operación		
$2a^{x-1}(3a^{x-12}+1)$	III 0	unidad info. reduc.	-L	-Cla, -Pro, Aso, -Aso2, Ser, Con
$(n+2)(a+1)$	I 3	multip. de 2 sumas		Ide

	II	E. c/u de las expres. T*T		
2n(a)=2an	III 0		fp, No.?, -Pr	-Cla, -Aso, -Ser, -Con
a(n+2)+n+2= *an+2a+n+2*	I 3'	E. P*m presencia unid. textual simbol.		-Ide
(an+n)(2a+2)	II	1) *a(n+2) 2) hacer suma 3) factorizar		
n(a+1)+2(a+1) *(a+1)(n+2)*	III 1			-Cla, Aso, Ser, Aso2, Con

Tabla 5.1 Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y jerarquía de procesos detectados durante la ejecución.

Pasando a ejemplificar a un alumno medio, encuentro a Alberto y Alejandro (tablas 5.2 y 5.3). Aunque sus secuencias sean, vertical para Alberto y horizontal para Alejandro, las características encontradas en su estructura de resolución, son muy parecidas. Ambas emplean un conocimiento implícito de lo que es un PN y su respectiva factorización. Las explicaciones de lo *¿qué es?,* las llevan a cabo en el terreno de lo concreto, utilizando invariantes (en éste caso el término común). La acción de conservar el signo aritmético, hace referencia a un hábito académico significativo en el uso de los productos notables. Por falta en la racionalización del esquema, cometen errores operacionales en cuanto a no distinguir variables, y no determinar apropiadamente el factor común monomio (f.c.m.) por medio de la subtarea: obtener el máximo común divisor (m.c.d.). Los dos alumnos en cuestión sólo obtuvieron 4 aciertos de los ocho ejercicios solicitados. Carecen de los procesos de clasificación, asociación y proporcionalidad en los procedimientos de factorizar.

La evolución global del esquema se mueve entre un conocimiento muy concreto, aislado y sin transformaciones substanciales, hasta en cierto momento, una transformación y correspondencia. No existe diferenciación aparente entre la escuela de procedencia (A o B). En la transición *¿cómo se resuelve?* a *¡resuélvelo!,* aparecen los componentes *factor*, *factor o término común*, *se busca*, *simplifica* o *reduce*, *expresión algebraica*, *literal*, *coeficiente* y *exponente*, por citar algunos de ellos, además de sus relaciones.
Alberto sería muy bien pero es deficiente en la clasificación de T.C. (términos comunes), más aún en la del f.c.p. (factor común polinomio) ya que no guarda proporción entre los exponentes. Alejandro, también tiene problemas de identificación y clasificación del TC aunque luego procede algorítmicamente empleando los demás procesos. La propiedad distributiva de la multiplicación es aplicada con frecuencia.

Vertical, Alberto, MHA23

Apartado PN⇔FA	Item/ficha/ logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
a(b+c)	I 0	*mono-bino		Ide
	II	T*T		

$ab+ac$	III 1	*a c/T (..) E. conn. PN cient. implic. usa invariantes		Aso, Ser, Con
$2x^3(3x^2-1)$	I 1	multi. c/exp.		-Ide
	II	T*T *T (..) c/u T (..) E. exp.		
$6x^5-2x^3$	III 1	cons. +. Habit. acad. signif. PN.		Aso, Ser, Con
$(3a^x+a)(2a^{x-2})$	I 2	mult. (mono) c/ exp.		-Ide
	II	*TI c/u (..)		
$6a^{2x-2}+2a^{x-2}$	III 0	E. exp. conserv. elementos	No.?, (0. -V, -P	-Aso, Con, Ser
$(n+2)(a+1)$	I 3	mult. poli.*bino.		-Ide
	II	a*n; 2n*1 usa literales; 2x*1		
$an+2an+2$	III 0	mismo tamaño unid. info.	*, Vx, (o, -V, No.?, -R, -Re, fcm	Cla, Aso, Ser, Con
$ab+ac=abc=a(b+c)$	I 0'	expr. monos.		Ide
	II	TC, abc, son idep; se multipl.		
$a(b+c)$	III 1	ausencia compon. info.		Cla, Aso, Ser, Con
$6x^5-2x^3$	I 1'	resta de mon. c/ fc		Ide
	II	TC = 2x; * (..) restar exp.		
$2x^3(3x^2-1)$	III 1			-Cla, -Aso, -Aso2, -Pro, Con, Ser
$6a^{2x-2}+2a^{x-1}$	I 2'	expr. alg. c/ TC		Ide
	II	TC= 2a^x-1; *(..)		
$2a^{x-1}(3a^{x+2}+1)$	III 0		fcm, pi, -L, -Pr, fp, (o	-Cla, -Aso, -Aso2, -Pro, Con, Ser
$a(n+2)+n+2$	I 3'	expr. alg. c/ bin.		-Ide
	II	* c/T (..) lo de afuera		
$(an+2a)(n+2)$	III 0		(o, -Re, No.?, V/, Vo, fp	-Cla, Aso, Ser, -Con

Tabla 5.2 Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y jerarquía de procesos detectados durante la ejecución

Horizontal, Alejandro, MHB11

Apartado PN⇔FA	Item/ficha/ logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
a(b+c)	I 0	*mono.-bin.		Ide
	II	mono. * C/u (..)		
ab+ac	III 1	E. TC. explic. concrt.		Aso, Con, Ser
ab+ac	I 0'	FC		Ide
	II	1)encontrar FC 2) se utiliza para mult. otros dos T.		
a(b+c)	III 1			Cla, Aso, Con, Ser
$2x^3(3x^2-1)$	I 1	mon^3 * bin.		-Ide
	II	mult. TC por los demás		
$6x^5-2x^3$	III 1	E. conn. sign. impl.		Aso, Con, Ser
$6x^5-2x^3$	I 1'	mono*mono		-Ide
	II	sacar TC y factorizar		
(2x+3)(2x-1)	III 0		fp, -Vx, -Pr, -V	-Cla, -Aso, -Con -Ser
$(3a^x+a)(2a^{x-2})$	I 2	mono*bin		-Ide
	II	sacar fc y obtener el resultado por multipl		
$2a^{x-2}$ por $6a^x+2a^{x-1}$	III 0	No distribuye	-P, -L, -Re	-Aso
$6a^{2x-2}+2a^{x-1}$	I 2'	bin c/T semej.		Ide
	II	sacar TS y dividir entre los demás		
$2a^{x-1}(3a^{x-2}+1)$	III 0		fcm,	-Cla, -Pro, Aso, Con Ser
(n+2)(a+1)	I 3	bino*bino		Ide
	II	se multipl. los T entre sí de izq a der.		
na+n+2a+2	III ?		(o, fp	-Cla, Aso, Con, Ser
a(n+2)+n+2	I 3'			-Ide
	II	al revés de lo		

		esperado. Se sacan los T por los que se multipl. los bin. ya que a(n+2) es el que mult. y (n+2) por 1.		
(n+2)(a+1)	III 1			Cla, Aso, Ser, Con

Tabla 5.3 Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y jerarquía de procesos detectados durante la ejecución

En la fase más racionalizada del conocimiento, donde ya existe un dominio en los procesos cognitivos descritos en el análisis de la tarea, hasta el logro de la coherencia y consecuencia apropiada en la solución de la tarea, se encuentran Ignacio (vertical, A; tabla 5.4) y Gaby (horizontal, B; tabla 5.5). Aquí comparo las variables tipo de secuencia y escuela de procedencia. Aunque Gaby maneja un flujo de información verbal mayor que Ignacio, en los dos alumnos se denota una racionalización plena de sus conocimientos. Ellos son alumnos brillantes y con destacada actitud positiva hacia el dominio científico. Sus atractores conceptuales, los codifican, asimilándolos y recuperándolos en los momentos precisos. Tanto el núcleo conceptual (factor común), como la conservación de signo y vigilancia constante de la propiedad distributiva en el terreno de los números reales, reflejan una función correcta en sus principios explicativos y predictivos. Estos atractores se encuentran relacionados a conceptos periféricos como el exponente, la literal y el coeficiente. A lo largo de su formación académica y su creciente interés por las matemáticas, el aprendizaje logrado refleja un alto índice de significación. Gaby no comete errores, sus ocho actividades las resolvió satisfactoriamente, mientras que Ignacio, un gran codificador de información, en la ficha 3, no agrupó los términos, quizá debido a la instrucción misma de la consigna y en la ficha 2', falló en la aplicación de la ley de los exponentes. Puedo asumir que ni el tipo de secuencia ni la escuela de procedencia intervinieron en este tipo de alumnos ya que observo que el dominio algebraico que han alcanzado es el de un experto. Ambos utilizan todos los procesos expuestos en el modelo estructural, a pesar de que Ignacio casi identifica bien (Ide/ 2).

Vertical, Ignacio, EHA27

Apartado PN⇔FA	ítem/ficha/ logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
a(b+c)	I 0	expr. alg. c/ factores		Ide
	II	a* (..), +, entre dos product. Esq.estab.		
ab+ac	III 1			Aso, Con, Ser
$2x^3(3x^2-1)$	I 1	mult. (P)^exp.		Ide/ 2
	II	1er. T (..); (?+?)		
$6x^5-2x^3$	III 1			Aso, Con, Ser

$(3a^x + a)(2a^{x-2})$	I 2	P * mono.		Ide
	II	c/T de P con mono y signo corresp.		
$6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$	III 1			Aso, Con, Aso2, Con2, Ser
(n+2)(a+1)	I 3	poli*poli		Ide
	II	T*T		
na+n+2a+2	III ?		(o, No.?, fp	-Aso, Con, Ser
ab+ac	I 0'	factorizac. caso I TCM		Ide
	II	1) buscar No. divisible entre 2 T 2) TC (no C) 3) * (..) pero que los multiplique		
a(b+c)	III 1			Cla, Aso, Con, Ser
$6x^5 - 2x^3$	I 1'	ftc		Ide/2
	II	igual que el anterior		
$2x^3(3x^2 - 1)$	III 1			Cla, Aso, Ser, Con
$6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$	I 2'	TC		Ide/ 2
	II	igual por TC		
$2a^{x-1}(3a^{x-1} + 1)$	III 0		fcm, V-, Vx; (o, -L, -Pr	Cla, Aso, Aso2, -Con2, Ser, -Pro
a(n+2)+n+2	I 3'	agrupación de términos		Ide
	II	tomar c/ TC, en (..); lo que queda en otro (..)		
(n+2)(a+1)	III 1			Cla, Aso, Con, Ser

Tabla 5.4 Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y jerarquía de procesos detectados durante la ejecución

Horizontal, Gaby, EMB14

Apartado PN ⇔ FA	Item/ficha/ logro	Interpretación	Obstáculo	Estrategia
a(b+c)	I 0	Aplicac. de la prop. distrib. ab+ac. El prod. de dos T		Ide

		dif. por un mismo FC		
	II	1) se mult. el TC por c/u de T, no C. 2) poner signo de c/T 3) seguir Ley (+)(+) = +, (+)(-) = -		
ab+ac	III 1			Aso, Ser, Con
ab+ac	I 0'	factor. de a(b+c)		Ide
	II	1) buscar TC ab+ac 2) *2T, -C 3) respetar signos		
a(b+c)	III 1			Cla, Aso, Ser, Con
$2x^3(3x^2-1)$	I 1	lo mismo que a(b+c) pero coef. dif. 1. y expos.		Ide
	II	1) * TC (..), -C, + o -		
$6x^5-2x^3$	III 1			Aso, Ser, Con
$6x^5-2x^3$	I 1'	factorización TC		Ide
	II	1) TC 2) * cor c/T		
$2x^3(3x^2-1)$	III 1			Cla, Aso, Ser, Con
$(3a^x+a)(2a^{x-2})$	I 2	* poli-mono		Ide
	II	*mono(c/u) del bin, +		
$6a^{2x-2}+2a^{x-2}$	III 1			Aso, Aso2, Ser, Con
$6a^{2x-2}+2a^{x-1}$	I 2'	suma de monos.		Ide
	II	TC		
$2a^{x-2}(3a^x+a)$	III 1			Cla, Aso, Aso2, Con, Con2, Pro, Ser
(n+2)(a+1)	I 3	prod. 2 bin.		Ide
	II	hacer (n+na)+(2a+2)		
a(n+2)+n+2	III 1			Aso, Ser, Con
a(n+2)+n+2	I 3'	prod. mono por bin. con monos combina.		Ide
	II	a(n+2) es PN, +n+2 +		

$(n+2)(a+1)$	III	I			Cla, Aso, Ser, Con

Tabla 5.5 Evolución del Esquema Procedural interpretada por medio de los códigos A,B y C, obstáculos y jerarquía de procesos detectados durante la ejecución

De la Interrelación Conceptual a la Aplicabilidad

A continuación presento los patrones generales obtenidos de las combinaciones interrelación conceptual y aplicabilidad de la tabla genérica No. 4. Del resumen de estas combinaciones resultan los niveles:

- **Incoherente,** cuando el esquema es compartimentado e implica una inconsecuencia.
- **Compartimentado,** cuando el esquema es compartimentado e implica una consecuencia.
- **Inconsecuente,** cuando el esquema es relacionado e implica una inconsecuencia.
- **Coherente/ Consecuente,** cuando el esquema es relacionado e implica una consecuencia.

De este modo, como en el apartado anterior, presento diversos patrones derivados de las conductas observadas. Gabriela presenta en su mayoría esquemas compartimentados (interrelación conceptual) y cuyo resultado es una inconsecuencia (aplicabilidad). En la ficha de trabajo número cero, la alumna logra aplicar los procesos necesarios para llevar a cabo la tarea, su definición está relacionada ampliamente con la consecuencia favorable de lo que aplica. En sí, lo que define es ciertamente lo que aplica, cuando lo hace. Su compartimentación incluye deficiencias al clasificar los T.C. (término común) y más aún al identificar de lo que se trata la tarea o de definir el objeto matemático en juego. Ese esquema compartimentado hace que el resultado sea desfavorable e inconsecuente. La jerarquización de sus procesos es una mezcla de presencias y ausencias de las mismos.

Horizontal, Gabriela, NMB16

	ítem	0	0'	1	1'	2	2'	3	3'
I a II	**Rel**	X							
Interr Concep	**Com**		X	X	X	X	X	X	X
II a III	**C**	X					X		
Aplica	**I**		X	X	X	X		X	X
2/ 6	**x / 0**								
	R	1	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 6.1 Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

En lo concerniente a Alberto y Alejandro, el primero presenta en la ficha 3, una relación correcta entre proceso y contenido pero por un error de cálculo llega a una inconsecuencia. En la ficha 2', empieza con gran relación entre lo que dice y hace, es consecuente. Al nivel de sub-procesos, es donde falla. Ve el todo y lo hace bien pero, en lo particular, aún no tiene la pericia que la actividad requiere. Alejandro es más relacionado que Alberto pero por error de precisión y poco conocimiento de lo que significa un TC, cae en inconsecuencias. Algorítmicamente ambos tienen idea de lo que significa el desarrollar productos notables y factorizar ya que muestran habilidades procedimentales al asociar, seriar y conservar, pero en la especificidad no tienen desarrolladas las habilidades de clasificación. Los niveles de una compartimentación en la interrelación conceptual y , por ende, su aplicabilidad o su correcta relación conceptual pero una aplicación inconsecuente, se nota en ambos alumnos. El pasaje entre lo que dicen y los que aplican es muy parecido. Sus logros son muy semejantes y equivalen al 50% del total de aciertos de la tarea.

Vertical, Alberto, MHA23

	Item	0	1	2	3	0'	1'	2'	3'
I a II	Rel				X			X	
Interr Concep	Com	X	X	X		X	X		X
II a III	C	X	X				X	X	
Aplica	I			X	X	X			
4/ 4	x / 0								
	R	1	1	0	0	1	1	0	0

Tabla 6.2 Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

Horizontal, Alejandro, MHB11

	Item	0	0'	1	1'	2	2'	3	3'
I a II	Rel	X	X			X	X	X	
Interr Concep	Com			X	X				X
II a III	C	X	X					X	
Aplica	I			X	X	X	X		X
4/ 4	x / 0								
	R	1	1	1	0	0	0	0	1

Tabla 6.3. Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

Por otro lado, Ignacio presenta un problema entre lo que dice que son los objetos matemáticos y lo que aplica. Su grado de logro lo obtiene, creo yo, por la actividad ejercitadora que él se ha impuesto, según sus propias declaraciones en la entrevista que suscitamos. El papel del lenguaje no tiene gran significado según él. Por el contrario, Gaby tiene esa maestría de equidad entre la interrelación conceptual y la aplicabilidad. El hábito empieza a jugar un papel importante en estas conductas (tablas 6.4 y 6.5, respectivamente).

Vertical, Ignacio, EHA27

	Item	0	1	2	3	0'	1'	2'	3'
I a II	Rel			X	X	X		X	X
Interr Concep	Com	X	X				X		
II a III	C	X	X	X		X			X
Aplica	I				X		X	X	
6/ 2	x / 0								
	R	1	1	1	?	1	1	0	1

Tabla 6.4 Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

Horizontal, Gaby, EMB14

	Item	0	0'	1	1'	2	2'	3	3'
I a II	Rel	X	X	X	X	X		X	
Interr Concep	Com						X		X
II a III	C	X	X	X	X	X	X	X	X
Aplica	I								
8/ 0	x / 0								
	R	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 6.5 Equitatividad sobre la Interrelación Conceptual y Aplicabilidad.

La Dispersión Conceptual en el Espacio y Tiempo

En este rubro se sitúan todas las tablas donde se asientan los tiempos registrados por cada alumno a cada consigna determinada correspondientes a las fichas de trabajo. Se nota en el apartado de la columna izquierda el orden de la presentación de la ficha y en las columnas central y derecha (existiendo simetría en la tabla), los tiempos obtenidos en segundos y la codificación del espacio lógico característico en un tiempo dado. Para efectos de la presentación y por lo reducido de la celda, solamente presentaré a detalle los espacios lógicos de Gaby, ya que proporcionan la idea de la cantidad de conocimiento y procedimientos que efectuó para resolver en un tiempo determinado. En los otros casos marco con una "X" el espacio que se tendría que comparar con el de Gaby. Se debe poner atención suficiente en los tiempos que a cualquier alumno estudiado le toma el construir su propio esquema. Esas "X" indican además, que la construcción del espacio lógico es verdadera, la respuesta es correcta para cada uno de esos sujetos.

En otras palabras, ejemplificaré únicamente los espacios lógicos donde existieron componentes de logro. Aunque resultaría de suma importancia el estudiar aquellos espacios lógicos inconclusos o interrumpidos por algún evento. Me limito en presentar los resultados favorables y asumir que si se logró un éxito por la presencia de ciertos componentes o procesos, entonces el fracaso se debería a la ausencia de ciertos componentes o procesos que ya ejemplifiqué en las tablas 5.1 a 5.5. Siguiendo el orden de aparición, a Gabriela le llevan 55 segundos en decir cómo se resuelve el problema 0, y casi el mismo tiempo (65 seg.) en plantear la resolución de la factorización 3'. A nivel procedimental, ella toma mucho tiempo es describir el proceso de resolución y en las fichas 2' y 3 gasta los mayores tiempos sin tener éxito.

Horizontal, Gabriela, NMB16

ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico	ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico
0	40 55 10	X	2	17 65 30	
0'	20 50 9		2'	35 60 70	
1	35 60 13		3	20 65 60	
1'	20 75 32		3'	65 65 42	X

Tabla 7.1 Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

Alberto ha definido y por tanto identificado el problema producto notable en un tiempo superior al de la factorización. En sus cuatro aciertos registra los tiempos mayores para describir el proceso de solución y al momento de resolver, es más eficiente en las factorizaciones. Sus espacios lógicos quedan reducidos a la aplicación de un principio general y su complejidad inmediata.

Vertical, Alberto, MHA23

ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico	ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico
0	60 50 15	X	0'	20 60 9	X

1	35 65 25	X	1'	23 55 13	X
2	23 30 50		2'	23 17 19	
3	60 45 23		3'	20 38 19	

Tabla 7.2 Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

En la secuencia de Alejandro se nota una progresión que incrementa el nivel de dificultad hasta la ficha 1 (pasó por la 0 y 0'). Luego se pierde, no logra resultados correctos, no muestra debidamente los procesos requeridos para resolver, pero cuando se demanda una estructura cognitiva similar a la original (ficha 0), logra la solución. Sus conocimientos se estancan al nivel de la generalidad.

Horizontal, Alejandro, MHB11

ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico	ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico
0	12 20 17	X	2	25 31 23	
0'	10 23 6	X	2'	15 28 43	
1	10 30 19	X	3	11 32 37	
1'	13 38 60		3'	38 98 11	X

Tabla 7.3 Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

La permanencia de los tiempos que Ignacio utiliza en describir su proceso de efectuar productos es la misma (35 seg. para las fichas 0, 1, 2 y 3). Los procesos de factorizar emplean más tiempo para él (60 seg., fichas 0' y 1') pero para los últimos casos (fichas 2' y 3') lo hace en el menor tiempo (9 y 13 seg.). Probablemente el alumno al momento de explicitar su método de resolver ya iba imaginando o construyendo la respuesta pues la emitió rápidamente.

Vertical, Ignacio, EHA27

ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico	ficha	duración (seg.) I, II, III	espacio lógico
0	40 35 10	X	0'	20 60 9	X
1	30 35 12	X	1'	25 60 13	X
2	23 35 30	X	2'	23 17 16	

3	32 35 20	X	3'	20 38 19	X

Tabla 7.4 Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

Gaby se toma su tiempo para definir los objetos matemáticos, trata de elaborar el mayor número de características esenciales de identificación. Ella también toma su tiempo para describir los procesos de resolución de las primeras cuatro fichas de trabajo (0, 0', 1 y 1'). Para resolver, la ficha 2' fue la que menos tiempo le llevó en resolver, mientras que la 3' de ha demandado el mayor de los tiempos (40 seg.). Muestro a continuación la elaboraciones de esta alumna y los tiempos que le ha llevado el realizarlas.

Horizontal, Gaby, EMB14

ficha	**duración** (seg.) I, II, III	**espacio lógico**	ficha	**duración** (seg.) I, II, III	**espacio lógico**
0	45 40 25	$a(b+c)=?$ $(+)por(+)=+$ $a*b=ab$ $(+)por(+)=+$ $a*c=ac$ $\text{Re}sultado$ $ab+ac$	2	45 70 12	$3a^x$ por $2a^{x-2}$ (+) por (+) = + 3 por 2 = 6 a^x por $a^{x-2}=a^{2x-2}$ • Primer producto parcial $+6a^{2x-2}$ a por $2a^{x-2}$ (+) por (+) = + 1 por 2 = 2 a por $a^{x-2}=a^{x-1}$ • Segundo producto parcial $+2a^{x-1}$ Resultado final, $6a^{2x-2}+2a^{x-1}$
0'	25 34 10	$ab+ac\to(a); f.c.m$ Resultado-parcial1;(primer-factor) ab b $\frac{(+)}{(+)}=+; \frac{ab}{a}=b\to+b$ ac a $\frac{(+)}{(+)}=+; \frac{ac}{a}=c\to+c$ Resultado-parcial2:(b+c);(segundo-factor) Resultado-final:a(b+c)	2'	25 50 9	$6a^{2x-2}+2a^{x-1}$ m.c.d. 6 entre 2 es 3 2 entre 2 es 1, selecciono el 2 bases, a^{2x-2} y a^{x-1} exponentes, $2x-2$ y $x-1$ 2x > x -1 > -2, selecciono a^{x-2} • Primer factor, o f.c.m., $(2a^{x-2})$ Ahora, $6a^{2x-2}$ $2a^{x-2}$ (+) entre (+) es + 6 entre 2 es 3 $a^{2x-2}\ a^{x-2}=a^x$ • Primer término del

					segundo factor, $3a^x$ Luego, $\frac{2a^{x-1}}{2a^{x-2}}$ (+) entre (+) es + 2 entre 2 es 1 $a^{x-1}/a^{x-2}=a$ * Segundo término del segundo factor, $+a$ Por tanto, el segundo factor es $3a^x+a$ Resultado final, $2a^{x-2}(3a^x+a)$
1	50 40 20	$2x^3$ por $3x^2$ (+) por (+) = + 2 por 3 es <u>6</u> x^3 por $x^2=$ x^5, primer término $6x^5$ Ahora, $2x^3$ por -1 (+) por (-) = - 2 por 1 es 2 x^3 por 1 = x^3, segundo término $-2x^3$ Resultado final, $6x^5-2x^3$	3	35 65 12	$(n+2)(a+1)$ (+) por (+) es + $(n+2)$ por $a=a(n+2)$, primer producto. $(n+2)$ por $1=n+2$, segundo producto. Resultado final, *$a(n+2)+n+2$*
1'	28 62 31	$\underline{6}x^5-\underline{2}x^3$ *factores*; $6/2=3$, por tanto $2/2=1$ es el <u>2</u> * Magnitud de exponentes, $x^3<x^5$ * Primer factor, $(2x^3)$ $\frac{6x^5}{2x^3}$ (+) entre (+) es + 6 entre 2 = 3 x^5 entre x^3 es x^2, término parcial $3x^2$ $\frac{-2x^3}{2x^3}$ (-) entre (+) es -	3'	65 65 40	$a(n+2)+\underline{n+2}$ f.c.p. $(n+2)$, primer factor. (+) entre (+) es + $\frac{a(n+2)}{(n+2)}=a$ (+) entre (+) es + $\frac{(n+2)}{(n+2)}=1$, $(a+1)$, segundo factor. Resultado final, *$(n+2)(a+1)$*

		2 entre 2 = 1 x^3 entre x^3 = 1, término parcial -1 • Segundo factor, $(3x^2 - 1)$ Resultado final, $(2x^3)(3x^2 - 1)$			

Tabla 7.5 Relación de dispersión y equitatividad conceptual a través del tiempo.

Como la ficha 2', ningún alumno la resolvió, presento una de las razones que suponemos, obstaculizó la búsqueda: la cantidad de procesos y sub-procesos que la tarea demanda. Resumiendo la jerarquía de esos procesos, vemos que Gaby los empleo correctamente (figura 7.5 bis).

Identificación PN ↓ **Asociación** ⌊ identificación ↓ ⌊ asociación ⌊ asociación ⌊ seriación ⟩ **Conservación** ⌊ conservación **Seriación**	**Identificación** FA ↓ **Clasificación** ⌊ identificación ↓ ⌊ clasificación ⌊ asociación ⌊ seriación ⌊ conservación **Asociación 1** ⌊ identificación ⌊ clasificación ⌊ asociación 2, 3 ⟩ **Conservación** ↓ ⌊ proporcionalidad ⌊ seriación ⌊ conservación **Seriación**

Figura 7.5 bis. Modelo estructural que Gaby siguió al utilizar los algoritmos para factorizar por término común y uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con empleo de exponentes literales binomiales en las expresiones.

