

011 ~~68~~
2

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

TESIS QUE PRESENTA
ING. ABEL CAMACHO GALVAN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

para obtener el grado de

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CREDITOS ASIGNADOS A LA TESIS 11

JURADO:

M. EN. I. FRANCISCO JAVIER GAUFFRÉD M.

DR. JORGE DIAZ PADILLA

DR. JESUS ACOSTA FLORES

M. EN. I. SERVIO TULLIO GUILLEN

M. EN. I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

SUBJEFE DE AREA

DR. JOSE J. ACOSTA FLORES

JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE
INGENIERIA

DR. PEDRO MARTINEZ PEREDA

C. U., México, D. F.,

2002



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UN MÉTODO EMPLEADO PARA EVALUAR EL COSTO DE PREDIOS URBANOS ATENDIENDO
A SU CONFIGURACION.

Abel Camacho Galván

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

INDICE

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
2. FUNCION DE UTILIDAD	2
2.1 Teoremas y definiciones	2
2.2 Función de utilidad con múltiples atributos	9
3. ESTRUCTURACION DEL MODELO	12
3.1 Consideraciones generales	12
3.2 Determinación de los principales parámetros	13
3.3 Factores de profundidad y de desviación	16
3.4 Factor de frenter relativo	20
3.5 Factor de frente	23
3.6 Análisis de la varianza	24
4. EVALUACION DE LOS PARAMETROS	30
4.1 Factores de deformación y profundidad	30
4.2 Factores de frente relativo y de frente	34
4.3 Conclusiones	37
APENDICE 1 (TEOREMAS DEL CAPITULO 2)	42
APENDICE 2 (PROGRAMA TOPO/NIMIA)	64
APENDICE 3 TABLAS DEL APENDICE 3 (RESULTADOS DE LOS EXPERIMENTOS)	81
DIBUJOS	86
APARTADO 3.A(ANALISIS DE LA VARIANZA)	108
APENDICE 4	112
APARTADO 4.A	113
4.A.1 Fórmulas empleadas para evaluar a f_1 y f_2	113
4.A.2 Evaluación de las constantes a_1 , b_1 , c_1 y d_1	115
4.A.3 Evaluación de las constantes a_2 , b_2 , c_2 y d_2	119
4.A.4 Segunda evaluación de las constantes a_2 , b_2 , c_2 y d_2	121
APARTADO 4B	125
4.B.1 Evaluación de las constantes e_1 y f_1	125
APARTADO 4C	127
4.C.1 Fórmulas empleadas para evaluar a las constantes e_2 , f_2 y g	127
4.C.2 Evaluación de las constantes e_2 , f_2 y g	130
APENDICE 4 TABLAS DEL APENDICE 4	133
REFERENCIAS	148

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Al evaluar el costo de un terreno generalmente se consideran factores tales como su superficie, la longitud del frente y su profundidad y por medio de ellos se pretende determinar el valor del mismo con objeto de compra venta o avalúo catastral. Como es fácil comprobar generalmente estos métodos son poco precisos cuando tratan de reflejar el modo como influye la forma del terreno sobre un precio y desde luego en la gran mayoría de los casos los resultados se encuentran afectados por los intereses de alguna de las partes o en la mejor de las situaciones por otros factores de tipo subjetivo, los cuales pocas veces se muestran de manera patente, incluso al mismo valuador. El presente trabajo intenta determinar y cuantificar los principales parámetros que generalmente se considerarn al analizar la geometría de un cierto predio, con objeto de avalúo, bajo las siguientes condiciones:

- a) Los parámetros de determinarán y cuantificarán para que reflejen los criterios expuestos por expertos valuadores.
- b) El método que se obtenga para determinar el valor de un predio, atendiendo a su configuración, deberá estar hasta donde sea posible, libre de interpetaciones subjetivas.

La razón para incluir el primer punto es obvia y afortunadamente se pudo contar con el apoyo dado por valuadores del Departamento del Distrito Federal para efectuar experimentos, los cuales serán considerados en el curso de la presente exposición; la segunda condición se incluye con el propósito de obtener idénticos resultados para un mismo avalúo, sin importar cual o cuales personas analizan dicho problema. Es claro que esta condición determina un cierto principio de justicia al establecer criterios objetivos al respecto, más aún, adelantamos que las técnicas empleadas para cuantificar los parámetros en cuestión podrán, de considerarse convenientemente, ser implementadas en computadoras, lo cual no solo garantiza el disfrute de las ventajas que ofrece el manejo automatizado de datos, sino que además garantiza una cierta uniformidad en los criterios propuestos.

2. FUNCION DE UTILIDAD

2.1 TEOREMAS Y DEFINICIONES

Ya hemos expuesto nuestro propósito de determinar ciertos parámetros, los cuales nos servirán para conocer la influencia de la forma de un terreno sobre su costo; y para cuantificarlos usaremos una función de utilidad, es decir, por medio de ella mediremos a estos parámetros según las opiniones de expertos valuadores, expresados a través de experimentos. Por esta razón analizaremos en primer lugar los fundamentos básicos de la teoría de la utilidad y pasaremos a continuación a considerar a la función de utilidad de modo tal que nos resulte apta en nuestro caso concreto de aplicación.

Para estructurar adecuadamente a la función de utilidad, será necesario analizar algunas de las principales propiedades de ciertas relaciones binarias, las cuales emplearemos muy a menudo en la presente disertación y aprovecharemos aquí la oportunidad para aclarar que en nuestras demostraciones usaremos algunas veces la técnica conocida como Deducción Natural o Niveles Hipotéticos y en otras ocasiones cuando consideremos que en beneficio de la brevedad sea necesario sacrificar algo de rigor, usaremos los métodos informales de deducción. Algunas de las demostraciones se presentan en el texto de la presente sección, las demostraciones restantes se incluyen en el apéndice 1, así como una breve exposición de las reglas de inferencia empleadas.

Definición 2.1

Diremos que una relación binaria R en un conjunto Y es

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) reflexiva si | $\forall (x) (xRx)$ |
| b) irreflexiva si | $\forall (x) (\sim xRx)$ |
| c) simétrica si | $\forall (x) \forall (y) (xRy \Rightarrow yRx)$ |
| d) asimétrica si | $\forall (x) \forall (y) (xRy \Rightarrow \sim yRx)$ |
| e) antisimétrica si | $\forall (x) \forall (y) (xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y)$ |
| f) transitiva si | $\forall (x) \forall (y) \forall (z) (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$ |
| g) negativamente transitiva si | $\forall (x) \forall (y) \forall (z) (\sim xRy \wedge \sim yRz \Rightarrow \sim xRz)$ |
| h) completa o conectada si | $\forall (x) \forall (y) (xRy \vee yRx)$ |
| i) débilmente conectada si | $\forall (x) \forall (y) (x=y \Rightarrow (xRy \vee yRx))$ |

Lema 1

Si una relación binaria R en un conjunto Y es asimétrica, entonces es irreflexiva.

Demostración:

1	$\forall(x) \forall(y) (xRy \Rightarrow \sim yRx)$	H
2	$xRx \Rightarrow \sim xRx$	1, $\forall o$
3	xRx	H
4	$xRx \Rightarrow \sim xRx$	2, rep
5	$\sim xRx$	3, 4, Co
6	$\sim xRx$	3, 5, Ni
7	$\forall(x) (\sim xRx)$	6, $\forall i$
8	$\forall(x) \forall(y) (xRy \Rightarrow yRx) \Rightarrow \forall(x) (\sim xRx)$	1-7, Ci

Lema 2

Si una relación binaria R en un conjunto Y es irreflexiva y transitiva, entonces es asimétrica.

Demostración:

1	$\forall(x) (\sim xRx)$	H
2	$\forall(x) \forall(y) \forall(z) (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$	H
3	xRy	H
4	yRx	H
5	$xRy \wedge yRx \Rightarrow xRx$	2, $\forall o$
6	xRy	3, rep
7	$xRy \wedge yRx$	4, 6, Ki
8	xRx	5, 7, Co
9	$\sim xRx$	1, $\forall o$
10	$\sim yRx$	4, 8, 9, Ni
11	$xRy \Rightarrow \sim yRx$	3-10, Ci
12	$\forall(x) \forall(y) (xRy \Rightarrow \sim yRx)$	11, Ai
13	$\forall(x) \forall(\sim xRx) \wedge (\forall(x) \forall(y) \forall(z) (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)) \Rightarrow \forall(x) \forall(y) (xRy \Rightarrow \sim yRx)$	1-12 Ci

Puesto que el siguiente lema será empleado en un gran número de posteriores demostraciones, será conveniente tenerlo siempre en mente.

Lema 3

Una relación binaria R en un conjunto Y es negativamente transitiva si y solo si para toda x, y, z en Y se tiene que $xRy \Rightarrow (xRz \vee zRy)$. La demostración de este lema, así como las siguientes se presentan en el apéndice 1.

A continuación pasaremos a establecer tres tipos de relaciones especiales las cuales nos auxiliarán en la elaboración de una teoría acerca de las preferencias.

Definición 2.2

Una relación binaria R en un conjunto Y es

- a) Una orden débil si R es asimétrica y negativamente transitiva
- b) Un orden estricto si R es una orden débil y además es débilmente conectada
- c) Una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Como es bien sabido una relación de equivalencia en un conjunto Y determina una partición en dicho conjunto y recíprocamente, una partición en un conjunto dado define una relación de equivalencia en el mismo. Así pues a dichas clases de equivalencia las denotaremos de la siguiente forma:

$$R(x) = \{ y : y \in Y \wedge yRx \}$$

es decir, si R es una relación de equivalencia, entonces $R(x)$ será la clase de equivalencia generada por el elemento x y el conjunto de todas estas clases será denotado por Y/R .

Como ya lo hemos mencionado nos proponemos estudiar a las preferencias y para ello haremos uso de la relación $<$ la cual en el contexto $x < y$ la in-

interpretaremos diciendo que x es menos preferida que y o bien que y es preferida a x . Nuestra notación se simplificará bastante si hacemos uso de la siguiente definición y por añadidura estaremos mejor preparados para manejar los conceptos de indiferencia y preferencia-indiferencia.

Definición 2.3

- a) $x \sim y$ si y solo si $(\sim x < y \wedge \sim y < x)$
 b) $x < y$ si y solo si $(x < y \vee x \sim y)$

El teorema que se enuncia a continuación nos permite caracterizar a las relaciones de acuerdo con algunas de sus principales propiedades.

Teorema 2.1

Sea $<$ en X un orden débil, entonces se tiene que

- a) para toda x, y en X rige una y solo una de las siguientes proposiciones $x < y$ o' $y < x$ o' $x \sim y$
 b) $<$ es una relación transitiva
 c) \sim es una relación de equivalencia
 d) $(x < y \wedge y \sim z) \Rightarrow x < z$
 $(x \sim y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$
 e) \leq es una relación transitiva y conectada
 f) con $<'$ en X/\sim definida por $a <' b$ si y solo si $x < y$ para alguna $x \in a$ y $y \in b$, entonces $<'$ en X/\sim es un orden estricto.

Nuestro siguiente teorema nos garantiza la existencia de una función u valorada en los reales la cual preserva el orden débil establecido entre un conjunto de alternativas.

Teorema 2.2

Sea la relación binaria $<$ un orden débil en X y sea el conjunto X/\sim un conjunto contable, entonces existe en X una función $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ para toda $x, y \in X$.

Definición 2.4

Diremos que una relación binaria R en un conjunto Y es un orden parcial estricto si es irreflexiva y transitiva.

Como es fácil de observar si la relación binaria es un orden parcial estricto se puede tener que $x \sim y$, $y \sim z$ y sin embargo tenerse que $x < z$, es decir la relación no es necesariamente transitiva y de aquí que por supuesto no sea la indiferencia una relación de equivalencia. Por esta razón ofreceremos la siguiente definición

$$x \sim y \iff \forall (z) (x < z \iff y < z) \quad (1.1)$$

la cual es ya una relación transitiva cuando la relación binaria $<$ es un orden parcial estricto.

Por comparación con el teorema 2.1 tenemos el siguiente:

Teorema 2.3

Sea $<$ en X un orden parcial estricto, entonces se tiene que

a) para toda x, y en X rige una y solo una de las siguientes proposiciones

$$x < y \text{ ó } y < x \text{ ó } x \sim y \text{ ó } x \sim y \text{ pero } \neg x \sim y$$

b) \sim es una relación de equivalencia

$$c) x \sim y \iff \forall (z) (x < z \iff y < z \wedge z < x \iff z < y)$$

$$d) (x < y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x < z) \\ (x \sim y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z)$$

e) con $<^*$ en X/\sim definida por $a <^* b$ si y solo si $x < y$ para alguna $x \in a$ y $y \in b$, entonces $<^*$ en X/\sim es un orden parcial estricto.

El siguiente teorema debido a Szpiirajn nos servirá para garantizar la existencia de una función de utilidad cuando la relación binaria sea un

orden parcial estricto y el conjunto X/\sim sea un conjunto contable.

Teorema 2.4

Sea $<^*$ un orden parcial estricto en un conjunto Y , entonces existe un orden estricto $<^\circ$ en Y tal que $\forall(x)\forall(y) (x<^*y \Rightarrow x<^\circ y)$.

Cuando la relación binaria $<$ sea irreflexiva y transitiva y la clase X/\sim sea un conjunto contable, entonces se asegura, de acuerdo con el teorema que se enuncia a continuación que números reales se pueden asignar a los elementos de X de modo tal que se preserven las relaciones $<$ y \sim . Sin embargo puesto que la relación \sim puede no ser transitiva no se garantizará que $u(x)=u(y)$ cuando $x\sim y$ y no se dé el caso de ser $\sim Y$.

Teorema 2.5

Sea la relación binaria $<$ un orden parcial estricto en X y sea el conjunto X/\sim un conjunto contable, entonces existe en X una función $u:X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda x, y en X ,

$$x < y \Rightarrow u(x) < u(y)$$

$$x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$$

Hasta aquí hemos garantizado la existencia de una función de utilidad cuando el conjunto X/\sim ó bien el conjunto X/\sim es contable, vamos ahora a extender estos conceptos con el propósito de ampliar la teoría hasta incluir el caso de tener conjuntos no-contables, para ello introduciremos antes un nuevo concepto según la siguiente definición.

Definición 2.5

Sea R una relación binaria en un conjunto Y , entonces el conjunto $Z \subset Y$ es de orden denso en Y respecto a R si y solo si siempre que xRy y $x \notin Z$ están en Y pero no en Z , existe una z en Z tal que xRz y zRy .

Pasemos ahora a extender el Teorema 2.2 hasta cubrir el caso cuando el conjunto X/\sim no sea contable.

Teorema 2.6

Existe una función u en X valuada en los reales tal que $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ para toda x, y en X si y solo si la relación $<$ en X es un orden débil y además existe un subconjunto contable de X/\sim tal que la relación $<'$ sea de orden denso en X/\sim .

En forma análoga proporcionaremos una generalización del teorema 2.5

Teorema 2.7

Sea $<$ un orden parcial estricto en X y supóngase que existe un subconjunto contable de X/\sim tal que la relación $<*$ sea de orden denso en X/\sim , entonces existe una función u en X valuada en los reales tal que

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow u(x) < u(y) && \text{para toda } x, y \text{ en } X \\ x \sim y &\Rightarrow u(x) = u(y) && \text{para toda } x, y \text{ en } X \end{aligned}$$

La demostración de este teorema se debe a Richter (1966).

Desde un punto de vista teórico no existe diferencia entre una función de utilidad unidimensional y una función de utilidad multidimensional, sin embargo en este último caso, para efectos de medición, se suelen presentar dificultades debido a que cada atributo tiene características diferentes y por lo general es indispensable efectuar un gran número de mediciones.

Definición 2.6

Sean $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} < \bar{y} &\Leftrightarrow \bar{x} \neq \bar{y} \text{ y } x_i < y_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \\ \bar{x} < \bar{y} &\Leftrightarrow x_i < y_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

2.2 FUNCION DE UTILIDAD CON MULTIPLES ATRIBUTOS

Se tiene también el siguiente teorema el cual nos permite garantizar la existencia de una función de utilidad para el caso de tenerse múltiples atributos.

Teorema 2.8

Sea $X \subseteq R^n$, luego si $<$ es un orden parcial estricto en X ,

$$((\bar{x} < \bar{y} \wedge \bar{y} < \bar{z}) \vee (\bar{x} < \bar{y} \wedge \bar{y} \wedge < \bar{z})) \Rightarrow \bar{x} < \bar{z}$$

y

$$\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow \bar{z} < \bar{y}$$

para alguna $\bar{z} \in R^n$ tal que $\bar{x} < \bar{z}$, entonces existe una función u en X valuada en R tal que

$$\bar{x} < \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) < u(\bar{y})$$

para toda $\bar{x}, \bar{y} \in X$

Sea $\bar{x} \in R^n$ y expresemosla de la siguiente manera

$$\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z})$$

donde

$$\bar{y} = (x_1, \dots, x_s) \text{ y } \bar{z} = (x_{s+1}, \dots, x_n)$$

esto es \bar{y} representa un subconjunto especificado de componentes de \bar{x} y \bar{z} su complemento respecto a \bar{x} ; esta consideración nos resulta adecuada para expresar la siguiente definición

Definición 2. 7

Diremos que \bar{y}' es condicionalmente preferido ó indiferente a \bar{y}'' dado \bar{z}' si y solo si

$$(\bar{y}'', \bar{z}') \leq (\bar{y}', \bar{z}'),$$

Muy bien puede suceder que un decisor considere que ciertos atributos en consideración no tengan influencia sobre el resto de ellos, es decir, se puede dar el caso que sean independientes entre si, en este caso diremos que se tiene independencia preferencial entre factores y formalmente tenemos la siguiente

Definición 2. 8

Sean $Y \subseteq X$ y $Z=X-Y$, entonces Y es preferencialmente independiente de Z si y solo si para alguna $\bar{z}' \in Z$

$$((\bar{y}'', \bar{z}') \leq (\bar{y}', \bar{z}')) \Rightarrow ((\bar{y}'', \bar{z}) \leq (\bar{y}', \bar{z}')),$$

para toda $\bar{z}, \bar{y}', \bar{y}''$

Si $Y \subseteq X$ es preferencialmente independiente de su complemento Z y reciprocamente, entonces las estructuras preferenciales podrán ser consideradas aisladamente, lo cual redundará generalmente en ahorro de cálculos, cuando este sea el caso, si los argumentos de las funciones v , v_y , v_z son respectivamente (\bar{y}, \bar{z}) , \bar{y} y \bar{z} , entonces se tendrá que

$$v(\bar{y}, \bar{z}) = f(v_y(\bar{y}), v_z(\bar{z}))$$

o sea, se podrá estructurar la preferencia de \bar{y} aisladamente de \bar{z} y reciprocamente, en otras palabras, dada \bar{z}' se tendrá

$$(\bar{y}'', \bar{z}') \leq (\bar{y}', \bar{z}') \Leftrightarrow v_y(\bar{y}'') \leq v_y(\bar{y}').$$

Si el conjunto Y es preferencialmente independiente de su complemento Z

en X la expresión $\bar{y}'' \leq \bar{y}'$ nos indicará que $(\bar{y}'', \bar{z}) \leq (\bar{y}', z)$ para toda $\bar{z} \in Z$ y en forma análoga la expresión $\bar{y}'' \sim \bar{y}'$ nos indicará que $(\bar{y}'', \bar{z}) \sim (\bar{y}', \bar{z})$. Como se verá más adelante, para nuestro caso concreto de aplicación tendremos una función de utilidad con independencia entre factores de la forma

$$u(\bar{x}) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \cdot u_3(x_3) \cdot u_4(x_4),$$

siendo $\bar{x} \in R^4$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3. ESTRUCTURACION DEL MODELO

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Una vez establecidas las condiciones requeridas para garantizar la existencia de una función de utilidad pasaremos a estructurar nuestro modelo de modo tal, como ya se dijo, que refleje los criterios empleados por los peritos valuadores para determinar el costo de un terreno atendiendo a su configuración. Desde luego que en este punto son múltiples las alternativas que se presentan y los caminos a seguir pueden ser bastante disímilos y si consideramos el hecho de que aún distintos valuadores pueden tener distintos criterios acerca del modo de calificar a un mismo tipo de terrenos nos percataremos de las dificultades a las cuales nos enfrentaremos. Así pues bajo estas consideraciones intentaremos presentar un modelo el cual a la vez que preserve las condiciones de racionalidad necesarias para la existencia de la función de utilidad nos permita enfocar el problema con relativa sencillez y cuyos supuestos sean lo suficientemente razonables como para garantizarnos un mínimo de objetividad.

Dado que los terrenos pueden tener un número infinito de configuraciones distintas, entonces es claro que tratar de clasificarlas específicamente con objeto de determinar la manera como dicha configuración afecta al costo del terreno puede desembocar en un método bastante diversificado y por lo tanto poco práctico y útil para nuestros fines, por esta razón creemos que es preferible enfocar el problema analizando la forma a través de ciertas características inherentes a ella tales como la magnitud de ángulos formados por lados adyacentes o bien por medio de características susceptibles de ser captadas indirectamente por figuras geométricas auxiliares tipificadas de antemano, tales como cuadrados rectángulos o trapecios inscritos o circunscritos al terreno en cuestión. Aún cuando reconocemos que el estudio directo

de parámetros puede conducir indudablemente a resultados prometedores, en nuestro caso hemos optado por la segunda alternativa, es decir, intentaremos determinar indirectamente el modo como afecta la forma de un terreno a su costo valiendonos de figuras geométricas auxiliares. Restringiremos nuestro análisis exclusivamente a lotes urbanos de dimensiones estándar y como indudablemente la influencia de la forma sobre su costo se encuentra estrechamente relacionada a los posibles fines o usos que se le dé al lote en cuestión, supondremos que será empleado para la construcción de casas habitación.

3.2 DETERMINACION DE LOS PRINCIPALES PARAMETROS

Una vez establecidas estas consideraciones generales intentaremos encontrar un algoritmo que nos permita presentar la formulación matemática de una función de utilidad para determinar para un cierto predio la influencia de su configuración en su precio. Para tal efecto se solicitó a un grupo de peritos valuadores del Departamento del Distrito Federal que a varios tipos de terrenos les asignaran valores suponiendo que todos ellos se encontraban ubicados en las mismas condiciones, es decir, se encontraban situados en la misma colonia, misma calle, teniendo la misma orientación y un solo frente hacia la banqueta, colindando el resto del terreno con otros predios; aclaramos que los diferentes tipos de terrenos sujetos a experimentación no fueron seleccionados arbitrariamente sino que fueron elegidos de acuerdo con las formas que con mayor frecuencia se suelen presentar en nuestro medio y se supuso, para todos los casos, que la superficie de los mismos era de 300 metros cuadrados. En estos experimentos se encontró que los valuadores asignaron el máximo precio a un terreno de forma rectangular de 15 metros de frente por 20 metros de fondo; a un rectángulo proporcionado de esta manera se le suele llamar "Rectángulo Dorado" y nosotros por razones de comodidad también así lo denotaremos. Así pues de acuerdo con los experimentos cualquier desviación respecto a este Rectángulo Dorado redundó en una depreciación del predio; nuestra tarea consistirá precisamente en tratar de cuantificar dicha depreciación. Para ello consideraremos al terreno formado por bandas consec-

tivas paralelas a su frente de ancho constante h , excepto tal vez la última franja correspondiente al fondo del terreno la cual puede desde luego tener un ancho menor que el considerado para el resto de las bandas y esto ocurrirá si la dimensión de la profundidad del terreno no es un múltiplo de h ; a continuación tomando los lados de estas bandas como bases de trapecios construimos para cada banda el mayor trapecio que sea posible inscribir en el terreno, teniendo así ahora una serie de trapecios; todos estos trapecios constituyen nuestra área de trapecios con la cual trabajaremos y los numeraremos progresivamente del frente hacia el fondo empezando con el número 1 y así tendremos que el valor total del terreno será igual a la suma de los valores de cada uno de los trapecios. Desde luego reconocemos que por lo general el área de trapecios será menor que el área real pero la diferencia desde luego no será tan grande como para afectar sensiblemente el resultado de nuestras evaluaciones.

Como es de suponerse la función de utilidad deberá ser expresada en términos de varios parámetros, pues es obvio que para cada uno de los trapecios se pueden encontrar distintos aspectos que los afecten en cuanto a su costo y aquí no tan solo deberemos considerar la situación de los trapecios aisladamente sino que también se deberá considerar la forma como son afectados por el resto del área de los trapecios o como pueden ser afectados por la misma.

Aclaremos que los factores que se presentan a continuación se encontraron por medio de un proceso de búsqueda, tanteo y ensayo y después fueron co-tejados en una primera aproximación gracias a los experimentos realizados; en el Apéndice 2 se presentan tan solo unos cuantos de los muchos casos analizados con la computadora del C.S.C. de la U.N.A.M. Bajo estas consideraciones y después de varias tentativas se eligió la altura del trapecio denotada con la letra " h " para que fuese de 4.00 metros, dimensión que en promedio resulta adecuada para la edificación de cuartos habitación, pues estos genralmente se erigen en bandas paralelas al frente. Ahora bien, equipados ya con nuestros trapecios auxiliares trataremos de determinar aquellos índices los cuales reflejan las potencialidades constructivas del predio.

Es desde luego razonable suponer que la profundidad del predio influye en su costo, por esta razón a cada trapecio le asignaremos un factor el cual será llamado Factor de Profundidad y que expresaremos en términos del número del trapecio i , pues este número ordinal también nos indica las distancias que existen entre el frente del predio y la base del trapecio en cuestión.

Es sensato suponer también que existe un ancho ideal para cada trapecio, este ancho ideal será desde luego el ancho del Rectángulo Dorado, por esta causa, asociado a cada trapecio consideraremos el Factor de Deformación, expresado éste en términos de la longitud de la base del trapecio y el cual los deberá penalizar de acuerdo con su desviación del ancho ideal.

Si la unión de dos trapecios consecutivos es defectuosa, en el sentido de que no favorece los requerimientos de continuidad en la construcción o bien propicia el desperdicio de terreno, entonces obviamente se tendrá una depreciación; el Factor de Frente Relativo intentará cuantificar este concepto.

Por último estimaremos la influencia que ejerce el frente del terreno sobre las potencialidades constructivas de un trapecio dado, para evaluarlos emplearemos el Factor de Frente.

En resumen, mediante la determinación de los siguientes índices evaluaremos el modo como la forma de un predio afecta a su costo:

- Factor de Profundidad
- Factor de Deformación
- Factor de Frente Relativo
- Factor de Frente

y serán designados en los sucesivo respectivamente como los símbolos f_1 , f_2 , f_3 , f_4 .

Los cálculos numéricos se simplifican notablemente si se determinan en primer lugar los Factores de Profundidad y de Deformación y posteriormente se pasa a evaluar los Factores de Frente Relativo y de Frente; esto se puede lograr

analizando terrenos los cuales no sean depreciados por f_3 y f_4 , es decir, aislando los efectos debidos a los Factores de Profundidad y Deformación. Una vez cubierta esta etapa se pasará a determinar el Factor de Frente Relativo pero no el Factor de Frente y por último se considerarán tipos de terrenos adecuados para distinguir el factor f_4 .

3.3 FACTORES DE PROFUNDIDAD Y DE DESVIACION

Como su nombre lo indica el Factor denominado de Profundidad intenta determinar la depreciación de un terreno atendiendo exclusivamente a su desviación respecto a la profundidad ideal caracterizada por el Rectángulo Dorado, mientras que el Factor de Desviación pretende determinar la depreciación atendiendo exclusivamente a su ancho, cuantificándose este por bandas en relación al ancho ideal caracterizado también por el Rectángulo Dorado, como en nuestros experimentos se consideraron únicamente terrenos con una superficie de 300 metros cuadrados, es claro que estos factores no pudieron ser visualizados independientemente uno del otro, pues a menor profundidad se tiene necesariamente un ancho mayor y reciprocamente. Pero esta limitación no indica necesariamente que uno de estos factores se deba expresar en función del otro; para ver que esto no sucede bastó analizar terrenos en los cuales unos cuantos de sus trapecios fueron o bien demasiado angostos, formando así cuellos de botella, o bien demasiado anchos en comparación con el ancho del resto de los trapecios.

Aún cuando se penaliza al terreno por su desviación respecto a la longitud ideal es necesario tener en cuenta si es por defecto o por exceso, pues de hecho como se demostrará más adelante existen diferencias significativas entre estos dos casos; así pues consideraremos al respecto el siguiente par de situaciones:

- a) La profundidad del terreno es igual o menor a los 20 metros
- b) La profundidad del terreno es mayor a los 20 metros

Como era de esperarse los resultados preliminares, algunos de cuyos casos se

Presentan en el Apéndice 2, mostraron que a medida que la profundidad crece acercándose inferiormente a los veinte metros, la utilidad también aumenta siguiendo una disposición muy cercana a la lineal y que a medida que la profundidad disminuye acercándose superiormente a los veinte metros, también la utilidad aumenta siguiendo una ley casi lineal, por esta causa procuraremos determinar a este factor f_1 considerándolo como una función seccionalmente suave expresable en términos de la profundidad. Por comodidad este factor será evaluado para efectos de aplicación únicamente para números enteros $n \geq 1$ donde n es el número de trapecio, pero no debemos olvidar que se trata de una función formada por dos semirectas con vértice común en $n=5$, pues para este valor de n se tiene una profundidad de 20 metros.

Como ya se mencionó el Factor de Deformación f_2 intenta penalizar al terreno de acuerdo con su desviación respecto al ancho ideal de 15 metros, es decir respecto al ancho del Rectángulo Dorado y por lo tanto será expresado en función de l_i donde l_i es la dimensión de la base de i -ésimo trapecio y es por supuesto, considerada como una función continua de dicho argumento. Aquí como en el caso del parámetro f_1 los resultados preliminares mostraron que a este Factor de Deformación era posible expresarlo muy aproximadamente por medio de una función que crecía linealmente a medida que l_i se acercaba inferiormente al ancho ideal de 15 metros y decrecía también linealmente a medida que l_i toma valores mayores a los 15 metros, o sea, f_2 será expresado como una función seccionalmente suave formada por dos semirectas con vértice común en $l_i=15$.

Para la determinación de los factores f_1 y f_2 procederemos a analizar los trapecios constitutivos del área virtual procediendo secuencialmente del frente del terreno hacia la parte posterior del mismo, y puesto que tanto f_1 como f_2 denotan las depreciaciones debidas a las desviaciones respecto al largo y ancho ideales de un cierto predio, es de esperarse que sus efectos se superpongan, es decir la función de utilidad deberá ser expresada multiplicativamente en términos de f_1 y f_2 , así si C es el precio unitario del terreno en la zona estudiada y A_i^j es la superficie del trapecio número i correspondiente al terreno tipo j , el costo del trapecio será

$$c f_1(i) f_2(l_i) A_i^j \quad (3.1)$$

y si el terreno en cuestión tiene un total n_j trapecios su costo será

$$c \sum_{i=1}^{n_j} f_1(i) f_2(l_i) A_i^j \quad (3.2)$$

Ya se ha mencionado que para realizar el presente trabajo se tomaron en cuenta los resultados de varios experimentos, los cuales se describirán con detalle en la siguiente sección, interesándonos por lo pronto señalar que por consideraciones prácticas y de comodidad, para facilitar el entendimiento con los peritos valuadores todos los terrenos sometidos a experimentación tuvieron una superficie real constante a la cual consideraremos por lo pronto de A metros cuadrados y así planteados los experimentos fué fácil observar que multiplicando a la expresión (3.2) por el factor $\frac{1000}{A \cdot C}$

metros de frente por 20 metros de fondo un costo total de 1,000 unidades monetarias; es claro que esta consideración facilitó tanto el trabajo como la interacción con los peritos valuadores para poder caracterizar adecuadamente a la función de utilidad. Por estas razones estableceremos la siguiente transformación

$$f_1^i(i) = \frac{1000}{A \cdot C} f_1(i) \quad (3.3)$$

de manera que al multiplicar (3.2) por $\frac{1000}{A \cdot C}$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(l_i) A_i^j \quad (3.4)$$

Si el perito valuator k estima el precio del terreno tipo j en p_{kj} unidades monetarias luego

$$c \sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(l_i) A_i^j - p_{kj} \quad (3.5)$$

nos expresará la diferencia entre el costo calculado y el dado por el valuator, y será precisamente esta variación la cual nos permitirá determinar a f_1^i y f_2 . Para esto bastará precisar dichos parámetros de modo que

(3.5) tome un valor mínimo cubriendo, por supuesto los criterios expresados por varios valuadores referentes a distintos tipos de terrenos; dado que deseamos por una parte hacer las mencionadas diferencias tan pequeñas cuanto nos sea posible y por otra resulta conveniente elegir un método el cual resulte cómoda su implementación y manejo numérico decidimos emplear, para tal efecto, el método de mínimos cuadrados. O sea deberemos avorcarlos a minimizar la siguiente función.

