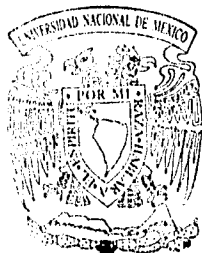


28  
24

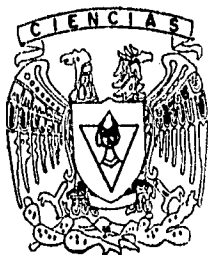


# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

COMPARACION ENTRE EL COMPORTAMIENTO  
CUANTICO DE UNA PARTICULA EN UN CAMPO  
GRAVITACIONAL HOMOGENEO Y EN UN CAMPO  
ELECTRICO HOMOGENEO

**T E S I S**  
Que para obtener el Titulo de:  
**F I S I C O**  
P r e s e n t a:  
**JOSE ALFREDO DEL OSO ACEVEDO**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON -  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Baule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Comparación entre el  
Comportamiento cuántico de una partícula en un campo gravitacional homogéneo  
y en un campo eléctrico homogéneo.

realizado por JOSE ALFREDO DEL OSO ACEVEDO

con número de cuenta 8620136-6 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

Propietario DR. RODOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Propietario DR. EUGENIO LEY KOO

Suplente DR. ANTONIO SARMIENTO GALAN

Suplente DR. GERMINAL COCHO GIL

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera agradecer a la Dra. Rocío Jáuregui Renaud por su enorme paciencia, confianza y comprensión que me tuvo para la realización de esta tesis.

Agradezco a mis sinodales Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero, Dr. Eugenio Ley Koo, Dr. Antonio Sarmiento Galán, Dr. Germinal Cocho Gil, tanto por su revisión como por sus oportunos comentarios realizados al texto original.

Al Instituto de Física de la UNAM, en especial al Departamento de Física Teórica por las facilidades brindadas en la elaboración de esta tesis.

Finalmente agradezco a todos mis amigos, en especial a: José Luis Maldonado, Iván Espinosa, Eric Marquina y Ernesto Bautista Verdugo por su enorme interés y motivación en la realización de este trabajo.

**A mis padres:**

**Gonzalo Del Oso Torres  
Paulina Acevedo Contreras**

**Quienes siempre me han apoyado y ayudado en todo lo que he realizado para mi formación profesional y personal, siendo este trabajo el fruto de sus esfuerzos.**

**A mis hermanos:**

**Alejandro  
Cecilia y  
Esmeralda**

**Porque han estado presentes en los momentos que he requerido su apoyo y comprensión.**

**A todos ellos, porque los estimo mucho, les dedico este trabajo.**

## CONTENIDO

<b>Introducción</b>	1
<b>Capítulo 1 Partícula Clásica Uniformemente Acelerada</b>	4
<i>1.1 Interpretación de una partícula acelerada en Relatividad Especial</i>	4
<i>1.2 Movimiento de una partícula con carga "e" en un campo eléctrico uniforme</i>	10
<i>1.3 Campo gravitacional homogéneo y estático</i>	13
<i>1.4 Principio de equivalencia</i>	17
° Caída libre	17
° Transformación a coordenadas locales	20
<b>Capítulo 2 Partícula Escalar Cuántica Uniformemente Acelerada</b>	23
<i>2.1 Teoría cuántica del campo en presencia de una métrica cualquiera <math>g_{\mu\nu}</math></i>	25
° Estructura del espacio-tiempo	25
° Ecuaciones del campo	25
° Formalismo lagrangeano	27
<i>2.2 Soluciones a la ecuación de campo para el caso gravitacional homogéneo y estático</i>	30
° Ortonormalización de las funciones de onda	34
° Cuantización del campo escalar y representación del espacio de Fock	37
° Cálculo del valor de expectación del tensor energía-esfuerzo	39
<i>2.3 Soluciones a la ecuación de campo para el caso eléctrico</i>	43
° Límite no-relativista	48
° Ortonormalización de la función de onda	51

° Ortonormalización de la función de onda	51
° Relación con otras normas	54
<b>CONCLUSIONES</b>	60
<b>APÉNDICE</b>	62

## INTRODUCCIÓN

El concepto de espacio vacío en física clásica significa una región espacial en la cual no hay partículas ni campos. Este último punto es importante, puesto que aún cuando tengamos una región sin partículas si en la vecindad de ésta se encuentran objetos cargados o masivos, el introducir un objeto de prueba dará origen a trayectorias no acordes a la primera ley de Newton. De hecho así es como históricamente se relacionó el concepto de vacío con el de sistema de referencia inercial privilegiado. A éste sistema de referencia privilegiado se le dió el nombre de éter, que se pensaba llenaba todo el espacio y el cuál tenía la propiedad de ser homogéneo y estático.

Desde el punto de vista de la mecánica clásica de Newton y con las fuentes adecuadas, la fuerza producida por un campo eléctrico ó por un campo gravitacional puede elegirse de tal suerte que una partícula masiva y cargada, experimente la misma aceleración en uno u otro campo. Sin embargo en el marco de la teoría general de la relatividad queda establecida una diferencia de principio entre ambos campos; además veremos que el concepto de aceleración no es recíproco en la teoría de la relatividad general. En un campo gravitacional homogéneo y estático, todos los procesos y fenómenos físicos ocurren en exactamente la misma forma que en un sistema uniformemente acelerado sin la presencia de campo alguno. Sin embargo la caída libre de un objeto visto por un observador en un campo gravitacional homogéneo y estático, no es equivalente a considerar al objeto en reposo en este campo, mientras el observador está en caída libre.

De hecho de acuerdo con la teoría general de la relatividad "las propiedades métricas del continuo espacio-tiempo en la vecindad de puntos individuales del espacio-tiempo son diferentes y dependen de la distribución de materia de la región considerada. La idea de espacio físicamente vacío se elimina de manera definitiva por aquella variabilidad de escalas y relojes. De manera acorde, el reconocer el hecho de que el "espacio vacío" no es homogéneo e isotrópico en el aspecto físico nos fuerza a describirlo en



términos de diez funciones -los potenciales gravitacionales  $g_{\mu\nu}$ -<sup>1</sup> Esto es, es imposible deshacernos del campo  $g_{\mu\nu}$  pues es una propiedad intrínseca de toda región del espacio-tiempo dándonos el esquema de medida que define al propio espacio y al tiempo, modificando de esta forma al "espacio vacío".

Sin embargo, este no es el único cambio que la física moderna a debido de introducir en el concepto de vacío. En la mecánica cuántica al querer describir los procesos observables de creación y aniquilación de partículas se ha tenido que introducir el concepto de "vacío físico". Dado un campo  $\Psi$ , el vacío asociado podría definirse como el estado en el que el valor esperado del operador de número correspondiente es cero. El concepto de vacío estaría entonces condicionado por la definición de partícula. Sin embargo, la interacción entre los diversos campos necesarios para describir situaciones físicas reales lleva al concepto de "vacío físico". Aún en el caso en que estemos en el espacio-tiempo de Minkowski el vacío cuántico es, en la expresión ilustrativa, un "líquido hirviente"<sup>2</sup>; de esta forma, definir el vacío cuántico como el estado de energía más bajo en el que todas las partículas reales (fotones, pares electrón-positrón  $e^- e^+$ , etc.) están ausentes es complicado, dado que en este estado los campos no son realmente cero, sino fluctúan alrededor del cero; estas fluctuaciones son las vibraciones del punto cero y uno puede hablar de fotones virtuales, pares virtuales  $e^- e^+$ , etc.

El objeto de este trabajo es comparar en el marco de la teoría de la relatividad clásica, algunos efectos producidos en campos eléctricos ó gravitacionales homogéneos y estáticos. Tanto desde el punto de vista clásico como cuántico, trataremos de comprender el concepto de partícula uniformemente acelerada.

Clásicamente se plantean las ecuaciones para partículas en presencia de alguno de estos campos eléctrico ó gravitacional, y se analiza el comportamiento de las variables de interés.

<sup>1</sup> A. Einstein, "Aether und Relativitätstheorie" (Springer, Berlin, 1920).  
<sup>2</sup> V.L. Ginzbur and V.P. Frolov, Sov. Phys. Usp. 30(12), December 1987

Cuánticamente se plantean ecuaciones para un campo escalar interaccionando con un campo eléctrico ó gravitacional sin considerar la cuantización de estos últimos, es decir, considerando campos externos clásicos. Estas ecuaciones no son únicas, ya que en el capítulo 1 se muestra la existencia de un infinito de normas del potencial eléctrico y de métricas del espacio-tiempo que conducen a campos eléctricos y gravitacionales homogéneos y estáticos.

En el capítulo 2, se considera primeramente un campo escalar en presencia de un campo gravitacional homogéneo y estático, el cuál es descrito por una métrica de Rindler. Después de encontrar las soluciones clásicas de la ecuación tipo Klein-Gordon correspondiente, se cuantiza el campo introduciendo operadores de creación y aniquilación. El espacio de Fock correspondiente puede entonces ser definido y el vacío caracterizado como aquel estado nulificado por cualquiera de los operadores de aniquilación antes introducidos. A continuación se calculan algunas propiedades físicamente relevantes de éste estado de vacío, que llamamos vacío de Rindler. Se comparan estos resultados con los que se obtendrían de haber cuantizado el campo con la métrica de Minkowski y haber definido el vacío en términos análogos con los operadores de aniquilación de Minkowski (vacío de Minkowski). El formalismo empleado es el de Bogolubov el cual compara directamente a los operadores de creación y aniquilación correspondientes.

En éste mismo capítulo, realizamos un ejercicio análogo con un campo eléctrico homogéneo y estático. Se consideran dos normas, una de ellas dependiente del tiempo y otra independiente del tiempo. La comparación de los vacíos cuánticos definidos por diferentes normas y por ende, la comparación del concepto de partícula para diferentes normas del campo eléctrico externo, se realiza usando también el formalismo de Bogolubov.

Finalmente presentamos un breve resumen de nuestro resultados.

## CAPÍTULO I PARTÍCULA CLÁSICA UNIFORMEMENTE ACCELERADA<sup>3</sup>

En esta primera parte comenzaremos estudiando lo que significa que una partícula esté acelerada uniformemente en relatividad especial, y una vez obtenido cuales son las condiciones que caracterizan este movimiento, estudiaremos el comportamiento de la partícula en presencia de un campo eléctrico uniforme y homogéneo primeramente; para después, estudiar su comportamiento en presencia de un campo gravitacional uniforme y homogéneo. Finalmente, estudiaremos el significado del principio de equivalencia.

### 1.1 INTERPRETACIÓN DE UNA PARTÍCULA ACCELERADA EN RELATIVIDAD ESPECIAL

Tomemos una partícula la cual seguirá una cierta trayectoria en el espacio, para el estudio de su movimiento tomaremos un sistema de referencia inercial, al cual denotaremos como  $I$ , como se muestra en la siguiente figura.

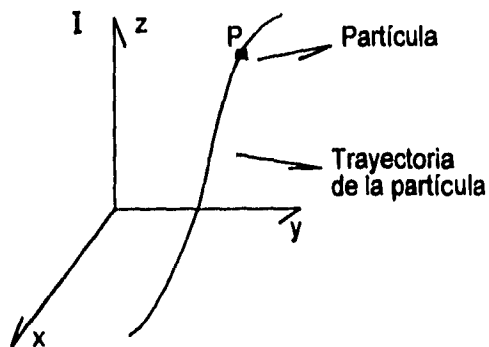


Figura 1

<sup>3</sup> F. Rohrlich, The Principle of Equivalence, Annals of Physics 22, 169-191 (1963)

En este sistema de referencia inercial, le podemos asociar a la partícula **P** una posición  $\vec{r}(t)$ , una velocidad  $v(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ , una aceleración  $\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$  y también derivadas de orden superior como  $\vec{b}(t) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}$ .

En un instante de tiempo  $t_0$ , tomemos un sistema de referencia en reposo instantáneo  $I_0$ , tal que la velocidad  $v(t)$  de la partícula **P** referida en este nuevo sistema sea cero al instante  $t = t_0$ , y al nuevo sistema lo indicaremos con  $I'$ .

En este nuevo sistema, la condición que caracteriza una aceleración uniforme estará dado como

$$\vec{b}'(t') = 0 \quad 1.1.1$$

independientemente de  $t_0$  referido a la colección de  $I'$ ; si solamente lo queremos referir en un intervalo de tiempo finito;  $t_1 < t < t_2$ , entonces para los sistemas  $I'$  estará comprendido de  $t'_1 < t' < t'_2$ , como se muestra a continuación en la siguiente figura.