En síntesis, observamos que la relación de dispersión y equitatividad a través del tiempo es muy variada. Para las mismas secuencias didácticas los tiempos registrados por diferentes alumnos con estructuración similar difieren entre uno y otro. Aquí vale la pena hacer una subclasificación que considere algunos promedios de tiempo en la emisión de la respuesta, así cómo si ésta última es correcta o incorrecta. En otras palabras, diseñar una correlación entre el tiempo de elaboración de la respuesta creada por un alumno con una estructura determinada y la calidad de la respuesta dada. Para lograr lo anterior, brevemente presento, en las tablas 10 y 11 los resultados de esta subclasificación. N, M y E corresponden a la clasificación previa de los alumnos; novato, medio y experto; I, II y III son las consignas demandadas a los alumnos durante el experimento.

Secuencia Vertical

	0	1	2	3	0'	1'	2'	3'
	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E
I	75 60 20 60 40 37 35	60 60 43 35 30 45 40	40 40 26 23 23 60 55	65 45 18 60 32 40 35	40 35 28 20 20 30 25	50 50 13 23 25 55 50	40 40 16 23 23 35 32	40 35 55 20 20 38 38
II	65 62 45 50 35 28 25	70 70 57 65 35 40 35	60 60 51 30 35 51 50	66 60 50 45 35 27 25	10090 38 60 60 45 42	75 65 60 55 60 75 70	30 30 20 17 17 36 35	70 60 32 38 38 35 30
III	20 25 5 15 10 12 10	25 35 14 25 12 13 11	55 70 48 50 30 30 19	40 30 8 23 20 35 30	16 18 7 9 9 5 5	20 20 13 13 13 25 20	35 25 32 19 16 57 55	25 20 5 19 19 50 45

Tabla 10. Resultados obtenidos al efectuar la tarea en tres momentos diferentes. Un novato, tres medios y tres expertos.

Secuencia Horizontal

	0	0'	1	1'	2	2'	3	3'
	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E	N M E
I	40 20 23 12 45 40	20 12 15 10 25 25	35 20 23 10 50 35	20 10 10 13 28 20	17 8 12 25 45 17	35 17 17 15 25 35	20 10 10 11 35 20	65 32 34 38 65 65
II	55 30 55 20 40 60	50 30 35 23 34 50	60 32 55 30 40 65	75 60 60 38 62 65	65 60 32 31 70 65	60 35 63 28 50 70	65 35 35 32 65 75	65 32 34 98 65 65
III	10 6 5 17 25 12	9 4 7 6 10 9	13 7 7 19 20 14	32 18 18 60 31 30	30 17 17 23 12 30	70 40 40 43 9 80	60 30 35 37 12 60	42 23 23 11 40 40

Tabla 11. Resultados obtenidos al efectuar la tarea en tres momentos diferentes. Un novato, tres medios y dos expertos.

Algo muy importante que se puede inferir es que las secuencias didácticas tienen diferente función en el aprendizaje. Es notorio el tiempo que al alumno le toma el definir un concepto en la secuencia vertical. Ejemplificando, los puntos de tiempo medio para un alumno medio (consigna *¿qué es?*) son: 55 seg. para la ficha número cero, 45 para la 1, 40 para la 2 y 50 para la 3. Para este mismo tipo de alumno en el nivel II de consigna (*¿cómo se resuelve?*) les lleva en promedio 50 seg. para la ficha cero, 60 para la 1, 45 para la 2 y 40 para la 3. Examinando los esquemas globales de estos mismos alumnos (secuencia vertical), es evidente el empleo del lenguaje para representar formas matemáticas, van retomando ideas y conceptos enunciados con antelación pero los enriquecen a medida que avanza la dificultad de la tarea. Al inicio es solamente la descripción del principio general, luego incorporan elementos que definen la nueva composición. Los tiempos de estas dos consignas (I y II) se incrementan notoriamente cuando se trabajan las fichas 0', 1', 2' y 3', correspondientes al concepto de Factorización.

Si observamos la tabla 11, correspondiente a la secuencia horizontal y hacemos un seguimiento comparativo de las fichas PN, noto que el tiempo de respuesta es muy inferior al que le lleva al mismo tipo de alumnos (medio) confrontados a la secuencia vertical. Aquí, la secuencia horizontal favorece, *a fortiori*, la operatividad y descripción misma del proceso de solución. Otra observación es que en la secuencia vertical el tiempo de búsqueda y tratamiento de información entre la progresión que va de PN a FA es mayor que en la presentación horizontal. Esto se nota en los indicadores de la tarjeta 0'. En la horizontal, por ser tratado el proceso FA - PN como circular, a medida que se trabaja un PN de cierto nivel con su correspondiente FA, la información ahí queda y se hace accesible al siguiente nivel. Este proceso se asemeja al de un solenoide de rápido ascenso, mientras que la secuencia vertical la concibo como una espiral ascendente pero que toma su tiempo para crecer. Ambas son dinámicas pero sus ritmos de desarrollo difieren ampliamente entre sí.

Correspondencia Topológica en el Espacio y Tiempo

Aquí grafiqué los tiempos de resolución correspondientes a una Factorización y su respectivo PN. A cada triángulo obtenido le corresponden los vértices obtenidos de las parejas P(x, y), tiempo de respuesta a la misma instrucción pero en proceso inverso. Esto es con el fin de validar un orden de presentación. He correlacionado los tiempos de un mismo alumno, expuesto a la secuencia vertical y horizontal, y los he comparado con sus propios logros para determinar si la presentación didáctica influye en la evolución de la estructura algebraica.

En la secuencia de gráficos 1 trato de mostrar la equidad temporal de los procesos de construcción para un mismo alumno (Hugo) pero trabajando las dos secuencias didácticas. Primeramente tabulo los tiempos, en segundos, registrados por consigna y por ficha de trabajo para una secuencia particular. Luego tomo el primer valor en V y en H y lo gráfico en "ficha 0"; punto I (20, 40). El segundo punto corresponde a los segundos valores, punto II de coordenadas (45, 60) y finalmente, el punto III (5, 12). Con este procedimiento grafiqué los 24 puntos pertenecientes a los 3 tiempos registrados del total de fichas (8), haciendo una agrupación de un gráfico para la ficha 0, uno para la 0' y así sucesivamente, logrando un total de ocho gráficos.

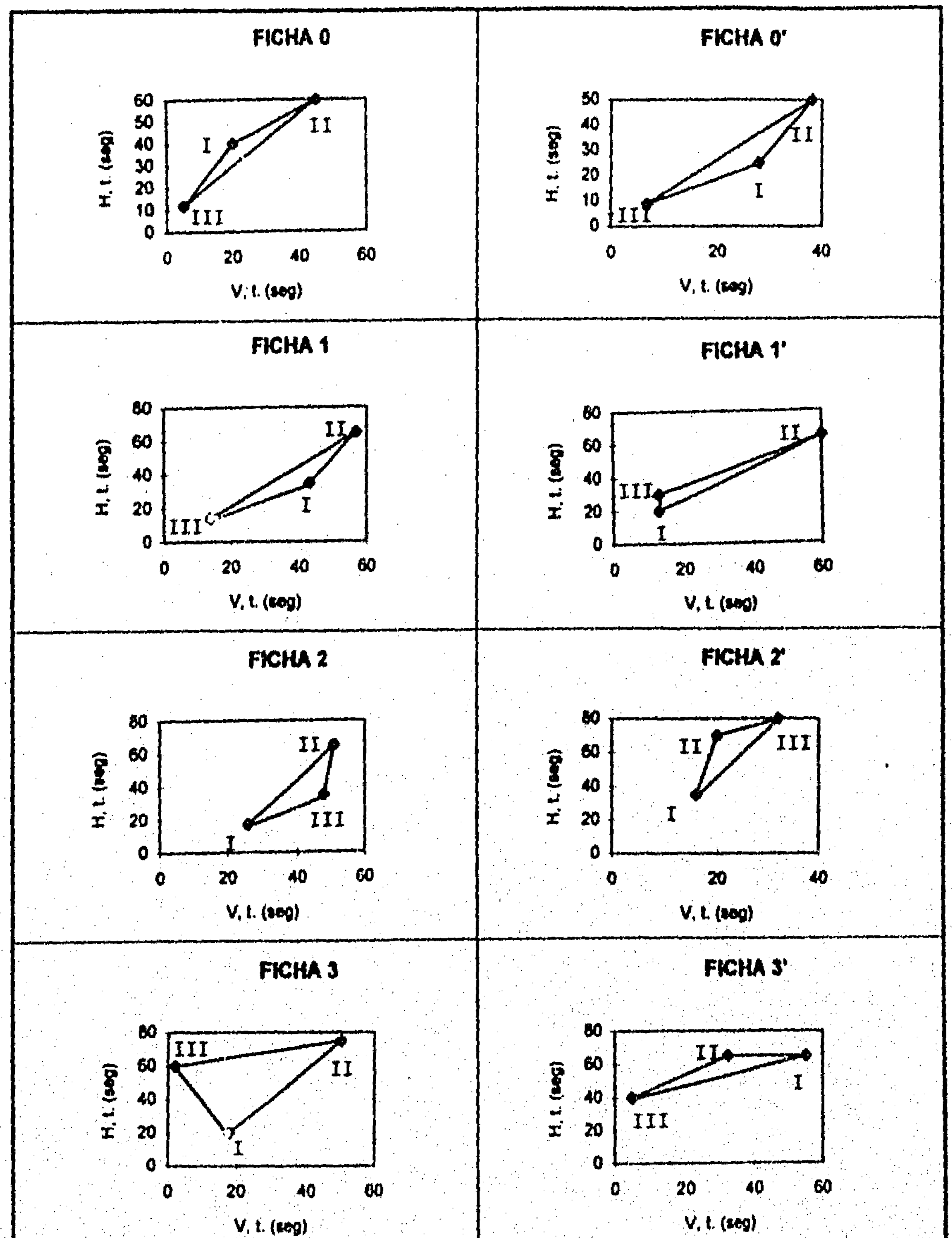
Ficha	tiempo (s) V	tiempo (s) H
0	20 45 5	40 60 12
0'	28 38 7	25 50 9
1	43 57 14	35 65 14
1'	13 60 13	20 65 30
2	26 51 48	17 65 35
2'	16 20 32	35 70 80
3	18 50 2	20 75 60
3'	55 32 5	65 65 40

Tabla 12. Valores para graficar la equidad PN - FA en gráficos 1, 2 y 3.

De la comparación de los gráficos resulta que tanto para la distribución indirecta del espacio cognitivo en las coordenadas temporales, para las fichas 0 y 0' es muy parecido. Ahora, si se grafican vectores cuyo punto de origen sea la intersección entre los ejes X y Y, hasta el punto final I, II o III, resultarían tres rayos diferentes. Luego, si con un compás, apoyado en el origen, trazo tres semicírculos de radio I, II y III, resultaría una sucesión temporal para los tres momentos de las consignas en una función vertical/ horizontal. De este modo a las fichas 0 y 0' corresponde la misma sucesión temporal III, I, II. La primera zona equivale al resultado más corto en una escala de tiempo y la última a la que lleva mayor tiempo realizar. Otra comparación es el área formada por los tres puntos y su equidistancia. En este momento existe tendencia predominante hacia una u otra presentación. Si esa área fuera tendiente a una línea recta de pendiente unitaria, se diría que la presentación didáctica es indiferente. Para la ficha 1, la tendencia tiende a la indiferencia en la presentación pero para la 1', a pesar del predominio de la pendiente superior a uno, el espacio cognitivo formado por esa triada es ligeramente superior al perteneciente a la ficha 1. En los gráficos de las fichas 2 y 2', sucede que existe, en la primera, una variación marcada por el tipo de secuencia, se ha disipado una zona cuya secuencia temporal es I, III, II. En ambas presentaciones didácticas la fase II está más distante del origen cartesiano. A diferencia de esto, en la gráfica 2' la tendencia de los tres puntos graficados muestra una zona muy reducida, tendiente a cero, o lo que es lo mismo, a Hugo le fue igual trabajar en cualquier presentación.

Cuando relacionamos los procesos a esta progresión, podemos agregar que en la fase I, la *identificación* llevaría el menor de los tiempos, siguiéndole los procesos implícitos en la resolución: *asociación, conservación y seriación.* Para la descripción del mecanismo de resolución se emplea el mayor de los tiempos, los procesos aquí son necesarios como parámetros descriptivos únicamente. Lleva tiempo el escribir sobre el papel.

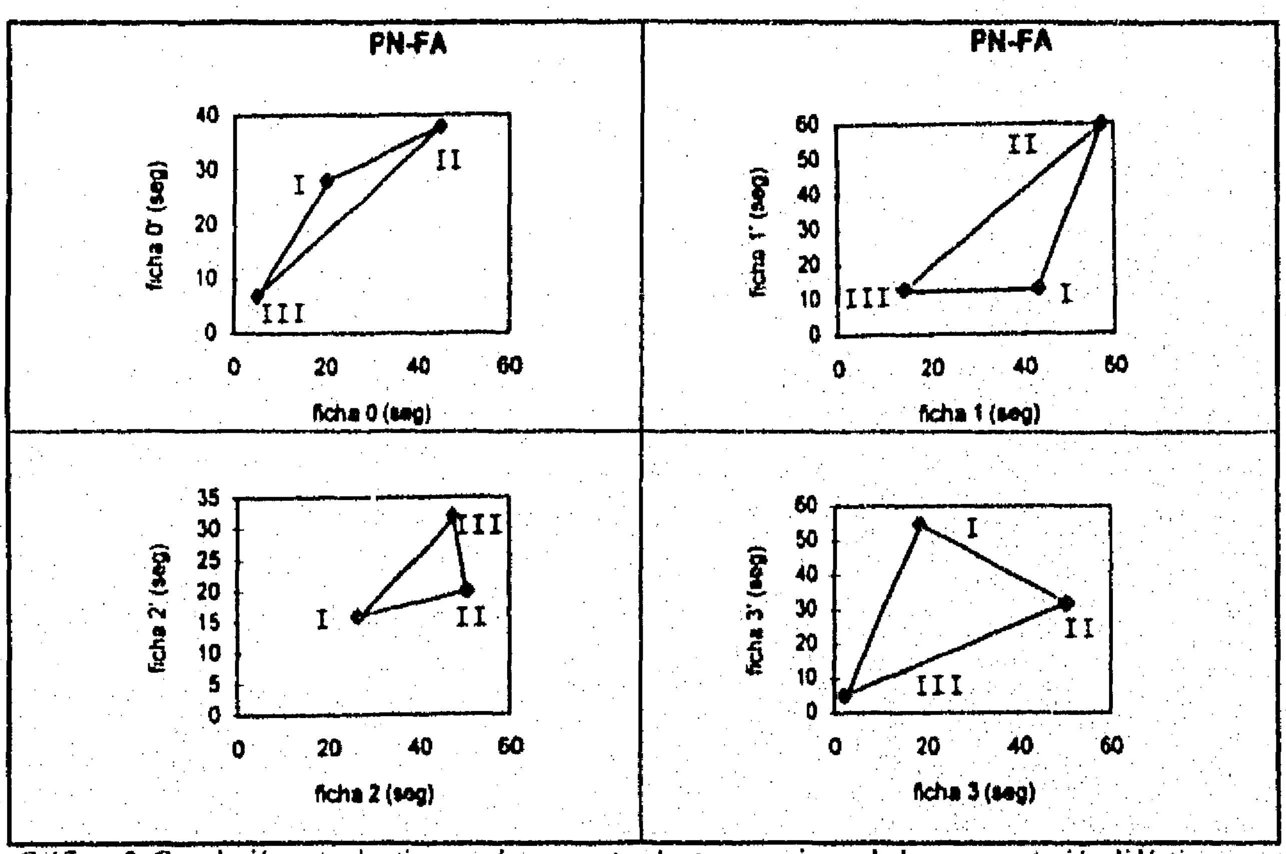
El espacio cognitivo, interpretado por el indicador tiempo, es mayor en la ficha 3. Existe mucha diferencia entre las presentaciones. Al alumno le lleva más tiempo el reconocer y por tanto definir una Factorización (punto I, gráfica 3'), que el de su respectivo producto notable (punto I, gráfica 3). Las magnitudes vectoriales en estas gráficas siguen una secuencia diferente. En 3, va de I, III a II y en 3' es III, II, I. En otras palabras, el producto $(n+2)(a+1)$ sigue una secuenciación en términos del tiempo de respuesta que va de identificar al objeto matemático rápidamente, luego resolverlo y por último, le ha llevado el mayor de los tiempos el definir el objeto algebraico. En 3' el proceso de identificación demanda el mayor de los tiempos.



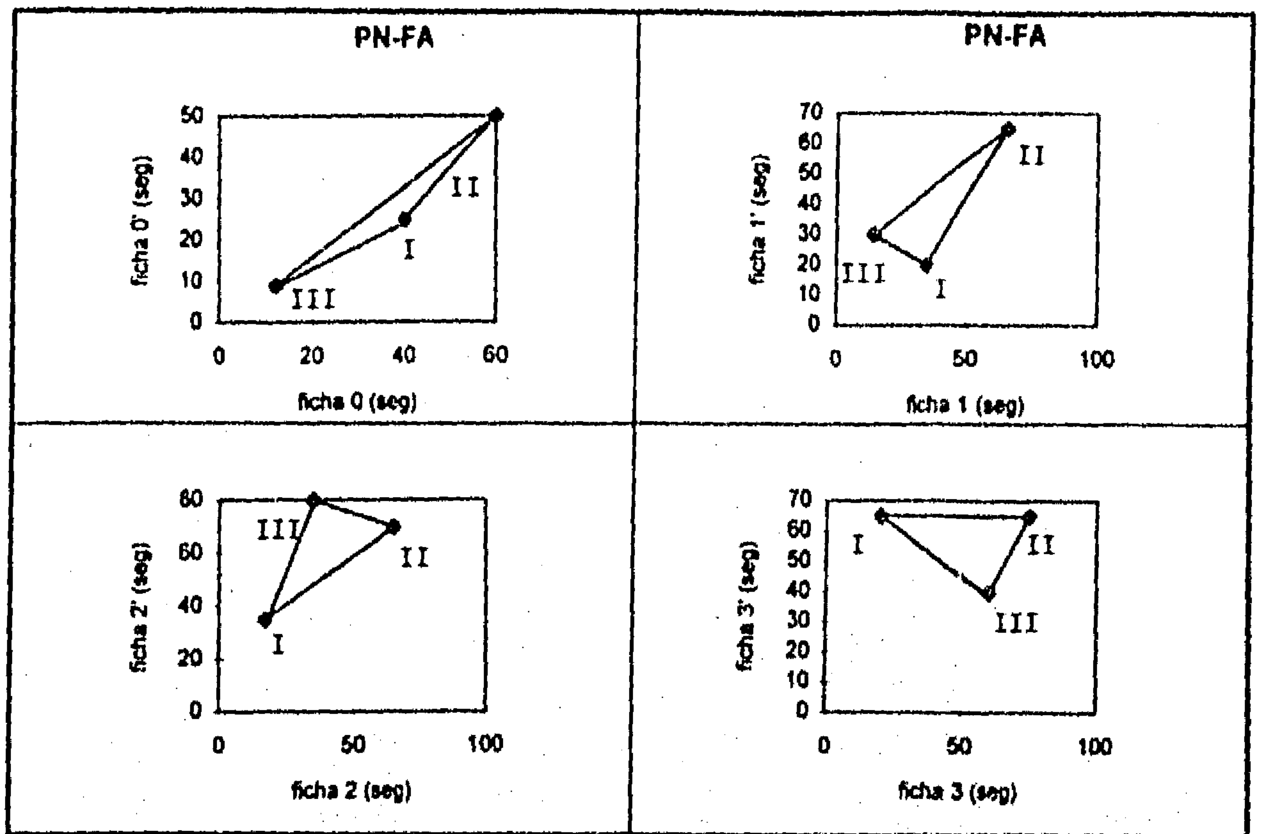
Gráficos 1. Correlación entre los tiempos de respuesta a las tres consignas dadas y tipo de presentación didáctica para un mismo alumno.

Por otro lado, para valorar la inferencia que existe en el tiempo de presentación didáctica, he separado las secuencias ya que deseo mostrar los espacios cognitivos pertenecientes a un PN y su FA en progresión didáctica diferente, (gráficos 2 para vertical y gráficos 3, para horizontal). De la misma manera que grafiqué en 1, lo hago en 2 y 3. Primero separo las secuencias y posteriormente correlaciono los tiempos en 0 y 0' para obtener los puntos I, II y III. En ambas secuencias se va siguiendo un mismo patrón de elaboración gráfica. Para las operaciones 0-0' y 1-1', el orden temporal es el mismo (III, I, II); para la 2-2' varía (I, II, III); pero para la 3-3', en la secuencia vertical, el alumno resuelve rápidamente, luego identifica y define y por último desarrolla el proceso de resolución. Los procesos relacionados a la ejecución, en esta tarea, requieren un tiempo considerable.

A diferencia de lo anterior, Hugo reconoce hábilmente, después resuelve y al término de la actividad ejecuta el proceso de descripción del mecanismo de búsqueda de solución a la tarea solicitada. Se nota que la secuencia vertical ha favorecido en él el proceso de resolver, y la horizontal, el de identificar. La primera secuencia, en este caso, genera la ejercitación y la segunda, propicia una racionalización del conocimiento. Hugo ha tomado conciencia de sus acciones por medio de la secuencia horizontal ya que identifica primero antes de resolver.



Gráficos 2. Correlación entre los tiempos de respuesta a las tres consignas dadas y presentación didáctica vertical para un mismo alumno.



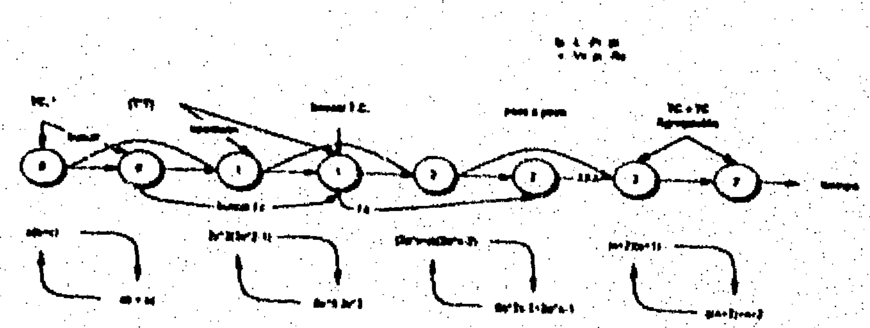
Gráficos 3. Correlación entre los tiempos de respuesta a las tres consignas dadas y presentación didáctica horizontal para un mismo alumno.

El Patrón que subyace en el Conocimiento de Proceduralización

Después de haber subclasificado algunos procesos relevantes y presentes en las representaciones de los alumnos, muestro lo más significativo de los esquemas, incorporando tanto la estructura como la idea que subyace detrás del procedimiento de solución de un alumno cuyo esquema corresponda a un nivel operatorio con componentes aislados y otro que expresa su respuesta de una manera más elaborada. Considero las dos secuencias didácticas seleccionadas. Las tablas número ocho pertenecen a esta categoría. Con el propósito de comparar una elaboración diferente (V o H) para un mismo alumno, seleccioné los esquemas procedimentales de Hugo por cumplir con los criterios que cité al inicio de este capítulo. Al inicio de las experiencias didácticas, el alumno utiliza el concepto *término común* que surge al agrupar los distintos procesos teniendo en cuenta sus características comunes.

La secuencia horizontal muestra más armonía. El alumno centra la atención en las características comunes que definen al T.C. (un sólo factor, una sola familia, un sólo elemento), en sus rasgos exclusivos y peculiares, diferencia al objeto matemático (PN) al cuál al concepto (término común) se refiere, de otros objetos matemáticos (FA). Como proceso de generalización, con éste mismo mapa, se describen dos descriptores categóricos. Una factorización implica "buscar" un factor común, mientras que un producto notable es el "operar" los elementos. El pasaje 2'-3 sufre una ruptura, se presentan errores derivados de la aplicación incorrecta de una ley, un principio, la omisión de paréntesis y la confusión de variables. Existe una recuperación marcada (3-3') al momento de identificar otro descriptor categórico "agrupar" y así logra el éxito en la operación (tabla 8.1).

Horizontal, Hugo, MHA12

	Apartado ***PN*** **⇔** ***FA***
Interpretación	Grupo de fenómeno: $6a^{2x-2}+2a^{x-1}$ Rasgos o propiedades: mcd = $2a^{x-2}$
Definición del patrón	Comparación o contraste: $ab + ac = a(b + c)$, a = mcd Evaluación de la pertinencia: mcd para $a^{2x-2} \wedge a^{x-1}$ Dimensión de clasificación: Cálculo del mcd con exponentes binomiales en las literales.
Esquema Subyacente	Espiral conforme avanza el tiempo. Reacciones circulares. Existe composición entre los elementos. TC funciona como atractor general. La agrupación refleja aprendizaje significativo. 
Idea Subyacente	PN ⇔ FA, la terminología se conserva al usar TC. PN ⇒ multiplicación poco a poco, el signo se conserva. FA ⇒ búsqueda de factor común, aparece la noción de *agrupar*.
Dispersión Conceptual	6 aciertos, 2 errores. La sexta y séptima actividad lo condujeron a error.

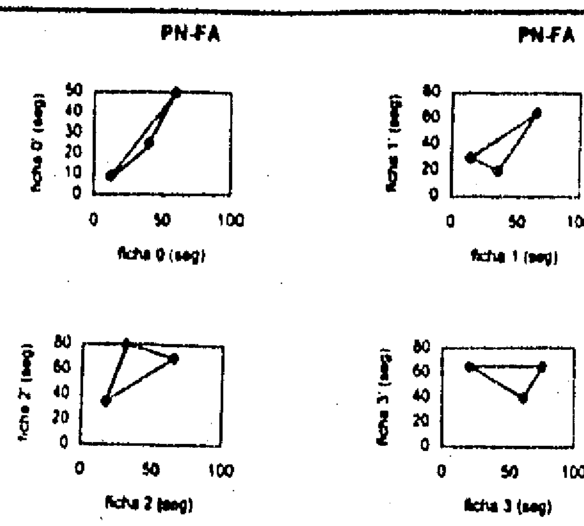
Equitatividad	
Procesos	Modelo estructural **PN**. Ide → Aso → Ser → Con **FA**. Ide →Cla → Aso → Ser → Con

Tabla 8.1 Esquematización del Conocimiento de Proceduralización, pasaje II a III.