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2^j(l_i) A_i^j - p_{kj} \right)^2 \quad (3.6)$$

donde la primer sumatoria nos permite cubrir la opiniones de s valuadores distintos y la segunda sumatoria nos capacita para considerar t tipos distintos de terrenos, en otras palabras, la expresión (3.6) nos permite analizar simultáneamente la opinión de k valuadores respecto a t tipos de predios.

Como se recordará, tanto a f_1 como a f_2 los consideramos configurados por dos rectas, de modo que expresados en la forma de punto y pendiente tendremos

$$f_1(i) = \begin{cases} a_1 i + b_1 & \text{si } 0 < i \leq 5 \\ a_2 i + b_2 & \text{si } 5 \leq i \end{cases} \quad (3.6.a)$$

$$(3.6.b)$$

$$f_2(l_i) = \begin{cases} c_1 l_i + d_1 & \text{si } 0 < l_i \leq 15 \\ c_2 l_i + d_2 & \text{si } 15 \leq l_i \end{cases} \quad (3.7.a)$$

$$(3.7.b)$$

de donde sustituyendo en (3.6) se obtiene

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} A_i^j (a_m c_m i l_i + b_m c_m l_i + a_m d_m + b_m d_m - p_{kj})^2, m=1,2 \right) \quad (3.8)$$

Así pues minimizaremos (3.8) respecto a los parámetros a_m, b_m, c_m y $d_m, m=1,2;$

esta función desde luego estará sujeta a dos restricciones: la primera de ellas establece que el costo del Rectángulo Dorado es de 1,000.00 U. M. lo cual expresado en términos de la ecuaciones (3.6.a), (3.6.b), (3.7.a) y (3.7.b) y según los datos del terreno tipo B1 (ver Apartado B del Apéndice 3) nos dá

$$1350a_{m,m}c + 900a_{m,m}d + 4500b_{m,m}c + 300b_{m,m}d = 1000; m=1,2 \quad (3.9)$$

la segunda restricción viene determinada por la condición de que en el caso de tenerse $l_i=15$, entonces $f_2(15)$ deberá ser igual a 1, esta condición de acuerdo con las ecuaciones (3.7) se expresa de la siguiente manera

$$15c_m + d_m = 1; m=1,2 \quad (3.10)$$

Si de acuerdo con (3.9) y (3.10) hacemos $b_m = 3.3333 - 3a_m$ y $d_m = 1 - 15c_m$ se obtiene equivalentemente el siguiente problema al cual nos avocaremos a resolver en la siguiente sección

$$\text{Min } \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^n A_i^j (a_{m,m}c_{i-1}(l_i - 15) + a_m(i-3) + 3.3333c_m(l_i - 15) + 3.3333 - p_{kj})^2; m=1,2 \quad (3.11)$$

3.4 FACTOR DE FRENTE RELATIVO

El factor de Frente Relativo intenta cuantificar la depreciación de un cierto predio atendiendo exclusivamente a la forma o modo como se encuentran ligados entre sí los trapecios contiguos, estos es, dado el trapecio número i es obvio que al añadirse el área virtual al trapecio número $i+1$ aquella resulta beneficiada, pero obviamente este beneficio desmerece en alguna medida si la unión entre ambos trapecios propicia la presencia de porciones de área los cuales sean de poca utilidad desde un punto de vista arquitectónico o constructivo. Aquí nos permitimos hacer notar que los expertos valuadores en repetidas ocasiones nos señalaron la importancia que cobra el frente, o sea la longitud de la banqueta en el costo de dicho predio, y así la idea subyacente que expresa este parámetro f_3 es la de considerar a la base del trapecio i como un "sub-frente" el cual naturalmente afecta al siguiente trapecio; desde luego que dicha influencia se debe extender al resto de los trapecios y no tan solo a su inmediato sucesor, pero los cálculos preliminares mostraron que este últi-

mo efecto no es de consideración pudiendo en consecuencia ignorarse sin el temor de incurrir en graves errores. Nos permitimos recordar que en aras de la brevedad aquí tan solo se presentan algunas conclusiones de los trabajos preliminares pero confiamos en que al terminar de leer la presente sección el lector podrá tener por sí mismo una idea mas o menos clara de los alcances y de las limitaciones del presente trabajo.

Aquí adoptaremos la siguiente convención: a la base inferior del trapecio número i le asignaremos el número $i-1$ teniendo en consecuencia la base superior asignado el número i en otras palabras, a la base superior de cada trapecio le será asignado el número que tenga dicho trapecio y las bases de los trapecios serán numeradas progresivamente del frente hacia el fondo iniciandose la cuenta con el número 0. Como se ha venido mencionando, el parámetro f_3 pretende cuantificar la bondad de la unión de dos trapecios adyacentes y es hasta cierto punto natural intentar la determinación de f_3 estudiando las posiciones relativas que guardan entre si las bases respectivas, así en primera intención se encontró que una buena medida de dicho efecto lo proporcionaría el cociente obtenido al dividir la proyección de una base respecto a la otra entre la longitud de esta segunda base; el problema de decidir cuál base se proyecta se resuelve facilmente observando si alguna de las bases en consideración es igual o menor o estrictamente mayor que la otra. Esto por supuesto nos conduce a la consideración de los dos casos mencionados, de modo que si $\text{Proy}_{i-1}(i)$ nos denota la magnitud de la proyección de la base número i respecto a la base $i-1$ y $\text{Long}(i)$ nos denota la longitud de la base número i se puede expresar cuantitativamente a f_3 de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$f_3(i) = \begin{cases} \frac{\text{Proy}_{i-1}(i)}{\text{Long}(i-1)} e_1 + f_1 & \text{si } \text{Long}(i) \leq \text{Long}(i-1) & (3.12.a) \\ \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} e_2 + f_2 & \text{si } \text{Long}(i) > \text{Long}(i-1) & (3.12.b) \end{cases}$$

Luego para determinar a f_3 deberemos minimizar a la siguiente función, en la cual, desde luego ya son conocidas la funciones f_1 y f_2

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(1_i) f_3(i) A_i^j - p_{kj} \right)^2 \quad (3.13)$$

la cual para el caso de tenerse $\text{Long}(i) = \text{Long}(i-1)$ deberá estar sujeta a la siguiente restricción

$$e_m + f_m = 1 \quad ; \quad m=1,2 \quad (3.14)$$

si introducimos las condiciones (3.14) en (3.13) y hacemos

$$c_1(i) = \frac{\text{Proy}_{i-1}(i)}{\text{Long}(i-1)} \quad (3.14.a)$$

$$c_2(i) = \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} \quad (3.14.b)$$

tendremos que resolver el siguiente problema equivalente

$$\text{Min} \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (x_j - y_j e_m - p_{kj})^2 \quad (3.15)$$

donde

$$x_j = \sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(1_i) A_i^j \quad (3.16.a)$$

$$-y_j = \sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(1_i) (c_m(i) - 1) A_i^j \quad (3.16.b)$$

desde luego que en (3.15) nuestra variable será e_m , $m=1,2$ y procuraremos elegir tipos de terrenos los cuales nos permitirán estudiar separadamente los casos $m=1$ y $m=2$.

3.5 FACTOR DE FRENTE

El Factor de Frente intenta cuantificar la influencia del frente de la calle sobre el costo del predio; la importancia de este efecto nos fué señalada en reiteradas ocasiones por los señores peritos valuadores, y como ya se mencionó, restringiremos nuestro análisis exclusivamente al estudio de terrenos dotados de un solo frente, o sea, a terrenos que tienen acceso directo por una sola calle.

Este Factor de Frente tiene cierta semejanza conceptual con el Factor de Frente Relativo pues en ambos casos se estudia la influencia de un frente sobre un trapecio dado, pero a diferencia de f_3 en el cual solo se estudian los efectos en trapecios contiguos, en el caso de f_4 , en cambio, estudiaremos la influencia del frente de calle sobre cada uno de los trapecios; esta distinción se debe a la importancia que cobra el frente de calle sobre el costo de un predio.

Obviamente el efecto del frente no podrá ser igual para todos los trapecios, al considerar los factores que los pueden afectar encontramos esencialmente dos: el primero de ellos atiende a la porción de la base del trapecio que puede ser proyectada sobre la banqueta, esto desde luego nos capacita para estimar indirectamente los beneficios que desde un punto de vista de diseño arquitectónico ofrece la configuración del predio en relación a su acceso; como segundo parámetro a considerar en la determinación de f_4 encontramos que es razonable esperar que f_4 disminuya en alguna razón inversamente proporcional al alejamiento del trapecio en estudio respecto a la banqueta. Así pues, si $\text{Proy}_f(i)$ nos denota la magnitud de proyección de la base superior del i -ésimo trapecio sobre el frente de banqueta, entonces resulta procedente cuantificar a f_4 según la siguiente fórmula:

$$f_4(i) = 1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)}\right) \cdot \frac{1}{i^g} \quad (3.17)$$

donde i es el número del trapecio en estudio y g es una constante a determinar de modo que

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} (f_1(i)f_2(i)f_3(i)f_4(i)A_i^j - p_{kj})^2 \quad (3.18)$$

tome su valor mínimo.

3.6 ANALISIS DE LA VARIANZA

Ningún método para evaluar la influencia de la configuración de un terreno sobre su costo puede comprender y abarcar todos los casos y alternativas posibles con exactitud pues esta depende de mucho factores y para nuestro caso concreto de aplicación deseamos hacer un comentario al respecto antes de cerrar la presente sección.

Con el propósito de determinar numéricamente a los parámetros descritos se efectuaron experimentos, consistiendo estos en el diseño y dibujo de varios tipos de terrenos los cuales fueron sometidos con objeto de avalúo a los señores peritos valuadores; la aplicación de los experimentos se realizó en dos etapas procurando que los peritos se familiarizaran paulatinamente con el problema. Los resultados de la primera etapa se muestran en la Tabla N° 1 del Apéndice 3 y se refieren a los costos que siete valuadores asignaron a treinta y seis tipos distintos de terrenos; los resultados de la segunda etapa se presentan en la Tabla N° 2 y se refieren a los costos que trece valuadores asignaron a cuarenta y cuatro tipos distintos de terrenos; los precios se asignaron según el criterio expuesto en el párrafo 3.3 y para el mejor manejo numérico de dichos datos se consideró conveniente dividirlos entre 1000. En ambas tablas los valuadores se agruparon por columnas, es decir, los datos que un valuator asignó a los distintos predios se presentan en una sola columna y estas se numeran progresivamente empezando con el número 1, los renglones se refieren, por supuesto a los predios, es decir, distintos renglones denotan distintos tipos de terrenos; en la Tabla 3 del mismo Apéndice se muestran los dibujos de los predios.

En este punto de nuestro desarrollo y partiendo de los resultados de los experimentos intentaremos por una parte averiguar si el costo asignado a

un cierto terreno es o no es independiente del valuator que lo determina, y por otra parte, buscaremos conocer si la forma de un predio influye significativamente en su costo. Con tal propósito cuestionaremos simultáneamente el siguiente par de hipótesis siguiendo un análisis de la varianza según la conocida notación ANOVA* y en la cual se hace uso de la distribución F.

- a) Las medias teóricas de las columnas son iguales, es decir, los criterios de los valuadores no presentan diferencias significativas.
- b) Las medias teóricas de los renglones son iguales, es decir, los distintos tipos de predios no presentan diferencias significativas en sus precios.

En esta sección nos limitaremos tan solo a recordar las fórmulas que se usan así como a presentar las tablas ANOVA correspondientes; en la Tabla 3 del Apéndice 3 se muestra la Tabla de la distribución F y en el Apartado A de dicho Apéndice se muestran los detalles de los cálculos respectivos. El análisis de la varianza se realizará encontrando dos estimaciones de la varianza σ^2 y usando el cociente de ambos para obtener el valor de F.

Cuando consideramos que los subíndices r, c y e denotan respectivamente a los renglones, a las columnas y al error experimental, entonces es fácil ver que la varianza de las medias por renglones está dada por

$$\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \tag{3.19}$$

y como cada media de renglón se basa en c columnas entonces

$$Vr=c \frac{\sum_{i=1}^r (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{r-1} \tag{3.20}$$

*Para mayores detalles consultar: Hoel, Paul G., "Elementary statistics", capítulo 11, John Willey, 1976.

será una estimación no sesgada de la población.

En forma análoga se obtienen

$$V_c = r \frac{\sum_{j=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2}{c-1} \quad (3.21)$$

$$V_c = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2}{(r-1)(c-2)} \quad (3.22)$$

Para analizar la hipótesis de que las medias teóricas de los renglones son iguales usaremos el cociente V_r/V_e y en cambio para analizar la hipótesis de que los medios teóricos de las columnas calcularemos el valor de V_c/V_e .

Con el propósito de construir la Tabla ANOVA es conveniente introducir la siguiente notación:

$$S_r = c \sum_{i=1}^r (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 \quad (3.20.a)$$

$$S_c = r \sum_{j=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 \quad (3.20.b)$$

$$S_e = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 \quad (3.20.c)$$

$$S_t = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x})^2 \quad (3.20.d)$$

De acuerdo a esta notación la Tabla ANOVA toma la siguiente forma

TABLA ANOVA

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	F _c
Medias de columnas	S_c	$c-1$	$\frac{S_c}{c-1}$	$\frac{S_c}{c-1} \div \frac{S_e}{(c-1)(r-1)}$	En tabla 4 con $v_1=c-1$, $v_2=(c-1)(r-1)$
Medias de renglones	S_r	$r-1$	$\frac{S_r}{r-1}$	$\frac{S_r}{r-1} \div \frac{S_e}{(c-1)(r-1)}$	En tabla 4 Apéndice 3 $v_1=r-1$, $v_2=(c-1)(r-1)$
Errores	S_e	$(c-1)(r-1)$	$\frac{S_e}{(c-1)(r-1)}$		
Totales	S_t	$rc-1$			

Tabla 3.6.1

F_c se refiere al valor crítico de F el cual se determina por medio de la Tabla 3 del Apéndice 3; los valores de v_1 y v_2 son los denominadores requeridos para que las sumas de cuadrados sean estimaciones no segadas de σ^2 . Como es sabido, para aceptar una hipótesis el valor de F no deberá exceder al valor de F_c.

La Tabla del análisis de varianza correspondiente a la primera etapa de los experimentos es la siguiente:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	F _c
Medias de columnas	4.8020	6	0.8003	52.3	2.1
Medias de renglones	4.3995	35	0.1257	8.2	1.5
Errores	3.2149	210	0.0153		
Totales	12.4164	251			

Tabla 3.6.2

La Tabla de análisis de varianza correspondiente a la segunda etapa de los experimentos es la siguiente:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	Fc
Medias de columnas	5.1060	12	0.4255	85.1	1.8
Medias de renglones	1.1024	43	0.0256	5.1	1.4
Errores	2.5699	516	0.0050		
Totales	8.7783	571			

Tabla 3.6.3

En ambas tablas, 3.6.7 y 3.6.3, todos los valores de F quedan notoriamente ubicados en sus respectivas regiones críticas para las dos etapas estudiadas; es decir, se rechazan sin lugar a dudas las hipótesis a) y b) enunciadas al inicio de este párrafo 3.6. y se aceptan en consecuencia las siguientes

a') Los distintos criterios de los valuadores presentan diferencias altamente significativas.

b') La forma geométrica de un predio influye indudablemente en su precio.

De lo hasta aquí expuesto se observa que existe una fuerte dispersión entre las evaluaciones hechas por los peritos cuyos efectos se harán sentir indudablemente en la exactitud de nuestros cálculos, por esta razón creemos que se hace necesario introducir en este punto un criterio el cual nos permita evaluar la bondad de ajuste; para este fin calcularemos en primer término el error estándar por medio de la siguiente fórmula

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - y'_j)^2}{n-k}} \quad (3.23)$$

donde k es el número de coeficientes incluyendo el término constante de la fórmula de regresión y donde y'_j denota el valor de la función de re-

gresión correspondiente a Y_j .

Después calcularemos el porcentaje de los valores fijados por los peritos que queden ubicados dentro del intervalo $Y_j \pm 2S_e$; esperamos que por lo menos el 95% de dichos datos verifiquen este requisito. Aclaremos que el número 2 por el cual se multiplica al error estándar de estimación corresponde muy aproximadamente al factor que debe usarse para un nivel de significación al 95% siempre y cuando se satisfaga la hipótesis de una distribución normal en una serie larga de observaciones; como para muestra pequeñas el coeficiente S_e es mayor que 2 nos encontramos desde luego conservando un cierto margen de seguridad.

Al habernos concretado en el presente trabajo a estudiar terrenos urbanos destinados a la construcción de casa o locales comerciales creemos haber abarcado un gran número de casos pero desde luego no todos los posibles, situación esta que se concretiza aún más al haber sometido a experimentos exclusivamente terrenos con una superficie de $300m^2$ con formas elegidas de antemano adecuadas para la búsqueda y determinación de parámetros, sin embargo confiamos en que el método aquí propuesto cubra los propósitos señalados en la Sección 1 y el cual desde luego no está sujeto a variaciones de interpretación según criterios de ocasión, lo cual redundará obviamente en beneficio de la equidad y la justicia. Por supuesto que este método es apto para ser implementado en computadora.

4. EVALUACION DE LOS PARAMETROS

Procederemos seguidamente a evaluar numericamente a los Factores de Profundidad, de Deformación, de Frente Relativo y de Frente según lo comentado en el párrafo 3.2, es decir, primeramente evaluaremos conjuntamente a f_1 y f_2 , para luego pasar a cuantificar a f_3 y finalmente a f_4 .

4.1 FACTORES DE DEFORMACION Y DE PROFUNDIDAD

Con el propósito de cuantificar a estos dos parámetros procederemos a estudiar, dentro de los experimentos, aquellos tipos de terrenos los cuales no sean depreciados por los Factores de Frente Relativos y de Frente. Para ello elegimos los terrenos tipos A1, A2, B1, B2, C1 y C2; como se observa estos predios al tener una figura rectangular proyectan el ciento por ciento de las bases de los rectángulos (trapeacios) virtuales entre sí y sobre el frente de banqueta, lo que de acuerdo con las fórmulas (3.12) y (3.17) nos indica que los factores f_3 y f_4 toman para todos los casos el valor de 1; es decir, en estos terrenos elegidos expresamente se pueden apreciar aislados del resto de los parámetros, los parámetros f_1 y f_2 .

Como se recordará, para determinar a f_1 y f_2 deberemos proceder a evaluar a las constantes $a_m, b_m, c_m, d_m, m=1,2$ que figuran en las ecuaciones (3.6.a), (3.6.b), (3.7.a) y (3.7.b) resolviendo el problema (3.11); como las funciones son seccionalmente continuas teniendo su pico en $i=5$ dividiremos el análisis en dos etapas la primera de las cuales considerará el caso de ser i igual o menor a cinco y por lo tanto i_1 será igual o mayor a veinte, o sea consideraremos en primer lugar a los terrenos tipos B1, B2, C1 y C2 y en segundo lugar a los tipos A1, A2 y B1 los cuales nos proporcionaran el material adecuado para apreciar el efecto de deformación y profundidad cuando i es estrictamente mayor que cinco; obviamente tomaremos

$$f_1'(5) = \lim_{i \rightarrow 5^-} f_1'(i) = \lim_{i \rightarrow 5^+} f_1'(i)$$

podiendo decirse otro tanto respecto a f_2 . Si hacemos para $m=1,2$

$$F_m(a_{m,m}, b_{m,m}) = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (A_{m,m} (i-3)(l_i - 15) + a_m (i-3) + 3.3333c_m (l_i - 15) + 3.3333) - p_{kj})^2 \quad (4.1)$$

entonces resolver el problema (3.11) equivale a resolver el conjunto de ecuaciones descritas por $\bar{\nabla} F_m(\bar{x}_0) = \bar{0}$, lo cual desde luego en teoría no reviste mayor dificultad que efectuar el cálculo de simples derivaciones, sin embargo la resolución del sistema de ecuaciones así generado es demasiado laborioso hasta el grado de que se consideró preferible usar el método numérico de Newton.

En el Apartado A del Apéndice 4 se presentan los detalles de los cálculos respectivos concretándonos en la presente sección a presentar únicamente los resultados.

Con $m=1$ estaremos considerando el caso $i \leq 5$ y entonces aplicando a (4.1) los datos obtenidos de los terrenos B1, B2, C1 y C2 así como los respectivos valores p_{kj} dados por los peritos valuadores se obtiene que

$$a_1 = 1.0753 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.0005$$

y con estos valores se obtiene de (3.9) y (3.10) que

$$b_1 = 0.1076 \quad \text{y} \quad d_1 = 1.0073$$

o sea hemos obtenido experimentalmente que

$$f_1'(i) = 1.053i + 0.1076; \quad 0 < i \leq 5 \quad (4.2)$$

$$f_2(l_i) = -0.0005l_i + 1.0073; \quad 20 \leq l_i \quad (4.3)$$

Ahora pasaremos a considerar el caso $i \geq 5$ para terminar de cuantificar a los parámetros en cuestión; como se dijo, emplearemos para este propósito el material obtenido a partir de los terrenos tipos A1, A2, y B1 así como los costos respectivos p_{kj} y de los cuales mediante la ecuación (4.1) se

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

obtiene que

$$a_2 = -2.1078 \quad \text{y} \quad c_2 = -0.0016$$

de donde por medio de (3.9) y (3.10) se obtiene

$$b_2 = 16.0229 \quad \text{y} \quad d_2 = 1.0245$$

o sea

$$f_1'(i) = -2.1078i + 16.0229; \quad 5 < i \quad (4.4)$$

$$f_2(l_i) = -0.0016l_i + 1.0245; \quad 0 < l_i < 20 \quad (4.5)$$

Al intentar conocer el grado de exactitud con el cual funcionan estos parámetros para $i > 5$ nos topamos con dos serias objeciones las cuales obligan a modificar el modelo. En primer lugar, en relación a $f_1'(i)$ observamos que con los valores de $i > 8$, entonces $f_1'(i) < 0$ y esto expresado con otras palabras nos dice que a partir de un cierto número de trapecios, en nuestro caso ocho, el parámetro toma un valor negativo, lo cual significa que si el terreno es lo suficientemente largo este podrá llegar a tener un costo negativo; la segunda objeción viene motivada por el hecho de que con $c_2 < 0$ se tiene que

$$d_2 = 1 - 15c_2 > 1$$

y en este caso

$$f_2(l_i) > 1.$$

Para efectuar las correcciones correspondientes modificaremos nuestro modelo apoyándonos mas fuertemente en los experimentos. Como el predio analizado el cual contuvo mas franjas de terreno lo fué el terreno tipo A1, con 30 metros de profundidad y le corresponden por lo tanto ocho trapecios, entonces deberemos de comprometernos a mantenernos dentro de los límites de los experimentos forzando a nuestro modelo para que en este caso extremo f_1' tome un valor positivo; la manera de corregir a la segunda objeción formu-

lada en el párrafo anterior se hace patente por sí misma de la observación del problema que ya reformulado deberemos avocarnos a resolver según el siguiente planteamiento:

$$\text{Mín } F_2(a_2, b_2)$$

sujeto a

$$8a_2 + b_2 \geq 0$$

$$c_2 \geq 0$$

y como para el caso del Rectángulo Dorado en el cual $i=5$ se debe tener que

$$5.4839 = 5a_2 + b_2,$$

entonces se tiene el siguiente problema equivalente que debemos resolver

$$\text{Mín } F_2(a_2, b_2) \quad (4.6.a)$$

sujeta a

$$3a_2 + 5.4839 \geq 0 \quad (4.6.b)$$

$$c_2 \geq 0 \quad (4.6.c)$$

En el Apartado B del Apéndice 4 de presentan los cálculos respectivos los cuales arrojan los resultados siguientes

$$a_2 = -1.8280$$

$$b_2 = 14.6237$$

$$c_2 = 0$$

$$d_2 = 1$$

o sea

$$f_1'(i) = -1.8280i + 14.6237; \quad 5 \leq i \quad (4.7)$$

$$f_2(l_i)=1 \quad l_i \leq 20 \quad (4.8)$$

Como se recordará f_2 intenta penalizar al terreno de acuerdo con su desviación respecto al ideal de 15 metros y de acuerdo con (4.3) y (4.7) se observa que $f_2(l_i)$ es igual a 1; esto desde luego nos indica que en los experimentos realizados prácticamente no influye en el costo el Factor de Desviación, en cambio para el Factor de Profundidad se tiene

$$f_1'(i) = \begin{cases} 1.0753i + 0.1076; & 0 < i \leq 5 & (4.9.a) \\ -1.8280i + 14.6237; & 5 \leq i \leq 8 & (4.9.b) \\ 0.6092; & 8 < i & (4.9.c) \end{cases}$$

Por supuesto que el valor dado de $f_1'(i) = 0.6092$ para $i > 8$ excede el alcance de los resultados según los experimentos realizados, dándose como un factor meramente estimativo el cual nos permite cubrir bajo estas fórmulas terrenos grande o muy alargados y deberá manejarse con las reservas del caso.

4.2 FACTORES DE FRENTE RELATIVO Y DE FRENTE

Al intentar determinar a las constantes que configuran a los parámetros f_3 y f_4 según las fórmulas (3.12.a), (3.12.b), (3.17.a) y (3.17.b) encontramos que si todos los trapecios virtuales proyectan la totalidad de sus bases sobre el frente de banqueta, entonces f_4 toma el valor de 1 y en este caso nos será posible evaluar aisladamente de este parámetro a las constantes e_1 y f_1 las cuales aparecen en (3.12.a) ahorrándonos de esta manera una buena porción de operaciones numéricas; en cambio si para algún triángulo virtual parte de su base no se proyecta sobre el frente de banqueta, entonces tendremos que analizar conjuntamente a los parámetros f_3 y f_4 a efecto de llegar a conocer al resto de las constantes que figuran en estos parámetros.

Procediendo conforme a lo indicado determinaremos a f_3 valiéndonos de los terrenos tipos E1, F1, F2, G1, G2, H1, H2, J1, Q2, RL, RL1, RL2, RL6, RL8, RP1, RP2, RP3, RP4, RS1, RS2, RS3, RS4, TF1, TF2, TF3, TF4, ninguno de estos

tiene algún trapecio virtual que no proyecte la totalidad de su base sobre el frente de banquetta. Así pues para determinar a las constantes e_1 y f_1 procederemos a revolver el problema (3.15) y lo haremos derivando dicha expresión y resolviéndola para e_1 cuando toma el valor de cero lo cual nos resulta en

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (y_j^2 e_1 + y_j (p_{kj} - x_j)) = 0 \quad (4.10)$$

o sea, para los tipos indicados y según los costos p_{kj} dados en las Tablas 1 y 2 del Apéndice 3 obtenemos que

$$e_1 = 0.1147 \quad (4.11.a)$$

$$f_1 = 0.8853 \quad (4.11.b)$$

En el Apartado B del Apéndice 4 se presentan los detalle de los cálculos respectivos.

A continuación procederemos a evaluar conjuntamente a los constantes e_2 , f_2 y g por medio de los resultados que arrojan los experimentos para los terrenos tipos D1, D2, E2, J1, J2, K1, K2, L1, L2, M1, M2, N1, N2, O1, O2, P1, P2, Q1, R1, C11, C12, C13, C14, FB1, FB2, FB3, FB4, FU1, FV2, FV3, FV4, RB1, RB2, RB3, RB4, RI1, RI2, RI3, RI4, RL3, RL4, RL5, RL7, TP1, TP2, TP3, TP4, o sea tendremos que determinar a las constantes e_2 , f_2 y g de modo tal que (3.18) tome su valor mínimo. Trabajando de acuerdo con los datos presentados en las Tablas 1 y 2 del Apéndice 3 se obtiene que

$$e_2 = 0.4404 \quad (4.12.a)$$

$$f_2 = 0.5596 \quad (4.12.b)$$

$$g = 1.6467 \quad (4.12.c)$$

En el Apartado C del Apéndice 4 se presentan los detalles de los cálculos respectivos.

Y así de acuerdo con las fórmulas (4.11.a), (4.12.b), (4.12.a) y (4.12.b) f_3 se expresa por

$$f_3(i) = \begin{cases} 0.1147 \frac{\text{Proy}_{i-1}(i)}{\text{Long}(i-1)} + 0.8853 & \text{si } \text{Long}(i) \leq \text{Long}(i-1) & (3.13.a) \\ 0.4404 \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} + 0.5596 & \text{si } \text{Long}(i) > \text{Long}(i-1) & (3.13.b) \end{cases}$$

y f_4 se expresa por

$$f_4(i) = 1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)}\right) \cdot \frac{1}{i^{1.6467}} \quad (4.14)$$

4.3 CONCLUSIONES

No dudamos de que el lector ya se habrá formado un juicio acerca de los alcances y limitaciones del presente trabajo, pero a pesar de ello nos consideramos obligados a elaborar un comentario aunque este sea breve al respecto.

Como se pudo constatar en el análisis de la varianza efectuado en la Sección 3.6, es indudable que la forma de un predio influye en su costo, pero no es menos cierto el hecho de que el precio del predio asignado con fines catastrales varía y en notable grado dependiendo del valuador que lo califica. Así pues, empeñados nosotros en cuantificar los factores que influyen en el primero de los tópicos señalados nos vimos afectados en la precisión de nuestros resultados por la gran dispersión que se observa en los valores asignados a los predios. Creemos que el trabajo de afinar a los parámetros que intervienen en las fórmulas debe de ser una labor que se desarrolle conjuntamente con un grupo de peritos valuadores y uno de los procedimientos que se nos ocurren en tal aspecto consiste en tomar al presente trabajo como una base que oriente a los peritos valuadores mediante su aplicación, para que después, realizando nuevos experimentos en los cuales los peritos valuadores viertan de nuevo sus opiniones, afinar de nueva cuenta los parámetros en cuestión; consideramos que el monto de los intereses que se manejan en la Oficinas Catastrales así como el deseo de buscar la equidad justifican plenamente un programa de trabajo en la dirección señalada.

Por supuesto los coeficientes de los parámetros empleados en el presente trabajo pueden precisarse más e incluso hasta pueden añadirse nuevos parámetros a la fórmula con la cual calculamos el costo del predio, pero consideramos que este trabajo adicional carecía de un fin práctico ya que los resultados aportados por los experimentos presentan, como se dijo, una gran dispersión. No obstante esta situación no quisieramos cerrar el presente esbozo sin antes hacer un breve comentario al respecto.

Cuando se determinó el parámetro f_4 el cual precisa la influencia del frente de la banqueta sobre el costo del predio se tuvo en mente la idea de determinar el porcentaje del área de cada trapecio virtual que quedaba afectada por dicho frente. Así si el área de los trapecios de cuatro metros de altura queda aproximada por bandas rectangulares de la misma altura y con una longitud de $\text{Long}(i)$ metros, entonces cuando $\text{Proy}_f(i)$ nos denota la proyección de la base superior de la banda número i se tiene que $\text{Proy}_f(i) \times 4 \text{ mts}^2$ nos expresa el área de dicha banda la cual queda cubierta por el frente de la banqueta, es decir, cualquier construcción erigida en esta porción del terreno puede ser alcanzada en todos sus puntos moviéndose en línea recta desde la banqueta y con dirección perpendicular a la calle. Analogamente, el área total de la banda número i será de $\text{Long}(i) \times 4 \text{ mts}^2$ y en consecuencia

$$\frac{\text{Proy}_f(i) \times 4}{\text{Long}(i) \times 4}$$

nos expresa la proporción entre el área visible desde la calle respecto al área total de la banda en cuestión.