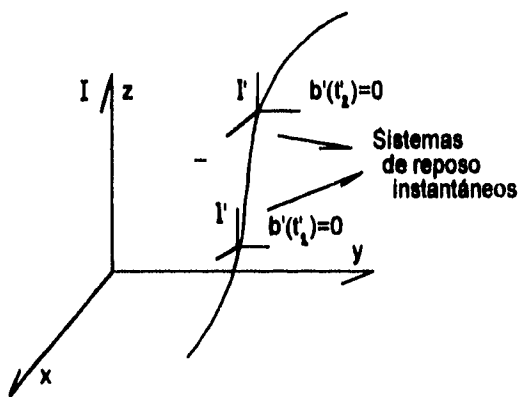


Figura 2

Desearíamos poner la relación (1.1.1) en forma covariante, para ello definimos  $\dot{a}^\mu$  como aquella componente de  $\dot{a}^\mu$ , la cuál está dada como  $\dot{a}^\mu = (\frac{1}{c}a^2, \bar{b})$ , que satisface

$$\dot{a}_1^\mu v_\mu = 0. \quad 1.1.2$$

Como en el sistema de reposo instantáneo tenemos que  $v_\mu = (c; \bar{0})$ , entonces  $\dot{a}_1^\mu = (0; \bar{b})$  y la condición de aceleración uniformemente en forma covariante estará dada como

$$\dot{a}_1^\mu = 0 \quad 1.1.3$$

Teniendo la identidad  $v_\mu a^\mu = 0$ , por diferenciación obtenemos  $v_\mu \dot{a}^\mu = -a_\mu a^\mu$  de esta forma podemos afirmar que

$$\dot{a}_1^\mu = \dot{a}^\mu - a^\lambda a_\lambda \frac{v^\mu}{c^2} \quad 1.1.4$$

y la definición de aceleración uniforme (1.1.1) ó (1.1.3), se puede expresar alternativamente como

$$\dot{a}^\mu - a^\lambda a_\lambda \frac{v^\mu}{c^2} = 0 \quad 1.1.5$$

Ahora si uno quisiera pasar a la notación trivectorial ( y en este caso al sistema  $I$ , para ver la forma explícita que toma (1.1.5) ), utilizaremos las siguientes relaciones conocidas\*

$$v^\mu = (\gamma c; \gamma \mathcal{V}) \quad 1.1.6$$

\* F. Rohrlich, Classical Charged Particles, Foundations of Their Theory, pag 114-118. Addison-Wesley

$$a^\mu = (\gamma^4 \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{c}; \gamma^2 \bar{a} + \gamma^4 \bar{v} \cdot \bar{a} \frac{\bar{v}}{c^2}) \quad 1.1.7$$

$$\dot{a}^\mu = (\dot{a}^0; \gamma^3 \bar{b} + 3\gamma^3 \bar{v} \cdot \bar{a} \frac{\bar{a}}{c^2} + \dot{a}^0 \frac{\bar{v}}{c}) \quad 1.1.8$$

$$\dot{a}^0 = \frac{\gamma^3 (\bar{v} \cdot \bar{b} + a^2)}{c} + \frac{4\gamma^3 (\bar{v} \cdot \bar{a})^2}{c^3} \quad 1.1.9$$

que al sustituir en la ecuación (1.1.5), tendremos la siguiente relación

$$\bar{b} + 3\gamma^2 \bar{v} \cdot \bar{a} \frac{\bar{a}}{c^2} = 0 \quad 1.1.10$$

que es la condición de aceleración uniforme en el sistema de referencia  $I$ , y en donde  $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \geq 1$ . Notemos que la ecuación (1.1.10) se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt}(\gamma^3 \bar{a}) = 0 \quad 1.1.11$$

de donde, al hacer una integración inmediata se obtiene

$$\gamma^3 \bar{a} = \bar{g} \quad 1.1.12$$

donde  $\bar{g}$  es un vector constante ( independiente del tiempo). Esta última ecuación la podemos ver como una ecuación de movimiento, si hacemos uso de las relaciones  $\bar{p} = m\gamma\bar{v}$ ,  $\bar{F}_i = m\bar{g}$ , donde  $m$  denota la masa en reposo, de tal forma que (1.1.12) puede adquirir la forma

$$\gamma^3 \bar{a} = \frac{d(\gamma\bar{v})}{dt} - \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{a})}{v^2} = \bar{g}. \quad 1.1.13$$

De esta última relación uno puede asociar con uno de los términos, una fuerza ficticia

$$F_w = -(\gamma+1)\bar{p} \times \bar{w} \quad 1.1.14$$

donde

$$\bar{w} = -\frac{(\gamma-1)\bar{v} \times \bar{a}}{v^2} \quad 1.1.15$$

es el vector de velocidad angular asociado con la precesión de Thomas, de tal manera que la ecuación de movimiento para una partícula uniformemente acelerada toma la forma

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = F_g + F_w \quad 1.1.16$$

La fuerza  $F_g$  es constante, independiente del tiempo y la posición. La fuerza ficticia, desaparece cuando  $\bar{v}$  y  $\bar{a}$  son paralelos. Como caso particular, para un movimiento rectilíneo ( el movimiento tiene una velocidad inicial paralela a  $\bar{g}$  ) donde ambos  $\bar{v}$  y  $\bar{a}$  son en todo el movimiento paralelos a  $\bar{g}$ , (1.1.16) toma la forma

$$\frac{d(m\gamma\bar{v})}{dt} = m\bar{g} \quad 1.1.17$$

Si  $\bar{g}$  está en una dirección, digamos  $z$ , la ecuación (1.1.17) puede ser integrada, obteniéndose

$$x = y = 0, \quad z = \sqrt{\alpha^2 + c^2 t^2}, \quad \alpha = \frac{c^2}{g} \quad 1.1.18$$

dado que nosotros elegimos  $z(0) = \alpha$  y  $v(0) = 0$ , esta ecuación representa una rama de la hipérbola en el plano  $z-ct$ ; por tal motivo, un movimiento uniformemente

acelerado es frecuentemente referido como un movimiento hiperbólico como se muestra en la figura 3.

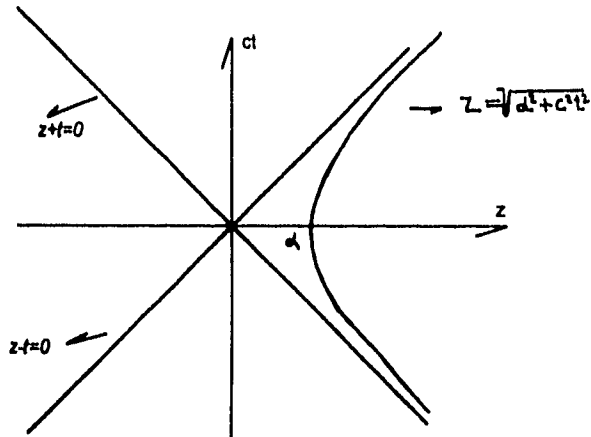


Figura 3

Cuando tenemos que la velocidad inicial no es paralela a  $\vec{g}$ , el movimiento no será rectilíneo y en ese caso  $\vec{F}_v \neq 0$ ; de esta manera los marcos inerciales de reposo instantáneo  $I_i$  e  $I_i + dt_i$  diferirán en la dirección de sus velocidades relativas a  $I$ . A partir de esto, la composición de dos transformaciones sucesivas de Lorentz sin rotación y con velocidades relativas no paralelas entre sí, es equivalente a una transformación de Lorentz con rotación y además, un efecto de precesión (de Thomas) surge; el cual es descrito precisamente por  $\vec{F}_v$  y tiene estructura de un término de Coriolis (pero difiere en el signo), asociado con una fuerza angular instantánea  $\vec{\omega}$ , que en el límite no-relativista, la relación (1.1.14) toma la forma

$$\vec{F}_v = -2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad 1.1.19$$

y es análoga a una aceleración centrífuga.



## 1.2 MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CON CARGA "e" EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Como un ejemplo de lo tratado anteriormente, consideremos el movimiento de una partícula con carga  $e$  en un campo eléctrico constante y homogéneo  $E$  tomaremos el eje  $z$  como la dirección en que apunta el campo eléctrico, y el movimiento se realizará en un plano, el cual tomaremos como el plano  $yz$ , de tal forma que la ecuación de movimiento es

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = eE \quad 1.2.1$$

Como elegimos el movimiento de la partícula en el plano  $yz$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= eE \\ \frac{dp_y}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad 1.2.2$$

al hacer una integración en cada una de ellas, se obtiene

$$\begin{aligned} p_x &= eEt \\ p_y &= p_0 \end{aligned} \quad 1.2.3$$

Aquí hemos tomado como origen del tiempo el instante en el que  $p_x = 0$ ; y  $p_0$  es el momento (ó impulso) de la partícula en ese instante.

Por otro lado tenemos que la energía cinética de la partícula está dada como

$$\epsilon_{cin} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\epsilon_0^2 + (ceEt)^2} \quad 1.2.4$$

donde  $\epsilon_0$  es la energía al tiempo  $t = 0$ , y

$$\bar{p} = \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad 1.2.5$$

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si la energía la multiplicamos por  $\bar{v}$  y la dividimos por  $c^2$  obtenemos la relación

$$p = \epsilon \frac{\bar{v}}{c^2} \quad 1.2.6$$

de aquí obtenemos que la velocidad de la partícula está dada como  $\bar{v} = p \frac{c^2}{\epsilon}$ , de tal forma que para la velocidad  $v_z = \dot{z}$  tenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z c^2}{\epsilon_{cln}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\epsilon_0^2 + (ceEt)^2}} \quad 1.2.7$$

que al integrar se obtiene

$$z = \frac{1}{eE} \sqrt{\epsilon_0^2 + (ceEt)^2} \quad 1.2.8$$

(aquí la constante de integración la tomamos igual a cero). Observemos que esta ecuación tiene la misma forma que (1.1.18) ya que

$$z = \sqrt{\frac{e_0^2}{v^2 E^2} + c^2 t^2} = \sqrt{\alpha'^2 + c^2 t^2} \quad 1.2.9$$

donde  $\alpha'^2 = \frac{e_0^2}{v^2 E^2}$ , de tal forma que el movimiento hiperbólico lo podemos observar como en la figura 3 , con  $\alpha'$  reemplazando a  $\alpha$ ; siempre y cuando,  $\bar{v}$  (esto es, la velocidad de la partícula) sea paralela en todo momento a  $E$  obtendremos un movimiento uniformemente acelerado, tal como era de esperarse al comparar la ecuación de movimiento (1.2.1) con (1.1.17).

### 1.3 CAMPO GRAVITACIONAL HOMOGÉNEO Y ESTÁTICO

En esta sección estudiaremos el campo gravitacional homogéneo y estático (CGHE), aunque cabe mencionar que este es sólo una aproximación de los realmente existentes.

Esta clase de campo (homogéneo) puede ser creado por un cuerpo esférico masivo cerca de su superficie. Por ejemplo, podemos considerar al campo gravitacional del Sol o una estrella de neutrones. Aquí, en una cierta región con dimensiones  $l \ll L$ , donde  $L$  es el radio característico de curvatura espacio-tiempo, podemos considerar que tenemos una buena aproximación de un campo gravitacional homogéneo y estático.

La condición de campo homogéneo y estático en una región finita del espacio  $D$ , es que el tensor de curvatura sea cero

$$R_{\alpha\mu\nu} = 0 \quad 1.3.1$$

y se obtenga en el límite no-relativista un potencial gravitacional

$$\varphi = gz. \quad 1.3.2$$

Por simplicidad, hemos puesto al campo gravitacional en la dirección  $z$ . El campo homogéneo estará definido por la métrica (con signo positivo)

$$d\sigma^2 = -A dx^2 - B dy^2 - C dz^2 + D dt^2 \quad 1.3.3$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son funciones únicamente de  $z$ . De la condición (1.3.1) y de las siguientes relaciones

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) \quad 1.3.4$$

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu} \quad 1.3.5$$

$$R^\alpha_{\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\nu} \right) \quad 1.3.6$$

donde el tensor métrico para (1.3.3) está dada como

$$g_{\nu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad 1.3.7$$

obteniendo

$$\Gamma^1_{\infty} = \frac{D'}{2C}, \quad \Gamma^1_{\infty} = \frac{-A'}{2C}, \quad \Gamma^1_{\infty} = \frac{-B'}{2C}, \quad \Gamma^1_{\infty} = \frac{C}{2C} \quad 1.3.8$$

$$\Gamma^0_{\infty} = \Gamma^0_{\infty} = \frac{D'}{2D}, \quad \Gamma^1_{\infty} = \Gamma^1_{\infty} = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma^2_{\infty} = \Gamma^2_{\infty} = \frac{B'}{2B}$$

observando que las primas indican derivadas respecto a  $z$ ; al sustituir estas expresiones en (1.3.1) se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 A' B' &= 0; \quad B' D' = 0; \quad D' A' = 0 \\
 &\quad \text{(para } E = A, B \text{ ó } D) \qquad \qquad \qquad 1.3.9 \\
 \frac{2E''}{C} - \frac{E'^2}{EC} - \frac{E' C'}{C^2} &= 0
 \end{aligned}$$

La primera parte de las ecuaciones (1.3.9) nos muestran que al menos dos de los tres coeficientes deben ser constantes, debido a que en el límite no-relativista se tenía que

$$\begin{aligned}
 \varphi &= gz \\
 \vec{F} &= -m\nabla\varphi = -mg\hat{k}
 \end{aligned} \qquad \qquad \qquad 1.3.10$$

aquí,  $\hat{k}$  es un vector unitario en las dirección  $z$  y  $g$  es una constante. Si un campo gravitacional es débil, entonces  $g_{\mu\nu}$  se transforma en  $\eta_{\mu\nu}$  (tensor métrico de Minkowski) sólo si  $\varphi \ll 1$  y  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \ll 1$ ,  $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \ll 1$ , etc., son términos pequeños, entonces (1.3.3) se reduce a lo siguiente