En la secuencia vertical Hugo va construyendo principios explicativos implícitos, es decir, cadenas de conceptos estableciendo entre ellos mismos distintos tipos de relaciones. El atractor T.C., se incorpora a todas las definiciones, además se van añadiendo a la estructura varios elementos cognitivos. De la explicación 2 a 3, aparece el concepto *factor* y éste mismo lo utiliza como un nuevo atractor al inicio de la secuencia de factorizar. Le añade solamente la palabra *común*. Enriquece de nuevo la estructura a lo largo de la sucesión 0', 1', 2', 3'. En la última explicación (3'), genera el atractor *combinada* que da la idea de una agrupación. Estos principios están organizados bajo la forma de relaciones lógicas y psicológicas (tabla 8.2).

Vertical, Hugo, MHA22

	Apartado *PN* ⇔ *FA*
Interpretación	Grupo de fenómeno: $(3a^x + a)(2a^{x-2})$ Rasgos o propiedades: El monomio está a la derecha del binomio.
Definición del patrón	Comparación o contraste: $a(b + c) \approx (b + c)a$ Evaluación de la pertinencia: La multiplicación se realiza de derecha a izquierda o viceversa. Es CONMUTATIVA. Dimensión de clasificación: Aplicación de la ley de los exponentes para una misma base literal.

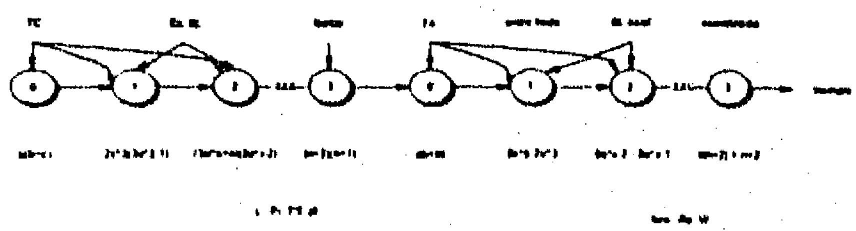
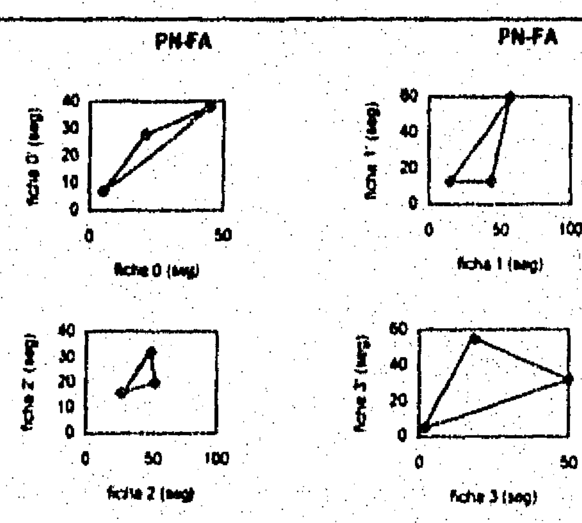
Esquema Subyacente	Secuencial, la primera idea se conserva, se enriquece. Existe composición entre los elementos; el TC funciona como atractor general (TC = fc). 
Idea Subyacente	PN ⇒ T afuera se multiplica con cada T de adentro. Se conserva el signo del segundo término. FA ⇒ obtener el fc que divida a los otros términos. Ese término es necesario para factorizar esta expresión.
Dispersión Conceptual	6 aciertos, 2 errores. Las actividades 3 y 4 son erróneas.
Equitatividad	
Procesos	Modelo estructural PN. Ide → Aso → Ser → Con FA. Ide →Cla → Aso → Ser → Con

Tabla 8.2 Esquematización del Conocimiento de Proceduralización, pasaje II a III.

El conocimiento aquí mostrado lo forman las cadenas de conceptos enriquecidos al paso del tiempo. Los principios y leyes matemáticos se están elaborando sobre la base de los conceptos. Un ejemplo ilustrativo es cuando Hugo calcula el m.c.d. con exponentes binomiales en las literales (H), además cuando ejecuta la ley conmutativa de la multiplicación en la explicación global del principio distributivo de la multiplicación (V) y la conservación del signo: *"Es lo mismo multiplicar en a(b + c); a por b y a por c, conservando el signo '+', que en (b + c)a; b por a y c por a, igualmente conservando el operador aditivo"*.

En ambas secuencias existe un proceso de diseminación de la activación de los diferentes nodos interconectados: presupongo que en cada momento y en cada nodo de las redes, existe un nivel determinado de activación y que esta activación se disemina entre los nodos a lo largo de las ligas del proceso de construcción de la estructura algebraica. Esta activación se interrumpe cuando aparece un obstáculo cognitivo (2'-3 en H y 2-3 en V). Los procesos de elaboración (añadir información) y organización (estructurar la información) son los agentes que Hugo utiliza para favorecer la adquisición, la recuperación y la construcción de su conocimiento declarativo. El estudio de tal dimensión no es objeto de este trabajo, mismo que menciono pero no desarrollaré. Ampliaciones de los esquemas subyacentes aparecen al final de este trabajo para mayor comodidad del lector.

Los Procedimientos de las Secuencias de Acciones

Al igual que en las presentaciones anteriores de resultados, corresponde ahora el mostrar algunos procedimientos de acciones que efectúan los alumnos, las creaciones de representaciones proposicionales así como los pasos que siguen. Para algunos alumnos que operan hábilmente durante una didáctica particular, los muestro en el agrupamiento tablas número nueve. En la adquisición de procedimientos de reconocimiento de patrones los alumnos Ignacio, Gabriela, Alejandro y Gaby, han utilizado los procesos de generalización, discriminación e igualación a la instancia, cuya didáctica quedó ampliamente analizada en el diseño de la secuencia educativa (Análisis Cognitivo de Tareas). Seleccionando y clasificando las representaciones provenientes de los esquemas procedurales en función de los criterios de ejemplaridad y durabilidad, así, para Ignacio la actividad de discriminación es marcada cuando restringe la aplicación de un principio general a aquellos casos en los que realmente se utilice.

Gabriela utiliza la igualación a la instancia en el pasaje 3-3'. Del pasaje anterior (2-2'), la alumna ha seleccionado el ejemplo teniendo que generalizar y luego discriminar. Gaby difícilmente logra la discriminación e igualación a la instancia. Su actividad mostrada en este mecanismo de aprendizaje no se da, y cuando ensaya, no tiene éxito. Su trabajo intelectual parece estar sólo en su consciente ya que no lo manifiesta en la representación hecha en el papel. Para ella, el aprendizaje de procedimientos de secuencias de acciones es lento, pero, por ser un tratamiento de información ejecutable a lo largo del experimento, logra al término de la actividad, una rica elaboración sin notar errores al momento de construir su diagrama de flujo de acciones.

Todos ellos, inicialmente representan los procedimientos de secuencias de acciones en forma declarativa (*¿qué es?*); luego desarrollan una representación procedimental basándose en su experiencia previa tratando de producir la secuencia correcta de las acciones. Posteriormente y gracias a un proceso de composición colapsan pequeñas producciones en otras más grandes, tratando de resolver el problema de haber generado producciones de paso pequeño y fragmentadas.

A continuación presento cuatro ejemplos que muestran los subprocesos de Proceduralización.

Vertical, Ignacio, EHA27

Factorizar la expresión algebraica: $6x^5 - 2x^3$

P.1.	Creación de una representación proposicional
1.	Para factorizar $6x^5 - 2x^3$, se busca un número divisible entre dos. 6/ 2 =3; 2/ 2 = 1, por tanto MCD = 2
2.	Para obtener los factores restantes hay que dividir cada término entre el factor común
3.	Si $6x^5/2x^3 = 3x^2$, entonces $-2x^3/2x^3 = -1$
4.	MCD entre $x^5 \wedge x^3$, es x^3 ya que $3 < 5$
5.	(+)(+) = + ⇔ (-)(+) = -
6.	Un factor restante es el resultado de una división
7.	∀ TCM, ∃ un sólo término
8.	∀ FCP, ∃ (T > 1)
P.2.	Creación de representaciones para ejemplificar cada paso en la secuencia de acciones
Producción 1	Si la meta es... Factorizar $6x^5 - 2x^3$ entonces, la submeta es... encontrar el factor común monomio
Producción 2	Si la meta es... Encontrar el factor común monomio entonces, la submeta es... calcular el máximo común divisor

Producción 3	Si la meta es... Calcular el máximo común divisor, MCD entonces, la submeta es... dividir los coeficientes entre sí

Tabla 9.1 Descomposición proposicional de las acciones durante la ejecución de la tarea.

Horizontal, Gabriela, NMB16
Factorizar la expresión algebraica: $a(n+2)+n+2$

P.1.	Creación de una representación proposicional
1.	La expresión tiene un divisor parcial
2.	$n + 2$, se tiene que agrupar por medio de paréntesis
3.	Las cantidades obtenidas son exactamente iguales
4.	Si $(n+2)$ es igual a $n+2$, entonces es un número común
5.	Se abre un paréntesis para completar la operación
6.	De la expresión $an+2a+n+2$ se puede efectuar los agrupamientos $\{(an+n) \wedge (2a+2)\} \cup (an+2a) + (n+2)$
7.	Cuando se agrupa $n(a+1) \cap 2(a+1) \Rightarrow (a+1)$ es el f.c.p.
8.	Escogiendo $(a+1)$ como f.c.p. $\Rightarrow$ la agrupación $\sim \exists$, como $(an+2a) \cup (n+2)$
P.2.	Creación de representaciones para ejemplificar cada paso en la secuencia de acciones
Producción 1	Si la meta es... Factorizar una expresión con divisor parcial entonces, la submeta es... agrupar dentro de un paréntesis de modo que se obtengan dos grupos
Producción 2	Si la meta es... Obtener el FC de cada grupo entonces, la submeta es... dividir los términos entre el f.c.p.
Producción 3	Si la meta es... Encontrar los factores resultantes entonces, la submeta es... conservar el carácter de grupo de los cocientes resultantes de la división 2

Tabla 9.2 Descomposición proposicional de las acciones durante la ejecución de la tarea.

Horizontal, Alejandro, MHB11
Efectuar el producto notable indicado: $2x^3(3x^2 - 1)$

P.1.	Creación de una representación proposicional
1.	Si $(+)(+) = + \Rightarrow (+)(-) = -$
2.	Cuando $2 * 3 = 6$, $x^3 * x^2 = x^{3+2}$ y $\sim(x^{3*2})$
3.	∀ cantidad multiplicada por sí NO es la unidad
4.	Al multiplicar $2x^3$ por -1, no se encuentra su inverso multiplicativo y aditivo de la misma manera
5.	Cuando se tiene el producto de un monomio por un binomio, el monomio multiplica a todos los términos del binomio
6.	$2x^3$ no es un monomio al cubo
7.	El término $2x^3$, no es común a aquellos agrupados dentro del paréntesis
P.2.	Creación de representaciones para ejemplificar cada paso en la secuencia de acciones
Producción 1	Si la meta es... Efectuar el producto monomio por binomio entonces, la submeta es... multiplicar el monomio por cada término del polinomio
Producción 2	Si la meta es... Multiplicar cada término del polinomio entonces, la submeta es... tomar en cuenta la regla de los signos
Producción 3	Si la meta es... Multiplicar cada término del polinomio entonces, la submeta es... separar los productos parciales

Tabla 9.3 Descomposición proposicional de las acciones durante la ejecución de la tarea.

Horizontal, Gaby, EMB14
Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación: $(3a^x + a)(2a^{x-2})$

P.1.	Creación de una representación proposicional
1.	Multiplica $(+)(+) \cap 3 * 2$
2.	Para una misma base se suman los exponentes
3.	El otro término del binomio también se multiplica por el monomio
4.	$(+)(+) \cap 1 * 2$
5.	∃ unos términos no comunes $\cup$ es la multiplicación de un binomio por un polinomio

6.	$a^x * a^{x-2} = a^{2x-2} \Leftrightarrow a * a^{x-2} = a^{x-1}$
7.	Si $2x^{x-2}$ es TC $\Rightarrow$ $(3a^x \wedge a)$, ~ TC
8.	$\forall\ a \in R \Rightarrow$ coeficiente $a = 1 \cap$ exp. $a = 1$
P.2.	Creación de representaciones para ejemplificar cada paso en la secuencia de acciones
Producción 1	Si la meta es... Multiplicar por simple inspección $(3a^x + a)(2a^{x-2})$ entonces, la submeta es... operar los signos de los coeficientes
Producción 2	Si la meta es... Realizar el producto notable $(3a^x + a)(2a^{x-2})$ entonces, la submeta es... multiplicar T*T poco a poco
Producción 3	Si la meta es... Multiplicar literales semejantes entonces, la submeta es... sumar sus exponentes

Tabla 9.4 Descomposición proposicional de las acciones durante la ejecución de la tarea.

Como puedo constatar, la proceduralización es un importante y poderoso proceso. Implica tanto la generación de descriptores proposicionales de la secuencia de acciones, como su traducción a un grupo de producciones.

Grado de Asertividad

En los cuadros siguientes presento los logros generales obtenidos en la secuencia vertical como en la horizontal. Considero el total de alumnos (13), procedentes de ambas escuelas. En la secuencia vertical noto que el mayor número de errores o fracasos lo presentan por un lado, la ficha 2, y por el otro, la ficha 2' y su pasaje a la 3' (cuadro 1). Esto da muestra de la existencia de dos zonas de conflicto cognitivo. En la secuencia horizontal se observa claramente una sola zona conflicto, que la constituye la ficha 2' (cuadro 2). Veamos los vaciados de los datos obtenidos en los cuadros 1 y 2. Los procesos que van asociados al logro de la tarea van relacionadas al modelo estructural presentado en la figura tres del capítulo tercero. Es precisamente en esta actividad donde se demandan sub-procesos de clasificación y asociación, es donde se utiliza el carácter "anidado" o acumulado del proceso algoritmico, en el cuál se adiciona la proporcionalidad. Podíamos esperar un resultado como tal ya que el nivel de complejidad, en efecto, es el mayor de todas las fichas de trabajo. La ficha 2' requiere del uso correcto de 4 reglas de producción, 2 principios, 2 leyes y una sub-regla. En esta ficha de trabajo es donde los alumnos han presentado grandes deficiencias en el uso de procesos cognitivos como el de identificar y clasificar. Estos procesos reflejan la incompetencia de los alumnos.

Error parcial	Alumno	Escuela	0	1	2	3	0'	1'	2'	3'
4	Jorge	A			x			x	x	x
4	Alberto	A			x	x			x	x
2	Hugo	A			x	x				
1	Ignacio	A				?			x	
3	Omar	B				?		x	x	x
5	José	A			x	x	x		x	x
4	Daniel	B			x	?		x	x	x
	Error general		0	0	5	3	1	3	6	5

Cuadro 1. Errores cometidos secuencia vertical.

Error parcial	Alumno	Escuela	0	0'	1	1'	2	2'	3	3'
3	Lucía	A					x	x	?	x
2	Luisa	A						x	x	
6	Gabriela	B		x	x	x	x	x	x	
4	Alejandro	B			x	x	x	x		
2	Maribel	B						x	x	
0	Gaby	B								
	Error general		0	1	2	2	3	5	3	1

Cuadro 2. Errores cometidos secuencia horizontal.

En la primera secuencia además, existe un promedio de error de 3.1 (N = total de error parcial / número de alumnos; N = 23/7, x = 3.1/8), mientras que en la segunda el promedio es de 2.8 (N = 17/6, x = 2.8/8). Ambas presentaciones proporcionan un promedio general de Xt = 3/8. Si calificase los aciertos en una escala de 0 a 10, la nota media de la población sería de 6.5 (seis punto cinco). Poniendo un mayor interés a las zonas de conflicto cognitivo (regiones más oscuras de los cuadros), puedo esquematizar las secuencias, limitándome a mostrar las zonas de estabilidad e inestabilidad (caos) provocadas por una perturbación, (cuadros 1 y 2).

Efectividad de la transición Interrelación Conceptual - Aplicabilidad

Por medio de los cuadros 1 y 2 del apartado anterior y sección de tablas números seis, construí el cuadro 3 donde distribuí a los alumnos según la clasificación arbitraria que realicé. Escribí de esta manera el total de niveles categóricos que cada alumno presenta durante el desenvolvimiento de la actividad. De este modo, pude ir sub-clasificando a los alumnos según el nivel de ejecución que predominó en su esquema algorítmico. Hugo, Omar y Gaby trabajan mayoritariamente en un nivel de experto ya que sus esquemas son coherentes y consecuentes así como el grado y número de procesos que presentan al resolver tareas organizadoras. Gabriela y José están teniendo esquemas incoherentes. Las representaciones de Jorge son compartimentadas e inconsecuentes así como Albero e Ignacio. Ellos serían además alumnos medios, por el número de procesos mostrados a lo largo del experimento. Este acomodo no significa el encapsular a los alumnos en una categoría determinada, ya que resultaría muy simplista la manera de proceder. Lo he realizado con el propósito de dar un cierto significado a las cosas y mostrar además la preponderancia a la que tiende cada uno de ellos. Señalo que el proceso de construcción del conocimiento matemático es muy complejo, no trato de reducir a una simple celda factorial al alumno, recuerdo que es sólo una estimación de ese predominio.

Procedencia	Alumno	Secuencia	N	M	E
A	Alberto	V	3	4	1
A	Hugo	V	0	3	5
A	Ignacio	V	1	4	3
B	Omar	V	0	1	7
A	José	V	4	1	3
A	Jorge	V	0	5	3
B	Daniel	V	2	2	4
A	Lucía	H	2	3	3
A	Luisa	H	1	3	4
B	Gabriela	H	6	1	1
B	Alejandro	H	3	2	3
B	Maribel	H	3	2	3
B	Gaby	H	0	2	6

Cuadro 3. Efectividad de la transición Interrelación Conceptual - Aplicabilidad.

Lo anterior no implica que el alumno logre culminar la tarea satisfactoriamente es únicamente la predeterminación en la cual ejecuta la acción. El cuadro anterior (No. 3), sólo indica el nivel al cuál el alumno desarrolla su operación. Por esta limitante, he vuelto a clasificar los niveles, pero ahora con el indicador éxito o fracaso (cuadro 4), tomado de las tablas 5.1 a 5.5 y 6.1 a 6.5 de esta sección.

Por ejemplo, el trabajo de Alberto mostró en tres ocasiones esquemas incoherentes logrando un sólo acierto de esas tres actividades. Luego, presenta cuatro esquemas compartimentados e inconsecuentes donde la clasificación de TC es equívoca pero los demás procesos del modelo estructural para ejecutar esas tareas son correctos, dando tres aciertos y un error. Finalmente, cuando ejecuta correctamente sus procesos, logra esquemas coherentes y consecuentes derivando de ello, el éxito de la tarea.

	N	N	M	M	E	E
	Favorable	Desfavorable	Favorable	Desfavorable	Favorable	Desfavorable
Jorge			111	11	1	11
Alberto	1	11	111	1		1
Hugo			11	1	1111	1
Ignacio	1		111	1	111	
Omar				1	1111	111
José		1111		1	111	
Daniel		11	1	1	11	11
Lucía		11	11	1	11	1
Luisa		1	11	1	1111	
Gabriela	1	11111		1	1	
Alejandro	11	1		11	11	1
Maribel	1	11	11		111	
Gaby			11		111111	

Cuadro 4. Relación de éxitos y fracasos según nivel operatorio.

Llevando estos resultados a un concentrado (procesos contra tipo de secuencia) noto en general que, en ambos casos **N** lleva a *no éxito*, mientras que **E** conduce al *éxito* (cuadro 5).

	N	N	M	M	E	E
	Favorable	Desfavorable	Favorable	Desfavorable	Favorable	Desfavorable
V	2	8	12	8	17	9
H	4	11	8	5	17	2

Cuadro 5. Concentrado general de éxitos y fracasos según presentación didáctica en función de procesos cognitivos solicitados.

De esta forma termino la presentación de los resultados más representativos, habiendo considerado a todos los tipos de alumnos participantes durante la actividad experimental. En el siguiente capítulo discutiré y analizaré los resultados acabados de mostrar.

Capítulo

6

Análisis de Resultados

6. *ANÁLISIS DE RESULTADOS*

En este capítulo efectuaremos un estudio y discusión de los resultados de investigación. En un principio trataremos de analizar la estructura general en la creación de ideas que buscan una generalización por medio de la razón y la lógica, inscritas en un dominio abstracto y sistemático del contenido.

Podemos ver en efecto que los individuos, una vez que han ejecutado los procesos de identificar, clasificar, seriar, conservar, mantener una proporción y ordenar, ellos mismos los incorpora a estructuras más complejas por el hecho de utilizarlos. Aunque no todos los alumnos fueron capaces de hacerlo, se notó evidencias de ello en el trabajo de Gaby. El manejo de nueva información ante la actividad novedosa (ficha 2'), requirió absolutamente de una capacidad de su memoria de trabajo. Los conocimientos previos han especificado el tipo de habilidades y procesos necesarios para lograr el éxito en la tarea. Existe orden en los procesos cognitivos, tienen jerarquías. Mostramos que "uno menor" (identificar) es requerimiento para "uno mayor" (clasificar). Esta jerarquía quedó presentada en los modelos estructurales subsecuentes al análisis cognitivo de la tarea demandada. Estos mismos procesos tienen un "carácter mediador" que facilita el aprendizaje de procesos mayores en una situación de aprendizaje específica.

El pensamiento humano tiene doble naturaleza. En los diagramas de interrelación conceptual a aplicabilidad notamos la racionalidad del proceso en un momento determinado y en otro la irracionalidad del mismo. En las fichas 0 y 0' visiblemente se observa la reproducción de un conocimiento adquirido y en las 2, 3 la creación matemática juega un papel importante. Estos esquemas en ocasiones son consistentes pero luego, por falta de elementos cognitivos, aparecen como inconsistentes. Al momento de desarrollar la actividad, los alumnos se muestran seguros de lo que hacen, pero luego reluce también la falsedad de lo que hacen y dicen. El pensamiento humano está constituido por formas de estructuras jerárquicas y abstractas. El medio se manifiesta como un estructura estable capaz de reproducir a cierta velocidad de procesamiento. El pensamiento humano es creador de estructuras ya que asimila, conserva y reproduce.

Considerar la construcción en el sentido de un sólo código sería en tanto reduccionista. Tanto el analógico como el analítico se van interconectando, no están alejados el uno del otro. En los diagramas generales de evolución conceptual los alumnos trabajan con imágenes y representaciones. Algorítmicamente, ellos han mapeado el terreno y han puesto a la luz las dificultades en su construcción. Obstáculos que van desde la no interpretación conceptual de un principio, ley o regla, hasta la carencia de habilidades cognitivas en el proceso de construir. Se nota que el alumno tiene una estructura que le permite reconocer un algoritmo de reglas y que las sigue tratándose del acarreo de un error conceptual. Cuando se reconoce el algoritmo de reglas, cae en situación de desequilibrio cognitivo.

En los patrones del conocimiento procedural hemos descompuesto en secuencias sucesivas los procesos con el fin de estudiar los metacomponentes (procesos elementales de la información). Hemos descubierto un primer núcleo (TC), que posteriormente, se tuvo que redefinir a nivel de especificidad (TC monomio y TC polinomio). Además, presentamos los componentes de logro procedimental de estos atractores conceptuales. Los prerrequisitos han surgido de manera indirecta en la operativización y búsqueda de estos núcleos. Existen reglas, procedimientos y definiciones que se tienen que saber para trabajar debidamente con esos núcleos, de lo contrario, se enfrentarían los estudiantes con grandes conflictos en la adquisición de conocimiento en el nuevo aprendizaje.

La capacidad de análisis para el pensamiento abstracto en el trabajo de las factorizaciones se caracteriza por el uso de un lenguaje natural, símbolos matemáticos y empleo de la lógica proposicional. Los procesos se van convirtiendo en encadenamientos lógico-formales. En el procedimiento de solución, existen al menos dos procesos articulados que ejemplificaré más adelante: *Identifica y clasifica, clasifica y asocia, asocia y seria, seria y conserva.*

Las estructuras de Gabriela muestran una disfuncionalidad (*decalage*). En sus espacios lógicos tendientes a la búsqueda de una solución, carece de la identificación del núcleo conceptual (TC), que a mi parecer, es el primer indicador de la dificultad. No lo reconoce puesto que no lo define, este sería un problema de nivel más no de desarrollo, existe estructura lógica y psicológica con sus deficiencias, lagunas y barreras. No considero que sea deductiva su actuación. En la ficha 0, aunque seleccionó un modelo a la estructura matemática que subyace, no niega y por tanto no genera el modelo siguiente.

En lo que a sistema de resolución concierne, el *cognoscitivo* tuvo un carácter descriptivo o valorativo. No se da importancia a lo que son los objetos matemáticos. Vagamente son descritos, no existe la apropiación del conocimiento declarativo. Al pasar de definición en definición, el alumno seleccionó, transformó y reconstruyó algo de la información original. La han codificado para crear estructuras abstractas. En los alumnos más experimentados se observa que esa información es complementada y enriquecida. Cuando han reconstruido el contenido frecuentemente el texto se ve reducido, elementos importantes de la definición y puntos clave para el proceso de resolución, están ausentes. *¿Qué es?* hizo la función de prever lo que ocurrirá por medio de la información declarativa.

El *sistema operativo* representado por los algoritmos matemáticos y heurísticos del pensamiento creador fue iniciado por la consigna *¿cómo se resuelve?* Aquí pudimos valorar las directivas organizativas de los estudiantes, las estrategias de toma de decisiones y sus técnicas de autodesarrollo. Tanto un alumno medio como uno experto perciben mejor la información y la actualizan más fácilmente. Pero ¿cuál es la lógica que subyace a sus operaciones?

Basándonos en los resultados de las secuencias de acciones, ya nos damos mejor idea de que las operaciones son sistemas de producción: "Si para factorizar $6x^5 - 2x^3$, se encuentra el f.c.m. Para encontrar el f.c.m. se calcula el m.c.d. y si se quiere conocer éste último, entonces se dividen los coeficientes entre sí". En estos sistemas de producción existen analogías: "Si la meta es efectuar el producto de un monomio por un binomio, entonces multiplica el monomio por cada término del binomio. Multiplicar cada término de un polinomio implica tomar en cuenta la regla de los signos"; *encoding*: "Si $(+)(+) = + \Rightarrow (-)(-) = -$"; inferencia: "Cuando $2 * 3 = 6$, $x^3 * x^2 = x^{3+2}$"; mapeo: "MCD entre $x^5 \wedge x^3$, es x^3 ya que $3 < 5$"; aplica: " $(x^a)^b = x^{ab}; (x^3)^2 = x^6$"; y respuesta "$a(b + c) = ab + ac$".

De estas mismas tablas de resultados (9.1 a 9.5), vemos como ocurre la asociación. El resultado del análisis de los componentes brinda la idea de esta asociación. El universo semántico es ordenado. Como método, los alumnos han seleccionado códigos y operan con una estructura y un proceso. Recordemos que la memoria es para nosotros un constructo, es el modelo teórico de accionar de los sujetos.