Una vez discutido este punto se hace natural proponer para f_4 la siguiente fórmula

$$f_4(i) = 1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)}\right) \frac{u+wi}{i^g} \quad (4.15)$$

donde u , w y g serían las constantes a evaluar. Ahora bien, ¿por qué razón usamos (4.14) en lugar de (4.15) para evaluar a f_4 ? Pues sencillamente por la gran dispersión que presentan los datos con los cuales trabajamos; si se hubiese empleado (4.15) en vez de (4.14) nuestros cálculos encaminado a determinar a las constantes u , w y g se habrían complicado bastante y así consideramos razonable abstenernos de buscar una precisión que nuestros datos volvían impráctica a cambio de simplificar nuestro trabajo; consideramos conveniente apuntar estos hechos con el deseo de que en un futuro, de contarse con datos más exactos, se mejore la expresión de los mencionados parámetros.

Como se recordará, la expresión que nos permite calcular el costo de un predio será

$$P = \frac{AC}{1000} \sum_{i=1}^{n_j} F_1(i) F_2(l_i) F_3(i) f_4(i) A_i^j \quad (4.16)$$

donde P nos denota el costo total del terreno y C nos denota al precio unitario del terreno en la zona de ubicación del predio, y como según (4.8) $f_2(l_i)$ toma siempre el valor de 1, entonces resulta conveniente simplificar a la fórmula (4.16); con este propósito haremos el siguiente cambio de variables: $F_1(i) = f_1(i)$, $F_2(i) = f_3(i)$ y finalmente $F_3(i) = f_4(i)$ resultando en consecuencia que

$$P = \frac{AC}{1000} \sum_{i=1}^{n_j} F_1(i) F_2(i) F_3(i) A_i^j \quad (4.17)$$

donde

$$F_1(i) = \begin{cases} 1.0753i + 0.1076 & ; \quad 0 < i < 5 & (4.18.a) \\ -1.8280i + 14.6237 & ; \quad 5 \leq i < 8 & (4.18.b) \end{cases}$$

$$F_2(i) = \begin{cases} 0.1147 \frac{\text{Proy}_{i-1}(i)}{\text{Long}(i-1)} + 0.8853 & ; \quad \text{Long}(i) \leq \text{Long}(i-1) & (4.19.a) \\ 0.4404 \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} + 0.5596 & ; \quad \text{Long}(i) > \text{Long}(i-1) & (4.19.b) \end{cases}$$

$$F_3(i) = 1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)}\right)^{\frac{1}{i \cdot 1.6467}} \quad (4.20)$$

Conviene observar que tanto $F_1(i)$ como el término $\frac{1}{i \cdot 1.6467}$ el cual aparece

en la expresión de $F_4(i)$ se evalúan para valores discretos de i , es decir, para $i = 1, 2, \dots, 7, 8$; luego si tenemos presente a la Tabla 4.1 nuestros cálculos encaminados a determinar (4.17) se simplificarán.

i	$f_1(i)$	$\frac{1}{i^{1.6467}}$
1	1.1829	1.0000
2	2.2581	0.3194
3	3.3334	0.1638
4	4.4086	0.1020
5	5.4839	0.0706
6	3.6557	0.0523
7	1.8277	0.0406
8	0.6092	0.0326

TABLA 4.1

UN EJEMPLO

Para ejemplificar nuestro procedimiento vamos a calcular el precio del terreno tipo D2 suponiendo que se encuentra ubicado en una zona en la cual el costo del metro cuadrado del terreno se estima en \$2,850.00/M². Como se recordará al tipo D2 le asignamos el índice $j=10$, (ver Tabla 4.C.2).

i	A_i^j	$F_1(i)$	$F_2(i)$	$F_3(i)$	$F_1 F_2 F_3 A_i^{10}$
1	40	1.1829	1.0000	1.0000	47.3160
2	40	2.2589	1.0000	1.0000	90.3560
3	40	3.3334	1.0000	1.0000	133.3360
4	40	4.4086	1.0000	1.0000	176.3440
5	40	5.4839	1.0000	1.0000	219.3560
6	40	3.6557	1.0000	1.0000	146.2280
7	40	1.8277	0.8899	0.9899	73.1080
8	20	0.6092	1.0000	0.9919	12.0853
Σ					898.1293

TABLA 4.2

y así según (4.17)

$$P = \$2,850.00 \times 300 \times 0.8981 = \$767,875.50$$

como se observa, si se hubiese tomado el costo de $\$2,850.00/m^2$ y se hubiese considerado una superficie de $300 m^2$, entonces el precio del terreno hubiese sido de $\$855,000.00$, es decir, la configuración lo afectó de modo tal que el predio se depreció en un 10.19%.

Por último nos resta consignar que la estimación del error estándar Se según (3.23) resultó ser

Para los terrenos afectados únicamente por F_1	$S_e = 0.1536$
Para los terrenos afectados únicamente por F_2	$S_e = 0.1591$
Para los terrenos afectados por F_1 , F_2 y F_3	$S_e = 0.1614$

Por supuesto estos valores se dan ya normalizados con el propósito de uniformizarlos con los datos presentados en la Tablas 1 y 2 del Apéndice 3.

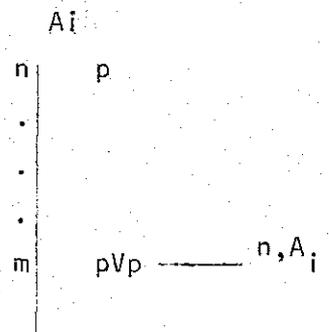
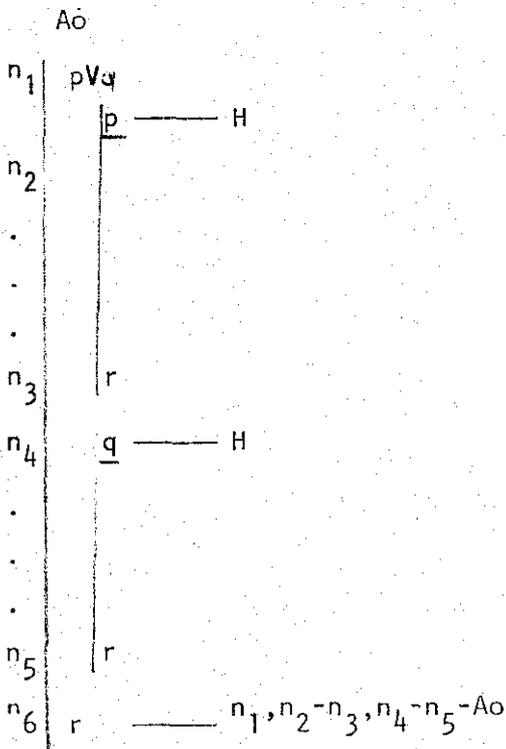
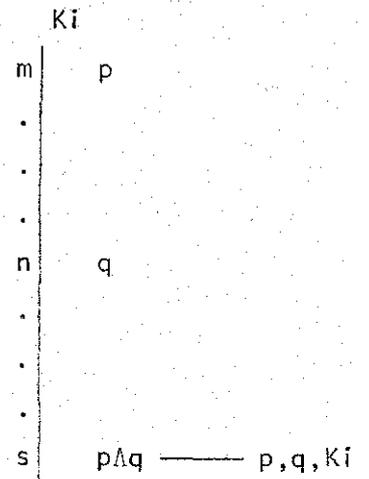
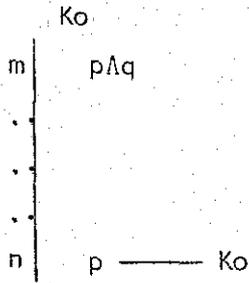
Así, si Y_j^i es el costo de el predio tipo j calculado por (4.17), entonces según lo propuesto en la Sección 3.6 deberemos de estimar el porcentaje de las calificaciones otorgadas por los peritos los cuales quedan comprendidos dentro del intervalo $Y_j^i \pm 2S_e$. Como el lector podrá fácilmente comprobar, el 100% de dichas calificaciones cubren dicho requisito.

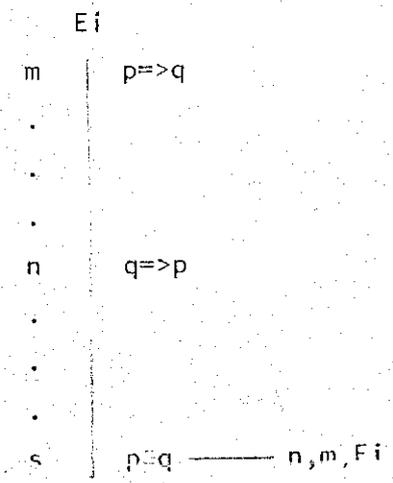
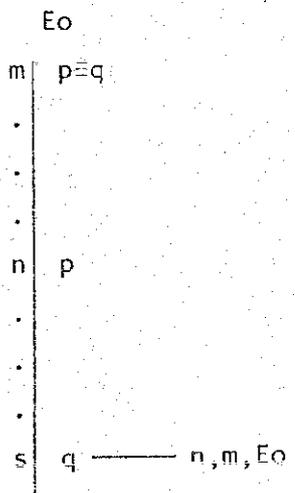
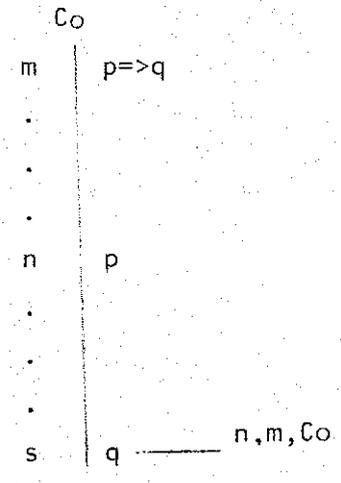
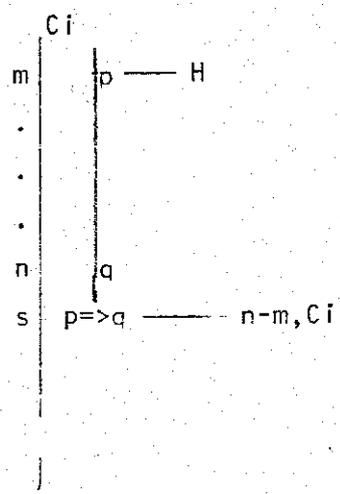
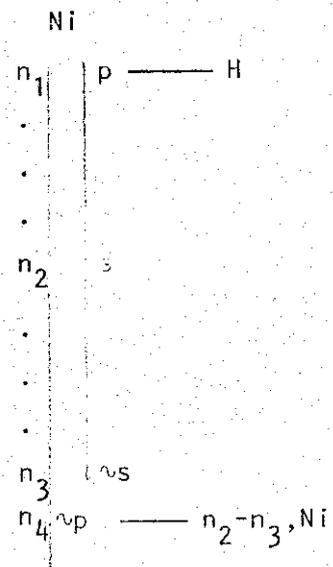
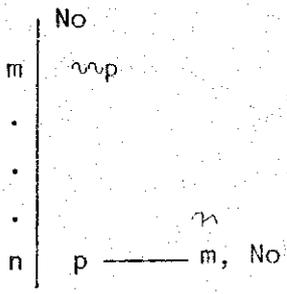
APENDICE 1

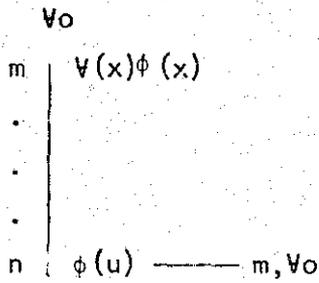
En este apéndice se presentan las demostraciones correspondientes a los lemas y teoremas que quedaron pendientes en el Capítulo 2. Para ello emplearemos dos técnicas: la primera será la demostración informal, o sea la que generalmente se usa y la cual adopta al lenguaje natural como medio de expresión; la otra técnica que usaremos tendrá un nivel mayor de formalidad será la llamada Deducción Natural y en ella se ofrecen las demostraciones por medio de esquemas en las cuales cada renglón es numerado y justificada su presencia por medio de ciertas reglas las cuales describiremos a continuación. Las reglas de inferencia serán Ko, Ki, Ao, Ai, No, Ni, Co, Ci, Eo, Ei, Vo, Vi, Eo y Ei. Adoptamos también las siguientes convenciones

- a) Existe libertad para introducir cualesquier número de hipótesis siempre y cuando estas encabecen un nivel de hipótesis y serán separados del resto de los renglones por medio de una pequeña línea horizontal. Se justificaran anotando en el lado derecho de cada hipótesis la letra H.
- b) Todo renglón que figure en un cierto nivel podrá ser repetido en cualquier subnivel del primero: esto es fácil de notar en los esquemas si observamos que la repetición permite trasladar renglones en el esquema de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo sin cruzar las líneas que marcan los distintos niveles hipotéticos; será justificada cada repetición anotando en el extremo derecho la abreviatura "rep".
- c) Se tendrá libertad para introducir en cualquier nivel renglones los cuales corresponden a teoremas de la lógica o a teoremas del texto del Capítulo 2 anteriormente demostrados, se justificaran anotando en el extremo derecho del esquema el nombre o número del teorema correspondiente

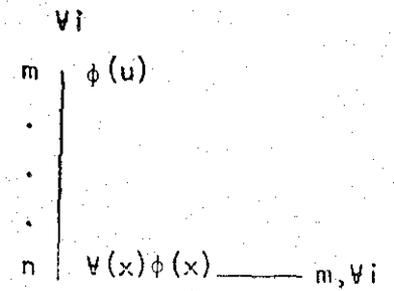
Aclaremos que en el caso de tenerse en una demostración algún nivel muy semejante a otro subnivel anteriormente demostrado, y con el objeto de no ser demasiado prolijos, los justificaremos señalando la analogía mencionada indicando los renglones correspondientes. Establecidas estas convenciones presentaremos seguidamente las reglas de inferencia.



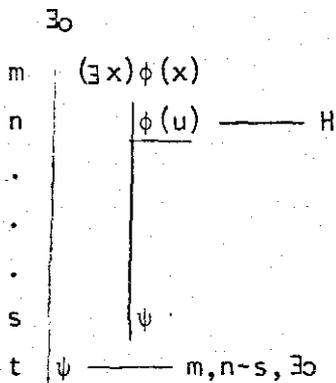




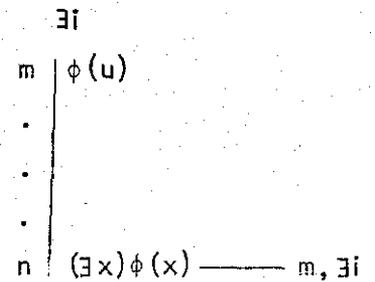
Donde $\phi(u)$ es semejante a $\phi(x)$ excepto por contener figuraciones de u siempre que $\phi(x)$ contenga figuraciones libres de x



Donde u no ocurre libre en alguna hipótesis no descargada y $\phi(u)$ es semejante a $\phi(x)$ excepto por contener figuraciones libres de u donde y solo donde $\phi(x)$ contenga figuraciones libres de x



Donde u no figura libre en ψ y además no figura libre en alguna hipótesis no descargada. $\phi(u)$ deberá ser semejante a $\phi(x)$ excepto por contener figuraciones libres de u donde y solo donde $\phi(x)$ contenga figuraciones libres de x .



Donde $\phi(u)$ es semejante a $\phi(x)$ excepto por contener figuraciones libres de u siempre que $\phi(x)$ contenga figuraciones libres de x .

Lema 3.

Una relación binaria R es un conjunto Y es negativamente transitiva si y solo si para toda x, y, z en Y se tiene que $xRy \Rightarrow (xRz \vee zRy)$.

Demostración:

Supongamos en primer lugar que R es negativamente transitiva

1	$(\forall x) (\forall y) (\forall z) (\neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz)$	H
2	xRy	H
3	$\neg(xRz \vee zRy)$	H
4	$\neg xRz \wedge \neg zRy$	3, De Morgan
5	$\neg xRz \wedge \neg zRy \Rightarrow \neg xRy$	1, Vo
6	$\neg xRy$	4,5, Co
7	xRy	2, rep.
8	$xRz \vee zRy$	3-7, Ni
9	$(\forall x) (\forall y) (\forall z) (xRy \Rightarrow (xRz \vee zRy))$	2-8, Co

veamos el recíproco

1	$(\forall x) (\forall y) (\forall z) (xRy \Rightarrow (xRz \vee zRy))$	H
2	$\neg xRy \wedge \neg yRz$	H
3	xRz	H
4	$xRz \Rightarrow xRy \vee yRz$	1, Vo, rep.
5	$xRy \vee yRz$	3,4, Co
6	xRy	H
7	$\neg xRy$	2, rep, Ko
8	$\neg xRz$	6,7, Ni
9	yRz	2, Ko, rep.
10	$\neg yRz$	2, Ko, rep.
11	$\neg xRz$	9,10, Ni
12	$\neg xRz$	5,6-8,9-H, Ao
13	$\neg zRz$	5,6-8,9-11. Ao
14	$\neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz$	2-12, Ci
15	$(\forall x) (\forall y) (\forall z) (\neg xRy \wedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz)$	14, Vi

Teorema 2.1

Sea $<$ en X un orden débil, entonces se tiene que

- a) Para toda x, y en X rige una y solo una de las siguientes proposiciones

$$x < y \quad \text{ó} \quad y < x \quad \text{ó} \quad x \sim y$$

- b) $<$ es una relación transitiva

- c) \sim es una relación de equivalencia

- d) $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$ y

$$(x \sim y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$$

- e) \leq es una relación transitiva y conectada

- f) con $<'$ en X/\sim definida por $a <' b$ si y solo si $x < y$ para alguna $x \in a$, $y \in b$, entonces $<'$ en X/\sim un orden estricto.

Demostración:

- a) Ley de los tres cortes

Sea $x < y$, luego $\sim(y < x)$ por ser $<$ asimétrica y por la Definición

$$2.3.a \quad \sim x \sim y$$

Sea $x \sim y$, luego por la Definición 2.3.a. $\sim x < y \wedge \sim y < x$

Sea $y < x$, luego $\sim(x < y)$ por ser $<$ asimétrica

y por la Definición 2.3.a. $\sim x \sim y$

b) La relación $<$ es transitiva

1	$x < y$	H
2	$y < z$	H
3	$(\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow \sim y < x)$	H
4	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \Rightarrow x < z \vee z < y)$	H
5	$x < y \Rightarrow x < z \vee z < y$	4, Vo
6	$x < z \vee z < y$	1, 5, Co
7	$x < z$	H
8	$x < z$	7, rep.
9	$z < y$	H
10	$\sim x < z$	H
11	$z < y$	9, rep
12	$z < y \Rightarrow \sim y < z$	3, Vo, rep
13	$\sim y < z$	11, 12, Co
14	$y < z$	2, rep
15	$\sim \sim x < z$	2-14, Ni
16	$x < z$	15, No
17	$x < z$	6, 7-8, 9-16, Ao

TEXTO CON
 FALLA DE ORIGEN

c) \sim es una relación de equivalencia

Demostraremos informalmente que la relación de indiferencia \sim es reflexiva y simétrica, y en cambio, para demostrar que posee la propiedad de transitividad haremos uso de niveles hipotéticos.

i) Reflexividad:

Puesto que la relación $<$ es asimétrica, entonces también es irreflexiva y se tiene que $x \sim x$ pues $\sim x < x$.

ii) Simetría:

Si $x \sim y$ entonces según la definición 2.3.a $y \sim x$ por ser la conjunción un conectivo lógico conmutativo.

d)

1	$x < y$	H
2	$y \vee z$	H
3	$(\exists x)(\exists z)((x < z \wedge (\vee z < x \wedge \vee x \vee z)) \vee (z < x \wedge (\vee x < z \wedge \vee x \vee z))) \vee (x \vee z \wedge (\vee x < z \wedge \vee z < x))$	Tricotomía
4	$(x < z \wedge (\vee z < x \wedge \vee x \vee z)) \vee (z < x \wedge (\vee x < z \wedge \vee x \vee z)) \vee (x \vee z \wedge (\vee x < z \wedge \vee z < x))$	3, $\forall o, \forall o$
5	$\overline{x < z} \wedge (\vee z < x \wedge \vee x \vee z)$	5, Ki
6	$x < z$	8, Ko
7	$(z < x \wedge (\vee x < z \wedge \vee x \vee z)) \vee (x \vee z \wedge (\vee x < z \wedge \vee z < x))$	H
8	$\overline{z < x} \wedge (\vee x < z \wedge \vee x \vee z)$	H
9	$z < x$	1, 9, Ki
10	$z < x \wedge x < y$	10, Teorema 2.1. b
11	$z < y$	H
12	$\overline{y \vee z}$	Def. 2.3. a
13	$y \vee z \equiv (\vee y < z \wedge \vee z < y$	12, 13, Co
14	$\vee y < z \wedge \vee z < y$	14, Ko
15	$\vee z < y$	11, rep.
16	$z < y$	12-16, Ni
17	$\vee y \vee z$	H
18	$\overline{\vee x < z}$	17, rep.
19	$\vee y \vee z$	2, rep.
20	$y \vee z$	18-20, Ni
21	$\vee \vee x < z$	21, No
22	$\overline{x < z}$	2, 3, Ko
23	$\overline{x \vee z} \wedge (\vee x < z \wedge \vee z < z$	2, rep.
24	$x \vee z$	24, Def. 2.3. a
25	$y \vee z$	25, Teorema 2.1. b
26	$z \vee x$	1, rep.
27	$y \vee x$	3, $\forall o, \forall o$
28	$x < y$	H
29	$(x < y \wedge (\vee y < x \wedge \vee x \vee y)) \vee (y < x \wedge (\vee x < y \wedge \vee x \vee y)) \vee (x \vee y \wedge (\vee x < y \wedge \vee y < x))$	30, Ko
30	$\overline{x < y} \wedge (\vee y < x \wedge \vee x \vee y)$	H
31	$\vee y \vee x$	H
32	$(y < x \wedge (\vee x < y \wedge \vee x \vee y)) \vee (x \vee y \wedge (\vee x < y \wedge \vee y < x))$	33, Ko
33	$\overline{y < x} \wedge (\vee x < y \wedge \vee x \vee y)$	H
34	$\vee y \vee x$	H
35	$\overline{x \vee y} \wedge (\vee x < y \wedge \vee y < x)$	35, Ko
36	$\overline{x \vee y}$	H
37	$\vee x < y$	28, rep.
38	$x < y$	35-38, Ni
39	$\vee x \vee y$	

41		ny^{ox}
42		ny^{ox}
43		$\text{ox} < \text{z}$
44		y^{ox}
45		ny^{ox}
46		$\text{ox} < \text{z}$
47		$\text{x} < \text{z}$
48		$\text{x} < \text{z}$
49		$\text{x} < \text{z}$

La segunda parte del inciso d) de este teorema es completamente análoga a la presentada y por lo tanto omitiremos su demostración.

40	Def. 2.3.a
29, 30-31, 32-41	Ao
41	H
27	rep.
42	rep.
45-46	Ni
47	No
7-8-22, 23-48	Ao
4, 5-6, 7-49	Ao

e) La transitividad de $<$ se sigue de los incisos b), c) y d). Para observar que \leq es una relación completa supongamos que $\neg x \leq y \wedge \neg y \leq x$. Luego $\neg x < y \wedge \neg x \sim y \wedge \neg y < x$ y se entra en contradicción con el inciso a).

f) $<^{\sim}$ en X/\sim es una relación asimétrica pues si $a <^{\sim} b$ y $b <^{\sim} a$, entonces $x < y$ y $y < x$ para alguna $x, x' \in a$, $y, y' \in b$ siendo $x \sim x'$, $y \sim y'$. Para d) se tiene que $x' < y$ y $x' < y'$ lo cual contradice a $y' < x$.

$<^{\sim}$ es una relación negativamente transitiva pues si $a <^{\sim} b$, donde $x \in a$, $y \in b$ y $x < y$, para toda $c \in X/\sim$ y $z \in c$, se tiene que $x < z$ obtiene que $z < y$.

$<^{\sim}$ es una relación debilmente conectada pues si $a, b \in X/\sim$ y $a \neq b$, entonces a y b son clasea ajenas y para $x \in a$, $y \in b$ se tendrá que $\neg x \sim y$, luego por el inciso a) $x < y$ ó $y < x$ y de aquí $a <^{\sim} b$ ó $b <^{\sim} a$.

Teorema 2.2

Sea la relación binaria $<$ un orden débil en X y sea el conjunto X/\sim un conjunto contable, entonces existe en X una función $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ para toda $x, y \in X$.

Demostración:

Puesto que el conjunto X/\sim es contable, sean sus elementos designados a_1, a_2, a_3, \dots y sean el conjunto de los números racionales denotado por r_1, r_2, r_3, \dots . Procederemos seguidamente a definir a la función $u: X/\sim \rightarrow \mathbb{Q}$, donde \mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales.

$$u(a_1) = 0$$

y puesto que la relación $<'$ es un orden estricto en X/\sim se tiene que se cumple una y solo una de las siguientes tres condiciones:

- 1) $a_i <' a_m$, para toda $i < m$, y hacemos $u(a_m) = m$
- 2) $a_m <' a_i$, para toda $i < m$, y hacemos $u(a_m) = -m$
- 3) $a_i <' a_m <' a_j$ para alguna $i, j < m$ y no se da el caso de que

$a_i <' a_h <' a_j$ para todo número natural h menor que m distinto de i y de j , luego hacemos $u(a_m) = r_k$, donde r_k es el primer elemento que encontremos en el conjunto r_1, r_2, r_3, \dots para el cual se tenga $u(a_i) < r_k < u(a_j)$, puesto que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso se garantiza la existencia de r_k .

Así por construcción se tiene que $u(a_m) \neq u(a_i)$, para toda $i < m$, y $a_i <' a_j \Leftrightarrow u(a_i) < u(a_j)$, para toda $i, j < m$. Finalmente definimos $U(x) = u(a)$, si $x \in a$.

Teorema 2.3

Sea $<$ en X un orden parcial estricto, entonces se tiene que

a) para toda x, y en X rige una y solo una de las siguientes proposiciones

$$x < y \text{ ó } y < x \text{ ó } x \sim y \text{ ó } x \not\sim y \text{ pero } \neg(x \sim y)$$

b) \sim es una relación de equivalencia

c) $x \sim y \Leftrightarrow \forall (z) (x < z \Leftrightarrow y < z \wedge z < x \Leftrightarrow z < y)$

d) $(x < y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x < z)$
 $(x \sim y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z)$

e) con $<^*$ en X/\sim definida por $a <^* b$ si y solo si $x < y$ para alguna $x \in a$ y $y \in b$, entonces $<^*$ en X/\sim es un orden parcial estricto.

Demostración:

a) Puesto que la relación $<$ en X es un orden parcial estricto, entonces es asimétrica y además rige $x \sim y$ y solo si $x \not\sim y$

b) La reflexividad y la simetría de la relación \sim se deducen de la expresión (1.1) y del inciso c) del Teorema 2.1. Sea $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces por (1.1), si $x \not\sim z$ se tiene que $y \not\sim z$ y si $y \not\sim z$, se tiene que $z \not\sim x$, luego si $x \not\sim z$ entonces $z \not\sim x$ y reciprocamente, si $z \not\sim x$, entonces $x \not\sim z$, de modo que \sim es una relación transitiva.

c y d) Sea $x \sim y$, luego $x < z$ entonces $y < z$ o $y \not\sim z$ y si $z < y$, entonces $x < y$ según la transitividad de $<$. Si $y \not\sim z$, entonces $x \not\sim z$ por causa de (1.1) lo cual contradice a $x \sim z$; luego $x < z \Leftrightarrow y < z$. La segunda parte de este inciso se demuestra en forma análoga.

e) No se puede dar el caso de que $a <^* a$ cuando $a \in X/\sim$ pues si $x < y$ para alguna x, y las cuales se relacionan por $x \sim y$, esto contradice a). Por otra parte, sea $a <^* b$ y $b <^* c$, luego para alguna $x \in a, y, y' \in b$ y $z \in c$, puesto que $x < y, y \sim y'$ y $y' < z$, se tiene que $x < y$ y por d) se sabe que $a <^* c$.

Teorema 2.4

Sea $<^*$ un orden parcial estricto en un conjunto Y , entonces existe un orden estricto $<^{\circ}$ en Y tal que

$$\forall(x)\forall(y) (x<^*y \Rightarrow x<^{\circ}y)$$

Demostración:

Si $<^*$ es un orden estricto el teorema es obvio. Sea $<^*$ un orden parcial y sean x, y elementos de Y tales que $x \neq y$. Definimos $<^{\circ}$ en Y por

$$a<^{\circ}b \Leftrightarrow a<^*b$$

o sea

$$((a<^*x \text{ ó } a=x), (y<^*b \text{ ó } y=b)) \quad (1.1.1)$$

Obviamente se tiene que

$$a<^*b \Rightarrow a<^{\circ}b \text{ y } x<^{\circ}y.$$

Demostraremos ahora que $<^{\circ}$ es un orden parcial estricto. $<^{\circ}$ es irreflexiva. Supongamos que $a<^{\circ}a$, entonces

$$a<^*x \text{ y } <^*a \text{ (} a<^*x \wedge y=a \text{) ó (} a=x \wedge y<^*a \text{),}$$

de donde $y<^*x$ lo cual es falso.

Así si

$$a<^*a \text{ y (} a=x \wedge y=a \text{)}$$

no puede ocurrir, luego

$$a<^*a$$

no ocurre tampoco.

$<'$ es transitiva. Supongamos a $<'b \wedge b <'c$. Si a $<*b \wedge b <*c$, entonces a $<*c$ y así a $<'c$. Si a $<*b$,

$$(b <*x \vee b = x) \text{ y } (y <*c \vee y = c),$$

entonces a $<*x$ y así a $<'c$ por (1.1.1).

Si

$$(a <*x \vee x = a) \text{ y } (y <*b \vee y = b)$$

y $b <*c$, entonces $y <*c$ y de aquí a $<'c$. Finalmente ni a $<*b$ ni $b <*c$ lo cual no puede suceder puesto que se tendría que $y <*x$ ó $y = x$ lo cual es falso.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Teorema 2.5

Sea la relación binaria $<$ un orden parcial estricto en X y sea el conjunto X/\sim un conjunto contable, entonces existe en X una función $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para toda x, y en X ,

$$x < y \Rightarrow u(x) < u(y)$$

$$x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$$

Demostración:

Por el Teorema 2.4 se sabe que $<^*$ en X/\sim un orden estricto $<^\circ$ en X/\sim el cual contiene a $<^*$. Si X/\sim es contable el teorema 2.2 garantiza la existencia de una función valuada en los reales u en X/\sim tal que $a <^\circ b \Leftrightarrow u(a) < u(b)$ para $a, b \in X/\sim$. Si $a \in X/\sim$, hacemos $u(x) = u(a)$ siempre que $x \in a$. Entonces si $x \sim y$, $u(x) = u(y)$ y así $x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$. Si $x < y$, $x \in a$, $y \in b$, entonces $a <^* b$ y de aquí a $<^\circ b$, de donde $u(a) < u(b)$ y $u(x) < u(y)$.

Teorema 2.6

Existe una función u en X valuada en los reales tal que $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ para toda x, y en X si y solo si la relación $<$ en X es un orden débil y además existe un subconjunto contable de X/\sim tal que la relación $<'$ sea de orden denso en X/\sim .

Demostración:

Necesidad. Supónganse que $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ para toda x, y en X , entonces $<$ en X deberá ser un orden débil y $<'$ en X/\sim un orden estricto con $a <' b \Leftrightarrow u(a) < u(b)$, donde $u(a) = u(x)$ si $x \in a$. Sea C un conjunto contable de intervalos cerrados en los números reales con distintas fronteras formadas con números racionales. Para cada $I \in C$ el cual contiene a $u(a)$ siendo $a \in X/\sim$. Sea A un subconjunto de X/\sim . A es contable. Definamos $K = \{(b, c) : b, c \in X/\sim - A, b <' c, <' a <' c \wedge \forall a \in a\}$ si $(b, c) \in K$, entonces $b <' a <' c$ y $\forall a \in X/\sim$, de otro modo $d \in A$ con $b <' d < c$; y como cada intervalo abierto $(u(b), u(c))$ existe $I \in C$ tal que $I \subset (u(b), u(c))$, luego puesto que en estos intervalos no hay dos iguales, K es un conjunto contable. De aquí $B = \{b : b \in X/\sim, \text{ existe } c \in X/\sim \text{ tal que } (b, c) \in K, \text{ ó } (c, b) \in K\}$ es un conjunto contable y $A \cup B$ es contable. Además si $b, c \in X - A \cup B$ y $b < c$, entonces $a \in A \cup B$ y $b <' a <' c$.