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (1 + 2\varphi)dt^2 \qquad \qquad \qquad 1.3.11$$

Esta ecuación muestra que  $D(z)$  no puede ser una constante y de la primera parte de las ecuaciones de (1.3.9) obtenemos que  $A$  y  $B$  son constantes dadas como

$$A = B = 1 \qquad \qquad \qquad 1.3.12$$

además,  $E = D$  y la ecuación restante en (1.3.9) se escribe en la forma

$$\frac{2D''}{D} - \frac{D'}{D} = \frac{C'}{C} \qquad \qquad \qquad 1.3.13$$

donde  $D' \neq 0$ ; integrando la ecuación (1.3.13), obtenemos

$$C(z) = \left( \frac{1}{g} \frac{d}{dz} \sqrt{D} \right)^2 \quad 1.3.14$$

donde la constante de integración queda determinada por (1.3.10) y (1.3.11), de tal forma que la métrica dada por (1.3.3) se puede expresar como

$$d\sigma^2 = D(z)dt^2 - \left( \frac{\sqrt{D}'}{g} \right)^2 dz^2 - dy^2 - dx^2 \quad 1.3.15$$

De la última ecuación concluimos que la definición de un campo gravitacional homogéneo y estático es satisfecha por la métrica (1.3.15), donde  $D(z)$  es una función real y arbitraria, restringida sólo por los requerimientos de continuidad y por el límite no-relativista

$$D_{NR}(z) = 1 + 2gz \quad 1.3.16$$

Entre este infinito de métricas, tenemos que cuando  $C' = cte$  entonces  $C = 1$  por (1.3.11), y de esta forma la métrica (1.3.15) toma la forma

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (1 + gz)^2 dt^2 \quad 1.3.17$$

Otro caso interesante se obtiene si asumimos que  $C$  es proporcional a  $D$  lo cual nos lleva a que

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + e^{2gz}(dz^2 - dt^2) \quad 1.3.18$$

donde estas coordenadas satisfacen la condición armónica

$$\Gamma^\mu \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad 1.3.19$$

Estas dos métricas representan un campo gravitacional homogéneo y estático, pero como veremos en el siguiente tema, la métrica de Rindler (que se obtiene al utilizar las coordenadas de Rindler), también representa un campo gravitacional homogéneo y estático.

#### 1.4 PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

El principio de equivalencia descansa en la igualdad del cociente de la masa gravitacional y la masa inercial verificada por Galileo, Huygens, Newton, Bessel y Eötvös. Einstein reveló que como consecuencia de esto, no se podía detectar la presencia de cualquier campo gravitacional externo que fuera estático y homogéneo desde el interior de un elevador en caída libre, ya que todos los objetos en el elevador, observador y elevador incluidos estarían acelerados de la misma manera.

#### CAÍDA LIBRE

Volviendo de nuevo al movimiento de una partícula en un campo gravitacional homogéneo y estático dado por (1.3.15) y al requerimiento (1.3.16), al hacer uso del siguiente cambio

$$u(z) = \sqrt{D(z)}, \quad u(z)_{,m} = 1 + gz \tag{1.4.1}$$

tenemos que las correspondientes conexiones lineales que no desaparecen de los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{\infty}^0 = \Gamma_{00}^0 = \frac{u'}{u}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{u''}{u'}, \quad \Gamma_{\infty}^1 = g' \frac{u}{u'} \tag{1.4.2}$$

Tenemos ahora que una partícula deberá caer libremente de acuerdo a la ecuación para las líneas geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.4.3}$$



de la cual tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0 \quad 1.4.4$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{u''}{u'} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 + g' \frac{u}{u'} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad 1.4.5$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + 2 \frac{u'}{u} \frac{dz}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \quad 1.4.6$$

observemos que la última ecuación tiene solución inmediata

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\alpha}{u^2} \quad 1.4.7$$

donde  $\alpha$  es una constante arbitraria, y por el requerimiento del límite en que  $g \rightarrow 0$ ,  $d\tau = dt$  resulta  $\alpha = 1$ .

De esta forma al utilizar (1.4.7), las ecuaciones de movimiento (1.4.4), (1.4.5) y (1.4.6) se transforman como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u^2} \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{u^2} \frac{dy}{dt} \right) = 0 \quad 1.4.8$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left( \frac{u''}{u'} - \frac{2u'}{u} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + g' \frac{u}{u'} = 0 \quad 1.4.9$$

Si consideramos el movimiento en una dimensión (de aquí  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ ) y al utilizar la métrica (1.3.15) con (1.4.7) obtenemos

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{g}{u'}\right)^2 u^2 (1 - u^2) \quad 1.4.10$$

que sería una primera integración de (1.4.9). Con  $t$  como única variable independiente, (1.4.10) toma la forma

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = g^2 u^2 (1 - u^2) \quad 1.4.11$$

de la cual se obtiene

$$\frac{1}{u} = \cosh g(t - t_0) \quad 1.4.12$$

La constante de integración, la elegimos de tal manera que  $u = 1$  para  $t = t_0$ . Esta ecuación determina  $z(t)$  que es el movimiento (caída libre) en una dimensión, cuando  $u(z)$  es dada. En el límite no-relativista, con  $gz \ll 1$ ,  $gt \ll 1$  obtenemos

$$z(t) = -\frac{1}{2} g(t - t_0)^2 \quad 1.4.13$$

Podemos elegir  $u(z)$  de un modo tal que una partícula de prueba en caída libre experimente un movimiento hiperbólico. Según la ecuación (1.1.12), nosotros debemos tener

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \left(1 - \frac{dz}{dt}\right)^{3/2} \quad 1.4.14$$

cuya solución es

$$g(z - z_0) = 1 - \sqrt{1 + g^2 (t - t_0)^2} \quad 1.4.15$$

donde  $t_0$  es el tiempo en el que la velocidad de la partícula es  $v=0$ . De esta manera con la relación (1.4.12), nosotros obtenemos

$$[D(z)]^{-1/2} = \frac{1}{u(z)} = \text{Cosh} \sqrt{(1-gz)^2 - 1} \quad 1.4.16$$

Hemos elegido  $z_0 = 0$ , para seguir el orden con la elección previa de la condición inicial  $D(z) = 1 + 2gz$ . El límite no-relativista de (1.4.16) es (1.4.13).

Bajo estas consideraciones, nosotros concluimos que dado un límite no-relativista (correspondiente al cambio (1.3.16) y sus correspondientes condiciones iniciales) el campo gravitacional homogéneo y estático, está definido por la métrica (1.3.15). El requerimiento para que la partícula experimente un movimiento hiperbólico está dado por (1.4.16). Ninguna de las métricas (1.3.17) ó (1.3.18) dan un movimiento hiperbólico. La diferencia aparece en el orden  $g^2$  con  $t_0 = 0$  dado que tenemos

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2(1 - \alpha(gt)^2 + \dots) \quad 1.4.17$$

#### TRANSFORMACIÓN A COORDENADAS LOCALES

Hemos calculado el movimiento de caída libre como lo vería un observador en reposo en un campo gravitacional homogéneo y estático. Ahora nos preguntaríamos como un observador vería el movimiento si estuviera en caída libre en el mismo campo gravitacional.

El principio de equivalencia implica que la caída libre de una partícula, define un sistema local inercial. Así, nosotros nos transportamos mediante una transformación a un sistema local  $S'=I'$  definido por

$$dt'^2 - dz'^2 - dy'^2 - dx'^2 = u^2 dt^2 - \left(\frac{u}{g}\right)^2 dz^2 - dy^2 - dx^2 \quad 1.4.18$$

que está relacionada con la métrica (1.3.15), y por el cambio (1.4.1).

Las transformaciones de coordenadas correspondientes para la caída libre estarán dadas como

$$x' = x, \quad y' = y$$

$$g(z' - z'_0) = u(z) \text{Cosh}.g(t - t_0) - 1 \quad 1.4.19$$

$$g(t' - t'_0) = u(z) \text{Sinh}.g(t - t_0)$$

Estas ecuaciones implican

$$\left[ \frac{1}{g} + (z' - z'_0) \right]^2 - (t' - t'_0)^2 = \left( \frac{u(z)}{g} \right)^2 \quad 1.4.20$$

Esta ecuación es válida para todo el espacio, no solo localmente, dado que el comportamiento con un campo homogéneo satisface la ecuación (1.3.1). El significado físico de este resultado puede expresarse de la siguiente manera: Un observador  $S'$  en caída libre (y entonces  $S' = I'$ ) en un campo gravitacional homogéneo y estático, vería un objeto que está en reposo en  $S$  (i.e., soportado en el CGHE) moviéndose con una aceleración uniforme (movimiento hiperbólico). Este resultado es independiente de la elección de  $u(z)$ . Esto demuestra la eventual justificación para nuestra definición de un CGHE: un cuerpo en un plano  $z = \text{cte}$ , en reposo en el CGHE, se vería por un observador inercial moviéndose paralelamente a el mismo, rígido y con una aceleración constante (movimiento hiperbólico).

Una importante conclusión que podemos sacar es la siguiente: un observador que esté en reposo en un CGHE vería a una partícula que esté en caída libre, en general, no con movimiento hiperbólico. Ahora nos podríamos preguntar: ¿qué ocurre si lo que está en reposo es la partícula?

Por la teoría de la gravitación de Newton, los siguientes dos enunciados son válidos.

(A) Las ecuaciones de movimiento de una partícula de prueba en un campo gravitacional, i.e., de una partícula cuyo campo no interacciona con ella misma, es independiente de su masa y composición. (En términos Newtonianos, la misma cantidad juega el papel de masa inercial y de masa gravitacional)

(B) La materia es afectada por campos gravitacionales y así mismo es el origen de un campo gravitacional. ( En términos Newtonianos, la masa gravitacional activa juega el mismo papel que la masa gravitacional pasiva)

Estos enunciados pueden ser elevados a un principio, estipulando que ellos son postulados en lo general, i.e., no sólo en la teoría de la gravitación de Newton. De esta manera, cuando se combina con la teoría especial de la relatividad esta diría que la masa (inercial) es equivalente a una forma de energía, y lo es además para ambas masas gravitacionales (activa y pasiva). En relatividad general (A) es satisfecha por el postulado de la geodésica "toda partícula se mueve a lo largo de una geodésica".

Una ecuación básica del movimiento de una partícula es una ecuación que involucra segundas derivadas de la posición con respecto al tiempo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu \left( x, \frac{dx}{d\tau} \right) \quad 1.4.21$$

Si tenemos un conjunto de partículas con diferentes masas y composiciones, todas con las mismas condiciones iniciales se sigue de (A) que  $f^\mu$  es independiente de dichas masas y composiciones, por lo que en una región donde el campo sea lo suficientemente uniforme, un observador en caída libre con estas partículas, no observará efecto del campo gravitacional. físicamente significa que existe una coordenada de transformación de S a S', donde el campo puede ser anulado localmente

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad 1.4.22$$

por lo que el observador en S' será un observador inercial.

De lo anterior, podemos especificar un sistema inercial: (C1) Un sistema que originalmente está en caída libre y libre de rotaciones en un campo gravitacional es localmente inercial, por lo que todas las leyes de la relatividad especial son localmente válidas.

Esta afirmación puede ser expresada también en la forma

(C2) No hay experimento físico, mediante el cual un observador pueda distinguir localmente entre su propia caída, ( sin rotación) en un campo gravitacional y en

un espacio libre de campo.

Una tercera forma de la misma afirmación es obtenida por considerar la transformación inversa, i.e., la transformación conducida desde (1.4.22) a (1.4.21) y usando (A). Lo antes declarado en (C) puede ser expresado como:

(C3) una aceleración en un campo es equivalente localmente a un campo gravitacional.

Las tres afirmaciones (C) dependen de la existencia de la transformación  $S \rightarrow S'$ . En relatividad general, esto es cierto por la asunción de que el espacio fundamental tiene una conexión simétrica lineal. Así, a este respecto un espacio mucho más general que un espacio de Riemann (afectado en relatividad general) desearía ser conveniente. En este espacio siempre existe una transformación que marca la conexión local  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$ . Entonces sólo es necesario marcar a  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  como un factor en  $j^{\mu}$  de (1.4.21) obteniendo la ecuación de movimiento. En este caso la ecuación de la geodésica es:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \quad 1.4.23$$

Relatividad general también permite una definición precisa en (C) de "localmente". El significado "sobre un dominio del espacio-tiempo de orden  $(\delta x)^4$  en que el tensor de curvatura desaparece en todas partes, en el sentido tal que  $R_{\mu\nu\alpha\beta} \delta x^{\alpha} \delta x^{\beta} \sim 0$ ", i.e., "para el alcance en que este no es un verdadero campo gravitacional". Para campos gravitacionales aparentes ( $R_{\mu\nu} = 0$ ) "local" significará "por todas partes".

Así finalmente por lo anteriormente analizado, podemos afirmar que la caída libre de un objeto visto por un observador en reposo en un CGHE, no es igual que si el objeto está en reposo en el CGHE, mientras que el observador lo ve cuando está en caída libre. La aceleración no es recíproca en relatividad general.