Los conceptos, bajo esta corriente, los consideramos como unidades de información organizadas. La unidad 1, se procesa y genera la unidad 2. Estas unidades están asociadas entre ellas. Retomemos un ejemplo. De la expresión $an + 2a + n + 2$, se pueden efectuar, según Gabriela, los agrupamientos: unidad 1, $(an + n) \cap$ unidad 2, $(n+2)$; o la otra alternativa; unidad 1, $(an + 2a)$ + unidad 2, $(n + 2)$. Aquí el proceso cognitivo de asociar es el de "mayor nivel" ya que ella determinará el logro o fracaso de la factorización. Como la alumna optó por el primer concepto, obtuvo correctamente el f.c.p. (factor común polinomio), $(a + 1)$. Si lo hubiera hecho al revés, la complejidad se incrementaría enormemente: $a(n+2)+n+2$ porque implica una re-asociación, vía identificación. A lo que queremos llegar, en este caso, es el de ubicar a los procesos cognitivos señalados en el análisis de tareas, como puntos de anclaje pedagógicos.

La acción está basada en la separación de los componentes semánticos. Según el procesamiento de la información esta separación se hace considerando un proceso para cierto nivel. Para Piaget, la asociación entre habilidades cognitivas es lo que conforma una nueva habilidad. Para nosotros, el proceso de construcción de una actividad (factorizar en 2') quedó ampliamente ejemplificado en las tablas 7.5 y 7.5 bis. Tanto mecanismo como elementos matemáticos quedaron de manifiesto como necesarios para construir un proceso. Asociación y separación por nivel de procesos se notan claramente en el modelo estructural cognitivo de Gaby. Aquí conjuntamos ambas teorías y logramos estudiar a fondo la interconexión entre procesos y contenido. También explicamos el carácter anidado de la actividad.

El paso que existe de un estado a otro de la tarea nos brinda la oportunidad de apreciar un cambio conceptual. El TC ha sido el constructo unificador del conocimiento, además de ser él quien nos permitiera estudiar su evolución, su crecimiento y su riqueza conceptual como primer elemento de las bases teóricas del conocimiento de factorizar. Si el mecanismo de aprendizaje es propio a Piaget, consideramos que la adquisición del saber matemático sucedió bajo el procesamiento de la información.

Cuando hemos ejemplificado los procesos existentes entre una tarea y otra, para presentarlos en los apartados de actividad y efectividad, pudimos constatar que al hacer los primeros análisis de procesos entre un esquema y otro, podemos aludir que operan por medio de una equilibración misma que permitiría al alumno el acceso al conocimiento, tema de otro estudio. Aquí se han mencionado zonas de conflicto cognitivo para la secuencia didáctica estudiada. Un docente bien puede intervenir en estas zonas de inestabilidad, conjuntar los procesos que están presentes y además, intervenir en ellas. Estratégicamente he manifestado la función que cada secuencia didáctica tiene. No me inclino por ninguna de ellas ya que ambas tienen sus cualidades, bondades y virtudes. Quedará en el docente estimar sus limitantes.

Podemos retomar pedagógicamente las zonas de conflicto cognitivo para desarrollar habilidades y procesos creativos que permitan resolver esos problemas, podemos inclusive generarlos, siempre y cuando correspondan al nivel del alumno. Anticipándome al próximo capítulo, donde propongo la creación de zonas de desarrollo próximo como alternativa a la educación matemática, creo conveniente el conocer ampliamente la demanda del conocimiento que se va a transmitir. Conocer por otro lado, los niveles de demanda de la tarea y el de respuesta del alumno. Al organizar los contenidos a transmitir, se debe tener conciencia de la complejidad que representan. Aunado a lo que mencioné en el párrafo anterior, considero que el conocimiento no esta conformado exclusivamente por asociaciones entre procesos, sino también por estrategias.

Se han estudiado sólo algunos momentos en el desempeño de ciertos alumnos, es decir, sus procesos continuos que los inducen al acceso al conocimiento matemático por medio de estrategias y estructuras cognitivas. De aquí la diferencia entre un experto y un novato.

Se ha cuidado la variabilidad de las tareas para analizar justamente las condiciones espacio temporales de la dispersión conceptual, así como también, la presentación didáctica representada en la correlación vertical - horizontal para una ficha en particular. La demanda temporal la puede tener la consigna procedimental, en algún caso, o la de definición, en otros. El proceso de identificar es el que lleva el mayor tiempo ya que no tanto es el proceso mismo de identificar el que se solicita, sino el de representar, estructurar, definir y escribir sobre el papel. La segunda actividad que implica los procesos propios de la ejecución (asociar, seriar y conservar) se realizan también en un tiempo considerable, aquí se hace consciente el proceso de resolución. Por los indicadores obtenidos, me atrevo a presuponer que cuando los alumnos van ordenando el algoritmo de resolución, paralelamente lo van ejecutando en su mente. Es complejo el tratar de representar sobre el papel, por medio de lenguaje cotidiano, ese proceso de resolución ya que se constata la utilización de tiempos considerablemente elevados de organización procedural.

Cuando aparece el concepto nuevo en ambas progresiones didácticas, y explicando lo sucedido en la primera zona de caos cognitivo del cuadro 1 (errores cometidos en secuencia vertical), constatamos que el constructo *(n + 2)* se comporta como otra unidad informativa ya que lleva el máximo de los tiempos en reconocerla. Hecho esto, el patrón procedural se vuelve muy simple e idéntico al proceso general: Ide → Aso → Ser → Cla.

Cuando estos espacios cognitivos se representan según presentación y tiempo de respuesta (gráficos 2 y 3), queda demostrado el seguimiento de un patrón general. En las actividades 0 y 1, las definiciones procedimentales son muy elaboradas (puntos II), pero la resolución (puntos III) muy rápida. Corroborando lo antes dicho, la actividad 2 - 2' es la más compleja. Pero, para este alumno la relación procedimental en 3 - 3' (punto II) no es muy costosa. En estos gráficos, bien puedo hablar de una Economía Cognitiva. Para un determinado estudiante ¿qué tan costoso (a nivel tiempo) puede ser su proceso? y ¿qué utilidad reporta (logro)? Gráficamente podemos apreciar su rendimiento cognitivo.

En las gráficas de áreas que hacen referencia a la resolución de productos notables, en las secuencias horizontal y vertical, los puntos II se encuentran espacialmente más alejados del origen, los puntos III más cercanos al origen y los I, entre los II y III. Las áreas cognitivas, formadas espacialmente por esos triángulos, son significativamente superiores en la secuencia vertical que en la horizontal, existe más dispersión entre sus vértices. Aquí puedo añadir que, a mayor área cognitiva, mayor dispersión de sus puntos en la superficie.

El fenómeno anterior puede ser interpretado de la manera siguiente: Para el tratamiento de contenidos similares secuenciados, la información se acumula ligeramente pero cuando se pasó al otro tema, la variabilidad se hizo más extensa y más demandante. Esos espacios vendrían a representar entonces el aprendizaje cognoscitivo. Un producto notable es una actividad cognitiva de síntesis, mientras que una factorización, es una de análisis. A nivel operacional, el desarrollo de los contenidos ejemplificados equivale a una inversión de procesos. Al efectuar un producto notable, se realiza un análisis (aplicación de la propiedad distributiva, por ejemplo), mientras que al resolver una operación de factorización, se utiliza una síntesis de lo analizado previamente.

Por razones analíticas, argumento que el proceso representacional del alumno se ha ido estudiando en tres momentos de acceso al conocimiento. Adquisición, cuando el sujeto esta implicado con la oferta del conocimiento por medio de la mediación que las fichas de trabajo le han suscitado; reconstrucción, al momento de que ha dado muestras de asimilación del conocimiento adquirido a sus propias estructuras cognitivas en un proceso se interpretación y, de construcción (mayoritariamente abordada en este trabajo), cuando elabora su propia representación de la realidad. Separar entre estos momentos resultaría imposible, ya que existe una interconexión muy fuerte entre los tres.

Por cuestiones metodológicas, al estudiar este complejo proceso, se estableció que es posible reconocer configuraciones lógico-conceptuales producidas por los alumnos en un momento determinado de la actividad. Hemos asumido un comportamiento inteligente como la facultad de representar el mundo fielmente y por tanto, establecer un comportamiento ordenado. Durante los eventos del aprendizaje nos percatamos que los datos de entrada a la estructura cognitiva se modifican y transforman, es decir, se van vislumbrando como movimiento.

La representación mental es la manera en la cuál una información se registra y los expresa ya sea por el uso de proposiciones simples o compuestas, en el caso de utilizar conectivos lógicos. Estas representaciones se basan en reglas de producción del tipo *Si ..., entonces ...*, reconocen patrones y secuencias de acciones. Se pueden clasificar por el tipo de conocimiento al cual se atribuyen. *Declarativo*, implorado en la consigna *¿qué es?*, cuya didáctica que de aquí se desprenda implique estrategias de elaboración (imaginería o analogía), o de organización (redes neuronales, elaboración de esquemas, mapeo conceptual, patrones de información); *Procedimental*, implicando una didáctica de desarrollo de procedimientos de identificación de los diversos patrones perceptuales, para el aprendizaje de habilidades, procesos y secuencias de acciones múltiples o resolución de problemas. De aqui se pueden diagnosticar procesos de generalización, presentando ejemplos simultáneamente en el tiempo, variando atributos críticos o por procesos de discriminación e igualación.

La arquitectura de la cognición es un estado complejo. Por un lado se tienen expectativas y un ambiente inicial. El procesamiento daría inicio a través de la percepción con sus habilidades de control ejecutivo, si aquí hay decaimiento quedaría implícita en una pérdida permanente de información. La atención sería un proceso que activaría la memoria de trabajo, recuperando elementos y habilidades para lograr el fin. Pudiéndonos ir más lejos, por medio de elaboraciones y organizaciones, esta información podría pasar a la memoria a largo plazo. Con recuperaciones y reconstrucciones desprendidas de esta memoria, el alumno podría bien trabajar en la de corto plazo. Si existiese olvido en la memoria a largo plazo, lo consideraría como una pérdida de accesibilidad, pero con posibilidad de recuperación de la información. El paradigma simbólico de este modelo es que supone la facultad de representar el mundo de cierta manera. Los elementos matemáticos son simbólicos y operan secuencialmente.

Podemos además identificar un procesamiento paralelo distributivo cuyo paradigma sub-simbólico es que la cognición es la emergencia de estados globales a partir de componentes simples. Acepta reglas locales que gobiernan las operaciones individuales (elementos del procesamiento) que dirigen las conexiones por medio de reglas de cambio hacia un procesamiento complejo. De aquí de desprende el considerar ciertos patrones de actividades que impliquen el manejo de relaciones (proporción - correlación) y habilidades proposicionales (enunciación conceptual categórica).

Hemos diagnosticado las categorías que utiliza un sujeto en una situación mediante un "análisis estructural" de acuerdo al tipo de actividad requerida. Con ello pretendemos ahora, determinar una serie de conocimientos, actitudes y procedimientos que faciliten el uso de estrategias mejores de manera que el alumno utilice su capacidad de memoria de trabajo más efectivamente. Así, habremos aportado un granito de saber para atenuar el problema básico de la didáctica de las matemáticas.

El Equilibrio de los Sistemas Cognitivos
Un enfoque psicogenético

Como presenté, los sistemas cognitivos están a la vez abiertos en un sentido (el de los intercambios con el entorno) y cerrados en otro , en cuanto 'ciclos'. De los modelos estructurales del conocimiento constatamos que existe una forma de diferenciación del sistema total en subsistemas jerarquizados, cuyas estructuras son análogas, que están unidos unos a otros mediante conexiones igualmente cíclicas (secuencia horizontal, figura 3). El equilibrio en estos sistemas se basa en las acciones conservadoras que los elementos o los subsistemas ejercen unos sobre otros. El caso concreto de conservación en todo momento del término común, T.C. y factor común, f.c., muestra el gran desempeño de la actividad del alumno.

El equilibrio se basa entre otras cosas en una solidaridad de la diferenciación y de la integración, o bien esta conservación del todo se hace imposible y hay muerte del organismo, o bien hay modificación compensadora o nuevo equilibrio del sistema cognitivo. Ejemplos de lo anterior los podemos encontrar en la evolución general de la tarea donde se sobrepasan los obstáculos y se llega a la solución o de lo contrario, se detiene momentáneamente la actividad. Así, un matemático que haga la teoría del producto notable se atendrá sólo a las formas para desprender de ellas las propiedades algebraicas. Tales ciclos epistémicos y su funcionamiento se basan en dos procesos fundamentales que constituirán los componentes de todo equilibrio cognitivo algebraico. Estos procesos fundamentales según la psigogenésis son la asimilación y la acomodación.

> 1) **Asimilación** o incorporación de un elemento exterior (objeto, acontecimiento) en un esquema conceptual del alumno.
>
> 2) **Acomodación** (como proceso central), es decir, la necesidad en que se encuentra la asimilación de tener en cuenta las particularidades propias de los elementos que hay que asimilar.

Con el fin de ir elaborando una teoría de la equilibración para explicar la evolución de las estructuras algebraicas, debo recurrir en un primer momento a dos postulados:

> *Primer Postulado*: Todo esquema de asimilación tiende a alimentarse, es decir, a incorporar a él, los elementos exteriores y compatibles con su naturaleza. Se considera necesaria la actividad del sujeto.
>
> *Segundo Postulado*: Todo esquema de asimilación se encuentra obligado a acomodarse a los elementos que asimila, es decir, a modificarse en función de sus particularidades, pero sin perder con ello su continuidad. Se afirma la necesidad de un equilibrio entre la asimilación y la acomodación.

El equilibrio cognitivo no se ha caracterizado más que por mutuas conservaciones, lo cual es un simple dato de observación: atribuir estas conservaciones a la asimilación y englobar en ella los procesos complementarios de acomodación no prejuzga, por lo tanto, mecanismos estructurales en juego, porque estas dos nociones sólo corresponden a la descripción funcional.

Según las interacciones que encontramos, los equilibrios pueden estar:

1.- En función de la interacción fundamental de partida entre el alumno y las fichas de trabajo, existe en primer lugar una equilibración entre la asimilación de éstos a esquemas de acción y la acomodación de estos últimos a las fichas.

2.- Hay que asegurar una equilibración en las interacciones entre los subsistemas. Ahora bien, esta equilibración está lejos de ser automática o de estar determinada desde el principio, porque los subsistemas pueden depender de esquemas que primero eran independientes.

3.- Hay que considerar aparte el equilibrio progresivo de la diferenciación y de la integración, y, por lo tanto, de las relaciones entre los subsistemas y la totalidad que los engloba. Esta se diferencía de la segunda porque añade una jerarquía a las simples relaciones entre colaterales. Una totalidad se caracteriza por sus propias leyes de composición, que constituyen un ciclo de operaciones interdependientes y de rango superior a los caracteres particulares de los subsistemas.

En resumen, las tres clases de equilibraciones pueden efectuarse de manera espontánea e intuitiva, por tanteos sucesivos, eliminando los fracasos y reteniendo los éxitos; pero en la medida en que el alumno busca en ellas una regulación, es decir, tiende a obtener una estabilidad coherente, se hace entonces necesario utilizar las exclusiones de forma sistemática, asegurando sólo el equilibrio una exacta correspondencia de las afirmaciones y de las negaciones.

La razón de los desequilibrios y de su frecuencia inicial

Como he mostrado, el pasaje entre las fichas 2 y 3 (secuencia vertical), manifiesta gran desequilibrio cognitivo es decir una zona de conflicto cognitivo o de inestabilidad conceptual. Es evidente que en una perspectiva de equilibración una de las fuentes de progreso en el desarrollo de los conocimientos ha de buscarse en los desequilibrios como tales, que por sí solos obligan a un alumno a superar su estado actual y a buscar lo que sea en nuevas direcciones.

En cuanto al mecanismo de desarrollo 2-2'-3 H, y 3-3' V, en los dos casos son estos desequilibrios los que constituyen el motor de la búsqueda, por que sin ellos el conocimiento continuaría siendo estático. Pero igualmente en los dos casos los desequilibrios sólo desempeñan una función de desencadenadores, ya que su fecundidad se mide por la posibilidad de superarlos, dicho de otro modo, de salir de ellos, lo cual se mejoró en la presentación horizontal.

Pude notar que en algunos esquemas se infiere una 'reequilibración maximizadora' que es la expresión que designa la reequilibración con la mejora obtenida (3-3', H).

En el plano del desarrollo cognitivo, la tesis de los desequilibrios o contradicciones inherentes a los caracteres mismos del pensamiento parece difícil de sostener, por lo menos en el estado actual del saber, ya que hasta ahora no se ha conseguido dar una elaboración formal de la "lógica" dialéctica: en consecuencia, la "contradicción" dialéctica aparece como una noción cuyo significado sigue siendo psicogenético, sociogenético o histórico, no inherente a las estructuras operatorias que tienden a un estado de cerramiento. Este estado podría ser explicado entonces por medio de puntos de vista lógico, operativo o psicológico.

⇒ Desde el punto de vista lógico la diferencia presupone la negación. Además sería necesario un cuantificador cuyo dominio de variación fuera el conjunto de las proposiciones.

⇒ Desde el punto de vista operatorio, la negación con reversibilidad y con los cuantificadores corrientes.

⇒ Desde el punto de vista psicológico, se recuerda que los únicos casos en que la negación es precoz son aquellos en que el sujeto no tiene que construirla, porque le viene impuesta desde el exterior.

En resumen, la equilibración, me parece que constituye el factor fundamental del desarrollo cognitivo, no es simplemente uno de los aspectos, que durante los periodos iniciales, existe una razón sistemática de desequilibrio, que es la asimetría de las afirmaciones y de las negaciones, lo cual compromete el equilibrio entre el sujeto y los objetos. De ello se deduce que la equilibración progresiva, es un proceso indispensable del desarrollo, un proceso cuyas manifestaciones se modificarán en el sentido de un mejor equilibrio tanto en su estructura cualitativa como en el campo de aplicación.

Las regulaciones a lo largo del esquema de proceduralización

Aunque estoy tratando de analizar los desequilibrios en la construcción del conocimiento basado en la teoría psicogenética, me atrevo a combinar el elemento *proceso cognitivo* como regulador de la actividad, ya que es él quien permite el acceso al saber. De las observaciones realizadas en el trabajo de campo se infiere la existencia de varias formas de equilibrio, caracterizándolas por sus aspectos de conservaciones mutuas, no es más que una descripción y no una explicación. Trataré de precisar a continuación el *cómo* de la equilibración y de las reequilibraciones cognitivas durante el desarrollo y ejecución de las tareas.

La perturbación como implicación de un proceso regulador

Hablo de *proceso regulador* cuando la repetición A' de una acción A se ve modificada por los resultados de esta, en otras palabras, es el efecto de rebote. La regulación puede manifestarse mediante una corrección de A (retroalimentación negativa) o mediante su refuerzo (retroalimentación positiva), pero en este caso con posibilidad de un aumento del error o del éxito. Explicar la equilibración equivaldrá a recurrir a ciertos procesos reguladores, como precisar la formación propia de los reguladores (núcleos conceptuales) que controlan la dirección de las operaciones.

Una perturbación es aquello que constituye un obstáculo para una asimilación. Toda perturbación implica una regulación, por lo tanto una equilibración.

Según los resultados obtenidos, puedo clasificar a las perturbaciones en dos grandes grupos: las primeras comprenden a las referentes al contenido derivadas del mism proceso cognitivo a contenidos que se oponen a las acomodaciones (resistencias del objeto, obstáculos para la asimilación de recíprocas, de esquemas, o de subesquemas). Estos constituyen las causas de los fracasos o de los errores, en la medida en que el sujeto se hace consciente de ellos, regulaciones que les corresponden entrañan entonces retroalimentaciones negativas. Las segundas perturbaciones las constituyen las lagunas que dejan las necesidades insatisfechas que se traducen en la alimentación y operación insuficiente de una estructura.

Dualidad entre el contenido y el proceso regulador

El primero consiste en refuerzos, el segundo en correcciones. La adquisición de un proceso, normalmente, en la correspondencia a retroalimentaciones negativas que suponen numerosos tanteos. Gabriela usualmente presenta esta conducta ya que, aunque no lo manifiesta por escrito, supongo que tanteó lo suficiente para acertar en su último ejercicio ya que escribía y luego borraba. La siguiente dicotomía es esencial a las reacciones del alumno con las fichas a las que tiene que adaptarse y las que conciernen a las relaciones entre esquemas o entre sistemas de esquemas. Cada uno de los subsistemas considerados sea en si mismo coherente. A diferencia de Gabriela, Ignacio y Gaby con claridad han mostrado una gran coherencia al desarrollar su trabajo.

La última dualidad atañe a los medios empleados y a este respecto se distinguen regulaciones casi automáticas de las regulaciones activas. Aunque la frontera entre las dos categorías es difícil de trazar, la distinción es importante porque las *regulaciones automáticas* no implican sin más *toma de conciencia*, que las regulaciones activas la provocan, son por lo tanto la fuente de una representación o conceptualización de las asociaciones materiales, que llevará a subordinar sus regulaciones a un control por instancia superior.

De ahí surge un nuevo principio de clasificación de los procesos reguladores, de acuerdo con su jerarquía, procesos simples, procesos de procesos, etc., hasta los metaprocesos con autoorganización, susceptibles de modificar y de enriquecer su programa inicial mediante diferenciación, multiplicación y coordinación de los fines a conseguir, e integración de los subsistemas en un sistema total.

Naturalmente las regulaciones las podría clasificar de acuerdo a otros criterios por ejemplo, según sus contenidos. Regular el registro de los observables, consiste en adaptar una forma a un contenido particular y la continuación del desarrollo equivale a construir nuevas formas sobre esta forma de primer orden. Así, los núcleos conceptuales equivalen a esos reguladores, a esas pequeñas unidades de información.

Aquí me permito hablar de la conducta experta de Gaby. Esta conducta la diferenció de la de Gabriela justamente por esa toma de conciencia y además del grado de automatización de procesos alcanzado por ella. Puedo conjuntar ahora la asociación entre contenido (regulador) y un proceso (regulador). Los procesos regulan el avance del procedimiento de búsqueda de soluciones. Si el proceso está ausente en un momento determinado, difícilmente se lograría el éxito de la tarea.

La regulación interna de programación inherente

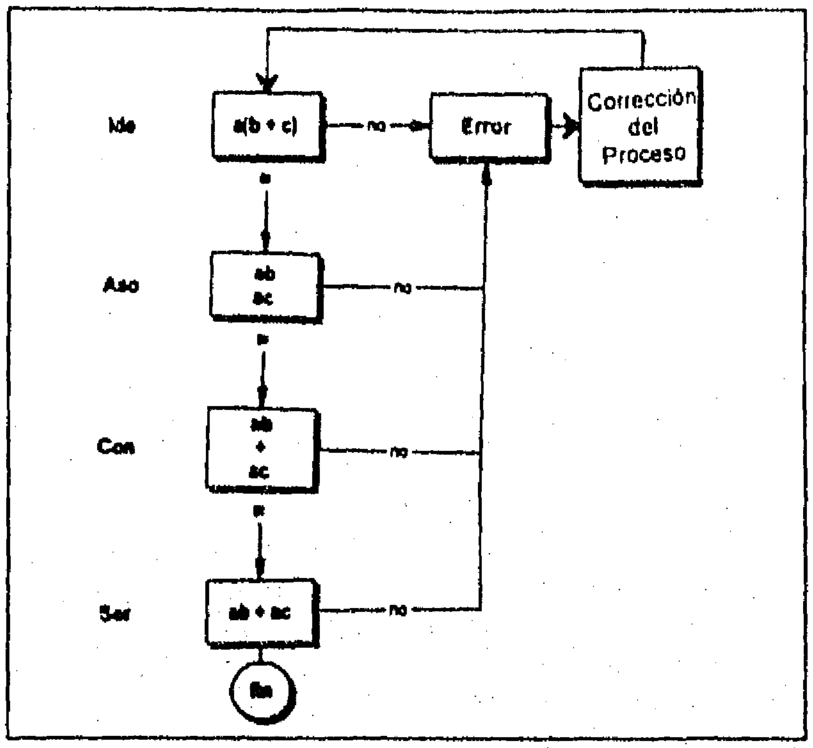
Un Proceso regulador inherente supone un control programado como en una máquina. En cuanto a las estructuras lógico-matemáticas en general, sería inconcebible atribuir a la idea de existir procesos, como regular la naturaleza física de los objetos, ya que los superan por todas las partes. Luego entonces, hay concordancia entre las matemáticas y lo real. Por lo tanto que a través de las operaciones, el alumno como sujeto es la razón al tiempo de la concordancia y de las operaciones.

Dentro de una conducta experta, el único regulador que puedo asignar a las regulaciones cognitivas algebraicas es un regulador interno de programación no hereditario.

$$A + A' = \lambda\, A + A''$$

Donde, A = un sistema cognitivo algebraico, A'= los objetos matemáticos que lo alimentan y A''= los que no asimila. Lo esencial de esta ecuación es la conservación de la totalidad como tal, que conserva su estructura en el curso de la asimilación en lugar de verse modificada por los elementos asimilados (ver esquemas de Hugo, V y H). Es decir; diferencia de coeficientes numéricos (6 - 2) + diferencia de exponentes de la misma base $x^5 - x^3 = \lambda\ (6x^5 - x^3)$ + una ley de exponentes no asimilada o un coeficiente no representado.

Concibo como un punto de partidao que en los sistemas cognitivos algebraicos, las leyes de totalidad (T.C. y f.c.), generadas por un principio general [$a(b + c) = ab$ por ac], prevalecen sobre las propiedades cambiantes de los componentes. Recordemos igualmente que en matemáticas <una teoría más 'general' que 'contiene' teorías menos generales, explica más que estas ya se las tome de forma aislada o en su conjunto>. ejemplificando, muestro el diagrama evolutivo del principio general de desarrollo del producto *a (b + c)* a través de un procesamiento de información asociado a los procesos cognitivos demandados.



Cuadro 13. Procesos correctivos en la evolución de la estructura.

La tarea: factorizar $6a^{2x-2} + 2a^{x-1}$ *propicia una equilibración maximizadora*

Cualquier proceso regulador hace que intervengan dos procesos de sentido contrario: uno retroactivo, que conduce del resultado de una acción a su repetición, y el otro proactivo, que conduce a una corrección o a un refuerzo. Respecto a sus orientaciones una es la negación de la otra y existe ahí, por lo tanto, una preparación para la reversibilidad.