Suficiencia.

Sea $<$ en X un orden débil el cual induce un orden estricto $<'$ en X/\sim . Supongamos que A incluye elementos de X/\sim ; siendo A contable y $<'$ es de orden denso en X/\sim . Definamos $B = \{b : b \in X/\sim - A \wedge (\{a : a \in A, b <' a\} \text{ tiene un elemento menor que } a_b \text{ ó } \{c : c \in A \wedge c <' b\} \text{ tiene un elemento preferido a } c_b)\}$ dos conjuntos ajenos de A cuya unión es A . Se sigue que dado $a \in A$, a_b será cuando más un elemento $b \in X/\sim - A$ y dado $c \in A$, c_b será cuando más un elemento $b \in X/\sim - A$. Luego B es contable y también lo es $C \subseteq A \cup B$. Se tienen además las siguientes conclusiones

- a) No existe elemento mínimo $a \in \{a : a \in C, b <' a\}$ para ninguna $b \in X/\sim - C$.

b) No existe elemento máximo $c \in \{c: c \in C, c \prec b\}$ para ninguna $b \in X/\sim - C$

Supongamos que $b, c \in X/\sim - C$. Si $b \prec c$ entonces $b \prec a \prec c$ para alguna $a \in C$ y así $u(b) < u(a)$ y luego $u(b) < u(c)$. Recíprocamente, si $u(b) < u(a) < u(c)$, se tendrá $b \prec a$ y $a \prec c$ y $b \prec c$ por transitividad. De aquí se sigue que para toda $a, b \in X/\sim$, $a \prec b \Leftrightarrow u(a) < u(b)$. Definimos que $u(x) = u(a)$ cuando $x \in a$.

Sea $<$ un orden parcial estricto en X y supóngase que existe un subconjunto contable de X/\sim tal que la relación $<^*$ sea de orden denso en X/\sim , entonces existe una función u en X valuada en los reales tal que

$$\begin{aligned}x < y &\Rightarrow u(x) < u(y) \quad \text{para toda } x, y \text{ en } X \\x \sim y &\Rightarrow u(x) = u(y) \quad \text{para toda } x, y \text{ en } X\end{aligned}$$

Demostración:

Si rigen las hipótesis del terreno, entonces de acuerdo con el Teorema 2.3, $<^*$ en X es un orden parcial estricto. Sea un subconjunto contable de X/\sim , luego $<^*$ es de orden denso en X/\sim y por el Teorema 2.4 existe un orden estricto $<^\circ$ en X/\sim el cual incluye a $<^*$: $a <^* b \Rightarrow a <^\circ b$ y definimos una relación binaria E en X/\sim como sigue:

$$aEb \Leftrightarrow a=b \quad \text{ó} \quad (a, b \notin A \wedge a <^\circ c <^\circ b \vee b <^\circ c <^\circ a \wedge \sim c a)$$

Luego E es una relación de equivalencia. Sean r, s y t clases de equivalencia en X/\sim bajo E y definamos $<'$ como sigue: $r <' s \Leftrightarrow r \neq s \wedge a <^\circ b$ para alguna $a \in r, b \in s$.

Puesto que $<^\circ$ en X/\sim es un orden estricto y E en X/\sim es una clase de equivalencia, $<'$ en $X/\sim/E$ es un orden estricto; Además $B = \{r : r \in X/\sim/E \wedge a \in r \text{ para alguna } a \in A\}$, luego $<'$ es un orden denso en $X/\sim/E$. Sean r, g tales que no están en B y $r <' s$, entonces con $a \in r$ y $b \in s$, $a <^\circ b$ y $a, b \notin A$. Puesto que $\sim a \in B$, existe $t \in B$ y $r <' t <' s$, y de acuerdo con el Teorema 2.5 existe una función

f en $X/\sim/E$ tal que

$$r <' s \Leftrightarrow f(r) < f(s) \quad \text{para toda } r, s \in X/\sim/E \quad (1.1.2)$$

Supóngase que $a \in r, b \in s$ y $a <^* b$, luego $a <^\circ b$. De aquí $r = s$ ó $r <' s$. Si a ó b están en A , entonces $r = s$ y como $a \neq b$, $\sim a \in B$. Si $a, b \notin A$ y $r = s$, entonces $a <^\circ c <^\circ b$, $\sim c \in A$ lo cual es falso puesto que A es de orden denso $<^*$ en X/\sim y si $a <^* b$ y $a, b \notin A$, entonces $a <^* c <^*$ para alguna $c \in A$. Luego $a <^* b \Rightarrow r <' s$. Definamos $u(a) = f(r)$, $a \in r$, luego de (1.1.2) si $a <^* b$ entonces $u(a) < u(b)$. Definiendo $u(x) = u(a)$, con $x \in a$, y observando que si $x < y$ y $(x \in a \wedge y \in b)$, entonces $a <^* b$, de donde $x < y \Rightarrow u(x) < u(y)$. Es claro que $u(x) = u(y)$ cuando $x, y \in a$.

Teorema 2.8

Sea $x \subseteq \mathbb{R}_n$, luego si $<$ es un orden parcial estricto en X ,

$$((\bar{x} < \bar{y} \wedge \bar{y} < \bar{z}) \vee (\bar{x} < \bar{y} \wedge \bar{y} < \bar{z})) \Rightarrow \bar{x} < \bar{z}$$

y

$$\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow \bar{z} < \bar{y}$$

para alguna $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{x} < \bar{z}$, entonces existe una función u en X valuada en \mathbb{R} tal que

$$\bar{x} < \bar{y} \Leftrightarrow u(\bar{x}) < u(\bar{y})$$

para toda $\bar{x}, \bar{y} \in X$.

Demostración:

Supongamos que rigen las hipótesis y definamos $x <' y \Leftrightarrow x < y$ ó $x << y$; luego puesto que $<$ en X es un orden parcial estricto y puesto que $((\bar{x} < \bar{y}, \bar{y} < \bar{z})$ ó $(x < y, y << z)) \Rightarrow x < z$ se tiene que $<'$ es un orden parcial estricto. Con $<'$ definimos \sim' y \tilde{X}' de manera análoga a las definiciones 2.3 a) y b). Por el Teorema 2.3, \sim' en X es una relación de equivalencia y $<'*$ en X/\sim' es un orden parcial estricto. Para demostrar que existe un subconjunto contable de X/\sim' tal que $<'*$ es de orden denso en X/\sim' , es suficiente mostrar que el conjunto de vectores con componentes racionales en X es $<'$ de orden denso en X . Supóngase que x, y no son números racionales y que $x <' y$. Si $x << y$, entonces $x << z << y$ para algún número racional z y de aquí $x <' z <' y$. Si $x < y$, entonces por la última hipótesis del teorema, $z < y$ para alguna z tal que $x << z$. Luego $x << t << z$ para algún número racional t . Por la segunda condición del teorema $t < y$. Luego $x <' t <' y$. De acuerdo con el Teorema D.2, existe una función u en X valuada en los números reales tal que $x <' y \Rightarrow u(x) < u(y)$. Luego $x < y \Rightarrow u(x) < u(y)$ puesto que $x < y \Rightarrow x <' y$.

APENDICE 2

Para familiarizarnos en un primer acercamiento con el problema objeto de este trabajo según el enfoque presentado en el Capítulo 2 se utilizó a la computadora Burroughs B6700 del C. S. C. de la U.N.A.M. En el presente Apéndice mostramos el programa llamado TOPO/NIMIA que empleamos y el cual nos permitió ensayar distintas formas de los parámetros f_1 , f_2 , f_3 y f_4 estando también capacitados para variar en cada caso a la altura del trapecio virtual; el parámetro f_1 se expresa entre los segmentos 009:0184:5 y 009:0192:2, el parámetro f_2 se expresa entre los segmentos 009:0196:1 y 009:01A5:2, el parámetro f_3 se expresa en el segmento 009:01C7:4 y finalmente f_4 se expresa en el segmento 009:01DD:4.

El programa debe ser alimentado con los siguientes datos:

- a) Coordenadas de los vértices del predio
- b) Dimensión de la altura de los trapecios virtuales

y ofrece los siguientes resultados

- 1) Calcula las coordenadas de los vértices de los trapecios virtuales
- 2) Numera progresivamente a los trapecios virtuales del frente hacia el fondo del predio
- 3) Calcula el área de cada uno de los trapecios virtuales
- 4) Calcula las proyecciones de la base de un trapecio respecto a la base del trapecio contiguo y recíprocamente determinando cual proyección fué mayor, esta operación la repite hasta cubrir a todos los trapecios.
- 5) Calcula la proyección de la base de cada trapecio respecto al frente de banqueta del predio
- 6) Calcula para cada trapecio los valores de los parámetros f_1 , f_2 , f_3 y f_4 según las fórmulas que se desea ensayar

- 7) Calcula el costo de cada trapecio y sumándolos obtiene el costo total del predio.

Presentamos también en este Apéndice unos cuantos de los resultados obtenidos.

76 TERCERA TIFC: B...

VERTICE NUM	VERTICE NUM	VERTICE NUM	VERTICE NUM
1	2	3	4
0:00	0:00	17:32	17:32
0:00	17:32	0:00	0:00

ANCILO DE LAMPA 4.00 MTS

COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE INTERSECCION:

SUPERFICIE REAL = 299.98 M2

CORTE NUM	CORTE NUM	CORTE NUM	CORTE NUM
1	2	3	4
0:00	0:00	0:00	0:00
4:00	12:00	16:00	17:32
0:00	0:00	0:00	0:00

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

BANDA	F1	F2	F3	F4	F1F2A	F1F2F3A
1	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00
2	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00
3	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00
4	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00

79 TERRENO TIFC : TIFC

VERTICE NUM	VERTICE NUM	VERTICE NUM	VERTICE NUM
1	2	3	4
0:00	4:00	10:00	24:00
0:00	16:00	16:00	0:00

ANCHO DE BANCA 4.00 MTS

COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE INTERSECCION:

***SUPERFICIE REAL = 300.06 M2

CCORTE NUM	CCORTE NUM	CCORTE NUM	CCORTE NUM
1	2	3	4
0:00	1:00	2:00	3:00
0:00	12:00	16:00	16:00

BANCA	AREA	F1	F2	F3	F4	I1A	I1B	I1F2A	I1F2F3A
1	90.00	1.69	0.56	0.80	0.00	152.00	147.00	129.00	113.00
2	79.00	5.17	9.19	0.37	0.35	190.00	194.00	187.00	173.00
3	67.00	3.37	5.79	0.22	0.21	124.00	124.00	137.00	108.00
4	58.00	4.10	2.38	0.92	0.92	231.00	238.00	277.00	35.00

TIFCIS CON FALTA DE ORIGEN

ESTA TRSIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

ANÁLISIS DEL TERRENO ATENDIENDO A SU CONFIGURACION

8 TERRENO TIPC : T13

COCHENABAS DE LOS VERTICES : VERTICE N°1 0:00
 VERTICE N°2 12:33
 VERTICE N°3 20:00
 VERTICE N°4 20:00

ANCHO DE BANCA 4.00 MTS

COCHENABAS DE LOS PLANOS DE INTERSECCION:

SUPERFICIE REAL = 300.00 M2

CORTE N°1 2:47
 CERTE N°2 7:40
 CERTE N°3 12:33
 CERTE N°4 4:00
 CERTE N°5 12:00
 CERTE N°6 22:00
 CERTE N°7 4:00
 CERTE N°8 12:00
 CERTE N°9 22:00
 CERTE N°10 4:00

BANCA	AREA	F1	F2	F3	F4	F1A	F1E2A	F1F2F3A	F1
12345	76.00	1:09	0:58	0:87	0:87	120	126	110	96
12345	60.00	2:31	0:58	0:87	0:87	171	170	140	134
12345	52.00	3:45	0:58	0:87	0:87	208	192	150	150
12345	44.00	5:10	0:58	0:87	0:87	220	199	150	149

300.00 937.30 896.95 750.78 692.37

APENDICE N° 3

TABLA N° 1

VALUADORES

TIPO DE TERRENOS	1	2	3	4	5	6	7
A1	0.95	0.86	0.97	0.84	0.50	1.00	0.86
A2	0.98	0.96	1.00	0.95	0.66	1.00	1.00
B1	0.98	0.98	1.00	0.94	0.77	1.00	0.97
B2	0.99	0.84	0.98	0.76	0.85	0.98	0.88
C1	0.99	1.00	0.81	0.67	0.93	1.00	0.91
C2	0.94	0.94	0.65	0.50	1.00	0.90	0.94
D1	0.89	0.86	0.94	0.81	0.31	1.00	0.87
D2	0.88	0.85	0.95	0.79	0.33	1.00	0.86
E1	0.98	0.88	0.83	0.63	0.46	0.75	0.80
E2	0.90	0.87	0.81	0.59	0.30	0.75	0.79
F1	0.75	0.88	0.70	0.51	0.63	0.90	0.81
F2	0.83	0.82	0.91	0.61	0.47	0.75	0.85
G1	0.85	0.80	0.75	0.52	0.25	0.55	0.82
G2	0.82	0.53	0.59	0.40	0.36	0.50	0.80
H1	0.62	0.78	0.77	0.73	0.22	0.70	0.83
H2	0.78	0.78	0.86	0.77	0.39	0.75	0.84
I1	0.70	0.71	0.79	0.48	0.42	0.90	0.85
I2	0.80	0.80	0.80	0.55	0.38	0.95	0.85
J1	0.98	0.83	0.87	0.79	0.49	0.95	0.86
J2	0.78	0.77	0.89	0.50	0.20	0.85	0.81
K1	0.87	0.82	0.82	0.57	0.35	0.70	0.85
K2	0.92	0.74	0.68	0.46	0.59	0.75	0.77
L1	0.73	0.56	0.67	0.44	0.41	0.70	0.77
L2	0.68	0.68	0.63	0.47	0.26	0.70	0.76
M1	0.54	0.40	0.61	0.42	0.16	0.60	0.75
M2	0.55	0.42	0.50	0.42	0.18	0.60	0.75
N1	0.52	0.46	0.51	0.38	0.11	0.80	0.85
N2	0.97	0.91	0.50	0.65	0.34	1.00	0.86
O1	0.57	0.39	0.40	0.38	0.11	0.60	0.78
O2	0.58	0.49	0.58	0.39	0.15	0.85	0.87
P1	0.59	0.61	0.59	0.41	0.12	0.90	0.87
P2	0.61	0.65	0.60	0.43	0.13	0.80	0.80

VALUADORES

TIPO DE TERRENOS	1	2	3	4	5	6	7
Q1	0.66	0.38	0.62	0.44	0.19	0.75	0.74
Q2	0.98	0.83	0.73	0.71	0.44	0.98	0.80
R1	0.38	0.38	0.46	0.37	0.20	0.70	0.70
R2	0.79	0.81	0.72	0.49	0.56	0.85	0.85

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA N° 2

VALUADORES

TIPO DE TERRENOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
CI1	0.83	0.70	0.50	0.85	0.70	0.85	0.85	0.65	0.85	0.80	0.85	0.85	0.85
CI2	0.88	0.98	0.60	0.90	0.77	0.90	0.90	0.70	0.90	0.85	0.90	0.90	0.90
CI3	0.90	1.00	0.73	0.93	0.77	0.90	0.93	0.70	0.90	0.90	0.95	0.93	0.90
CI4	0.90	0.95	0.73	0.93	0.77	0.90	0.93	0.70	0.90	0.96	0.95	0.93	0.90
FB1	0.81	0.75	0.56	0.84	0.77	0.90	0.85	0.70	0.90	0.80	0.85	0.85	0.90
FB2	0.85	0.88	0.58	0.89	0.77	0.95	0.90	0.70	0.95	0.85	0.90	0.90	0.95
FB3	0.85	0.93	0.85	0.95	0.77	0.80	0.92	0.70	0.95	0.93	0.95	0.90	0.98
FB4	0.85	0.93	0.60	0.90	0.77	0.75	0.95	0.75	0.90	0.96	0.95	0.80	0.90
FV1	0.81	0.83	0.50	0.73	0.77	0.75	0.85	0.60	0.75	0.80	0.75	0.80	0.90
FV2	0.85	0.90	0.58	0.84	0.77	0.90	0.90	0.65	0.85	0.85	0.85	0.95	0.95
FV3	0.85	0.95	0.59	0.90	0.77	0.80	0.93	0.65	0.85	0.90	0.95	0.90	0.95
FV4	0.85	1.00	0.60	0.90	0.77	0.75	0.95	0.65	0.85	0.96	1.00	0.85	0.95
RB1	0.81	0.75	0.46	0.85	0.73	0.90	0.85	0.65	0.85	0.80	0.80	0.90	0.90
RB2	0.85	0.85	0.52	0.89	0.77	0.95	0.88	0.75	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85
RB3	0.85	0.90	0.45	0.90	0.77	0.90	0.90	0.70	0.90	0.93	0.90	0.80	0.80
RB4	0.85	0.90	0.46	0.90	0.77	0.85	0.93	0.70	0.90	0.96	0.90	0.75	0.85
RI1	0.80	0.75	0.54	0.88	0.50	0.75	0.70	0.65	0.80	0.73	0.80	0.75	0.65
RI2	0.83	0.85	0.56	0.91	0.50	0.80	0.80	0.70	0.85	0.82	0.85	0.90	0.70
RI3	0.86	0.90	0.50	0.94	0.55	0.80	0.85	0.70	0.90	0.86	0.90	0.85	0.75
RI4	0.90	0.92	0.46	0.85	0.77	0.85	0.95	0.60	0.90	0.89	0.85	0.90	0.80
RL1	0.90	1.00	0.46	0.91	0.87	0.85	0.90	0.85	0.90	0.90	1.00	0.90	0.90
RL2	0.96	1.00	0.46	0.92	0.87	0.75	0.93	0.85	0.90	0.96	0.95	0.80	0.90
RL3	0.95	0.95	0.45	0.85	0.73	0.90	0.90	0.75	0.85	0.90	0.95	0.85	0.85
RL4	0.85	0.88	0.45	0.90	0.73	0.85	0.90	0.75	0.80	0.96	1.00	0.80	0.85
RL5	0.82	0.92	0.51	0.70	0.73	0.80	0.85	0.75	0.90	0.80	0.80	0.85	0.96
RL6	1.00	0.90	0.52	0.85	0.87	0.90	0.88	0.75	0.95	0.80	0.90	0.95	0.85
RL7	0.85	0.95	0.52	0.85	0.73	1.00	0.90	0.75	0.95	0.85	0.95	0.95	0.95
RL8	1.00	0.95	0.53	0.90	0.87	1.00	0.93	0.80	0.95	0.85	1.00	1.00	0.90
RP1	0.80	0.98	0.65	0.88	0.92	1.00	0.95	0.85	0.90	0.95	0.90	0.90	0.95
RP2	0.83	0.95	0.42	0.91	0.69	1.00	0.95	0.75	0.90	0.56	0.85	0.85	0.85
RP3	0.86	0.95	0.64	0.94	0.84	1.00	0.93	0.85	0.90	0.93	0.90	0.90	0.90
RP4	0.90	0.90	0.35	0.85	0.65	0.90	0.90	0.65	0.80	0.83	0.85	0.80	0.85

VALUADORES

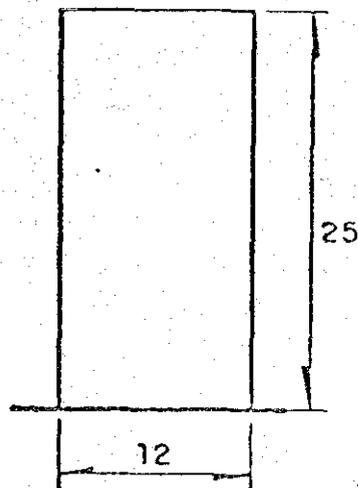
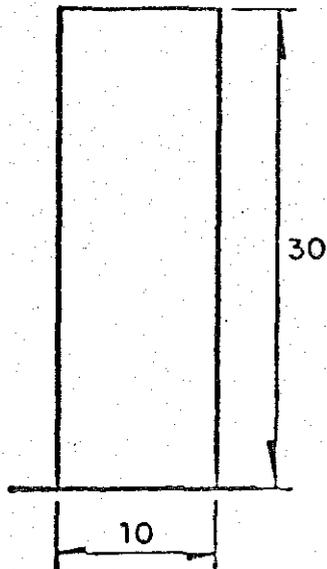
TIPO DE TERRENOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
RS1	0.96	1.00	1.00	0.90	0.80	0.80	0.95	0.80	0.90	0.96	1.00	0.90	1.00
RS2	0.90	1.00	1.00	0.80	0.80	0.80	0.90	0.80	0.95	0.90	1.00	0.95	1.00
RS3	0.85	0.98	1.00	0.80	0.78	0.80	0.95	0.80	0.95	0.85	1.00	0.95	1.00
RS4	0.80	0.95	1.00	0.75	0.75	0.75	0.85	0.75	0.95	0.80	0.90	0.95	0.90
TF1	1.00	0.93	0.46	0.90	0.87	0.75	0.95	0.80	0.90	0.95	1.00	0.85	0.85
TF2	1.00	0.97	0.46	0.88	0.87	0.85	0.93	0.80	0.90	0.93	1.00	0.90	0.85
TF3	1.00	0.95	0.46	0.87	0.87	1.00	0.95	0.85	0.90	0.92	1.00	0.90	0.85
TF4	0.97	0.91	0.43	0.95	0.87	0.95	0.85	0.80	0.95	0.85	0.90	0.80	0.85
TP1	0.82	0.70	0.51	0.71	0.73	0.90	0.85	0.60	0.85	0.80	0.80	0.80	0.85
TP2	0.85	0.98	0.52	0.89	0.73	1.00	0.90	0.75	0.85	0.85	0.90	0.90	0.90
TP3	0.82	1.00	0.45	0.95	0.75	0.85	0.93	0.75	0.85	0.90	0.95	0.85	0.85
TP4	0.82	0.95	0.46	0.88	0.73	0.75	0.93	0.75	0.85	0.96	0.95	0.85	0.85

300 m²

A 2

300 m²

86

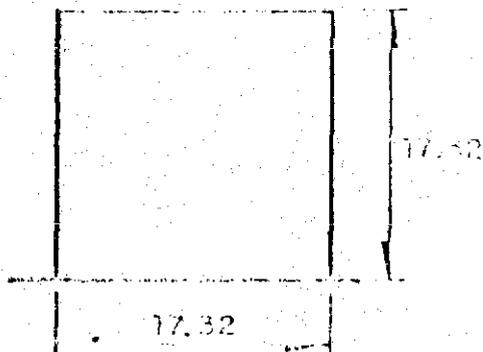
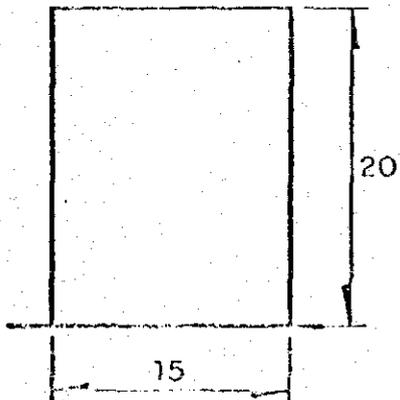


300 m²

B 2

300 m²

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

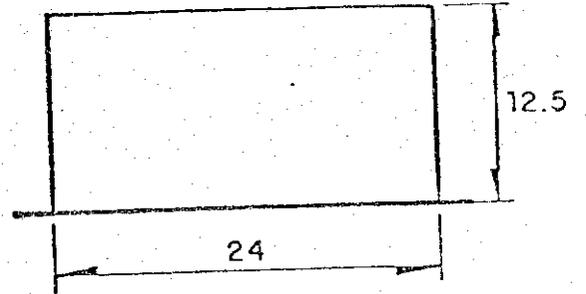
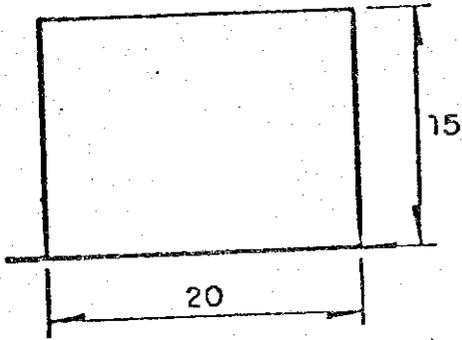


300 m²

C2

300 m²

87

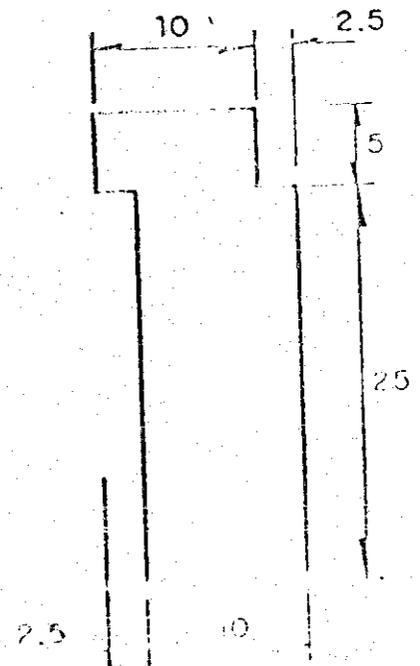
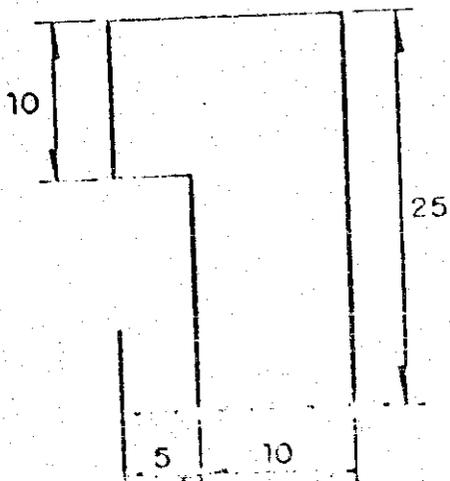


TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

300 m²

D2

300 m²



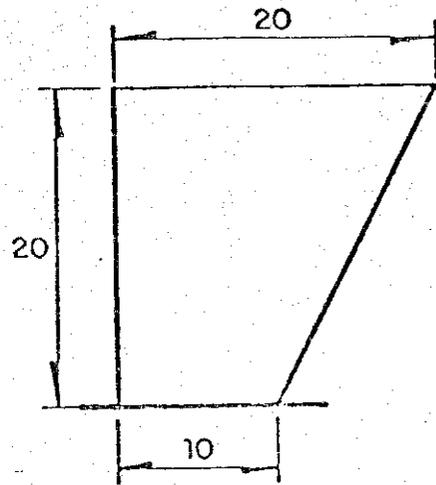
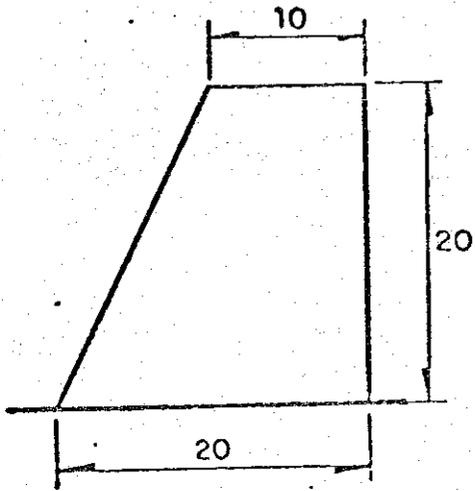
300 m²

E2

300 m²

88

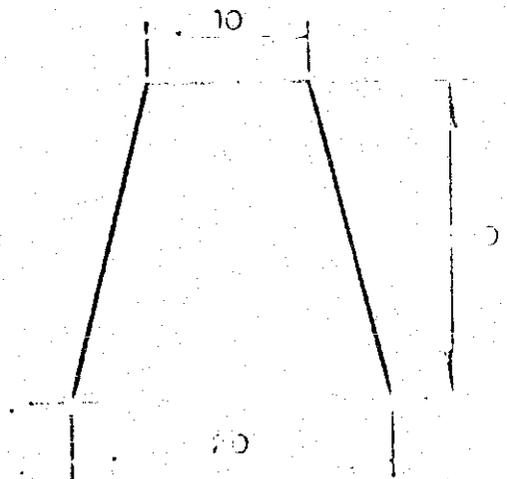
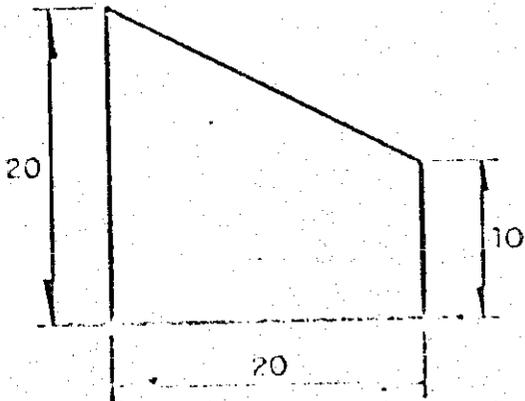
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



300 m²

F2

300 m²

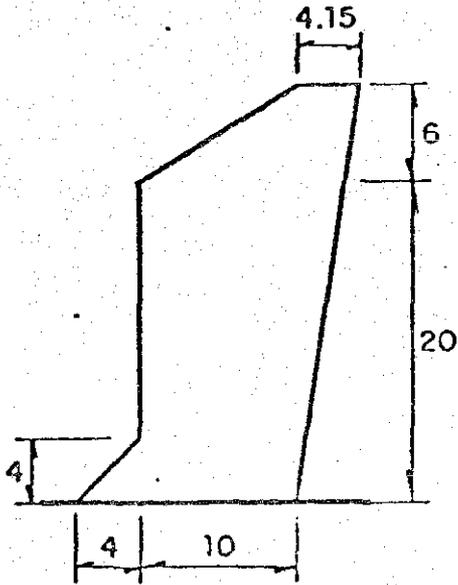


300 m²

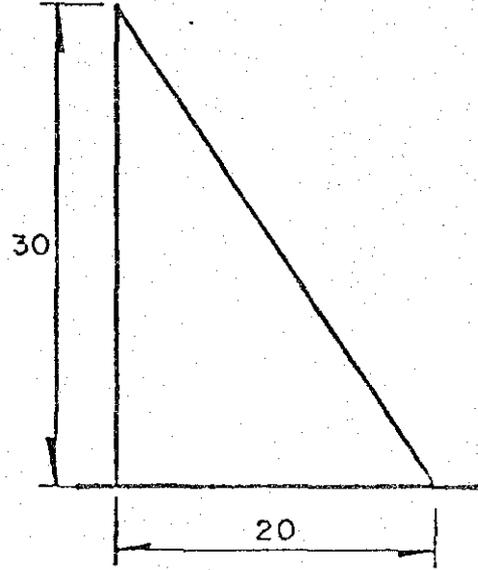
G2

300 m²

89



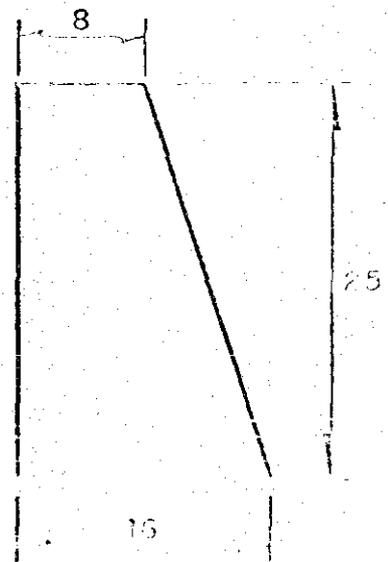
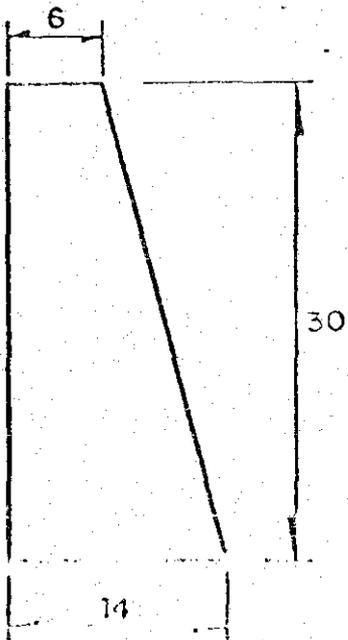
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