## CAPÍTULO 2 PARTÍCULA ESCALAR CUÁNTICA UNIFORMEMENTE ACELERADA

En este capítulo, describiremos el comportamiento de un campo escalar cuánticamente; primeramente en presencia de un campo gravitacional y después en presencia de un campo eléctrico. Comenzaremos por definir una teoría cuántica del campo en presencia de un campo gravitacional, esto nos llevará a generalizar la ecuación de Klein-Gordon  $((\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0)$  a espacios curvos, encontraremos las funciones de onda para un campo gravitacional homogéneo y uniforme; definiremos claramente los estados de energía positivos y negativos, posteriormente cuantizaremos el campo (poner como operador a la función de onda, y pedir que satisfaga ciertas propiedades de conmutación). Compararemos diversas representaciones de Fock, mediante el formalismo de Bogolubov, y calcularemos el valor de expectación en el vacío de Minkowski del tensor de energía-esfuerzos en particular, la densidad de energía.

Para el caso de la partícula en presencia de un campo eléctrico homogéneo y uniforme, se verá como es modificada la ecuación de Klein-Gordon. En una norma específica obtendremos las funciones de onda y definiremos los estados de energía positivos y negativos. Veremos varias características de las funciones, entre otras, el límite no-relativista. Compararemos con los resultados en otra norma, la cual representa el mismo campo eléctrico y analizaremos la caracterización cuántica de partícula en ambas normas.

## 2.1 TEORÍA CUÁNTICA DEL CAMPO EN PRESENCIA DE UNA MÉTRICA $g_{\mu\nu}$

A nosotros nos gustaría obtener una generalización de la teoría cuántica del campo, en coordenadas de Minkowski a cualquier tipo de coordenadas, incluyendo cuando el espacio-tiempo tenga curvatura distinta de cero o en forma equivalente, en presencia de un campo gravitacional. También será interesante analizar el concepto de partícula en estas coordenadas.

### ESTRUCTURA DEL ESPACIO-TIEMPO

Para formar la base teórica de la cuantización de los campos en presencia de un campo gravitacional, supondremos que el espacio-tiempo es de  $n$  dimensiones y de clase  $C^\infty$ , globalmente hiperbólico y una variedad pseudo-Riemanniana. La condición de diferenciabilidad nos asegura la existencia de ecuaciones diferenciales y que sea globalmente hiperbólico nos asegura la existencia de superficies de Cauchy (en el que fijaremos las condiciones de frontera de nuestro problema).

El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  está asociada con la métrica de la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad 2.1.1$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

teniendo signatura  $n-2$ . Denotamos el siguiente determinante  $|\det g_{\mu\nu}|$  como:

$$g \equiv |\det g_{\mu\nu}| \quad 2.1.2$$



## ECUACIONES DEL CAMPO

La generalización más sencilla de las ecuaciones de campo es la que se obtiene al reemplazar el D'Alembertiano en las coordenadas de Minkowski a las de  $g_{\mu\nu}$ ; esto es, para un campo escalar tendríamos

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right] \phi = 0 \quad 2.1.3$$

y cambiamos  $\partial_\mu \partial^\mu \phi$  por  $\square \phi$  donde

$$\square \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (-g)^{1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{-1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right] \quad 2.1.4$$

Sin embargo, ésta no es la única opción posible, dado que la presencia de una métrica con curvatura distinta de cero, involucra la existencia de otro escalar en la teoría que sería  $R$  (escalar de Ricci), así una generalización más completa sería

$$\left[ \square + m^2 + \xi R \right] \phi = 0 \quad 2.1.5$$

donde  $\xi$  es un factor numérico. Cabe señalar que cuando  $m=0$  esta última ecuación es invariante ante transformaciones conformes<sup>4</sup>, al escoger

$$\xi = \frac{1}{4} \left[ \frac{(n-2)}{(n-1)} \right] \equiv \xi(n) \quad 2.1.6$$

donde  $n$  es la dimensión del campo.

Otra opción importante corresponde a escoger  $\xi=0$ , a la que se conoce como acoplamiento mínimo.

<sup>4</sup> En el apéndice I usaremos más explícitamente las transformaciones conformes.

## FORMALISMO LAGRANGEANO

Al considerar al campo escalar en presencia de un campo gravitacional que está definido por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , la densidad Lagrangeana

$$L = \frac{-1}{2}(-g)^{1/2} \phi(\square + m^2 + \xi R)\phi \quad 2.1.7$$

mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu\nu}} = 0 \quad 2.1.8$$

nos conduce a las ecuaciones de movimiento (2.1.5). Esta densidad Lagrangeana depende del campo  $\phi(x)$  y ésta a su vez de la 1<sup>ra</sup> y 2<sup>da</sup> derivadas; la variación de L cuando  $\phi(x)$  varía, está dada como

$$\delta L = \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu\nu}} \right] \delta \phi + \partial_\mu \left[ \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu\nu}} \partial_\nu \right] \delta \phi \right] \quad 2.1.9$$

Una de las ventajas de contar con un formalismo Lagrangiano, es que apartir de éste y del teorema de Noether, podemos encontrar algunas cantidades conservadas.

Supongamos ahora que la métrica admite un vector de Killing  $\zeta^\mu$ . Entonces bajo una transformación infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \quad 2.1.10$$

el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  permanece invariante, pero  $\phi$  y L varían de acuerdo a

<sup>3</sup> S. Hacyan, A. Sarmiento, G. Cocchi y F. Sosa, Phys Rev. D 32, 914 (1985)

$$\delta\phi = \zeta^\mu \phi_{,\mu} \quad 2.1.11$$

$$\delta L = \zeta^\mu L_{,\mu} \quad 2.1.12$$

donde el vector de Killing satisface la ecuación

$$\zeta_{\alpha\beta} + \zeta_{\beta\alpha} = 0 \quad 2.1.13$$

Los vectores de Killing nos indican direcciones preferentes (en determinados espacios) en donde hay cantidades físicas conservadas, de esta manera, si insertamos las relaciones (2.1.11) y (2.1.12) (y haciendo uso de la propiedad  $\zeta^\alpha{}_{;\alpha} = 0$ ) en (2.1.9), mediante el teorema de Noether encontramos la ley de conservación para cualquier campo  $\phi$  (que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange)

$$J^\mu_{;\mu} = \frac{1}{(-g)^{1/2}} \partial_\nu \left[ (-g)^{1/2} J^\nu \right] = 0 \quad 2.1.14$$

donde la corriente conservada es

$$J^\alpha = -2(-g)^{1/2} \left[ L \zeta^\alpha - \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\alpha\beta}} \bar{\partial}_\beta \right] (\zeta^\nu \phi_{,\nu}) \right] \quad 2.1.15$$

En particular, para la densidad Lagrangiana (2.1.7), la corriente producida debe ser

$$J_\alpha = -\bar{\partial}_\alpha (\zeta^\beta \phi_{,\beta}) \quad 2.1.16$$

---

\* Donde la coma indica derivada parcial  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} = ,\mu \right)$  y el punto y como la derivada covariante  $\left( \lambda_{ij} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij} \lambda_k \right)$

para el cual, su divergencia es cero, siempre y cuando  $\phi$  y  $\zeta_a$  satisfagan las ecuaciones (2.1.5) y (2.1.13) respectivamente.

Por otra parte tenemos que el espacio-tiempo de Minkowski, admite cuatro vectores de Killing constantes y linealmente independientes que están asociados al grupo de Poincaré (los cuales permanecen invariantes ante translaciones espacio-temporales y rotaciones); como consecuencia, el tensor  $T^{ab}$  puede ser definido bajo la ecuación

$$J^a = T^{ab} \zeta_b \quad 2.1.17$$

debido a que la conservación de la corriente implica  $J^a{}_{;a} = 0$  se obtiene  $T^{ab}{}_{;a} = 0$ , ya que los  $\zeta_a$ 's son linealmente independientes. De las ecuaciones (2.1.16) y (2.1.17) se obtiene

$$T_{ab} = -\frac{1}{2} \phi'' \partial_a \partial_b \phi \quad 2.1.18$$

que es el tensor de energía-esfuerzos en coordenadas cartesianas; y la energía total del sistema está determinada por

$$\int T_{0\mu} d\sigma^\mu \quad 2.1.19$$

## 2.2 SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE CAMPO PARA EL CASO GRAVITACIONAL HOMOGÉNEO Y ESTÁTICO

Anteriormente vimos, que existen algunas métricas que representa un campo gravitacional homogéneo y estático; una de ellas era la métrica dada por (1.3.17)

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + e^{2\mu}(dz^2 - dt^2);$$

al introducir el tensor métrico asociado, en la ecuación (2.1.3) obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - e^{-2\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + e^{-2\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + m^2 \phi = 0 \quad 2.2.1$$

para resolver esta ecuación, utilizaremos separación de variables, esto lo obtendremos al proponer a  $\phi$  de la siguiente manera

$$\phi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad 2.2.2$$

obteniendo las siguientes soluciones inmediatas

$$X = e^{ik_x x} \quad 2.2.3$$

$$Y = e^{ik_y y} \quad 2.2.4$$

$$T = e^{i\epsilon t} \quad 2.2.5$$

donde  $k_x > 0, k_y > 0$  son los momentos conservados y  $\epsilon$  representa la energía; y en la parte de  $z$ , se obtiene la ecuación diferencial

$$H^2 \frac{d^2 Z}{dH^2} + H \frac{dZ}{dH} - \left( H^2 + \frac{\epsilon^2}{g^2} \right) Z = 0 \quad 2.2.6$$

donde

$$H = pX = \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} \right) e^{ix}, \quad k_1^2 = k_i^2 + k_j^2 \quad 2.2.7$$

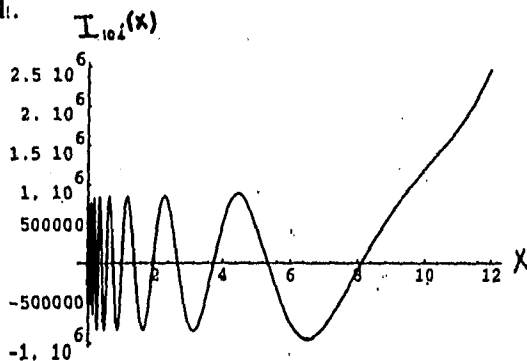
$$p = \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}}$$

que es la ecuación de Bessel modificada, cuyas soluciones están dadas en términos de las  $I_\nu(H)$  y  $K_\nu(H)$ , de tal manera que la solución general es

$$Z = AI_\nu(H) + BK_\nu(H) \quad 2.2.8$$

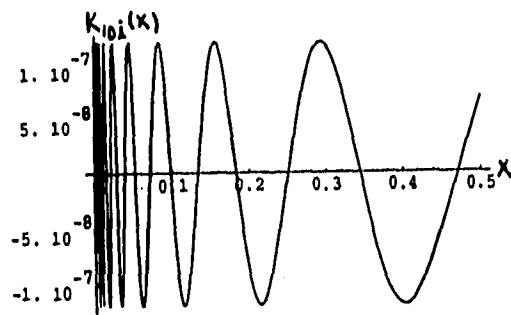
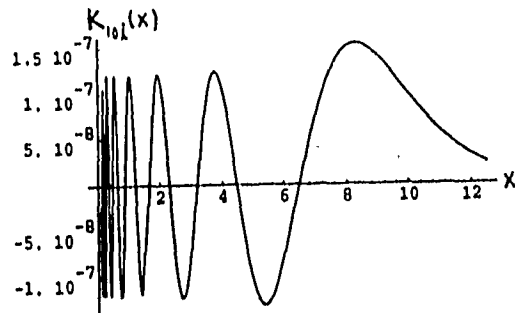
$$\nu = i \frac{\varepsilon}{g}$$

Como queremos normalizar la función de onda, es importante que las funciones de Bessel modificadas sean bien comportadas, esto es, que no diverjan al infinito. Las funciones  $I_\nu(H)$  no serán útiles, como se puede observar en la siguiente gráfica 1.



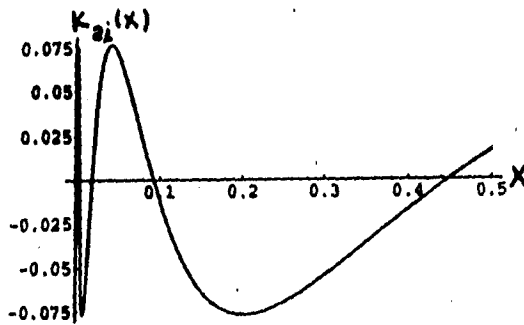
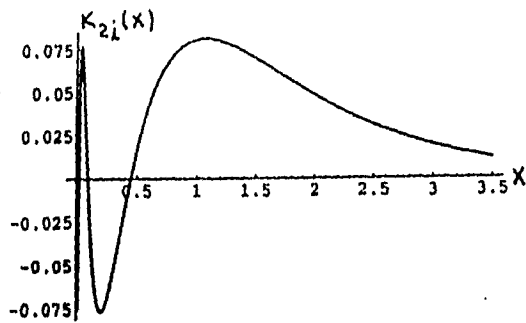
Gráfica 1  
Se puede apreciar que es oscilatoria cerca del origen y divergente al infinito.

y para las  $K_n(H)$  su comportamiento es



Gráficas 2 y 3

Como se puede apreciar, el comportamiento de estas funciones es oscilatoria en el origen, y el número de nodos que aparecen está en relación del subíndice imaginario de la función.