Una observación más sobre el carácter constructivo de los procesos reguladores es que desembocan casi todas en compensaciones. El proceso regulador termina por superar la acción inicial en la dirección de un equilibrio más amplio y más estable, y la equilibración es entonces maximizadora (figura 3), pero, añadiéndole nuevos circuitos retroactivos y proactivos y aumentando en poder de las negaciones, lo cual constituye, por tanto, también un proceso constructivo, ya que los desequilibrios de partida se deben esencialmente a este déficit de los caracteres negativos.

Las Compensaciones existentes en la Construcción del Conocimiento Matemático

La intención de una teoría que trata de explicar el desarrollo de las estructuras cognitivas mediante la equilibración es evidentemente explicar la reversibilidad final de las operaciones lógico-matematicas (PN-FA), mediante mecanismos que no la presuponen desde el comienzo, pero que conducen a ella mediante etapas sucesivas, haciendo de ella un resultado necesario de las construcciones psicogenéticas al tiempo que conservan su estatuto terminal de norma intemporal y general durante el procesamiento de la información. En este apartado pretenderé los siguientes objetivos analíticos.

- Mostrar de que modo la reversibilidad se encuentra preparada por sistemas de compensaciones de diferentes niveles.

- Encontrar porqué estas compensaciones son indisociables de construcciones propiamente dichas igual que recíprocamente, cualquier construcción nueva se encuentra no solamente orientada en el sentido de compensaciones o de complementos, sino también dirigida por sus exigencias.

A partir de este momento hablaré únicamente de la secuencia didáctica de presentación horizontal ya que es ella la que brinda la oportunidad de hacer un análisis sustancial que considere plenamente la equilibración mejorada. Para fundamentar mi análisis extraeré algunos elementos teóricos de la equilibración de las estructuras cognitivas. Iré desarrollando primeramente el tópico '¿En que medida los procesos reguladores desembocan en compensaciones?', apoyándome en concepciones piagetianas y fundamentos del procesamiento de la información:

"No toda reacción a una perturbación (contenido o proceso) engendra un sub-proceso (ya que éste solo interviene bajo la presión de los sistemas de conjunto), tampoco todo sub-proceso produce una compensación".

La compensación es una acción de sentido contrario a un efecto dado que tiende a anularlo o neutralizarlo. Es evidente que las retroalimentaciones negativas desempeñan tal función en cuanto instrumentos de corrección.

Segundo, en cuanto a las retroalimentaciones positivas, la situación parece más compleja, pero no excluye en absoluto el desbocamiento en compensaciones, sino, no se podría comprender por que hay regulación.

Tercero, existen caracteres comunes a las diferentes compensaciones reguladoras.

◊ Toda compensación se orienta en dirección inversa o recíproca a la de la perturbación (contenido o proceso), lo cual equivale a anularla (inversión) o a neutralizarla en cuanto perturbación (reciprocidad), al tiempo que se puede extraer de ella informaciones útiles. Cito el modelo estructural de Gabriela (III, 0, tabla 5), donde en efecto sigue la progresión: *-Cla, -Pro, Aso, -Aso2, ser, con, Aso, Ser y Con*, que se anulan por el efecto de *-Aso2*.

◊ El carácter general de las compensaciones cognitivas es conllevar una evaluación terminal de su éxito o de su insuficiencia, que está unido al origen de la regulación misma. Ignacio en el empleo frecuente de Ide/ 2, avanza, regula su proceso y lo compensa con una clasificación correcta de T.C. (I, 1'; I, 2'; tabla 5.4).

El carácter común a todas las compensaciones (procesos de clasificación) es que tienden a conservaciones a través de transformaciones: conservación de la progresión *a(b + c)*; $(3x^2 - 1)2x^3$; $2a^{x-1}(3a^{x-2} + 1)$, etc. Estas tendencias conservadoras están lejos de desembocar sin más en la construcción de nociones o principios estructurales de conservación porque, para llegar a ese punto hay que constituir aún una cuantificación de las compensaciones.

Si las regulaciones y las compensaciones que provocan explican el mecanismo de la equilibración, es importante subrayar con fuerza el hecho de que estos **procesos formadores** ya son a la vez constructivos y conservadores. En la secuencia horizontal noto varias regulaciones que son en sí mismas unas construcciones, ya que añaden a la trayectoria secuencial de una acción retroacciones o trayectos en bucles: incluso si entonces el resultado no es más que el de estabilizar la acción 3-3', ya se produce un enriquecimiento por construcción de nuevas relaciones 1'-2, que entre otras cosas conllevan la formación de negaciones implícitas.

La Equilibración Maximizadora en el Proceso de Construcción de la Secuencia Horizontal

El examen de las regulaciones ha mostrado cómo se efectúa la equilibración en sus tres formas de equilibrio entre el sujeto y los objetos, entre los esquemas o los subsistemas del mismo nivel jerárquico y entre su diferenciación y su integración en totalidades superiores.

El hecho de que estos estados de equilibrio sean siempre superados se debe, por el contrario, a una razón muy positiva. Todo conocimiento consiste en suscitar nuevos problemas a medida que resuelve los precedentes.

En los dominios lógico-matemáticos en que, no obstante, es máximo el equilibrio, ya que una verdad adquirida mediante demostración se conserva indefinidamente. No constituye en absoluto un punto de detención, ya que una estructura acabada siempre puede dar lugar a exigencias de diferenciaciones en nuevas subestructuras o a integraciones en estructuras más amplias. La razón de esta necesaria mejora de todo equilibrio cognitivo algebraico es entonces que el proceso de la equilibración como tal implica de forma intrínseca una necesidad de construcción y, por lo tanto, de superación, por el hecho mismo de que sólo garantiza una cierta conservación estabilizadora en el seno de transformaciones de las cuales esta última constituye sólo la resultante: dicho de otro modo, compensación y construcción siempre son indisociables.

El equilibrio, en cuanto conservación mutua, de las diferenciaciones y de las integraciones no es más que un caso particular del de las acomodaciones y de las asimilaciones.

◊ Cada esquema de asimilación conlleva una cierta capacidad de acomodaciones que son los de la no ruptura del ciclo del que está formado, y a este respecto podría hablar de una <norma de acomodaciones>.

◊ Otro factor es que el número de los esquemas elementales o de los subsistemas (esquemas unidos) están ya construidos en el sistema total.

◊ La tercera categoría de los enriquecimientos de la secuencia horizontal debidos a las regulaciones y a las equilibraciones que son su resultado, consiste al mismo tiempo en ampliar las normas de acomodaciones y en favorecer la formación de nuevos subsistemas, con las nuevas conexiones.

Variedades de la Equilibración Maximizadora

Las mejoras observadas en los patrones generales de construcción del conocimiento algebraico durante la evolución de la secuencia horizontal ya no son simplemente resultantes del éxito de las regulaciones, sino que se extraen de la estructura misma de esas regulaciones. El progreso más general es el de la construcción gradual de las negaciones de diferentes clases, y ahí reside sin duda alguna el enriquecimiento más importante porque se que constituyen una condición necesaria del equilibrio y que su inicial carencia, en relación con la primacía sistemática de las afirmaciones, constituía la razón de los desequilibrios tan numerosos, profundos y difíciles de superar.

Las regulaciones compensadoras presentadas en la creación de las representaciones para ejemplificar cada paso de la secuencia de acciones (tablas 9), constituyen en su misma estructura instrumentos formadores de negaciones. Si observamos las partes superiores de esas tablas notamos que el análisis puramente descriptivo sobre la función de las negaciones es una equilibración ya que puede venir a insertarse a título de intento de explicación psicogenética: la conceptualización de los esquemas es una clasificación como A + A' = B; B + B' = C; etc., supone, en efecto, tantas negaciones como elementos positivos porque A = B (-A) y A = B (-A'), etc.,. Así es como la equilibración en sus formas fundamentales de compensaciones entre las afirmaciones y las negaciones se encuentra dirigida por la estructura misma de las regulaciones $x^3 \otimes x^2 = x^{3+2} \neq x^{3*2}$.

Pero este proceso de reflexión de las negaciones conceptuales ~ (x ^3*2), es la expresión de un proceso de construcción estrechamente unido al juego de las regulaciones y del cual, por una parte, constituye un aspecto inseparable: es la abstracción reflexiva, cuyo mecanismo interfiere continuamente con la formación de las regulaciones de regulaciones, hasta tal punto que parece tratarse en este punto de un solo y mismo mecanismo analizado en dos lenguajes y desde dos puntos de vista diferentes.

La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisociables: un "proceso de reflexión" en el sentido de una proyección en un nivel superior de lo extraído del nivel precedente *(¿cómo se resuelve?)* y un "producto de la reflexión" *(¡resuélvelo!)*, en el sentido de una reconstrucción o reorganización cognitiva (mas o menos consciente o no) de lo que de este modo ha sido transferido. Solo hay que precisar que esta abstracción no se limita a utilizar una sucesión de niveles operativos jerárquicos cuya formación le sería ajena: ella es quien los engendra mediante interacciones alternadas de "procesos de reflexión" y "productos de reflexión", pero precisamente en una unión tan estrecha con el afinamiento de las regulaciones que se trata de un solo y mismo mecanismo de conjunto.

Se constata que cada nuevo nivel de la progresión didáctica da lugar, en la forma "producto de la reflexión", a nuevas equilibraciones mediante regulación y estas regulaciones de rango algo superior prolongan naturalmente las del nivel de partida mediante "abstracción reflexiva".

Pero recíprocamente es evidente que el sistema superior de la conducta experta constituye entonces un regulador que ejerce su control sobre las regulaciones del nivel inferior (conducta novata). En el caso de todos los niveles en los que interviene un "producto de la reflexión", ya que éste constituye una regulación por su misma naturaleza de producto de la reflexión <sobre> lo adquirido anteriormente: así pues, el <producto de la reflexión> representa el prototipo de una regulación de regulaciones, ya que es por sí mismo un regulador y regula lo que se encuentra insuficientemente regulado por las regulaciones anteriores.

La siguiente condición es el apoyo del sistema algebraico (PN-FA) para extraer de él una guía didáctica y la realización de su regulación. 'Se constituye poco a poco una autorregulación, es decir, un juego de diferenciaciones y de integraciones tal que las totalidades sirven de reguladores con su acción sobre los subsistemas y los esquemas particulares'.

Esta colaboración de las regulaciones y de la abstracción reflexiva, moviéndose las dos de este modo de niveles en niveles de resolución, me permitió explicar el *Proceso Central de la Construcción del Conocimiento Matemático (PCCCM)* en el primer año de la preparatoria, es decir, la formación indefinida de operaciones sobre operaciones.

Capítulo

7

Alternativas de Desarrollo

7. *ALTERNATIVAS DE DESARROLLO*

El Conocimiento bien estructurado como Objetivo de la Enseñanza Matemática

Quiero llegar, por supuesto, a la idea de que uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas debería ser el de ayudar a los estudiantes a adquirir un conocimiento <bien estructurado> de las matemáticas. Trataré más tarde la relación entre las estructuras del conocimiento con la ejecución de las tareas matemáticas, y de la aportación del conocimiento bien estructurado al *insight* en la resolución de ejercicios algebraicos. Pero primero, para dirigir mi razonamiento, tengo que establecer algunos criterios que definan lo que es el conocimiento bien estructurado.

Según Greeno (1976), la verdadera utilidad para la enseñanza de las representaciones de redes semánticas estriba en su concreción. Nos permiten determinar los objetivos concretos de la enseñanza de un nivel que tiene en cuenta lo que los alumnos *saben* en relación con los que *hacen*. Son los que Greeno ha llamado <objetivos cognitivos>, por oposición puramente a los conductuales. Al delimitar objetivos cognitivos, no rechazo el empleo del rendimiento de la conducta como criterios que sirvan para determinar el grado de éxito de la enseñanza. Lo que hago, más bien, es ampliar el concepto de objetivos educativos formales para incluir en el mismo la estructura del conocimiento que produce la conducta, además de la conducta en sí.

Lo que trae aparejado esta ampliación se aprecia muy claramente comparando los esquemas de proceduralización más detallados con las jerarquías de aprendizaje. Las jerarquías de aprendizaje fueron el resultado de analizar las tareas para dividirlas en conductas objetivo, especificando tanto los estímulos como las respuestas de las mismas. Los actos complejos se dividen en las tareas componentes que están incluidas en los mismos, pero las jerarquías no especifican exactamente cómo se interrelacionan los diversos procesos, procedimientos o ideas en la mente de la persona para dar como resultado la ejecución hábil de las tareas. El análisis racional de procesos llevado a cabo, describe lo que se podría llamar <conocimiento de procedimientos> -los programas internos que tienen los sujetos para ejecutar las rutinas matemáticas- pero no especifica el conocimiento conceptual de las matemáticas al que se asocian estos procedimientos. Los objetivos cognitivos, sobre todo cuando se especifican en términos de redes semánticas o diagramas de proceduralización, pueden indicar los tipos de estructuras del conocimiento, tanto conceptuales como de procedimiento, en las que se debe centrar la enseñanza. Pueden proporcionar una teoría del conocimiento para dirigir la enseñanza, una teoría que indique que la ejecución matemática supone más cosas que la ejecución misma, y que la misma ejecución visible se puede basar en compresiones diferentes de los conceptos aplicados.

La tarea de especificar objetivos cognitivos será una empresa de primer orden para la psicología del aprendizaje de las matemáticas. Para realizar esta misión de forma correcta y útil, será necesario combinar conceptos de la estructura del contenido, pautas generales del conocimiento bien estructurado, e información derivada de la forma empírica sobre las estructuras de conocimiento de las personas a las que se considere expertas en un campo determinado. En términos generales, me resulta mucho más fácil la descripción de estructuras de conocimiento ideales (las que se basan en el análisis racional del programa de estudios, como son las estructuras para los procesos de factorizar y resolver productos notables descritos en este trabajo) que la verificación de si dichas estructuras de conocimiento, son en realidad, las que dirigen la actuación de los alumnos. Ya que no puedo observar directamente los diagramas de red en las mentes de los estudiantes, las estructuras de conocimiento se deben deducir a partir de sus conductas. Muchos métodos habituales de investigación (medidas de latencia de respuesta, estudios de formaciones de errores, y análisis de los protocolos de actuación y de pensar en voz alta) están desempeñando un papel importante en la deducción de las estructuras de conocimiento de los individuos. También se están utilizando medidas de asociación entre las palabras que conforman la terminología del contenido. Además, dado que los psicólogos del procesamiento de la información están prestando cada vez más atención a las estructuras del conocimiento, se están adoptando técnicas de entrevista clínica, al estilo e intenciones a las de Piaget, pero analizadas en otros términos.

Por medio del uso de diagramas de flujo, a través de ciertos criterios, podemos evaluar el grado de comprensión que se refleja en el sistema semántico que son: 1) la integración o coherencia interna de la representación; 2) el grado de conexión de la información con otras cosas que conozca el sujeto, 3) la correspondencia de la representación con el material que se debe comprender y 4) el número de relaciones interconceptuales que lleve a cabo el alumno.

No estaría mal poder señalar formas bien desarrolladas y probadas de determinar si una estructura del conocimiento satisface estos cuatro criterios, o de determinar incluso las características generales de las estructuras de conocimiento de los alumnos. Tanto el experimentador que analiza las relaciones entre el conocimiento y la actuación, como el instructor que intenta diseñar materiales para la enseñanza de un tema matemático determinado, necesitan conocer cómo son las estructuras de conocimiento de los individuos para dichos temas: sus grados de coherencia, de conexión con otros temas relacionados, y de correspondencia con la estructura del conocimiento matemático que se especifica dentro del campo mismo de las matemáticas. Pero las estrategias que se utilizan para estimar las estructuras de conocimiento todavía son más bien casuísticas, están diseñadas para experimentos determinados, y no se prestan bien a las comparaciones formales o cuantitativas de las condiciones instruccionales ni sus efectos. Debería ir integrándose en una agenda de trabajo para el desarrollo de procedimientos de estimación que tengan en cuenta las estructuras de conocimiento de los estudiantes.

Estimación de la Integración

Considero primero el criterio de integración interna. Una medida del conocimiento bien estructurado es el grado en que se asocian entre sí los conceptos, de formas ricas pero ordenadas. En una estructura de conocimiento integrada, algunos conceptos son centrales (Término común), en el sentido de que se asocian con un número particularmente elevado de otros conceptos (f.c.m. expresión algebraica, base, exponente, literal, coeficiente, etc.). Estos a su vez pueden ser conceptos nodulares u organizadores. Según la teoría de las redes semánticas, el tiempo de acceso se relaciona con el número de conexiones que se tienen que recorrer para llegar a un concepto determinado, o para descubrir la relación entre dos o más conceptos. Bajo este supuesto, un alumno que tenga un conocimiento integrado (Gaby e Ignacio), en el sentido de que tenga unos pocos conceptos organizados, que estén unidos a un subconjunto significativo de otros conceptos, debería manifestar una pauta de conducta determinada en experimentos cronometrados de recuerdo libre.

Larkin (1977) ha investigado el concepto general de que la asociación interna afecta a las pautas temporales de recuerdo, en estudios en que se comparaban las estructuras de información y las rutinas de resolución de problemas de <principiantes> y de <expertos> en el terreno de la física. Larkin llama "bloque" (*chunk*) a la información que se agrupa alrededor de un concepto organizador. Se podía estimar el progreso de un estudiante en el aprendizaje examinando sus pautas temporales de recuerdo, y buscando muestras que indicasen que la información se organizaba por bloques, lo que indicaría por extensión que el conocimiento está integrado. Pero el método de Larkin no me permite más que afirmar que la información está organizada por bloques. No me indica que ítems están agrupados en el mismo bloque. Los alumnos pueden dar muestras de que sus pautas de recuerdo forman cada vez más bloques, pero seguirán sin igualar las pautas del contenido del conocimiento de los expertos. Es, de hecho, lo que cabe esperar de unos estudiantes que "memorizan" procesos determinados para un examen. Tales estudiantes pueden generarse así mismos varias reglas mnemotécnicas que les permitan asociar entre sí diversos elementos del contenido de una asignatura, pero eso no quiere decir que descubran necesariamente los vínculos característicos del pensamiento de los expertos en la materia.

Estimación de la Correspondencia

Por lo tanto, las medidas de la integración sólo resultan útiles cuando disponemos también de algún medio de estimar la correspondencia de las estructuras del conocimiento de los estudiantes con la estructura del contenido que se les está enseñando. También es posible comparar en este sentido las estructuras de los principiantes con las de los expertos como lo he llevado a cabo, pero ahora prestando atención a *qué conceptos* se agrupan, y a que relaciones se expresan. Shavelton (1974; Shavelton y Stanton, 1975) y Gesling (1973, 1974), han desarrollado tests de asociación de palabras, de elaboración de gráficos y de ordenación de tarjetas, como métodos para determinar el ajuste de las estructuras cognitivas de los individuos a la estructura del contenido, representada por los profesores y los libros de texto.

En el método de asociación de palabras, se ofrece a una persona una palabra extraída del campo del contenido, y se le pide que declare todas las palabras o conceptos que asocie a la palabra clave. Cuando se compila una lista de palabras asociadas a cada palabra clave, es posible comparar las listas para determinar su frecuencia. Se pueden estudiar todas las parejas posibles de palabras comunes a las dos listas con el número total de asociaciones comunes posibles para dichas listas (se llama a este índice <coeficiente de relación>). Se pueden ordenar en forma de matriz todos los coeficientes de relación de las parejas posibles de un conjunto de palabras clave, y luego se puede analizar la matriz por procedimientos estadísticos para indicar los grupos de conceptos que están unidos. Esta formación de grupos puede parecer razonable de forma intuitiva a las personas familiarizadas con el contenido. También se puede comparar con los grupos que se desprendan de un análisis formal de las relaciones conceptuales en un texto u otro documento escrito sobre el tema. Castañeda , López y Espinoza (1987) ha estudiado el grado de comprensión de textos expositivos de contenido científico, en estudiantes de educación media.

Shavelson (1972) realizó tests sobre estudiantes de física en seis etapas de su aprendizaje, y descubrió que las agrupaciones de conceptos se iban aproximando a la estructura del material pedagógico. Los estudiantes que cursaban la asignatura de física también ofrecían más asociaciones con la palabra clave que los estudiantes que no cursaban física, y sus asociaciones eran, además, más ajustadas a las definiciones formales de los conceptos de la física. Thro (1978) llevó a cabo un estudio similar, en el que tanto los estudiantes como el profesor se sometieron a los tests de asociación de palabras varias veces durante el estudio de la asignatura de física, que duró un semestre académico. Como había hecho Schavelson, Thro comparó las matrices de coeficientes de relación de los estudiantes y de su profesor en cada test, y descubrió que se producía con el tiempo un incremento del ajuste entre dichos coeficientes.

Otro descubrimiento adicional importante que surgió del estudio de Thro se refería a la relación entre estructura cognitiva, que se medía por la técnica de asociación de palabras, y la ejecución de problemas de Física, que exigía la aplicación en situaciones dadas de ecuaciones conocidas; Thro descubrió que los estudiantes que obtenían mejores resultados en los problemas de Física tenían a fin de curso estructuras cognitivas que se ajustaban más a las del profesor. Esto sugiere que el grado de correspondencia entre una estructura de conocimiento y las estructuras formales del contenido está asociado directamente al rendimiento en la ejecución de problemas semialgorítmicos. Es lo que cabría esperar si las rutinas de ejecución se basasen en la comprensión conceptual de un contenido, o si la comprensión se desarrollase, en parte, como función de la práctica en el uso de los procedimientos asociados a un contenido. Pero no se puede considerar que esta relación entre las medidas de asociación de palabras y la capacidad de resolver problemas esté establecida con firmeza. En un intento anterior de seguir el desarrollo de estructuras cognitivas, Rothkopf y Thurner (1970) compararon ejercicios de redacción sobre conceptos de la mecánica newtoniana escritos antes y después de leer un texto sobre física. Se analizaron las redacciones, con un método que determinaba las pautas de recurrencia de los términos clave, y se puso de manifiesto que las redacciones que se habían escrito después de leer el texto eran algo más similares al texto que las que se habían escrito antes. Pero no se registró un cambio correspondiente a la hora de ejecutar un test de resolución de problemas de Física. Por lo tanto, las estructuras de conocimiento de los alumnos pueden empezar a parecerse a las de los expertos sin llegar a dar la nueva comprensión que aumenta el poder de ejecución del sujeto en tareas relacionadas con el contenido.

Estimación de la Conexión

Parece que no puedo basarme completamente en las medidas de asociación, a la hora de estudias las estructuras cognitivas. También tengo que desarrollar formas de deducir las estructuras de conocimiento, directamente a partir de las actuaciones en la resolución de problemas y de entrevistas en las que se pide a las personas que expliquen las bases de su actividad de resolución de problemas. Estos métodos , difíciles de cuantificar, pero que generalmente permiten interpretaciones claras, pueden tener una importancia particular a la hora de permitir asociar el conocimiento de procedimientos con el conocimiento conceptual, y constituirá, por lo tanto, una forma de estudiar los grados de conexión, así como la integración y la correspondencia de las estructuras de conocimiento de los alumnos.

Utilización de los procesos de construcción del conocimiento y de las estrategias en la resolución de problemas

El carácter no integrado ni conectado de algunos alumnos, antes de recibir la enseñanza, y la capacidad posterior de utilizar su conocimiento para resolver problemas que no se habían encontrado antes, apuntan a la necesidad de una teoría psicológica de la comprensión que vaya más allá de la presencia o de la ausencia de elementos determinados del conocimiento. Los conocimientos almacenados sobre el contenido no son capaces, por sí solos, de resolver los problemas. Debe existir también un mecanismo que dirija la búsqueda mental por las redes, para recuperar la información. Y debe existir un mecanismo que permita generar y probar de forma activa las nuevas relaciones entre conceptos y estructuras, cuando la información que se necesita no está almacenada exactamente de la forma que parece que se necesita.

Las teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento, un repertorio de *estrategias* de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados, y a generar relaciones nuevas entre los ítems almacenados en la memoria por separado. Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento, y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que sea capaz de resolver la tarea planteada. Por lo tanto, para desarrollar una secuencia didáctica hay que considerar tanto los tipos de estructuras matemáticas que poseen los alumnos, incluidos los tipos de rutinas algorítmicas que son capaces de ejecutar, como las estrategias que poseen para acceder a sus conocimientos, detectando las relaciones y eligiendo las acciones disponibles.

Representación de la tarea organizadora

En cualquier situación de resolución de problemas, el primer paso es elaborar una representación del problema; es decir, advertir las características del mismo y codificarlas de tal manera que sean interpretables por el sistema de procesamiento de la información. Esto es lo que permite que el conocimiento del alumno se pueda aplicar a la tarea en cuestión. Gran parte del trabajo de representación en psicología se ha visto impulsado por los intentos de elaborar teorías sobre cómo comprenden las personas el lenguaje, cómo asocian un significado al lenguaje que escuchan o leen, conectando las palabras y las frases a las estructuras del conocimiento ya establecidas. Pero se han llevado a cabo algunos estudios del papel de la representación en el campo de las matemáticas.

Las posibilidades que determinan la representación dependen de las diferencias individuales en cuanto al alcance y estructura del aprendizaje anterior, incluyendo las limitaciones que imponen al desarrollo la edad y la experiencia. La naturaleza de tales diferencias ha sido el tema del inicio de este capítulo, en la que he estudiado el valor del conocimiento bien estructurado que se integra de forma interna, está bien conectado con otros conocimientos, y tiene una buena correspondencia con los principios establecidos de las matemáticas. Otro factor que influye sobre la representación es el entorno de la tarea, incluyendo en este sentido las instrucciones de la tarea y las pistas que contienen y que tienden a evocar un tipo de representación determinada.

El entorno de la tarea algebraica

Este entorno debe comprender todos los elementos de la tarea que están disponibles y son percibidos por la persona que resuelve la tarea. La tarea se puede presentar en forma física, en forma de diagrama, verbal o simbólica como en el caso de la resolución de incógnitas de una expresión algebraica.
En lo que se refiere a una expresión algebraica, decir que el principio de que "el todo es mayor que la suma de sus partes" implica que las características del problema se perciben de una forma organizada, que impone una estructura al problema global. A veces, los diversos elementos del problema hacen que surjan estructuras erróneas y, por lo tanto, soluciones falsas.
El entorno de la tarea es un proceso factor determinante de la gama de estrategias que puede aplicar la persona que resuelve el problema. Esto queda bien demostrado por los experimentos sobre "la fijación funcional", línea de investigaciones que surge de la labor de la Gestalt sobre el papel del *insight* en la resolución de problemas.

Instrucciones de la tarea

Las instrucciones de la tarea pueden tener una eficacia especial, ya como ayuda a la resolución de la tarea, ya como disuasión de la misma, dado su poder de generar representaciones. Las instrucciones que facilitan la elaboración de una representación rica, inspirando conceptos aprendidos de antemano, tienen un efecto diferente al de las instrucciones que inspiran el descubrimiento y la copia de ejemplos de reglas. Así, no cabe duda de que las instrucciones verbales que acompañaban al programa de descubrimiento dirigido eran responsables, en parte, de la mejor transferencia de aprendizaje a nuevas situaciones.