300 m²

H2

300 m²

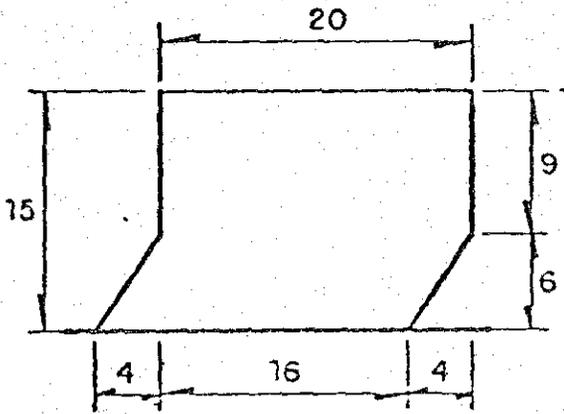


300 m²

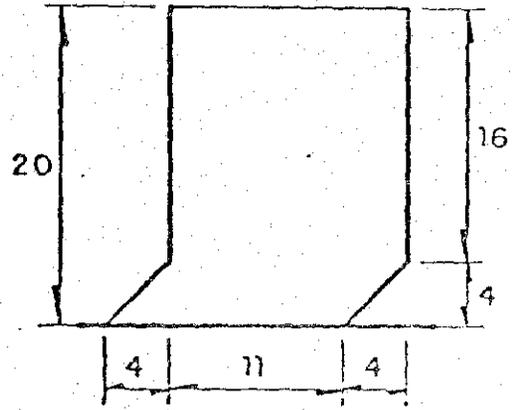
I 2

300 m²

90



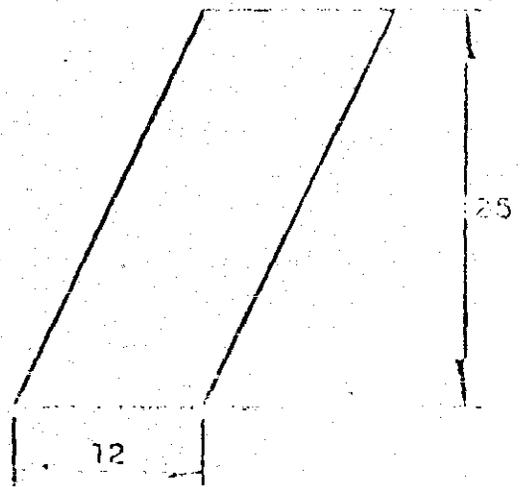
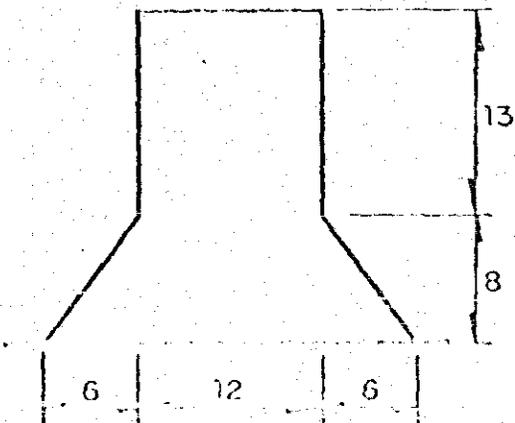
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



300 m²

J 2

300 m²



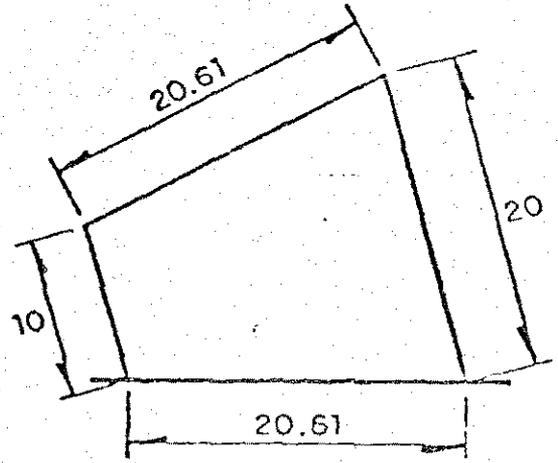
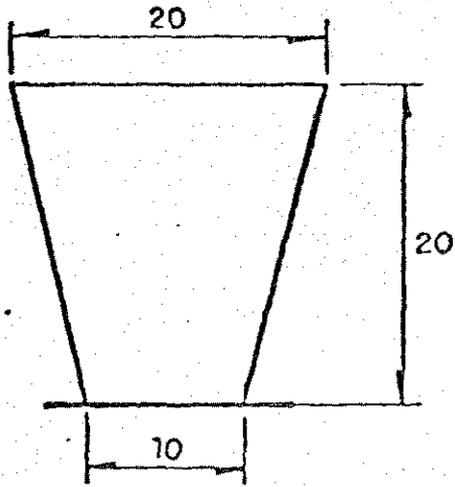
300 m²

K2

300 m²

91

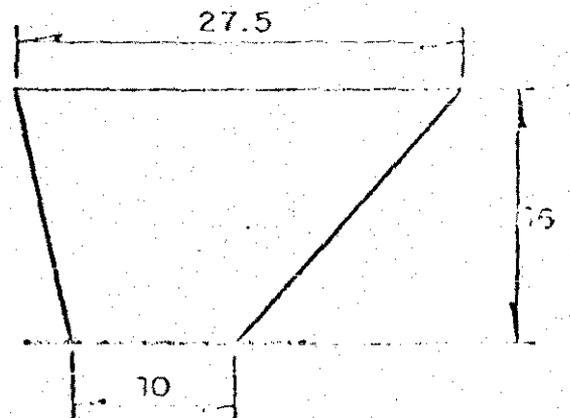
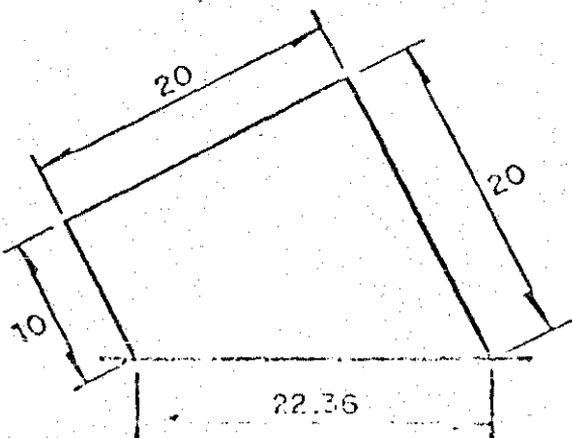
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



300 m²

L2

300 m²

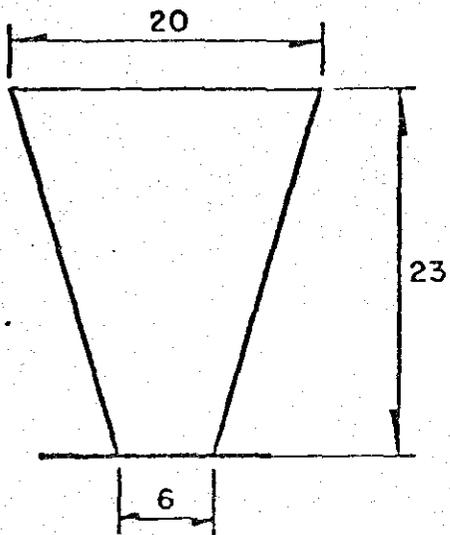


300 m²

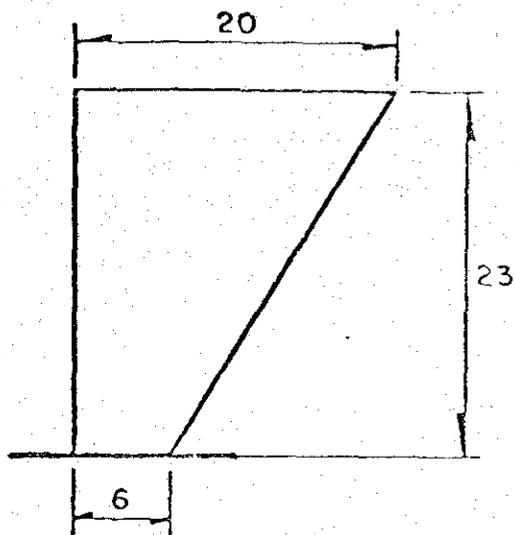
M2

300 m²

92



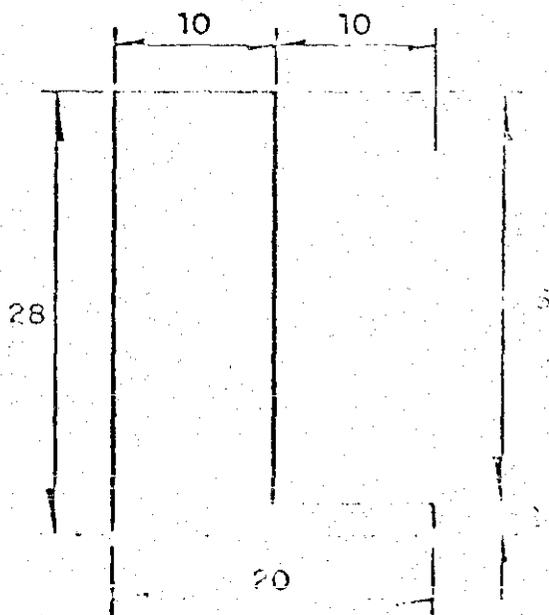
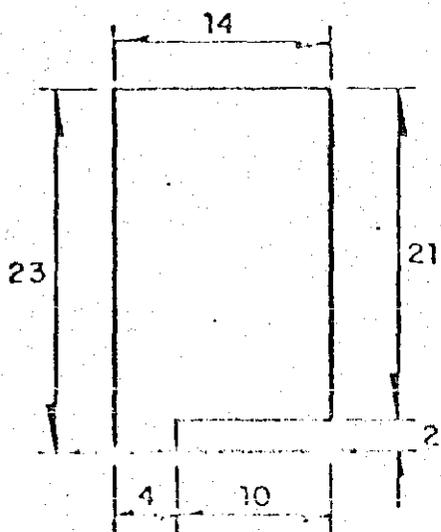
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



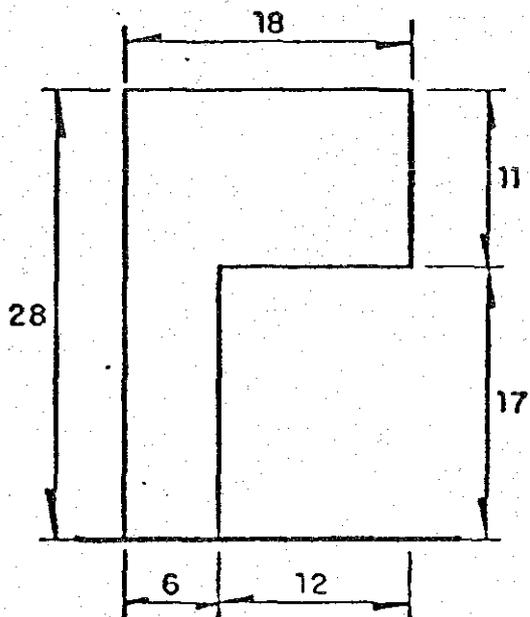
300 m²

N2

300 m²



300 m²

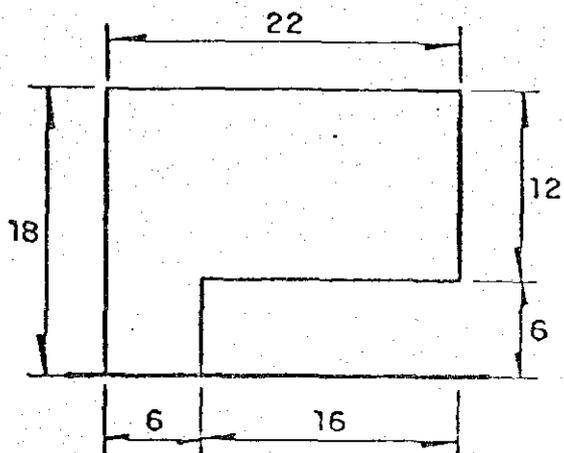


02

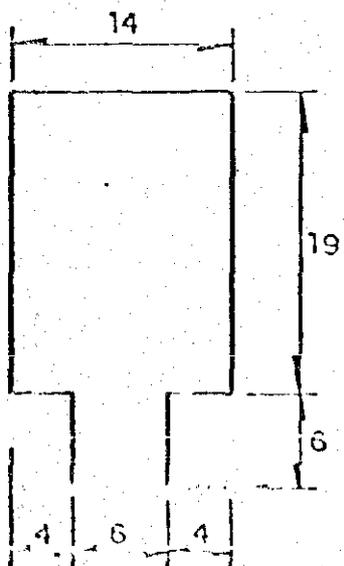
300 m²

93

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

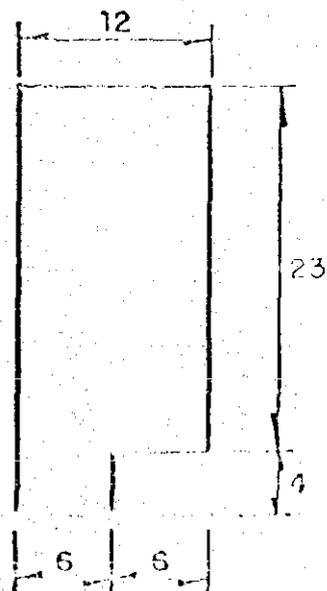


300 m²



P 2

300 m²

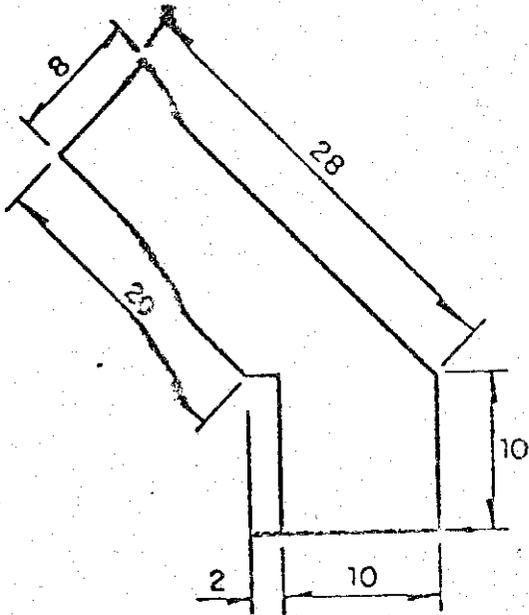


300 m²

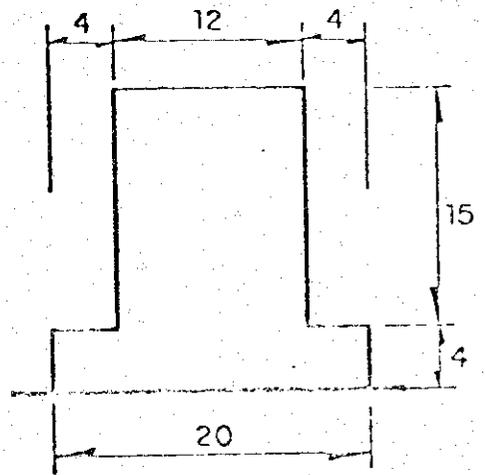
Q 2

300 m²

94



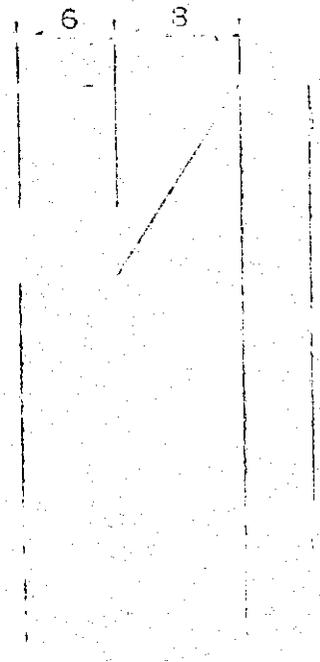
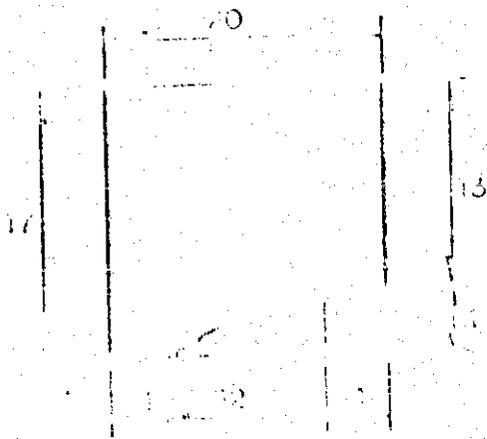
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



300 m²

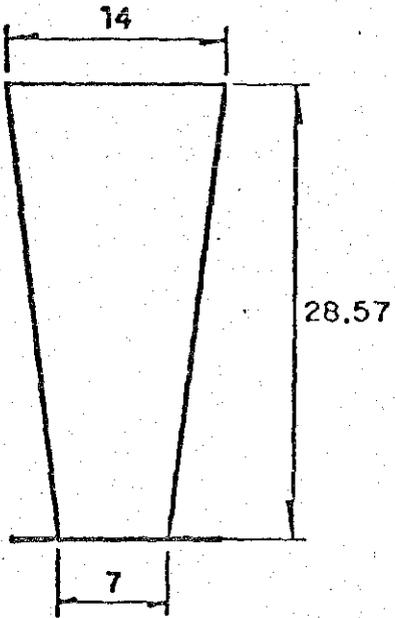
R 2

300 m²



1

300 m²

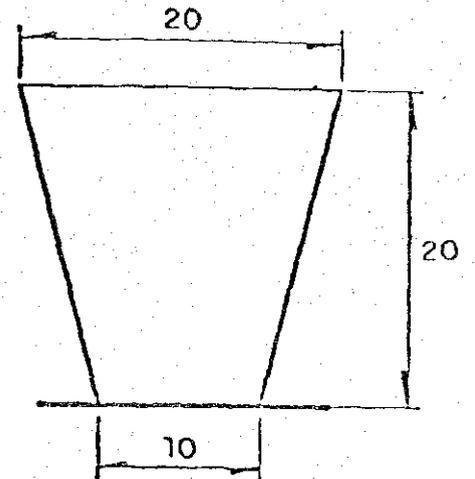


CI 2

300 m²

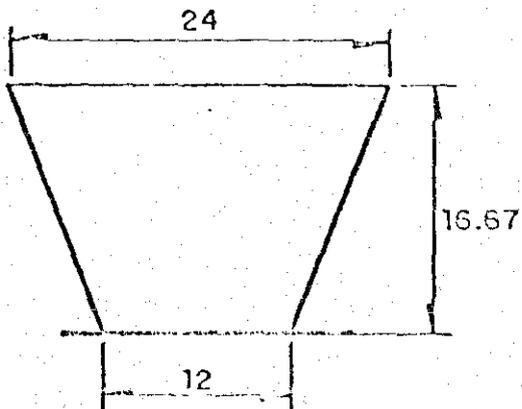
95

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



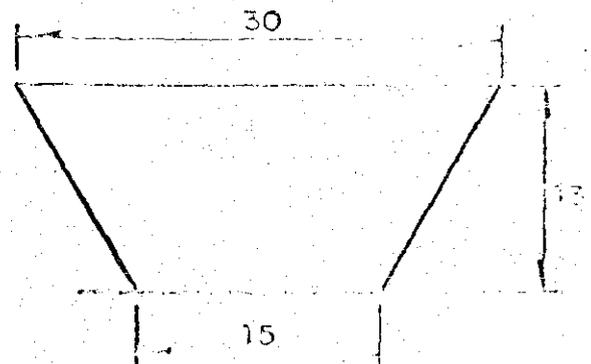
3

300 m²



CI 4

300 m²

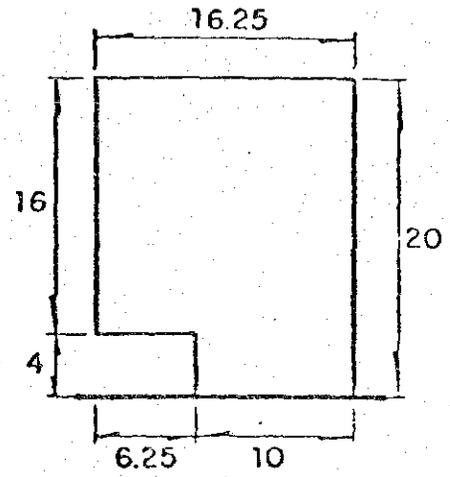
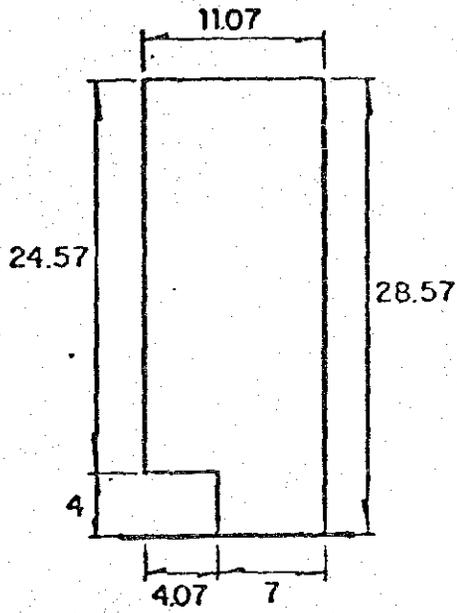


300 m²

FB 2

300 m²

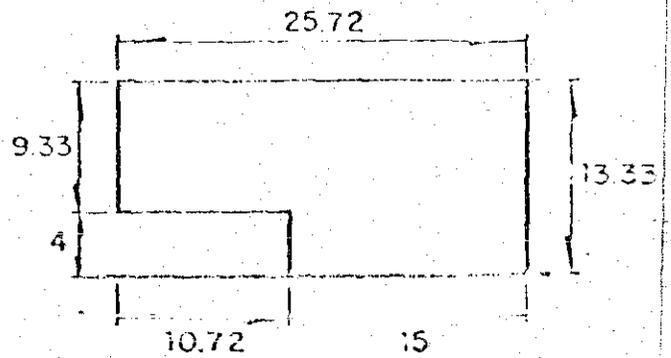
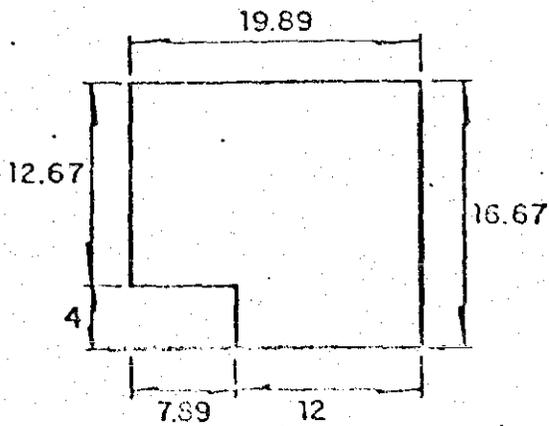
96



3 300 m²

FB 4

300 m²

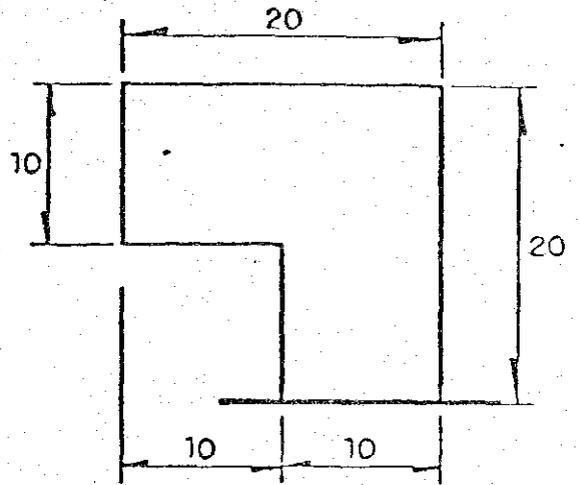
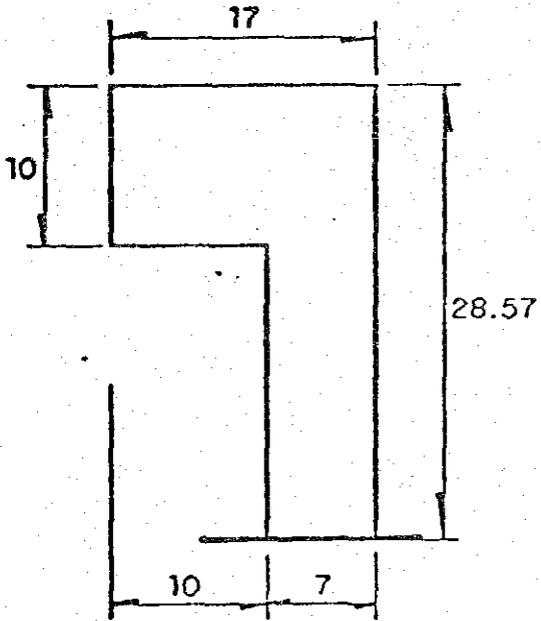


300 m²

FV 2

300 m²

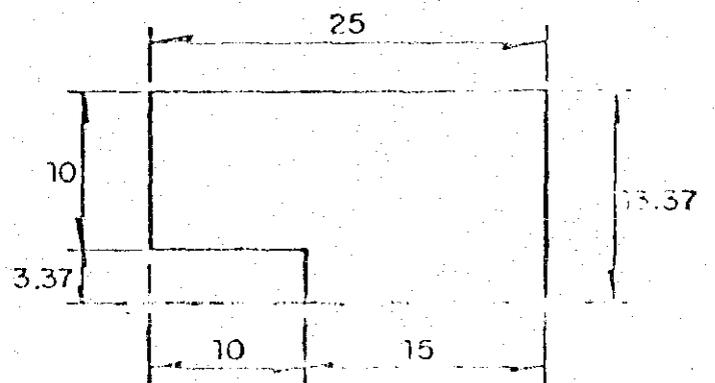
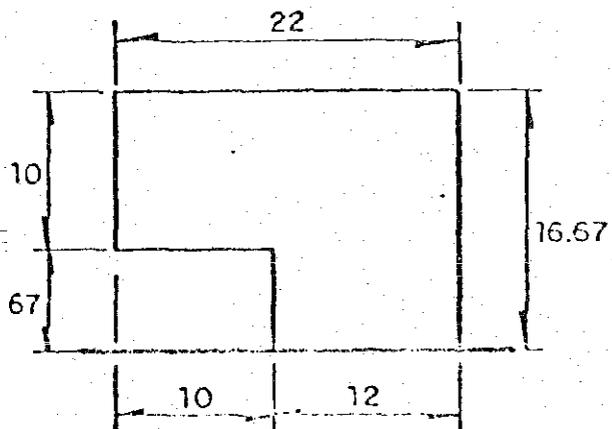
97



300 m²

FV 4

300 m²

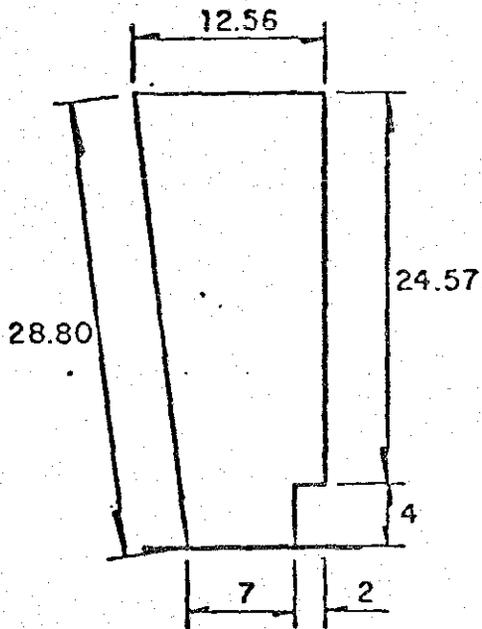


300 m²

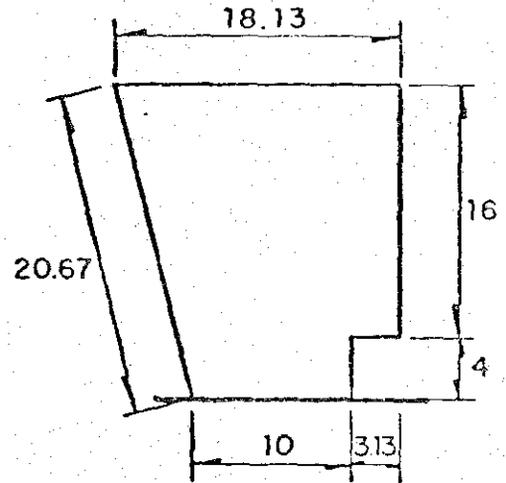
RB 2

300 m²

98



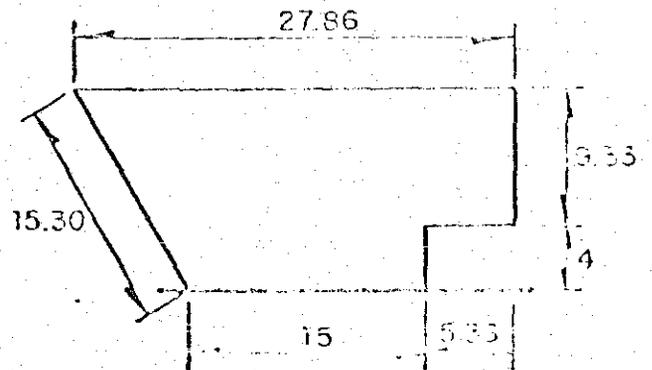
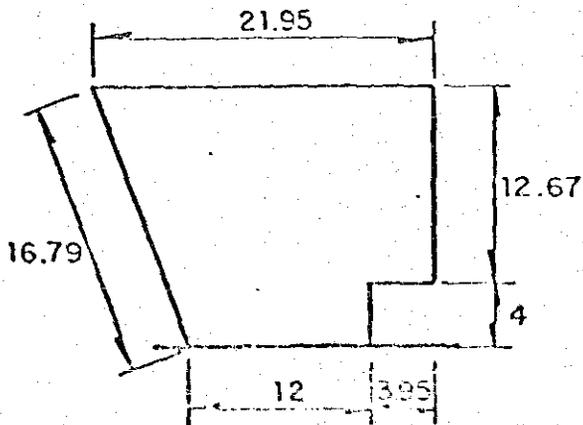
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