Gráficas 4 y 5

En estas gráficas se puede apreciar más claramente que en número de nodos está en relación del subíndice de la función, de igual forma, la función empieza a decaer exponencialmente, aproximadamente en el valor del mismo subíndice.

de esta forma, la solución a la ecuación diferencial (2.2.1) es

$$\phi(x, y, z, t) = B e^{i(\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)} K_{\frac{z}{b}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_x^2}{b^2}} e^{at} \right) \quad 2.2.9$$



esta solución es para los estados de energía positivos ( los estados de energía positivos y negativos se distinguirán por el signo de  $\epsilon$ ).

Por otra parte se tenía también la métrica (1.3.17), que al sustituir su tensor métrico en la ecuación (2.1.3), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{g}{1+gz} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{(1+gz)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + m^2 \phi = 0 \quad 2.2.10$$

y al proponer nuevamente separación de variables, obtenemos la siguiente solución

$$\phi(x, y, z, t) = B e^{i(\epsilon x + k y + \epsilon z t)} K_{\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k^2}{g^2}} |1 + gz| \right) \quad 2.2.11$$

como las funciones Bessel modificadas sólo están definidas para argumentos positivos, es por eso que se introdujo el valor absoluto.

## ORTONORMALIZACIÓN DE LAS FUNCIONES DE ONDA

Para ortonormalizar las funciones, haremos uso de la definición del producto escalar

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma} \bar{\phi}_1 \partial_\mu \phi_2 [g_{\Sigma}]^{\frac{1}{2}} d\Sigma^\mu \quad 2.2.12$$

donde,  $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$  con  $n^\mu$  un vector ortogonal unitario dirigido a la hipersuperficie espacialoide  $\Sigma$  y  $d\Sigma$  es el volumen elemental en  $\Sigma$ .

Primeramente ortonormalizaremos la función de onda (2.2.9), cuyo conjugado es

$$\phi^*(x, y, z, t) = B^* e^{-i(\omega_1^2 + \omega_2^2)t + i\epsilon t} K_{-i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} e^{i\mu} \right) \quad 2.2.13$$

de tal manera que (2.2.12) toma la siguiente expresión

$$2(\epsilon + \epsilon') \int_{-\infty}^{\infty} B B' e^{i(\omega_1^2 - \omega_2^2)t + i(\omega_1^2 - \omega_2^2)t + i(\epsilon - \epsilon')t} e^{i\mu} K_{i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} e^{i\mu} \right) K_{-i\frac{\epsilon'}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} e^{i\mu} \right) d\bar{x} = \delta(k_x - k_x') \delta(k_y - k_y') \quad 2.2.14$$

la cual igualamos a deltas de Dirac, porque son funciones del continuo y al integrar respecto de x e y, obtenemos

$$4\epsilon B^2 (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} e^{i\mu} \right) K_{-i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} e^{i\mu} \right) e^{i\mu} dz = 1 \quad 2.2.15$$

al hacer el cambio de variable  $\chi = e^{i\mu}$ , la integral se transforma en

$$4\epsilon B^2 (2\pi)^2 \frac{1}{g} \int_0^{\infty} K_{i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} \chi \right) K_{-i\frac{\epsilon}{g}} \left( \sqrt{\frac{m^2 + k_1^2}{g^2}} \chi \right) \chi d\chi = 1 \quad 2.2.16$$

Al utilizar la siguiente propiedad<sup>6</sup>

$$\int_0^{\infty} x^{-\lambda} K_{\mu}(ax) K_{\nu}(bx) dx = \frac{2^{-2-\lambda} a^{-\mu-\lambda-1} b^{\nu}}{\Gamma(1-\lambda)} \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right) \times F\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}, \frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}; 1-\lambda; 1-\frac{b^2}{a^2}\right) \quad 2.2.17 \\ [\operatorname{Re}(a+b) > 0, \operatorname{Re} \lambda < 1 - |\operatorname{Re} \mu| - |\operatorname{Re} \nu|]$$

<sup>6</sup> I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of integrals, series and products Academic Press (1980)

donde

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \dots \quad 2.2.18$$

que es la llamada función hipergeométrica de una variable.

Finalmente obtenemos la constante de normalización

$$B^2 = \frac{\text{Senh}(\pi \epsilon)(m^2 + k_1^2)}{8\pi^3 g \epsilon^2} \quad 2.2.19$$

De igual manera se calcula la constante de normalización para la función de onda (2.2.11), obteniéndose la misma constante (2.2.19).

Por otro lado como se había mencionado, la métrica de Rindler es equivalente a las anteriores, ya que si hacemos el siguiente cambio de variable para la métrica (1.3.18)

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= e^{2\tau} \\ \tau &= g t \end{aligned} \quad 2.2.20$$

esta toma la forma

$$d\sigma^2 = -dx^2 - dy^2 - \frac{1}{g^2} d\zeta^2 + \frac{\zeta^2}{g^2} d\tau^2 \quad 2.2.21$$

la cuál, también se obtiene al hacer una transformación de coordenadas de la métrica de Minkowski, mediante

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\zeta}{g} \operatorname{Senh}(\tau) \\
 z &= \frac{\zeta}{g} \operatorname{Cosh}(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.22}$$

cuya solución estacionaria de la ecuación de campo con respecto a  $\tau$  es

$$\begin{aligned}
 \phi_{NH} &= N e^{i\pi \omega t} K_0 \left( \frac{\sqrt{m^2 + k_z^2}}{g} \zeta \right) \\
 N^2 &= \frac{g(m^2 + k_z^2) \operatorname{Senh}(\pi \omega / g)}{8 \pi^2 \omega^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.23}$$

### CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ESCALAR Y REPRESENTACIÓN DEL ESPACIO DE FOCK

La cuantización canónica del campo escalar, se obtiene al imponer las relaciones de conmutación

$$[\hat{\phi}(\bar{x}), \hat{\pi}_\phi(\bar{x}')]_{\tau, \tau'} = i \delta(\bar{x} - \bar{x}')
 \tag{2.2.24}$$

$$[\hat{\phi}(\bar{x}), \hat{\phi}(\bar{x}')]_{\tau, \tau'} = 0; [\hat{\pi}_\phi(\bar{x}), \hat{\pi}_\phi(\bar{x}')]_{\tau, \tau'} = 0
 \tag{2.2.25}$$

con  $\hat{\pi}_\phi(\bar{x})$  el momento canónico del campo  $\hat{\phi}(\bar{x})$ . Clásicamente, dado un juego completo de soluciones  $\{u_i(\bar{x})\}$  de la ecuación de campo (2.1.3), el campo  $\hat{\phi}(\bar{x})$  puede ser siempre escrito como una combinación lineal de éstos. Es conocido que una clara distinción entre partículas y antipartículas, se obtiene al ortonormalizar las funciones de onda  $\{u_i(\bar{x})\}$  y  $\{u_i^*(\bar{x})\}$ , respectivamente y reemplazar los coeficientes de expansión por operadores de creación y aniquilación que cumplan las siguientes relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}; [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad 2.2.26$$

y con ellos podemos construir el estado de vacío, en el espacio de Fock.

La base normalizada de los vectores ket denotada por  $|n\rangle$ , puede ser construida desde el vector  $|0\rangle$ , llamado el vacío, o el estado de no partículas. El estado  $|0\rangle$  tiene la propiedad, de ser aniquilado por todos los operadores  $a_i$ ,

$$a_i|0\rangle = 0, \quad \forall k \quad 2.2.27$$

donde los operadores  $a_i$  y  $a_i^\dagger$  siguen las relaciones de conmutación anteriormente dadas. De esta manera el espacio de Fock  $\{|n_i\rangle\}$  esta representado por

$$\begin{aligned} a_i^\dagger|n_i\rangle &= (n_i+1)^{\frac{1}{2}}|(n_i+1)_i\rangle \\ a_i|n_i\rangle &= n_i^{\frac{1}{2}}|(n_i-1)_i\rangle \end{aligned} \quad 2.2.28$$

En general, la selección del juego completo de  $\{u_i(x)\}$  no es única. Dado otro juego completo de modos  $\{\tilde{u}_i(x)\}$  la relación entre los modos, determina la correspondiente relación entre los operadores de creación y aniquilación

$$\tilde{a}_i = \sum_j \alpha_j a_j - \beta_j a_j^\dagger \quad 2.2.29$$

$$a_i = \sum_j \alpha_j \tilde{a}_j + \beta_j \tilde{a}_j^\dagger \quad 2.2.30$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_v &= (\bar{u}_i, u_j) \\ \beta_v &= -(\bar{u}_i, u_j^*)\end{aligned}\quad 2.2.31$$

son los llamados coeficientes de Bogolubov. Si el coeficiente  $\beta$  no es cero, el vacío definido por los  $\{u_j(\bar{x})\}$  modos es diferente del el vacío definido por los  $\{\bar{u}_j(\bar{x})\}$  modos. De esta manera, la definición de vacío en esta descomposición será

$$\bar{a}_j|\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall j \quad 2.2.32$$

así por ejemplo,  $|\bar{0}\rangle$  en general no es aniquilado por  $a_i$ ,

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ij}|\bar{1}_j\rangle \neq 0 \quad 2.2.33$$

En realidad, el valor de expectación del operador  $\hat{N}_i = a_i^* a_i$  para el número de partículas del modo  $u_i(\bar{x})$  en el estado  $|\bar{0}\rangle$  es

$$\langle \bar{0} | \hat{N}_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \quad 2.2.34$$

lo cual interpretamos como que el vacío de los  $\{\bar{u}_j(\bar{x})\}$  modos, contiene  $\sum_j |\beta_{ij}|^2$  partículas de el modo  $u_i(\bar{x})$ .

En el caso en el que comparamos el operador

$$\hat{N}_{i,IN} = \bar{a}_i^* \bar{a}_i \quad 2.2.35$$

para el número de partículas de Rindler en el vacío de Minkowski

$$\langle 0_{MIN} | 0_{MIN} \rangle$$

resulta ser

$$\langle 0_{MIN} | \hat{N}_{RIND} | 0_{MIN} \rangle = \frac{1}{e^g - 1} \quad 2.2.36$$

que nos indica que los vacíos no son equivalentes y además, aparece un término Planckiano, donde el papel de temperatura lo juega la  $g$ ; dado que las coordenadas de Rindler son para un observador uniformemente acelerado, podemos interpretar que el término aparece debido a la aceleración del sistema.

#### CÁLCULO DEL VALOR DE EXPECTACIÓN DEL TENSOR ENERGÍA-ESFUERZO

Otra cantidad interesante físicamente es el valor de expectación de la densidad de energía (primeramente en el vacío de Minkowski, y después en el vacío de Rindler) la cual se obtiene de la componente  $\hat{T}_{00}$  del tensor de energía-esfuerzo (2.1.18) en forma de operador, el cual lo obtenemos mediante

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \hat{\phi}_1 \partial_\alpha \partial_\beta \hat{\phi}_2 \quad 2.2.37$$

De esta manera tomaremos la componente  $\hat{T}_{00}$  y calcularemos su valor de expectación de la forma

$$\langle 0 | \hat{T}_{00} | 0 \rangle = \lim_{1 \rightarrow 2} \left\{ -\frac{1}{2} \partial_{0_2}^2 G'(x_1, x_2) + \partial_{0_1} \partial_{0_2} G'(x_1, x_2) - \frac{1}{2} \partial_{0_1}^2 G'(x_1, x_2) \right\} \quad 2.2.38$$

donde

$$\langle 0 | \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 | 0 \rangle = G^*(x_1, x_2) \quad 2.2.39$$

es una función de Wightman, la cuál satisface la ecuación de onda (2.1.3) y en coordenadas de Minkowski toma la forma

$$G^*(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} [(t - t' \mp i\epsilon)^2 - |x - x'|^2]^{-1}; \quad 2.2.40$$

al sustituirla en (2.2.38) se obtiene

$$\langle 0 | \hat{T}_{00, \text{ren}} | 0 \rangle = \frac{3}{\pi^2} (\chi - i\epsilon)^{-4} \quad 2.2.41$$

y al sacar la transformada de Fourier ( porque  $\chi = t_1 - t_2$  y cuando  $x_1 \rightarrow x_2$ , diverge), para ver la forma de la divergencia obtenemos

$$de_{\text{ren}} = F\{\langle 0 | \hat{T}_{00, \text{ren}} | 0 \rangle\} = \frac{\omega^3}{4\pi^3} \quad 2.2.42$$

que era de esperar, porque se tiene

$$\sum_1 \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^{n-1} \int \omega \, d^{n-1}k \quad 2.2.43$$

de tal forma que

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{2\pi^2} d\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int \omega \, d^3k \quad 2.2.44$$



y en coordenadas de Rindler se obtiene

$$de_{RIN} = \frac{\omega^3}{2\pi^3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \right] \quad 2.2.45$$

Como podemos ver, la densidad de energía por modo en coordenadas de Rindler es parecida a la de Minkowski, salvo un término extra, que si lo comparamos con el término obtenido al comparar los modos de Minkowski con los de Rindler (2.2.36) resulta idéntico. De nuevo podemos apreciar el efecto que ocurre con el vacío cuántico de Minkowski cuando se observa desde un sistema uniformemente acelerado.