El entorno de la tarea está compuesto, por tanto, de los elementos objetivos de la tarea, incluidas las instrucciones o enunciado de la tarea. Debe estar claro que los elementos objetivos de cualquier problema se transforman en el proceso de codificación de los elementos que se lleva a cabo para su procesamiento mental. Pasan a formar parte de lo que Novell y Simon (1972) llaman *espacio del problema*, o a lo que he llamado, ***representación de la tarea***. El espacio de la tarea es, de hecho, un entorno de tarea más rico y más completo que el externo, porque no sólo incluye los datos del problema, reformulados en términos familiares, sino también todos los datos relevantes y los procedimientos con los que se conectan estos elementos replanteados en la memoria a largo plazo.

Estrategias para el análisis de las tareas y la búsqueda de estructuras del conocimiento

Cuando se ha elaborado una representación de la tarea, la probabilidad de que se lleve a cabo una resolución correcta depende de si la persona que lo resuelve posee en la memoria un conjunto adecuado de procedimientos que se ajustan al problema, tal como se presenta. En el caso de la mayoría de las tareas que requieren soluciones algorítmicas, cuando se ha desarrollado una representación se puede decir que se ha efectuado la parte más importante del trabajo intelectual. Ya sólo faltaría asegurarse de que los procedimientos inspirados por la representación son, de hecho, aplicables a la tarea, y limitarse a aplicar tales procedimientos. Lo más usual es que se puedan aplicar algoritmos normales; por ejemplo, los que se utilizan para resolver factorizaciones algebraicas con término común. Los alumnos que las resuelven pueden reconocer, por ejemplo, que un procedimiento conocido es inadecuado en esa situación determinada, o que sus conocimientos tienen una laguna. En tal caso, el "problema" puede radicar en el hecho de que no es evidente la correspondencia entre los datos y el conocimiento almacenado, o en el hecho de que la información necesaria no esté disponible, o de que hay que recorrer enormes cantidades de información para ubicar la correspondencia. Es frecuente que se generen soluciones falsas, porque el alumno no es capaz de reconocer que una rutina que antes se podía aplicar con éxito no puede funcionar ahora, en la nueva situación problemática. Pero cuando se ha detectado la no aplicabilidad de los procedimientos conocidos, existe una serie de estrategias disponibles para ayudar a localizar la información almacenada, o a reconstruir la información que falta a partir de los elementos del conocimiento que antes no estaban asociados entre sí.

En los cuadros presentados en el capítulo 3 correspondientes al análisis racional de tareas, ilustré unas estrategias habituales en la resolución de problemas: el empleo se subtareas. Si un problema no se puede resolver directamente, se facilita la búsqueda por el bagaje de conocimiento del alumno formulando subobjetivos que se puedan *resolver* y que, cuando estén resueltos, contribuyen a la resolución del objetivo original.

Se pueden concebir las subtareas-objetivo como un método para elaborar una representación del problema a partir de los datos de la situación, como un método para codificar información externa sobre la tarea para su procesamiento interno. Esta función de las subtareas-objetivo se pone más de manifiesto en los problemas en los que las subtareas producen labores de búsqueda muy diferentes.

Facilitar la resolución de tareas algebraicas por medio de la enseñanza de las matemáticas

¿Qué posibilidades existen para mejorar las probabilidades de resolución de las tareas algebraicas y su invención? Utilizando los tres ingredientes básicos de la resolución de tareas ha saber, el conocimiento previo, el entorno de la tarea y las estrategias, puedo indicar intervenciones pedagógicas que podrían mejorar el funcionamiento de cada componente en la situación de resolución del problema. En primer lugar, la enseñanza de las matemáticas puede intentar garantizar la presencia del conocimiento bien estructurado, y maximizar los vínculos con los conceptos y procedimientos relacionados. Esto supone asegurarme de que la enseñanza de las matemáticas sea honrada matemáticamente, de que ponga de manifiesto la estructura del contenido, y de que proporcione la oportunidad de practicar los nuevos procedimientos y conceptos en una gran diversidad de contextos. Esto supone también enseñar todo el conocimiento matemático que sea posible, dada la edad y la habilidad del estudiante. Desde un punto de vista puramente intuitivo, cuantos más datos, procedimientos y relaciones caractericen la estructura del conocimiento de una persona, más probabilidades tendrá dicha persona de descubrir las conexiones requeridas. Si a un estudiante le falta el conocimiento de los requisitos previos, no puedo esperar una resolución hábil de tareas por su parte.

La enseñanza de las matemáticas también puede intentar tener en cuenta el papel del entorno de la tarea como estímulo primario de la resolución del problema. Por ejemplo, para proporcionar práctica en la estrategia de resolución de ejercicios algebraicos, se puede presentar el ejercicio con claridad, con un mínimo de información ajena al mismo, o se puede acompañar el ejercicio de dibujos o diagramas. Se puede enseñar a los alumnos a que exploren las características del entorno, permitiendo un libre juego de sus mentes para que consideren las conexiones que evoca cada característica. O pueden aprender a poner por escrito sus pensamientos, o a trazar dibujos para crearse a sí mismos un entorno de tarea más rico, a partir del cuál podrán elaborar una presentación del problema.

Las posibilidades de la enseñanza de este tipo apenas se están empezando a tener en cuenta, mucho menos a probarse ni a perfeccionarse. Pero el trabajo empírico sobre la ejecución de tareas, como el que he descrito, está cargado de promesas para el tipo de comprensión que necesitamos para crear alumnos que ejecuten mejor las tareas.

Aprender conceptos, procedimientos y actitudes en la preparatoria

Es muy difícil hablar de quién aprende sin referirse inmediatamente a qué contenidos aprende y a cómo se ayuda al alumnado en este proceso para que sea un éxito. Basándome en esta apreciación, analizaré los aspectos del aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes poniéndolas en relación con las oportunidades de enseñanza que el profesor brinda con su trabajo.

¿Qué permite al alumno aprender conceptos en la preparatoria?

Lo que, entre otros requisitos, le permite al alumno aprender de manera significativa conceptos en la escuela es:

a) Poseer una serie de saberes personales

1. Tener conocimientos previos organizados, pertinentes y relevantes con que conectar la nueva información objeto de aprendizaje.

2. Tener otros conocimientos, más procedimentales, que le permitan:

- Encontrar en la memoria el conocimiento más relevante, próximo o específicamente relacionado con el contenido de la nueva información que haya que aprender *(estrategias de activación y recuperación)*.
- Poder hacer explícito este conocimiento para tomar conciencia de lo que sabe y cómo lo sabe y permitir que otros (el maestro, los compañeros) también lo conozcan.
- Elaborar, conectar, situar y retener los nuevos conocimientos en estructuras de significado más o menos amplias. Los alumnos *utilizan estrategias de codificación y retención* para establecer un significado común entre los elementos de la información que deben aprenderse, y también para poner de relieve las relaciones implícitas entre los elementos que componen la información. Para ello pueden formularse preguntas, elaborar resúmenes, tomar notas, comparar diferentes elementos del texto o estos elementos con los que aparecen en otros textos orales o escritos, comprobar los objetivos señalados por el autor, elaborar mapas conceptuales, etc.

- Poder regular, en algún grado, el propio proceso de aprendizaje. Comprobar, por ejemplo, si se cumplen o no los objetivos previstos, revisar continuamente lo que se hace, proponer nuevas maneras de hacer para conseguir aprender el concepto. (*Estrategias de dirección, regulación y control de los propios procesos de pensamiento y acción*). Existen diferencias importantes en el desarrollo y aprendizaje del alumnado en este proceso.

3. Tener motivos relevantes que le permitan encontrar sentido a la actividad de aprendizaje de conceptos, que le haga sentirse satisfecho por cosas como: librarse de actuar en condiciones de inmediatez y como reacción a lo que le envuelve, poder anticipar, reflexionar y organizar las "cosas" (materiales y abstractas; reales o imaginarias); establecer sus rasgos o características básicas de modo independiente a las condiciones en que éstas se presentan; plantearse y resolver preguntas tales como *¿qué es?, ¿qué características tiene?, ¿en qué es igual o distinto a...?, ¿qué hace que cuando esto ocurre también tenga lugar esto otro?* Identificar lo que le resulta familiar y diferenciar lo desconocido, sentir curiosidad por averiguar todo lo que ignora, etc. La percepción de esta capacidad ha de ayudar a los alumnos a sentir confianza en las propias posibilidades de conocer, dominar y gestionar el mundo que les rodea.

4. Tener tendencia a creer que la construcción del conocimiento conceptual no se hace contra los otros, sino con los otros (poder sentirse bien preguntando y siendo cuestionado, resolviendo dudas y ayudando a otros a realizar la misma tarea, etc.). Estar dispuesto a creer que las dudas pueden ser compartidas y que el propio conocimiento es perfectible.

5. Tener tendencia a creer que el avance en la construcción de las propias ideas y conceptos se debe al esfuerzo personal.

b) Tener un profesor dispuesto a trabajar tomando al alumno como el centro de su intervención

1. El profesor ha de intervenir para activar las ideas previas de los alumnos, ayudándole a:

- Revisar y explicitar la ideas que poseen con respecto del tema objeto de aprendizaje y a trabajar con ellas mostrándose dispuesto a modificarlas, si procede. En este sentido debe facilitarse que los alumnos manifiesten y argumenten sus ideas y creencias, antes de la actividad de trabajo en el aula y durante ella;
- Debatir las propias opiniones o contrastarlas con las de otros, usar éstas ideas personales para resolver determinados problemas y evaluar el resultado, etc. Las actividades de aprendizaje y enseñanza, si se seleccionan y presentan propias representaciones, ideas y creencias a averiguar algunas de sus limitaciones y predisponerles positivamente a modificarlas.

FALTA PAGINA

No. 126

- Por su parte, las actividades de descubrimiento deberán ser de ámbito de exploración restringido para favorecer que los alumnos identifiquen fácilmente las variables que hay que tener en cuenta y pueda reunir los datos percibiendo que tiene control sobre lo que indaga y la situación de indagación.
- Los profesores han de planificar a lo largo del proceso de aprendizaje y enseñanza actividades de resumen y síntesis.
- Los profesores deben facilitar la verbalización de los conceptos.
- Han de confiar en el esfuerzo de los alumnos y ayudarles sugiriéndoles pistas para pensar, devolviendo una valoración de su propio progreso, teniendo en cuenta el punto personal de partida, y el proceso por el que los alumnos llegan al conocimiento.
- Asimismo, es importante presentar actividades de evaluación en las que sea posible atribuir la consecución del aprendizaje a causas internas, modificables y controlables.

¿Qué permite a los alumnos aprender procedimientos en la preparatoria?

a) Saberes personales de los alumnos

1. Tener conocimientos procedimentales previos (Por ejemplo, técnicas, métodos, reglas, normas, algoritmos, destrezas motoras y cognitivas, estrategias) organizados, pertinentes y relevantes con que conectar los nuevos contenidos. Es decir, ser capaz de realizar o ejecutar, en algún grado, las operaciones procedimentales necesarias para lograr la meta propuesta, y también, poseer una representación o idea del procedimiento en sí mismo (por ejemplo, de sus rasgos definitorios y característicos, de las propiedades y condiciones de uso en contextos variados). Los alumnos han de poseer conocimientos declarativos referidos a los medios, la secuencia de acciones, las metas, sus relaciones mutuas, y también, poseer conocimiento de las condiciones necesarias para usar un procedimiento en la resolución de una tarea concreta en un marco específico. En los momentos en que se inicia un aprendizaje procedimental, es necesario activar muchos conocimientos declarativos.

2. Tener otros conocimientos, también procedimentales, que le permitan:

- Encontrar en la memoria el conocimiento más relevante, próximo o específicamente relacionado con el contenido (*categorías de activación y recuperación*).
- Poder hacer explícito este conocimiento para tomar conciencia de lo que sabe y como lo sabe y permitir que otros también lo conozcan (declarar una acción y poder mostrarla o <materializarla> en algún grado>).
- Elaborar, conectar, situar y retener los nuevos conocimientos en estructuras de representación y actividad más o menos amplias. Para ello pueden:
    - ◊ Intentar representarse mentalmente el proceso global de actuación.
    - ◊ Estar dispuesto a actuar un procedimiento con la intención de ampliar y completar progresivamente el número de pasos, de ir respetando el orden de

ejecución más concerniente, de ganar en eficacia de ejecución, generalizar el uso del procedimiento a diferentes situaciones, de conseguir una representación más profunda que incluya información relevante referida a la tarea, etc.

◊ Poder regular el propio proceso de aprendizaje. Los alumnos deben estar dispuestos a comprobar si se cumple o no la meta de aprendizaje propuesta, a revisar lo que hace y piensa de lo que se hace, a proponer nuevas formas de realización más ajustadas, etc. En suma, a dotarse de estrategias de dirección, regulación y control del propio proceso de aprendizaje de procedimientos.

3. Tener motivos relevantes que le permitan encontrar sentido a la actividad de aprendizaje de procedimientos, que le haga sentirse satisfecho, por ejemplo, de enfrentarse de modo más eficaz a situaciones de aprendizaje, de poder pensar utilizando sus propios medios, de adaptarse a marcos y situaciones que le estaban vetados anteriormente.

4. Tener tendencia a creer que la construcción del conocimiento procedimental se hace en colaboración con otros.

5. Tener tendencia a creer que el avance en la construcción de los propios saberes procedimentales se debe al esfuerzo personal. En este sentido, los alumnos deben estar dispuestos a soportar una ejecución inicial insegura, poco organizada o eficaz, tal vez errónea, e interpretar la experiencia inicial como un paso necesario para un aprendizaje significativo y experto de procedimientos.

b) Disposición de los profesores de matemáticas a enseñar en la construcción del propio conocimiento procedimental

1. Los profesores han de intervenir para suscitar las representaciones (o ideas) que los alumnos tienen del procedimiento, para ayudarles a que manifiesten el grado de dominio que poseen en la ejecución. Para ello, los profesores de matemáticas han de:

- Activar, explicitar y trabajar con las ideas que los alumnos tienen del procedimiento objeto de aprendizaje.
- Activar la competencia procedimental previa de los alumnos facilitando que sigan una lista de instrucciones para la solución de un problema, pruebe un proceso, imite otros, o se encuentre inmerso de lleno en una experiencia interesante y significativa.

2. Asimismo, los profesores han de facilitar que el alumno oriente su actividad, al inicio y en el curso del aprendizaje, y su esfuerzo en este proceso.

- Debe ayudarle a representarse el objetivo de la actividad que hay que realizar, los materiales y las condiciones de trabajo para que los alumnos consigan orientar claramente su actividad y su esfuerzo, y pueda ajustar las expectativas propias con las del profesorado.

3. Los profesores han de presentar al alumno el nuevo procedimiento que debe aprender (la nueva información) de modo que los alumnos puedan atribuir significado en algún grado. Todo ello se verá favorecido si los profesores tienen en cuenta una serie de criterios de presentación de la información respecto del procedimiento en sí mismo y de organización y funcionamiento de las actividades de aprendizaje de dicho procedimiento.

- Criterios de presentación de la información o del procedimiento mismo:

    ◊ Al presentar el procedimiento, los profesores deben procurar explicitar las consignas que dirigen el proceso de realización del procedimiento de modo lógico, claro y significativo para los alumnos.
    ◊ Proporcionar situaciones en que sea posible que los alumnos actúen para probar o ensayar el procedimiento ayudándose, inicialmente, de modelos o de esquemas.
    ◊ Proporcionar otras situaciones útiles a los alumnos para poder diversificar el empleo del procedimiento y que tengan posible el ejercicio de una práctica generalizada y constante. Estas situaciones deben brindar a los alumnos la oportunidad de ejecutar el procedimiento de manera voluntaria, consciente e innovadora y brindarle la ocasión para revisar la ejecución y de perfeccionamiento de éste.

- La verbalización de los procedimientos en situaciones de actividad compartida con otros y en la resolución de problemas de manera cooperativa permite a los alumnos negociar el significado de éstos en situaciones de actividad compartida, confrontar sus ideas, pudiendo resolver dudas y usarlos de modo funcional, y estudiar su utilidad en diferentes contextos.
- Confiar en el esfuerzo de los alumnos por la construcción de procedimientos y ayudarles sugiriéndoles pistas para pensar, devolviendo una valoración de su propio progreso, teniendo en cuenta el punto personal de partida, pidiéndoles explicaciones sobre su propio proceso y el proceso por el que el alumno llega al conocimiento y su generalización a diferentes situaciones y contextos.
- Presentar actividades de evaluación en que sea posible atribuir la consecución del aprendizaje a causas internas, modificables y controlables.

¿Qué permite a los alumnos aprender determinadas actitudes hacia el estudio de las matemáticas?

a) Saberes personales de los alumnos

1. Estar familiarizado con ciertas normas y poseer tendencias de comportamiento que manifiesten en situaciones específicas, ante objetos matemáticos y personas concretas que sirvan de anclaje a las nuevas normas y actitudes objeto de aprendizaje.

2. Poder recordar, de entre todos los que se encuentran en la memoria, las evaluaciones, juicios o sentimientos que nos merecen determinadas cosas, personas, objetos o situaciones más relevantes y especialmente relacionados con la nueva norma o actitud.

3. Mostrarse dispuesto a expresar a otros nuestras ideas u opiniones, por la palabra, el gesto o de cualquier otro modo posible, como medida para obtener algún grado de conciencia sobre ellas y para conseguir que otros también las conozcan.

4. Poder elaborar el significado de la nueva norma o actitud, conectándola con el propio comportamiento y opinión e interiorizarla. Para ello puede ser necesario:

- Formarse una idea o representación de la norma o actitud objeto de aprendizaje.
- Comportarse de acuerdo a determinados valores científicos y patrones o modelos con la intención de responder a las demandas que hacen los científicos y con la idea de demostrar coherencia entre la actitud y norma que mantenemos y los valores a los que concedemos importancia personal. Ir elaborando, en la medida de lo posible, criterios personales de comportamiento ético para poder dar una mayor relevancia a determinadas normas y actitudes en situaciones concretas y progresar en la consecución de la autonomía personal y moral.

5. Poder aceptar todo lo que implica el cambio de actitud con confianza y seguridad en uno mismo. El poder mostrar o no una actitud determinada depende no únicamente de que conozcamos los argumentos que la sostienen, sino de la posibilidad de relacionarla con determinados afectos, emociones y motivos que, a veces, nos impiden cambiar. Toda innovación personal implica cierto grado de temor y supone aceptar algún tipo de riesgo.

El cambio de actitud en la escuela es posible si los alumnos cuentan con el apoyo del grupo que valora de modo positivo esa modificación de actitudes y acepta el reto del cambio constituyéndose como referente y soporte, gracias a la calidad de relaciones que en él se generan.

b) Intervención de los profesores de matemáticas en la construcción de actitudes por parte de los alumnos

1. El grupo escolar debe tener claramente establecidos los criterios de valor por los que se rige. La cualidad de la interacción que se establezca en la escuela y en el grupo de clase tomando como base los valores establecidos actuará como referente de la regulación de la propia acción personal y de la actividad compartida.

2. Los profesores han de facilitar el conocimiento y el análisis de las normas existentes en el centro escolar y en el grupo de clase para que los alumnos puedan comprenderlas y respetarlas.

3. Es función de los profesores ayudar a los alumnos para que relacionen significativamente las normas con determinadas actitudes que se pretende que desarrollen en situaciones concretas.

4. Facilitar la participación e intercambio entre los alumnos para debatir opiniones e ideas sobre los diferentes aspectos que atañen a la actividad de éstos en el centro escolar.

5. Una determinada organización de las actividades de aprendizaje de contenidos en la escuela facilita el aprendizaje de determinadas actitudes tales como la cooperación, la solidaridad, equidad y fraternidad.

6. Procurar modelos de las actitudes que se pretende que los alumnos aprendan en la escuela y facilitar el apoyo y el tiempo necesario para que éstos puedan ensayar, probar e imitar.

El aprendizaje de actitudes en la ciencia y en otras disciplinas se apoya, según puse de manifiesto, en la elaboración de representaciones conceptuales y el dominio de determinados procedimientos (estrategias de memoria, de relación con otros, etc.). A su vez, las actitudes están en la base del despliegue personal de estrategias de dirección, orientación y mantenimiento de la propia actividad de aprendizaje. Por ejemplo, actitudes como el rigor o la curiosidad, se apoyan en el ejercicio del experto de ciertos procedimientos y, a su vez, ayudan a los alumnos a perseverar en la consecución de la cualidad de la actividad. Asimismo, el respeto por la diversidad (actitud) permite que nos mantengamos interesados por conocer las características de otros conceptos o procedimientos hasta lograr apreciarlos en toda su identidad sin necesidad de comparaciones descalificadoras y viceversa. De esta manera, el poder llegar a conocer, apreciar y valorar a sus semejantes por lo que ellos mismos son, implica conocerse y apreciarse a uno mismo, en suma, tener confianza en las propias capacidades y autoestima.

Enseñar Matemáticas en la Preparatoria

Creación e intervención en Zonas de Desarrollo Próximo, ZDP

Desde la concepción constructivista que se mantiene a lo largo de este trabajo, el aprendizaje escolar es un proceso activo desde el punto de vista del alumno, en el cual éste construye, modifica, enriquece y diversifica sus esquemas de conocimiento con respecto a los distintos contenidos escolares a partir del significado y el sentido que se puede atribuir a esos contenidos y al propio hecho de aprenderlos. Al mismo tiempo, de los capítulos anteriores se desprende de manera constante la idea de que, debido a la peculiar naturaleza social y cultural de los saberes que los alumnos deben aprender, ese proceso activo no puede, en la preparatoria, confiarse al azar ni separarse de una actuación externa, planificada y sistemática, que lo oriente y guíe en la dirección prevista por las intenciones educativas recogidas en el plan de estudios.

La conjunción de ambas ideas supone que la actuación externa, es decir, la enseñanza, debe entenderse, necesariamente, desde la concepción constructivista en que me muevo, como una *ayuda* al proceso de aprendizaje. Ayuda necesaria, porque sin ella es altamente improbable que los alumnos lleguen a aprender, y a aprender de manera lo más significativa posible, los conocimientos necesarios para su desarrollo personal y para su capacidad de comprensión de la realidad y de actuación en ella, que la escuela tiene la responsabilidad social de transmitir. Pero sólo ayuda, porque la enseñanza no puede sustituir la actividad mental constructiva del alumno ni ocupar su lugar (Coll, 1986, 1990).

A lo largo de la presente sección, y desde estas ideas de partida, voy a tratar de profundizar en esta caracterización de la enseñanza como ayuda, intentando responder a algunos interrogantes específicos al respecto: qué características debe cumplir la ayuda para poder hacer efectivo su objetivo de orientar y guiar el aprendizaje; qué criterios de intervención es posible seguir en la práctica habitual para que se den esas características; qué supone entender la enseñanza como ayuda desde el punto de vista del profesor. Para ello, estructuraré las páginas que siguen en tres grandes apartados.

La Enseñanza de las Matemáticas como ayuda ajustada

La consideración de la enseñanza de las matemáticas como ayuda al proceso de aprendizaje, tiene, por encima de cualquier otra, una consecuencia fundamental que resulta clave para poder profundizar en su caracterización: la delimitación del *ajuste* de dicha ayuda al proceso constructivo que realiza el alumno como rasgo distintivo de la enseñanza eficaz. En efecto, si la enseñanza de las matemáticas debe ayudar al proceso de construcción de significados y sentidos que efectúa el alumno, la característica básica que debe cumplir para poder llevar a cabo realmente su función es la de estar de alguna manera vinculada, sincronizada, a este proceso de construcción. Si la ayuda ofrecida no <conecta> de alguna forma con los esquemas de conocimiento del alumno, si no es capaz de movilizarlos y activarlos, y a la vez forzar su reestructuración. no estará cumpliendo efectivamente con su cometido. La condición básica para que la ayuda educativa sea eficaz y pueda actuar realmente como tal, es la de que esa ayuda se ajuste a la situación y las características que, en cada momento, presente la actividad mental constructiva del alumno (Coll, 1990, 1991). Para tal fin, la ayuda debe conjugar dos grandes características.

> *1) Debe tener en cuenta los esquemas de conocimientos de los alumnos en relación al contenido de aprendizaje de que se trate, y tomar como punto de partida los significados y los sentidos de los que, en relación a ese contenido, dispongan los alumnos.*

> *2) Debe provocar desafíos y retos que hagan cuestionar esos significados y sentidos y forcen su modificación por parte del alumno, y asegurar que esa modificación se produce en la dirección deseada, es decir, que acerca la comprensión y la actuación del alumno a las intenciones educativas.*

La ayuda ajustada supone *retos abordables* para el alumno; abordables no tanto en el sentido de que pueda resolverlos o solventarlos por sí solo, sino de que pueda afrontarlos gracias a la combinación de sus propias posibilidades y de los apoyos e instrumentos que reciba del profesor. Lo que sea o no un reto abordable dependerá del punto de partida del alumno y de lo que pueda aportar al proceso de aprendizaje, pero también, de la calidad y cantidad de apoyos e instrumentos de ayuda que reciba.

La enseñanza de las matemáticas como ayuda ajustada pretende siempre, a partir de la realización compartida o apoyada en tareas, incrementar la capacidad *de comprensión y actuación autónoma* por parte del alumno. En otras palabras, tiene como objetivo que los instrumentos y recursos de apoyo que el profesor emplea para que el alumno pueda ir con su ayuda más allá de lo que sería capaz individualmente y el profesor pueda retirarse progresivamente hasta su completa desaparición, de manera que las modificaciones en los esquemas de conocimiento realizados por el alumno sean lo suficientemente profundas y permanentes como para que éste pueda afrontar adecuadamente y por sí sólo, situaciones similares. La premisa subyacente en este punto es que lo que el alumno puede realizar con ayuda en un momento dado podrá realizarlo más tarde de manera independiente, y que el hecho de participar en la tarea conjuntamente con un compañero más competente o experto es precisamente lo que debe provocar las reestructuraciones y los cambios en los esquemas de conocimiento que harán posible esa actuación independiente.