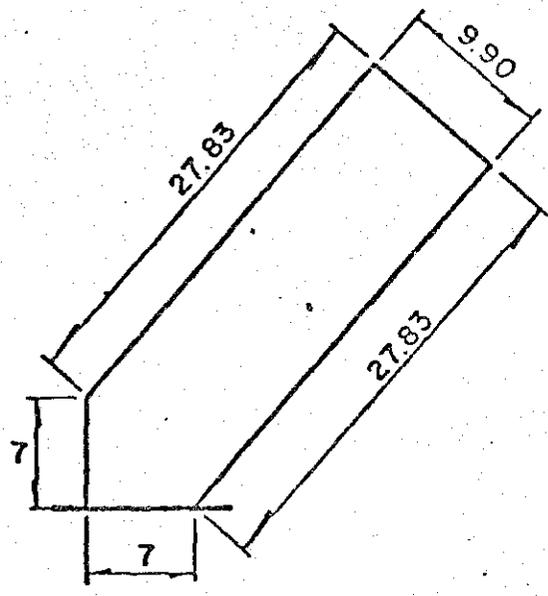
300 m²

RB 4

300 m²

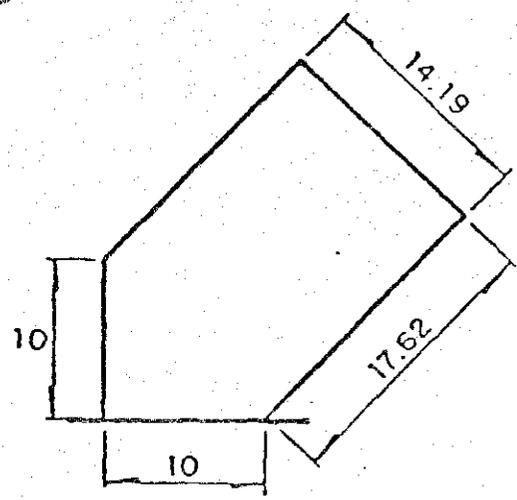


1 300 m²

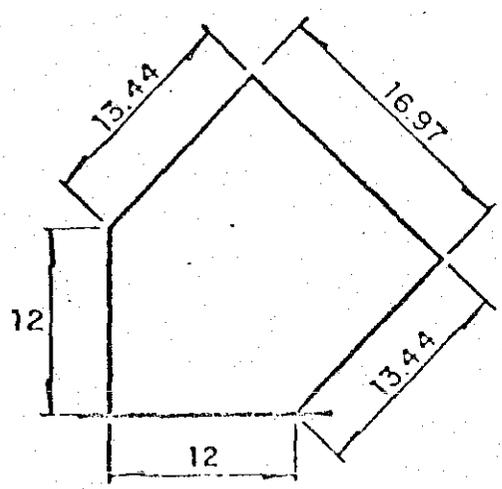


RI 2 300 m² 99

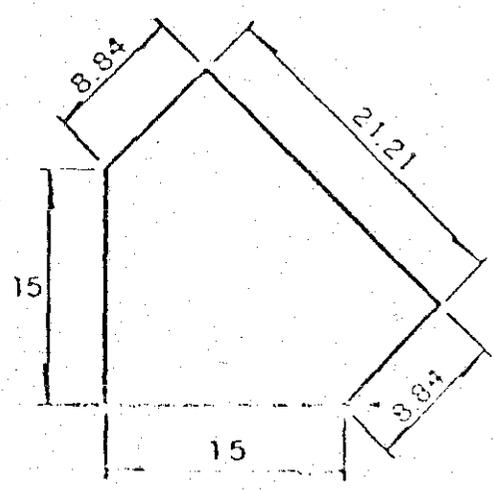
TESIS CON FALLA DE ORIGEN



3 300 m²



RI 4 300 m²

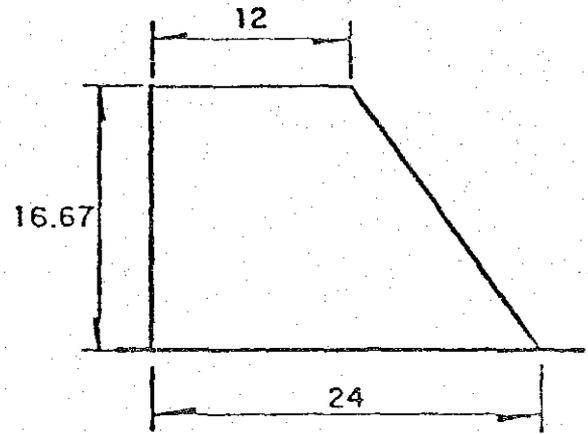
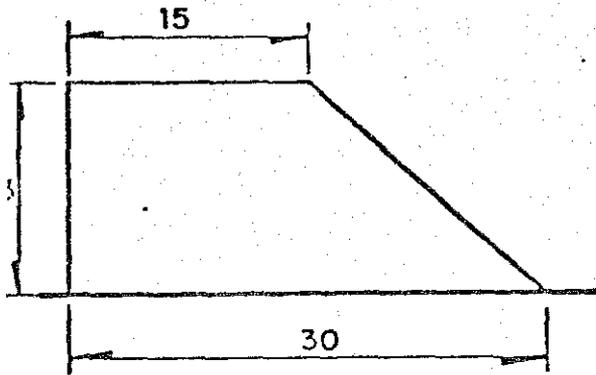


300 m²

RL 1

300 m²

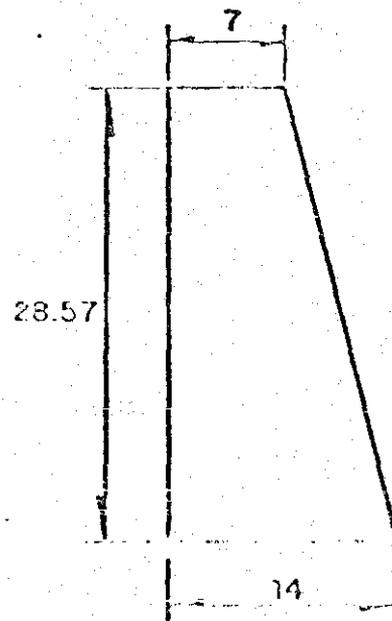
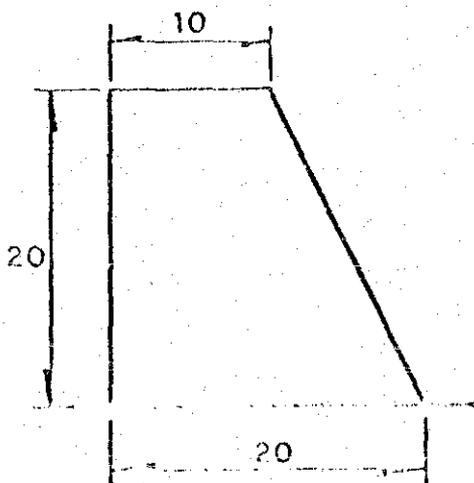
100



300 m²

RL 6

300 m²

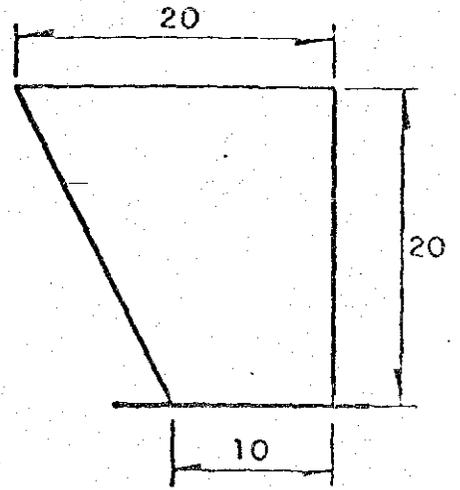
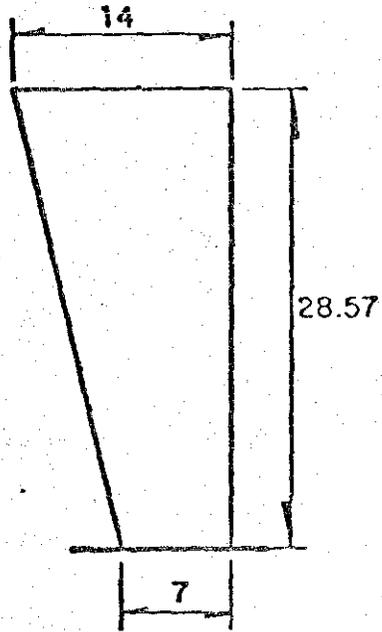


300 m²

RL 7

300 m²

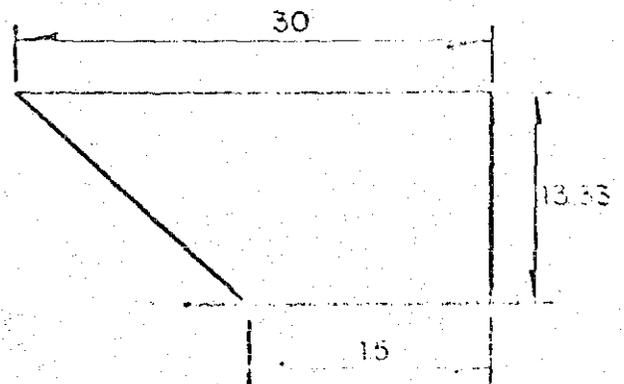
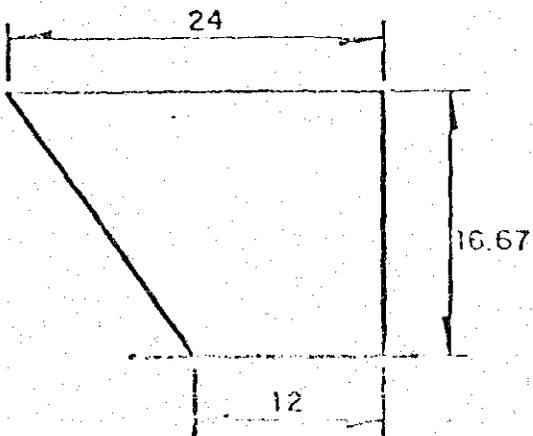
101



300 m²

RL 4

300 m²

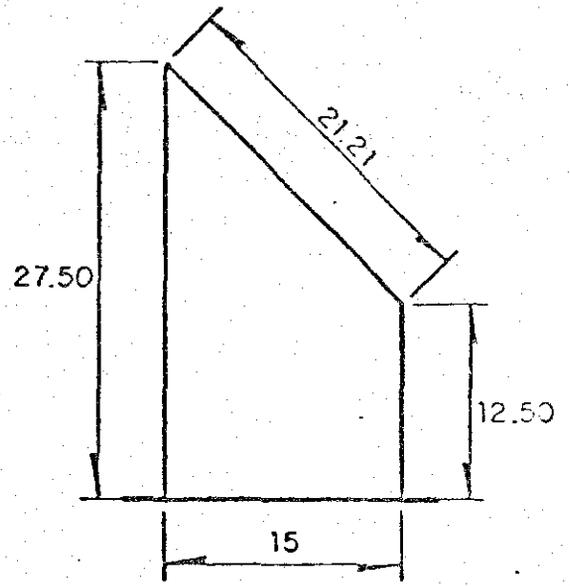
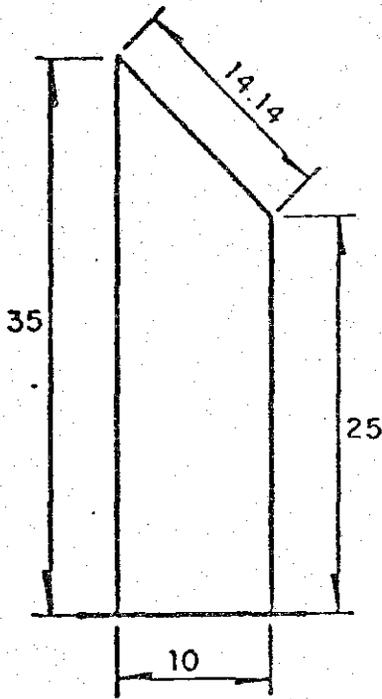


300 m²

RP 2

300 m²

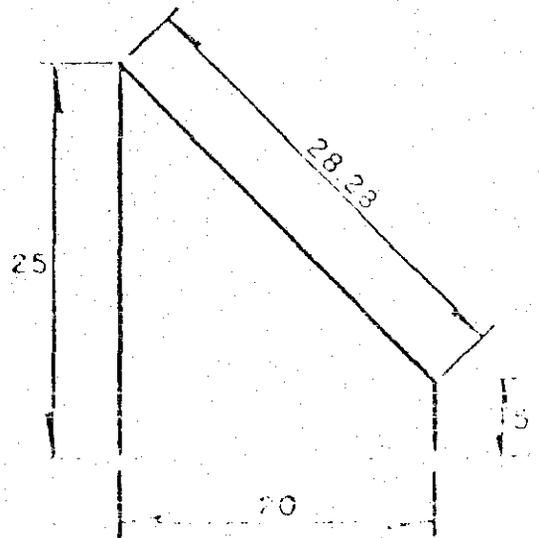
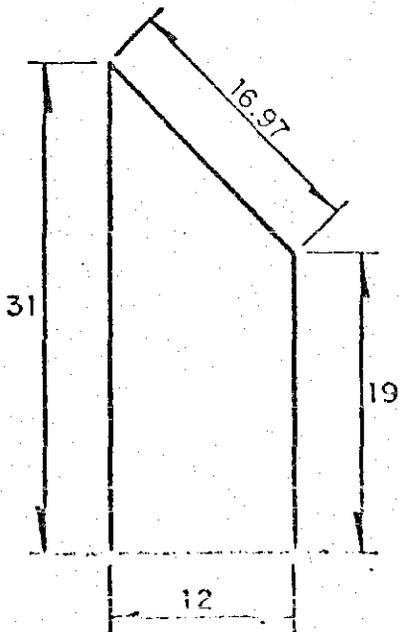
102



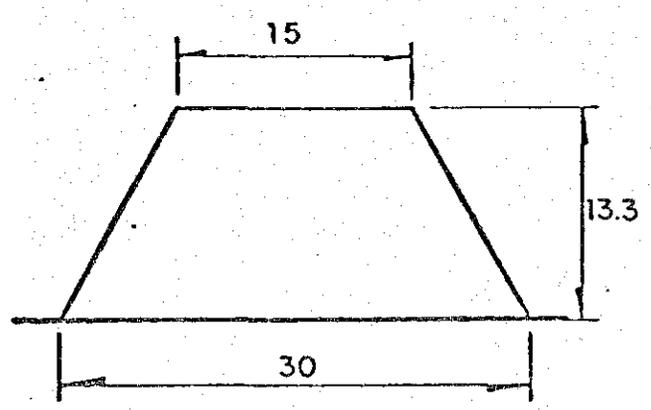
300 m²

RP 4

300 m²

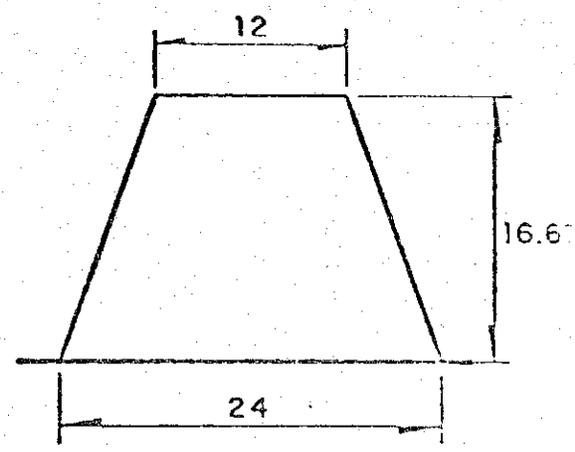


1 | 300 m²

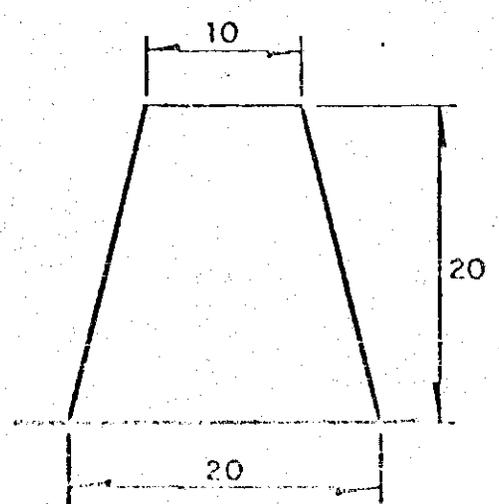


RS 2 | 300 m²

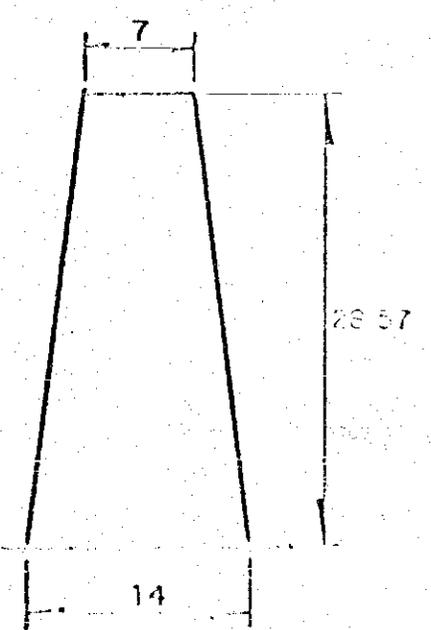
103



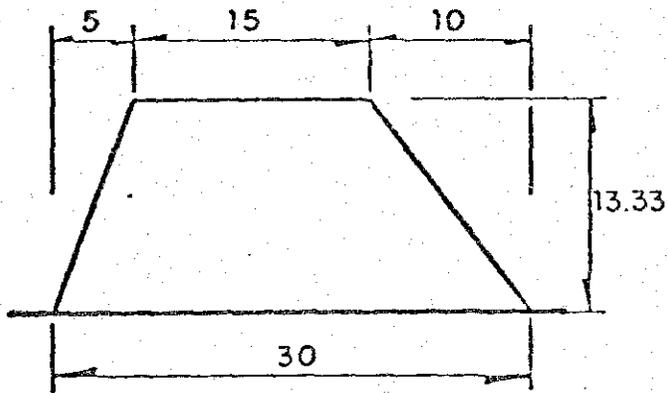
3 | 300 m²



RS 4 | 300 m²



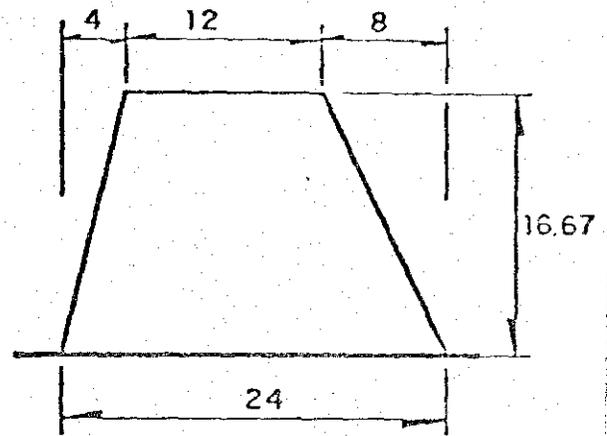
300 m²



TF 2.

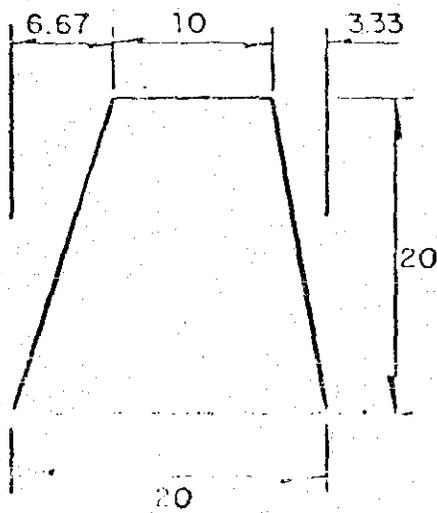
300 m²

104



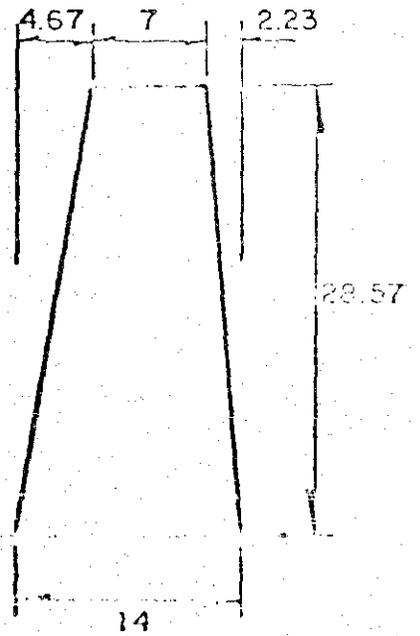
3

300 m²



TF 4

300 m²

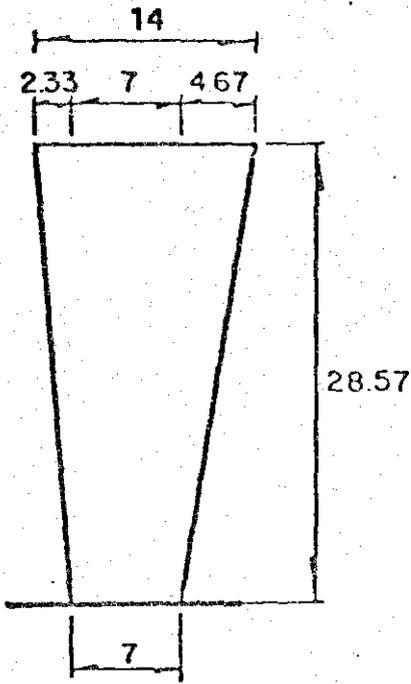


300 m²

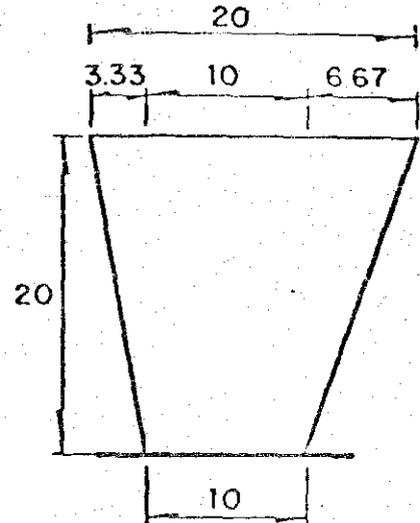
TP 2

300 m²

105



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



3

300 m²

TP 4

300 m²

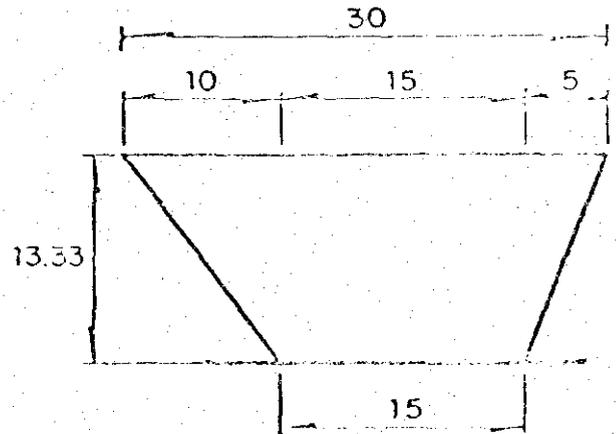
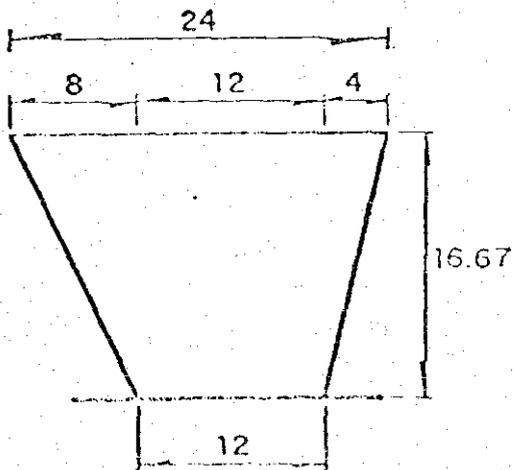
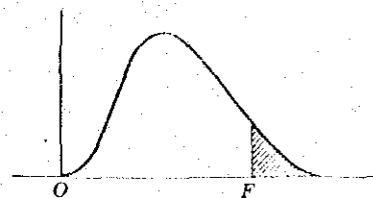


TABLA 3



Grados de libertad para el denominador (r_2)	Grados de libertad para el numerador (r_1)																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	247 6058	243 6082	244 6106	245 6142	246 6169	248 6208	247 6234	250 6258	251 6286	252 6307	253 6323	254 6334	254 6352	254 6361	254 6356
2	18.51 92.49	19.00 99.01	19.15 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.45 99.47	19.47 99.48	19.47 99.48	19.48 99.49	19.49 99.49	19.49 99.49	19.50 99.50	19.50 99.50
3	10.13 34.12	9.55 30.81	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.60 26.41	8.58 26.30	8.57 26.27	8.56 26.21	8.54 26.18	8.54 26.14	7.53 25.12
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.71 13.74	5.70 13.69	5.68 13.61	5.66 13.57	5.65 13.52	5.64 13.48	5.63 13.46
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.29	4.44 9.24	4.42 9.17	4.40 9.13	4.38 9.07	4.37 9.04	4.36 9.02
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.25	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79	4.00 7.72	3.96 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.77 7.14	3.75 7.09	3.72 7.02	3.71 6.99	3.69 6.94	3.68 6.90	3.67 6.88
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.34 5.90	3.32 5.85	3.29 5.78	3.28 5.75	3.25 5.70	3.24 5.67	3.23 5.65
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 5.36	3.12 5.28	3.08 5.20	3.05 5.11	3.03 5.06	3.00 5.00	2.98 4.96	2.96 4.91	2.94 4.88	2.93 4.86
9	5.12 10.56	4.25 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26	3.10 5.18	3.07 5.11	3.02 5.00	2.98 4.92	2.93 4.80	2.90 4.73	2.86 4.64	2.82 4.56	2.80 4.51	2.77 4.45	2.76 4.41	2.73 4.36	2.72 4.33	2.71 4.31

10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.67 4.17	2.64 4.12	2.61 4.05	2.59 4.01	2.56 3.96	2.55 3.93	2.54 3.91
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46	2.79 4.40	2.74 4.29	2.70 4.21	2.65 4.10	2.61 4.02	2.57 3.94	2.53 3.86	2.50 3.80	2.47 3.74	2.45 3.70	2.42 3.66	2.41 3.62	2.40 3.60
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22	2.69 4.16	2.64 4.05	2.60 3.98	2.54 3.86	2.50 3.78	2.46 3.70	2.42 3.62	2.40 3.56	2.36 3.49	2.35 3.46	2.32 3.42	2.31 3.38	2.30 3.36
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02	2.60 3.96	2.55 3.85	2.51 3.78	2.46 3.67	2.42 3.59	2.38 3.51	2.34 3.42	2.32 3.37	2.28 3.30	2.26 3.27	2.24 3.21	2.22 3.18	2.21 3.16
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86	2.53 3.80	2.48 3.70	2.44 3.62	2.39 3.51	2.35 3.43	2.31 3.34	2.27 3.26	2.24 3.21	2.21 3.14	2.19 3.11	2.16 3.06	2.14 3.02	2.13 3.00
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.29 3.29	2.25 3.20	2.21 3.12	2.18 3.07	2.15 3.00	2.12 2.97	2.10 2.92	2.08 2.89	2.07 2.87
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61	2.42 3.55	2.37 3.45	2.33 3.37	2.28 3.25	2.24 3.18	2.20 3.10	2.16 3.01	2.13 2.96	2.09 2.89	2.07 2.86	2.04 2.80	2.02 2.77	2.01 2.75
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52	2.38 3.45	2.33 3.35	2.29 3.27	2.23 3.16	2.19 3.08	2.15 3.00	2.11 2.92	2.08 2.86	2.04 2.79	2.02 2.76	1.99 2.70	1.97 2.67	1.96 2.65
18	4.41 8.28	3.55 6.01	3.16 5.09	2.93 4.58	2.77 4.25	2.66 4.01	2.58 3.85	2.51 3.71	2.46 3.60	2.41 3.51	2.37 3.44	2.34 3.37	2.29 3.27	2.25 3.19	2.19 3.07	2.15 3.00	2.11 2.91	2.07 2.83	2.04 2.78	2.00 2.71	1.98 2.68	1.95 2.62	1.93 2.59	1.92 2.57
19	4.38 8.18	3.52 5.93	3.13 5.01	2.90 4.50	2.74 4.17	2.63 3.94	2.55 3.77	2.48 3.63	2.43 3.52	2.38 3.43	2.34 3.36	2.31 3.30	2.26 3.19	2.21 3.12	2.15 3.00	2.11 2.92	2.07 2.84	2.02 2.76	2.00 2.70	1.96 2.63	1.94 2.60	1.91 2.54	1.90 2.51	1.88 2.49
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37	2.31 3.30	2.28 3.23	2.23 3.13	2.18 3.05	2.12 2.94	2.08 2.86	2.04 2.77	1.99 2.69	1.96 2.63	1.92 2.56	1.90 2.53	1.87 2.47	1.85 2.44	1.84 2.42
21	4.32 8.02	3.47 5.78	3.07 4.87	2.84 4.37	2.68 4.04	2.57 3.81	2.49 3.65	2.42 3.51	2.37 3.40	2.32 3.31	2.28 3.24	2.23 3.17	2.20 3.07	2.15 2.99	2.09 2.88	2.05 2.80	2.00 2.72	1.96 2.63	1.93 2.58	1.89 2.51	1.87 2.47	1.84 2.42	1.82 2.38	1.81 2.36
22	4.30 7.94	3.44 5.72	3.05 4.82	2.82 4.31	2.66 3.99	2.55 3.76	2.47 3.59	2.40 3.45	2.35 3.35	2.30 3.26	2.26 3.18	2.23 3.12	2.18 3.02	2.13 2.94	2.07 2.83	2.03 2.75	1.98 2.67	1.93 2.58	1.91 2.53	1.87 2.46	1.84 2.42	1.81 2.37	1.80 2.33	1.78 2.31
23	4.28 7.88	3.42 5.66	3.03 4.76	2.80 4.26	2.64 3.94	2.53 3.71	2.45 3.54	2.38 3.41	2.32 3.30	2.28 3.21	2.24 3.14	2.20 3.07	2.14 2.97	2.10 2.89	2.04 2.78	2.00 2.70	1.96 2.62	1.91 2.53	1.88 2.48	1.84 2.41	1.82 2.37	1.79 2.32	1.77 2.28	1.76 2.26
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.43 3.50	2.36 3.36	2.30 3.25	2.26 3.17	2.22 3.09	2.18 3.01	2.13 2.93	2.09 2.85	2.02 2.74	1.98 2.66	1.94 2.58	1.89 2.49	1.86 2.44	1.82 2.36	1.80 2.33	1.76 2.27	1.74 2.23	1.73 2.21
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.41 3.46	2.34 3.32	2.28 3.21	2.24 3.13	2.20 3.05	2.16 2.99	2.11 2.89	2.06 2.81	2.00 2.70	1.96 2.62	1.92 2.54	1.87 2.45	1.84 2.40	1.80 2.32	1.77 2.29	1.74 2.23	1.72 2.19	1.71 2.17

libertad para el denominador (r_2)	Grados de libertad para el numerador (r_1)																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.89 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.39 3.42	2.32 3.29	2.27 3.17	2.22 3.09	2.18 3.02	2.15 2.96	2.10 2.86	2.05 2.77	1.99 2.66	1.95 2.58	1.90 2.50	1.85 2.41	1.82 2.36	1.78 2.28	1.76 2.25	1.72 2.19	1.68 2.15	1.64 2.13	1.60
27	4.21 7.68	3.35 5.49	2.96 4.60	2.73 4.11	2.57 3.79	2.46 3.56	2.37 3.39	2.30 3.26	2.25 3.14	2.20 3.06	2.16 2.98	2.13 2.93	2.08 2.83	2.03 2.74	1.97 2.63	1.93 2.55	1.88 2.47	1.84 2.38	1.80 2.33	1.76 2.25	1.74 2.21	1.71 2.16	1.68 2.12	1.64 2.10	1.60
28	4.20 7.64	3.34 5.45	2.95 4.57	2.71 4.07	2.56 3.76	2.44 3.53	2.36 3.36	2.29 3.23	2.24 3.11	2.19 3.03	2.15 2.95	2.12 2.90	2.06 2.80	2.02 2.71	1.96 2.60	1.91 2.52	1.87 2.44	1.81 2.35	1.78 2.30	1.75 2.22	1.72 2.18	1.69 2.13	1.67 2.09	1.64 2.06	1.60
29	4.18 7.60	3.33 5.52	2.93 4.54	2.70 4.04	2.54 3.73	2.43 3.50	2.35 3.33	2.28 3.20	2.22 3.08	2.16 3.00	2.14 2.92	2.10 2.87	2.05 2.77	2.00 2.68	1.94 2.57	1.90 2.49	1.85 2.41	1.80 2.32	1.77 2.27	1.73 2.19	1.71 2.15	1.68 2.10	1.65 2.06	1.62 2.03	1.58
30	4.17 7.56	3.32 5.39	2.92 4.51	2.69 4.02	2.53 3.70	2.42 3.47	2.34 3.30	2.27 3.17	2.21 3.06	2.16 2.98	2.12 2.90	2.09 2.84	2.04 2.74	1.99 2.66	1.93 2.55	1.89 2.47	1.84 2.38	1.79 2.29	1.76 2.24	1.72 2.16	1.69 2.13	1.66 2.07	1.64 2.03	1.62 2.01	1.58
32	4.15 7.50	3.30 5.34	2.90 4.46	2.67 3.97	2.51 3.66	2.40 3.40	2.32 3.25	2.25 3.12	2.19 3.01	2.14 2.94	2.10 2.86	2.07 2.80	2.02 2.70	1.97 2.62	1.91 2.51	1.86 2.42	1.82 2.34	1.76 2.25	1.74 2.20	1.69 2.12	1.67 2.08	1.64 2.07	1.61 2.02	1.59 1.98	1.55
34	4.13 7.44	3.28 5.29	2.88 4.42	2.65 3.93	2.49 3.61	2.38 3.38	2.30 3.21	2.23 3.08	2.17 2.97	2.12 2.89	2.06 2.82	2.05 2.76	2.00 2.66	1.95 2.58	1.89 2.47	1.84 2.38	1.80 2.30	1.74 2.21	1.71 2.15	1.67 2.08	1.64 2.04	1.61 1.98	1.59 1.94	1.57 1.91	1.53
36	4.11 7.39	3.26 5.25	2.86 4.38	2.63 3.89	2.48 3.58	2.36 3.35	2.28 3.18	2.21 3.04	2.15 2.94	2.10 2.86	2.06 2.78	2.03 2.72	1.89 2.62	1.93 2.54	1.87 2.43	1.82 2.35	1.78 2.26	1.72 2.17	1.69 2.12	1.65 2.04	1.62 2.00	1.59 1.94	1.56 1.90	1.55 1.87	1.51
38	4.10 7.35	3.25 5.21	2.85 4.34	2.62 3.86	2.46 3.54	2.35 3.32	2.26 3.15	2.19 3.02	2.14 2.91	2.09 2.82	2.05 2.75	2.02 2.69	1.96 2.59	1.92 2.51	1.85 2.40	1.80 2.32	1.76 2.22	1.71 2.14	1.67 2.08	1.63 2.00	1.60 1.97	1.57 1.90	1.54 1.86	1.53 1.84	1.49
40	4.08 7.31	3.23 5.18	2.84 4.31	2.61 3.83	2.45 3.51	2.34 3.29	2.25 3.12	2.18 2.99	2.12 2.88	2.07 2.80	2.04 2.73	2.00 2.66	1.95 2.56	1.90 2.49	1.84 2.37	1.79 2.29	1.74 2.20	1.69 2.11	1.66 2.05	1.61 1.97	1.59 1.94	1.55 1.88	1.53 1.84	1.51 1.81	1.47
42	4.07 7.27	3.22 5.15	2.83 4.29	2.59 3.80	2.44 3.49	2.32 3.26	2.24 3.10	2.17 2.96	2.11 2.86	2.06 2.76	2.02 2.70	1.99 2.64	1.94 2.54	1.89 2.46	1.82 2.35	1.78 2.26	1.73 2.17	1.68 2.08	1.64 2.02	1.60 1.94	1.57 1.91	1.54 1.85	1.51 1.80	1.49 1.78	1.45
44	4.06 7.24	3.21 5.12	2.82 4.26	2.58 3.78	2.43 3.46	2.31 3.24	2.23 3.07	2.16 2.94	2.10 2.84	2.05 2.75	2.01 2.68	1.98 2.62	1.92 2.52	1.88 2.44	1.81 2.32	1.76 2.24	1.72 2.15	1.66 2.06	1.63 2.00	1.58 1.92	1.56 1.88	1.52 1.82	1.50 1.78	1.48 1.75	1.44
46	4.05 7.21	3.20 5.10	2.81 4.24	2.57 3.76	2.42 3.44	2.30 3.22	2.22 3.05	2.14 2.92	2.09 2.82	2.04 2.73	2.00 2.66	1.97 2.60	1.91 2.50	1.87 2.42	1.80 2.30	1.75 2.22	1.71 2.13	1.65 2.04	1.62 1.98	1.57 1.90	1.54 1.86	1.51 1.80	1.48 1.76	1.46 1.72	1.42
48	4.04 7.19	3.19 5.08	2.80 4.22	2.56 3.74	2.41 3.42	2.30 3.20	2.21 3.04	2.14 2.90	2.08 2.80	2.03 2.71	1.99 2.64	1.96 2.58	1.90 2.48	1.86 2.40	1.79 2.28	1.74 2.20	1.70 2.11	1.64 2.02	1.61 1.96	1.56 1.88	1.53 1.84	1.50 1.78	1.47 1.73	1.45 1.70	1.41