### 2.3 SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DEL CAMPO PARA EL CASO ELÉCTRICO

En esta parte, veremos como es modificada la ecuación de Klein-Gordon al meter una interacción electromagnética, la cual estará representada mediante el potencial vectorial. Por otro lado sabemos que al igual que en el caso gravitacional, hay varias normas que me describen al campo eléctrico, nosotros trabajaremos con una norma independiente del tiempo y compararemos con una norma que se encontró en la literatura reciente y que depende del tiempo.<sup>7</sup>

Para encontrar la solución del comportamiento de una partícula escalar con carga  $e$  usaremos el esquema de acoplamiento mínimo, de esta manera la ecuación de Klein-Gordon se modifica de la siguiente manera

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \Psi + m^2 \Psi = 0 \quad 2.3.1$$

con

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \quad 2.3.2$$

Las normas con las que trabajaremos serán las siguientes

$$A_{\mu} = (-Ez, 0, 0, 0) \quad 2.3.3$$

$$A'_{\mu} = (0, 0, 0, -Et) \quad 2.3.4$$

las cuales están relacionadas mediante la transformación  $A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu} \Lambda$  con  $\Lambda = -Ezt$ .

<sup>7</sup> A. A. Gibb, A. G. Mamonov and V. M. Mostoslavski. (1994). Vacuum Quantum Effects in Strong Fields. Moscow: St. Petersburg. p 117-124

Para la primera norma (independiente del tiempo), al introducir (2.3.2) en (2.3.1), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + m^2 \Psi - 2i|e|Ez \frac{\partial \Psi}{\partial t} - |e|^2 E^2 z^2 \Psi = 0 \quad 2.3.5$$

para resolverla, propondremos la solución estacionaria (donde los estados de energía positivos o negativos estarán determinados por el signo de  $\epsilon$ )

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-i\epsilon t} \Psi(\vec{r}) \quad 2.3.6$$

donde  $\Psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$  y de esta forma, tendremos las soluciones para la parte en  $x$  e  $y$

$$\begin{aligned} X &= e^{i k_1 x} \\ Y &= e^{i k_2 y} \end{aligned} \quad 2.3.7$$

donde  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  son los momentos conservados. En la parte de  $z$  se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$-Z'' - k_1 u^2 Z = k_2 Z \quad 2.3.8$$

con

$$u = eEz + \epsilon, \quad k_1 = \frac{1}{(|e|E)^2}, \quad k_2 = \frac{1}{(|e|E)^2} (-k_1^2 - m^2) \quad 2.3.9$$

que es igual a la de un oscilador armónico invertido (ver figura 4). El potencial lo podemos identificar al multiplicar la ecuación (2.3.8) por  $\frac{\hbar^2}{2m}$ .

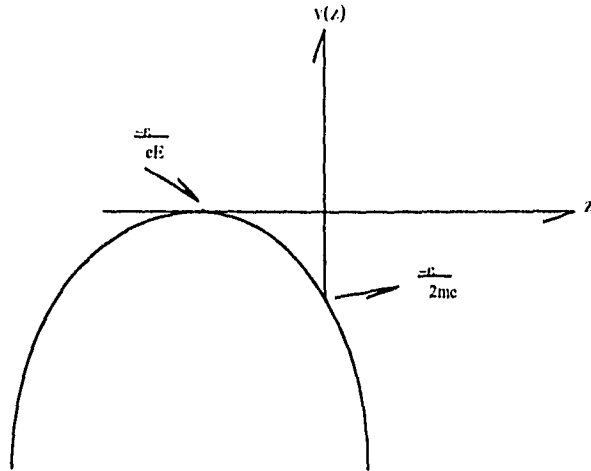


Figura 4

Como se podrá apreciar, el potencial es igual que el de un oscilador armónico invertido, ligeramente recorrido a la izquierda del origen

y al analizar su comportamiento asintótico, encontramos que sus soluciones son

$$Z_1 = e^{\frac{u^2 \sqrt{k_1}}{2}} \Phi \left( \frac{1}{4} + \frac{k_2}{i4\sqrt{k_1}}, \frac{1}{2}; -u^2 \sqrt{k_1} i \right) \quad 2.3.10$$

$$Z_2 = [-u^2 \sqrt{k_1} i]^{\frac{1}{2}} \Phi \left( \frac{3}{4} + \frac{k_2}{4\sqrt{k_1} i}, \frac{3}{2}; -u^2 \sqrt{k_1} i \right) e^{\frac{u^2 \sqrt{k_1}}{2}} \quad 2.3.11$$

que están dadas en relación a la función hipergeométrica degenerada

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma \Gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} + \dots \quad 2.3.12$$

ó en términos de las funciones de Whittaker

$$Z_{1,2} = [-it^2 \sqrt{k_1 i}]^{\frac{1}{4}} M_{-\frac{k_2+1}{4}, \frac{1}{4}}(-it^2 \sqrt{k_1 i}) \quad 2.3.13$$

y cualquier combinación lineal de ambas. Entre ellas destaca

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(z) \quad 2.3.14$$

y tomando en cuenta al factor  $u^{\frac{1}{2}}$  de la relación (2.3.13), obtenemos

$$D_v(z) = 2^{\frac{v+1}{4}} z^{\frac{-1}{2}} W_{\frac{v+1}{4}, \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} z^2\right) \quad 2.3.15$$

que en la literatura es conocida como función parabólico-cilíndrica, y así finalmente nuestra solución para la componente  $z$ , toma la forma

$$Z = 2^{\frac{k_2+1}{4}} D_{\frac{k_2-1}{2}}(z') \quad 2.3.16$$

con

$$\begin{aligned} z'^2 &= -2t \sqrt{k_1} u^2 \\ z' &= i \left( z + \frac{\mathcal{E}}{|e|E} \right) \sqrt{2|e|E} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad 2.3.17$$

cuya parte real ilustramos

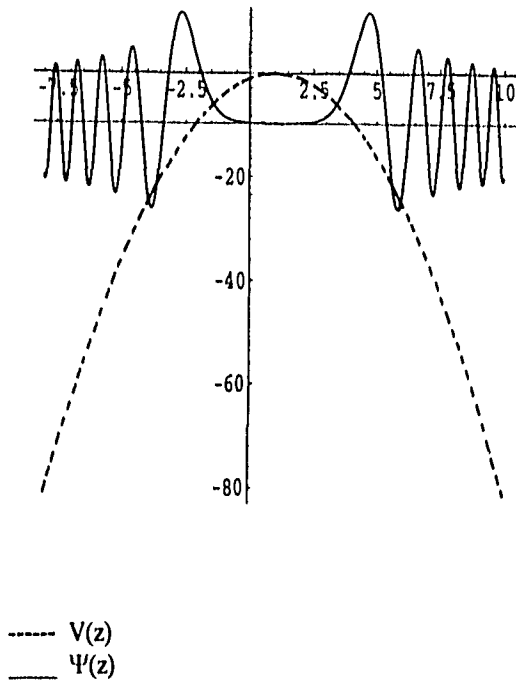


Figura 5

Aquí podemos ver esquemáticamente la superposición del potencial (línea discontinua) con la forma de la función de onda (línea continua) para una energía dada.

así, de esta manera la solución a la ecuación diferencial (2.3.5) es

$$\Psi_{i,\epsilon}^{(+)} = C e^{i\lambda z} D_\nu(\mathfrak{N}(i-1)) e^{-i\alpha z} \quad 2.3.18$$

$$\nu = \frac{i\lambda - 1}{2}, \quad \lambda = \frac{k_1^2 + m^2}{|e|E}, \quad \mathfrak{N} = \left(z + \frac{\epsilon}{|e|E}\right) \sqrt{|e|E}$$

esto es, para los estados de energía positivos y caracterizada por los números cuánticos  $\bar{k}_z$  y  $\nu$ .

### LÍMITE NO-RELATIVISTA

Para calcular este límite, únicamente tomaremos la parte de  $z$ , dado que es en esa dirección donde actúa el campo eléctrico, y se hará uso de todas las unidades correspondientes.

Se llegó a la ecuación diferencial para la componente en  $z$

$$Z'' + \left\{ \frac{\hbar^2 c^2}{(|e|E)^2} u^2 - \frac{\hbar^2 c^2}{(|e|E)^2} \left( k_z^2 + \frac{m^2 c^2}{(\hbar^2)} \right) \right\} Z = 0 \quad 2.3.19$$

donde la derivada es respecto a  $u$ .

Al hacer el siguiente cambio de variable

$$w = r^{-1} u, \quad \frac{dw}{du} = \frac{1}{r} \quad 2.3.20$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Z}{dw^2} + \left\{ \left( \frac{\hbar^2 c^2}{(|e|E)^2} \right) r^4 w^2 - \frac{\hbar^2 c^2}{(|e|E)^2} \left( k_z^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) r^2 \right\} Z = 0 \quad 2.3.21$$

y al hacer la siguiente identificación

$$r = \left( \frac{(|e|E)^2}{4\hbar^2 c^2} \right)^{1/4}, \quad a = \frac{\hbar^2 c^2}{(|e|E)^2} \left( k_z^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \quad 2.3.22$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 Z}{dw^2} + \left( \frac{1}{4} w^2 - a \right) Z = 0 \quad 2.3.23$$

y cuya solución está dado por  $W(a, \pm w)^*$ . En el límite no-relativista,  $a \approx \frac{m^2 c^3}{2eE\hbar} \gg 1$ , de esta forma al realizar una expansión asintótica para  $a$  grande se obtiene

$$W(a, -w) \sim 2\sqrt{\pi}(4a)^{-1/4} e^{i\pi/4} \left( \frac{t}{\Omega^2 - 1} \right)^{1/4} A_1(-t) \quad 2.3.24$$

con las respectivas identificaciones

$$w = 2\sqrt{a}\Omega; \quad t = (4a)^{1/2}\Xi \quad 2.3.25$$

$$\Xi = -\left(\frac{3}{2}\theta_1\right)^{1/2}; \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_1} \sqrt{1-s^2} ds = \frac{1}{4} \arccos \Omega - \frac{1}{4} \Omega \sqrt{1-\Omega^2}, \quad (\Omega \leq 1) \quad 2.3.26$$

$$\Xi = \left(\frac{3}{2}\theta_2\right)^{1/2}; \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_2} \sqrt{s^2-1} ds = -\frac{1}{4} \operatorname{arccosh} \Omega + \frac{1}{4} \Omega \sqrt{\Omega^2-1}, \quad (\Omega \geq 1) \quad 2.3.27$$

En nuestro caso, cuando  $c \rightarrow \infty$ ;  $\Omega < 1$ , de hecho en el límite no-relativista,

$$\Omega = \frac{|e|Ez + \epsilon}{mc^2} \quad 2.3.28$$

que es adimensional como era de esperarse. De esta manera al hacer una expansión de Taylor a la relación (2.3.26) y utilizando la relación anterior, se obtiene

\* Ver el libro: Handbook of Mathematical Functions, Milton Abramowitz, A. Stegun, Dover (1972), p. 691-93.



$$\xi \approx -\left(\frac{3\pi}{16}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{16}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{|e|Ez + \varepsilon}{mc^2}\right) \quad 2.3.29$$

de esta manera,  $t$  estará representada como

$$t = -\left(\frac{3m^2c^3\pi}{8|e|E\hbar}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2m|e|E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(z + \frac{\varepsilon}{|e|E}\right) \quad 2.3.30$$

que es la parte que nos interesa, la cual corresponde al argumento de la función de Airy ( $A_1(-t)$ ), que al compararse con el resultado clásico, en el cual se obtiene

$$\psi(\varpi) = C\Phi(-\varpi) \quad 2.3.31$$

donde

$$\Phi(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{3}u^3 + u\varpi\right) du \quad 2.3.32$$

es la definición de la función de Airy, con argumento

$$\varpi = \left(z + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad 2.3.33$$

<sup>9</sup> *México: Catedra. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Revert (1962), p 86-87.*

y E representa la energía. Al comparar con lo obtenido en el límite no-relativista (2.3.30), observamos que aparece un factor extra de  $\left(\frac{4}{3\pi}\right)^{1/2}$ , ya que el primer término se puede eliminar al definir nuestro nivel cero de energía no-relativista.

### ORTONORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Para este caso, nuevamente haremos uso del producto escalar definido por (2.2.12), y como la solución encontrada (2.3.18) es una función en el continuo, el producto escalar se normalizará con deltas de Dirac. La integración en la parte de x e y es directa, mientras que en la parte de z se utilizará el método dado por Landau<sup>10</sup>.

Para normalizar las funciones de onda del movimiento unidimensional (en el espectro continuo) existe un método simple que permite determinar el coeficiente de normalización directamente a partir de la expresión asintótica de la función de onda para valores grandes de |z|.

Consideremos una función de onda con movimiento no restringido en una dirección espacial, por ejemplo z. La integral de normalización diverge para  $z \rightarrow \infty$ , por consiguiente, en la determinación de la constante de normalización se puede substituir  $D_p(z)$  por su valor asintótico (para valores  $z > 0$ ) y efectuar la integración eligiendo como límite inferior un valor finito cualquiera de z, por ejemplo el valor cero; esto equivale a prescindir de una cantidad finita frente a otra infinitamente grande.

De esta manera, se utiliza la siguiente expansión asintótica para la parte en z (función parabólico-cilíndrica)

$$D_p(z) \sim e^{-z^2/4} z^p \left\{ 1 - \frac{p(p-1)}{2 \cdot z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 \cdot z^4} \dots \right\}, \quad 2.3.34$$

$$|z| \gg 1, \quad |z| \gg |p|, \quad |\arg z| < \frac{3}{4} \pi$$

<sup>10</sup> Métrica Cuántica. L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Revisión (1962), p 71-75.

sólo conservaremos términos de 1<sup>er</sup> orden en  $z$ , obteniendo

$$e^{\frac{\epsilon}{z}} \left(1 + \frac{\epsilon}{|e|Ez}\right)^{(1/|E|)} \left\{ \left( z + \frac{\epsilon}{|e|E} \right) \sqrt{2|e|E} e^{-\frac{1}{2}\pi} \right\}^{-\frac{\lambda-1}{2}} + \theta\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\lambda = \frac{k_1^2 + m^2}{|e|E}, \quad (e^{-\frac{1}{2}\pi})^2 = -i$$
2.3.35

si  $z \rightarrow \infty$ , el término  $\frac{\epsilon}{|e|Ez} \rightarrow 0$ ; por lo que podemos hacer un desarrollo en Taylor,

ya que  $\frac{\epsilon}{z} \approx \frac{\epsilon'}{z}$  si  $z \rightarrow \infty$ , de esta manera se obtiene

$$f\left(\frac{\epsilon}{z}\right) = \left(1 + \frac{\epsilon}{|e|Ez}\right)^2; \quad f\left(\frac{\epsilon'}{z}\right) \approx \left(1 + \frac{\epsilon'}{|e|Ez}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\epsilon'}{|e|Ez}\right) \frac{(\epsilon - \epsilon')}{(|e|Ez)}$$
2.3.36

así, (2.3.35) se puede aproximar mediante

$$e^{-\frac{1}{z} \left(1 + \frac{\epsilon}{|e|E}\right)^2 (1/|E|)} \left( z + \frac{\epsilon}{|e|E} \right)^{\theta - \epsilon} \left\{ \left( z + \frac{\epsilon}{|e|E} \right) \sqrt{2|e|E} e^{-\frac{1}{2}\pi} \right\}^{-\frac{\lambda-1}{2}}$$
2.3.37

y también se puede verificar que el conjugado de (2.3.35) es

$$e^{-\frac{1}{z} \left(1 + \frac{\epsilon'}{|e|E}\right)^2 (1/|E|)} \left\{ \left( z + \frac{\epsilon'}{|e|E} \right) \sqrt{2|e|E} e^{-\frac{1}{2}\pi} \right\}^{-\frac{\lambda-1}{2}}$$
2.3.38

Aquí hemos puesto  $\lambda'$ , porque esta depende de  $k_z^2$ . Al desarrollar el producto escalar (2.2.12) obtenemos que la densidad de probabilidad para el caso eléctrico es

$$\rho = \frac{i}{2m} \Psi^* \partial_t \Psi - \frac{i}{2m} (\partial_t \Psi^*) \Psi - e A_0 \Psi^* \Psi \quad 2.3.39$$

donde la derivada es respecto al tiempo, y el producto  $\Psi^* \Psi$  resultan ser respectivamente

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi &= -i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \Psi \\ \partial_t \Psi^* &= i \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \Psi^* \end{aligned} \quad 2.3.40$$

$$\begin{aligned} \Psi^* \Psi &= CC e^{i(\tilde{t}_1 \tilde{x} - \tilde{t}_2 \tilde{x} + \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \tilde{x} - \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \tilde{x})} 2^{\frac{1}{2}} e^{i \left( \frac{z}{\hbar c} + \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}| \hbar c} \right) \theta - c t} \left\{ \left( \frac{z}{\hbar c} + \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}| \hbar c} \right) \sqrt{2|e|E} e^{i \frac{3}{4} \pi} \right\}^{-\lambda \frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \left( \frac{z}{\hbar c} + \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}| \hbar c} \right) \sqrt{2|e|E} e^{-i \frac{3}{4} \pi} \right\}^{\lambda \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad 2.3.41$$

de esta manera, al integrar (2.3.39) en todo el espacio

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \tilde{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ CC \left( \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}}{2mc^2} + \frac{|e|Ez}{mc^2} \right) e^{i(\tilde{t}_1 \tilde{x} - \tilde{t}_2 \tilde{x} + \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \tilde{x} - \frac{\mathcal{E}}{\hbar} \tilde{x})} 2^{\frac{1}{2}} e^{i \left( \frac{z}{\hbar c} + \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}| \hbar c} \right) \theta - c t} \right\} \times \\ &\times \left\{ \left( \frac{z}{\hbar c} + \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}| \hbar c} \right)^{-\lambda \mu \lambda - 1} \left( \sqrt{2|e|E} \right)^{-\lambda \mu \lambda - 1} e^{i \frac{3}{4} \pi (\lambda + \lambda)} \right\} d^3 \tilde{x} \end{aligned} \quad 2.3.42$$

donde  $\lambda \rightarrow \lambda', \varepsilon \approx \varepsilon'$  se obtiene

$$CC^*(2\pi)^3 \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \pi \lambda} \frac{|e|E}{mc} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\varepsilon - \varepsilon')}{\hbar} \left\{ \frac{z}{\hbar^2} + \frac{\varepsilon}{i|e|\hbar^2} \right\}} dz = \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \delta(\varepsilon - \varepsilon') \quad 2.3.43$$

al hacer el siguiente cambio de variable

$$f = \frac{z}{\hbar^2 c^2} + \frac{\varepsilon'}{|e|\hbar^2 c^2} - \frac{t}{\hbar} \quad 2.3.44$$

y al integrar respecto a  $z$ , se obtiene una delta de Dirac, y de esta manera, la constante de normalización resulta ser

$$C^2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{\sqrt{|e|E}} \quad 2.3.45$$

## RELACIÓN CON OTRAS NORMAS

Como habíamos mencionado anteriormente, un campo eléctrico homogéneo y constante en una determinada región del espacio, puede ser representado por normas diferentes. En nuestro caso, se eligió la norma (independiente del tiempo)  $A_\mu = (-Ex, 0, 0, 0)$  del cual se obtuvo la solución para los estados de energía positiva

$$\Psi_{\lambda, \varepsilon}^{(+)} = C e^{i\lambda z} D_\nu(\mathfrak{N}(l-1)) e^{-i\omega t}$$

$$\nu = \frac{i\lambda - 1}{2}, \quad \lambda = \frac{k_\perp^2 + m^2}{|e|E}, \quad \mathfrak{N} = \left( z + \frac{\varepsilon}{|e|E} \right) \sqrt{|e|E}$$

y que está caracterizada por los números cuánticos  $\bar{k}_1, \varepsilon$ . Pero en general puede depender del tiempo como la norma  $A'_\mu = (0, 0, 0, -E\varepsilon)$  la cual ya no admite soluciones estacionarias; la solución para los estados de energía positivos es

$$\Psi_{\bar{k}_1, \varepsilon}^{(+)} = C_{\bar{k}_1} e^{i\bar{k}_1 \cdot \vec{x}} D_{\nu, \lambda}(T(-t-1)) e^{i\Lambda x} \quad 2.3.46$$

$$\nu = \frac{i\lambda - 1}{2}, \quad \lambda = \frac{m^2 + k_\perp^2}{|e|E}, \quad T = \left(t + \frac{k_\perp}{|e|E}\right) \sqrt{|e|E}$$

la cual está caracterizada por los números cuánticos  $\bar{k}_1, k_\perp$ . También se puede apreciar la simetría que guarda con la solución anterior. Para los estados de energía negativa se obtiene al conjugar la función parabólico-cilíndrica de la solución anterior. Esta definición de estados de energía positivos y negativos es algo complicada, ya que está determinada por el comportamiento asintótico temporal de los modos; mientras que para la norma independiente del tiempo, los estados están definidos por el signo de  $\varepsilon$ .

Para pasar de una norma a otra se tiene la relación que con anterioridad se mencionó  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ , con  $\Lambda = -E\varepsilon t$ ; así, la conexión entre las funciones de onda está representada por

$$\Psi_{\bar{k}_1, \varepsilon}^{(+)} = \int e^{-i\varepsilon \omega} \Psi_{\bar{k}_1, \varepsilon}^{(+)} M(\varepsilon, k_\perp) d\varepsilon + \int e^{-i\varepsilon \omega} \Psi_{\bar{k}_1, -\varepsilon}^{(-)} M(-\varepsilon, k_\perp) d\varepsilon \quad 2.3.47$$

para los estados de energía positiva y  $M(\varepsilon, k_\perp)$  representa el Kernel de la transformación. Ahora al aplicar el producto interno (porque de una manera ya se ha calculado las integrales que involucrarán este producto) a la relación anterior por

$$\Psi_{\bar{k}_1, \varepsilon}^{(+)*} \overline{\mathcal{T}}_\mu \quad 2.3.48$$

obtenemos

$$\Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_\mu \Psi_{i_1, \delta_1}^{(+)} = \int \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_\mu e^{-i\epsilon u} \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)} M(\epsilon, k_3) d\epsilon + \int \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_\mu e^{-i\epsilon u} \Psi_{i_1, -\epsilon}^{(+)} M(-\epsilon, k_3) d\epsilon \quad 2.3.49$$

que al integrarla sobre una hipersuperficie ortogonal al vector temporaloide obtenemos

$$\begin{aligned} \int \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_0 \Psi_{i_1, \delta_1}^{(+)} e^{i\epsilon x} d^1 \vec{x} &= \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \int M(\epsilon, k_3) \delta(\epsilon - \epsilon') d\epsilon \\ \Rightarrow \\ \int \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_0 \Psi_{i_1, \delta_1}^{(+)} e^{i\epsilon x} d^1 \vec{x} &= \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) M(\epsilon, k_3) \end{aligned} \quad 2.3.50$$

ya que la primera integral del lado derecho de (2.3.49) fue calculada con la normalización y la segunda integral es cero porque son funciones ortogonales.

Al hacer la integración respecto a  $x$  e  $y$  de la relación anterior, se obtiene

$$\int \Psi_{i_1, \epsilon}^{(+)*} \tilde{\pi}_0 \Psi_{i_1, \delta_1}^{(+)} e^{i\epsilon x} d^1 \vec{x} = C_3 C(2\eta)^2 \delta(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp) \frac{e^{-\frac{\alpha_3}{|\epsilon|}}}{|\epsilon|} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathcal{W}_\nu(\mathcal{W}(1+i)) e^{i\eta x} \partial_T D_\nu(-1+i) T \quad 2.3.51$$

de esta manera

$$M(\epsilon, k_3) = C_3 C(2\eta)^2 \frac{e^{-\frac{\alpha_3}{|\epsilon|}}}{|\epsilon|} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathcal{W}_\nu((1+i)\mathcal{W}) e^{i\eta x} \partial_T D_\nu(-1+i) T \quad 2.3.52$$

Analizando la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathfrak{N} D_{\nu}((1+i)\mathfrak{N}) e^{i\tau\mathfrak{N}} \quad 2.3.53$$

notamos que resulta adecuado representar a la  $D_{\nu}((1+i)\mathfrak{N})$  en forma integral<sup>11</sup>

$$D_{\nu}((1+i)\mathfrak{N}) = \frac{e^{-\frac{\tau\mathfrak{N}^2}{2}}}{2^{\frac{-\nu+2}{2}} \Gamma(\frac{-\nu}{2})} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2\mathfrak{N}^2} s^{-\nu+1}}{(1+s^2)^{\frac{-\nu+1}{2}}} ds \quad 2.3.54$$

que al introducirlo en la anterior relación, al completar cuadrados y hacer el

cambio de variable  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' - \frac{\tau}{2(\frac{1}{2} + s^2)}$ , se obtiene

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{-\nu+1} e^{-\frac{\tau^2}{4(\frac{1}{2}+s^2)}} ds}{2^{\frac{-\nu+2}{2}} \Gamma(\frac{-\nu}{2})(1+s^2)^{\frac{-\nu+1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\frac{1}{2}+s^2)\mathfrak{N}'^2}{2}} d\mathfrak{N}' \quad 2.3.55$$

Utilizando la propiedad<sup>12</sup>

$$\int_0^{\infty} (1+2\beta x^2) e^{-\mu x^2} dx = \frac{\mu+\beta}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}, \quad [\text{Re } \mu > 0] \quad 2.3.56$$

la anterior integral se transforma en

<sup>11</sup> I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals, series and products. Academic Press (1980), p 1068

<sup>12</sup> I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals, series and products. Academic Press (1980), p 338



$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{i^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{s^{-\nu} e^{-\frac{r^2}{2(1+s^2)}} ds}{\Gamma(\frac{-\nu}{2})(1+s^2)^{\frac{-\nu+1}{2}} (\frac{1}{2}+s^2)^{\frac{1}{2}}} \quad 2.3.57$$

al realizar el cambio  $Q = \frac{1}{2(\frac{1}{2}+s^2)}$ , finalmente se llega a la integral

$$\frac{2^{\frac{\nu+1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}}}{i^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{r^2}{2}} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}Q} (1+Q)^{\frac{\nu-1}{2}}}{(1-Q)^{\frac{\nu+1}{2}}} dQ \quad 2.3.58$$

Utilizando la propiedad<sup>13</sup>

$$\int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\lambda-1} (1-\beta x)^{-\rho} e^{-\mu x} dx = B(\nu, \lambda) \Phi_1(\nu, \rho, \lambda + \nu, \beta, -\mu) \quad 2.3.59$$