Ofrecer una ayuda matemática ajustada: Crear Zonas de Desarrollo Próximo y ofrecer asistencia en ellas

Las distintas características que acabo de atribuir a la enseñanza de las matemáticas como ayuda ajustada se encuentran recogidas y reflejadas en la manera de entender la enseñanza de las matemáticas asociada a la noción de *ZDP* propuesta por el psicólogo soviético L. S. Vygotsky hace ya más de medio siglo en el marco de una posición teórica global que defiende la importancia de la relación y la interacción con otras personas como origen de los procesos de aprendizaje y desarrollo humanos, recuperada junto con el conjunto de la obra vygotskiana en los últimos años y objeto creciente de interés y profundización en el ámbito psicológico y educativo, la *ZDP* se define como la distancia entre el nivel de resolución de una tarea que una persona puede alcanzar actuando independientemente y el nivel que puede alcanzar con la ayuda de un compañero más competente o experto en esa tarea (Vygotsky, 1979). Dicho en términos generales, la *ZDP* puede definirse como el espacio en que, gracias a la interacción y ayuda de otros, una persona puede trabajar y resolver un problema o realizar una tarea de una manera y con un nivel que no sería capaz de tener individualmente (Newman, Griffin y Cole, 1991).

De acuerdo con la caracterización de Vygotsky y sus continuadores, es en la *ZDP* donde puede producirse la aparición de nuevas maneras de entender y enfrentarse a las tareas y los problemas por parte del participante menos competente, gracias a la ayuda y los recursos ofrecidos por su o sus compañeros más competentes a lo largo de la interacción. En el estudio de situaciones que llevé a cabo, sugiero una intervención en las zonas de caos de las secuencias horizontal y vertical, aquí es un momento clave para la intervención y así, sobrepasar esas barreras u obstáculos epistemológicos.

En términos similares a los que manejé anteriormente, la *ZDP* es el lugar donde, gracias a los soportes y ayudas de otros, puede desencadenarse el proceso de construcción, modificación, enriquecimiento y diversificación de los esquemas de conocimiento matemático que define el aprendizaje escolar. Igualmente, desde esta caracterización, entiendo que lo que una persona es capaz de hacer con ayuda en la *ZDP* en un momento dado, podrá realizarlo independientemente más adelante: aquello que primero puede realizarse en el plano de lo social o de lo interpersonal, podrá más tarde ser dominado y realizado de manera autónoma por el participante inicialmente menos competente. Volviendo a la terminología anterior, el proceso de construcción, modificación, enriquecimiento y diversificación del conocimiento matemático en el primer año de la preparatoria, que desencadena la participación en la *ZDP* puede dar lugar a una reequilibración duradera y a un nivel superior de los esquemas (equilibración maximizadora). Por último, entiendo que la *ZDP* no es una propiedad de uno u otro de los participantes en la interacción o de alguna de sus actuaciones individual y aisladamente consideradas, sino que se crea en la propia interacción en función tanto de las características de los esquemas de conocimiento sobre la tarea o contenido aportados por el participante menos competente como de los tipos y grados de soporte y los instrumentos y recursos de apoyo empleados por el participante más competente. De ahí que pueda hablar, para un alumno dado en el ámbito escolar, no de una *ZDP* sino de múltiples *ZDP* en función de la tarea y el contenido que se trate, los esquemas de conocimiento puestos en juego y las formas de ayuda empleadas a lo largo de la interacción. De ahí también hablar de la *ZDP* como de un lugar o un espacio no supongo definirla o conceptualizarla en términos fijos y estáticos, sino como un espacio dinámico, en constante proceso de cambio con la propia interacción.

Puedo afirmar, por tanto, que ofrecer una ayuda matemática ajustada al aprendizaje supone crear *ZDP* y ofrecer asistencia y apoyos en ellas, para que, a través de esa participación y gracias a esos apoyos, los alumnos puedan ir modificando en la propia actividad conjunta sus esquemas de conocimiento y sus significados y sentidos, y puedan ir adquiriendo más posibilidades de actuación autónoma y uso independiente de tales esquemas ante situaciones y tareas nuevas, cada vez más complejas.

Plantear la cuestión de la ayuda ajustada en términos de la creación y asistencia en las *ZDP* tiene la ventaja de que nos permitirá utilizar, en el intento de especificar las formas de intervención en el salón que permiten ofrecer ayudas ajustadas en el mismo, todo un conjunto de resultados que la investigación psicológica y educativa ha ido obteniendo sobre las formas de actuación que favorecen la construcción conjunta de *ZDP*. A este respecto, tres cuestiones deberían estar ya claras a partir del análisis que he realizado hasta ahora.

1. La primera cuestión es que una misma forma de intervención del profesor puede, en un momento dado y con unos alumnos determinados, servir como ayuda ajustada y favorecer el proceso de creación y asistencia en la *ZDP*, y en otro momento o con otros alumnos, no servir en absoluto como tal y no favorecer este proceso, en función de los significados y sentidos que aporten los alumnos a la situación en cada caso concreto. La enseñanza de las matemáticas, haciendo referencia a la creación de *ZDP*, no tiene efectos lineales ni automáticos sobre los alumnos, sino que estos efectos siempre son función de los alumnos concretos y lo que éstos aportan en cada momento al aprendizaje.

2. El segundo asunto es que la enseñanza de las matemáticas no puede, desde esta perspectiva, limitarse a proporcionar siempre el mismo tipo de ayudas ni a intervenir de manera homogénea e idéntica en cada uno de los casos. Ante una pregunta de los alumnos en el curso de una explicación, por ejemplo, en ocasiones puede ser más adecuado responder de manera directa retomando información ya proporcionada anteriormente; en otras, dirigirla al resto de la clase; en otras, reformularla en otros términos antes de contestarla; en otras, ampliar lo dicho. Igualmente, en el momento de diseñar actividades para enseñar un contenido, en algunos casos puede ser más adecuado pensar en tareas muy pautadas y estructuradas, mientras que en otros puede convenir pensar en tareas más abiertas y con posibilidades de opción para los alumnos. Ajustarse y crear *ZDP* requiere, necesariamente, variación y diversidad en las formas de ayuda.

3. El tercer punto es que, desde estas nociones, la dimensión temporal de las situaciones de enseñanza y aprendizaje adquiere una relevancia fundamental en el momento de decidir qué ayuda concreta puede ser más ajustada en cada caso o de analizar si una intervención específica realizada ha sido ajustada o no. Con ello quiero decir que la valoración de hasta qué punto una determinada ayuda resulta o no adecuada en una situación concreta depende, en buena parte, del momento del proceso en que nos encontremos, tanto en términos generales (es decir, en términos de si estamos en los momentos iniciales o finales del aprendizaje de un contenido) como específicos (es decir, en términos de lo que ha pasado en el proceso de aprendizaje inmediatamente antes de esa ayuda o de lo que va a pasar inmediatamente después). Así, no es probable que los alumnos necesiten ayudas del mismo tipo y grado la primera vez que se enfrentan a un concepto determinado que cuando ya le hemos dedicado varios momentos del curso o con otros profesores.

A partir de estas cuestiones, preguntarme por las formas concretas de actuación del profesor que pueden representar ayudas ajustadas, o que pueden favorecer la creación de *ZDP*, no puedo querer decir buscar una lista de comportamientos concretos y fijos que, aplicados de manera directa, aseguren el ofrecimiento de esas ayudas o la creación de esas *ZDP*. Por el contrario, sólo puede significar el preguntarme por los tipos de procesos globalmente implicados en esa creación, y por los criterios básicos que, a partir de ellos, es posible extraer para una intervención educativa; criterios que permitan fundamentar la decisión, para cada contenido concreto, para cada grupo de alumnos concretos y para cada momento concreto del proceso, de las formas específicas de ayuda a emplear.

Procesos y criterios en la creación de Zonas de Desarrollo Próximo para el aprendizaje algebraico

Como señalé anteriormente, la creación de *ZDP* y el avance a través de ellas depende, en cada caso, de la interacción concreta que se establezca entre el alumno y quienes debemos buscar en determinadas características de esas interacciones los procesos básicos responsables de la posibilidad de ofrecer una ayuda ajustada, y los criterios que a partir de ellos podamos derivar como guías para el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas. Puesto que el responsable principal y habitual de ayudar al aprendizaje de los alumnos es el profesor, son determinadas características de la *interacción profesor-alumno* las que van a ocuparme de manera prioritaria en esta última sección. Al mismo tiempo, conozco también que, bajo determinadas condiciones, la interacción entre alumnos puede ser igualmente origen de *ZDP* y puede ofrecer elementos de avance en su interior; de ellas me ocuparé, por tanto, de manera muy breve, en un segundo momento de este apartado.

La interacción profesor - alumnos

Aunque estoy muy lejos de disponer de un conocimiento completo y detallado de los procesos que intervienen en la creación de *ZDP* y en el avance conjunto a través de ellas en situaciones de interacción profesor-grupo de alumnos en la clase, es posible identificar, con lo que conozco actualmente, cierto número de elementos relevantes a ese respecto, susceptibles de generar criterios válidos para el diseño de la práctica habitual y su análisis e interpretación reflexiva. Antes de pasar a su presentación, vale la pena hacer dos consideraciones preliminares. La primera es que, de acuerdo con lo que señalé anteriormente sobre el carácter no lineal ni mecánico de los efectos de la enseñanza de las matemáticas, no se trata de que cada uno de los elementos o criterios que voy a exponer sirva automáticamente y aisladamente para crear *ZDP* o avanzar en ellas, sino más bien de que, *tomados en su conjunto*, estos elementos, y criterios configuran una determinada representación de los procesos de enseñanza de las matemáticas que parecen más capaces de generar y hacer progresar a los alumnos a través de dichas *ZDP*. La segunda es que, por el hecho mismo de que los distintos elementos y criterios que mencionaré han surgido a partir del análisis de situaciones reales de enseñanza y aprendizaje que he puesto en marcha durante ocho semestres de actividad profesional y que en ocasiones se remiten también a la práctica habitual de otros colegas. Ello supone, desde mi punto de vista, un elemento decisivo para poder afirmar la viabilidad del tipo de enseñanza que apunta esa representación global a que me acabo de referir, y supone igualmente que la experiencia personal y profesional de muchos de los colegas resultan completamente válidos al respecto, y son un activo que es necesario aprovechar en toda su potencialidad. Hechas estas consideraciones, formularé algunas de las características principales de los procesos interacción profesor-alumno en situación salón de clase, de acuerdo con mi conocimiento actual, que están implicados en los procesos de creación de *ZDP* y de avance a través de ellas.

1. Insertar, en el máximo grado posible, la actividad puntual que el alumno realiza en cada momento en el ámbito de marcos u objetivos más amplios en los cuales esa actividad pueda tomar significado de manera más adecuada.

2. Posibilitar, en el máximo grado posible, la participación de todos los alumnos en las distintas actividades y tareas, incluso si su nivel de competencia, su interés o sus conocimientos resultan en un primero momento muy escasos y poco adecuados.

3. Establecer un clima relacional, afectivo y emocional basado en la confianza, la seguridad y la aceptación mutuas, y en el que tengan cabida la curiosidad , la capacidad de sorpresa y el interés por el conocimiento por sí mismo.

4. Introducir, en la medida de lo posible, modificaciones y ajustes específicos tanto en la programación más amplia como en el desarrollo <sobre la marcha> de la propia actuación en función de la información obtenida a partir de las actuaciones y productos parciales realizados por los alumnos.

5. Promover la utilización y profundización autónoma de los conocimientos que se están aprendiendo por parte de los alumnos.

6. Establecer, en el mayor grado posible, relaciones constantes y explícitas entre los nuevos contenidos que son objeto de aprendizaje y los conocimientos previos de los alumnos.

7. Utilizar el lenguaje matemático de la manera más clara y explícita posible, tratando de evitar y controlar posibles incomprensiones.

8. Emplear el lenguaje matemático para recontextualizar y reconceptualizar la experiencia.

Interacciones entre los alumnos

La interacción profesor-alumno es, en las situaciones de aula, la fuente básica de creación de *ZDP* y asistencia en ellas, por la propia naturaleza de la educación matemática como práctica diseñada intencionalmente con el objetivo de que el alumno aprenda determinados saberes gracias a la ayuda sistemática y planificada que le ofrece el profesor. Sin embargo, también la interacción cooperativa (*cooperative learning*) entre alumnos puede resultar, bajo ciertas condiciones, base adecuada para la creación de *ZDP* y origen de ayudas que puedan hacer progresar en el aprendizaje a los participantes a través de esas *ZDP*. Para concluir este trabajo, en lo que sigue, me centraré en un repaso muy breve de algunas de las características de la interacción entre alumnos que parecen resultar particularmente relevantes a este respecto (un análisis más detallado puede encontrarse en Coll, 1984; Pla, 1989; Coll y Colmina, 1990 o Echeita y Martín, 1990).

1. El contraste entre puntos de vista moderadamente divergentes a propósito de una tarea o contenido de resolución conjunta.

2. La explicación del propio punto de vista.

3. La coordinación de roles, el control mutuo del trabajo y el ofrecimiento y recepción mutuos de ayuda.

Enseñar matemáticas en la preparatoria: algunos comentarios finales

Las distintas características, condiciones y procesos que he ido apuntando dibujan una imagen global muy determinada de lo que supone el proceso de enseñanza de las matemáticas en el primer año de la preparatoria: posibilitar y enmarcar la participación de los alumnos, adaptarse a ella de manera contingente y al mismo tiempo forzar formas cada vez más elaboradas e independientes de actuación por su parte, todo ello en la medida de lo posible en cada situación, y gracias a una conjunción de recursos y actuaciones muy diversas tanto en el plano cognitivo como en el afectivo y relacional. Tres comentarios finales en relación a esta imagen y lo que supone el intento de ponerla en práctica en el salón de clase van a servirme para acabar de perfilar su significado.

1. Como han señalado Coll y Solé (1989), esta imagen lleva a delimitar como ejes de la tarea del profesor tres elementos básicos: la *planificación* detallada y rigurosa de la enseñanza de las matemáticas, la *observación y la reflexión constante* y sobre lo que ocurre en el aula, y la *actuación diversificada* y plástica en función tanto de los objetivos y la planificación diseñada como de la observación y el análisis que se vaya realizando. De acuerdo con estos ejes, el profesor de matemáticas queda definido claramente como un profesional reflexivo que toma decisiones, las pone en práctica, las evalúa y las ajusta de manera progresiva en función de sus conocimientos y su experiencia profesional, y no como un mero ejecutor de las decisiones de otros o como un aplicador mecánico de fórmulas fijas de actuación.

2. El segundo comentario supone remarcar que la tarea de ofrecer ayudas ajustadas a los alumnos de matemáticas de la preparatoria, pasa por diversos niveles o planos de la práctica educativa. Es decir, que no es algo que dependa únicamente de lo que cada profesor pueda hacer individualmente en su clase , sino que tiene que ver también con decisiones tomadas a nivel de ciclo, de etapa, de academia con respecto a cuestiones tales como materiales curriculares que usarán los alumnos, libros de texto, distribución y uso de espacios, estructuración de horarios de asesoría, etc.

3. Creo vale la pena hacer resaltar que una enseñanza realizada de acuerdo con las características y parámetros que he señalado es una enseñanza de las matemáticas que pueda responder de manera adecuada a la diversidad de los alumnos y que integra esa respuesta en el desarrollo habitual de la tarea docente. Cada uno de los criterios que he ido desarrollando pueden considerarse como criterios de *respuesta a la diversidad* de los alumnos, y esta respuesta se debe entender, entonces, como algo consustancial a la actuación habitual de los profesores de matemáticas en la preparatoria, dirigido al conjunto de los alumnos preparatorianos, y que puede darse desde distintas dimensiones y planos de la vida del aula y del centro escolar (Onrubia, 1993).

Por último, estoy consciente de que una caracterización de la Enseñanza de las Matemáticas supone, indudablemente, un reto para los que nos dedicamos a la tarea docente, y que su puesta en práctica no está en absoluto exenta de problemas, dificultades y limitaciones impuestas en muchas ocasiones por las propias condiciones de realización de dicha tarea. Por ello, y de acuerdo con los mismos principios que he empleado para construir esa caracterización, entiendo que ese reto podrá ayudar al aprendizaje científico y al desarrollo de las instituciones sólo si se afronta partiendo de los conocimientos y experiencia previa de cada profesor y empleándolos como eje desde el cual plantear cualquier proceso de cambio, y partiendo igualmente de la historia, la situación y las condiciones reales de cada escuela; si se plantea en términos de *tareas concretas abordables* en cada momento en función de esas condiciones y de los instrumentos de apoyo disponibles; y si se entiende auténticamente como un *proceso progresivo*, con sus avances, retrocesos, bloqueos y conflictos, y en el que el avance puede ser, en ocasiones, lento y aparentemente poco espectacular, pero no por ello menos decisivo e importante.

Conclusiones

Gracias a la psicología constructivista vimos como los conceptos son creados en la mente de cada individuo. A través del procesamiento de la información intentamos enfrentarnos con cuestiones de comprensión y de conocimiento estructural en el aprendizaje y en el pensamiento matemático en el primer año de la preparatoria. Lo que nos interesó fue el descubrir formas sistemáticas de representar el conocimiento, que explicaron también la capacidad de los alumnos de extender el razonamiento más allá de la información que se proporcionó en las fichas de trabajo. Ellos han tratado de descubrir conexiones y relaciones entre los diferentes conceptos, y de aplicar esos conocimientos al momento de ejecutar la tarea. Una primera acción en el desarrollo de una psicología sistemática de la comprensión, fue la de representar la flexibilidad del pensamiento y del razonamiento de los estudiantes. Las teorías actuales de la "memoria", sobre todo los modelos de red del conocimiento, representan las relaciones internas, y por tanto la estructura, de lo que saben los alumnos. Dichos modelos los concebimos de tal forma que las ideas y los conceptos mantienen relaciones específicas entre sí, y se entendió explícitamente que el aprendizaje puede consistir en construir nuevas interconexiones y relaciones, así como en recibir nuevos elementos de información e incorporarlos a los anteriores.

Utilicé diversas estructuras del conocimiento de algunas operaciones matemáticas para ilustrar estos puntos y profundizar en ellos. Se pudo ver claramente el carácter "anidado" de las secuencias, lo cual nos permite entender mejor el proceso de adquisición de conocimiento como un proceso de acumulación constructiva. Constatamos que los estudiantes utilizan de forma acumulativa los procesos que ellos tienen, pero en el caso de ciertos alumnos, construyen nuevas estructuras. En estos procedimientos de búsqueda, los procesos y los conocimientos adquiridos se reordenan de forma particular.

Aunque es muy difícil determinar cuales procesos emplea un alumno en un momento determinado en un contexto en especial, el profesor bien puede estar en circunstancias de mejor organizar sus contenidos haciendo énfasis a los procesos cognitivos que se demandan en la solución. Propusimos que el conocimiento matemático bien estructurado se podía considerar un objetivo primario de la enseñanza de las matemáticas.

Pusimos en evidencia la necesidad individual dentro de un equilibrio dinámico con su entorno. Este equilibrio fue perturbado por la confrontación del nuevo conocimiento y el antiguo (zonas de caos), ocurrió un periodo de transición cuando la estructura del conocimiento es reconstruida alcanzando el equilibrio, mayor nivel de madurez. Presentamos, de manera indirecta, el concepto de estrategias de resolución de la tarea matemática que recurren a estructuras de conocimiento relevantes y que ayudaron a dirigir la búsqueda de la información que el alumno necesita.

Diversos aspectos interrelacionados de la estrategia de la resolución de problemas merecen nuestra atención: la representación del problema, la secuencia didáctica y el impacto en el uso de diferentes procesos. La representación mental de un problema desempeña un papel importante en el momento de dirigir el camino probable de los intentos de resolución, y tanto la secuencia didáctica como las diferencias individuales de los alumnos (experto - novato) en la construcción de sus estructuras de conocimiento tienen influencia sobre la representación del problema.

El proceso de aprendizaje causa una simple expansión de la estructura cognitiva del individuo y en el caso donde existe conflicto cognitivo, es indispensable considerar una reconstrucción mental. Es este proceso quien provoca una de las dificultades que ocurrieron durante la fase de transición.

Constatamos que el nuevo conocimiento seguido contradice al viejo, un aprendizaje efectivo requiere estrategias que convivan con tal conflicto. Un obstáculo es una pieza de conocimiento; es parte del conocimiento del alumno.

Con frecuencia, algunas soluciones de los estudiantes a ciertos problemas, cognitivamente no fueron procesos deductivos, pero sí, procesos de construcción en los cuales notamos que el alumno construyó propiedades del objeto abstracto. Durante este periodo existió conflicto entre las propiedades de los ejemplos mostrados en las fichas y lo que el alumno conoce, y las propiedades del nuevo concepto que tuvieron que ser "deducidas" de la definición. Un periodo de re-construcción y su consecuente confusión fue inevitable.

Puedo hacer una distinción cognitiva entre los diferentes tipos de generalizar las formas de proceder de los alumnos cuando se confrontan con las actividades experimentales. En el tratamiento de las fichas 0-0' hablaremos de una "generalización expansiva" en la cual los alumnos aplican su estructura cognitiva existente sin el requerimiento de modificaciones en sus ideas frecuentes. Ellos sólo identifican, asocian, conservan y serian.

Por otro lado, en el trabajo con las fichas 1-1' y 3-3', se hizo necesario el *reconstruir* la estructura cognitiva existente por medio de la permutación de algunos elementos. A este tipo de actividades dentro de estas secuencias didácticas, lo llamaremos "generalización reconstructiva". Pero cuando existieron dificultades al operar nuevos conocimientos o al utilizar la anidación de procesos con su subsecuente desastre, donde se tuvieron que involucrar nuevas ideas como una colección adicional de información a ser aprendida desde su raíz y ser agregada al conocimiento con la integración de las ideas precedentes. Esta sería una "generalización disyuntiva" (fichas de trabajo 2-2'). El riesgo que tomamos con los adjetivos de las generalizaciones recientemente usados, concierne una aproximación *genérica*, en el sentido que describe el procedimiento típico (general) para referirnos a un caso *específico*. Como aproximación genérica vemos un método sencillo de generalización porque se aplica a procesos bien conocidos en el contexto próximo a la abstracción formal y no involucra una reconstrucción cognitiva mayor.

Por otro lado, la naturaleza del pensamiento matemático está interconectada con el proceso cognitivo que impulsa hacia el conocimiento matemático.

La actividad algorítmica

Los procedimientos de acciones siguieron el desenvolvimiento de las operaciones matemáticas. Una actividad algorítmica está esencialmente implicada en las técnicas matemáticas de logro (factorizar un polinomio, por ejemplo). Una característica de tales actividades va muy ligada a las operaciones de identificación y clasificación del objeto mental. Hecho ya lo anterior, empiezan a desarrollarse los pasos intermedios. Si existe congruencia entre el contenido a desarrollar y los procesos a utilizar, se obtiene el logro; de lo contrario, un error serio puede ocurrir e invalidar totalmente el resultado. No existe regeneración de los pasos omitidos en el algoritmo.

Tales actividades son una parte aceptable de las matemáticas avanzadas porque se pueden ver como parte de una gran teoría. Hemos hipotetizado que una actividad algorítmica es elemento esencial del aprendizaje de las matemáticas porque tal proceso debe ser interiorizado, rutinizado, encapsulado, coordinado, revertido y generalizado, antes de que pueda reflejar su utilidad en la manipulación mental de objetos contemplados en teorías matemáticas de mayor orden.

Entre los pasos de la secuencia didáctica horizontal, 2' a 3 (zona caótica en el aprendizaje), se tuvo que llevar a cabo, por una alumna en particular, una decisión no-algorítmica que ha significado una bifurcación de la estructura conceptual seguida. En el caso de la secuencia vertical, otro alumno presentó el mismo comportamiento (ficha 2' a 3'). Aquí pensamos que la creatividad matemática es el proceso para lograr tales pasos. Las decisiones tomadas han mostrado la amplitud y naturaleza divergente de los caminos seguidos cuando se trata de hacer una elección.

Es esencial el estudiar la estructura de las matemáticas como un constructo mental. Vimos la teoría formal de la matemática como un marco consistente en definiciones de conceptos y relaciones las cuales surgen de reglas estrictamente prescritas (proceso deductivo). Metodológicamente fue necesario el definir los conceptos de manera precisa y después ver sus relaciones. Estas unidades de información bien pueden representarse en una red bajo forma lógica y ordenada, conjuntamente con los procesos cognitivos requeridos para su manejo. La creatividad matemática involucró procesos cognitivos que permiten construir una red más compleja.

Frecuentemente, enseñamos ciertos procesos porque sabemos que ellos darán un éxito visible, pero para quienes adquieren un determinado proceso, podrán desarrollar la imaginería conceptual que contiene las semillas del futuro conflicto. Mostramos evidencias de una aproximación formal la cual hizo llamado a la sofisticación de un experto que resulta cognitivamente inapropiado a la conducta de un novato ya que éste requiere de nuevas formas de enseñanza para pasar, a través de una transición, desde una matemáticas elementales al punto donde la economía y estructura de las matemáticas modernas se vean como un logro significativo.

Ha parecido importante el mostrar la complejidad de la tarea al separar las entidades conceptuales en producciones de los alumnos para que, de manera didáctica eficiente, sean manipuladas por medio de simbolismos, en conjunto con sus relaciones propias, para dar un contexto propio a esas relaciones.

La ordenación de las tarjetas ha sido un método que ha permitido la determinación del ajuste de las estructuras cognitivas de los individuos a la estructura del contenido representado por los expertos de la materia.

Para finalizar, nuestra preocupación ha girado en torno a *qué* es lo que saben y comprenden los alumnos, además del *cómo* esta estructurada la materia. Dimos muestras de la organización de ciertos contenidos para ayudar a los alumnos a aprender estructuras matemáticas. Es decir, cómo se comprende el contenido de las matemáticas, y cómo se ordena mentalmente la información para permitir el razonamiento y la resolución de tareas matemáticas. Desde este punto de vista práctico, estas preocupaciones sugieren el rediseñar el currículo de matemáticas, para hacer hincapié en la comprensión estructural, y desarrollar formas de representar conceptos matemáticos fundamentales, con la promesa que puedan llegar a convertirse en una forma de conseguir que la enseñanza de las matemáticas sea eficaz y accesible para más alumnos.

Referencias Bibliográficas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (1983). *Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento.* Selam. Paidós. Buenos Aires.

Ausubel, D., J. Novak y H. Janesian (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Arenas, U. (1993). *Competencia en el uso de Lenguaje Algebraico. Estudio longitudinal en los niveles medio básico y superior en la región de La Laguna.* Reporte técnico, Departamento de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango-PNFAPM.

Bachelard, G. (1934). *El nuevo espíritu científico.* Traducción de R. Sánchez. Tercera edición en español, 1989. México: Nueva imagen.

Begle, E. G. (1979). "Critical Variables in Mathematics Education". *Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics.* USA. 9-25.

Bell, A. (1983). *Algebra: ideas and material for Years 2 - 5 in the Secondary School.* Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottinham.

Bergan, J. R. (1980). "The Structural Analysis of Behaivor: An Alternative to the Learning Hierarchy Model". *Review of Educational Research* 50, 625 - 646.

Biggs, J. B. (1980). "Emergent Themes and Further Directions". *Cognition, Development and Instruction.* Kirby, J. y J. Biggs editores. Academic Press.