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70	1.98 2.62	1.95 2.56	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18	1.69 2.10	1.63 2.00	1.60 1.94	1.55 1.86	1.52 1.82	1.48 1.76	1.46 1.71	1.44 1.68	1.40
55	4.02 7.12	3.17 5.01	2.78 4.16	2.54 3.68	2.38 3.37	2.27 3.15	2.18 2.98	2.11 2.85	2.05 2.75	2.00 2.66	1.97 2.59	1.93 2.53	1.88 2.43	1.83 2.35	1.76 2.23	1.72 2.15	1.67 2.06	1.61 1.96	1.58 1.90	1.52 1.82	1.50 1.78	1.46 1.71	1.43 1.66	1.41 1.64	1.37
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.34	2.25 3.12	2.17 2.95	2.10 2.82	2.04 2.72	1.99 2.63	1.95 2.56	1.92 2.50	1.86 2.40	1.81 2.32	1.75 2.20	1.70 2.12	1.65 2.03	1.59 1.93	1.56 1.87	1.50 1.79	1.48 1.74	1.44 1.68	1.41 1.63	1.39 1.60	1.35
65	3.99 7.04	3.14 4.95	2.75 4.10	2.51 3.62	2.36 3.31	2.24 3.09	2.15 2.93	2.08 2.79	2.02 2.70	1.98 2.62	1.94 2.54	1.90 2.47	1.85 2.37	1.80 2.30	1.73 2.18	1.68 2.09	1.63 2.00	1.57 1.90	1.54 1.84	1.49 1.79	1.46 1.71	1.42 1.64	1.39 1.60	1.37 1.56	1.33
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.08	2.50 3.60	2.35 3.29	2.32 3.07	2.14 2.91	2.07 2.77	2.01 2.67	1.97 2.59	1.93 2.51	1.89 2.45	1.84 2.35	1.79 2.28	1.72 2.15	1.67 2.07	1.62 1.98	1.56 1.88	1.53 1.82	1.47 1.74	1.45 1.69	1.40 1.63	1.37 1.56	1.35 1.53	1.31
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.48 3.56	2.33 3.25	2.21 3.04	2.12 2.87	2.05 2.74	1.99 2.64	1.95 2.55	1.91 2.48	1.88 2.41	1.82 2.32	1.77 2.24	1.70 2.11	1.65 2.03	1.60 1.94	1.54 1.84	1.51 1.78	1.45 1.70	1.42 1.65	1.38 1.57	1.35 1.52	1.32 1.49	1.28
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.99	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.59	1.92 2.51	1.88 2.43	1.85 2.36	1.79 2.26	1.75 2.19	1.68 2.06	1.63 1.98	1.57 1.89	1.51 1.79	1.48 1.73	1.42 1.64	1.39 1.59	1.34 1.51	1.30 1.46	1.28 1.43	1.24
125	3.92 6.84	3.07 4.78	2.68 3.94	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.08 2.79	2.01 2.65	1.95 2.56	1.90 2.47	1.86 2.40	1.83 2.33	1.77 2.23	1.72 2.15	1.65 2.03	1.60 1.94	1.55 1.85	1.49 1.75	1.45 1.68	1.39 1.59	1.36 1.54	1.31 1.48	1.27 1.40	1.25 1.37	1.21
150	3.91 6.81	3.06 4.75	2.67 3.91	2.43 3.44	2.27 3.13	2.16 2.92	2.07 2.76	2.00 2.62	1.94 2.53	1.89 2.44	1.85 2.37	1.82 2.30	1.76 2.20	1.71 2.12	1.64 2.00	1.59 1.91	1.54 1.83	1.47 1.72	1.44 1.66	1.37 1.56	1.34 1.51	1.29 1.43	1.25 1.37	1.22 1.33	1.18
200	3.89 6.76	3.04 4.71	2.65 3.86	2.41 3.41	2.26 3.11	2.14 2.90	2.05 2.73	1.98 2.60	1.92 2.50	1.87 2.41	1.83 2.34	1.80 2.28	1.74 2.17	1.69 2.09	1.62 1.97	1.57 1.88	1.52 1.79	1.45 1.69	1.42 1.62	1.35 1.53	1.32 1.48	1.27 1.49	1.22 1.33	1.19 1.28	1.15
400	3.86 6.70	3.02 4.66	2.62 3.83	2.39 3.36	2.23 3.06	2.12 2.85	2.03 2.69	1.96 2.55	1.90 2.46	1.85 2.37	1.81 2.29	1.78 2.23	1.72 2.12	1.67 2.04	1.60 1.97	1.54 1.84	1.48 1.74	1.45 1.64	1.38 1.57	1.32 1.47	1.28 1.42	1.22 1.37	1.16 1.24	1.13 1.19	1.09
500	3.85 6.66	3.00 4.62	2.61 3.80	2.38 3.34	2.22 3.04	2.10 2.87	2.02 2.66	1.95 2.53	1.89 2.43	1.84 2.34	1.80 2.26	1.76 2.20	1.70 2.09	1.65 2.01	1.58 1.89	1.53 1.81	1.47 1.71	1.41 1.61	1.36 1.54	1.30 1.44	1.26 1.38	1.19 1.28	1.13 1.19	1.08 1.11	1.04
	3.84 6.64	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.80	2.01 2.64	1.94 2.51	1.88 2.41	1.83 2.32	1.79 2.24	1.75 2.18	1.69 2.07	1.64 1.99	1.57 1.87	1.52 1.79	1.46 1.69	1.40 1.59	1.35 1.52	1.28 1.41	1.24 1.36	1.17 1.25	1.11 1.15	1.06 1.00	1.00

APARTADO 3.A

En este apartado se presentan los cálculos del análisis de la varianza correspondientes al párrafo 3.6 según los datos presentados en las Tablas 1 y 2 de este apéndice.

Para mayor comodidad en el proceso de los datos, los valores de S_r , S_c , S_e y S_r , no se calcularon directamente según las fórmulas (3.20.a), (3.20.b), (3.20.c) y (3.20.d) sino partiendo de las siguientes expresiones

$$\sum_{j=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^c (\sum_{i=1}^r x_{ij})^2 - \frac{1}{r^2 c} (\sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij})^2 \quad (3.A.1)$$

$$\sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^r x_{ij}^2 - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^c (\sum_{i=1}^r x_{ij})^2 \quad (3.A.2)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij}^2 - \frac{1}{rc} (\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij})^2 \quad (3.A.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (3.A.4)$$

De (3.A.4) se despeja, por supuesto el término

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2$$

el cual figura en (3.20.c).

Correspondiendo a la primera etapa de los experimentos cuyos datos se presentan en la Tabla 1 compuesta de 7 columnas y 36 renglones se obtuvieron los siguientes resultados evaluados con el auxilio de una calculadora programable Hewlett Packard 33 E.

$$\sum_{j=1}^7 \left(\sum_{i=1}^{36} x_{ij} \right)^2 = 4,578.5029 \quad (3.A.5)$$

$$\sum_{i=1}^{36} \left(\sum_{j=1}^7 x_{ij} \right)^2 = 887.4319 \quad (3.A.6)$$

$$\sum_{j=1}^7 \sum_{i=1}^{36} x_{ij} = 175.6106 \quad (3.A.7)$$

$$\sum_{j=1}^7 \sum_{i=1}^{36} x_{ij}^2 = 134.7935 \quad (3.A.8)$$

y de aquí de acuerdo a las fórmulas (3.A.1), (3.A.2), (3.A.3) y (3.A.4) se obtuvo

$$\sum_{j=1}^7 (\bar{x}_{.j} - \bar{\bar{x}})^2 = 0.1334 \quad (3.A.9)$$

$$\sum_{j=1}^7 \sum_{i=1}^{36} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = 7.6127 \quad (3.A.10)$$

$$\sum_{i=1}^{36} \sum_{j=1}^7 (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = 12.4168 \quad (3.A.11)$$

$$\sum_{i=1}^{36} (\bar{x}_{i.} - \bar{\bar{x}})^2 = 0.6285 \quad (3.A.12)$$

$$\sum_{i=1}^{36} \sum_{j=1}^7 (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2 = 3.2149 \quad (3.A.13)$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (3.20) se obtienen de inmediato los valores que aparecen en la Tabla (3.6.2). Análogamente, correspondiendo a la segunda etapa de los experimentos cuyos datos se presentan en la Tabla 2 compuesta de 13 columnas y 44 renglones se obtuvieron los siguientes resultados también evaluados con el auxilio de una calculadora programable Hewlett Packard 33 E.

$$\sum_{j=1}^{13} \left(\sum_{i=1}^{44} x_{ij} \right)^2 = 17,974.0601 \quad (3.A.14)$$

$$\sum_{i=1}^{44} \left(\sum_{j=1}^{13} x_{ij} \right)^2 = 5,289.6389 \quad (3.A.15)$$

$$\sum_{j=1}^{13} \sum_{i=1}^{44} x_{ij} = 480.4100 \quad (3.A.16)$$

$$\sum_{j=1}^{44} \sum_{i=1}^{13} x_{ij}^2 = 412.1739 \quad (3.A.17)$$

y de aquí de acuerdo a las fórmulas (3.A.1), (3.A.2), (3.A.3) y (3.A.4) se obtuvo

$$\sum_{j=1}^{13} (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = 0.1140 \quad (3.A.18)$$

$$\sum_{j=1}^{13} \sum_{i=1}^{44} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = 3.6725 \quad (3.A.19)$$

$$\sum_{i=1}^{44} \sum_{j=1}^{13} (x_{ij} - \bar{x})^2 = 8.7784 \quad (3.A.20)$$

$$\sum_{i=1}^{44} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 0.0848 \quad (3.A.21)$$

$$\sum_{i=1}^{44} \sum_{j=1}^{13} (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2 = 2.5699 \quad (3.A.22)$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (3.20) se obtienen de inmediato los valores que aparecen en la Tabla 3.6.3

APENDICE 4

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

APARTADO 4.A
4.A.1 FORMULAS USADAS PARA EVALUAR A f_1^i Y f_2^i .

En este Apartado se presentan los cálculos realizados con el propósito de evaluar a las constantes a_m , b_m , c_m y d_m las cuales figuran como constantes en f_1^i y f_2^i ; como se sabe

$$f_1^i(i) = \begin{cases} a_1 i + b_1; & 0 < i \leq 5 \\ a_2 i + b_2; & 5 \leq i \end{cases} \quad (3.6.a)$$

$$(3.6.b)$$

$$f_2^i(i) = \begin{cases} c_1 i + d_1; & 0 < i \leq 15 \\ c_2 i + d_2; & 15 \leq i \end{cases} \quad (3.7.a)$$

$$(3.7.b)$$

Los parámetros a_m y b_m se determinan minimizando a la función

$$F_m(a_m, b_m) = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (A_{m m} (a_m c_m (i-3)(l_i - 15) + a_m (i-3) + 3.3333 c_m (l_i - 15) + 3.3333) - p_{kj})^2 \quad (4.1)$$

y los parámetros b_m y c_m se encuentran por medio del siguiente par de ecuaciones

$$1350 a_m c_m + 900 a_m d_m + 4500 b_m c_m + 300 b_m d_m = 1000 \quad (3.9)$$

$$15 c_m + d_m = 1 \quad (3.10)$$

Como se dijo en la Sección 4.1, si $m=1$ estaremos considerando el caso de tenerse

$$i \leq 5 \quad \text{y} \quad l_i \geq 15$$

y si $m=2$, entonces

$$i > 5 \quad \text{siendo} \quad l_i \leq 15$$

Resolver este problema equivale a resolver el conjunto de ecuaciones $\nabla F_m(\bar{x}_0) = \bar{0}$, (3.9) y (3.10), lo cual desde luego en teoría no reviste mayor dificultad que efectuar el cálculo de simples derivaciones, sin embargo la resolución del sistema de ecuaciones así generado es demasiado laboriosa hasta el grado de que se consideró recurrir al empleo del método numérico de Newton. Así pues para encontrar los óptimos usaremos la siguiente fórmula*

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - H^{-1}(\bar{x}_n) \nabla F_m(\bar{x}_n) \quad (4.A.1)$$

donde $H(\bar{x}_n)$ es el hessiano de F_m y si es definido positivo o negativo la convergencia se garantiza independientemente de valor de \bar{x}_0 solo si F_m es estrictamente cóncava o convexa.

Luego como es bien sabido se tiene que

$$H^{-1}(\bar{x}_n) = \frac{1}{\Delta(\bar{x}_n)} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial c_m^2} & \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m \partial c_m} \\ \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m \partial c_m} & \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m^2} \end{bmatrix} \quad (4.A.2)$$

$$\Delta(\bar{x}_n) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m^2} & \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m \partial c_m} \\ \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial a_m \partial c_m} & \frac{\partial^2 F_m(\bar{x}_n)}{\partial c_m^2} \end{bmatrix} \quad (4.A.3)$$

Con el propósito de calcular las derivadas parciales haremos

$$w_{1j} = \sum_{i=1}^{n_j} A_i^j (i-3) (1, -15) \quad (4.A.4)$$

* Para mayores detalles consultar: Wismer David A., Chattergy, A., "Introduction to nonlinear optimization", North-Holland, 1978, pp. 33-51.

$$w_{2j} = \sum_{i=1}^{n_j} A_i^j (1-3) \quad (4.A.5)$$

$$w_{3j} = 3.3333 \sum_{i=1}^{n_j} A_i^j (1_i - 15) \quad (4.A.6)$$

$$w_{4j} = 3.3333 A_i^j \quad (4.A.7)$$

y así (4.1) se nos transforma en

$$F_m(a_m, c_m) = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (w_{1j} a_m^c + w_{2j} a_m + w_{3j} c_m + w_{4j} - p_{kj})^2 \quad (4.A.8)$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F_m}{\partial a_m} = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (w_{1j} a_m^c + w_{2j} a_m + w_{3j} c_m + w_{4j} - p_{kj}) (w_{1j} c_m + w_{2j}) \quad (4.A.9)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F_m}{\partial c_m} = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (w_{1j} a_m^c + w_{2j} a_m + w_{3j} c_m + w_{4j} - p_{kj}) (w_{1j} a_m + w_{3j}) \quad (4.A.10)$$

Una vez encontrados los valores numéricos de $\frac{\partial F_m}{\partial a_m}$ y $\frac{\partial F_m}{\partial c_m}$ ya nos será có-

modo calcular las segundas derivadas parciales de F_m .

4.A.2 EVALUACION DE LAS CONSTANTES a_1 , b_1 , c_1 y d_1 .

En esta sección estudiaremos el caso de tenerse $i \leq 5$, $1_i \geq 15$ siendo entonces $m=1$. Los tipos de terrenos sometidos a experimentación que corresponden a estas características son B1, B2, C1 y C2. Como se recordará, en la fórmula (4.1) el índice j nos denota el tipo de terreno y es pertinente en este punto aclarar que durante la presente sección convendremos en denotar a los terrenos B1, B2, C1 y C2 respectivamente de acuerdo con $j=1, 2, 3$ y 4 .

A continuación procederemos a calcular los valores de w_{1j} , w_{2j} , w_{3j} y w_{4j} para $j=1, 2, 3, 4$, conforme las fórmulas (4.A.4), (4.A.5), (4.A.6) y (4.A.7) y según los datos de las Tablas 1 y 2 así como los del Apartado B del Apéndice 3.

En las Tablas 4.A.1, 4.A.2, 4.A.3 y 4.A.4, se presentan los cálculos que permitieron evaluar a w_{1j} , w_{2j} , w_{3j} , w_{4j} , para los terrenos B1, B2, C1 y C2.

A continuación deberemos proceder a evaluar las fórmulas (4.A.9) y (4.A.10); desde luego este cálculo es bastante laborioso y por ellos se consideró conveniente auxiliarse de una calculadora programable Hewlett Packard 33E, así en la Tabla 4.A.5 se desarrolla el programa que se usó para cuantificar a $\frac{1}{2} \frac{\partial f_m}{\partial c_m}$ y en la Tabla 4.A.6 se presentan las instrucciones correspondientes

de conformidad con las siguientes fórmulas:

$$x_{1j} = w_{1j}^2 \quad (4.A.11)$$

$$x_{2j} = w_{1j} w_{2j} \quad (4.A.12)$$

$$x_{3j} = 2w_{1j} w_{2j} \quad (4.A.13)$$

$$x_{4j} = w_{1j} w_{2j} + w_{1j} p_{kj} \quad (4.A.14)$$

$$x_{5j} = w_{3j}^2 \quad (4.A.15)$$

$$x_{6j} = w_{3j} p_{kj} \quad (4.A.16)$$

y así (4.A.9) se transforma en

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f_m}{\partial a_m} = x_{1j} a_m c_m^2 + x_{2j} c_m^2 + x_{3j} a_m c_m + x_{4j} c_m + x_{5j} a_m + x_{6j} \quad (4.A.17)$$

Análogamente, en la Tabla 4.A.7 se presente el programa que se empleo para evaluar a $\frac{1}{2} \frac{\partial f_m}{\partial c_m}$ y en la Tabla 4.A.8 se ofrecen las instrucciones correspondientes de acuerdo a las siguientes fórmulas

$$y_{1j} = w_{1j}^2 \quad (4.A.18)$$

$$y_{2j} = w_{1j} w_{2j} \quad (4.A.19)$$

$$y_{3j} = 2w_{1j} w_{2j} \quad (4.A.20)$$

$$y_{4j} = (1000 - p_{kj}) w_{1j} + w_{2j} w_{3j} \quad (4.A.21)$$

$$y_{5j} = w_{3j}^2 \quad (4.A.22)$$

$$y_{6j} = (1000 - p_{kj}) x_{3j} \quad (4.A.23)$$

Y así (4.A.10) se transforma en

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f_m}{\partial c_m} = y_{1j} a_{mj}^2 c_m + y_{2j} a_{mj}^2 + y_{3j} a_{mj} c_m + y_{4j} a_{mj} + y_{5j} c_m + y_{6j} \quad (4.A.24)$$

Así pues, tomando los valores de p_{kj} para $k=1, 2, \dots, 7$ y $j=1, 2, 3, 4$ de acuerdo con la Tabla 1 del Apéndice 3 y partiendo de las fórmulas (4.A.17) y (4.A.24) se obtuvieron las siguientes expresiones para $m=1$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial a_1^2} = 42,159,890.02 c_1^2 + 10,410,968.356 c_1 + 703,171.59 \quad (4.A.25)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial a_1 \partial c_1} = 84,319,780.04 a_{11} c_1 + 10,410,968.35 a_1 - 328,264,741.60 c_1 - 27,337,410.42 \quad (4.A.26)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2} = 42,159,890.02 a_1^2 - 328,264,741.60 a_1 + 668,276,727.40 \quad (4.A.27)$$

Ahora bien, usando estas tres últimas fórmulas podemos ya calcular (4.A.2) y (4.A.3) los cuales intervienen en la fórmula

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - H^{-1}(\bar{x}_n) \nabla F_m(\bar{x}_n) \quad (4.A.1)$$

Los cálculos que preceden se efectuaron empleando una calculadora Radio Shack I y el programa correspondiente se omite con el deseo de no ser demasiado prolijos. Como punto inicial se tomó para a_1 el valor de 0.8275 y para b_1 el valor de -0.00587, datos obtenidos del examen preliminar del problema según el planteamiento del Apéndice 2. Así pues se obtuvo la siguiente secuencia

$$\text{Datos Iniciales } \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8275 \\ -0.00587 \end{pmatrix}$$

$$1^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.988192 \\ -7.30605 \text{ E-03} \end{pmatrix}$$

$$2^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.09426 \\ -5.91925 \text{ E-05} \end{pmatrix}$$

$$3^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,07585 \\ -4.68129 \text{ E-04} \end{pmatrix}$$

$$4^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.07526 \\ -4.88659 \text{ E-04} \end{pmatrix}$$

$$5^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.07526 \\ -4.88688 \text{ E-04} \end{pmatrix}$$

$$6^a \quad \text{Iteración} \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.07526 \\ -4.88616 \text{ E-04} \end{pmatrix} \quad (4.A.28)$$

Con estos valores se obtuvo de (3.9) y (3.10) que

$$b_1 = 0.1076$$

$$d_1 = 1.0073$$

y así llegamos finalmente a

$$f_1^i(i) = 1,0753 + 0.1076; \quad 0 < i \leq 3 \quad (4.2)$$

$$f_2^i(i) = -0.00051_i + 1.0073; \quad 20 \leq i, \quad (4.3)$$

Los valores encontrados para a_1 , b_1 , c_1 y d_1 nos garantizan las condiciones necesarias para obtener el valor mínimo de (4.2); pasaremos ahora a considerar la condición de suficiencia de conformidad a las dos siguientes proposiciones:

a) Una condición suficiente para que (4.1) tome su valor mínimo en

a_1, b_1, c_1 y d_1 , lo es que su hessiano $H(\bar{x})$ sea definido positivo.*

b) El hessiano $H(\bar{x})$ es definido positivo si y solo si los menores principales de la matriz H son positivos.

Así de (4.A.25), (4.A.26), (4.A.27) y (4.A.28) se sigue que el hessiano para $m=1$ es

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 690,094.6898 & - 317,111,443,8 \\ 317,111,443,8 & 364,051,374.4 \end{bmatrix} \quad (4.A.29)$$

y naturalmente este es definido positivo

4.A.3 EVALUACION DE LAS CONSTANTES a_2, b_2, c_2 y d_2 .

Ahora pasaremos a cuantificar a los parámetros a_2, b_2, c_2 y d_2 el cual corresponde al caso de tenerse $i \geq 5, i \leq 15$ siendo entonces $m=2$. Los tipos de terrenos sometidos a experimentación que corresponden a estas características son A1, A2 y B1; aclaramos que a los terrenos A1 y A2 los denotaremos respectivamente, durante la presente sección, con los subíndices $j=5$ y $j=6$. En las Tablas 4.A.1, 4.A.9 y 4.A.10 se presentan los cálculos que permitieron evaluar a $w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}, w_{4j}$, para los terrenos tipos B1, A1 y A2. A continuación deberemos proceder a evaluar las fórmulas (4.A.9) y (4.A.10), este cálculo, como en el caso de $m=1$ lo haremos auxiliados con los programas I y II presentados en las Tablas 4.A.5, 4.A.6, 4.A.7 y 4.A.8 y de conformidad a los fórmulas (4.A.17) y (4.A.24). Así pues tomando los valores de p_{kj} para $k=1, 2, \dots, 7$ y $j=5, 6$ de acuerdo con la Tabla I del Apéndice 3 se obtuvieron las siguientes expresiones para $m=2$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2^2} = 6,666,624c_2^2 - 2,716,416c_2 + 279,936 \quad (4.A.30)$$

* Ver Wismer David A., Chattergy, A., Introduction to nonlinear optimization, North-Holland, 1978.

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} = 13,333.248a_2c_2 + 93,337,722.32c_2 - 2,716.416a_2 - 12,533,535.62 \quad (4.A.31)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial c_2^2} = 6,666.624a_2 + 93,337,722.32a_2 + 341,167.827 \quad (4.A.32)$$

Ahora bien, tomando como punto de partida a

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.8 \\ -0.003 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en (4.A.1) se llega después de 9 iteraciones al siguiente resultado

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1078 \\ -1.63109 \text{ E-}03 \end{pmatrix} \quad (4.A.33)$$

de donde por medio de (3.9) y (3.10) se obtiene que

$$b_2 = 16.0229$$

$$d_2 = 1.0245$$

o sea

$$f_1'(i) = -2.1078i + 16.0229; \quad 5 \leq i \quad (4.4)$$

$$f_2'(l_i) = -0.0016l_i + 1.0245; \quad 0 < l_i < 20 \quad (4.5)$$

De acuerdo con (4.A.30), (4.A.31), (4.A.32) y (4.A.33) el hessiano para $m=2$ es

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 284,299.3322 & -6,912,248.219 \\ 6,912,248.219 & 370,589,705.7 \end{bmatrix} \quad (4.A.34)$$

y de acuerdo con las proposiciones a) y b) de esta sección se han encontrado los valores que minimizan a la función (4.1) para el caso $m=2$.

4.A.4 SEGUNDA EVALUACION DE LAS CONSTANTES a_2 , b_2 , c_2 Y d_2 .

Como se mencionó en la Sección 4.1 deberemos modificar el modelo que se utilizó para evaluar a las constantes a_2 , b_2 , c_2 y d_2 con el objeto de evitar los casos siguientes:

$$\begin{aligned} f_1'(i) < 0 & \text{ si } 8 < i \\ f_2(1_i) > 1 & \text{ si } c_2 < 0 \end{aligned}$$

Así, resolveremos el siguiente problema aplicando la Teoría Langrangiana con variables de holgura*.

$$\text{Min } F_2(a_2, b_2) \quad (4.6.a)$$

sujeta a

$$3a_2 + 5.4839 \geq 0 \quad (4.6.b)$$

$$c_2 \geq 0 \quad (4.6.c)$$

Primeramente definimos una variable de holgura para cada restricción

$$\theta_1^2 = 3a_2 + 5.4839 \quad (4.A.35)$$

$$\theta_2^2 = c_2 \quad (4.A.36)$$

teniéndose el siguiente problema equivalente

$$\text{Min } L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \quad (4.A.37)$$

*Ver Wismer A. David, Chattergy, R., Introduction to nonlinear optimization, North-Holland, 1978, pp. 65-69.

donde

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) = F_2(a_2, c_2) + \lambda_1(3a_2 + 5.4839 - \theta_1^2) + \lambda_2(c_2 - \theta_2^2)$$

$$\bar{x} = (a_2, c_2)$$

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$$

Resolveremos a (4.A.37) recurriendo de nuevo al método iterativo expresado por la ecuación (4.A.1), aquí observamos que el manejo del hessiano se facilita si trabajamos a la matriz por particiones; para clarificar la notación empleada presentaremos las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = \frac{\partial F_2(a_2, c_2)}{\partial a_2} + 3 \lambda_1 \tag{4.A.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{\partial F_2(a_2, c_2)}{\partial c_2} \tag{4.A.39}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -2 \lambda_1 \theta_1 \tag{4.A.40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -2 \lambda_2 \theta_2 \tag{4.A.41}$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \tag{4.A.42}$$

$$\nabla_{\bar{z}} L(\bar{z}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_2} \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \tag{4.A.43}$$

$$H(\bar{z}_n) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 L & \nabla_{x\lambda}^2 L \\ \nabla_{\lambda x}^2 L & \nabla_{\lambda\lambda}^2 L \end{bmatrix} \quad (4.A.44)$$

y de aquí se obtiene en consecuencia para nuestro caso particular en consideración

$$H(\bar{z}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} & 3 & 0 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial c_2^2} & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.A.45)$$

teniendo así

$$H^{-1}(\bar{z}_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & \frac{1}{9} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2^2} & \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial c_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.A.46)$$

De acuerdo con (4.A.1) se tiene ahora que

$$\bar{z}_{n+1} = \bar{z}_n - H^{-1}(\bar{z}_n) \nabla \bar{z} L(\bar{z}_n) \quad (4.A.47)$$

$$z_{n-1} = z_n^-$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & \frac{1}{9} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2^2} & \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \frac{\partial^2 F_2}{\partial a_2 \partial c_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial c_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial a_2} \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (4.A.47)$$

Este sistema se resolvió haciendo uso de una minicomputadora Radio Shack I en forma análoga a la presentada para la fórmula (4.A.1) en la sección anterior.

Con el objeto de no extendernos demasiado presentamos tan solo los resultados finales que son:

$$a_2 = -1.8280 \quad (4.A.48.a)$$

$$b_2 = 14.6237 \quad (4.A.48.b)$$

$$c_2 = 0 \quad (4.A.48.c)$$

$$d_2 = 1 \quad (4.A.48.d)$$

Aquí de nuevo la convergencia se garantiza si H es definida positiva; para garantizar esto basta según la condición b) de la Sección 4.A.2 analizar los menores principales de (4.A.45). Esta prueba es inmediata usando (4.A.30), (4.A.31) y (4.A.32) y en aras de la brevedad la omitimos.

APARTADO 4.B

4.B.1 EVALUACION DE LAS CONSTANTES e_1 y f_1 .