$\text{Re } \lambda > 0, \quad \text{Re } \nu > 0, \quad |\arg(1-\beta)| < \pi$

el kernel (2.3.52) toma la forma

<sup>13</sup> I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. Table of integrals, series and products. Academic Press (1980), p. 321

$$M(\varepsilon, k_s) = C_3 C (2\pi)^2 \frac{e^{-\frac{\mu_3}{|E|}}}{|E|} \left( \frac{\frac{\nu}{2} \frac{1}{\pi^2}}{i^2 \Gamma(\frac{-\nu}{2})} \right) \mathcal{B}(1, \frac{-\nu}{2}) \Phi_1 \left( 1, \frac{-\nu+1}{2}, \frac{-\nu}{2} + 1, -1, \frac{iT^2}{2} \right) \tilde{\mathcal{D}}_{\nu}(-1(1+i)T)$$

2.3.60

Ahora si se hace el producto interno en (2.3.47) con el conjugado de los estados de energia negativos  $\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}^{(-)}$ , se obtiene el conjugado del anterior

$$M(-\varepsilon, k_s) = C_3 C' (2\pi)^2 \frac{e^{-\frac{\mu_3}{|E|}}}{|E|} \left( \frac{\frac{\nu}{2} \frac{1}{\pi^2}}{i^2 \Gamma(\frac{-\nu}{2})} \right) \mathcal{B}(1, \frac{-\nu}{2}) \Phi_1 \left( 1, \frac{-\nu+1}{2}, \frac{-\nu}{2} + 1, -1, \frac{iT^2}{2} \right) \tilde{\mathcal{D}}_{\nu}(-1(1+i)T)$$

2.3.61

y como se muestra, ésta no es cero. Este procedimiento es el formalismo de Bogolubov, y el kernel de la transformación representará el coeficiente beta, por lo que los vacíos cuánticos no son equivalentes.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

## CONCLUSIONES

En la primera parte de la tesis, donde se analizó el significado de aceleración uniforme en relatividad especial, obtuvimos que la interpretación es más complicada de lo que es en mecánica clásica; primeramente porque en este caso, tenemos que hacer referencia a los sistemas de reposo instantáneo y utilizar ya no las transformadas de Galileo si no las relaciones cuadvectoresiales para la velocidad, la aceleración etc., (relaciones 1.1.6-9) que no son sencillas de manejar; y por otro lado, en la ecuación de movimiento aparece un término extra (representado por una fuerza ficticia) el cual no desaparece cuando la velocidad de la partícula no es paralela a la dirección del campo y el movimiento resulta ser no rectilíneo, surgiendo así, un efecto de precesión de Thomas que tiene la misma estructura de un término de Coriolis, pero que difiere en el signo.

Al hacer el estudio del movimiento de una partícula clásica en un campo eléctrico y homogéneo, encontramos que la partícula describe en el plano  $\alpha-z$  un movimiento hiperbólico, siempre y cuando la velocidad de la partícula esté en la dirección del campo eléctrico (dirección  $z$ ).

Para el caso en que analizamos un campo gravitacional homogéneo y estático, obtuvimos dos métricas que lo representan (relaciones 1.3.17 y 1.3.18), pero en ninguna de las dos obtenemos un movimiento hiperbólico. Este resultado se obtuvo para un observador que se encuentra en reposo en el campo gravitacional homogéneo y estático. El requerimiento para que el movimiento sea hiperbólico está dado por la métrica (1.3.15) y la relación (1.4.16). Al hacer una transformación a coordenadas locales, donde el observador esté en caída libre y la partícula en reposo, éste sí observará un movimiento hiperbólico, esto es, una aceleración uniforme. Por este hecho, podemos afirmar que la aceleración en la teoría de la relatividad general no es recíproca.

Para el caso cuántico, se construyeron espacios de Fock y se usó el formalismo de Bogolubov para comparar la caracterización de los vacíos cuánticos tanto de Rindler como de Minkowski. Obtuvimos que el número de partículas de los modos de Rindler en el vacío de Minkowski contiene un término Planckiano (relación 2.2.36), y más aún, al calcular el valor de expectación de la densidad de energía (dado por  $\hat{T}_{00}$ ) en las coordenadas de Rindler obtenemos un término extra al resultado obtenido en coordenadas de

Minkowski, y que es de nueva cuenta el mismo término Planckiano. De esta forma apreciamos un efecto que se observa cuando un sistema está acelerado en el vacío de Minkowski, que es un término cuasitérmico, donde el factor  $\frac{\beta}{2\pi}$  se podría interpretar como temperatura; pero deberemos tener cuidado con esta interpretación, dado que para un sistema físico le podemos asociar una temperatura no esperamos que ésta cambie cuando se elige una dirección en particular. Esto es, la temperatura es un concepto escalar y por tanto isotrópico. Sin embargo el campo gravitacional altera al espacio-tiempo de tal suerte que éste es anisotrópico.

Para el caso eléctrico, utilizamos el mismo formalismo de Bogolubov para comparar los vacíos cuánticos de dos normas diferentes que representan al mismo campo eléctrico y homogéneo (normas 2.3.3 y 2.2.4). Nosotros utilizamos la norma que no depende del tiempo y encontramos que sus soluciones son las parabólico-cilíndricas (para la componente que es paralela a la dirección del campo). En el límite no-relativista, recuperamos la expresión clásica salvo factores de escala (ver relación 2.3.30) dado que están relacionados con la elección del nivel cero de energía relativista.

Finalmente al comparar las soluciones de la ecuación del campo cuando la norma es independiente del tiempo con las soluciones en la norma que sí depende del tiempo, encontramos que el coeficiente beta no es cero. En consecuencia, parece ser que para un mismo campo eléctrico  $\vec{E}$  podemos "preparar" de manera diferente al sistema. Así por ejemplo, los estados físicos de vacío no son únicos y la caracterización de partícula depende de la norma.

## APÉNDICE

Una transformación conforme aplicada a una métrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , puede ser descrita como

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{a.1})$$

donde  $\Omega(x)$  es una función real, finita y continua.

Por ejemplo los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci se transforman respectivamente como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Omega^{-1} \left( \delta_\mu^\rho \Omega_{,\nu} + \delta_\nu^\rho \Omega_{,\mu} - g_{\mu\sigma} g^{\sigma\rho} \Omega_{,\alpha} \right) \quad (\text{a.2})$$

$$R_\mu^\nu \rightarrow \bar{R}_\mu^\nu = \Omega^{-2} R_\mu^\nu - (n-2) \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{,\mu\nu} g^{\mu\nu} + (n-2)^{-1} \Omega^{-1} (\Omega^{-2})_{,\nu\sigma} g^{\sigma\nu} \delta_\mu^\sigma \quad (\text{a.3})$$

$$R \rightarrow \bar{R} = \Omega^{-2} R + 2(n-1) \Omega^{-3} \Omega_{,\mu\nu} g^{\mu\nu} + (n-1)(n-4) \Omega^{-4} \Omega_{,\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \quad (\text{a.4})$$

Ahora, nos podemos preguntar como será la nueva forma que tomará la ecuación de campo (2.1.5), obteniendo

$$\left[ -\square + \frac{1}{4}(n-2) \frac{R}{(n-1)} \right] \phi \rightarrow \left[ \bar{\square} + \frac{1}{4}(n-2) \frac{\bar{R}}{(n-1)} \right] \bar{\phi} = \Omega^{-\frac{(n+2)}{2}} \left[ \square + \frac{1}{4}(n-2) \frac{R}{(n-1)} \right] \phi \quad (\text{a.5})$$

donde  $\square \phi$  está definido por (2.1.4), y haciendo la siguiente identificación

$$\bar{\phi}(x) \equiv \Omega^{\frac{(2-n)}{2}}(x) \phi(x) \quad (\text{a.6})$$

podremos factorizar  $\Omega^{-\frac{(n+2)}{2}}$  en la ecuación (a.5) para que salga como factor común, a partir de esta última ecuación y la identidad (a.6) podemos darnos cuenta que una *transformación conforme* es, solo un cambio de escala ( la  $\Omega(x)$  me representaría el factor de escala ) y notemos que si  $m \neq 0$ ; entonces tendríamos un factor extra en la ecuación (a.5) que no podríamos factorizar, de tal manera que la masa me fija una escala. En teoría de campos, será invariante ante transformaciones de escala (*conformes*) cuando nuestro problema no tenga ninguna escala privilegiada ( $m = 0$ ).

Un ejemplo de la utilidad de las *transformaciones conformes* son los diagramas de Penrose, en donde, la representación esquemática de la estructura del espacio-tiempo que en ciertos casos es imposible representarlos ( por sus límites en  $-\infty$  e  $\infty$ ), y mediante una *transformación conforme*, podemos compactar el espacio-tiempo, de tal forma que podemos representarlo como un diagrama finito y compacto.

Consideremos el espacio de Minkowski de dos dimensiones, con la métrica

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \quad (\text{a.7})$$

como generalmente trabajamos con coordenadas nulas,  $u, v$  definidas por

$$\begin{aligned} u &= t - x \\ v &= t + x \end{aligned} \quad (\text{a.8})$$

de esta manera, la métrica se transforma como

$$ds^2 = dudv \quad (\text{a.9})$$

tal que

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.10})$$

aquí podemos notar que la región que me representa la métrica (a.9) es de  $(-\infty, \infty)$ . Si hacemos la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} u' &= 2 \tan^{-1} u \\ v' &= 2 \tan^{-1} v \end{aligned} \quad (\text{a.11})$$

observamos que

$$-\pi \leq u', v' \leq \pi \quad (\text{a.12})$$

de tal forma que nuestros límites han sido "compactados" en una región finita. La métrica (a.9) toma la forma

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sec^2 \frac{1}{2} u' \sec^2 \frac{1}{2} v' du' dv' \quad (\text{a.13})$$

en la que

$$g_{\mu\nu}(u', v') = \frac{1}{8} \sec^2 \frac{1}{2} u' \sec^2 \frac{1}{2} v' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.14})$$

si se hace la siguiente identificación

$$\Omega^2(x) = \left( \frac{1}{4} \sec^2 \frac{1}{2} u' \sec^2 \frac{1}{2} v' \right)^{-1} \quad (\text{a.15})$$

se tiene

$$g_{\mu\nu}(u', v') \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(u', v') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.16})$$

de tal forma que el elemento de línea lo podemos poner como

$$d\bar{s}^2 = du'dv' \quad (a.17)$$

de esta manera, la transformación (a.11) es una transformación conforme.

Esquemáticamente tendríamos (ver figura 6)

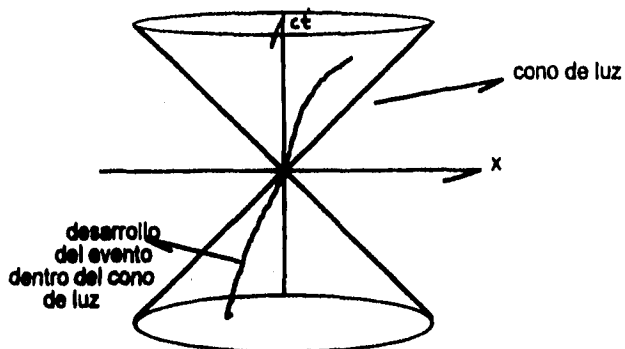


Figura 6

que me representaría a la métrica asociada con (a.7).

La métrica (a.17) tendría la siguiente representación en un diagrama de Penrose (ver la figura 7)

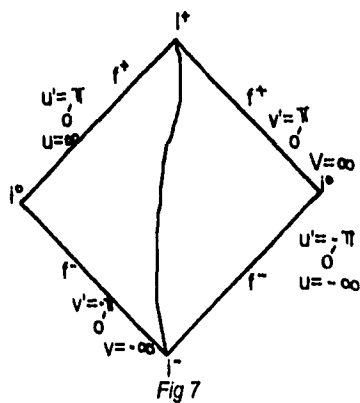


Fig 7



Observemos que  $f^-$  y  $f^+$  representan los vértices del cono de luz (ver fig 6) en la región negativa y  $f^+$  en la región positiva, la inclinación de los ejes es de  $45^\circ$  (que es el que tiene el cono de luz), y la línea que cruza de  $i^-$  a  $i^+$  es la trayectoria de la partícula de un pasado infinito a un futuro infinito. Cabe mencionar que la inclinación de esta trayectoria debe ser menor que  $45^\circ$ , lo que indicaría que esta dentro del cono de luz.

Como observamos esta es una representación compacta del espacio-tiempo que anteriormente no podíamos visualizar.

Observemos que  $f^-$  e  $i^-$  representan los vértices del cono de luz (ver *fig 6*) en la región negativa y  $f^+$  e  $i^+$  en la región positiva, la inclinación de los ejes es de  $45^\circ$  (que es el que tiene el cono de luz), y la línea que cruza de  $i^-$  a  $i^+$  es la trayectoria de la partícula de un pasado infinito a un futuro infinito. Cabe mencionar que la inclinación de esta trayectoria debe ser menor que  $45^\circ$ , lo que indicaría que esta dentro del cono de luz.

Como observamos esta es una representación compacta del espacio-tiempo que anteriormente no podíamos visualizar.