Bonilla, E..; E. Martín-Lunas; M. Nemirovsky; B. M. Parra y G. Waldegg (1988). "Informe preliminar de la evaluación curricular de la maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa del CINVESTAV". Documento interno. México: Matemática Educativa-CINVESTAV.

Bonilla, E. (1989a). "La Educación Matemática: Una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología (Primera de dos partes)". *Educación Matemática* 1, (2), 28 - 41.

Bonilla, E. (1989b). "La Educación Matemática: Una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología (Segunda de dos partes)". *Educación Matemática* 1, (3), 30 - 36.

Bonilla, E. (1989c). "La dimensión de la cultura en la investigación en matemática educativa". *Pedagogía* 6, (17), 9 - 20.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* NFER - Nelson.

Brousseau, G. (1981). "Problèmes de didactique des décimaux". *Recherches en didactique des Mathématiques* 2, (1). Francia: Penseé Sauvage Editions.

Brousseau, G. (1987). *Ètudes en didactique des mathématiques. Fondements et méthodes de la didactique des mathémathiques. Partie* 1. IREM. Bordeaux, Francia.

Bruner, J., J. Goodnow y G. Austin (1956). *A study of thinking.* Nueva York: Wiley.

Bruner, J. (1964a). "The course of cognitive growth".
American Psychologist 19, 1 - 15.

Bruner, J. (1964b). "Some theorems of instruction illustrated with reference to mathematics". *The Sixththird Yearbook of the National Society for the Study of Education,* Parte 1, 63, 306 - 335.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Bruner, J. (1991). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Alianza Editorial.

Campos, H. M. (1979). "La estructura didáctica". A. Furlán y cols., *Aportaciones a la didáctica de la enseñanza superior.* UNAM-ENEP Iztacala. 18 - 34.

Campos, H. M. (1988a). "El aprendizaje cognitivo: Una puntualización de su problemática". Documento presentado al *Taller de Investigación Educativa sobre el Salón de Clase.* CISE, UNAM, 20p. Mecanoescrito.

Campos, H. M. (1988b). "El análisis estructural del aprendizaje cognitivo en el aula". *Revista Intercontinental de Psicología y Educación* 1, 103 - 115.

Campos, H. M. (1989). "La problemática del aprendizaje cognitivo en el aula". M. Escobar y M. Rueda editores. *La investigación educativa sobre el salón de clases universitario.* México, CISE, UNAM

Campos. H. M. y S. Gaspar (1989). "El concepto de aprendizaje en la teoría piagetiana y algunas implicaciones pedagógicas". *Perfiles Educativos.* En Campos (1990).

Campos, H. M. (1990). "Análisis estructural del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en los niveles medio superior y superior". *Revista Intercontinental de Psicología y Educación* 3,(1 - 2). México.

Campos, H. M. (1991). "Análisis de mapas conceptuales en el aprendizaje en el aula". *El aula universitaria: Aproximaciones metodológicas*. Rueda, M., Delgado, G y M. A. Campos (coordinadores). CISE, UNAM. 125 - 138.

Campos, H. M. y J. Estrada (1995). "Representación matemática en el contexto de resolución de problemas de optimización". Trabajo presentado en el Seminario Cognición, Epistemología y Enseñanza de las Ciencias. IIMAS - Facultad de Ciencias, UNAM. Mecanoescrito 5 pp.

Case, R. (1978). "Piaget and beyond: Toward a developmentally based theory and technology of instruction". R. Gaser (comp.), *Advances in Instructional Psychology* 1. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Case, R. (1980a). "The underlying mechanisms of intelectual development". J. R. Kirby y Biggs, J. B. *Cognition, Development and Instruction*. Hillsdale. Laerence Erlbaum Associates. 5 - 37.

Case, R. (1980b). "Implications of neo-piagetian theory for improving the sesing of instruction". J. R. Kirby y Biggs, J. B. (op. cit.) 161 - 186

Castañeda, F. S., López, O. M., García, E. y T. Gómez (1985). "Habilidades de estudio y estrategias de aprendizaje en estudiantes de primer ingreso al sistema universitario. Estudio exploratorio en ciencias básicas, biológicas y sociales". *Memorias del IV Congreso Mexicano de Psicología. Sociedad Mexicana de Psicología*. 98.

Castañeda, F. S y M. López (1986a). "Contribución a la evaluación de conductas de estudio, a partir de instrumentos de auto-reporte". Asociación Mexicana de Psicología Social. *La Psicología Social en México* 1, 527 - 534.

Castañeda, F. S. y M. López (1986b). "Validación de un sistema de análisis de textos instruccionales de carácter científico". Reporte técnico y pre-publicación interna del Departamento de Psicología General del Posgrado de la Facultad de Psicología, UNAM.

Castañeda, F. S. y M. López (1987). "Understanding the role of five induced learning strategies in science textbook comprehension". *Journal of Experimental Education* 55, (3), 125 - 130.

Castañeda, F. S. y M. López (1989). *Antología: La psicología cognoscitiva del aprendizaje. Aprendiendo a aprender*, UNAM.

Castañeda, F. S. y M. López (1990). "Modelamiento computacional de mecanismos de aprendizaje. De novato a experto". *Revista Mexicana de Psicología* 7, (1 - 2), 157 - 171.

Castillo, B. F. (1995). "Sistema experto de enseñanza en integración simbólica". *Memorias V Simposio Internacional en Educación Matemática*. UACPyP, UNAM. 183 - 186.

Cedillo, T. (1991). "De un razonamiento aritmético - cuantitativo a un razonamiento algebraico". Ponencia presentada en el *IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. PNFAPM - Universidad de Valencia. Valencia, España, junio de 1991.

Coll, C. (1984). "La construcción de esquemas de conocimiento en el proceso de enseñanza - aprendizaje". C. Coll (ed.) *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid: Siglo XXI.

Coll, C. (1986). "Marc curricular per a l'ensenyament obligatori". Barcelona, Departament d'Ensenyament. (versión al español: *Psicología y currículum*, Barcelona. Laia, 1987. Reeditado en Barcelona. Paidós, 1991).

Coll, C. (1990). "Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: la concepción constructivista del aprendizaje escolar y de la enseñanza". C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps.): *Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la Educación*. Madrid: Alianza.

Coll, C. y Colmina (1990). Op. cit, 435 - 453.

Coll, C. (1991). "Constructivismo e intervención educativa: ¿Cómo enseñar lo que se ha de construir?". *Congreso Internacional de Psicología y Educación. "Intervención Educativa"*. Madrid. (Reimpreso en *Aula de Innovación Educativa* 2 y 3).

Cuoco, A. (1992). *An action to process aproach to solving algebra word problems*. Educational Development Center. Ohio, USA.

Davydov (1974). "Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the Elementary School. Educational Studies in Mathematics". En: Freudenthal, H. (1983).

De León, De L., A. (1995). "Desarrollo de habilidades metacognoscitivas en la matemática". *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática*. UACPyP, UNAM. 132 - 137.

Díaz Godino J. (1991). "Área de Conocimiento. Didáctica de la Matemática". Capítulo 3, en: Díaz Godino y cols. (1991).

Díaz Godino, J.; B. Gómez; A. Gutiérrez; L. Rico y M. Sierra (1991). *Área de Conocimiento. Didáctica de la Matemática.* Madrid: Síntesis.

Echeita, G. y E. Martín (1990). "Interacción Social y Aprendizaje". A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (comps.): *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar.* Madrid: Alianza.

Ervynck, G. (1991). "Mathematical Creativity". *Advanced Mathematical Thinking.* David Tall, ed. Mathematics education library 11, 42 - 53.

Filloy, E y T. Rojano (1984a). "From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12 - 13 years old)". *Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,* 51 - 56. Wisconsin University.

Filloy, E. y T. Rojano (1984b). "La aparición del lenguaje aritmético - algebraico" Léducazione Matematica 5, 278 - 306. Cagliari, Italia.

Filloy, E. y T. Rojano (1987). "Solving Equations: the transition from arithmetic to algebra". *For the Learning of Mathematics* 9, (2).

Filloy, E. y L. Puig (1991). "Presentación del volumen Historia de las Ideas Algebraicas". *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Educación Matemática.* Valencia: PNFAPM - Universidad de Valencia.

Filloy, E y G. Rubio (1993). "Didactic Models, Cognition and Competence in the Solution of Arithmetic & Algebra Word Problems". *Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* San José, California.

Flores, P. A. (1991). "¿Qué es la Educación Matemática?". *Educación Matemática* 3, (1), 67 - 76.

Freudenthal, H. (1978). "Major Problems in Mathematics Education". *Educational Studies in Mathemathics* 12, (2), 133 - 150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathemathical Structures.* Holanda: Reidel.

Gagné, R. y L. Brown (1961). "Some factors in the programing of conceptual learning". *Journal of Experimental Psychology* 62, (4), 313 - 321.

Gagné, R. (1962). "The acquisition of knowledge". *Phychological Review* 69, (4), 355 - 365.

Gagné, R., Mayor J., Garstens H. y Paradise N. (1962). "Factors in acquiring knowledge of a mathematical task". *Psychological Monographs: General and Applied* 76 (7, todo en el número 526).

Gagné, R. (1970). *The conditions of learning* (Segunda Edición). Nueva York: Holt,

Gagné, R. (1978). "Learning hierarchies". *Educational Psychologist* 6, (1), 1 - 9.

Rinehart & Winston.

Gallardo, A. y T. Rojano (1992). "Negative solutions in the context of algebra word problems". *Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.* San José, California.

García, R. y A. Sepúlveda (1992). *Dominio Operatorio Numérico. Diagnóstico longitudinal de carácter regional.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa.

García, R y A. Sepúlveda (1993). *Competencia Algebraica. Estudio longitudinal con estudiantes de bachillerato y del nivel universitario.* Reporte Técnico. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa - PNFAPM.

García, R. H. (1991). "El taller de matemáticas como desarrollador de estrategias creativas de pensamiento". Trabajo presentado en *la IX Reunión de Intercambio de Experiencias de Estudios sobre Educación.* México, ITESM, Monterrey.

García, R. H. (1993). "Diseño de material metacurricular para el desarrollo de estrategias de aprendizaje en matemáticas". *Memorias IV Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas.* Barcelona. 325 - 326.

García, R. H. (1995a). "La didáctica del cálculo integral en el bachillerato basada en el desarrollo de procesos cognoscitivos". *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática.* UACPyP, UNAM. 138 - 141.

García, R. H. (1995b). "Creatividad matemática y pensamiento divergente en la solución de problemas de lo absurdo". Trabajo presentado en el *Seminario Cognición, Epistemología y Enseñanza de las Ciencias.* IIMAS - Facultad de Ciencias, UNAM. Mecanoescrito, 10 pp.

García, R. H. (1996). "Sobrepasando obstáculos cognitivos en el aprendizaje del cálculo". Documento presentado en las *Jornadas de Didáctica del Cálculo.* CECyT No. 11., IPN. Mecanoescrito, 6 pp.

Gibson, R. (1986). "Logic as a Core Curriculum Subjet: Its case as an alternative to mathematics". *Journal of Phylosophy of Education* 20, (1).

Glaeser, G. (1981). "Epistemologie des nombres relatifs". *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2, (3), 303 - 346.

Goblot, "Traité de Logique" op. cit. en Freudenthal, H. (1978). "Major problems in Mathematics Education". *Educational Studies in Mathematics* 12, (2), 136.

Greeslin, W. (1973). *An exploratory analysis of content structure and cognitive structure in the context of a mathematics instructional unit.* Tesis doctoral. Universidad de Stanford.

Greeslin, W. (1974). *Comparison of content structure and cognitive structure in the learning of probality.* American Educational Research Association, Chicago.

Greeno, J. (1976). "Cognitive objectives of instruction: Theory of knowledge for solving problems and answering questions". D. Klahr (comp.), *Cognition and Instruction.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. (1978). "A study of problem solving". R. Glaser (comp.), *Advances in Instructional Psychology* 1. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greeno, J. (1980). "Understanding and procedural knowledge in mathematics education". *Educational Psychologist* 12, (3), 262 - 283.

Guzmán, J. (1993). *El uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas planteados en contextos extra-algebraicos.* Reporte de investigación para examen predoctoral. Matemática Educativa, CINVESTAV.

Halford, G. S. (1980). "Toward a Redefinition of Cognitive Development Stages". *Cognition, Development and Instruction.* Kirby, J. y J. Biggs editores. Academic Press.

Hall, R. y cols. (1990). "Exploring the episodic structure of Algebra Story Problem Solving". *Cognition and Instruction* 6, (3), 223 - 283.

Hernández, R. A. (1995). "An experimental study on the concept of solution of an ordinary differential equation: the avoidance of the graphical setting". *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática.* UACPyP, UNAM. 100 - 103.

Inhelder, B. y Piaget J. (1958). "The growth of logical thinking from chidhood to adolescence", Nueva York: Basic Books. (traducción al español: *De la lógica del niño a la lógica del adolescente,* Barcelona, Paidós, 1985).

Karplus, J. (1978). "Cognitive Structures in Mathematical Reasoning". I. Sigel, D. M. Drobzinsky y R. M. Golinkoff. *New directions in Piagetian Theory and Practice*, Hillsdale, Erlbaum.

Kieran, C. (1981). "Concepts associated with the equality symbol". *Educational Studies in Mathematics* 12, 317 - 326.

Kieran, C. (1982). "The learning of algebra: a teaching experiment". *American Educational Research Association*, New York.

Kirby, J. R. (1980). "Individual Differences and Cognitive Processes: Instructional Application and Methodological Difficulties". Cap. 6 de *Cognition, Development and Instruction.* Academic Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School children.* The University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1978). "Children's understanding of numerical variables". *Mathematics in School* 7, 23 - 26.

Kuhn, T. S. (1962). *La Estructura de las Revoluciones Científicas.* Breviarios FCE. 1986. México. Original en francés.

Lakatos, I. (1978). "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes". *Criticism and the Growth of Knowlwdge.* Imre Lakatos, Alan Mosgrave editores. Cambridge University Press.

Larkin, J. (1977). *Problem Solving in Physics.* Documento de trabajo. Universidad de California, Berkeley, Group in Science and Mathematics Education and Department of Physics.

Lazlo, J. (1987). Op. cit. en Brousseau, 1987.

Luriyá, A. R. (1974). *Acerca del desarrollo histórico de los procesos cognoscitivos*. Ed. Nauka, Moscú.

Mancera, E. (1990a). *Identificación de las modalidades de razonamiento en matemáticas*: Lecturas de Educación Matemática 7, UACPyP-UNAM.

Mancera, E. (1990b). "Investigación y Educación Matemática". *Educación Matemática* 2, (1), 10 - 20.

Marcombo (1987). *Inteligencia Artificial. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona.

Martínez, C. A. (1995). "La enseñanza de las matemáticas usando el aprendizaje de los alumnos. Experiencia con funciones". *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática*. 104 - 108.

Matz, M. (1982). "Towards a process model for High School algebra errors". Sleeman, D. y Brown, J. (Eds.) *Intelligent Tutoring System*. Londres: Academic Press.

Miller, H. (1986). Op. cit. en Gibson, 1986.

Negrete, M. J., Castañeda, F. S. y M. López (1988). "Hacia una formalización de la conducta del perito". *VI Reunión Nacional de Inteligencia Artificial*. 411 - 419.

Newell, A. y H. Simon (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Newman, D., P. Griffin y M. Cole (1991). *La zona de construcción del conocimiento*. Madrid: Morata.

Norman, D. y D. Rumelhart (1975). *Explorations in cognition*. San Francisco: W. H. Freeman.

Novak, J. D. (1988). "Human constructivism: toward a unity of psychological and epistemological meaning making". J. D. Novak (Ed.). *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics* 1, (349 - 360). Ithaca, NY.: Department of Education, Cornell University.

Novak, J. D.(1990). "Concepts maps and Vee diagrams: two metacognitive tools to facilitate meaningful learning". *Instructional Science* 19, 29 - 52.

Onrubia, J. (1993). "La atención a la diversidad en la ESO. Algunas reflexiones y criterios psicopedagógicos". *Aula de Innovación Educativa* 12, 45 - 50.

Ortíz, H. M. (1995). "El taller. Una forma de trabajo que posibilita la construcción de conocimiento matemático en el aula". *Memorias V Simposio Internacional en Matemática Educativa*. UACPyP, UNAM. 153 - 158.

Park, O. (1984). "Example comparison strategy versus attribute identification strategy in concept learning". *American Educational Research Association* 21, (1), 145 - 162.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. Nueva York: Norton. (Edición original francesa, 1941).

Piaget, J. (1956). *Problemas de la Psicología Genética*. PUF, París.

Piaget, J. (1970). "On the nature and nature of intelligence". Conferencia pronunciada en la Universidad de Nueva York. Citada en Elkind, D. *Children and Adolescents: Interpretative essays on Jean Piaget*. Nueva York: Oxford University Press, 1970. (traducida al español: *Niños y Adolescentes*, Villasar de Mar, Oikos-Tau, 1978).

Piaget, J. (1970). *Structuralism*. Nueva York: Harper & Row. (traducida al español: *El Estructuralismo*, Barcelona, Orbis, 1985).

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent: The future of education*. Nueva York: Viking.

Pla, L. (1989). *Enseñar y aprender inglés. Bases psicopedagógicas*. Barcelona ICE de la Universidad de Barcelona/ Horsori.

Popper, K. (1959). Teoría del conocimiento. Citado en B. Magee. *Maestros del pensamiento contemporáneo* 14. Grijalbo, Barcelona.

Pozo, J. (1991). "Conocimientos previos y aprendizaje escolar". *Cuadernos de Pedagogía* 188, 12 - 14.

Prawat, R. S. (1989). "Promoting Access to Knowlwdge, Strategy, and Disposition in Students: A research Synthesis". *Review of Educational Research*, spring. 59, (1).

Resnik, L. (1973). "Hierarchies in children's learning: A symposium". *Instructional Science* 2, 311 - 362.

Rodrigues, S. I. (1995). "The calculators in the mathematical high school classroom". *Memorias V Simposio Inernacional en Educación Matemática*. UACPyP, UNAM. 208 - 209.

Rothkopf, E. y R. Turner (1970). "Effects of written instructional material on the statistical structure of tests essays". *Journal of Educational Psychology* 61, 83 - 89.

Rupérez, L. F. (1990). "Epistemología y Didáctica de las Ciencias. Un análisis de segundo orden". *Enseñanza de las Ciencias* 8, (1), 65 - 74. España.

Salmina, N. G. y Sorokin, V. V. (1981). "Análisis lógico-psicológico de los procedimientos para construir la asignatura docente". *La Educación Superior Contemporánea* 3, (47), 84. Universidad Estatal de Moscú.

Shavelson, R. (1972). Op. cit en Shavelson, 1974.

Shavelson, R. (1974). "Methods for examining representations of a subjet-matter structure in a student's memory". *Journal of Research in Science Teaching* 11, (3), 231 - 249.

Shavelson, R. y G. Stanton (1975). "Construct validation: Methodology and application to three measures of cognitive structure". *Journal of Educational Measurement* 12, (2), 67 - 85.

Simon, A. (1957). *Models of Man*. Willey, Nueva York.

Steiner, G. (1987). "Philosophical and Epistemological aspects of Mathematics and their interaction with Theory and Practice in Mathematics Education". *For the Learning of Mathematics* 7, (1), 7 - 13.

Sternberg, R. (1980). Obra citada en Sternberg, 1986. "A framework for understanding conceptions of intelligence". R. J. Sternberg y D. Fetterman, Eds., *What's intelligence*? Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Thro, M. (1978). "Relationship between associative and content structure of physics concepts". *Journal of Educational Psychology* 70, (6), 971 - 978.

Toulmin, S. (1977). *La Comprensión Humana*. El uso colectivo y la evolución de los conceptos. Alianza Universidad. Madrid.

Ursini, S. (1991). "Desarrollo de algunos conceptos primarios del pensamiento algebraico en LOGO". *Memorias del III Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, 159 - 169. Valencia: PNFAPM - Universidad de Valencia.

Valenzuela, R. (1992). "Resolución de problemas matemáticos: Un enfoque psicológico". *Educación Matemática* 4, (3). 19 - 29.

Vigotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Vigotsky, L. (1986). *Pensamiento y Lenguaje*. Comentarios críticos de Jean Piaget. La Pléyade. (traducción del original ruso).

Vega y cols. (1993). Op. cit. en Resnick, B. y W. Ford. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Temas de la educación 22. Paidós: Barcelona. 63-85.

Wagner, S. (1981a). "An analytical framework for mathematical variables". *Psychology of Mathematics Education*, 165 - 170. Grenoble, Francia.

Wagner, S. (1981b). "Conservation of equation and function under transformation of variables". *Journal for Research in Mathematics Education* 12, 107 - 118.

Wagner, R. K. y Sternberg, R. J. (1984). "Alternative Conceptions of Intelligence and their Implications for Education". *Review of Educational Research*, summer . 54, (2), 179 - 223.

Waing, G. (1978). (comp.). *Educación Matemática* 2. Van Nostrand Reinhold Company.

Walberg, H. J. (1988). "Psychological Models of Educational Performance; A Theorical Synthesis of Constructs". *Review of Educational Researh*, spring. 53, (1), 75 - 94.

Waldegg, G. (1989). "La evaluación del trabajo académico en Matemática Educativa". *Avance y Perspectiva* 8, (39), 53 - 56.

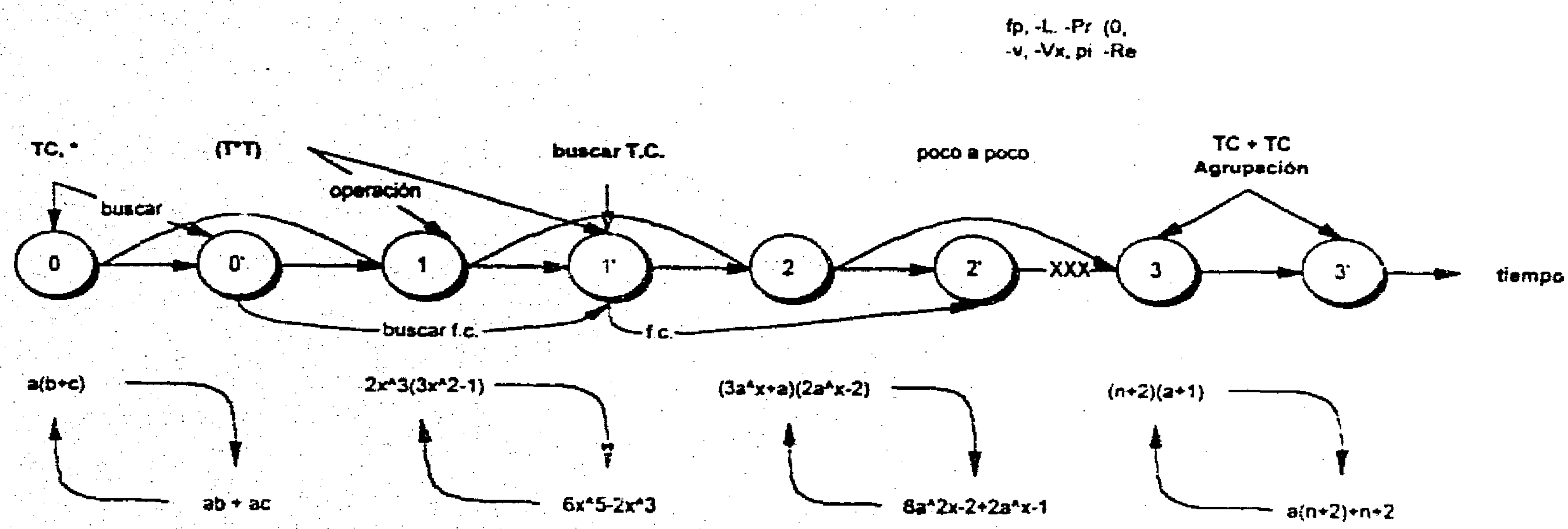
Wang, M., L. Resnick y R. Boozer (1971). "The sequence of development of some early mathematics behaviors". *Child Development* 42, 1767 - 1778.

Warren, R. D. (1995). "Multimedios en la enseñanza de las matemáticas. Hacia la universidad virtual". *Memorias V Simposio Internacional en Educación Matemática*. UACPyP, UNAM. 200 - 203.

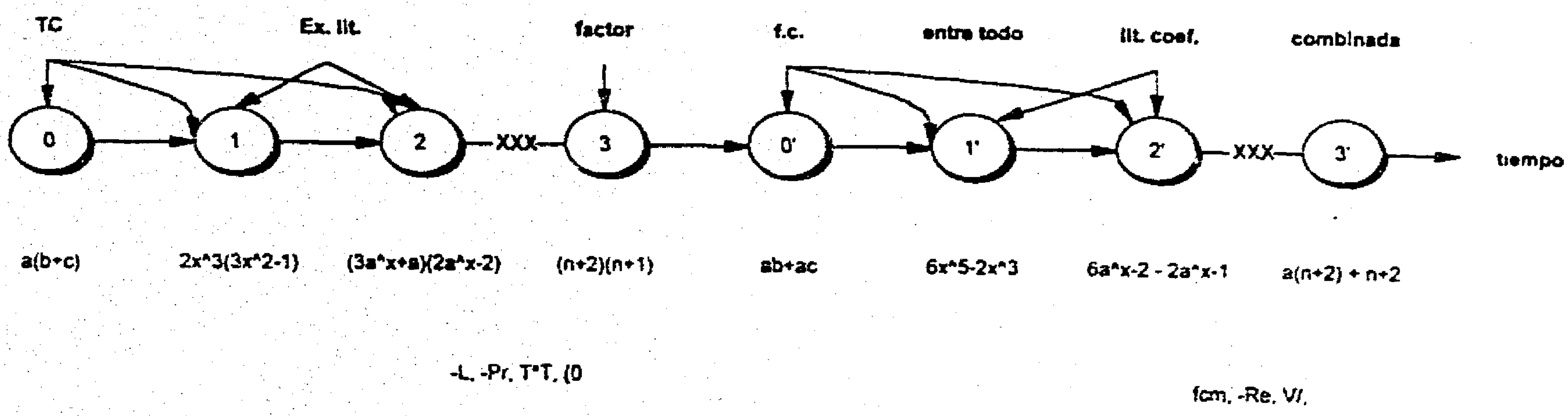
Weinszweig, A. I. (1995). "The child as scientist-mathematician". *Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática*. UACPyP, UNAM. 20 - 24.

White, R. (1973). "Learning hierarchies". *Review of Educational Research* 43, 363 - 375.

Anexos



Esquema Subyacente de Hugo, MHA12.
Secuencia Horizontal.
Ampliación de la Tabla 8.1 página 89.



Esquema Subyacente de Hugo.
MHA12.
Secuencia Vertical.
Ampliación de la Tabla 8.2
página 91.