Conforme a lo expresado en la Sección 4.2 se procede a evaluar a las constantes e_1 y f_1 las cuales figuran en la siguiente fórmula

$$f_3(i) = \frac{\text{Proy}_{i-1}(i)}{\text{Long}(i-1)} e_1 + f_1 \quad (3.12.b)$$

para tal propósito nos auxiliaremos de los predios tipos E1, F1, F2, G2, H1, H2, J1, N2, Q2, R2, C11, C11, C13, C14, RP1, RP2, RP3, RP4, RS1, RS2, RS4, TF1, TF2 y TF4, aclaramos que todas las bases de los trapecios de estos predios se proyectan totalmente sobre el frente de banqueta tomando en consecuencia f_4 siempre el valor de 1; esto nos permite estudiar a e_1 y f_1 separadamente de f_4 .

Así pues deberemos de resolver el siguiente problema:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (x_j - y_j e_1 - p_{kj})^2 \quad (3.15)$$

donde los valores de x_j e y_j se calculan de acuerdo con las fórmulas (3.16.a) y (3.16.b). Estos cálculos, si bien son laboriosos, no revisiten dificultad alguna y con el objeto de no ser demasiado prolijos los omitimos aclarando que se efectuaron con el auxilio de una calculadora Hewlett Packard H.P.33, así mismo se omiten también los programas correspondientes permitiéndonos tan solo presentar al problema (3.15) de acuerdo a los datos numéricos.

Para resolver el problema (3.15) basta tan solo derivar (3.15) respecto a la variable e_1 e igualar a cero obteniéndose en consecuencia que

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s (y_j^2 e_1 + y_j (p_{kj} - x_j)) = 0 \quad (4.B.1)$$

En las Tablas 4.B.1 y 4.B.2 se muestra a modo de ejemplo la forma en que se encontraron los valores de x_j e y_j para los terrenos tipos E1 y F1 para los cuales se tomaron respectivamente $J=7$ y $J=8$; las restantes 22

Tablas correspondientes a los predios empleados para evaluar a e_1 se omiten en aras de la brevedad.

Sustituyendo estos valores numéricos (4.B.1) se transforma en

$$3004867.34e_1 - 344785.06 = 0 \quad (4.B.2)$$

de donde según esta fórmula y (3.14) se tiene que

$$e_1 = 0.1147$$

$$f_1 = 0.8853$$

APARTADO 4.C

4.C.1. FORMULAS EMPLEADAS PARA EVALUAR A LAS CONSTANTES e_2 , f_2 y g .

En este apartado se presentan los cálculos realizados con el propósito de evaluar a las constantes e_2 , f_2 y g las cuales figuran como constantes en f_3 y f_4 ; como se sabe

$$f_3(i) = \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} e_2 + f_2 \quad \text{si } \text{Long}(i) \geq \text{Long}(i-1) \quad (3.12.b)$$

$$f_4(i) = 1 - \left[1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)} \cdot \frac{1}{i^g} \right] \quad (3.17)$$

donde los parámetros e_2 , f_2 y g se determinan minimizando a

$$\sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) f_2(1_i) f_3(i) f_4(i) A_i^j - p_{kj} \right)^2 \quad (3.18)$$

sujeta a

$$e_2 + f_2 = 1 \quad (3.14)$$

luego (3.12b) según (3.14) se transforma en

$$f_3(i) = \frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1) e_2 + 1 \quad (4.c.1)$$

y así tenemos el siguiente problema equivalente

$$\text{Min } G(e_2, g) \quad (4.c.2)$$

siendo

$$G(e_2, f_2) = \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1^i(i) \left[\left(\frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1) e_2 + 1 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)} \cdot \frac{1}{i^g} \right) \right] \right) \quad (4.c.3)$$

pues como se recordará el parámetro $f_2(l_1)$ siempre toma el valor de 1.

Dado que en (4.C.3) aparece el término $\frac{1}{g}$ y en consecuencia resulta demasiado laborioso estar calculando las segundas derivadas de $G(e_2, f)$ consideramos preferible emplear el METODO DEL GRADIENTE* para resolver el problema (4.C.2) en lugar de emplear el método de Newton como en el caso de los parámetros f_1 y f_2 .

Así pues nos acercaremos iterativamente a la solución por medio de la siguiente fórmula:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + u\bar{h}^* \quad (4.C.4)$$

donde

$$\bar{h}^* = \frac{\text{grad } G}{|\text{grad } G|} \quad (4.C.5)$$

y u es tal que resuelve

$$\max_u G(\bar{x}_0 + u\bar{h}^*) \quad (4.C.6)$$

con el objeto de simplificar los cálculos es conveniente aproximar a la función $F(\bar{x})$ por la siguiente función cuadrática en u

$$f(u) = \alpha + \beta u + \gamma u^2 \quad (4.C.7)$$

donde α se calcula por

$$f(0) = \alpha = G(\bar{x}_0) \quad (4.C.8)$$

β se calcula por

$$\left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial G}{\partial e_2} \right|_{u=0} \frac{de_2}{du} + \left. \frac{\partial G}{\partial g} \right|_{u=0} \frac{dg}{du} \quad (4.C.9)$$

* Para mayores detalles consultar Gue L. Ronald, Thomas Michael E., "Mathematical methods in operations research", London, The Macmillan Company, 1968, pp. 110-125.

y γ por

$$\gamma = \frac{f(u) - \alpha - bu}{u^2} \quad (4.C.10)$$

para algún valor de u .

La solución de (4.C.6) nos la da por supuesto

$$u^* = -\frac{\beta}{\alpha\gamma} \quad (4.C.11)$$

4.C.2 EVALUACION DE LAS CONSTANTES e_2 , f_2 y g .

Ahora pasaremos a evaluar a las constantes e_2 , f_2 y g las cuales figuran en f_3 y f_4 cuando se tiene el caso de que la base superior de algún trapecio no se proyecta en su totalidad sobre el frente de la banquetta. Los tipos de terrenos sometidos a experimentación que corresponden a estas características son D1, D2, E2, I1, I2, J2, K1, K2, L1, L2, M1, M2, N1, N2, O1, O2, P1, P2, Q1, R1, C11, C12, C13, C14, FB1, FB2, FB3, FB4, FV1, FV2, FV3, FV4, RB1, RB2, RB3, RB4, R11, R12, R13, R14, RL3, RL4, RL5, RL7, TP1, TP2, TP3 y TP4. Dado que sería demasiado prolijo presentar todos los detalles de los cálculos nos limitaremos a presentar como ejemplo las Tablas 4.C.1 y 4.C.2 que se usaron para evaluar a la ecuación (4.C.3), en dichas Tablas a los tipos D1 y D2 se les asignaron los índices $J=9$ y $J=10$. Las restantes 46 Tablas se omiten pero aclaramos que durante la presente sección a los terrenos E2, I1, I2, ..., TP3 y TP4 se les asignarán respectivamente los índices $J=11$, $J=12$, $J=13$, ..., $J=55$ y $J=56$.

Así pues la ecuación (4.C.3) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 G(e_2, f_2) = & \sum_{k=1}^7 (1045.15 - \frac{66.13}{4^g} - 66.13e_2 + \frac{22.04}{4^g} e_2 - \frac{109.68}{5^g} - \frac{73.11}{6^g} \\
 & - \frac{9.14}{7^g} - P_{k9})^2 + \sum_{k=1}^7 (898.19 - 18.28e_2 - \frac{18.28}{7^g} + \frac{4.57}{7^g} e_2 \\
 & - \frac{3.05}{8^g} - P_{k10})^2 \\
 & + \sum_{j=11}^{56} \sum_{k=1}^s (\sum_{i=1}^{n_j} f_1'(i) \left[\frac{\text{Proy}(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1 \right] e_2 + 1) \left[1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(1)}{\text{Long}(i)} \frac{1}{i^g} \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.C.12}$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G}{\partial e_2} = & 2 \sum_{k=1}^7 (1045.15 - \frac{66.13}{4^g} - 66.13e_2 + \frac{22.04}{4^g} - \frac{109.68}{5^g} - \frac{73.11}{6^g} - \frac{9.14}{7^g} \\
 & - P_{kj}) \left(-66.13e_2 + \frac{22.04}{4^g} \right) + 2 \sum_{k=1}^7 (898.19 - 18.28e_2 - \frac{18.28}{7^g} + \frac{4.57}{7^g} e_2
 \end{aligned}$$

$$-\frac{3.05}{8^g} - p_{k10}(-18.28 + \frac{4.57}{7^g}) + \frac{\partial}{\partial e_2} \left(\sum_{j=1}^{55} \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1(i) \left[\frac{\text{Proy}(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1 \right] e_2 + 1 \right) \right) \left[1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)} \frac{1}{i^g} \right) \right] \quad (4.C.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial g} = & 2 \sum_{k=1}^7 (1045.15 - \frac{66.13}{4^g} - 66.13e_2 + \frac{22.04}{4^g} e_2 - \frac{109.68}{5^g} - \frac{73.11}{6^g} \\ & - \frac{9.14}{7^g} - p_{k9}) (\frac{66.13}{4^g} \ln 4 - \frac{22.04}{4^g} e_2 \ln 4 + \frac{109.68}{5^g} \ln 5 + \frac{73.11}{6^g} \ln 6 \\ & + \frac{9.14}{7^g} \ln 7) + 2 \sum_{k=1}^7 (898.19 - 18.28e_2 - \frac{18.28}{7^g} + \frac{4.57}{7^g} e_2 - \frac{3.05}{8^g} \\ & - p_{k10}) (\frac{18.28}{7^g} \ln 7 - \frac{4.57}{7^g} e_2 \ln 7 + \frac{3.05}{8^g} \ln 8) \\ & + \frac{\partial}{\partial g} \left(\sum_{j=1}^{55} \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^{n_j} f_1(i) \left[\frac{\text{Proy}(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1 \right] e_2 + 1 \right) \right) \left[1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)} \frac{1}{i^g} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.C.14)$$

Los cálculos que siguen se realizaron empleando una minicomputadora Radio Shack I.

De acuerdo con los resultados preliminares se consideró conveniente tomar

$$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

o sea

$$e_2 = 0.1 \text{ y } g = 1.5$$

luego según (4.C.13) y (4.C.14) se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial e_2} = -1\,077\,934.13$$

$$\frac{\partial G}{\partial g} = 292\,813.90$$

o sea

$$\text{grad } G(0.1, 1.5) = \begin{pmatrix} -1\,077\,934.13 \\ 292\,813.90 \end{pmatrix}$$

y de aquí según (4.C.5), (4.C.7), (4.C.8), (4.C.9), (4.C.10) y (4.C.11) se tiene que

$$\bar{h}^* = \begin{pmatrix} -0.9650 \\ 0.2621 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 1\ 212\ 900.50$$

$$\beta = 963\ 459.91$$

$$\gamma = 2\ 529\ 822.40$$

$$\bar{u}^* = 0.1904$$

y por (4.C.4) sabemos en consecuencia que

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.0838 \\ 1.5499 \end{pmatrix}$$

Repetiendo este proceso seis veces se obtiene finalmente que

$$\bar{x}_7 = \begin{pmatrix} 0.4404 \\ 1.6467 \end{pmatrix}$$

En el desarrollo del algoritmo de acuerdo con la fórmula (4.C.8) hubo necesidad de calcular en cada iteración el valor de $G(\bar{x}_i)$ lo cual permitió constatar que efectivamente \bar{x}_7 se aproximó, según el algoritmo, al punto crítico deseado.

Así pues se tiene que

$$e_2 = 0.4404$$

$$g = 1.6467$$

TABLAS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA 4.A.1

TIPO DEL TERRENO: B1
 INDICE: j=1

i	l_i	A_i^1	$A_i^1(i-3)(l_i-15)$	$A_i^1(i-3)$	$3.3333A_i^1(l_i-15)$	$3.3333A_i^1$
1	15	60	0	-120.0000	0	200.0000
2	15	60	0	-60.0000	0	200.0000
3	15	60	0	0.0000	0	200.0000
4	15	60	0	60.0000	0	200.0000
5	15	60	0	120.0000	0	200.0000
Σ		300	$W_{11}=0$	$W_{21}=0$	$W_{31}=0$	$W_{41}=1000.0000$

TABLA 4.A.2

TIPO DEL TERRENO: B2
 INDICE: j=2

i	l_i	A_i^2	$A_i^2(i-3)(l_i-15)$	$A_i^2(i-3)$	$3.3333A_i^2(l_i-15)$	$3.3333A_i^2$
1	17.32	69.28	-321.4592	-138.56	535.7600	230.9310
2	17.32	69.28	-160.7296	-69.28	935.7600	230.9310
3	17.32	69.28	0.0000	0	535.7600	230.9310
4	17.32	69.28	160.7296	69.28	535.7600	230.9310
5	17.32	22.86	106.0704	45.72	176.7822	76.1992
Σ		299.98	$W_{12}=215.3888$	$W_{22}=-92.84$	$W_{32}=2,319.8221$	$W_{42}=1000.0000$

TABLA 4.A.3

TIPO DEL TERRENO: C1

INDICE: j=3

i	A_i^3	$A_i^3(i-3)(i-15)$	$A_i^3(i-3)$	$3.3333A_i^3(i-15)$	$3.3333A_i^3$
1	80	-800.0000	-160.0000	1,333.3200	266.6640
2	80	-400.0000	-80.0000	1,333.3200	266.6640
3	80	0.0000	0.0000	1,333.3200	266.6640
4	60	300.0000	60.0000	999.9900	199.0080
Σ	300	$w_{13} = -900.0000$	$w_{23} = -180.0000$	$w_{33} = 4,999.9500$	$w_{43} = 1,000.0000$

TABLA 4.A.4

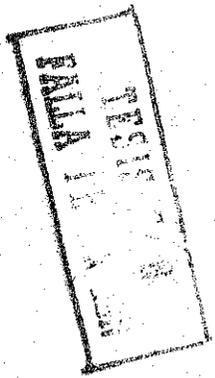
TIPO DEL TERRENO: C2

INDICE: j=4

i	A_i^4	$A_i^4(i-3)(i-15)$	$A_i^4(i-3)$	$3.3333A_i^4(i-15)$	$3.3333A_i^4$
1	24	-1,728.0000	-192.0000	2,879.9712	319.9968
2	24	-864.0000	-96.0000	2,879.9712	319.9968
3	24	0.0000	0.0000	2,879.9712	319.9968
4	24	108.0000	12.0000	359.9964	39.9996
Σ	300	$w_{14} = -2,484.0000$	$w_{24} = -276.0000$	$w_{34} = 8,999.9100$	$w_{44} = 999.9900$

PROGRAMA I (PÁGINA CALCULAR $\frac{1}{2}$ $\frac{3T}{8a}$)

TABLA 4.A.5



REN	COD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
00							
01	0231	STO 1	w _{1j}				
02	0074	R/S	w _{2j}	w _{1j}			
03	0232	STO 2	w _{2j}	w _{1j}			
04	0074	R/S	w _{3j}	w _{2j}	w _{1j}		
05	0233	STO 3	w _{3j}	w _{2j}	w _{1j}		
06	0674	R/S	P _{kj}	w _{3j}	w _{2j}	w _{1j}	
07	0230	STO 0	P _{kj}	w _{3j}	w _{2j}	w _{1j}	
08	0241	RCL 1	w _{1j}	P _{kj}	w _{3j}	w _{2j}	
09	0031	+	w _{1j}	w _{1j}	P _{kj}	w _{3j}	
10	0061	X	w _{1j} ²	P _{kj}	w _{3j}	w _{3j}	
11	0074	R/S	w _{1j} ²	P _{kj}	w _{3j}	w _{3j}	x _{1j} =w _{1j} ² (coeficiente de a _m c _m ²)
12	0241	RCL 1	w _{1j}	x _{1j}	P _{kj}	w _{3j}	
13	0242	RCL 2	w _{2j}	w _{1j}	x _{1j}	P _{kj}	
14	0061	X	w _{1j} w _{2j}	x _{1j}	P _{kj}	P _{kj}	
15	0074	R/S	w _{1j} w _{2j}	x _{1j}	P _{kj}	P _{kj}	x _{2j} =w _{1j} w _{2j}

REGISTROS
R0 P _{kj}
R1 w _{1j}
R2 w _{2j}
R3 w _{3j}
R4 w _{4j}
R5
R6
R7

CONTINUA. TABLA 4.A.5

FECH	CGD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
16	0241	RCL 1	w_{1j}	x_{2j}	x_{1j}	p_{kj}	
17	0243	RCL 3	w_{3j}	w_{1j}	x_{2j}	x_{1j}	
18	0061	X	$w_{1j}w_{2j}$	x_{2j}	x_{1j}	x_{1j}	
19	0002	2	2	$w_{1j}w_{2j}$	x_{2j}	x_{1j}	
20	0061	X	$2w_{1j}w_{2j}$	x_{2j}	x_{1j}	x_{1j}	
21	0074	R/S	$2w_{1j}w_{2j}$	x_{2j}	x_{1j}	x_{1j}	$x_{3j} = 2w_{1j}w_{2j}$ (coef. de $a_m c_m$)
22	0241	RCL 1	w_{1j}	x_{3j}	x_{2j}	x_{1j}	
23	0240	RCL 0	p_{kj}	w_{1j}	x_{3j}	x_{2j}	
24	0061	X	$w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	x_{2j}	x_{2j}	
25	0242	RCL 2	w_{2j}	$w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	x_{2j}	
26	0243	RCL 3	w_{3j}	w_{2j}	$w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	
27	0061	X	$w_{2j}w_{1j}$	$w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	x_{3j}	
28	0051	+	$w_{1j}w_{2j} + w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	x_{3j}	x_{3j}	
29	0074	R/S	$w_{1j}w_{2j} + w_{1j}p_{kj}$	x_{3j}	x_{3j}	x_{3j}	$x_{4j} = w_{1j}w_{2j} + w_{1j}p_{kj}$ (coef. de c_m)
30	0243	RCL 3	w_{3j}	x_{4j}	x_{3j}	x_{3j}	
31	0031	+	w_{3j}	w_{3j}	x_{4j}	x_{3j}	
32	0061	X	w_{3j}^2	x_{4j}	x_{3j}	x_{3j}	
			w_{3j}^2	x_{4j}	x_{3j}	x_{3j}	$x_{4j} = w_{3j}^2$

CONTINUA TABLA 4.A.5

REN	CCD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
34	0243	RCL 3	w_{3j}	x_{5j}	x_{4j}	x_{3j}	
35	0240	RCL 0	p_{kj}	w_{3j}	x_{5j}	x_{4j}	
36	0661	X	$w_{3j} p_{kj}$	x_{5j}	x_{4j}	x_{4j}	$x_{6j} = w_{3j} p_{kj}$ (término indep.)

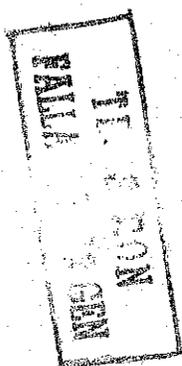
TABLA 4.A.6

INSTRUCCIONES CORRESPONDIENTES AL PROGRAMA I

PASS	INSTRUCCIONES	ENTRADAS	TECLAS	PRESTIONADAS	SALIDAS
1	Grabar programa I				
2	Coefficiente de $a c_m$	w_{1j}			
			F	PRGM	
3			R/S		
4	Coefficiente de c_m	w_{2j}			
5			R/S		
6	Coefficiente de a_m	w_{3j}			
7			R/S		
8	Costo del terreno	P_{kj}			
9	Ejecutar pasos 1-14		R/S		x_{1j}
10	para $k=1, 2, \dots, s$.		R/S		x_{2j}
11			R/S		x_{3j}
12			R/S		x_{4j}
13			R/S		x_{5j}
14			R/S		x_{6j}

PROGRAMA II (PARA CALCULAR $\frac{1}{2} \frac{2F}{2c}$)

TABLA 4.A.7



REN	COD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
00							
01	0231	STO 1	w_{1j}				
02	0074	R/S	w_{2j}	w_{1j}			
03	0232	STO 2	w_{2j}	w_{1j}			
04	0074	R/S	w_{3j}	w_{2j}	w_{1j}		
05	0231	STO 3	w_{3j}	w_{2j}	w_{1j}		
06	0074	R/S	P_{kj}	w_{3j}	w_{2j}	w_{1j}	
07	0032	CHS	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	w_{1j}	
08	0230	STO 0	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	w_{1j}	
09	0001	1	1	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	
10	0000	0	10	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	
11	0000	0	100	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	
12	0000	0	1000	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	
13	23510	STO+0	1000	$-P_{kj}$	w_{3j}	w_{2j}	
14	0241	RCL 1	w_{1j}	1000	$-P_{kj}$	w_{3j}	
15	0031	↑	w_{1j}	w_{1j}	1000	$-P_{kj}$	
16	0061	X	w_{1j}^2	1000	$-P_{kj}$	$-P_{kj}$	

REGISTROS
$R_0 - P_{kj}, 1000 - P_{kj}$
$R_1 w_{1j}$
$R_2 w_{2j}$
$R_3 w_{3j}$
R_4
R_5
R_6
R_7

CONTINUA TABLA 4.A.7

REN	COD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
17	0074	R/S	w_{1j}^2	1000	$-P_{kj}$	$-P_{kj}$	$Y_{1j} \cdot w_{1j}^2$ (coef. de $a_m^2 c_m$)
18	0242	RCL 2	w_{2j}	Y_{1j}	1000	$-P_{kj}$	
19	0241	RCL 1	w_{1j}	w_{2j}	Y_{1j}	1000	
20	0061	X	$w_{1j} w_{2j}$	Y_{1j}	1000	1000	
21	0074	R/S	$w_{1j} w_{2j}$	Y_{1j}	1000	1000	$Y_{2j} = w_{1j} w_{2j}$ (coef. de a_m^2)
22	0241	RCL 1	w_{1j}	Y_{2j}	Y_{1j}	1000	
23	0243	RCL 3	w_{3j}	w_{1j}	Y_{2j}	Y_{1j}	
24	0061	X	$w_{1j} w_{3j}$	Y_{2j}	Y_{1j}	Y_{1j}	
25	0002	2	2	$w_{1j} w_{3j}$	Y_{2j}	Y_{1j}	
26	0061	X	$2w_{1j} w_{3j}$	Y_{2j}	Y_{1j}	Y_{1j}	
27	0074	R/S	$2w_{1j} w_{3j}$	Y_{2j}	Y_{1j}	Y_{1j}	$Y_{3j} = w_{1j} w_{2j}$ (coef. de a_m^2)
28	0240	RCL 0	$1000 - P_{kj}$	Y_{3j}	Y_{2j}	Y_{1j}	
29	0241	RCL 1	w_{1j}	$1000 - P_{kj}$	Y_{3j}	Y_{2j}	
30	0061	X	$w_{1j} (100 - P_{kj})$	Y_{3j}	Y_{2j}	Y_{2j}	
31	0243	RCL 3	w_{3j}	$w_{1j} (1000 - P_{kj})$	Y_{3j}	Y_{1j}	
32	0242	RCL 2	w_{2j}	w_{3j}	$w_{1j} (1000 - P_{kj})$	Y_{3j}	
33	0061	X	$w_{2j} w_{3j}$	$w_{1j} (1000 - P_{kj})$	Y_{3j}	Y_{3j}	
34	0051	+	$w_{1j} (1000 - P_{kj})$ $+ w_{2j} w_{1j}$	Y_{3j}	Y_{3j}	Y_{3j}	

CONTINUA TABLA 4.A.7

REN	COD	ENT	X	Y	Z	T	COMENTARIOS
35	0074	R/S	$w_{1j} (1000-p_{kj})$ $+w_{2j} w_{1j}$	Y_{3j}	Y_{3j}	Y_{3j}	$Y_{4j} = w_{1j} (1000-p_{kj})$ $+w_{2j} w_{1j}$
							(coef. de a_m)
36	0243	RCL 3	w_{3j}	Y_{4j}	Y_{3j}	Y_{3j}	
37	0031	+	w_{3j}	w_{3j}	Y_{4j}	Y_{3j}	
38	0051	X	w_{3j}^2	Y_{4j}	Y_{3j}	Y_{3j}	
39	0074	R/S	w_{3j}^2	Y_{4j}	Y_{3j}	Y_{3j}	$Y_{5j} = w_{3j}^2$ (coef. de c_m)
40	0240	RCL 0	$1000-p_{kj}$	Y_{5j}	Y_{4j}	Y_{3j}	
41	0243	RCL 3	w_3	$1000-p_{kj}$	Y_{5j}	Y_{4j}	
42	0061	X	$w_3 (1000-p_{kj})$	Y_{5j}	Y_{4j}	Y_{4j}	
43	0074	R/S	$w_3 (1000-p_{kj})$	Y_{5j}	Y_{4j}	Y_{4j}	$Y_{6j} = w_3 (1000-p_{kj})$ (término independiente)

TABLA 4.A.8

INSTRUCCIONES CORRESPONDIENTES AL PROGRAMA II

PASO	INSTRUCCIONES	ENTRADAS	TECLAS PRESIONADAS	SALIDAS
1	Grabar programa II			
2	Coefficiente de a_m^c	w_{1j}	f PRGM	
3			R/S	
4	Coefficiente de a_m	w_{2j}		
5			R/S	
6	Coefficiente de c_m	w_{3j}		
7			R/S	
8	Costo del terreno	p_{kj}		
9	Ejecutar pasos		R/S	y_{1j}
10	1 a 14 para		R/S	y_{2j}
11			R/S	y_{3j}
12	$k=1, 2, \dots, s.$		R/S	y_{4j}
13			R/S	y_{5j}
14			R/S	y_{6j}

COPIA CON FALLA DE ORIGEN

TABLA 4.A.9

TIPO DEL TERRENO: A1

INDICE: j=5

i	A_i^2	$A_i^2(i-3)(1_i, -15)$	$A_i^2(i-3)$	$3.3333A_i^2(1_i, -15)$	$3.3333A_i^2$
1	40	400.0000	- 80.0000	- 666.6600	133.3320
2	40	200.0000	- 40.0000	- 666.6600	133.3320
3	40			- 666.6600	133.3320
4	40	- 200.0000	- 40.0000	- 666.6600	133.3320
5	40	- 400.0000	80.0000	- 666.6600	133.3320
6	40	- 600.0000	120.0000	- 666.6600	133.3320
7	40	- 800.0000	160.0000	- 666.6600	133.3320
8	20	- 500.0000	100.0000	- 333.3300	66.6660
Σ	300	$w_{25}^2 = 1,900.0000$	$w_{25}^2 = 380.0000$	$w_{35}^2 = 5,000.0000$	$w_{45}^2 = 1,000.0000$

TABLA 4.A.10

TIPO DEL TERRENO: A2

INDICE: j=6

i	A_i^3	$A_i^3(i-3)(1_i, -15)$	$A_i^3(i-3)$	$3.3333A_i^3(1_i, -15)$	$3.3333A_i^3$
1	48	288.0000	96.0000	- 479.9952	159.9984
2	48	144.0000	48.0000	- 479.9952	159.9984
3	48			- 479.9952	159.9984
4	48	144.0000	48.0000	- 479.9952	159.9984
5	48	288.0000	96.0000	- 479.9952	159.9984
6	48	432.0000	144.0000	- 479.9952	159.9984



TABLA 4.B.1

TIPO DEL TERRENO: E1

INDICE: J=7

i	A_i^7	Proy $_{i-1}(i)$	Long(i-1)	$c_1(i)-1$	$f_{11}^1 f_{11}^7 A_i^7$	$f_{12}^1 (c_1(i)-1) A_i^7$
1	76	18.00	20.00	-0.1000	89.90	- 8.99
2	68	16.00	18.00	-0.1111	153.55	-17.04
3	60	14.00	16.00	-0.1250	200.00	-25.00
4	52	12.00	14.00	-0.1429	229.25	-32.78
5	44	10.00	12.00	-0.1667	241.29	-40.29

$x_7=913.99$

$y_7=-124.10$

TABLA 4.B.2

TIPO DEL TERRENO: F1

INDICE: J=8

i	A_i^8	Proy $_{i-1}(i)$	Long(i)-1	$c_1(i)-1$	$f_{11}^1 f_{12}^1 A_i^8$	$f_{12}^1 (c_1(i)-1) A_i^8$
1	80	20.00	20.00	0.0000	94.63	0.00
2	80	20.00	20.00	0.0000	180.65	0.00
3	76	16.00	20.00	-0.2000	253.33	- 50.67
4	48	8.00	16.00	-0.5000	211.61	-105.81
5	16	0.00	8.00	-1.0000	87.74	- 87.74

$x_8=827.96$

$y_8=-244.22$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TABLA 4.C.1

TIPO DEL TERRENO: D1
 INDICE: J=9

i	A _i ⁹	Proy _i (i)	Long(i)	f ₁ ⁱ (i)	f ₃	f ₄	f ₁ ⁱ f ₃ f ₄ A _i ⁹
1	40	10	10	1.1829	1	1	47.3160
2	40	10	10	2.2589	1	1	90.3240
3	40	10	10	3.3334	1	1	133.3360
4	45	10	15	4.4086	1-0.3333e ₂	1-0.3333 49	198.37 - 66.129e ₂ - 66.129 49 + 22.043e ₂ 49
5	60	15	15	5.4839	1	1-0.3333 59	329.034 - 109.6780 59
6	60	15	15	3.6557	1	1-0.3333 69	219.342 - 73.114 69
7	15	15	15	1.8277	1	1-0.3333 79	27.4155 - 9.1385 79

$$\sum_{i=1}^7 f_1^i(i) f_3(i) f_4(i) A_i^9 = 1045.1545 - \frac{66.129}{48} - 66.129e_2 + 22.043e_2 - \frac{109.678}{58} - \frac{73.114}{68} - \frac{9.1385}{78}$$

NOTA: $f_3(i) = \left(\frac{\text{Proy}_i(i-1)}{\text{Long}(i)} - 1 \right) e_2 + 1$

$$f_4(i) = 1 - \left(1 - \frac{\text{Proy}_f(i)}{\text{Long}(i)} \right) \cdot \frac{1}{19}$$



TABLA 4.C.2

TIPO DEL TERRENO: D2
 INDICE: J=10

i	A_i^{10}	$Proy_i(i-1)$	$Long(i)$	$f_1^i(i)$	f_3	f_4	$f_1^i f_3 f_4 A_i^{10}$
1	40	10	10	1.1829	1	1	47.3160
2	40	10	10	2.2581	1	1	90.3240
3	40	10	10	3.3334	1	1	133.3360
4	40	10	10	4.4086	1	1	176.3440
5	40	10	10	5.4839	1	1	219.3560
6	40	10	10	3.6557	1	1	146.2280
7	40	7.5	10	1.8277	$1 - 0.25e^{-2}$	0.25	$18.277 \frac{4.5643e^{-2}}{79} + \frac{73.1080 - 18.2770e^{-2}}{79}$
8	20	10	10	0.6092	1	$1 - \frac{0.25}{89}$	$12.1840 - \frac{3.0460}{89}$

$$\sum_{i=1}^8 f_1^i(i) f_3(i) f_4(i) A_i^{10} = 898.196 - 18.2770e^{-2} - \frac{18.277}{78} + \frac{4.5693}{78} e^{-2} - \frac{3.0460}{88}$$

NOTA: $f_3(i) = \left(\frac{Proy_i(i-1)}{Long(i)} - 1 \right) e_2 + 1$

$$f_4(i) = 1 - \left(1 - \frac{Proy_f(i)}{Long(i)} \right) \frac{1}{i^9}$$



REFERENCIAS

1. Canales R., Guillen, S. T. y Morcos, J., "Toma de decisiones con objetivos múltiples caso determinista". México, UNAM, Instituto de Ingeniería, 1976.
2. Fishburn, Peter C., "Utility theory for decision making". John Wiley and Sons, Inc., 1970.
3. Gue, Ronald L. and Thomas Michael E., "Mathematical methods in operations research". London, The Macmillan Company, 1968.
4. Keeney, Ralph, "Utility functions for multiattributed consequences". Management Science, vol. 18, 1972, pp. 276-287.
5. Keeney, Ralph and Raiffa, Howard, "Decisions with multiple objectives: Preference and value tradeoffs". John Wiley and Sons, Inc., 1976.
6. Wismer, David A. and Chattergy R., "Introduction to nonlinear optimization. A problem solving approach". New York, North-Holland, 1978.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN