43
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre el problema de Valores Iniciales de la Relatividad General

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

WENCESLAO SANTIAGO GERMÁN

Dr. Jemal Guven

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1996

Sobre el problema de Valores Iniciales de la Relatividad General

Universidad Nacional Autónoma de México

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Sobre el problema de Valores Iniciales de la Relatividad General"

realizado por Santiago Germán [illegible]

con número de cuenta [illegible], pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. JEMAL JANER GUVEN SEERY	
Propietario	DR. RICARDO CAPOVILLA CHIARIGLIONE	
Propietario	DR. SHAHEN HACYAN SALERYAN	
Suplente	DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER	
Suplente	DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ	

Consejo Departamental de Física
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

Dedicatoria

A mis padres,
Aurora y Wenceslao
Santiago, con cariño.

CONTENIDO

Fundamentos.

1. CONSIDERACIONES SOBRE EL ORIGEN DE LA INERCIA.

Preliminares.

2. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS.

Acechando a la Inercia.

3. LA NATURALEZA CONFORME DE LA GEOMETRODINÁMICA.

Resultados Básicos.

4. LA CONJETURA DE YAMABE.

Conclusiones

5. PARAMETRIZACIÓN DEL ESPACIO DE SOLUCIONES.

Apéndice

N O T A C I Ó N

V^4	*Continuo tetradimensional espacio-temporal.*
$\mathbf{g}$ ó $g_{\mu\nu}$	*Métrica del espacio-tiempo con signatura* $(-,+++)$.
∇ ó ∇_μ	*Derivada covariante con respecto a* $\mathbf{g}$
div	*Divergencia con respecto a* $\mathbf{g}$

$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = (u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ *Conmutador.*

$Ricc(\mathbf{g})_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\sigma}.$

$R(\mathbf{g}) = Ricc(\mathbf{g})^\mu_\mu$. *Escalar de curvatura determinado por* $\mathbf{g}$

Σ^3	*Hipersuperficie espacial de* V^4
γ ó γ_{ab}	*Métrica inducida sobre* Σ^3
D_a	*Derivada covariante con respecto a* γ
Div	*Divergencia con respecto a* γ
$\Delta = \gamma^{ab} D_a D_b$	*Laplaciano*
$\mathcal{L}_\xi$	*Derivada de Lie con respecto al campo vectorial* ξ
$\alpha = (-g^{00})^{-\frac{1}{2}}$	*Lapse*
β ó $\beta_a = g_{0a}$	*Shift*

$\mathbf{P}$ ó $P^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$,
$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = -1.$ *Proyector espacial sobre* Σ^3 *con normal* $\mathbf{n}$

$\mathbf{K}$ ó K_{ab} *Tensor de curvatura extrínseca*

$tr[\mathbf{K}] = K^a_a$. *Operadores de traza*
$Tr_\gamma[\mathbf{K}] = \frac{1}{3} K^c_c \gamma_{ab}.$

Producto escalar global.

$(K\cdot K, 1)$, $(K\cdot K, 1) = \int K^{ab} K_{ab} (\det\gamma)^{\frac{1}{2}} d\Sigma^3$

U N I D A D E S

$8\pi G = 1, \quad c = 1$

PREFACIO.

Es probable que en este preciso momento, la mente inquisidora del lector se cuestione, al igual que lo hace un explorador cuando comienza un viaje, que le espera si decide abordar el contenido del presente Trabajo de Tesis. Para ser justos debo admitir que se pueden tomar diferentes rutas y puntos de vista en una aproximación al tema al "problema de valores Iniciales de la Relatividad General," según el gusto de cada autor, lo que es un indicio de la riqueza que embebe nuestro tema. Por ejemplo, es una fuerte motivación para seguir los lineamientos de este estudio, tener en mente que, una resolución, aún parcial, de este problema, en conjunción con el uso de las herramiéntas de cómputo y métodos numéricos de los tiempos modernos, es sin duda alguna, una vía práctica para *generar* soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein.

Aquí, solo comenzamos a explorar y ciertamente no hemos llegado a la forma de ataque definitiva, para una resolución *completa* del problema, muchas preguntas aún persisten y hasta ahora permanecen abiertas. Presentamos a continuación, la manera como se ha organizado el viaje, o mejor dicho, como se ha presentado el mismo ante los ojos expectantes del autor.

En un primer capítulo se fórmula el problema en cuestión, cuyo nombre titula esta tésis, con todo lo necesario que con lleva este aserto. Hemos tratado de que a lo largo de la exposición, las fórmulas relevantes quedaran centradas. Como cuestión de notación indicamos que, los índices formados con el alfabeto griego recorren los números 0,1,2 y 3. Mientras que aquellos índices representados por letras de nuestro propio alfabeto, solo recorren 1,2 y 3, y se usan en objetos de caráter meramente espacial. En el segundo capítulo se recoge parte de la jerga matemática, en especial el concepto de compacidad como medio para afrontar problemas definidos en espacios de dimensión infinita. En el capítulo tres, se indaga la invarianza conforme del problema de valores iniciales de la Relatividad General y su reformulación en términos de esta base. En ese mismo lugar, sección **3.8.1**, se incluye una prueba, debida al autor, concerniente a la existencia de soluciones estrictamente positivas para una ecuación diferencial parcial de la mayor relevancia en la investigación. También se muestra en un cuarto capítulo, la resolución conseguida en 1984, de una antigua conjetura formulada en los años sesenta, que plagaba a la geometría diferencial, la que se le denomina conjetura de Yamabe cuya solución descansa en el teorema de la positividad de la energía y que ha motivado mucho, las investigaciones sobre análisis no-lineal. Armados con estas piezas de conocimiento se arriva finalmente, en el quinto y último capítulo, al siguiente resultado, concerniente a espacio-tiempos espacialmente cerrados y entonces aquellos para los cuales la inercia está "determinada" por la materia.

Sea S, el conjunto de soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio, formado por elementos que son espacio-tiempos, globalmente hiperbólicos y que por tanto cumplen con el pricipio de causalidad, que admiten al menos una hipersuperficie espacial compacta, sin frontera de curvatura media constante, quienes satisfacen la condición de energía dominante, permitiendo tratar en ellos entonces, solo materia energía que no puede viajar más rápido que la luz. Este conjunto S, resulta estar en correpondencia biunívoca con clases de equivalencia difeoconformes de datos iniciales $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \bar{\tau}, \rho, \mathbf{J})$, libremente especificables, salvo que deben cumplir la condición de energía dominante, la condición de integrabilidad global $(\nabla_a J^a)_\gamma = 0$ y la ecuación difeoconforme, que expresa la influencia de la finitud del espacio sobre la inercia de los cuerpos, $(\kappa\zeta + 1)(\kappa + \eta + \zeta) = 0$.

Más precisamente, por cada clase difeoconforme de datos iniciales no triviales, que satisfacen las condiciones anteriores, existe un único representante, excepto por cambios de coordenadas, donde la ley de conservación de la energía es válida y dichos datos generan una región de espacio-tiempo, globalmente hiperbólico, que satisface las ecuaciones del campo gravitatorio, fundadas en la teoría de la Relatividad General de Einstein.

Espero que la investigación presente les hiciese, a lo largo del camino pasar algunos ratos agradables.

Quiero expresar mi gratitud al Dr. Jemal Guven por sugerirme el tema de Tesis, y darme la libertad de seguir mi propio instinto; así como al Instituto de Ciencias Nucleares por las facilidades brindadas durante la elaboración de este trabajo. Especialmente al Dr. Jorge Izo, quien fue la única influencia grata que hiciera valer la pena, el asistir a la Universidad.

México, D. F. Julio de 1996. *Wenceslao Santiago Germán*

1

Consideraciones sobre el origen de la Inercia.

Ley primera:
"Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado".

I s a a c   N e w t o n
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.

1.1 El principio de Mach.

Aquí trataremos con principios básicos de física. Estos principios han sido revisados una y otra vez en cada época; recordemos por ejemplo, las obras de Newton y Einstein, de las que somos deudores. Para dar un vistaso sobre lo que estamos hablando, hemos preferido iniciar con un experimento pensado, cuyo origen se remonta a las reflexiones del físico y filósofo austriaco Ernst Mach[1]. Imaginemos pues dos cuerpos fluídos de la misma naturaleza, que se encuentran en rotación relativa uno con respecto al otro alrededor de un eje común, suficientemente alejados entre sí y del resto de la materia para que la única interacción relevante a considerar sobre ellos es la ejercida por sus propias partes. Bien podría suceder que mediciones internas, efectuadas por observadores que se encontrasen en reposo relativo con respecto cada cuerpo, revelaran que uno de ellos, S_1, tiene forma esférica, mientras que el otro, S_2, tiene forma elípsoidal. ¿ A que debemos atribuir está diferencia?. Queremos una respuesta que no involucre únicamente a S_1 y S_2 por sí mismos, pues en tal caso, estaríamos dando una explicación basados en las propias diferencias que queremos explicar.

Nuestro sentido de justicia se inclina a favor de la siguiente aseveración a la que nos referiremos en adelante como **principio de Mach:**

Las propiedades inerciales de los cuerpos dependen de la distribución y flujo relativo de toda forma de materia-energía existente en el Universo.

La teoría General de la Relatividad proporciona *parte* del significado de este enunciado, pero ¿Como lo hace y de que manera la inercia de los cuerpos queda completamente determinada?[2]. Esta es la interrogante que deseamos contestar, sin embargo antes de comenzar nuestra tarea citaremos algunas palabras que Dennis Sciama exclamó alguna vez y que a su vez servirán como palabras de advertencia:

"... This remarkable theory (General Relativity) has had many striking successes to its credit, but the extent to which it account for inertia is still a matter of controversy. One reason for this is the mathematical intricacy of the theory, which prevents a general attack on most problems[3] ".

---

[1] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik, 49, 1916.* Contenido en la collección Das Relativitätsprinzip.

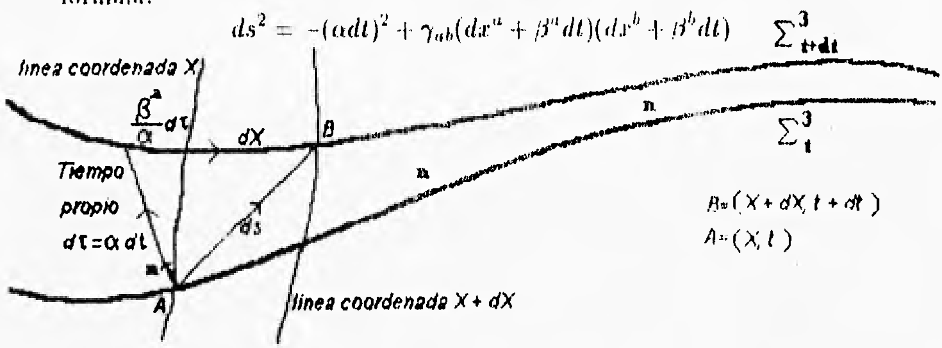
[2] En esta dirección ver J. A Wheeler 1988, Geometrodynamic Steering Principle reveals the determiners of Inercia, *International Journal of Modern Physics A, Vol. 3, No 10.*

[3] D. W. Sciama, Inertia, *Sci. American 196 (1957) 99-109.*

1.2 Variables A.D.M.

A reserva de ser más precisos en el futuro, clarifiquemos parte de nuestras ideas. Por materia-energía existente en el universo entendemos toda aquella que se encuentra en una misma hipersuperficie Σ_t^3 orientable de tipo espacial $x^0 = t = cte$. Para afrontar nuestro problema, convendremos en describir el campo gravitacional no con el uso directo de las componentes del tensor métrico g sino emplear otro conjunto de variables, ya conocido en la literatura como variables A.D.M.[4], que aunque no sea covariante si resulta de gran ayuda para el seguimiento de la dinámica de la 3-geometría y su interpretación. Con esta idea en mente exploremos el significado que encierra el elemento de linea ds para las cantidades γ, $\alpha > 0$ y β^a que aparecen en la fórmula:

$$ds^2 = -(\alpha dt)^2 + \gamma_{ab}(dx^a + \beta^a dt)(dx^b + \beta^b dt)$$



γ deberá corresponder a una métrica Riemanniana de Σ_t^3 (vease la figura adjunta). αdt se interpreta entonces como el tiempo propio ortogonal de separación entre las dos hipersuperficies Σ_t^3 y Σ_{t+dt}^3, de ahí que a α se le denomine el nombre función lapse. Luego solo queda por interpretar $\frac{\beta^a}{\alpha}$ que, después de lo anterior, será precisamente la velocidad con la quem la base coordenada espacial se mueve respecto a su origen, medida en unidades de tiempo propio local. Para no cometer faltas de memoria se designa al objeto β con el nombre de vector Shift. De esta manera tenemos en nuestras manos diez cantidades independientes que remplazarán a las componentes de la métrica del espacio-tiempo g.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^c\beta_c & \beta_b \\ \beta_a & \gamma_{ab} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$\gamma_{ac}\gamma^{cb} = \delta_a^b; \quad \beta_a = \gamma_{ab}\beta^b; \quad \det(-g) = \alpha^2 \det\gamma$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2}\beta^b \\ \alpha^{-2}\beta^a & \gamma^{ab} - \alpha^{-2}\beta^a\beta^b \end{pmatrix}$$

[4] Arnowitt, Deser and Misner (1962). The dynamics of General Relativity, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, L.Witten (ed.), New York, Wiley, pp. 227-265.

1.3 Curvatura intrínseca y extrínseca.

En acuerdo con nuestras interpretaciones, el vector normal unitario $\frac{\partial}{\partial n}$ a la hipersuperficie Σ_t^3 ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$), orientado hacia el futuro, es simplemente $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta^a}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^a}$. Es precisamente el valor que toman sus componentes, n^μ, lo que se necesita para construir el operador de proyección $\mathbf{P}$ a la hipersuperficie. Operador que se representa por $P^{\mu_1}_{\nu_1} P^{\mu_2}_{\nu 2} (\cdots) P^{\mu_i}_{\nu_i}$, donde cada P^μ_ν es igual a $\delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$, cuando actúa sobre tensores de í-esimo rango, digamos $T^{\nu_j \nu_{j+1} \cdots \nu_i}_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}$.

Notemos para empezar, que una definición natural de derivada covariante en Σ_t^3 aplicada a tensores de tipo espacial se obtiene de tomar primero la derivada covariante asociada a $\mathbf{g}$, y proyectar después sobre la hipersuperficie; es decir se sugiere usar:

$$D = \mathbf{P} \circ \nabla$$

De esta manera se recobra de nuevo un tensor que tiene solo componentes espaciales. Si por ejemplo, plasmamos en el papel solo aquellas componentes no nulas de aquel tensor que se origina de aplicar el operador D_μ sobre un tensor puramente espacial, digamos T^μ_ν para fijar ideas, se tiene que $D_c T^a_b = \frac{\partial T^a_b}{\partial x^c} - (\Gamma^e_{bc} + \beta^e \Gamma^0_{bc}) T^a_e + (\Gamma^a_{ec} + \beta^a \Gamma^0_{ec}) T^e_b$, (expresar $\frac{\partial}{\partial t}$ en términos de $\frac{\partial}{\partial a}$ y $\frac{\partial}{\partial n}$). Ahora bien, en virtud de (1.1) se observa que $D_c T^a_b$ se puede escribir completamente en términos de γ, una métrica intrínseca a la hipersuperfice, en la manera usual; a saber

$$D_c T^a_b = \frac{\partial T^a_b}{\partial x^c} - \gamma^e_{bc} T^a_e + \gamma^a_{ec} T^e_b$$

donde γ^a_{bc} es la conexión asociada a γ.

Se puede también calcular el tensor $Ricci(\gamma)_{ab} = 2(\partial_{[c}\gamma^c_{a]b} + \gamma^e_{b[a}\gamma^c_{c]e})$ y contraer sus índices para obtener un escalar $R(\gamma)$ que represente la **curvatura intrínseca** de Σ_t^3 asociada a γ.

Por otra parte, uno espera que una medida natural de la forma en que Σ_t^3 se tuerce en el espacio-tiempo debe estar puesta en términos de las derivadas de $\mathbf{n}$. se lleva a cabo dicho acometido considerando el tensor:

$$\mathbf{K} \equiv -\frac{1}{2}\mathbf{P} \circ \pounds_{\mathbf{n}} \mathbf{g}$$

Que con razón suficiente llamamos **tensor de curvatura extrínseca**. Esta cantidad solo tiene componentes espaciales y es un tensor simétrico de rango dos, cuyas componentes diferentes de cero son, después de un cálculo:

$$K_{ab} = -\alpha \Gamma^0_{ab} = -\frac{1}{2\alpha}(\frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} - \pounds_\beta)\gamma_{ab} \tag{1.2}$$

la primera igualdad se sigue de usar las componentes $(n_o, n_a) = (-\alpha, 0)$ en la definición, mientras que la segunda es consecuencia directa de la relación $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta^a}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^a}$.

1.4 Transcripción a las variables A.D.M.

Se quiere transcribir cada una de las cantidades determinadas por el tensor métrico g en términos del conjunto de variables $(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{K})$ y una base coordenada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ del espacio tangente a Σ_t^{n-1}. Con tal fín se sugiere usar las siguientes expresiones, enlistadas según el orden de los cálculos de los cuales se derivan.

$$
\begin{aligned}
\nabla_a \mathbf{n} &= -K_a^c \mathbf{e}_c && (1.3)\\
\nabla_a \mathbf{e}_b &= \gamma_{ab}^c \mathbf{e}_c + \frac{K_{ab}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}} \mathbf{n} && (1.4)\\
\nabla_n \mathbf{e}_a &= D_a \ln \alpha \mathbf{n} + (-K_a^c + \frac{\beta^c_{,a}}{\alpha}) \mathbf{e}_c && (1.5)\\
div \mathbf{e}_a &= \gamma_{ca}^c + D_a \ln \alpha && (1.6)\\
div \mathbf{n} &= K && (1.7)\\
\nabla_n \mathbf{n} &= \gamma^{ab} D_b \ln \alpha \mathbf{e}_a && (1.8)
\end{aligned}
$$

Se reconocen en (1.4) y (1.3) las **ecuaciones de Gauss-Weingarten** que son consecuencia directa de las definiciones de γ_{ab}^c y K_{ab}, para establecer (1.5) es conveniente utilizar $\nabla_n \mathbf{e}_a = \nabla_a \mathbf{n} + [\mathbf{n}, \mathbf{e}_a]$ y $n^\mu = (\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha})$, en (1.6) usar $\nabla_\mu \mathbf{e}_c^\mu = (P_\nu^\sigma - n^\sigma n_\nu)\nabla_\sigma \mathbf{e}_c^\nu$, y finalmente (1.8) proviene de considerar $n^\nu \nabla_\nu n^\mu = \nabla_\nu (n^\mu n^\nu) - n^\mu \nabla_\nu n^\nu$ junto con $n^\mu n^\nu = -g^{\mu\nu} + P^{\mu\nu}$; $P^{\mu\nu} = \gamma^{ab} \mathbf{e}_a^\mu \cdot \mathbf{e}_b^\nu$.

Por ejemplo, si queremos expresar las componentes independientes del tensor de Riemann en función de las variables $(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{K})$, bastará usar la relacion $R^\mu_{\nu\rho\sigma} \mathbf{s}_\mu \mathbf{w}^\nu \mathbf{u}^\rho \mathbf{v}^\sigma = \mathbf{s}\cdot R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}$, donde $R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = \nabla_u \nabla_v \mathbf{w} - \nabla_v \nabla_u \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w}$. Para obtener:

$$
\begin{aligned}
R_{dabc}(g) &= R_{dabc}(\gamma) - 2K_{a[b}K_{c]d} && (1.9)\\
R_{abc\mu}(g) n^\mu &= -2D_{[a} K_{b]c} && (1.10)\\
R_{\mu ab\nu}(g) n^\mu n^\nu &= \frac{1}{\alpha}(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta) K_{ab} + K_{ac} K_b^c + \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha && (1.11)
\end{aligned}
$$

(Notar que en virtud de las simetrías $0 = R_{(\mu\nu)\rho\sigma} = R_{[\mu\nu\rho\sigma]} = R_{[\mu\nu\rho]\sigma}$ el tensor de Riemann tiene $\frac{(n^2-1)n^2}{12}$ componentes independientes, de las cuales $\frac{(n-2)(n-1)^2 n}{12}$ estan determinadas por (1.9), $\frac{(n-2)(n-1)n}{2}$ por (1.10) y $\frac{(n-1)n}{2}$ provienen de (1.11). Brakets cuadrados indican antisimetrización, mientras que los parentesis señalan simetrización).

(1.9) y (1.10) son las **ecuaciones de Gauss-Codazzi**y **Codazzi-Mainardi** respectivamente. Cuando se considera el par $(\gamma, \mathbf{K})$ y se pregunta si se les puede caracterizar como una métrica inducida y un tensor de curvatura extrínseca asociados a una variedad Σ^3 encajada en un continuo tetradimensional con métrica **g**, las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi resultan ser entonces un conjunto necesario para la integrabilidad. La ecuación (1.11) es la única del conjunto que contiene segundas derivadas temporales de la métrica γ (ver (1.2)) y cuando contraemos sus indices espaciales se le puede escribir de una forma un poco diferente,como notara k. Kuckar después de completar segundas derivadas; esto es, $R^c_{\mu c\nu}(g)n^\mu n^\nu = n^\mu(\nabla_\nu\nabla_\mu n^\nu - \nabla_\mu\nabla_\nu n^\nu) = \nabla_\nu(n^\mu\nabla_\mu n^\nu) - \nabla_\mu(n^\mu\nabla_\nu n^\nu) - (\nabla_\nu n^\mu)(\nabla_\mu n^\nu) + (\nabla_\mu n^\mu)(\nabla_\nu n^\nu)$ y entonces

$$R^c_{\mu c\nu}(g)n^\mu n^\nu = div(D^a \ln \alpha \mathbf{e}_a + K\mathbf{n}) - K^b_a K^a_b + K^2$$

1.4.1 TENSOR DE ENERGÍA MOMENTO Y LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN.

Con la finalidad de traer a la luz algunos aspectos sobre el origen de la inercia, según la relatividad general, se hace la transcripción completa de las ecuaciones de campo de Einstein al lenguaje A.D.M., pero antes haremos algunos comentarios. La manifestación de la materia-energía local se toma en cuenta a través de las componentes de un tensor simétrico de segundo rango $T_{\mu\nu}$, esta es la manera en que la teoría dice, aquí existe y fluye **materia-energía local**. Distingamos sus componentes, $\rho = T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$ es la densidad de energía local medida por un observador cuya linea de universo tiene como vector tangente unitario a **n**, $J_a = -P^\mu_a\ T_{\mu\nu}n^\nu$ es la densidad de momento según $\mathbf{e}_a$ ó por la igualdad $E = mc^2$ es también el flujo de energía propia según $\mathbf{e}_a$, $S_{ab} = P^\mu_a P^\nu_b T_{\mu\nu}$ es el flujo según $\mathbf{e}_b$ del momento según $\mathbf{e}_a$ y como no se quiere que un cubo infinitésimalmente pequeño de materia adquiera una aceleración angular arbitrariamente grande es también el flujo según $\mathbf{e}_a$ del momento según $\mathbf{e}_b$. No sabemos la forma exacta que el tensor de energía-momento debe tener. Sin embargo; podemos asumir ciertas desigualdades generales que caracterizan el comportamiento de la materia-energía local observada en la naturaleza en acuerdo con *nuestra idea* de como *ponderar* sus contribuciones a la inercia.

Condición de energía dominante.

Para cualquier observador, la densidad de energía local es no negativa y el vector de flujo de la energía local es no espacial. Más precisamente, se tiene que $T_{\mu\nu}w^\mu w^\nu \leq 0$ y $T_{\mu\nu}w^\nu$ es no espacial $\forall$ w temporal.

La condición de energía dominante implica que la materia-energía local no puede viajar más rápido que la luz[5].

---

[5] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973), pgn 88-96.

Es una consecuencia del principio de equivalencia, que no es posible definir de manera *covariante e intrínseca* una densidad de energía local para el campo gravitatorio, ya que siempre es posible, dado un punto del espacio-tiempo, encontrar un sistema de referencia para el cual el campo gravitatorio en ese punto sea nulo, no obstante es nuestro principio básico el considerar todas las formas de energía como responsables de la inercia de los cuerpos, más adelante tocaremos este punto de nuevo, sección 1.7.1, por el momento ocupémonos de la transcripción de la **ecuación del campo gravitatorio**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Recordamos que hemos asumido $c = 1$ y $8\pi G = 1$, lo que significa que el valor numérico de $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ es uno. En adelante abreviaremos, como es usual, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ por $G_{\mu\nu}$.

Ecuacion del campo gravitatorio.

Aquí se asume que $(V^4, \mathbf{g})$, satisface las ecuaciones del campo gravitatorio y se pretende encontrar su reformulación en el lenguaje ADM. Se inicia con el escalar de curvatura del espacio-tiempo, $R(\mathbf{g}) = (P^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu)(P^{\rho\sigma} - n^\rho n^\sigma) R_{\mu\rho\nu\sigma}(\mathbf{g}) = P^{\mu\nu} P^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}(\mathbf{g}) - 2R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) n^\mu n^\nu$. Esta expresión en conjunto con las ecuaciones de Gauss-Codazzi son suficientes transcribir algunas de las ecuaciones de campo de Einstein. Se pone $\rho = G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu (= R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) n^\mu n^\nu + \frac{1}{2} R(\mathbf{g}))$ en la forma:

$$\frac{1}{2}(R(\gamma) - K^a_b K^b_a + K^2) = \rho \tag{1.12}$$

Y también vemos que $J_a = -P^\mu_a G_{\mu\nu} n^\nu = -G_{a\nu} n^\nu = -R_{a\nu}(\mathbf{g}) n^\nu$ se reduce, por Gauss-Codazzi, a la ecuación

$$J^a = D_c(K^{ac} - \gamma^{ac} K) \tag{1.13}$$

Si insistimos de nuevo en saber si un par cualquiera $(\gamma, \mathbf{K})$ se puede interpretar como una métrica inducida y una curvatura extrínseca de una hipersuperficie Σ^3, esta vez inmersa en un espacio-tiempo que satisface las ecuaciones de campo de Einstein (problema inverso de lo que se hace en esta sección), necesariamente debe cumplirse sobre la hipersuperficie el sistema de ecuaciones (1.12) y (1.13); estas expresiones, que forman parte de las ecuaciones del campo gravitatorio, en su conjunto les llamaremos **constricciones** y son nuestra primera conexión directa con el principio de Mach.

Por otra parte, $R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma})$ es otra manera de escribir las ecuaciones del campo gravitatorio, si se usa esta última forma, la relación $R_{ab}(\mathbf{g}) = R_{a\mu b\nu}(\mathbf{g}) \frac{n^\mu n^\nu}{n \cdot n} + R^c_{acb}(\mathbf{g})$, (1.11) y de nuevo

Gauss-Codazzi se expresa finalmente, $P^{\mu}_{a}P^{\nu}_{b}G_{\mu\nu} = S_{ab}$ como:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\beta}\right)K_{ab} = R_{ab} - 2K_{ac}K^{c}_{b} + KK_{ab} - \left(S_{ab} + \frac{1}{2}\gamma_{ab}(\rho - S)\right) - \frac{1}{\alpha}D_{a}D_{b}\alpha \tag{1.14}$$

hemos concluido la transcripción de las ecuaciones de campo de Einstein.

Ecuaciones de conservación.

En noviembre 25 de 1915, A. Einstein presentó su versión final de las ecuaciones del campo gravitatorio ante la academia Prusiana. Para este tiempo aún no era parte de su conocimiento las identidades de Bianchi y entonces que el operador diferencial $G^{\mu\nu}$ en las $g_{\mu\nu}$ tiene divergencia nula. Esta identidad fue derivada por el matemático alemán Aurel Voss en 1880, por Ricci en 1889 y Luigi Bianchi en 1902. Herman Weyl en agosto de 1917 obtuvo también esta identidad por un principio variacional. Se pone de manifiesto ahora que tal identidad $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ implica, siempre que se satisfacen las ecuaciones del campo gravitatorio, que $\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$ y se cumplen entonces las ecuaciones de conservación. Al aplicar las expresiones (1.5), (1.6) y (1.7) tanto en $P^{a}_{\mu}\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$ como en $n_{\mu}\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$ se obtiene una versión de ambas ecuaciones en función de las variables A.D.M. Se reconoce en cada una, ecuaciones muy particulares, a saber, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler[6] respectivamente. Notemos que S^{ab} aparece en cada una de las ecuaciones y la interacción gravitacional se toma en cuenta a través de los términos que contienen las variables α, β y **K**.

$$\frac{1}{\alpha}\partial_{t}\rho + D_{b}J^{b} = S^{ab}K_{ab} + \rho K + \frac{\beta^{b}}{\alpha}D_{b}\rho - 2J^{b}D_{b}\ln\alpha \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\alpha}\partial_{t}J^{a} + D_{b}S^{ab} = 2J^{b}K^{a}{}_{b} + KJ^{a} + \frac{\mathcal{L}_{\beta}J^{a}}{\alpha} - (S^{ab} + \rho\gamma^{ab})D_{b}\ln\alpha \tag{1.16}$$

Es instructivo notar ahora, sin necesidad de hacer más cálculos, que si se verifican las ecuaciones de movimiento (1.2) y (1.14) para γ y **k**, y además la materia-energía evoluciona satisfaciendo las ecuaciones de conservación (1.15) y (1.16) entonces, si se verifican las constricciones, ecuaciones (1.12), (1.13), sobre Σ^{3}_{t}, se mantendrán válidas sobre Σ^{3}_{t+dt} que se determina apartir de Σ^{3}_{t} según los valores que tomen α y β. Esto se infiere de la identidad $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ tal como se puede visualizar directamente por *analogía* a los cálculos que llevaron a las ecuaciones (1.15) y (1.16), solo que ahora debemos remplazar $T^{\mu\nu}$ por $G^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}$ para finalmente arrivar a dicha conclusión.

---

[6]Estas expresiones aparecen en J. W. York 1982, The initial value problem and dynamics, ***Gravitational Radiation, North Holland.***

1.5 El problema de valores iniciales de la Relatividad General.

Se dice que un **espacio-tiempo** (V^4, g) es **globalmente hiperbólico** si y solo si admite una subvariedad, S, que solo es intersectada por cada trayectoria causal sin fin, una y sola una vez, subvariedad que se le designa el nombre de **superficie de Cauchy**.

Toda la información de la región donde el espacio-tiempo es hiperbólico se encuentra concentrada en un conjunto de datos iniciales, algunos de naturaleza puramente geométrica, mientras que los otros son de caracter local, pero todos ellos especificados sobre una superficie de Cauchy. Este es el contenido en la relatividad general de la frase: "Las cosas son como son porque fueron lo que fueron[7]".

En verdad, hoy día se tiene un resultado más preciso. A saber, cada conjunto de datos (Σ^3, γ, K) genera una región de espacio-tiempo (V^4, g), que se denomina **desarrollo de Cauchy** de (Σ^3, γ, K), donde g es efectivamente una métrica lorentziana que satisface las ecuaciones del campo gravitatorio en el vacío y V^4 admite una subvariedad, S, difeomorfa a Σ^3; tal que la métrica inducida por g sobre S y la curvatura extrínseca asociada son respectivamente las imágenes de γ y K bajo el difeomorfismo $\Sigma^3 \rightarrow S$. Todo aquello cierto si y solo si el conjunto de datos (Σ^3, γ, K) satisfacen las constricciones en el vacío[8]. Un resultado análogo también existe en presencia de fuentes, solo que esta vez hay que considerar tanto leyes de conservación, como leyes constitutivas y otras constricciones que pueden surgir en el problema.

Así que el conjunto de datos $(\Sigma^3, \gamma, K, \rho, J)$ no es libremente especificable (Principio de Mach). Una interrogante es ¿Cuales son aquellos datos libremente especificables que gobiernan la inercia de los cuerpos?. **El problema de valores iniciales** es construir todos los conjuntos de datos $(\Sigma^3, \gamma, K, \rho, J)$ posibles, que satisfacen las constricciones, una empresa que lleva, en si misma, la identificación de los grados de libertad del campo gravitatorio.

---

[7]El desarrollo de Cauchy, ver abajo, de un conjunto de datos iniciales terminaría por ejemplo por la formación de singularidades o violaciones a la causalidad.

Ver C.J.S. Clarke (1993), *The Analysis of Space-Time Singularities*, Cambridge lecture notes in physics, University Press Cambridge, 124-125.

[8]Ver Choquet-Bruhat, Y. and J. W. York. (1980), *The Cauchy Problem*, in: General Relativity and Gravitation, ed. A. Held (Plenum, New York).

1.6 Formulación canónica.

A principios del siglo XX, cinco días antes de que Einstein presentara su versión final de las ecuaciones del campo gravitatorio, D. Hilbert presentó un artículo a la Gesellschaft der Wissenschaften en Goettingen titulado "The Foundations of Physics", en este se presentaba con éxito la construcción de un conjunto de ecuaciones para el campo gravitatorio[9], el método que utilizó para llegar a él tiene origen en un principio variacional.

Se define primero un espacio normado de métricas hiperbólicas de signatura lorentziana admisibles a la variedad del espacio-tiempo V^4, diga- mos $M(V^4)$. En la definición de $M(V^4)$ se especifican por ejemplo res- tricciones referentes al comportamiento asintótico a tomar en la infinidad espacial, si la hay. Si $M(V^4)$ es lo suficientemente "*regular*", que no siempre es el caso en las aplicaciones[10], y donde la palabra regular incluye que $S[\mathbf{g}] = \int R(\mathbf{g})dV_g < \infty$; una métrica en $M(V^4)$ que satisface las ecuaciones de campo de Einstein sin materia es un extremo del funcional

$$S[\mathbf{g}] = \int R(\mathbf{g})dV_g$$

y viceversa, un extremo de $S[\mathbf{g}]$ en $M(V^4)$ satisface las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío.

Se advertirá, con esta información fluyendo en el torrente sanguineo, la posibilidad de construir un hamiltoniano cuyas ecuaciones canónicas restablescan de nuevo las ecuaciones de la teoría de la relatividad general, para eventurarnos en tal empresa debemos especificar el espacio normado $M(V^4)$; así que nos limitaremos a buscar entre los hamiltonianos posibles aquel que gobierna a un espacio-tiempo espacialmente cerrado y a un espacio-tiempo asintóticamente plano.

Debido a que la mecánica cuántica se construyó en ***analogía***[11] con la teoría Hamiltoniana de la mecánica clásica, uno espera también encontrar pistas hacia una teoría cuántica de la gravedad.

Para comenzar, analicemos el funcional $S\,[\mathbf{g}]$ bajo el conjunto de variables $(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_{,o})$. Vemos que, en virtud de la última fórmula antes de la sección

---

[9] A. Einstein (1916), *Hamilton's principle and the General theory of Relativity*, contenido en la colección The Principle of Relativity, Dover publication .

[10] ¿Es posible tener soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, que en cierto sentido son regulares, pero para las cuales la acción $\int R dV_g$ diverge?. J. Hadamard presentó en 1906 el siguiente ejemplo. Sea $\Omega = \{(x,y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Y consideremos el problema de Dirichlet $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = g$, donde $g(\theta)$ es la función continua $\Sigma_1^\infty \frac{\cos(2^{2^n}\theta)}{2^n}$ (Es una serie de funciones continuas que converge absoluta y uniformemente). Notemos que $u(x,y) = Re(\Sigma_1^\infty \frac{z^{2^{2n}}}{2^n})$ (función analítica en Ω) es armónica en Ω y satisface la condición de frontera. Luego es solución. Sin embargo se tiene que la acción diverge $I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega = \infty$.

[11] P. A. M. Dirac (1925)."*The Fundamental Equations of quantum Mechanics*" Proc. Soc. A. 109 p. 642

1.4.1 y la primera de la subsección *ecuación del campo gravitatorio*, S [g] toma la forma

$$
\begin{aligned}
S[\alpha,\beta,\gamma,\mathrm{K}] &= \int\int\{K^a_b K^b_a - K^2 + R(\gamma)\}\alpha dt d\Sigma^3_\gamma \\
&\quad -2\int\int div(D^a \ln \alpha \mathbf{e}_a + K\mathbf{n})\alpha dt d\Sigma^3_\gamma
\end{aligned}
$$

Con esta apariencia ya se distingue un término que puede escribirse como integral de frontera, acordemos en este punto seguir sin él, a menos que sea necesario incluirlo de nuevo. Como hemos asumido det $\gamma \neq 0$, podemos emplear la supermétrica[12] G^{abcd} y su inversa $\mathbf{G}^{-1}$ dados por las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
G^{abcd} &= \frac{1}{2}(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}(\gamma^{ac}\gamma^{bd} + \gamma^{ad}\gamma^{bc} - 2\gamma^{ab}\gamma^{cd}) \\
G^{-1}_{abcd} &= \frac{1}{2}(\det\gamma)^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc} - \gamma_{ab}\gamma_{cd}) \\
G^{-1}_{abef}G^{efcd} &= \frac{1}{2}(\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c)
\end{aligned}
$$

para sustituir $K^a_b K^b_a - K^2$ por la relación equivalente $\frac{G^{abcd}K_{ab}K_{cd}}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}}$, que toma la apariencia de una energía cinética, luego $-R(\gamma)$ será la resemblanza de una energía potencial y podemos reconocer entre las fauces un lagrangiano L.

$$
L[\alpha,\beta,\gamma,\gamma_{,o}] = \int \alpha\left(\frac{G^{abcd}K_{ab}K_{cd}}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}} + R(\gamma)\right)d\Sigma^3_\gamma
$$

Notamos enseguida que L no depende de $\alpha_{,o}$ y $\beta_{,o}$, consecuentemente estas cantidades son libremente especificables, salvo condiciones impuestas por la topología de V^4, y tanto α como β pasan a ser variables de norma ajustables bajo difeomorfismos, cambios de coordenadas, luego sus momentos conjugados asociados son identicamente nulos $\frac{\delta L}{\delta\alpha_{,o}} = \frac{\delta L}{\delta\beta_{ab,o}} = 0$. A diferencia, el momento conjugado a γ_{ab} es la densidad tensorial $\frac{\delta L}{\delta\gamma_{ab,o}} = 2\alpha G^{abcd}K_{ab}\frac{\delta K_{cd}}{\delta\gamma_{ab,o}}$ cantidad que resulta ser en virtud de la ecuación (1.2):

$$
\pi^{ab} \equiv \frac{\delta L}{\delta\gamma_{ab,o}} = -G^{abcd}K_{cd} = -(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}(K^{ab} - \gamma^{ab}K)
$$

[12] Ver Bryce S. DeWitt (1967), *Quantum Theory of Gravity. I The Canonical Theory.* Physical Review, vol 160, No 5.

Nota : Entre las diversas propiedades de la supermétrica podemos señalar que mediante un cálculo directo ha de satisfacerse la fórmula $G^{-1}_{abcd}\delta G^{abcd} = -\gamma^{ab}\delta\gamma_{ab}$ de la que se deduce la relación de proporcionalidad det $\mathbf{G} \propto$ det γ^{-1}. Del estudio del problema de eigenvalores de $\mathbf{G}$ cuando $\gamma^{ab} = \delta^{ab}$ se infiere que det $\mathbf{G} = -\frac{1}{4}$ det γ^{-1}.

A la luz de esta última fórmula y nuevamente por (1.2) es posible también expresar $\gamma_{ab,o}$ en términos π^{ab} arrivando al resultado

$\gamma_{ab,o} = \mathcal{L}_{\beta}\gamma_{ab} + 2\alpha G^{-1}_{abcd}\pi^{cd}$

En esta etapa de nuestra disertación podemos ya intentar construir una expresión hamiltoniana considerando la transformación de Legendre $(\gamma_{,o}, L) \mapsto (\pi, H_{ADM})$ establecida por

$H_{ADM}[\alpha,\beta,\gamma,\pi] = \int \frac{\pi^{ab}}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}}\gamma_{ab,o}d\Sigma^3_{\gamma} - L[\alpha,\beta,\gamma,\pi]$

la cual se puede reescribir como

$H_{ADM}[\alpha,\beta,\gamma,\pi] = \int 2\frac{\pi^{ab}}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}}D_a\beta_b + \alpha(\frac{\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}tr^2[\pi]}{\det\gamma} - R(\gamma))\, d\Sigma^3_{\gamma}$

Veamos por tanto que ecuaciones canónicas se infieren de este funcional, el cálculo directo de la variación δH_{ADM} conduce a la expresión:

$$\begin{aligned} \delta H_{ADM} &= \int A^{ab}\delta\gamma_{ab} + B_{ab}\delta\pi^{ab}d\Sigma^3 \\ &- \oint G^{abce}(\alpha D_c\delta\gamma_{ab} - (D_c\alpha)\delta\gamma_{ab})d^2\sigma_e \\ &- \oint 2\beta_b\delta\pi^{bc} + (2\beta^a\pi^{bc} - \beta^c\pi^{ab})\delta\gamma_{ab}d^2\sigma_c \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ahora bien, los términos de frontera se pueden anular en un punto crítico del funcional ya sea porque el espacio $M(V^4)$ se toma suficientemente grande ó precisamente porque se restringe $M(V^4)$ de manera que estos términos son cero de entrada; este último punto de vista es el que se se usa frecuentemente de manera que se *asumen* condiciones de frontera *especiales* en la infinidad espacial.

Diremos que un espacio-tiempo $(\Sigma^3 \times \Re, g)$ es asintóticamente plano si existe un conjunto compacto $\mho \subset \Sigma^3$ tal que $\Sigma^3\backslash\mho$ es la unión disjunta de un número finito de conjuntos abiertos Ω_A, $A = 1, 2, \ldots, N$ llamados terminales, cada uno de ellos difeomorfo al complemento de la cerradura de una bola en R^3 y con tal difeomorfismo el tensor métrico debe adquirir en Ω_A una forma tal que

$$\begin{aligned} &\gamma_{ab} - \delta_{ab} = O(r^{-1}) \quad \gamma_{ab,c} = O(r^{-2}) \\ &\pi^{ab} = O(r^{-2}) \\ &\alpha - 1 = O(r^{-1}) \quad \alpha_{,c} = O(r^{-2}) \\ &\beta^a = O(r^{-1}) \quad \beta^a{}_{,c} = O(r^{-2}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Resulta que con estas restricciones existe aún un término no nulo en la infinidad espacial, a saber $-\oint G^{abce}D_c\delta\gamma_{ab}d^2\sigma_e = -\delta\oint\gamma^{ab}(\gamma_{ac,b} - \gamma_{ab,c})d^2\sigma^c$. Las condiciones (1.18) son físicamente razonables cuando se considera un sistema gravitante aislado, ya que es de esperarse su similitud en Ω_A con la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{8\pi r}\right)dt^2 + (\delta_{ab} + \frac{M}{8\pi}\frac{x^a x^b}{r^3})dx^a dx^b$$

Así que nos vemos obligados a modificar H_{ADM} y adoptar como hamiltoniano la expresión:

$$\begin{aligned}
H[\alpha,\beta,\gamma,\pi] &= \int \alpha\mathcal{H} + \beta_b\mathcal{H}^b d\Sigma^3_{\gamma} + E[\gamma] \\
\mathcal{H} &= \frac{\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}tr^2[\pi]}{\det\gamma} - R(\gamma) \\
\mathcal{H}^b &= -D_a\frac{2\pi^{ab}}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}} \\
E[\gamma] &= \oint \gamma^{ab}(\gamma_{ac,b} - \gamma_{ab,c})d^2\sigma^c
\end{aligned}$$

El primer término proviene de una integración por partes tomando en cuenta (1.18) y hemos añadido un término adicional de superficie para que δH no contenga términos de frontera; en un universo cerrado tales términos simplemente no existen. Podemos verificar ahora, con la acción correspondiente al hamiltoniano H

$$S[\alpha,\beta,\gamma,\pi] = \int_{t_o}^{t_1}\{\int \pi^{ab}\gamma_{ab,o}d\Sigma^3 - H[\alpha,\beta,\gamma,\pi]\}dt$$

que las ecuaciones canónicas

$$\gamma_{ab,o} = \frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}} = B_{ab}, \quad \pi^{ab}_{,o} = -\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ab}} = A^{ab}$$

son solo (1.2) y (1.14) respectivamente, que α y β aparecen como multiplicadores de Lagrange y que de la variación de ellos se infiere, la constricción hamiltoniana (1.12) y la constricción del momento (1.13). Se recuperan, de esta manera, las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, tal como queríamos. ¿Pero que significado encierra el término de superficie?[13]; Este hecho es el que teníamos precisamente en mente cuando afirmámos en un comienzo que la inercia está determinada solo parcialmente por las ecuaciones de campo gravitatorio[14,15].

[13] ver Regge, T. y Teitelboim, C. (1974) Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. *Ann. of Phys. 88, pp. 286-318*.

[14] A este respecto ver la página 179 y la nota 17 de W.Pauli (1958), *Theory of Relativity*, Dover publications.

"... A decision of the more general mathematical problem of the existence of such rigorous solutions is desirable (soluciones regulares no estacionarias de $Ricc(g) = 0$ en un espacio-tiempo asintóticamente plano). If they exist , it would not be posible to formulate the Mach principle (Inercia) in such a way that it is a consequence of the relativistic field equations .This principle has to be reconsidered ... "

[15] También A. Einstein en su publicación de 1917 "Cosmological considerations on the

Notemos que cuando evaluamos tal término de frontera para la métrica de Schwarzschild se recupera simplemente la constante M.

De ahora en adelante distinguiremos con una barra aquellas cantidades que satisfacen las ecuaciones de campo de Einstein, así en particular, el conjunto $(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi})$ será un extremo de la acción S, siempre que este funcional tome un valor finito.

1.7 La energía y el momento total

de un espacio-tiempo asintóticamente plano.

Amalie Emmy Noether, quien se encontraba en Goettingen en 1915, época en que se sucitó el descubrimento de las ecuaciones de la gravitación , señalo a D. Hilbert un resultado sobre cantidades conservadas deducidas a partir de la invarianza ante ciertas transformaciones de un funcional dado. el mismo Hilbert, quien tampoco conocía las identidades de Bianchi, hizo alusión a tal resultado en el artículo referido en el apartado anterior.

Teorema de Noether

Sea Υ_ε una familia de transformaciones $(t,\alpha,\beta,\gamma,\pi)\overset{\Upsilon_\varepsilon}{\mapsto}(\tau_\varepsilon,\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon,\gamma_\varepsilon,\pi_\varepsilon)$ paramétrizadas por ε y compatibles con (1.18) , tal que $\Upsilon_o = I$. Si el funcional S_ε dado por la ecuación

$$S_\varepsilon[\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon,\gamma_\varepsilon,\pi_\varepsilon]\equiv\int_{\tau_\varepsilon(t_1)}^{\tau_\varepsilon(t_2)}\{\int\pi_\varepsilon(t,x)\cdot\gamma_{\varepsilon,\tau_\varepsilon}(t,x)d\Sigma^3-H[\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon,\gamma_\varepsilon,\pi_\varepsilon]\}d\tau_\varepsilon$$

es independiente de ε en una vecindad del cero para todo t_1 y t_2 con $(\alpha_{\varepsilon=0},\beta_{\varepsilon=0},\gamma_{\varepsilon=0},\pi_{\varepsilon=0})$ punto crítico de $S_{\varepsilon=0}$, entonces [16]:

$$\int\pi(t,x)\cdot(\frac{\partial\gamma_\varepsilon}{\partial\varepsilon})_{\varepsilon=0}d\Sigma^3-H[\alpha,\beta,\gamma,\pi](\frac{\partial\tau_\varepsilon}{\partial\varepsilon})_{\varepsilon=0} \qquad (1.19)$$

no depende de t.

general theory of Relativity" (contenido en la colección *The principle of Relativity*, Dover publications, pp. 183) reconoce las consecuencias de adoptar condiciones de frontera: " Thus inertia would indeed be *influenced*, but would not be *conditioned* by matter".

[16] Ver Jorge Ize, (1987), "Calculo de Variaciones", Cinvestav, pp. 147-149

1.7.1 ENERGÍA ADM.

Supongamos en esta sección, como en la que le sigue, que el conjunto de variables $(t,\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi})$ es un extremo de la acción sobre el espacio funcional que satisface (1.18). Debido a que H no depende explícitamente de t, no tardamos en reconcer que la familia de transformaciones $(t,\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi}) \overset{\Upsilon_\varepsilon}{\longmapsto} (t+\varepsilon,\overline{\alpha}+\varepsilon f(x),\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi})$ con $f \in C_o^\infty(\Sigma^3)$ preservan (1.18) y deja invariante al funcional $S[\alpha,\beta,\gamma,\pi]$, entonces por (1.19), necesariamente $H[\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi}]$ es una constante de movimiento. Luego, en virtud de (1.12) y (1.13) tiene valor $E[\overline{\gamma}]$. De ahí que $E[\overline{\gamma}]$ se interprete como la energía total de un universo asintóticamente plano, que incluye ambos tipos de energía, la de la materia y la del campo gravitatorio. Esto significa que en ausencia de materia, $E[\overline{\gamma}]$ se reduce al contenido de energía efectiva de la ondas gravitacionales. (Notar que el decaimiento de γ y sus derivadas mantienen esta cantidad finita.)

1.7.2 MOMENTO TOTAL.

Siguiendo la misma pauta, ponemos a tela de juicio la familia de transformaciones Υ_ε generada por el campo vetorial ξ^a, que tiende en la infinidad espacial a un vector constante $\xi(\infty) = \mathrm{C}$;
$(t,\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\pi}) \overset{\Upsilon_\varepsilon}{\longmapsto} (t,\overline{\alpha} - \mathcal{L}_{\varepsilon\xi}\overline{\alpha},\overline{\beta} - \mathcal{L}_{\varepsilon\xi}\overline{\beta},\overline{\gamma} - \mathcal{L}_{\varepsilon\xi}\overline{\gamma},\overline{\pi} - \mathcal{L}_{\varepsilon\xi}\overline{\pi})$.
Después de aplicar tales transformaciones, las condiciones (1.18) persisten, surge entonces la pregunta si la acción S es invariante ante dichas transformaciones. Un primer indicio sobre la veracidad de este aserto proviene del hecho de que $E[\gamma]$, por si solo, es invariante. Para saber si el término restante es también invariante tomemos su derivada de Lie (notar que el integrando es ahora un objeto del tipo al que Weyl denomina *densidad escalar*), con lo cual se obtienen las siguientes igualdades que culminan en un retundo cero, gracias a las ecuaciones de movimiento y a las condiciones (1.18):
$\int\int\{(\overline{\pi^{ab}}\overline{\gamma_{ab,t}} - \frac{\overline{\beta_b}\overline{\mathcal{H}^b}+\overline{\alpha}\overline{\mathcal{H}}}{(\det\overline{\gamma})^{-\frac{1}{2}}})\varepsilon\xi^c\}_{,c}d\Sigma^3dt = \int\oint\overline{\pi^{ab}}\overline{\gamma_{ab,t}}\varepsilon\xi^c d^2\sigma_c dt = 0$
En esta ocasión por tanto, también se puede recurrir al teorema de Noether y descubrir otra cantidad conservada, la que en virtud de su origen se le denomina ímpetu total. Para avanzar hay que señalar en primer lugar que,

$$-\int\overline{\pi^{ab}}(t,x)\mathcal{L}_\xi\overline{\gamma}_{ab}d\Sigma^3 = -2\int\frac{\overline{\pi^{ab}}}{(\det\overline{\gamma})^{\frac{1}{2}}}D_a\xi_b\, d\Sigma^3 = -2\oint\overline{\pi^{ab}}\mathrm{C}_b d^2\sigma_a$$

usar una integración por partes y las ecuaciones de movimiento. Se sigue entonces de aplicar (1.19) la expresión del ímpetu total:

$$P^b = -2\oint\overline{\pi^{ab}}d^2\sigma_a$$

1.8 Acerca del desarrollo histórico del Teorema de la positividad de la energía.

La conjetura de la positividad de la masa dice que (M_a, P_a) es un cuadrivector de tipo temporal para cada región asintótica, las denominadas terminales, a menos que el espacio-tiempo que evoluciona de nuestro conjunto de datos iniciales es el espacio-tiempo de Minkowsky.

En algún momento de 1968, Brill y Deser[17] calcularon, sobre espacio-tiempos asintóticamente planos, la primera y segunda variaciones del funcional $E[\bar{g}]$ condicionado por las constricciones, hamiltoniana, y del momento. Cabe notar que su camino no involucra resolver las constricciones, sino solo considerar sus primera y segunda variaciones. En tal caso encontraron que, existe un único punto crítico; el espacio-tiempo plano, punto en el cual la segunda variación de $E[\bar{g}]$ es no negativa y $E[\bar{g}]$ toma, en tal punto el valor cero, de lo que se infiere que la energía ADM es no negativa en la vecindad de dicho punto.

Un poco más tarde, 1976, acaeció una prueba rigurosa de la positividad de la masa ADM, en las *cercanías*, en sentido funcional, del espacio-tiempo de Minkowsky. Fue establecida por Choquet-Bruhat y Marsden[18]. Sin embargo, ya que las normas de espacios de dimensión infinita son en general no equivalentes, su prueba solo se aplica a cierta clase de la totalidad de espacios asintóticamente planos.

Fue en un célebre artículo de 1979 publicado por Schoen y Yau[19], usando argumentos de carácter puramente geométricos (en el que se involucra la existencia de superficies maximales), cuando se estableció el siguiente resultado *global* sobre la positividad de la energía en espacio-tiempos asintóticamente planos.

---

[17] Brill, D., and S. Deser, 1968, Variational Methods and Positive Energy in General Relativity, *Ann. Phys. 50 , 548-570.*

[18] Choquet-Bruhat, Y ., and Marsden 1976, *Commun. Math. Phys. 51 , No 3 ,283.*

[19] Schoen, R., and S. Yau, 1979, On the proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity, *Commun. Math. Phys. 65, 45-76.*

Teorema de la positividad de la energía.

Sea (Σ^3, γ) *una variedad Riemanniana, orientable, con* $R(\gamma) \geq 0$ *y asintóticamente euclídea. Es decir, en cada terminal* $\Omega_A \approx R^3 \backslash \overline{B_\rho}$ *la métrica* γ*, en cordenadas euclideanas de* R^3*, tiene la forma (Ver la sección 2.1.2 donde se dan algunas definiciones)*

$$\gamma_{ab} = (1 + \tfrac{M_A}{2r})^4 \delta_{ab} + h_{ab} \qquad h_{ab} = O(r^{-2})$$

Entonces

(i) $h \in C_2^2 \Rightarrow M_A \geq 0$

Adicionalmente, si $h \in C^5$ *y* $\sigma^5(|\,\partial^3 h\,| + |\,\partial^4 h\,| + |\,\partial^5 h\,|) < \infty$ *resulta también cierta la implicación:*

(ii) $M_A = 0$*, para algún* $A \Rightarrow (\Sigma^3, \gamma)$ *es isométrica a* R^3 *con métrica plana.*

Haciendo alusión al teorema anterior notemos que, si un espacio-tiempo satisface la condición de energía débil ($\rho \geq 0$) y admite una hipersupeficie máximal ($tr[\mathrm{K}] = 0$) de tipo espacial, la constricción hamiltoniana (1.12), asegura $R(\gamma) \geq 0$ y si además se cumplen las hipótesis sobre γ del teorema, entonces necesariamente $M_A \geq 0$.

Más tarde, durante 1981, precisamente en un artículo subsecuente de los mismos autores [20], la condición ($tr[\mathrm{K}] = 0$) fué liberada y remplazada, asumiendo esta vez la condición de energía dominante ($\rho \leq (J^a J_a)^2$) y el decaimiento, $tr[\mathbf{K}] = O(r^{-3})$. También se debilitó la condición asintótica de γ_{ab} de manera que ahora se admite $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + o(r^{-1})$, a saber

$$\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}$$

$$|h_{ab}| \leq k_1(1 + r)^{-1}$$

$$|\partial h_{ab}| \leq k_2(1 + r^2)^{-1}$$

$$|\partial\partial h_{ab}| \leq k_3(1 + r^3)^{-1}$$

[20] Richard Schoen y S.T Yau, 1981. "Proof of the Positive Mass theorem II". *Commun. Math. Phys.* **79** pp. 231-260

En donde k_1,k_2 y k_3 son constantes positivas y ∂ representa el gradiente euclideano.

Finalmente mencionaremos, que en otros terrenos E. Witten descubrió, hacia 1981, una prueba diferente del teorema de la positividad de la energía, la que posee vínculos con la teoría clásica de la supergravedad[21].

Por algún tiempo, en nuestro siguiente capítulo nos dedicaremos a otros menes- teres, encaminados a revisar parte del bagaje matemático de nuestro siglo, necesario para abordar algunos de los problemas que nos aguardan.

---

[21] Aquella derivación se puede encontrar en Choquet-Bruhat , 1984, *Positive-Energy Theorems*, Les Houches, Session XL 1983; Relativité, groupes et Topologie II, Elsevier Science Publishers B. V., 740-785.

2

Herramientas matemáticas.

"The approach to a more profound knowledge of the basic principles of physics is tied up with the most intricate mathematical methods".

A. Einstein.

2.1 Teoremas de encajamiento y compacidad.

Más adelante, vamos a querer manipular objetos de dimensión infinita. Quizás para comenzar, el primer impulso natural sea usar la intuición geométrica cultivada en espacios de dimensión finita y ver cuanto más se le puede extender y aplicar. Es de valor investigar bajo, esta perspectiva, el concepto de compacidad. Se recuerda que si toda sucesión formada por elementos de un conjunto S contiene una subsucesión *convergente* con un límite en S, se dice que el **conjunto S es compacto.** Aquí S puede representar por ejemplo, el universo espacial mismo de cierto espacio-tiempo. Esta idea pensada sobre puntos del continuo espacio-temporal es susceptible de generalización y aplicable a conjuntos más generales; que tienen como "puntos" funciones, operadores, etc. Por ejemplo, un operador continuo Υ que mapea conjuntos acotados a conjuntos cuya cerradura es compacta le llamaremos un **operador compacto.** Precisamente emplearemos una y otra vez sucesiones de funciones, a través de la repetición indefinida, que esperamos aproximen en sentido funcional a alguna posible solución de las constricciones y así atacar el problema del origen de la inercia. Será entonces de vital importancia reconocer los espacios normados donde tal forma de busqueda resulte exitosa, la búsqueda de soluciones, en esa dirección un **espacio de Banach** $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado sobre los reales o los complejos en donde toda sucesión de Cauchy converge a un límite en X, Recordemos que $\{u_j\}$ es una **sucesión de Cauchy** en $(X, \|\cdot\|)$ si y solo si, dada $\varepsilon > 0 \exists J(\varepsilon)$ tal que $\forall \ell, m \geq J(\varepsilon)$ se tiene $\|u_\ell - u_m\| \leq \varepsilon$.

La manera en que una sucesión de funciones se aproxima a una posible solución de las constricciones, queda manifiesta atendiendo las diversas relaciones existentes entre diferentes espacios de Banach, de ahí la necesidad de estudiar los teoremas de encajamiento. Veamos algunos ejemplos de espacios de Banach:

(i) El espacio de funciones continuamente diferenciables.

Aquí escribimos $D^k u$, para indicar cualquier derivada de orden k de u. Se define

$$
\begin{aligned}
C^m(\overline{\Sigma}^n) &= \{u | D^k u \;\; es \;\; continua \;\; sobre\; \overline{\Sigma}^n \;\; para\; k \leq m\} \\
\|u\|_{C^m} &= \textstyle\sum_{k \leq m} \;\; Sup_{\Sigma^n} |D^k u|
\end{aligned}
$$

en donde usamos $| D^k u |^2 \equiv (D^{a_1} D^{a_2} \cdots D^{a_k} u) \cdot (D_{a_1} D_{a_2} \cdots D_{a_k} u)$.
$C^m(\overline{\Omega})$ es de Banach si Ω es acotado.

La antigua escuela italiana (Dini, Ascoli, Arzelà) encontró importantes hallazgos sobre los espacios C^m. Ascoli en 1883, introdujo la noción de equicontinuidad, concepto central que ha llegado a conocerse, en nuestra época, como teorema de Arzelà- Ascoli.

Teorema de Arzelà-Ascoli

Sea S un compacto y $\{u_j\}$ una sucesión en $C(S)$, se asegura que si dado $\varepsilon > 0$ se tiene:

(a) **equicontinuidad**. *$\exists V(\varepsilon, x_o)$ vecindad de $x_o \in S$ tal que $| u_j(x) - u_j(x_o) \leq \varepsilon |$, para $x \in V(\varepsilon, x_o)$, $\forall j$, $\forall x_o \in S$ (Aquí la vecindad no depende de j).*

(b) *$\|u_j\|_{C(s)} \leq M$; $\forall j$ (M no depende de j).*

Entonces se puede extraer una subsucesión $\{u'_j\}$ que converge en $C(S)$.

Prueba. Vamos por pasos.

($\cdot$) Notar que para x_o fijo, $\{u_j(x_o)\}$ es una sucesión acotada de números reales, por (b), y por el **teorema de Bolzano-Weierstrass**, contiene una subsucesión convergente, digamos $u_j(x_o) \to u(x_o)$, (x_o fijo).

($\cdot\cdot$) Primero: Se observa que, todo conjunto S compacto, contiene un subconjunto contable y denso $\{x'_j\} \subset S$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe un sistema **finito** de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{m(\varepsilon)}$ de $\{x'_j\}$ con la propiedad de que todo punto x de S se encuentre a una distancia $\leq \varepsilon$, desde al menos uno de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{m(\varepsilon)}$.

Prueba. Sea S compacto y supongamos que existe ε_o para la cual no existe una cobertura finita de esferas de radio $\leq \varepsilon_o$ con centro en puntos de S. Llegaremos a un absurdo. Se toma $x_o \in S$ y se elige $x_1 \in S$ tal que $\|x_o - x_1\| \geq \varepsilon_o$. Si no existiera x_1 ya tendríamos nuestro sistema finito de puntos. De igual forma se elige ahora $x_2 \in S$ cuya distancia, tanto a x_1 como x_2, sea mayor que ε_o. Continuando de esta manera que no tiene fin en un número finito de pasos; se construye una sucesión $\{x_j\}$ tal que $\|x_j - x_i\| \geq \varepsilon_o$ si $j \neq i$, de la cual ninguna subsucesión convergente se puede extraer, lo que es ridículo si S es compacto. Ahora sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ podemos extraer un sistema finito de puntos con la propiedad deseada. Para construir $\{x'_j\}$ se toma $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{j}, \ldots$, y se recolectan los correspondientes sistema finitos de puntos.

($\cdot\cdot\cdot$) En virtud de ($\cdot$) por un argumento diagonal de Cantor, ver página 65, se extrae de $\{u_j(x)\}$ la subsucesión $\{u'_j(x)\}$ que converge simultáneamente para $x = x'_1, x'_2, \ldots, x'_j, \ldots$, etc.

Ahora bien, sea $\varepsilon > 0$ dado, $\forall x \in S$ se tiene que $\exists j \leq m(\varepsilon)$ tal que $x \in V(\varepsilon, x'_j)$, luego por la equicontinuidad (a) se deduce:

$$\begin{aligned} | u'_\ell(x) - u'_k(x) | &\leq | u'_\ell(x) - u'_\ell(x'_j) | + | u'_\ell(x'_j) - u'_k(x'_j) | + \\ &| u'_k(x'_j) - u'_k(x) | \leq 2\varepsilon + | u'_\ell(x'_j) - u'_k(x'_j) | \end{aligned}$$

Y por ($\cdot\cdot\cdot$) para $\ell, k \geq J(\varepsilon)$ se concluye que $| u'_\ell(x) - u'_k(x) \cdot | \leq 3\varepsilon$; $\forall x \in S$. Esto significa que u'_j es una sucesión de Cauchy en $C(S)$, por ser $C(S)$ un espacio de Banach $u_j \overset{C(S)}{\to} u \in S$.□

Desafortunadamente estos espacios carecen de algunas propiedades naturales. Por ejemplo, si consideramos el problema de Dirichlet $\Delta u = g$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ sobre un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \Re^n$ con frontera regular. Aún con $g \in C(\Omega)$ no necesariamente existe una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
Así sucede en el caso en que Ω es el interior de una esfera,

$\Omega = \{x \in \Re^3, | X | < 1\}$

y $g(x)$ es la función continua en cero:

$$g(x) = \begin{cases} (\frac{3x^2}{2} - 1)\frac{1}{\ln\frac{|x|}{2}} & Si \quad | x | \neq 0 \\ 0 & Si \quad | x | = 0 \end{cases},$$

Notese que ahora la función $u(x) = -\frac{1}{4}\int_\Omega g(\xi)\left[\frac{1}{|\xi - X|} - \frac{1}{|X|}\frac{1}{|\xi - X/|X|^2|}\right] d^3\xi$ es solución. Sin embargo, u no es C^2 en $x = 0$.

(ii) El espacio de funciones Hölder continuas de exponente α.

$$\begin{aligned} C^{m,\alpha}(\overline{\Sigma}^n) &= \{u|\ u \in C^m(\overline{\Sigma}^n),\quad H_\alpha(D^m u) < \infty\ \} \\ \|u\|_{C^{m,\alpha}} &= \|u\|_{C^m} + \sup H_\alpha(D^m u) \end{aligned}$$

en donde α denota ahora un número positivo, $0 < \alpha < 1$ y

$$H_\alpha(u) \equiv \sup_{x, y \in \Sigma^n;\ \ x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Este es un espacio natural para la teoría del potencial porque si Ω es un conjunto abierto y acotado de $\Re^n$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ y u satisface la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ en sentido distribucional entonces $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ en donde $0 < \alpha < 1$.

(iii) Espacios L^p.

Fue F. Riesz quien introdujo, en un trabajo memorable para el análisis funcional, los espacios L^p.

Sea p un número positivo, con $1 \leq p < \infty$ y

$$L^p = \{\ u : \Sigma^n \to \Re \mid\ \ Lebesgue - medible;\ \int | u |^p\, d\Sigma^n < \infty\}$$

el espacio normado con **norma**

$$\| u \|_{L^p} = \{\int | u |^p\, d\Sigma^n\}^{\frac{1}{p}}$$

Cuando se identifican funciones que difieren solo en un conjunto de medida nula; L^p es de **Banach**.

L^p es de Banach.

Prueba: Sea $\{\phi_j\}$ una sucesión de Cauchy en L^p. Para poder concluir basta probar que hay una subsucesión convergente en L^p (Usar $\| \phi_j - \phi_\infty \|_{L^p} \leq \| \phi_j - \phi_{j_i} \|_{L^p} + \| \phi_{j_i} - \phi_\infty \|_{L^p}$). Por un argumento diagonal se extrae una subsucesión $\{\phi_{j_i}\}$ tal que $\| \phi_{j_{i+1}} - \phi_{j_i} \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^i}$ $\forall i \geq 1$. Se pone $g_m = \sum_{i=1}^{m} | \phi_{j_{i+1}} - \phi_{j_i} | \geq 0$. Notamos en seguida que $\| g_i \|_{L^p} \leq 1$. De lo cual se deduce, usando el teorema de convergencia monótona, que $g_i \xrightarrow{L^p} g \in L^p$. Por otra parte, para $m \geq \ell \geq 2$ se tiene $| \phi_{j_m} - \phi_{j_\ell} | \leq | \phi_{j_m} - \phi_{j_{m-1}} | + \cdots + | \phi_{j_{\ell+1}} - \phi_{j_\ell} | \leq g - g_{\ell-1}$ en **c.t.p.** Luego, en c.t.p de Σ^n, $\{\phi_{j_m}(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\Re$. Por tanto, $\phi_{j_m}(x) \xrightarrow{\Re} \phi^*(x)$ en **c.t.p.** Por lo cual $| \phi^* - \phi_{j_m} |^p \leq | g |^p$ en **c.t.p**, $\forall m \geq 2$ y consecuentemente $\phi^* \in L^p$. Finalmente, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue[1]. $\| \phi_{j_i} - \phi^* \|_{L^p} \to 0$.

Convergencia en c.t.p.

Sea $\{\phi_j\}$ una sucesión en L^p y $\phi \in L^p$, tales que $\| \phi_j - \phi \|_{L^p} \to 0$. Entonces se puede extraer una subsucesión $\{\phi_{j_i}\}$ tal que $\phi_{j_i} \to \phi$ en **c.t.p** de Σ^n.

En efecto, en este caso como $\| \phi_j - \phi \|_{L^p} \to 0$, la sucesión es de Cauchy y podemos proceder exactamente de la misma manera que antes para obtener una subsucesión $\{\phi_{j_i}\}$ tal que $\| \phi_{j_i} - \phi^* \|_{L^p} \to 0$ y $\phi_{j_i} \to \phi^*$ en **c.t.p** de Σ^n. Luego $\| \phi - \phi^* \|_{L^p} \leq \| \phi - \phi_{j_i} \|_{L^p} + \| \phi_{j_i} - \phi^* \|_{L^p} \to 0$. De ahí que $\phi^* = \phi$ en **c.t.p.**

Espacio L^∞. Se define

$$L^\infty = \{ \ u : \Sigma^n \to \Re \mid \ Lebesgue - medible;\ \exists C \ tal \quad que \ \ | u | \leq C \quad c.t.p \quad de \ \Sigma^n \}$$

y se introduce la **norma**

$$\| u \|_{L^\infty} = \inf\{ C : | u | \leq C \ \ c.t.p \quad en \ \Sigma^n \}$$

con la que L^∞ resulta un espacio de **Banach**.

---

[1]Sobre la medida de Lebesgue se puede consultar por ejemplo H.L. Royden. (1968). "Real analysis". Macmillan Publishing Co., New York.

Desigualdad de Hölder.

Dicha desigualdad se usará frecuentemente[2]

Sea $\phi_i \in L^{p_i}$ y $1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i}$ entonces

$$\int \prod_{i=1}^{m} \phi_i \leq \prod_{i=1}^{m} \|\phi_i\|_{L^{p_i}}$$

Prueba. El resultado es trivial si para algún j se tiene $\phi_j \equiv 0$. Supongamos que no ocurre. Ahora bien, por la homogeneidad de la desigualdad, basta probar que, para $\|\phi_j\|_{L^p_j} = 1$ con $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1$ necesariamente

$\int \Pi_{j=1}^{m} \mid \phi_j \mid d\Sigma \leq 1$. Esto se asegura si mostramos que, para $x_j > 0$ con $\Pi_{j=1}^{m} x_j = 1$ implica $1 \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^{p_j}}{p_j}$, ya que entonces el resultado se sigue de usar $x_j = \frac{|\phi_j|}{(\Pi_{i=1}^{m} |\phi_i|)^{\frac{1}{p_j}}}$ e integrar. Tal desigualdad resulta sencilla de probar en el caso $m = 2$, cuando se nota que log es una función cóncava y creciente sobre $]o, \infty[$. Pues entonces, se sigue de poner $t = \frac{1}{p'} \in]0, 1[$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ en $\log[(1-t)x_1^p + tx_2^{p'}] \geq (1-t)\log[x_1^p] + t\log[x_2^{p'}] = \log[x_1 x_2] = 0$. En el caso general procedemos, para poder concluir, encontrando los extremos vía multiplicadores de Lagrange del problema $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^{p_j}}{p_j}$, condicionado por $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pi_{j=1}^{m} x_j - 1 = 0$. Esto lleva a análizar $\nabla F = \mu \nabla g$. Lo que implica, después de multiplicar la ecuación j por x_j, que hay un extremo que satisface $x_1^{p_1} = x_2^{p_2} = \cdots = x_m^{p_m} = 1 = \mu$. De hecho este es un mínimo; porque si tomamos por ejemplo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, 1, \ldots, 1)$, F tomará valores arbitrariamente grandes para valores de ε arbitrariamente pequeños .□

Una consecuencia directa de esta desigualdad es la contención $L^p(\Sigma) \subset L^q(\Sigma)$ si $p > q \geq 1$ y $\overline{\Sigma}$ compacto, basta observar que al tomar $\phi_1 = f^q$, $\phi_2 = 1$ y $p_1 = \frac{p}{q}$ necesariamente $\|f\|_{L_q} \leq Vol(\overline{\Sigma})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|\phi\|_{L_p}$.

Observaciones generales. Se denota con $(L^p)'$ al conjunto de funcionales, lineales y continuos, sobre L^p que llamamos espacio dual de L^p . Haremos los siguientes comentarios. Para $p \in]1, \infty[$; L^p es identificable con $(L^p)''$ y se dice en este caso que L^p es reflexivo. En cambio esto es falso si $p = \{1 \text{ ó } \infty\}$. Más aún, como probara F. Riesz, $(L^p)'$ es identificable con $L^{p'}$; siempre que $p \in]1, \infty[$ y donde p' es el conjugado de p, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Analogamente L_1' es identificable con L^∞. Por otra parte, resulta que si

---

[2]Para una discusión de la desigualdad, ver Eberhard Zeidler, *Nonlinear Fuctional Analysis and its Applications II/A: Linear Monotone Operators*, 1990 Springer-Verlag New York, pgn 35-40.

$p \in [1, \infty[$ entonces L^p tiene un subconjunto denso *numerable*, es decir es un espacio separable. No ocurre así para L^∞.

(iii) **Espacios de Sobolev.**

Eran los años 30 cuando S.L. Sobolev comenzó a publicar sus investigaciones sobre los espacios $H_k(\Re^n)$.

Sean $\{f_i\}_{i\in N}$ y $\{g_i\}_{i\in N}$ sucesiones de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|_X$, diremos que estas dos sucesiones están relacionadas $\{f_i\} \sim^X \{g_i\}$ si y solo si $\|f_i - g_i\|_X \overset{i\to\infty}{\to} 0$. Un espacio normado se puede completar para formar un espacio de Banach tomando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy[3]. Sea entonces $q \geq 1$ y k un entero no negativo, considerando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy formadas por funciones $C^\infty(\Sigma^n)$ con respecto a la norma:

$$\|u\|_{H^p_m(\Sigma^n)} = \left\{ \sum_{k\leq m} \|D^k u\|^p_{L^p} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

resulta en un espacio de Banach al que se bautiza $H^p_m(\overline{\Sigma}^n)$.

Este también es un espacio natural para la teoría del potencial. Sea $\Omega \subset \Re^n$ y $1 < p < \infty$. Se sabe que, si $g \in H^p_k(\Omega)$ entonces cuando u es una solución distribucional de la ecuación $A(u) = g$ donde A es un operador lineal elíptico de orden 2, necesariamente $u \in H^p_{k+2}$.

Todos estos espacios los usaremos muy pronto y son el prototipo de algunos otros, relevantes en el estudio de espacio-tiempos asintóticamente planos(ver sección 2.1.2).

Diremos que el espacio de Banach Y está encajado en X y escribiremos $Y \subset X$ cuando los elementos de Y son también elementos de X y existe una constante absoluta $c > 0$ tal que $\|u\|_X \leq c\|u\|_Y$ para cada $u \in Y$. Si además, subconjuntos acotados de Y son conjuntos compactos de X se dice que la **contención es compacta,** propiedad que se expresa en símbolos en la forma $Y \hookrightarrow X$.

Antes de dar, algunos ejemplos verifiquemos el suguiente resultado sobre densidad.

$C^\infty_o(\Re^n)$ es denso en $H^p_m(\Re^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Para establecer este resultado, es suficiente mostrar que para $u \in C^\infty(\Re^n) \cap H^p_m(\Re^n)$ dado, existe $u_\varepsilon \in C^\infty_o(\Re^n)$ tal que $\| u_\varepsilon - u \|_{H^p_m} \leq \varepsilon$; $\forall \varepsilon > 0$. Sea $\zeta \in C_o(\Re^n)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ y $\zeta(x) = \begin{cases} 1 & Si \quad \| x \| \leq 1 \\ 0 & Si \quad \| x \| \geq 2 \end{cases}$.

Se define entonces la ***función truncamiento*** $\zeta_\varepsilon(x) \equiv \zeta(\varepsilon x)$. Se afirma que

[3] Ver por ejemplo Kôsaku Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag New York. 1980, pgn 56-57.

$u_\varepsilon \equiv \zeta_{\varepsilon'} u$ realiza bien ese trabajo si ε' (positivo) es suficientemente pequeño. Sucede que para cualquier entero $k \leq m$, $| D^k(\zeta_{\varepsilon'} u) |$ está acotada en c.t.p de $\Re^n$ por una función de L_p; a saber $\sum_{\ell=0}^{\ell=k} \binom{k}{\ell} \| \zeta_{\varepsilon'}^{(\ell)} \|_{L^\infty} | u^{(k-\ell)} | \in L^p$ (usar la fórmula de Leibniz) y $D^k(\zeta_{\varepsilon'} u) \to D^k u$ en c.t.p, cuando $\varepsilon' \to 0$. Por lo que se concluye, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, que $D^k(\zeta_{\varepsilon'} u) \xrightarrow{L^p} D^k u$, cuando $\varepsilon' \to 0$, para todo $k \leq m$. Por consiguiente $\|\zeta_{\varepsilon'} u - u \|_{\cdot H^p_m(\Re^n)} \leq \varepsilon$ para ε' pequeño con respecto a una cota que depende de ε.□

Como $C_o^\infty(\Re^n)$ es denso en $H_m(\Re^n)$; también se puede definir $H_m(\Re^n)$ usando la transformada de Fourier. Para esto, se implementa a $C_o^\infty(\Re^n)$ con la norma :

$$\| u \|^*_{H_m} = \{ \int_{\Re^n} (1 + | \xi |^{2m}) \mid \hat{u}(\xi) \mid^2 d^n\xi \}^{\frac{1}{2}}$$

en donde $\hat{u}$ denota la transformada de Fourier de u y se completa después el espacio normado. La equivalencia entre ambas definiciones es consecuencia de la equivalencia entre las normas sobre un conjunto denso:

$$\| u \|^*_{H_m} \leq \| u \|_{H_m} \leq 2^{m-1} \| u \|^*_{H_m}; \quad \forall u \in C_o^\infty(\Re^n)$$

Tales relaciones se verifican al usar que $1 \leq \frac{1+|\xi|^2+\cdots+|\xi|^{2m}}{1+|\xi|^{2m}} \leq 2^{m-1}$; $\forall \xi \in \Re^n$ (Notar que la función x^m con $2 \leq m$, es convexa y por tanto $[t \cdot 1 + (1-t) \mid \xi \mid^2]^m \leq t \cdot 1^m + (1-t) \mid \xi \mid^{2m}$ para $t \in [0,1]$, se pone $t = \frac{1}{2}$) y la identidad de Parseval $\int_{\Re^n} \mid D^k u \mid^2 d^n\xi = \int_{\Re^n} \mid \widehat{D^k u} \mid^2 d^n\xi = \int_{\Re^n} \mid i\xi \mid^{2k} \mid \hat{u} \mid^2 d^n\xi$. (Sumar sobre k, desde cero a m y usar la desigualdad previa).

Ejemplos de encajamientos

$H^q_1(\Re^n) \subset L^{p^*}(\Re^n)$

Para empezar, supongamos que exiten constantes $K(n,q)$ y $1 \leq q < n$ que verifican

$\| u \|_{L^p} \leq K(n,q) \| \nabla u \|_{L^q}; \ \forall u \in H^q_1(\Re^n)$

(Notar que si esto es cierto, entonces $\| u \|_{H^q} \geq K(n,q)^{-1} \| u \|_{L^p}$)

En particular si se pone $u(cx)$ en lugar de $u(x)$ resulta, después de un cambio de variables, que también $\| u \|_{L^p} \leq c^{\left(1+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)} K(n,q) \| \nabla u \|_{L^q}$. Si se quiere tener una desigualdad integral invariante ante esta clase de escalamientos, tendremos que identificar necesariamente a p con p^*, cantidad de terminada por q en la forma $\frac{n}{p^*} = \frac{n}{q} - 1$.

(Si se toma $q \in [1, n[$ se tiene $p^* \geq 1$)

En seguida se demostrará aquella desigualdad, usando un razonamiento de finales de los años 50, empleado por Gagliardo y Nirenberg. Como siempre, podemos restringirnos por un argumento de densidad al caso donde las $u's \in C^\infty_o$. La prueba se hará en dos pasos.

(i)Primero se demuestra la estimación auxiliar:

$$\| u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2}\Pi^n_{j=1} \| u_{x_j}\|^{1/n}_{L^1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \| \nabla u\|_{L^1} \tag{2.1}$$

donde $u_{x_j} \equiv \partial u/\partial x_j$ y corresponde al caso con $q = 1$.

Sea $I_j \equiv \int^\infty_{-\infty} | u_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) | \, d\xi_j$. Observamos que por el teorema fundamental del cálulo $| \, 2u(x) \, | \leq I_j$. Multiplicando estas desigualdades juntas, se obtiene $| \, 2u(x) \, |^{n/(n-1)} \leq (I_1 I_2 \cdots I_n)^{1/(n-1)}$. Se integra ahora esta última desigualdad sucesivamente sobre las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y se aplica la desigualdad de Hölder en cada etapa. Como propotipo, veamos por ejemplo lo que sucede en la primera etapa.

(Se escribe $I_{ji} \equiv \int^\infty_{-\infty} \int^\infty_{-\infty} | \, u_{x_j} \, | \ d\xi_j dx_i$)

$$\int^\infty_{-\infty} | \, 2u(x) \, |^{n/(n-1)} \, dx_1 \ \leq \ I_1^{1/(n-1)} \int^{+\infty}_{-\infty} (I_1 I_2 \cdots I_n)^{1/(n-1)} dx_1 \leq$$
$$\leq I_1^{1/(n-1)} (I_{21} \cdots I_{n1})^{1/(n-1)}$$

Y se sigue. Finalmente se tiene

$$\int_{\Re^n} | \, 2u(x) \, |^{n/(n-1)} \, d^n x \ \leq \ \left\{ \Pi^n_{j=1} \int_{\Re^n} | \, u_{x_j} \, | \, d^n x \right\}^{1/(n-1)},$$

que es precisamente la primera relación que se quería probar. Para establecer la otra estimación de (2.1), solo se justifican las cotas sucesivas de $\Pi^n_{j=1} \| u_{x_j}\|^{1/n}_{L^1} \leq \frac{1}{n} \Sigma^n_{j=1} [\|u_{x_j}\|_{L^1} \cdot 1] \ \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \| \nabla u\|_{L^1}$. Las cuales son el resultado usar $\Pi^n_{j=1} a_j^{1/n} \leq \Sigma^n_{j=1} \frac{a_j}{n}$ (Usar la prueba de la desigualdad de Hölder y poner $x_j = \frac{a_j^{1/n}}{(\Pi^n_{j=1} a_j^{1/n})^{1/n}}$) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\Re^n$; en ese orden.

(ii) Se aplica (2.1) a $|u|^{t-1}u$ en lugar de u para un $t \geq 1$. Luego

$$\| u\|^t_{L^{\frac{tn}{n-1}}} \leq \frac{t}{2\sqrt{n}}\| \,|u|^{t-1}\nabla u\|_{L^1} \leq \frac{t}{2\sqrt{n}}\|u\|^{t-1}_{L^{q'(t-1)}}\|\nabla u\|_{L^q}$$

Se elige t de forma tal que $\frac{tn}{n-1} = q'(t-1)$. Que se reduce a tomar $t = \frac{n-1}{n}p^*$, un valor permitido porque $t \geq 1$ para $q \in [1,n[$. De ahí que $\| u\|_{L^{p^*}} \leq \frac{q}{2\sqrt{n}}\left(\frac{n-1}{n-q}\right)\|\nabla u\|_{L^q}$.□

OBSERVACIÓN: Aunque la cota $\frac{q}{2\sqrt{n}}\frac{n-1}{n-q}$, funciona bien, esta no es la constante óptima. La mejor constante la calculó F. Rodemich en 1966 [4] :

$$K(n,q) = \begin{cases} \frac{q-1}{n-q}\left[\frac{n-q}{n(q-1)}\right]^{1/q}\left[\frac{n\Gamma(n+1)w_{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{q})\Gamma(n+1-\frac{n}{q})}\right]^{1/n} & Si \quad 1 < q < n \\ \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\omega_n}\right]^{1/n} & Si \quad q = 1 \end{cases}$$

Y es alcanzada por las funciones $u(x) = (\lambda + \| x\|^{q/(q-1)})^{1-(n/q)}$; $\lambda > 0$.

$\mathrm{H}_m(\Re^n) \subset C(\Re^n)$.

Basta probar este encajamiento sobre un conjunto denso; tomemos $u \in C^\infty_o(\Re^n) \cap H_m(\Re^n)$. Primero se observa que $\int_{\Re^n}\frac{d^n\xi}{1+|\xi|^{2m}}$ es finita si $2m > n$. Y se recuerda que $u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\Re^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)d^n\xi$. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|u(x)| \leq \int_{\Re^n}\frac{\widehat{u}(\xi)\cdot(1+|\xi|^{2m})^{1/2}}{(1+|\xi|^{2m})^{1/2}}d^n\xi \quad \leq \| u\|^*_{H_m}\left(\int_{\Re^n}\frac{d^n\xi}{1+|\xi|^{2m}}\right)^{1/2}$$

de ahí que u es continua. En efecto, tomar K compacto, tal que
$x_o \in Int\ K \neq \phi$ y $u_j \overset{H^*_m}{\to} u$ con $u_j \in C^\infty_o(\Re^n)$;
$|u(x) - u(x_o)| \leq |u(x) - u_j(x)| + |u_j(x) - u_j(x_o)| +$
$+ |u_j(x_o) - u(x_o)| \leq 2cte\cdot\|u - u_j\|_{H^*_m} + |u_j(x) - u_j(x_o)|$

Así, tomando j suficientemente grande, digamos $j = J(\varepsilon)$ vemos que, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(J(\varepsilon))$ tal que $|u(x) - u(x_o)| < \varepsilon$ para
$|x - x_o| \leq \delta(J(\varepsilon))$. Esto último por la continuidad **uniforme** de $u_{J(\varepsilon)}$ sobre K.□

[4] Ver Rodemich.F. "The Sobolev inequalities with best possible constants" *Analysis seminar at California Institute of Technology*, (1966).

Ver también:

Aubin, Th. "Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *C. R. Acad. Sc. Paris*, *280* (1975) p. 279-281 y *J. Diff Geom. 11* (1976), p. 573-598.

Talenti, G."Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, *110* (1976) p. 353-372.

Ejemplos de encajamientos compactos

$H_1^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $p \in [1, p^*[$

Sea $\wp$ un subconjunto acotado de $H_1^q(\Omega)$, aquí $\Omega \subset \Re^n$ es abierto y acotado, digamos para fijar ideas,

$$\wp \equiv \{u \in H_1^q(\Omega) \mid \|u\|_{H_1^q(\Omega)} \leq C = cte\} \ .$$

Se nota, que si $u \in \wp$ entonces $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq K(n,q)C$, debido al encajamiento de Sobolev $H_1^q \subset L^{p^*}$.

Como ya es usual, se mostrará primero el resultado en el caso $p = 1$. Se pone $K_j \equiv \{x \in \Omega \mid dis(x, \partial\Omega) \geq \frac{2}{j}\}$ $j \in N$. Verifiquemos la veracidad de los siguientes enunciados sobre los elementos de $\wp$.

Dado $\varepsilon > 0$,
(i) $\exists\ j_o(\varepsilon)$ *tal que* $\|u\|_{L^1(\Omega - K_j)} \leq \varepsilon/4$, $\forall j \geq j_o(\varepsilon)$ *y* $\forall u \in \wp$.
(ii) $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *tal que* $\int_{K_j} \mid u(x+y) - u(x) \mid d^n x \leq \varepsilon/4$ *cuando* $\|y\| \leq \delta_\varepsilon$

En efecto, (i) se sigue de la desigualdad de Hölder:

$$\|u \cdot 1\|_{L^1(\Omega - K_j)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega - K_j)} \cdot [vol(\Omega - K_j)]^{1/(p^*)'}$$
$$\leq K(n,q)C \cdot [vol(\Omega - K_j)]^{1/(p^*)'}$$

Y (ii) es un poco más complicado. Supongamos que $\vartheta \in C^\infty(\Omega)$, luego por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{K_{j_o}} \mid \vartheta(x+y) - \vartheta(x) \mid d^n x \leq \quad \int_{K_{j_o}} \int_o^1 \mid \frac{d}{dt}\vartheta(x+ty) \mid dt d^n x$$

El segundo lado se puede acotar de manera sucesiva por

$$\int_{K_{j_o}} \int_o^1 \mid \nabla_x \vartheta(x+ty) \mid dt d^n x \cdot \|y\| \quad \text{y} \quad \|y\| \cdot \int_o^1 \int_{K_{2j_o}} \mid \nabla_z \vartheta(z) \mid d^n z dt$$

usando el cambio de variables $z = x + ty$, donde se supone $\|y\| \leq 1/j_o$, y se aplica el teorema de Fubini al final. A su vez la última estimación es menor o igual que

$$\|y\| \cdot \|\nabla \vartheta\|_{L^1(\Omega)} \leq \quad \|y\| \cdot \|\nabla \vartheta\|_{L^q(\Omega)} \cdot [vol(\Omega]^{1/q'}$$

Ahora bien, esta cota no es solo cierta $\forall \vartheta \in C^\infty(\Omega)$ sino que por densidad lo es también para $u \in \wp$. Finalmente se pone como cota $\|y\| \cdot C \cdot [vol(\Omega)]^{1/q'}$.

De ahí que (ii) resulta, si se elige $\delta_\varepsilon \leq \min\{\frac{\varepsilon/4}{C \cdot [vol(\Omega)]^{1/q'}}, 1/j_o\}$. La observación de que el cumplimiento de (i) y (ii), nos lleva a concluir que $\wp$ es precompacto en L^1, se resume en un resultado conocido como el **teorema de Fréchet-Kolmogorov**. La idea es introducir los modificadores de Friedrichs (ver apéndice A.1 para su definición y estudio) y así usar el teorema de Arzelà-Ascoli.

Se pone $\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & Si \quad x \in \Omega \\ 0 & Si \quad x \in \Re^n \backslash \Omega \end{cases}$

$\overline{\wp} \equiv \{\overline{u} \mid u \in \wp\}$ y $\rho_{1/j} \equiv j^n \rho(jx)$.

De (ii) se sabe entonces que

(iii) $\|(F_{1/j}\overline{u}) - \overline{u}\|_{L^1(K_{j_o})} \leq \varepsilon/4, \forall \overline{u} \in \overline{\wp}$ y $\forall j \geq 1/\delta_\varepsilon$.

Esto resulta claro de notar que:
$\int_{K_{j_o}} |(F_{1/j}\overline{u}) - \overline{u}| \, d^n x = \int_{K_{j_o}} \int_{\overline{B_1}} \rho(z) \, |\overline{u}(x + \frac{1}{j}z) - \overline{u}(x)| \, d^n z d^n x \leq \varepsilon/4$
donde se usa el teorema de Fubini y se aplica (ii).

Por otra parte, para j fijo, el conjunto $F_{1/j}(\overline{\wp})|_{K_{j_o}} \subset C^o(K_{j_o})$ es acotado y equicontinuo sobre K_{j_o}. En efecto, se advierte **acotamiento uniforme**

$\|F_{1/j}\overline{u}\|_{L^\infty(\Re^n)} \leq \|\rho_{1/j}\|_{L^\infty(\Re^n)} \|\overline{u}\|_{L^1(\Re^n)} \leq C_j, \forall \overline{u} \in \overline{\wp}$

y **equicontinuidad**.

$|(F_{1/j}\overline{u})(x) - (F_{1/j}\overline{u})(y)| \leq \|x - y\| H_o(\rho_{1/j}) \|\overline{u}\|_{L^1(\Re^n)} \leq C_j \|x - y\|$
(se recuerda que $H_\alpha(u) \equiv \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$)

Luego, por el *teorema de Arzelà Ascoli*:

(iv) $\overline{\wp}$ *es precompacto sobre* K_{j_o} *en* $C^o(K_{j_o})$,
(por tanto, también en $L^1(K_{j_o})$)

Sigue el razonamiento final para mostrar que cualquier sucesión del conjunto $\wp$ tiene una subsucesión convergente en $L^1(\Omega)$. Sea $\{u_\ell\}_{\ell \in N}$; $u_\ell \in \wp$. Se elige j de modo que $\|(F_{1/j}\overline{u}) - u\|_{L^1(K_{j_o})} \leq \varepsilon/4$ (por (iii)). Se sabe además que existe una subsucesión, $\{u'_\ell\}$ tal que $\|(F_{1/j}\overline{u'_\ell}) - (F_{1/j}\overline{u'_m})\|_{L^1(K_{j_o})} \leq \varepsilon/4$ para $\ell, m \geq M(\varepsilon)$ (por (iv)).

Así, en virtud de la desigualdad del triángulo y (iii)

$$\|u'_\ell - u'_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u'_\ell - u'_m\|_{L^1(\Omega/K_{j_o})} + \|u'_\ell - (F_{1/j}\overline{u'_\ell})\|_{L^1(K_{j_o})} + \\ +\|(F_{1/j}\overline{u'_\ell}) - (F_{1/j}\overline{u'_m})\|_{L^1(K_{j_o})} + \|(F_{1/j}\overline{u'_m}) - (u'_m)\|_{L^1(K_{j_o})} \leq \varepsilon$$

Consecuentemente $\{u'_\ell\}$ es de Cauchy en $L^1(\Omega)$, y por ser este un espacio completo $\{u'_\ell\}$ converge en $L^1(\Omega)$ tal como se quería probar desde un principio.

Resta considerar el caso ¿$H_1^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$?, para $p \in (1, p^*)$. Mostraremos que si $\{u'_\ell\} \subset \wp$ es de Cauchy en $L^1(\Omega)$ necesariamente es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, para $p \in (1, p^*)$. Veamos porque:

$$\|u'_\ell - u'_m\|_{L^p(\Omega)} = \left\{\int_\Omega |u'_\ell - u'_m|^{\frac{p^*-p}{p^*-1}} \cdot |u'_\ell - u'_m|^{p - \frac{p^*-p}{p^*-1}} d^n x\right\}^{1/p} \leq$$

$$\left\{\int_\Omega |u'_\ell - u'_m| \, d^n x\right\}^{\frac{p^*-p}{p^*-1} \cdot \frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega |u'_\ell - u'_m|^{-\frac{p^*-p}{p-1} + \frac{p^*-1}{p-1}p} d^n x\right\}^{\frac{p-1}{p^*-1} \cdot \frac{1}{p}} =$$

$$(\|u'_\ell - u'_m\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{p^*-p}{p^*-1}\frac{1}{p}} \cdot (\|u'_\ell - u'_m\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{\frac{p-1}{p^*-1}\frac{p^*}{p}} \leq (2K(n\ q)C)^{\frac{p-1}{p^*-1}\frac{p^*}{p}} \varepsilon^{\frac{p^*-p}{p^*-1}\frac{1}{p}}$$

Hemos usado la desigualdad de Holder para $\frac{1}{q} = \frac{p^*-p}{p^*-1}$ y $\frac{1}{q'} = \frac{p-1}{p^*-1}$. Llegamos así por consiguiente al resultado de que, efectivamente $H_1^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \in [1, p^*)$. $\square$

Hay que señalar, en primer lugar, que si $p = p^*$, no necesariamente la contención $H_1^q(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ es compacta; se conocen contraejemplos construidos con las funciones $u_\lambda(x) = [\lambda + \|x\|^{q/(q-1)}]^{1-\frac{n}{q}}$; $\lambda > 0$, (ver la pag. 34). Y es por esta razón que nos referiremos a p^* como el exponente crítico de Sobolev. Conviene poner atención para los resultados que vienen, la lucha entre la integrabilidad (potencia en L^{p^*}) y la diferenciabilidad para que los encajamientos funcionen, donde por supuesto la dimensión juega un papel importante.

2.1.1 ALGUNOS RESULTADOS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPACTAS.

Teorema de encajamiento de Sobolev.

Sean k, ℓ dos números enteros ($k > \ell \geq 0$); p y q dos números reales ($1 \leq q < p$) que satisfacen $\frac{k-\ell}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq n$ y denotemos con Σ^n a las variedades Riemannianas orientables, compactas sin frontera y con W^n a las variedades Riemannianas orientables, compactas con frontera C^r, $r \geq 1$. El teorema de encajamiento de Sobolev establece las contenciones:

$$\begin{aligned} H_k^q(\Sigma^n) &\subset H_\ell^p(\Sigma^n) \\ H_k^q(W^n) &\subset H_\ell^p(W^n) \end{aligned}$$

Si además $q(k-s) > n$, $s < r$ se siguen también las relaciones

$$\begin{aligned} H_k^q(\Sigma^n) &\subset C^s(\Sigma^n) \\ H_k^q(W^n) &\subset C_B^s(W^n). \end{aligned}$$

Más aún, cuando $q(k-s-\alpha) \geq n$, en verdad se tiene

$$\begin{aligned} H_k^q(\Sigma^n) &\subset C^{r+\alpha}(\Sigma^n) \\ H_k^q(W^n) &\subset C^{r+\alpha}(\overline{W^n}) \end{aligned}$$

donde α es un número real, $0 < \alpha < 1$.

Teorema de Kondrakov.

Sean $p, q \in \Re$; $k \in Z$, $k \geq 0$. El teorema de kondrakov asegura que para variedades Riemannianas compactas sin frontera Σ^n y variedades Riemannianas compactas W^n con frontera suficientemente regular, digamos C^1. Las contenciones siguientes son compactas cuando las desigualdes entre p, q, k, α se verifican.

$$\begin{array}{ll} H_k^q(\Sigma^n) \hookrightarrow L_p(\Sigma^n) & \\ H_k^q(W^n) \hookrightarrow L_p(W^n) & 1 \geq \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{k}{n} > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} H_k^q(\Sigma^n) \hookrightarrow C^{o,\alpha}(\Sigma^n) \\ H_k^q(W^n) \hookrightarrow C^{o,\alpha}(\overline{W^n}) \\ q(k-\alpha) > n; \quad 0 < \alpha < 1 \end{array}$$

Prueba. Aquí solo se muestran las primeras etapas de cada teorema, que son precisamente las que se necesitan en los capítulos posteriores.

Sea $(\Omega_j)_{j\in I}$ un recubri- miento finito de Σ^n (digamos $I = \{1, 2, \ldots, m\}$), $(\Omega_j, \varphi_j)_{j\in I}$ un atlas tal que en cada carta las componentes del tensor métrico esten acotadas, y $(\alpha_j)_{j\in I}$ una partición de unidad- C^∞ asociada al recubrimiento (Ω_j) (Esto es, $\alpha_j(x) \in C^\infty(\Sigma^n)$ con K_j(compacto)= $Supp\ \alpha_j \subset \Omega_j$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$ y $\Sigma_{j=1}^m \alpha_j = 1$).
Observemos que $u \in H_1^q(\Sigma^n, \gamma) \Leftrightarrow \alpha_j u \in H_1^q(\Sigma^n, \gamma)$; $\forall j \in I$ .Como precisamente en K_j, el tensor métrico γ tiene componentes acotadas sobre la carta asociada (Ω_j, φ_j); necesariamente
$\alpha_j u \in H_1^q(\Sigma^n, \gamma)$; $\forall j \in I \Leftrightarrow \alpha_j u \circ \varphi_j^{-1} \in H_1^q(\Re^n)$; $\forall j \in I$
en donde se pone $\alpha_j u \circ \varphi_j^{-1} = 0$, afuera de $\varphi_j(K_j)$.

§a. *Encajamiento de Sobolev.*

Se quiere probar que $\exists C_j$ constante, tal que:

$$\| \alpha_j u \|_{L^{p^*}(\Sigma^n)} \leq C_j \| \alpha_j u \|_{H_1^q(\Sigma^n)} \quad \forall u \in C^\infty(\Sigma^n) \cap H_1^q(\Sigma^n)$$

Supuesto sea el caso, se tiene por ende que
$\| u \|_{L^{p^*}(\Sigma^n)} \leq \Sigma_{j=1}^m \| \alpha_j u \|_{L^{p^*}(\Sigma^n)} \leq$
$m(\sup_{j\in I} C_j)[\| \nabla u \|_{L^q(\Sigma^n)} + (1 + \sup_{j\in I} | \nabla\alpha_j |) \| u \|_{L^q(\Sigma^n)}]$
$\leq m(\sup_{j\in I} C_j)(1 + \sup_{j\in I} | \nabla\alpha_j |) \| u \|_{H_1^q(\Sigma^n)}$
y se termina por un argumento de densidad. Tomemos entonces un j fijo y notemos además que existen constantes positivas ν_j y μ_j; tales que para la

métrica *Riemanniana* γ se tiene $0 < \nu_j \leq \sqrt{\det \gamma} \leq \mu_j$, sobre el compacto K_j. Así, al proseguir nuestro camino vemos queefectivamente existe C_j:

$\| \alpha_j u \|_{L^{p^*}(\Sigma^n)} \leq \mu_j^{1/p^*} \| \alpha_j u \circ \varphi_j^{-1} \|_{L^{p^*}(\Re^n)} \leq$

$K(n,2)\mu_j^{1/p^*} \| \nabla(\alpha_j u \circ \varphi_j^{-1}) \|_{L^q(\Re^n)} \leq$

$\leq K(n,2)\mu_j^{1/p^*}\nu_j^{-1/q} \| \nabla(\alpha_j u) \|_{L^q(\Sigma^n)}$

Por tanto $H_1^q(\Sigma^n) \subset L^p(\Sigma^n)$. Los casos restantes se siguen de una manera análoga y por argumentos de recurrencia.□

§b *Teorema de Kondrakov.*

Sea $\{u_k\}$ una sucesión acotada en $H_1^q(\Sigma^n)$ y $p \in [1, p^*[$, queremos probar que se puede extraer una subsucesión convergente en $L_p(\Sigma^n)$. Ahora bien, $h_1[u_k] \equiv \alpha_1 u_k \circ \varphi_1^{-1}$ resulta ser una sucesión de funciones acotada en $H_1^q(\Omega_1)$. Luego, por el teorema de Kondrakov en $\Re^n$; existe $\{u_{k_1}\}$, subsucesión de $\{u_k\}$, tal que $\{h_1[u_{k_1}]\}$ es una sucesión de Cauchy en $L_p(\Omega_1)$. Del mismo modo, se puede extraer $\{u_{k_2}\}$ subsucesión de $\{u_{k_1}\}$, tal que también $\{h_2[u_{k_2}]\}$ es de Cauchy $L_p(\Omega_2)$. Repitiendo esta operación sucesivamente, se encuentra que, es posible seleccionar una subsucesión $\{u_{k_m}\}$ de la original $\{u_k\}$; donde $\{h_j[u_{k_m}]\}$ es de Cauchy en $L_p(\Omega_j)$. Esto significa que $\{\alpha_j u_{k_m}\}$ es de Cauchy en $L_p(\Sigma^n)$ $\forall j \in I$. Finalmente, por la desigualdad del triángulo

$\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot (u_{\ell_m} - u_{k_m}) \|_{L^p(\Sigma^n)} \leq \sum_{j=1}^m \| \alpha_j u_{\ell_m} - \alpha_j u_{k_m} \|_{L^p(\Sigma^n)} < m\varepsilon$
$\forall \ell, k \geq N(\varepsilon)$. Y como $L_p(\Sigma^n)$ es completo, u_{k_m} converge en $L^p(\Sigma^n)$.

Los casos restantes se siguen de una manera análoga y por argumentos de recurrencia.□ •

Algebras de Banach.

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ es un **álgebra generalizada de Banach**, si y solo si:

$$\forall \quad u, v \in X \quad \Rightarrow \begin{cases} uv \in X \\ \|uv\|_X \leq cte \cdot \|u\|_X \|v\|_X \end{cases}$$

Por ejemplo, $C^{0,\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$ y L^∞ forman, cada uno, un álgebra generalizada de Banach; en donde $cte = 1$, es decir $\|uv\|_X \leq \|u\|_X \|v\|_X$.

También H_k^p forma un algebra generalizada de Banach cuando $pk > n$. En efecto, si $u, v \in H_k^p$ y $pk > n$ entonces también

$$\|D^a u D^b v\|_{L^p} \leq cte \cdot \|u\|_{H_k^p} \|v\|_{H_k^p} \tag{2.2}$$

para $|a| = j$, $|b| \leq k - j$, $j = 0, \ldots, k$.

Prueba:
(i) *Caso* $j = 0$. Precisamente $H_k^p \subset C^o$ porque hemos asumido $pk > n$. Luego $D^a u \in C^o$ y $\sup_{x \in \Sigma^n} | D^a u | \leq cte \|u\|_{H_k^p}$ que implica la validéz de (2.2) en este caso particular.
(ii) *Caso* $j = k$.
Se sigue del razonamiento anterior aplicado a la función v.
(iii) *Caso* $1 \leq j \leq k - 1$. Por el teorema de encaje de Sobolev

$$\begin{array}{lll} H_k^p \subset H_j^{pr} & Si & \frac{p(k-j)}{(1-\frac{1}{r})} \geq n \\ H_k^p \subset H_{k-j}^{ps} & Si & \frac{pj}{(1-\frac{1}{s})} \geq n \end{array} \tag{2.3}$$

Necesitamos aquí $r > 1$, así que tomamos $r = \frac{k}{j}$. Vemos que, se puede satisfacer ambas condiciones en (2.3) acogiendo las relaciones auxiliares $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ y $pk > n$ (parte clave). En acuerdo con esto, al usar primero la desigualdad de Hölder y después (2.3) concluimos

$$\|D^a u D^b v\|_{L^p} \leq cte \cdot \|D^a u\|_{L^{pr}} \|D^b v\|_{L^{ps}} \leq cte \cdot \|u\|_{H_k^p} \|v\|_{H_k^p} . \square$$

Aunque nuestra investigación y resultados como se verá, girararán en torno universos espacialmente cerrados, resulta indespensable, tal vez insalvable, tratar los espacio-tiempos asintóticamente planos. Por eso, incluímos también una sección sobre este tema, donde apuntamos como se ha usado parte del material matemático descrito en este capítulo.

2.1.2 ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO.

Los espacios de Sobolev con peso fueron introducidos por M. Cantor[5], para resolver algunas dificultades que se encuentran en aplicar las técnicas del análisis sobre dominios no compactos, por ejemplo la alternativa de Fredholm para operadores elípticos falla en general en espacios de Sobolev definidos sobre variedades no compactas (Vease sección 3.3). Sin embargo se puede probar que en ciertos espacios de Sobolev con peso, estos operadores elípticos actúan como isomorfismos.

Espacio-tiempo asintóticamente plano.

Un **espacio-tiempo** $(\Sigma^3 \times \Re, g)$ se dice que es **asintóticamente plano** si, exis- te un conjunto compacto $\mho \subset \Sigma^3$ tal que $\Sigma^3 \backslash \mho$ es la unión disjunta de un número finito de conjuntos abiertos Ω_A, $A = 1, 2, \ldots, N$. Cada Ω_A es difeomorfo al complemento de una bola cerrada $\overline{B}_A \subset R^3$ con el difeomorfismo Φ_A, y además la diferencia $g - \eta$ (η la métrica de Minkowski) sobre cada Ω_A tiende a cero en la infinidad espacial para cada $t \in \Re$.

Se introduce una función escalar σ sobre Σ^3, suave y positiva, tal que para $x \in \Omega_A$, en coordenadas Φ_A, $\sigma(x) = (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ donde r caracteriza la distancia a un punto fijo, arbitrario.

Espacios Funcionales.

C^s_δ : Espacio de campos tensoriales sobre Σ^3, s veces continuamente diferenciables tales que $\|f\|_{C^s_\delta} \equiv \sum_{\ell=o}^{s} \sup_{x\in\Sigma^3} \sigma^{\delta+\ell} \mid \partial^\ell f(x) \mid < \infty$.

H^s_δ : Espacio de campos tensoriales ,f, sobre Σ^3, con derivadas generalizadas (en el sentido de la teoría de las distribuciones) de orden $\leq s$ tales que $\sigma^{\delta+\ell}\partial^\ell f(x)$ es de cuadrado integrable sobre Σ^3. H^s_δ es un espacio de Hilbert en la norma

$$\|f\|_{C^s_\delta} \equiv \Sigma \int \left\{ \sum_{\ell=o}^{s} \sigma^{2(\delta+\ell)} \mid \partial^\ell f(x) \mid^2 d\Sigma \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

N O T A. Se sabe que cuando $s > \frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2} > \delta > -\frac{1}{2}$ el operador de Laplace-Beltrami $\Delta_\gamma : H^s_\delta \to H^{s-2}_{\delta+2}$ actúa en variedades Riemannianas euclideas en el infinito como un mapeo lineal, biyectivo y continuo, y no solo eso sino que, estas últimas propiedades las comparte con su operación inversa. Se puede usar este resultado para probar que la desigualdad:

$$0 < \frac{(8\nabla u \cdot \nabla u, 1)_\gamma + (R(\gamma), u^2)_\gamma}{\|u\|^2_{L^{p^*}}}; \quad \forall u \in C^\infty_o(\Sigma^3); \quad u \neq 0.$$

[5] Ver Cantor, M. (1979). Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds. Compositio Math. 38, pp. 3-35.

es en realidad una condición necesaria y suficiente[6], para que una métrica asintóticamente plana se pueda deformar conformemente de manera que, su nuevo escalar de curvatura asociado sea identicamente nulo (comparar esta condición con los resultados acerca de la conjetura de Yamabe del capítulo 4). Las métricas que cumplen tal condición son relevantes; porque constituyen soluciones al problema de valores iniciales en el vacío, en un instante de simetría temporal ($\mathbf{K} = \mathbf{0}$).

Entre alguna de las propiedades análogas a los espacios de Sobolev usuales, citamos:

Teoremas (Choquet-Bruhat y Christodoulou 1981)

Sobre una n-variedad Riemanniana euclidea en el infinito, las inclusiones siguientes son válidas

$$C^s_{\delta_1} \subset H^s_\delta \subset C^{s'}_{\delta'}, \quad Si \qquad \delta' < \delta + \tfrac{n}{2} < \delta_1,$$
$$s > s' + \tfrac{n}{2}$$

Y se nota que la propiedad $f \in C^s_\delta$ es equivalente a la notación clásica:

$$f = O\left(r^{-\delta}\right); \quad \partial f = O\left(r^{-\delta-1}\right); \quad \partial^s f = O\left(r^{-\delta-s}\right)$$

Teorema de multiplicación.

La multiplicación puntual entre campos tensoriales $(f,g) \to f \otimes g$ en una n-variedad euclídea en el infinito es continua:

$$C^s_{\delta_1} \times C^s_{\delta_2} \to C^s_{\delta_1+\delta_2}; \quad \forall s \in N; \quad \delta_1, \delta_2 \in R$$
$$H^s_{\delta_1} \times H^s_{\delta_2} \to H^s_{\delta_1+\delta_2}; \quad Si s \leq s_1, s_2; \quad s < s_1 + s_2 - \tfrac{n}{2}; \quad \delta < \delta_1 + \delta_2 + \tfrac{n}{2}.$$

Notar que H^s_δ es un algebra de Banach si $s > \frac{n}{2}$ y $\delta > -\frac{n}{2}$.

En adelante vamos asumir (Σ^3, γ) como variedad Riemanniana compacta, a menos que se especifique lo contrario.

[6] M. Cantor and D. Brill (1981); The laplacian on asymptotically flat manifolds and the specification of scalar curvature; *Compositio Mathematica., Vol. 43, Fasc. 3, 317-330.*

3

La naturaleza conforme de la Geometrodinámica.

" At any rate, a suggestion is made that the absolute size of $g_{\mu\nu}$ be taken seriously!, it may have a meaning."

R i c h a r d   F e y n m a n.

3.1 Deformaciones conformes.

Detengamonos por un instante y contemplemos la constricción del momento $Div(\mathrm{K} - \gamma tr[\mathrm{K}]) = \mathrm{J}$, la primera impresión nos revela que, solo condiciona la divergencia de un tensor simétrico, de ahí el gran valor que tiene para nuestra completa comprensión, el que contemos con una técnica para descomponer aquel tensor simétrico en una suma de tensores, pero no cualquier des- composición, sino una en la que al menos uno de sus términos posee cierta propiedad de nuestra propia elección, la propiedad de ser transverso, es decir, con divergencia nula. Si miramos la ecuación $\partial_t\gamma = \mathcal{L}_\beta\gamma - 2\alpha\,\mathrm{K}$ nos convenceremos de que es útil buscar la descomposición entre el conjunto de deformaciones de γ, de las cuales cabe distinguir aquellas que dejan invariante al espacio de métricas admisibles sobre Σ^n, que llamaremos $M(\Sigma^n)$. Cuando se deforma *conformemente* la métrica del espacio-tiempo, su *estructura causal local* queda invariante, ya que no cambia el signo del elemento de linea ds^2; esta reflexión nos llevan a considerar en especial a las deformaciones conformes, que en el futuro se convertirán en la piedra angular de nuestra investigación[1].

Diremos que dos **métricas Riemannianas** $\bar{\gamma}$ y γ admisibles en Σ^n son **conformemente equivalentes**, si y solo si, existe una función escalar $\phi > 0$, tal que $\bar{\gamma} = \phi^{\frac{2p}{n}}\gamma$, lo cual indicamos con la simbología $(\Sigma^n, \bar{\gamma}) \sim (\Sigma^n, \gamma)$. Se sigue entonces que los ángulos definidos por $\bar{\gamma}$ y γ tienen el mismo valor, pero la propiedad útil para nustra causa es otra.

De las relaciones existentes entre objetos geométricos definidos por $\bar{\gamma}$ y γ destacamos:

$$\begin{aligned}
(\det\bar{\gamma})^{\frac{1}{2}} &= \phi^p(\det\gamma)^{\frac{1}{2}} \\
\overline{\Gamma^a_{bc}} &= \Gamma^a_{bc} + \frac{p}{n}(\delta^a_b\nabla_c \ln\phi + \delta^a_c\nabla_b \ln\phi + \gamma_{bc}\nabla^a \ln\phi) \\
\bar{R} &= \phi^{-\frac{2p}{n}}\{R - \frac{2p(n-1)}{n}[\frac{\Delta\phi}{\phi} + (\nabla\ln\phi)^2(\frac{p(n-2)}{2n} - 1)]\}
\end{aligned}$$

Y si además incluimos en nuestro repertorio escalamientos $\bar{\mathrm{E}} = \phi^m\mathrm{E}$ y $\bar{\mathrm{T}} = \phi^{m'}\mathrm{T}$ de campos vectoriales $\bar{\mathrm{E}}$ y tensores simétricos de segundo rango $\bar{\mathrm{T}}$ contravariantes también resultan las siguientes expresiones entre divergencias:

$$\overline{div\mathbf{E}} = \phi^m[div\mathrm{E} + (m+p)\mathrm{E}\cdot\nabla\ln\phi]$$

$$\overline{div\mathrm{T}} = \phi^{m'}[div\mathrm{T} + (m' + \frac{p(n+2)}{n})\mathrm{T}\cdot\nabla\ln\phi - \frac{p\cdot tr[\mathrm{T}]}{n}\nabla\ln\phi]$$

[1] El método conforme fue introducido por André Lichnerowicz Lichnerowicz , A. , *J. Math. Pures Appl. 23 (1944), 37-63.*

Guiados por la navaja de Occam tomaremos[2] $p = \frac{2n}{n-2} \equiv p^*$, $m = -p^*$ y con tales valores $m' = -2(p^* - 1)$ junto con la condición adicional $tr[\mathrm{T}] = 0$ para obtener un conjunto más sencillo de ecuaciones[3]:

$$\phi^{p^*-1}\overline{R} = \phi R - 4\frac{n-1}{n-2}\Delta\phi \tag{3.1}$$

$$\overline{\mathrm{E}} = \phi^{-p^*}\mathrm{E} \qquad \overline{div}\ \ \overline{\mathrm{E}} = \phi^{-p^*}\ \ div\mathrm{E} \tag{3.2}$$

$$\overline{\mathrm{T}} = \phi^{-2(p^*-1)}\mathrm{T} \qquad \overline{div}\ \ \overline{\mathrm{T}}\ \ = \phi^{-2(p^*-1)}div\ \ \mathrm{T} \tag{3.3}$$

3.2 Hacia la descomposición de York.

Usaremos $\tilde{\gamma}$ para denotar a la densidad tensorial $\frac{\gamma}{(\det\gamma)^{\frac{1}{n}}}$ que representa la clase conforme de equivalencia para γ, una métrica admisible en Σ^n. Examinemos el cambio inducido por un difeomorfismo *infinitésimal* generado por un campo vectorial w sobre $\tilde{\gamma}$. De la teoría sobre derivadas de Lie[4] sabemos que una condición necesaria y suficiente para que tal difeomorfismo no cambie la clase de equivalencia de métricas conformes a γ es que $\mathcal{L}_{\mathrm{w}}\tilde{\gamma} = 0$. Esto es, que la derivada $\mathcal{L}_w\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{\gamma}_{ac}\nabla_b w^c + \tilde{\gamma}_{bc}\nabla_a w^c - \frac{2}{n}\tilde{\gamma}_{ab}\nabla_c w^c$ sea idénticamente nula. Esta derivada de Lie es una densidad tensorial sin traza, pero como deseamos trabajar con una cantidad tensorial en vez de una densidad tensorial introduciremos el operador vectorial $L[\mathrm{w}]$ que resultará en una simplificación de la notación y la adopción del lenguaje de operadores.

$$L[\mathrm{w}] \equiv (\det\gamma)^{\frac{1}{n}}\,\mathcal{L}_{\mathrm{w}}\tilde{\gamma} \tag{3.4}$$

Inmediatamente podemos decir algo sobre nuestro operador, si al usar la ley de transformación conforme del determinante de un tensor métrico $\overline{L}[\mathrm{w}] = (\det\overline{\gamma})^{\frac{1}{n}}\mathcal{L}_{\mathrm{w}}\tilde{\overline{\gamma}} = \phi^{\frac{2p^*}{n}}(\det\gamma)^{\frac{1}{n}}\mathcal{L}_{\mathrm{w}}\tilde{\overline{\gamma}} = \phi^{\frac{2p^*}{n}}(\det\gamma)^{\frac{1}{n}}\mathcal{L}_{\mathrm{w}}\tilde{\gamma} = \phi^{\frac{2p^*}{n}}L[\mathrm{w}]$, de lo que resulta la invariancia ante transformaciones conformes del $\ker[L]$ y de la dim $\ker[L]$. Queremos además, hacer notar una propiedad relevante sobre $\ker[L]$, a saber, que tiene dimensión finita, más aún, el valor máximo de dim $\ker[L]$ es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ y este se alcanza si y solo si (Σ^n, γ) es conformalmente plano. Para finalizar esta sección, acordemos en reservar χ para distinguir a los elementos del $\ker[L]$, a los que llamaremos vectores de Killing conformes.

[2] El valor $p^* = \frac{2n}{n-2}$ es precisamente aquel para el cual la contención $H_1 \subset L_p$ deja de ser compacta .

[3] Notemos que la ecuación de conservación $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ se satisface en general para un solo representante de la clase de métricas conformes del espacio-tiempo, salvo escalamientos por factores constantes $\phi = cte$, y entonces solo para $(V, \overline{\mathrm{g}})$. .

[4] Kentaro Yano; *The theory of Lie derivatives and its applications;* North-Holland; Amsterdam; 1957.

3.3 Descomposición de York[5].

Retomando la disertación previa al comienzo de este capítulo y teniendo en mente (3.3) optamos por aquella descomposición de un tensor simétrico h, que separa su parte transversa y sin traza $\mathbf{h}^*$.

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^* \oplus (\det\gamma)^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}_{\mathbf{w}}\tilde{\gamma} \oplus Tr_\gamma[\mathbf{h}] \tag{3.5}$$

De esta manera, cuando h respresente una deformación de la métrica, digamos $\delta\gamma$, el tercer término de la descomposición no cambiará la clase conforme de equivalencia, en contraste con el segundo que representa el cambio de la clase conforme de equivalencia generado por w, sin embargo aún ambos términos dejan invariante $M(\Sigma^n)$, luego solo queda $\mathbf{h}^*$ para especificar completamente cualquier deformación $\delta\gamma$.

El lector habrá notado, por la aparición del símbolo $\oplus$, que no resistimos la tentación de adelantarnos en señalar que tal descomposición, si existe, es ortogonal con respecto al producto escalar global, en efecto:

$(\mathbf{h}^*, (\det\gamma)^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}_{\mathbf{w}}\tilde{\gamma}) = (\mathbf{h}^*, Tr_\gamma[\mathbf{h}]) = ((\det\gamma)^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}_{\mathbf{w}}\gamma, Tr_\gamma[\mathbf{h}]) = 0.$

El primer miembro de la cadena de igualdades se anula después de integrar por partes ya que $\mathbf{h}^*$ es transverso, el segundo y tercer miembros gracias a que $\mathbf{h}^*$ y $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}\tilde{\gamma}$ carecen de traza.

Concentraremos nuestra atención por el momento en señalar aquellos aspectos que aseguran no solo la existencia de esta descomposición sino también su unícidad y entonces los que se derivan del estudio de la ecuación que debe satisfacer el campo vectorial w :

$$\Delta_L \mathbf{w} \equiv div L[\mathbf{w}] = div(\mathbf{h} - Tr_\gamma[\mathbf{h}]) \tag{3.6}$$

$-\Delta_L$ es un operador diferencial lineal de segundo orden que manda vectores en vectores con dominio denso en H_s, simétrico $(-\Delta_L \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, -\Delta_L \mathbf{v})$ y positivo $(-\Delta_L \mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq 0$ en su dominio $\mathrm{D}(-\Delta_L)$ como se infiere de la igualdad:

$$(-\Delta_L \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(L[\mathbf{w}], L[\mathbf{v}]); \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathrm{D}(-\Delta_L)$$

Usando de nuevo esta misma igualdad, se deduce directamente que $Ker[-\Delta_L] = Ker[L]$ y como $-\Delta_L$ es simétrico $(Rango(-\Delta_L))^\perp = Ker[L]$. Observemos además, que en virtud de la definición explícita de $L[\mathbf{w}]$, se tiene la expresión correspondiente $\Delta_L = \Delta + \frac{n-2}{n}\nabla div + Ricc(\gamma)$, de donde se deduce que Δ_L posee símbolo inyectivo y es por lo tanto un operador elíptico. Esto

[5] York J. 1973 Conformally invariant orthogonal decomposition of symetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity *Math. Phys*, *Vol 14*, *No 4*.

se traduce en la posibilidad de regularizar la diferenciabilidad de las soluciones débiles de (3.6) hasta el grado permitido por la diferenciabilidad que se asuma sobre los coeficientes de Δ_L. Estas observaciones son suficientes para asegurar la existencia de una única solución salvo vectores de Killing conformes χ una vez que se verifique la condición de integrabilidad (vaese abajo), a saber que la $div(\mathrm{h} - Tr_\gamma[\mathrm{h}])$ sea ortogonal a los elementos del $Ker[L]$, que en verdad se satisface:

$(\chi\ , div(\mathrm{h} - Tr_\gamma[\mathrm{h}])\ ) = \frac{1}{2}(L[\chi]\ , \mathrm{h} - Tr_\gamma[\mathrm{h}]\ ) = 0$. Notese que, aunque en general no podamos asegurar una solució única para (3.6), la descomposición si es única: pues en ella w interviene solo a través de $L[\mathrm{w}]$.

Prueba de existencia de una solución generalizada para -Δ_L.

Si se usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene:

$(-\Delta_L \mathrm{w}, \mathrm{v}) \leq cte\|\mathrm{w}\|_{H_1}\|\mathrm{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathrm{w}, \mathrm{v} \in H_1\,(\Sigma^3) \cap D(-\Delta_L)$

Ahora bien, por el **teorema de Hahn-Banach**, se puede extender el funcional $\widehat{L_\mathrm{v}}\ [\mathrm{w}] \equiv (-\Delta_L \mathrm{w}, \mathrm{v})$ como un funcional lineal y acotado sobre H_1. Luego, por el teorema de representación de Riesz, existe un elemento de H_1 único, que llamamos $\ell\,[\mathrm{v}]$, tal que:

$\widehat{L_\mathrm{v}}[\mathrm{w}] = (\mathrm{w}, \ell\,[\mathrm{v}]) \quad \forall \mathrm{w}, \mathrm{v} \in H_1$

Aquí $\ell : H_1 \rightarrow H_1$, es un operador lineal y acotado, como se puede checar fácilmente, y como $-\Delta_L$ es símetrico se sigue que ℓ es un operador autoadjunto. Se quiere resolver

$$(\ell\,[\mathrm{w}], \mathrm{v}) = (\mathrm{f}, \mathrm{v}) \quad \forall \mathrm{v} \in H_1 \quad donde \quad \mathrm{f} \equiv Div(\mathrm{h} - Tr_\gamma[\mathrm{h}]) \tag{3.7}$$

Antes de esto, consideremos el problema auxiliar, correspondiente a la forma bilineal:

$(\ell\,[\mathrm{w}], \mathrm{v}) + \lambda(\mathrm{w}, \mathrm{v}) = (\tilde{\mathrm{f}}, \mathrm{v}) \quad \forall \mathrm{v} \in H_1 \quad donde \quad \tilde{\mathrm{f}} \in L_2$

Se fija $\lambda > 0$, suficientemente grande para que se cumpla la relación:

$(\ell\,[\mathrm{w}], \mathrm{w}) + \lambda(\mathrm{w}, \mathrm{w}) \geq cte\|\mathrm{w}\|^2_{H_1} \quad \forall \mathrm{w} \in H_1$

(desigualdad de Garding)

Recordar la naturaleza elíptica de (3.7). Entonces por el teorema de Lax-Milgram, existe una $u \in H_1$ única, tal que

$(\ell\,[\mathrm{u}], \mathrm{v}) + \lambda(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = (\tilde{\mathrm{f}}, \mathrm{v}) \quad \forall \mathrm{v} \in H_1$

Se pone $\mathrm{u} = \Upsilon\tilde{\mathrm{f}}$. Vemos que $\Upsilon : L_2 \rightarrow L_2$ es un operador compacto (la continuidad se hereda del teorema de Lax-Milgram y $H_1(\Sigma^3) \hookrightarrow L_2(\Sigma^3)$). Se enfatiza ahora que una solución de (3.7) es equivalente a tener $\mathrm{u} = \Upsilon(\mathrm{f}+\lambda\mathrm{u})$; que se convierte al poner $\vartheta = \mathrm{f}+\lambda\mathrm{u}$ en $(I-\lambda\Upsilon)\vartheta = \mathrm{f}$. Esta ecuación en virtud de la alternativa de Fredholm tiene solución si y solo si $\mathrm{f} \in \ker(I - \lambda\Upsilon^*)^\perp = \ker(I - \lambda\Upsilon)^\perp$ (También de aquí, por ser Υ compacto y $\lambda \neq 0$ se infiere de la **teoría de Riesz-Fredholm** que $\dim \ker(I - \lambda\Upsilon) < \infty$) ó lo que es lo mismo si y solo si $(\mathbf{f}, \chi) = 0$, $\forall\chi$ que satisface $\Upsilon(\chi) = \frac{1}{\lambda}\chi$. En particular, esto significa que $(\ell[\chi], \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_1$ y por lo tanto $\chi \in \ker L$ (Usar los teoremas de regularización para admitir primero que $\chi \in H_1$ y entonces se pone, $\mathbf{v} = \chi$ para poder deducir $0 = (\ell[\chi], \chi) = \frac{1}{2}(L[\chi], L[\chi])$). □

3.4 Gravitopotencial vectorial.

Se han introducido la fórmula de transformación conforme (3.3) y la descomposición de York, con la idea de atisbar cantidades que se tornen libremente especificables, *los grados de libertad del campo gravitatorio en presencia de fuentes*, de manera que sea posible construir, apartir de ellos, un conjunto de datos iniciales soluciones de las constriciones (Recordamos que diferenciamos estos datos en particular con una barra encima). Veamos como funciona, se escribe primero $\overline{\mathrm{K}}$ como suma; un sumando es una parte sin traza, digamos $\overline{\mathrm{A}}$, mientras que el otro contiene la traza $\overline{\tau} \equiv tr_{\overline{\gamma}}[\overline{\mathrm{K}}]$, esto es:

$$\overline{\mathrm{K}} = \overline{\mathrm{A}} + \frac{1}{n}\overline{\tau} \quad \overline{\gamma} \tag{3.8}$$

Se aplica (3.3) a la constricción del momento

$\overline{Div}(\overline{\mathbf{A}} - \frac{n-1}{n}\overline{\tau}\overline{\gamma}) = \overline{\mathbf{J}}$

considerando γ como cantidad dada, aquí es donde se tiene la sensación de que se debe especificar información invariante ante transformaciones conformes, luego se escalan las fuentes y se asume, por el momento, $\overline{\tau}$ como cantidad preescrita.

¿Sin embargo, como decidiremos que regla adoptar para escalar las fuentes?. Podríamos decidirlo de forma tal que, las ecuaciones resultantes sean más fáciles de manejar ó también bajo el criterio de que, a fuentes físicas les deben corresponder fuentes físicas. Afortunadamente ambos criterios se satisfacen cuando se toman las siguientes reglas de transformación conforme.

$$\overline{J}^a = \phi^{-2(p^*-1)}J^a; \quad \overline{\rho} = \phi^{-\frac{p^*(n+1)}{n}}\rho \tag{3.9}$$

El escalamiento de J, proviene del deseo de simplificar la constricción del momento, mientras el escalamiento de ρ es impuesto por la condición de energía dominante[7]

[7] Empleando exactamente la misma clase de argumentos con los que hemos tratado la gravitación, esta vez considerando cargas eléctricas en vez de masas, se encuentra que la teoría electromagnética de Maxwell posee constricciones:

$\overline{D}_a\overline{E}^a = \overline{q}$

$\overline{D}_a\overline{B}^a = 0$

Y en conexión con nuestro asunto se tiene aquí, $\overline{\rho} = \overline{E}^a\overline{E}_a + \overline{B}^a\overline{B}_a$ y $\overline{J}^a = (\overline{E} \times \overline{B})^a$. Para satisfacer las constricciones basta descomponer en la forma

$\overline{\gamma}_{ab}\overline{\mathbf{J}}^a\overline{\mathbf{J}}^b - \overline{\rho}^2 \leq 0.$

Siguiendo este plan arrivamos a la ecuación

$D_b(A^{ab}) = J^a + \frac{n-1}{n}\phi^{p^*} D^a\overline{\tau}$

que reescribiremos, ¡ haciendo uso de *la descomposición de York*!. Se pone

$\mathbf{A} = \sigma^* + L[\mathbf{w}]$

reduciendo el problema a tan solo encontrar un campo vectorial w que satisface la ecuación:

$$(\Delta_L \mathbf{w})^a = J^a + \frac{n-1}{n}\phi^{p^*} D^a\overline{\tau} \tag{3.10}$$

que tiene una única solución salvo vectores de Killing conformes χ siempre que se verifique la condición global de integrabilidad

$0 = (\chi_a, J^a + \frac{n-1}{n}\phi^p D^a\overline{\tau})_\gamma = (\overline{\chi}_a, \overline{J}^a + \frac{n-1}{n}\overline{D}^a\overline{\tau})_{\overline{\gamma}},$

condición que como vemos, solo depende de la clase conforme de equivalencia. Estas condiciones junto con la ecuación (3.10) se desacoplan de la constricción hamiltoniana cuando $\overline{\tau}$ es constante sobre Σ^3 y entonces cuando Σ^3 es extremo de un problema variacional,cuyo plantamiento es bastante natural. Tomese como funcional el área de aquellas hipersuperficies que tienen una curva espacial fija y cerrada como frontera común. Hipersuperficies que difieren tan solo por deformaciones temporales de manera que siempre se encuentren por encima de una hipersuperficie fija, que tiene la misma curva como frontera y de forma tal que se mantenga el volumen encerrado constante[8]. Resulta que la hipersuperficie que es extremo de este problema satisfaciendo la ecuación $\overline{\tau} = cte$ cuando se libera la restricción sobre el volumen, se obtiene el famoso problema de hipersuperficies extremales, del que los estudios dedicados se remontan a la era de Lagrange, que se admite inicio estas investigaciones, 1760, la ecuación ha satisfacer por Σ^3, en este caso, es $\overline{\tau} = 0$ y se dice que Σ^3 es una hipersuperficie máximal del espacio-tiempo $(V^4, \mathbf{g})$. En general es un problema complicado saber si existen hipersuperficies máximales en un espacio-tiempo dado, porque el carácter elíptico de la ecuación diferencial a resolver depende de la misma solución.

Para $\overline{\tau} = cte$ sobre Σ_t^3 (que por tanto se puede utilizar como parámetro temporal), J^aque satisface la condición de integrabilidad y σ^* cantidad libremente especificable (que se puede construir aplicando la descomposición de

---

$\overline{E}^a = (e^a - D^a\Psi)\phi^{-6}$
$\overline{B}^a = \beta^a\phi^{-6}$
$-\Delta\Psi = q$

En donde $q \equiv \phi^{-6}\overline{q}$, e^a y β^a son los datos libremente especificables, siendo los dos últimos transversos; se puede verificar ahora que la ley de transformación conforme para ρ y J coincide con nuestra elección (3.90.

[8] Ver D. Hilbert y S. Cohn-Vossen (1952). *Geometry and the Imagination*, Chelsea publishing company, New York. 226-227.

York sobre un tensor simétrico cualquiera) se construye la forma que tiene toda curvatura extrínseca, $\overline{K}$, que satisface la constricción del momento; sujeta claro está, por la restricción $tr_{\overline{\gamma}}[\overline{K}] = \overline{\tau}$.

$$\overline{K}_{ab} = \phi^{-2}(\sigma^{*}_{ab} + (L[w])_{ab}) + \frac{1}{3}\overline{\tau}\phi^{4}\gamma_{ab}$$

Luego los seis grados de libertad de $\overline{K}$ están repartidos; dos en σ^{*}, tres en w y uno en $\overline{\tau}$. Solo resta saber, en estas simplificaciones, para que métricas $\gamma \in M(\Sigma^{n})$ es posible hallar un escalar $\phi > 0$ de manera que con $\overline{\gamma}$ en verdad se satisfaga también la constricción hamiltoniana. Tengase en mente que hasta este momento, no se ha presentado la necesidad de restringir las métricas admisibles de Σ^{n}. Debo mencionar, que una especificación completa de tales $\gamma's$ sobre una hipersuperficie compacta Σ^{n}, con curvatura media $\overline{\tau} = cte$, solo ha sido posible recientemente con la solución de un problema, hasta hace poco abierto, de la geometría diferencial; la llamada **conjetura de Yamabe.** Más adelante se presentará una de las versiones de prueba de esta conjetura, y también la manera de aplicarla para descubrir aquellas métricas que conducen a la solución de las constricciones, las ecuaciones que gobiernan la inercia de los cuerpos[9], el significado preciso del principio de Mach según la teoría de la gravitación de Einstein.

Hemos dicho todo esto y aún no tocamos la constricción hamiltoniana, el germen de lo párrafos finales. Para corregirlo, sin más preámbulos, presentamos la ecuación de Lichnerowicz.

3.5 Ecuación de Lichnerowicz.

En tanto que antes, hemos dado una expresión explícita para que los $\overline{K}$ que satisfacen la constricción del momento. Intentamos ahora obtener la representación equivalente para γ. Ya no queda más qu e buscar el tensor métrico $\overline{\gamma}$ dentro de la clase conforme de equivalencia de $\gamma \in M(\Sigma^{3})$ y entonces, encontrar un factor *escalar* $\phi > 0$ de modo tal que se verifique también la ecuación entre *escalares*

$R(\overline{\gamma}) - \overline{K} \cdot \overline{K} + \overline{\tau}^{2} = 2\overline{\rho}$

En última instancia, debemos obtener un ϕ determinado completamente por el conjunto $(\Sigma^{3}, \gamma, \sigma^{*}, \overline{\tau}, \rho, \mathbf{J})$ previamente fijado. Si se aplican las fórmulas de transformación conforme (3.1), (3.3), junto con (3.8), fórmula de descomposición, y la ley de escalamiento conforme para fuentes (3.9) en la constricción hamiltoniana, se obtendrá una ecuación que indica si es o no

[9] Por supuesto, complementado con la cláusula de que una partícula libre se mueve cursando una geodésica del espacio-tiempo. En vista de la restricción $T^{\mu\nu}_{;\nu}$ derivada de las ecuaciones de campo surge la pregunta de si las ecuaciones de movimiento para las fuentes se sigue entonces únicamente de las ecuaciones del campo gravitatorio.

posible crear tal anhelado factor escalar, $0 < \phi \in C^2$. En caso de existir tal función se convertirá en solución de la ecuación misma:

$$8\Delta\phi = R\phi - A \cdot A\phi^{-7} + \frac{2}{3}\bar{\tau}^2\phi^5 - 2\rho\phi^{-3} \qquad (3.11)$$

Fue A. Lichnerowicz quien apartir de sus investigaciones sobre las constricciones de la Relatividad General en el vacío, formuladas sobre superficies maximales, introdujo esta hermosa ecuación (con solo sus dos primeros términos claro está), y en su honor solemos denominar **"ecuación de Lichnerowicz"**. Aquí estudiamos las constricciones en condiciones más generales, a saber, cuando se les fórmula sobre hipersuperficies de curvatura media constante, caso particular en donde ambas constricciones se desacoplan y en general hemos incluido fuentes.

Quisiéramos escudriñar dentro del significado físico del factor escalar. Así que escribiremos la energía A.D.M asociada a el tensor métrico $\bar{\gamma}$, completamente en términos de ϕ y γ,. Si consideramos ambas métricas como parte de un conjunto de datos asintóticamente planos y se asume entonces, $\phi = 1+O(r^{-1})$, un cálculo directo nos lleva a una relación cuyo lado izquierdo le atribuye significado físico al lado derecho y luego al factor escalar ϕ. relación

$$E[\bar{\gamma}] - E[\gamma] = -4\oint_{\infty} D^a\phi d^2S_a$$

Por otra parte, de la existencia y significado de esta ecuación puede sacarse una conclusión de la mayor importancia, conclusión a la que llegaron O'Murchadha y York durante 1974, Imaginemos que $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \tau = 0, \rho, \mathbf{J})$ son un conjunto de datos iniciales que satisfacen la condición de energía débil y son además, solución de las constricciones, por tanto con $R(\gamma) \geq 0$;. Se afirma entonces que, existe un conjunto de datos $(\Sigma^3, \bar{\gamma}, \bar{\sigma}^* = 0, \bar{\tau} = 0, \bar{\rho} = 0, \bar{\mathbf{J}} = 0)$ que son solución de las constricciones en el vacío, luego $R(\bar{\gamma})$ es nulo, que tiene una energía ADM menor o igual a la cantidad que existe en el primer conjunto de datos y donde $(\Sigma^3, \gamma) \sim (\Sigma^3, \bar{\gamma})$.

A groso modo: Se asume $R(\gamma)$ integrable, luego $R(\gamma) \geq 0$ significa que el problema $0 = R(\gamma)\phi - 8\Delta\phi$ (ecuación (3.1)) con $\phi \overset{r\to\infty}{\to} 1$ tiene solución en cierto espacio de Sobolev con peso, donde es aplicable el principio del máximo (sección **3.7**), de lo que se infiere $0 < \phi \leq 1$. Ahora bien $-4\oint_{\infty} D^a\phi\, d^2S_a = -4\int \Delta\phi d\Sigma^3 = -\frac{1}{2}\int R(\gamma)\phi d\Sigma^3 \leq 0$ y se sigue que
$E[\bar{\gamma}] \leq E[\gamma]$
Vemos con esto que, la inclusión de "energía cinética gravitacional" $A \cdot A$ y la densidad de materia ρ sobre una *hipersuperficie maximal* incrementa la energía total.

En repetidas ocasiones P.A.M. Dirac mostraba su plena confianza en la siguiente idea:

" *Physical laws should have mathematical beauty.*"

Las páginas subsecuentes abrirán nuestra perspectiva y proporcionarán una base firme de conocimientos que revelán parte de la belleza que hay detrás de la ecuación Lichnerowicz.

3.6 Sobre el grado topológico.

El como se usará la teoría del grado topológico es algo que solo quedará claro hasta el final de la sección (3.7.1), es necesario entonces una buena dosis de paciencia. Se sorprenderá de los progresos que se han hecho a partir de un comienzo que parece primero muy simple y superficial. En este sentido conviene recordar las palabras de Einstein, diciembre de 1916, para realizar una lectura cuidadosa.

" Esperamos que al lector no le suceda lo que a aquel viajero a quien las casas le impedian ver el poblado. "

Sea $\varphi \in C^1(\Re^n, \Re^n)$, Ω un conjunto abierto y acotado de $\Re^n$ y $b \in \Re^n/\varphi(\partial\Omega)$, supongamos que $\varphi'(\xi)$ es no singular para todo $\xi \in \varphi^{-1}(b) \cap \Omega$ entonces podemos construir un número entero $d(\varphi, \Omega, b)$, que se lee el grado de φ con respecto a Ω y b, que depende directamente del número de soluciones de la ecuación $\varphi(x) = b$ para $x \in \Omega$. Se toma:

$$d(\varphi, \Omega, b) = \Sigma_{\xi \in \varphi^{-1}(b) \cap \Omega} \quad Sgn \det \varphi'(\xi) \tag{3.12}$$

Notar que como φ es no singular solo hay soluciones aisladas y puesto que no hay soluciones en $\partial\Omega$ este número solo puede ser finito. Podemos ahora cerciorarnos de algunas propiedades del grado topológico:

(i) *$d(\varphi, \Omega, b) = 0$ si $\varphi^{-1}(b) \cap \Omega$ es vacío.*

(ii) ***$d(\varphi, \Omega, b) \not\equiv 0$ implica que hay una solución de $\varphi(x) = b$ en Ω.***

(iii) *Continuidad. Si φ es una función decente (que cumple con las* ***hipótesis mencionadas arriba), existe una vecindad V de φ en $C^1(\Omega, \Re^n)$ tal que para cualquier $\psi \in V$ es también una función decente y $d(\psi, \Omega, b) =$*** *$d(\varphi, \Omega, b)$.*

(i) y (ii) resultan directamente de la propia definición del grado topológico y (iii) se sigue del teorema de la función inversa. Como consecuencia directa de (iii) se deduce la propiedad de *invariancia homotópica* del grado :

(iv) *Si $H \in C^1(\Omega \times [0,1], \Re^n)$, $b \in \Re^n/H(\partial\Omega \times [0,1])$ y $H(\cdot, t)$*
es una función decente para $t \in [0,1]$,
entonces $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ no depende de t
$d(H(\cdot,0), \Omega, b) = d(H(\cdot,1), \Omega, b)$.

En efecto, por (iii), para cada $\tau \in [0,1]$, $d(H(\cdot,t), \Omega, b) = d(H(\cdot,\tau), \Omega, b)$ para t vecino a τ y entonces $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ es continuo con valor entero en un intervalo conexo $[0,1]$. Por lo tanto posee un valor constante.

Estos resultados de $\Re^n$, se han extendido a espacios de Banach de dimensión infinita, en donde Ω corresponde a un subconjunto abierto y acotado de un espacio de Banach y φ se restringe a una perturbación compacta de la Identidad, es decir tiene la forma $\varphi(u) = u - \Upsilon(u)$, donde Υ es un operador compacto[10], ver sección 2.1 . Este tipo de grado, que data desde 1934, es el grado á la Leray-Schauder y la propiedad análoga a (iv) es la que usaremos muy pronto.

3.7 Principio del máximo de Hopf.

Sea Ω un conjunto conexo, abierto y acotado de $\Re^n$, $L[u]$ un operador diferencial lineal uniformemente elíptico en Ω de orden dos con coeficientes acotados, $u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$ y $u_i = \partial u/\partial x_i$.

$$L[u] = \textstyle\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu; \quad c \leq 0$$

Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ y $L[u] \geq 0$.

Entonces si u alcanza su máximo $M \geq 0$ en Ω, u debe de ser una constante M sobre Ω. Por otra parte si en $x_o \in \partial\Omega$, u es continua y $u(x_o) = M \geq 0$ entonces $\frac{\partial u}{\partial n}|_{x_o} > 0$ si x_o es parte de la frontera de una bola incluída en Ω[11].

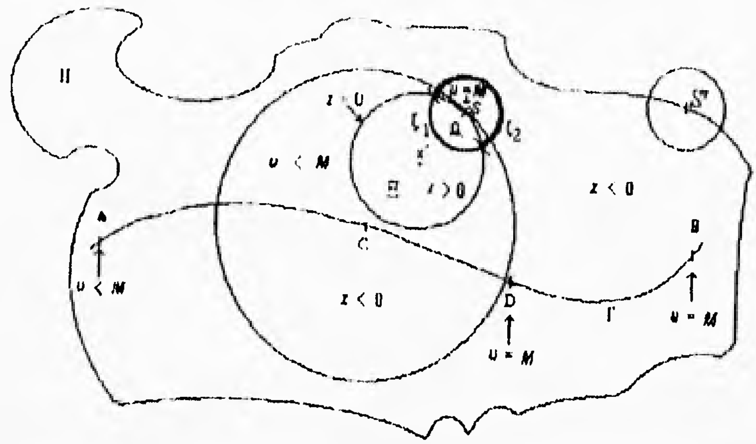
Prueba. Observemos que si $L[u] > 0$ en Ω, u no puede alcanzar un máximo relativo $M \geq 0$ en algún punto $S \in \Omega$. Ya que en dicho punto $0 \geq \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} |_S$ y $u_i |_S = 0$, por consiguiente $0 \geq L[u] |_S$, que contradice la hipótesis. Veremos en seguida como, en el caso general, $L[u] \geq 0$ en un conjunto Π conexo, abierto y acotado de $\Re^n$, se puede hacer uso de esta última observación.

El argumento es por reducción al absurdo. Como Π es conexo podemos conectar por medio de una curva $\Gamma \subset \Pi$ a dos puntos A y $B \in \Pi$ (vease la figura adjunta). *Supongamos que estos dos puntos son tales que $u |_A < M$ y $u |_B = M$* . Emplearemos también $D \in \Pi$ para denotar el primer punto de Γ donde u toma el valor M y sea $C \in \Gamma$ un punto suficientemente cercano a D tal que la siguiente construcción este en el interior del conjunto Π:

Tomando como centro C hacemos crecer una bola hasta que su frontera alcance un punto, digamos S, donde $u |_S = M$, luego construyamos en su interior otra bola Ξ tangente en el punto S cuyo centro llamaremos X'. Para finalizar con este edificio geométrico, indentificamos la región Ω, como el interior de una bola centrada en S de radio pequeño con frontera $\zeta_1 \cup \zeta_2$.

[10] Tal restricción se debe en parte, hablando robustamente, a que a un operador compacto se le puede aproximar por una función de rango finito, ver el paso dos en la prueba del teorema de Arzelá Ascoli.

[11] Ver por ejemplo, Protter M y Weinberg H 1976 *Maximum Principle in Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall).

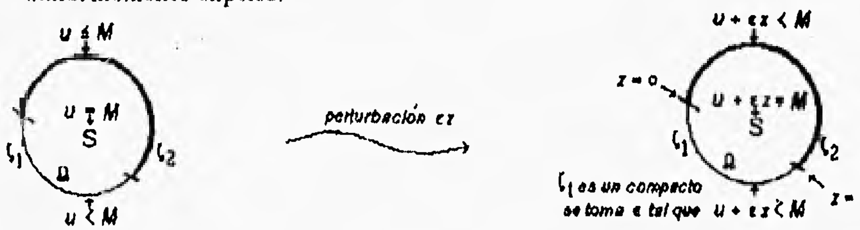


Ahora bien, en lugar de trabajar directamente con u manejaremos su perturbación $u + \varepsilon z$, en donde z cuenta con las propiedades:

$$\begin{cases} z > 0 & en \quad \Xi \\ z = 0 & en \quad \partial\Xi \\ z < 0 & en \quad \overline{\Xi}^c \end{cases} ; \tag{3.13}$$

$$L[z] > 0 \quad en \quad \overline{\Omega} \tag{3.14}$$

Uno puede checar que $z(X) = e^{-\alpha|\frac{X-X'}{2}|^2} - e^{-\alpha|\frac{S-X'}{2}|^2}$ satisface todas las propiedades requeridas, para α suficientemente grande, en especial se sigue $L[z] > 0$ sobre Ω porque $L[z]$ tiene la forma de un polinomio de grado 2 en α, donde el coeficiente que acompanã a la máxima potencia es $4e^{-\alpha|\frac{X-X'}{2}|^2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(X_i - X_i')(X_j - X_j')$ que tiene una cota por abajo sobre $\overline{\Omega}$ estrictamente positiva. Esto último a consecuencia de ser L un operador uniformemente elíptico.



Luego $u + \varepsilon z\,|_S = M$, lo que significa que en S hay un máximo relativo ya que en la frontera $\zeta_1 \cup \zeta_2$ se tendrá $u + \varepsilon z < M$ para ε suficientemente pequeño. Por otro lado $L[u + \varepsilon z] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$; lo que es absurdo, en virtud de la observación que hicimos desde un principio. Consecuentemente $u \equiv cte = M \geq 0$ sobre Π.

Por otra parte. Si el máximo $M \geq 0$ se alcanza en la frontera, digamos en el punto $s' \in \partial\Pi$, consideremos una construcción similar a la de la parte primera donde H tomé ahora el papel de la bola centrada en C. Ocurre entonces que la perturbación $v + \varepsilon z$ alcanza su máximo en s', por lo tanto $\frac{\partial v + \varepsilon z}{\partial n} |_{s'} \geq 0$. Luego, como $\frac{\partial z}{\partial n} |_{s'} < 0$ necesariamente $\frac{\partial v}{\partial n} |_{s'} > 0$.□

3.8 Avances sobre el problema de existencia.

Veremos más adelante, como nuestras investigaciones nos conduciran ineludiblemente a la siguiente cuestión, en cuya solución descansan nuestros principales resultados. ¿Bajo que condiciones la ecuación (3.15) admite una solución estrictamente positiva?.

$$-\Delta\varphi = f(x,\varphi) \tag{3.15}$$

Ya hemos visto que un caso en donde está cuestión es de interés, en en el estudio de la ecuación de Lichnerowicz. La teoría del grado topológico nos permitirá dar una respuesta parcial a este interrogante en un caso especial, a saber, cuando una variedad Riemanniana-C^∞ compacta y sin frontera (Σ^3, γ) forma el conjunto sobre el cual se define la ecuación (3.15), como primer fruto de esta elección estamos en libertad de usar el teoremas de encaje de Sobolev y el teorema de Kondrakov de la sección 2.1.1 . Así por ejemplo, se infiere el hecho de que $H_4(\Sigma^3) \subset C^2(\Sigma^3)$ de lo que se desprende nuestra inclinación en otorgar al tensor métrico γ una diferenciabilidad $H_4(\Sigma^3) \subset C^2(\Sigma^3)$ en lo s razonamientos posteriores. Existe también otra propiedad relevante que ronda sobre nuestras cabezas y que es además una consecuencia de la dimensión de la hipersuperficie Σ^3. Nos referimos a que H_2 forma un álgebra de Banach, observación de utilidad que aprovecharemos ampliamente.

Sin alterar el contenido de la ecuación (3.15) podemos reescribirla de manera de sacar provecho del enunciado del principio del máximo.

$$L[\phi] \equiv -\Delta\phi + c_o\phi = f(x,\phi) + c_o\phi \equiv F(x,\phi) \tag{3.16}$$

Examinemos entonces las propiedades de ambos lados de la igualdad en (3.16) acordando en adelante el uso de los símbolos c_i; $i = 0,1,2,3$ para denotar constantes positivas.

Notamos en primer lugar que, en virtud de que $\gamma \in H_4$, *por hipótesis*, la ecuación lineal $-\Delta u + c_o u = \bar{g}$, con $\bar{g} \in H_2$ tiene una única solución $u \in H_4$ que satisface

$$\|u\|_{H_4} \leq c_1 \| \bar{g} \|_{H_2} \tag{3.17}$$

$$\|u\|_{H_2} \leq c_2 \| \bar{g} \|_{L_2} \tag{3.18}$$

donde c_1 y c_2 solo dependen de Σ^3 y γ. Más aún, en el espacio funcional H_4 el operador L definido en el lado izquierdo de (3.16) posee la propiedad

$$Si \quad L[u_1] \leq L[u_2] \Rightarrow u_1 \leq u_2 \tag{3.19}$$

que se sigue de usar la contención $H_1 \subset C^2$ y el principio del máximo.

Toca el turno de analizar al lado derecho de la igualdad en (3.16). Permitamos ahora que $F(x,t) \in C^1(\Sigma^3 \times I)$ donde I representa cierto intervalo cerrado de $\Re^+$. La compacidad de Σ^3 permite entonces dar a c_o un valor tal que la función $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = c_o + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ sea positiva en $\Sigma^3 \times I$. Basta tomar $c_o = \max_{\Sigma^3 \times I} | \frac{\partial f}{\partial t} |$. Consecuentemente $F(x,t)$ es creciente en en la variable t para cada punto de Σ^3, propiedad que deseamos poner en práctica y que se encuentra en completa analogía con (3.19).

Con el fín de aprovechar todas las propiedades anteriores debemos cerciorarnos de que f cumple con las siguientes propiedades[12]:

$$\phi \in H_2 \Rightarrow f(x,\phi(x)) \in H_2 \text{ y } f(x,t) \in C^1(\Sigma^3 \times I).$$

Trataremos en adelante solo con tales funciones $f(x,t)$.

3.8.1 ARGUMENTO TOPOLÓGICO.

En la búsqueda de condiciones que aseguren la existencia de una solución estrictamente positiva de la ecuación (3.15), se emplea la teoría del grado topológico á la Leray-Schauder. En especial se hace uso de la siguiente propiedad análoga a la mostrada en el inciso (iv) de la sección (3,6) :

Sea Υ_t una homotopía de transformaciones compactas que mapean un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ en sí mismo. Sea Ω un subconjunto de X, abierto y acotado con cerradura $\bar{\Omega}$. Si $(I - \Upsilon_t)w \neq \bar{o}$ $\forall t \in [0,1]$ y $\forall w \in \partial\Omega$, entonces $d(I - \Upsilon_t, \Omega, \bar{0})$ existe y tiene el mismo valor para cada $t \in [0,1]$.

Sea el funcional $I(u) = (| \nabla u |^2 + cu^2, 1)$ y $dI(u,h)$ su derivada de Gateaux en la dirección h, evaluada en u. *La idea del autor* es usar[13]

$$\Omega \equiv \{\| u \|_{H_2} < C \mid dI(\phi_-, h) < dI(u,h) < dI(\phi_+, h); \ h \in \wp \}$$

---

[12] Por ejemplo. Sea $f(\cdot)$ una función analítica con radio de convergencia ρ, X un algebra de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $B = \{u \in X \mid \|v\|_X < \frac{\rho}{cte}\}$ donde la constante que define a B es la constante de$\|uv\|_X \leq cte \cdot \|u\|_X \|v\|_X$. Entonces el mapeo $F : B \to X$ dado por $u \mapsto f(u)$ es analítico. Recordar que en dimensión tres H_2 es una algebra generalizada de Banach.

[13] En el artículo *The problem of Constrains in General Relativity : Solution of the Lichnerowicz equation.* Y. Choquet-Bruhat utiliza el conjunto $\Omega = \{\| u \|_{H_2} < C$, $0 < l < u < m\}$ con l y m constantes para obtener las siguientes condiciones suficientes que muestran existencia de una solución positiva $f(l,x) > 0$ y $f(m,x) < 0$, $\forall x \in \Sigma^3$. Nosotros hemos arrivado generalizando Ω a condiciones aún más generales en donde el caso anterior se recupera como un caso particular. Notemos que nuestro conjunto Ω se diferencía del anterior en que en vez de considerar constantes l y m usamos en su lugar funciones ϕ_- y ϕ_+, además las desigualdades involucradas no son de caracter puntual sino global. También hemos introducido las funciones auxiliares h y e incluimos en la propia definición de Ω, el operador $L[\cdot]$, que nos permite hacer uso del principio del máximo de Hopf.

En donde ϕ_- y ϕ_+ son un par de funciones de $H_4 \subset C^2$ a las que llamaremos en lo sucesivo sub-solución y super solución respectivamente. La letra C que aparece en la definición de Ω es una constante por determinar y se pone

$$\wp \equiv \{ h \in H_1(\Sigma^3) \mid (L[\phi_-], h) \neq 0 \neq (L[\phi_+], h); \quad h \geq 0 \}.$$

Hacemos notar que ambos conjuntos $\wp$ y Ω estan bien definidos, pues los teoremas de encajamiento aseguran la finitud de cada integral que hace presencia. Además son conjuntos no vacíos, tal como se infiere al escribir Ω en la forma más útil,

$$\Omega = \{ \| u \|_{H_2} < C \mid (L[\phi_-], h) < (L[u], h) < (L[\phi_+], h); \quad h \in \wp \}$$

Supongamos ϕ_- estrictamente positiva. Entonces una función v en Ω, la que es continua ($H_2 \subset C^0$), satisface automáticamente

$$0 < \phi_- \leq u \leq \phi_+ \tag{3.20}$$

En efecto. Sabemos que $(\phi_-, L[h]) < (u, L[h]) < (\phi_+, L[h])$ $\forall h \in \wp$. Consideremos entonces los h_g 's dados por la única solución del problema $L[h_g] = g$, para $g's \in H_2 \subset C^0$ arbitrarios, que satisfacen $(\phi_-, g) \neq 0 \neq (\phi_+, g)$ y $g \geq L[0] = 0$. Por (3.17) y (3.19) los h_g 's$\in \wp$. Usando estos $g's$ arbitrarios encontramos $(\phi_-, g) < (u, g) < (\phi_+, g)$, $\forall g$ que satisface las propiedades mencionadas, lo que es suficiente para derivar (3.20).

En lo que resta podemos trabajar, sin dificultades, tomando como intervalo cerrado de $\Re^+$ al conjunto I$= [\min_{\Sigma^3} \phi_-, \max_{\Sigma^3} \phi_+]$.

Son soluciones de (3.15) los puntos fijos del mapeo $\Upsilon_1 : \Omega \to H_2$ que asigna a cada elemento v en Ω la única solución de $L[v] = F(x, v)$, en virtud de las hipótesis acordadas sobre f, junto con (3.18), se asegura que $F(x, v(x)) \in H_2$ y Υ_1 es continuo, más aún, por medio de (3.17) necesariamente $u \in H_4 \hookrightarrow H_2$ de lo que se infiere que Υ_1 es un operador compacto.

Por la teoría de grado Υ_1 tiene puntos fijos si $d(I - \Upsilon_1, \Omega, 0) \neq o$, así ocurre por ejemplo para el mapeo constante $\Upsilon_o : \Omega \to H_2$ que asigna a cada elemento v de Ω la única solución de la ecuaci'on $L[u] = L[\frac{\phi_- + \phi_+}{2}]$ y entonces un mapeo con un único punto fijo $\frac{\phi_- + \phi_+}{2} \in \Omega$ por lo cual $d(I - \Upsilon_o, \Omega, 0) = 1$

Ahora bien, si existiese un punto fijo de Υ_1 en $\partial\Omega$, digamos w, tomaríamos simplemente $\varphi = w$ y ya no tendríamos que probar la existencia de una solución para nuestro problema, supongamos entonces que este feliz acontecimiento no ocurre. El resultado análogo de (iv) se puede parafrasear como sigue[14]:

Dos operadores Υ_1 y Υ_o compactos poseen el mismo grado si $\Upsilon_t = t\Upsilon_1 + (1-t)\Upsilon_o$ no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$ para $0 \leq t \leq 1$ donde Ω es un conjunto abierto y acotado de un espacio de Banach.

---

[14] Para una introducción a la teoría de grado ver por ejemplo Lloyd N 1978 *Degree theory* (Cambridge : Cambridge University Press)

Si tan solo fuera posible establecer condiciones para las cuales cualquier solución tentativa en $\overline{\Omega}$ ocurriera en verdad solo en Ω, la invarianza homotópica del grado nos conduciría a afirmar que $d(I - \Upsilon_1, \Omega, 0) = d(I - \Upsilon_0, \Omega, 0) = 1$, y por tanto ciertamente existiría un punto fijo en Ω para Υ_1. Aquí damos forma a Υ_t apartir de las soluciones de la siguiente ecuación lineal

$$L[u] = tF(x, v) + (1 - t)L[\frac{\phi_- + \phi_+}{2}]$$

donde $v \mapsto u = \Upsilon_t[v]$. Ha llegado el momento de terminar con la espera y asignar un valor a nuestra constante C, lo que haremos de tal modo que para $t \in [0, 1]$ resulte siempre que $\| u \|_{H_2} < C$ cuando u es un posible punto fijo de Υ_t. Esto se puede hacer gracias a que u, definida entonces por tal mapeo, es C^2 y como Σ^3 es un compacto, F estará acotada entonces por una constante que depende de ϕ_- y ϕ_+, digamos ℓ en la norma L_2 y por lo cual basta con tomar, en virtud de (3.18):

$$C > c_2 \cdot máx\{\ell, L[\frac{\phi_- + \phi_+}{2}]\}$$

Particularmente en nuestro caso sabemos que no existen puntos fijos sobre $\partial\Omega$ para $t = 0$ y $t = 1$, es nuestro deseo que esto continue siendo válido también para $0 < t < 1$. Supongamos lo contrario, que existe un punto fijo w en $\partial\Omega$, esto significa que existe algún h permitido tal que $(h, L[\phi_-]) = (h, L[w])$ ó $(h, L[\phi_+]) = (h, L[w])$. Se sigue de inmediato, en caso de ocurrir cualquiera de estas dos posibilidades que:

$$\begin{aligned} 0 &= (h, t(F(x, w) - L[\phi_-]) + (1 - t)L[\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}]) \geq \\ &\geq (h, t(F(x, \phi_-) - L[\phi_-]) + (1 - t)L[\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (h, t(F(x, w) - L[\phi_+]) + (1 - t)L[\frac{\phi_- - \phi_+}{2}]) \leq \\ &\leq (h, t(F(x, \phi_+) - L[\phi_+]) + (1 - t)L[\frac{\phi_- - \phi_+}{2}]) \end{aligned}$$

respectivamente, en donde usamos que F es una función creciente. Notemos también que los últimos términos de las dos relaciones anteriores tienen un solo signo + y − respectivamente. Imponiendo ahora algún criterio para la falsedad de ambas relaciones se llega de esta manera a condiciones adicionales a las implícitas en (3.20) sobre ϕ_- y ϕ_+ para poder asegurar la existencia de una solución $\varphi > 0$ en H^4 de (3.15). Un conjunto tal lo forman:

$$L[\phi_-] \leq F(x,\phi_-) \tag{3.21}$$

$$L[\phi_+] \geq F(x,\phi_+) \tag{3.22}$$

Sobre todo x en Σ^3. □

3.8.2 ARGUMENTO CONSTRUCTIVO.

En la sección anterior encontramos un conjunto de condiciones que aseguran la existencia de una solución positiva de la ecuación (3.11), φ. Quisiéramos mostrar ahora como usando tales condiciones podemos no solo construir φ sino además dar una prueba alternativa de su existencia e incluso asumir $\phi_- \leq \phi_+$ en contraste con (3.20) .

Nuestro plan de ataque consiste en encontrar una sucesión de funciones ϕ_j cuya convergencia sea equivalente a la existencia de tal φ, definamos entonces $\{\phi_j\}$ inductivamente por

$$\phi_o = \phi_+ \tag{3.23}$$

$$L[\phi_{j+1}] \equiv F(x,\phi_j) \tag{3.24}$$

Se usará (3.21) y (3.22) para asegurar que la sucesión así formada sea monotonámente decreciente y al igual que en la sección anterior tomaremos I= $[\min_{\Sigma^3}\phi_-, \max_{\Sigma^3}\phi_+]$.

En efecto si hacemos uso de (3.21), la monoticidad de F y (3.22) tendremos

$$L[\phi_-] \leq F(x,\phi_-) \leq F(x,\phi_o) = L[\phi_1] \leq L[\phi_o]$$

entonces por (3.19)

$$\phi_- \leq \phi_1 \leq \phi_o = \phi_+$$

más generalmente si asumimos $\phi_- \leq \phi_j \leq \phi_{j-1} \leq \phi_o$ y procedemos de manera análoga encontramos

$$L[\phi_-] \leq F(x,\phi_-) \leq F(x,\phi_j) = L[\phi_{j+1}] \leq F(x,\phi_{j-1}) = L[\phi_j] \leq F(x,\phi_o) \leq L[\phi_o]$$

y nuevamente por (3.19)

$$\phi_- \leq \cdots \leq \phi_{j+1} \leq \phi_j \leq \cdots \leq \phi_1 \leq \phi_o = \phi_+$$

Debemos a la buena fortuna, en la elección de los espacios funcionales en los que f, ϕ_- y ϕ_+ son elementos, así como las relaciones (3.17) y (3.23), el que la sucesión de funciones $\{\varphi_j\}$ esté uniformemente acotada en $H_4 \hookrightarrow H_2$, de lo cual que se infiere la existencia de una subsuresión ϕ_{j_k} en H_2 que converge a una φ en H_2. Tomando ahora el límite en (3.16) cuando $n \to \infty$ y considerando que $\Upsilon_1 : H_2 \to H_2$ es un operador continuo deducimos que φ es una solución de (3.15) en H_2. Luego por (3.17) también estará en $H_4 \subset C^2$. En realidad la sucesión completa converge. En efecto, como F está en $C^1(\Sigma^3 \times I)$ y la estimación (3.18) asegura que, si $\{\phi_j\}$ es de Cauchy en la norma C^o entonces es también de Cauchy en la norma H_2. Ahora bien, la sucesión *completa* es de Cauchy en C^o, precisamente porque $\{\phi_{j_k}\}$ es de Cauchy en $H_2 \subset C^o$ y $\{\phi_j\}$ es una sucesión monótona; finalmente siendo H_2 un espacio de Banach la sucesión completa convergerá a una solución φ. □

3.9 Problema de unicidad[15].

Sea $F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$ una ecuación no lineal, de segundo orden, definida sobre una variedad Riemanniana compacta y sin frontera (Σ^n, γ). Si la ecuación es elíptica, es decir, si para todos los valores de los argumentos de F (Aquí $F_{u_{ik}} = \frac{\partial F}{\partial \nabla_{ik} u}$,$F_{u_i} = \frac{\partial F}{\partial \nabla_i u}$) la forma cuadrática:

$\sum_{i,k=1}^n F_{u_{ik}} \xi_i \xi_k$

es definida positiva y $F_u \leq 0$, no identicamente nulo, se sigue que solo se admite una única solución $u \in C^2$.

En efecto, supongamos que u y v son dos soluciones y por lo tanto

$0 = F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) - F(x, v, \nabla v, \nabla^2 v)$,

escribiendo esta expresión como integral por medio del teorema fundamental del cálculo y denotando el valor medio de ϕ por

$\tilde{\phi} = \int_0^1 \phi(x, tu - (1-t)v, t\nabla u - (1-t)\nabla v, t\nabla^2 u - (1-t)\nabla^2 v)dt$

se deduce que la cantidad $w = u - v$ verifica la ecuación

$$\sum_{i,k=1}^n \tilde{F}_{u_{ik}} w_{ik} + \sum_{i=1}^n \tilde{F}_{u_i} w_i + \tilde{F}_u w = 0$$

De acuerdo con el principio del máximo $w \leq 0$, pero el mismo resultado se aplica a $-w$; consecuentemente $w \equiv 0$. □

[15] Ver R. Courant and D. Hilbert 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, Vol. II, p. 322-323.

4

La conjetura de Yamabe.

El origen de la conjetura

Sea $(\Sigma^n, \overline{\gamma})$ una variedad Riemanniana, orientable, compacta y sin frontera, de dimensión $n \geq 3$, propiedades de la variedad que siempre sumiremos en esta sección. Es natural preguntarse si es posible asignarle a Σ^n una geometría o más precisamente una métrica cuyo escalar de curvatura tenga una propiedad bastante atractiva y sencilla, la de mantener un valor constante sobre todos los puntos de Σ^n. Ya conocemos una ley de transformación que liga a los escalares de curvatura de dos métricas que se obtienen una de otra por deformación conforme, nos referimos a la ecuación

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta\phi + \phi R = \phi^{p^*-1}\overline{R}$$

en donde $\overline{\gamma} = \phi^{\frac{2p^*}{n}}\gamma$ El matemático H. Yamabe hacia los años 60 preguntó a la comunidad científica: Dada (Σ^n, γ), ?' será posible deformar conformemente el tensor métrico γ de tal manera que el escalar de curvatura asociado a la nueva métrica, sea una constante?, en otras palabras, ¿existe solución al problema de eigenvalores *no lineal*, vease (4.1), para el operador laplaciano conforme?

$$L \equiv -\Delta + a, \text{ donde se denota } a \text{ con } \tfrac{1}{4}\tfrac{n-2}{n-1}R$$

$$\begin{cases} L\phi = \lambda\phi^{p^*-1} \\ \phi \in C^\infty(\Sigma^n); \quad \phi > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

el mismo Yamabe respondió afirmativamente a la cuestión y publicó una prueba de ello, en un célebre artículo[1] que ha motivado mucho el desarrollo del análisis no lineal. Sin embargo, fue en el transcurso del año 1968, cuando N. Trudinger[2] se dió cuenta que la prueba dada por Yamabe contenía una falasia. La conjetura entonces quedó como problema abierto y así permaneció durante más de dos decadas. Para su desgracia Yamabe murió poco tiempo después de la aparición de su renombrado artículo y en su memoria se le denomina al problema, que acabamos de fórmular, como "la conjetura de Yamabe".

Apuntamos que del mismo modo que, un problema de eigenvalores lineal, este problema no lineal (4.1) admite una formulación variacional. Si ϕ_{p^*} satisface (4.1), tentativamente λ sería el *ínfimo* del funcional

$$\Im[\phi] = \frac{(L\phi, \phi)}{\|\phi\|^2_{L_p}} \tag{4.2}$$

[1] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J. No 12 (1960) 21-37.*

[2] N. Trudinger (1968), Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3 265-274.*

sobre un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ todavía por determinar. *Supongamos* que λ es efectivamente el ínfimo[3] sobre cierto espacio de Banach X apropiado.

Resulta bonito descubrir que λ es un invariante conforme. En efecto, si se aplica la ley de transformación del determinante y de un tensor métrico y del propio escalar de curvatura, bajo deformaciones conformes (sección 3.1), λ se reescribe en la forma

$$\Im[\overline{\gamma}] = \frac{(\overline{R}, 1)_{\overline{\gamma}}}{(1,1)_{\overline{\gamma}}^{2/p^*}}$$

Ahora bien, variar ϕ significa barrer sobre las métricas conformemente relacionadas con γ, lo que verifica por tanto la certitud de nuestra aseveración[4], en virtud de nuestra recien expresión para $\Im[\cdot]$ De ahí que también, el signo de λ, que coincide con el signo del primer eigenvalor del operador Laplaciano conforme, que denotamos por λ_2 sea también un invariante conforme.(Notar que $\frac{(L\phi,\phi)}{\|\phi\|_{L_2}^2} \geq \lambda_2 = \frac{(L\phi_2,\phi_2)}{\|\phi_2\|_{L_2}^2} \geq \lambda;\ \forall\phi \in X$)

4.1 El Método Topológico en acción.

Los casos cuando es $\lambda < 0$ ó $\lambda = 0$. En el capítulo anterior estudiamos precisamente la ecuación $-\Delta\phi = f(x,\phi)$ y usando un argumento topológico arrivamos a las siguientes condiciones suficientes, garantizando la existencia de una solución positiva, al menos dos veces continuamente diferenciable.

$-\Delta\phi_+ \geq f(x,\phi)$, $-\Delta\phi_- \leq f(x,\phi)$, $0 < \phi_- \leq \phi_+$

en donde ϕ_- y ϕ_+ son funciones de H_4. En esta ocasión muy particular, $f(x,\phi) = \lambda\phi^{p^*-1} - a\phi$. Regresemos a la sección 3.8.1 y notemos que la naturaleza del conjunto Ω sugiere tomar, para su simplicidad, multiplos de la eigenfunción

$\phi_2 \in H_4, \phi_2 > 0,$

$L\phi_2 = \lambda_2\phi_2.$

en la construcción de las funciones ϕ_- y ϕ_+ de ser posible. Aquello motiva a considerar considerar, tomando una constante c, a funciones del tipo $c\phi_2$ para verificar la existencia de una subsolución ϕ_- y una supersolución ϕ_+. Consideremos pues, la siguiente identidad encaminada a cubrir el caso donde $\lambda = -1$

$$L[c\phi_2] + (c\phi_2)^{p^*-1} = c\phi_2[\lambda_2 + (c\phi_2)^{p^*-2}]$$

[3] Es posible que aunque un funcional tenga una máxima cota inferior sobre cierto espacio funcional no exista ninguna función de tal espacio para el cual el ínfimo del funcional se alcance. en la primera nota de la sección titulada la contribución de Yamabe se cita una referencia en donde se dan ejemplos.

[4] Si se libera la restricción y se varia sobre todas las métricas admisibles en Σ^n, los puntos críticos del funcional son métricas de Einstein $Ricc(\gamma) = cte\ \gamma$.

De ahí que observemos inmediatamente que, Idea original de J. Kazdan, que si λ_2 es negativo, entonces para c_- suficientemente pequeño y c_+ suficientemente grande $c_-\phi_2$ y $c_+\phi_2$ son respectivamente una subsolución y una supersolución.

Resumiendo, si el signo de λ_2 es negativo siempre podremos deformar la métrica de manera conforme a una que tiene un escalar de curvatura constante, pero solo de valor negativo (Recordar que el signo de λ_2 coincide con el signo del invariante conforme λ).

Por otro lado, si $\lambda_2 = 0$, es posible realizar esta deformación a un escalar de curvatura identicamente nulo. Solo resta para verificar la conjetura de Yamabe el caso $\lambda_2 > 0$, del cual no hay conclusión usando este método, al menos no hay nadie quien lo haya hecho aún.

En las próximas secciónes mostraremos no solo la existencia de la función de la que nos hemos auxiliado ϕ_2, sino que además atacaremos el caso pendiente $\lambda_2 > 0$.

4.2 Método de sucesiones minimizantes.

Detengámonos un instante, para hacer un breve análisis, que nos será de utilidad muy pronto. Si se quiere probar que un funcional $\Im_q$ *alcanza* un extremo ϕ_q en el espacio de trabajo $\wp$, se suele seguir cierto estratagema, conocido como el método de sucesiones minimizantes. Supongamos $\Im_q[\phi]$ acotado por abajo $\forall\phi \in \wp$, el espacio funcional de trabajo. Se sigue del axioma de supremo de los números reales que se puede extraer una **sucesión minimizante** en $\wp$. Es decir, $\exists\{\phi_j\}_{j\in N}$, $\phi_j \in \wp$ tal que $\Im_q[\phi_j] \overset{j\to\infty}{\to} \lambda_q \equiv \inf\{\Im_q[\phi] \mid \phi \in \wp\} < \infty$. La idea es, ver si apartir de la sucesión minimizante se puede extraer una subsucesión de la cual se construya una función $\phi_q \in \wp$ y esperar sigilosamente que $\lambda_q = \Im[\phi_q]$ (se dice entonces que el extremo se alcanza en $\wp$).

Ejemplo de Weierstrass

Hechemos un vistaso al histórico ejemplo de Weierstrass, 1870, que muestra como a veces la idea sugestiva anterior, fracasa. Es decir, se indica un ejemplo donde el valor extremal de $\Im_q[\cdot]$ sobre $\wp$ nunca se obtiene de evaluar $\Im_q[\cdot]$ con una función de $\wp$.
Sea $I(u) = \int_{-1}^{1}(xu')^2dx$ y $\wp = \{u \in C^1[0,1] \mid u(-1) = a,\, u(1) = b, a \neq b\}$
La sucesión de funciones $u_j = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\frac{\arctan jx}{\arctan j}$ satisface las condiciones de frontera, además $\frac{(a-b)^2}{2j\arctan j} \geq I(u_j) \to 0 = \inf_{u\in\wp} I(u)$. Sin embargo no existe ninguna función $v \in \wp$ que minimize el funcional. Si existe, significa que $xv' \equiv 0$ y entonces $v \equiv cte$ en oposición a las condiciones de frontera.

Es instructivo notar, que ya en 1965, S. Pohozaev mostró que ninguna solución del problema $-\Delta u = u^{p^*-1}$, $u > o$ en $\Omega \subset \Re^n$ y $u = o$ en $\partial\Omega$, se puede obtener por el proceso de minimízación, cuando Ω es una estrella[5]

Para que el método de sucesiones minimizantes se lleve a feliz término, tanto φ como $\Im_q$ deben tener propiedades especiales. Parafraseando la situación, diremos que junto a una ecuación diferencial parcial, uno se enfrenta también al problema de encontrar equellos espacios funcionales para el cual la ecuación en sí tiene solución. Tendremos la oportunidad en el futuro de afrontar este mismo problema, cuando consideremos las constricciones de la relatividad general; así que más vale preparse para tal ocasión. En este peligroso juego es donde se recurre a la teoría de los espacios de Banach, al teorema de encaje de Sobolev y al teorema de Kondrakov.

Necesitaremos, para poder continuar, el siguiente resultado de la mayor importancia.

Un espacio de Hilbert es débilmente compacto.

Todo espacio de Banach, reflexivo, es débilmente compacto. Aquí sin embargo, daremos una prueba, suficiente para nuestros propósitos, que solo conciernen a los espacios de Hilbert.

Toda sucesión acotada, de elementos de un espacio de Hilbert H, real y separable, digamos $\{\phi_j\}$ con $\|\phi_j\|_H \leq M$, tiene una subsucesión ϕ_{j_j} que converge débilmente a un elemento $\phi_\infty \in H$. Y no solo esa, sino que además $\|\phi_\infty\|_H \leq \liminf \|\phi_{j_j}\|_H$.

Prueba: Sea $\{\psi_k\}$ un conjunto contable y denso en H. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz la sucesión $\{(\phi_j, \psi_1)\}$ es acotada en $\Re$, esto es $|(\phi_j, \psi_1)| \leq M\|\psi_1\|_H$. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice entonces que $\exists\{\phi_{j_1}\}$ subsucesión de $\{\phi_j\}$ tal que $(\phi_{j_1}, \psi_1) \to a_1$, un real. También $\{(\phi_{j_1}, \psi_2)\}$ es acotada en $\Re$, por tanto $\exists\{\phi_{j_2}\}$ subsucesión de $\{\phi_{j_1}\}$, tal que $(\phi_{j_2}, \psi_2) \to a_2$. Procediendo de manera análoga, nos damos cuenta que, la subsucesión diagonal $\{\phi_{j_j}\}$ de la sucesión original $\{\phi_j\}$ tiene la propiedad de que $(\phi_{j_j}, \psi_k) \to a_k$, $\forall k$. (Este es el **argumento diagonal de Cantor**)

$$\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\
\uparrow & & & \\
(\phi_{j_1}, \psi_1) & \uparrow & & \\
(\phi_{j_2}, \psi_1) & (\phi_{j_2}, \psi_2) & & \\
(\phi_{j_1}, \psi_1) & (\phi_{j_1}, \psi_2) & \ddots & | \\
(\phi_{j_1}, \psi_1) & (\phi_{j_1}, \psi_2) & \ddots & (\phi_{j_k}, \psi_k)
\end{array}$$

Siendo $\{\psi_k\}$ denso en H , significa que $\forall\varphi \in H$, $I(\varphi) \equiv \lim_{j\to\infty}(\phi_{j_j}, \varphi)$ existe y es finito. De hecho es un funcional lineal y acotado. Entonces por el teorema de representación de Riesz $\exists\phi_\infty \in H$ tal que $I(\varphi) = (\phi_\infty, \varphi)$. Por tanto

[5] S. Pohozaev (1965), Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl* 6 pp. 1408-1411.

$(\phi_{j_j},\varphi) \to (\phi_\infty,\varphi)$ $\forall\varphi \in H$, convergencia débil que se denota $\phi_{j_j} \rightharpoonup \phi_\infty$. Para finalizar solo notemos que $\lim_{j\to\infty}(\phi_{j_j},\phi_\infty) = \liminf_{j\to\infty}(\phi_{j_j},\phi_\infty) \leq \liminf_{j\to\infty} \|\phi_{j_j}\|_H\|\phi_\infty\|_H$. □

4.3 La barrera de la compacidad.

Seguiremos por un rato el razonamiento de Yamabe, esto significa estudiar un problema auxiliar. Primero se muestra la existencia de un extremo ϕ_q, emulando el método de sucesiones minimizantes para el funcional $\Im_q[\phi]$, $q \in [2,p^*)$ (ver abajo) sobre el espacio de Hilbert $\wp = \{\phi \in H_1\backslash\{0\} \mid \phi \geq 0\}$, (Notar que este problema está bien definido, porque $H_1 \hookrightarrow L^{p^*} \subset L^q$). La aproximación a una resolución de la conjetura se deja a una investigación de lo que sucede en el límite $q \to p^*$.

$$\Im_q[\phi] \equiv \frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi,1)+(a\phi,\phi)}{\|\phi\|^2_{L^q}}; \qquad q \in [2,p^*)$$

Comencemos mostrando que $\Im_q[\phi]$ se está acotada por abajo, más precisamente

$\Im_q[\phi] \geq \inf_{\Sigma^n}\{a\ ,\ 0\}\cdot\sup_{\Sigma^n}\{1\ ,\ vol(\Sigma^n)^{\frac{2}{n}}\}$ para $q \in [2,p^*)$

en efecto,

$$\Im_q[\phi] \geq \frac{(a\phi,\phi)}{\|\phi\|^2_{L_q}} \geq \inf_{\Sigma^n}\{a\ ,\ 0\}\cdot(\frac{\|\phi\|_{L_2}}{\|\phi\|_{L_q}})^2 \geq \inf_{\Sigma^n}\{a,0\}\cdot vol(\Sigma^n)^{1-\frac{2}{q}}$$

esta última relación se infiere de la desigualdad de Hölder. Como $q < p^*$, se sigue a su vez la cota por abajo anunciada, que es independiente de q.

Siendo $\Im_q$ un funcional homogeneo de grado cero, se puede tomar una sucesión minimizante

$\{\phi_j\}_{j\in N}$, $\phi_j \in \wp$ tal que $\|\phi_j\|_{L_q} = 1$ y $\Im_q[\phi_j] \leq \lambda_q + 1$

Estas propiedades son suficiente para asegurar que la sucesión $\{\phi_j\}_{j\in N}$ está uniformemente acotada en el espacio de Hilbert H_1 y seguir un argumento basdo en sus propiedades de compacidad, ya senñaladas. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\|\phi_j\|^2_{H_1} = \|\nabla\phi_j\|^2_{L_2} + \|\phi_j\|^2_{L_2} = \Im_q[\phi_j] - (a\phi_j,\phi_j) + \|\phi_j\|^2_{L_2} \leq \\
&\leq \Im_q[1] + 1 + (\sup_{\Sigma^n}\mid a\mid +1)\|\phi_j\|^2_{L_2} \leq \\
&\leq \sup_{\Sigma^n}\mid a\mid\cdot\left(\frac{\|1\|_{L_2}}{\|1\|_{L_q}}\right)^2 + 1 + (\sup_{\Sigma^n}\mid a\mid +1)\left(\frac{\|\phi_j\|_{L_2}}{\|\phi_j\|_{L_q}}\right)^2 \leq \\
&\leq 1 + (2\sup_{\Sigma^n}\mid a\mid +1)\cdot\sup_{\Sigma^n}\{1\ ,\ vol(\Sigma^n)^{\frac{2}{n}}\}
\end{aligned}$$

Al final se ha usado, nuevamente, la desigualdad de Hölder. Por tanto, podemos extraer un subsucesión ϕ_{j_i}, (j fijo), de la sucesión original ϕ_j que satisface:

(i) $\phi_{j_i} \overset{H_1}{\rightharpoonup} \phi_q$ con $\|\phi_q\|^2_{H_1} \leq \liminf \|\phi_{j_i}\|^2_{H_1}$ cuando $j_i \to \infty$.
(Un espacio de Hilbert es débilmente compacto)

(ii) $\phi_{j_i} \xrightarrow{L_q} \phi_q$ por el teorema de Kondrakov

(iii) $\phi_{j_i} \xrightarrow{L_2} \phi_q$ por Hölder $L_q \subset L_2$

(iv) $\phi_{j_i} \to \phi_q$ en c.t.p, por la convergencia en L_q

(Vease el estudio de los espacios L^p de la sección 2.1)

Si es necesario se toma una subsucesión, de una subsucesión, de una ...etc, tres pasos. Luego por (iv) $\phi_q \geq 0$, por (ii) $\|\phi_q\|^2_{L_q} = 1$, recuerdese que $\phi_j \in \wp$, de lo que se sigue que ϕ_q no es identicamente cero y puesto que (i) asegura ϕ_q en H_1 se verifica la membresía de ϕ_q en $\wp$.

Finalmente por (i) y (iii) $\lambda_q \leq \Im_q[\phi_q] \leq \lim \Im_q[\phi_{j_i}] = \lambda_q$ cuando $j_i \to \infty$ y se concluye,

ϕ_q es un extremo de $\Im_q$ en $\wp$ y entonces $\Im_q[\phi_q] = \lambda_q, \forall \phi_q \in \wp$.□

Se debe precisamente a la falta de compacidad en la contención $H_1 \subset L^q$, cuando q_p^* es $\frac{2n}{n-2}$, el exponente crítico de Sobolev, que no se pueda asumir (ii) y por tanto aplicar directamente, a la conjetura de Yamabe, el método minimizante. Actualmente no existe un método, más o menos general, para salvaguardar este tipo de dificultades, nos referimos a la falta de compacidad. Nos encontramos ante los límites de la matemática actual, en el comienzo de una linea de investigación[6], razón por la cual la resolución de la conjetura de Yamabe adquiere una extraordinaría valía en ambos campos, el de la física y el de la matemática.

Ahora bien, dado que $C_o^\infty(\Sigma^n)$ es denso en H_1, ver la sección de espacios de Sobolev del segundo capítulo, y $\|\nabla \mid \phi \mid \|^2_{L_2} \leq \|\nabla\phi\|^2_{L_2}$, resulta que ϕ_q es también un extremo del funcional $I[\cdot]_q \equiv \Im_q \cdot \|\cdot\|^2_{L^q}$ condicionado por $G(\cdot) \equiv 1 - \|\cdot\|^2_{L_q} = 0$ sobre un espacio más grande, a saber $\wp' = \{\phi \in H_1 \backslash \{0\}\}$.

Se sigue de usar la técnica de *multiplicadores de Lagrange* (aquí se denotan con μ y ν) que ϕ_q, siendo un extremo, es solución del problema libre $\mu D_h I_q + \nu_h D_h G = 0; \mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Es decir,

$$\mu(\nabla\phi_q \cdot \nabla h, 1) + \mu(a\phi_q, h) - \nu q(\phi_q^q, 1)^{\frac{2}{q}-1}(\phi_q^{q-1}, h) = 0; \quad \forall h \in H_1$$

Tomando $h = \phi_q$ vemos que, necesariamente μ debe ser distinto de cero, podemos entonces dividir entonces por μ y evaluar ν, para escribir:

$$(\nabla\phi_q \cdot \nabla h, 1) + (a\phi_q, h) = \lambda_q(\phi_q^{q-1}, h); \quad \forall h \in H_1$$

Luego para cada $q \in [2, p^*)$ tendremos una ϕ_q *solución débil* de la ecuación $L\phi = \lambda_q \phi^{q-1}$. Nuestra siguiente meta es regularizar la diferenciabilidad de ϕ_q, ahí tendremos que usar estimaciones sutiles, debido a la presencia de la potencia en ϕ^{q-1}, solo entonces estaremos seguros que ϕ_q es también una

[6] Ver Haïm Brezis (1987) *Nonlinear Elliptic Equations Involving the Critical Sobolev Exponent-Survey and Perspectives*, Directions in Partial Differential Equations, Academic Press.17-35. En donde se pueden encontrar referencias.

solución clásica estrictamente positiva, hasta ahora, ni siquiera sabemos si es continua, ver la sección 2.1.1 . En realidad con el método que usaremos enseguida, solo será posible mostrar que $\phi_q \in C^2$, para $q \in [2, q_o]$, en donde q_o esta por debajo del valor crítico p^*.

Función de Green.

Una función $G(x,y)$ que satisface la relación $(G(x,y), -\Delta_x h(x)) = h(y) - \frac{(h,1)}{vol(\Sigma^n)}$; para todo h que le de sentido a la expresión sobre la variedad Riemanniana, orientable y compacta, (Σ^n, γ), se llama función de Green del operador $-\Delta$ (Observemos que cuando $h = cte$ esta última ecuación se convierte en una identidad). Para $n \geq 3$, una función así, que es incluso $C^\infty(\Sigma^n \times \Sigma^n \backslash x = y)$, existe[7]. Además tiene tiene la propiedad de comportarse en la vecindad de la diagonal como $\frac{d(x,y)^{2-n}}{(n-2)\omega_{n-1}}$, lo mismo sucede en $\Re^n$, y globalmente de manera que $\mid G(x,y) \mid < \frac{cte}{d(x,y)^{n-2}}$. A la vista de la libertad de incluir una constante a la función de Green, se puede elegir esta de tal manera que, $G(x,y)$ sea positiva. Esto es claro de observar que cerca de la diagonal. $G(x,y)$ es positiva, digamos sobre cierto conjunto abierto Ω y en su complemento compacto $(\Sigma^n \times \Sigma^n)\backslash\Omega$ se tiene que $G(x,y)$ alcanzará un valor mínimo.

[7]Aubin T. Non-linear functional analysis on Riemannian manifolds, Spinger-Verlag.106-111.

Lema

Sea $\sigma \in]0,1[$ y $q', \frac{n\sigma}{\varsigma}, r$ números reales finitos tales que se cumplen ambas relaciones $1 < \text{mín}\,(q', \frac{n\sigma}{\varsigma}, r)$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{\frac{n\sigma}{\varsigma}} - 1$.

Se define el operador integral $S[\phi] \equiv (\frac{\phi}{d(x,y)^{\varsigma}}, 1)$. Se afirma que es un operador lineal acotado de $L^{q'}$ en L^r. Más precisamente, si $\phi \in L^{q'}(\Sigma^n)$ entonces[8]:

$$\begin{aligned} h(y) \equiv S[\phi] &= (\frac{\phi(x)}{d(x,y)^{\varsigma}}, 1) \in L_r(\Sigma^n) \\ \|h\|_{L_r} &\leq C(\varsigma, q', n)\|\phi\|_{L_{q'}} \end{aligned}$$

Regularización, "bootstrap method".

Se pone $\sigma \equiv 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Sea $2 < q \leq q_o < r_o \equiv p^* = \frac{2n}{n-2}$ y por lo tanto $r_o > \frac{r_o}{q-1} \geq \frac{r_o}{q_o-1} > \frac{2n}{n+2} > 1$, recordar que $n \geq 3$. Luego $H_1 \subset L_{r_o} \subset L_{\frac{r_o}{q-1}} \subset L_{\frac{r_o}{q_o-1}}$. Estimaremos ϕ_q, solución débil del problema $L[\phi_q] = \lambda_q \phi_q^{q-1}$, a través de la función de Green del operador $-\Delta$.

$$\phi_q(y) \leq (\frac{cte}{d(x,y)^{n-2}}, |\, \lambda_q \,|\, \phi_q^{q-1} + Sup_{\Sigma^n} \,|\, a \,|\, \phi_q) + \frac{\|\phi\|_{L_1}}{vol(\Sigma^n)} \tag{4.3}$$

En lo que sigue se usará la letra A para denotar constantes positivas. Por ejemplo, sabemos que $\phi_q \in H_1$ y entonces es admisible escribir
$\|\phi_q^{q-1}\|_{L_{\frac{r_o}{q_o-1}}} \leq A_o(q_o)\|\phi_q^{q-1}\|_{L_{\frac{r_o}{q-1}}} < \infty$
Apliquemos el *lema* a la fórmula (4.3), se fija $q_o \in]r_o - 1, r_o[$ y se escribe

$$\frac{1}{r_1} = \frac{q_o - 1}{r_o} - \frac{2\delta}{n}$$

también se ha puesto $\frac{1}{\sigma^{n/(n-2)}} - 1 = -\frac{2}{n}\delta$ para una mayor sencillez al escribir los cálculos, de manera que $\delta < 1$ para ε pequeño. Adviértase que para

---

[8] La fuente original es Sobolev, S.L. (1938) Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. *Math. Sbornik. No 45 , 471-496.* Históricamente los encajamientos de Sobolev fueron derivados de las propiedades de este operador cuando $\sigma \equiv 1$. (El lema es válido también este caso)

Prueba del lema. Notar que: $\frac{\phi(X)}{d(X,Y)^{\varsigma}} =$
$= \{\frac{\phi(X)^{q'}}{d(X,Y)^{\varsigma\frac{n\sigma}{\varsigma}}}\}^{\frac{1}{r}} \cdot \{\phi(X)^{q'}\}^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{r}} \cdot (\frac{1}{d(X,Y)^{\varsigma\frac{n\sigma}{\varsigma}}})^{\frac{1}{\frac{n\sigma}{\varsigma}}-\frac{1}{r}}$

Ahora bien, como $1 = \frac{1}{r} + (\frac{1}{q'} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{\frac{n\sigma}{\varsigma}} - \frac{1}{r})$ y cada término de la suma es positivo, porque asumimos $1 < \text{mín}\,(q', \frac{n\sigma}{\varsigma}, r)$, se puede emplear la desigualdad de Hölder al calcular $\|h\|_{L^r}$, teniendo en cuenta que Σ^n es un compacto se sigue el resultado enunciado $\square$

cumplir la desigualdad $\frac{1}{r_1} > 0$, el intervalo donde tomamos a q_o no es el intervalo óptimo.

Al estimar entonces $\|\phi_q\|_{L_{r_1}}$, por el *lema*, se encuentra que existe una constante A_1 para la cual

$\|\phi_q\|_{L_{r_1}} \leq A_1(n, \lambda_{q_o}, R, q_o)\|\phi_q\|_{L_{r_o}}^{q-1}$. $(*)$

Aquí lo importante es que A_1 depende de $q_o < p^*$ y no de q. Procediendo inductivamente con relaciones de la forma

$$\frac{1}{r_k} = \frac{q_o - 1}{r_{k-1}} - \frac{2\delta}{n}$$

Se deduce que, existe una constante A_k para la cual se tiene[9]

$$\|\phi\|_{L_{r_k}} \leq A_k(n, \lambda_{q_o}, R, q_o)\|\phi_q\|_{L_{r_o}}^{(q-1)^k} < \infty. \tag{4.4}$$

Sin embargo, este proceso no puede continuar indefinidamente al tomar ε es suficientemente pequeño, en efecto

$\frac{1}{r_k} = \frac{q_o-1}{r_{k-1}} - \frac{2\delta}{n} = \frac{(q_o-1)^k}{r_o} - \frac{2\delta}{n}(1 + (q_o - 1) + \cdots + (q_o - 1)^{k-1}) =$
$= \frac{(q_o-1)^k}{r_o} - \frac{2\delta}{n}\frac{(q_o-1)^k-1}{(q_o-1)-1} = \frac{(q_o-1)^k}{(q_o-2)}[\frac{q_o}{r_o} - 1 + \frac{2}{n}(1-\delta)] + \frac{2\delta}{n(q_o-2)}$

si se toma ε suficientemente pequeño, el término entre corchetes es negativo, porque $\delta \approx 1 - \frac{\varepsilon(n-2)}{2}$

Luego, para k suficientemente grande, el último miembro de la cadena de igualdades, es negativo. Esto significa que $\exists\ k'$ tal que $r_{k'+1} < 0$ y $r_{k'} > 0$. Se infiere de esta manera con dicha k' se tiene, $\frac{r_{k'}}{q_o-1} > \frac{n}{2\delta} \geq \frac{n}{2} > \frac{r'}{q_o-1} \geq 1$, para cierto r' aún por especificar, preo que satisface $L^{k'} \subset L^{r'}$. Usando $(*)$, la contención $L^{k'} \subset L^{r'}$ y el *lema*, como antes, en orden inverso se deduce la desigualdad

$$\|\phi_q\|_{L^r} \leq A(n, \lambda_{q_o}, R, q_o)\|\phi_q\|_{L^{r_o}}^{(q-1)^{k'}+1} \text{ con } \frac{1}{r} = \frac{q_o-1}{r'} - \frac{2\delta}{n} > 0$$

Se concluye de aproximar r' a $\frac{\frac{n}{2}(q_o-1)}{\delta}$ que, $\phi_q \in L^p$, $\forall p \in [1, \infty[$, y por ende $\phi_q \in L^\infty$ (Usar un argumento por contradicción). Por lo tanto ϕ_q está acotada. Mas aún al derivar (4.3) y por lo anterior necesariamente $\phi_q \in C^1$. Además, ya que ϕ_q es ***solución débil*** de la ecuación elíptica $L\phi_q = \lambda_q\phi - q^{q-1} \in C^1 \subset C^{o,\alpha}$ se sigue de las estimaciones de Sahuder el que $\phi_q \in C^{2,\alpha} \subset C^2$. Este argumento se puede seguir inductivamente, para mostrar que, $\phi_q \in C^\infty$ con $q \in [2, q_o)$ solo si ϕ_q es estrictamente positiva y la métrica γ es infinitamente diferenciable, $\phi_q \in C^2$ estábien si $\gamma \in H_4$. Notar

[9] El origen del error en la prueba de Yamabe, que apuntó N. Trüdinger, está en asumir su desigualdad número (6.2), la cual ha de remplazarse por la que se presenta en acto seguido (Se conoce un contraejemplo sobre la n-esfera, precisamente con las funciones que se usan en la última sección de este capítulo).

que en caso particular de $q = 2$, este argumento también funciona, solo que esta vez, la cadena de igualdades que comienza con $\frac{1}{r_k}$ se debe cortar antes, en el segundo paso, esta es la única modificación.

Positividad.

La función $\phi_q \geq 0$ esta acotada y es C^2. Se puede usar el principio del máximo de Hopf. Ver en primer lugar que,

$\Delta\phi_q - \sup_{\Sigma^n} \mid (a - \lambda_q \phi_q^{q-2}) \mid \phi_q \leq 0,$

y aplicar el principio del máximo a la función $-\phi_q$. Se infiere entonces que ϕ_q es estrictamente positivo ó es identicamente nulo, como $\|\phi_q\|_{L_q} = 1$ necesariamente $\phi_q > 0$.

4.4 Contribuciónes posteriores al problema

Lazo entre λ y la mejor constante de Sobolev.

En toda variedad Riemanniana, compacta y sin frontera, el encajamiento $H_1^2(\Sigma^n) \subset L^{p^*}(\Sigma^n)$ es continuo. Un estudio más cuidadoso revela que, existe una constante, la mejor de todas es $K(n,2) = 2[n(n-2)]^{-\frac{1}{2}}\omega_n^{-\frac{1}{n}}$ (que no depende de la métrica y que es la misma para todas las variedades Riemannianas compactas), que cumple[10]:

$$\|\phi\|_{L^{p^*}} \leq (K(n,2)+\varepsilon)\|\nabla\phi\|_{L_2} + A(\varepsilon)\|\phi\|_{L_2}$$

con $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera.

Además, hay una sucesión de funciones $\{\phi_j\}_{j \in N}$, $\phi_j \in C^\infty$, tal que $\|\phi_j\|_{L^{p^*}} = 1$, $\|\phi_j\|_{L_2} \overset{j\to\infty}{\to} 0$, y $\|\nabla\phi_j\| \overset{j\to\infty}{\to} K^{-1}(n,2)$.

Si usamos aquella sucesión, en $\Im[\cdot]$, arrivaremos a un resultado válido *para toda variedad Riemanniana compacta*, a saber, siempre se debe tener $\lambda \leq K(n,2)^{-2}$.

Más adelante, sección 4.5, llegaremos a esta misma conclusión, $\lambda \leq K(n,2)^{-2}$ $\forall\Sigma^3$ compacta, esta vez através del uso *explícito* de una sucesión de funciones. Mientras esto sucede, pensamos que sería instructivo saber lo que en los círculos matemáticos ya se manejaba, antes del arrivo de la prueba de Schoen, que completara la verificación del enunciado de la conjetura de Yamabe conectándola con el *teorema de la positividad de la energía.*

[10] Ver T. Aubin (1982), *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations*, Springer-Verlag , N. Y.

Caso $0 < \lambda < K(n,2)^{-2}$.

Sea $\{\phi_{q_j}\}_{j\in N}$ una sucesión cuyos únicos elementos son los ϕ_q, construidos en la primera parte de este capítulo, con

$q \in]2, p^*[$. $\quad q_j < q_{j+1} \forall j$ y $q_j \overset{j\to\infty}{\to} p^*$.

En lo que sigue asumiremos siempre $Vol(\Sigma^n) = 1$, notar que eso se puede lograr sin pérdida de generalidad, para una clase conforme de equivalencia, multiplicando la métrica original por una constante. Así, por la desigualdad de Hölder, para ϕ fijo, con $\phi \in C^\infty$ denso en H_1, $\|\phi\|_{L_q}$ es una función creciente en q. Luego, $\Im_q[\phi]$ es una función *continua* monótona decreciente en q (recordar que estamos en el caso $\lambda > 0$) y por tanto $\lambda_{q_{j+1}} \leq \lambda_{q_j}$. Como la sucesión de números reales λ_{q_j} es monótonamente decreciente y acotada por abajo, tiene límite. Para calcular este límite notemos que, para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\ \phi_\varepsilon \in C^\infty$ tal que $\lambda \leq \limsup_{q\to p} \lambda_q \leq \limsup_{q\to p} \Im_q[\phi_\varepsilon] = \Im_p[\phi_\varepsilon] \leq \lambda + \varepsilon$, consecuentemente se tiene el resultado $\lambda_{q_j} \overset{j\to\infty}{\to} \lambda$, que emplearemos más tarde.

T. Aubin[11], usando un argumento de regularidad desarrollado por N. Trudinger, para las soluciones débiles de (4.1) en H_1, fue capaz de probar la conjetura de Yamabe en el caso $\lambda < K(n,2)^{-2}$. Aquí damos una prueba bastante instructiva del mismo hecho, la cual no utiliza el resultado de regularidad de N. Trudinger y creemos que será bastante socorrida en el futuro. Esta se basa en obsevar que las funciones ϕ_q están uniformemente acotadas para $q \in]2, p^*[$ siempre que $\lambda < K(n,2)^{-2}$.

Cota uniforme[12]**.** El razonamiento es por reducción al absurdo. Supongamos que los ϕ_q no están uniformemente acotados para $q \in]2, p^*[$. Entonces se puede extraer una sucesión de funciones $\{\phi_{q_j}\}_{j\in N}$ y un conjunto de puntos $\{x_j\}_{j\in N}$ en Σ^n tales que

$\forall\ \varepsilon > 0$ se tiene $p^* \leq q_j + \varepsilon$ y $m_j \equiv \max_{\Sigma^n} \phi_{q_j} = \phi_{q_j}(x_j) \geq \frac{1}{\varepsilon}, \forall\ j \geq J(\varepsilon)$

Notese que por ser Σ^n un compacto, existe una subsucesión convergente de la sucesión original de puntos $x_{j\,j\in N}$. Reetiquetamosla inmediatemente y pongamos $x_j \overset{j\to\infty}{\to} x_o \in \Sigma^n$. Se usa ahora un sistema normal de coordenadas centrado en el punto de Σ^n, x_o, donde

$$\gamma_{ab}(x) = \delta_{ab} + 0(\|x\|^2); \quad \det\gamma = 1 + 0(\|x\|^2)$$

y tal que en *coordenadas* $(x_a)_j \overset{j\to\infty}{\to} 0$. Por construcción, ϕ_{q_j} satisface la

[11]T. Aubin (1976), *The scalar curvature*, Differential Geometry and Relativity, editado por Cahen y Flato, Reider.

[12]R. Schoen y S-T. Yau (1994), *Lectures on Differential Geometry. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*, editado por P. International Press.

ecuación (supongamos que lo hace localmente para $\|x\| < 1$)

$$\frac{-1}{(\det\gamma)^{\frac{1}{2}}}\partial_a((\det\gamma)^{\frac{1}{2}}\gamma^{ab}\partial_b\phi_{q_j}) + a\phi_{q_j} = \lambda_{q_j}\phi_{q_j}^{q_j-1} \tag{4.5}$$

Para llegar a una contradicción; construiremos una función auxiliar de $\Re^n$ basada en esta información. Sea

$\delta_j \equiv m_j^{-\frac{q_j-2}{2}} \to 0$ y $u_j(x) \equiv m_j^{-1}\phi_{q_j}(\delta_j x + x_j)$

que está definida sobre la bola, $\overline{B_{\rho_j}} \subset \Re^n$, centrada en cero y de radio $\rho_j = \frac{(1-\|x_j\|)}{\delta_j}$. Después de un cambio de variables $x = m_j^{-\frac{q_j-2}{2}}x' + x_j$ en (4.5) se puede apreciar que $u_j(x)$ satisface

$$\frac{-1}{(\det\gamma')^{\frac{1}{2}}}\partial'_a((\det\gamma')^{\frac{1}{2}}\gamma'^{ab}\partial'_b u_j(x')) + \frac{a'}{m_j^{q_j-1}}u_{q_j}(x') = \lambda_{q_j}[u_{q_j}(x')]^{q_j-1} \tag{4.6}$$

Notar que para un *radio fijo* ρ,

$\gamma^{ab\prime}(x') \equiv \gamma^{ab}(m_j^{-\frac{q_j-2}{2}}x' + x_j) \overset{C^1(\overline{B_\rho})}{\to} \delta_{ab}$ y

$a'(x') \equiv a(m_j^{-\frac{q_j-2}{2}}x' + x_j) \overset{C^1(\overline{B_\rho})}{\to} a(x_j)$ cuando $j \to \infty$.

Ahora bien, precisamente como $u_j(x) \leq u_j(0) \leq 1$, se sabe de aplicar la teoría de regularidad de las ecuaciones elípticas lineales a (4.6) que, existe sobre $\overline{B_\rho}$ una cota $A(\rho)$, tal que

$\|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_\rho})} < A(\rho)$; $\forall\, j \geq J(\rho)$.

Siendo válido este resultado $\forall\rho$, se toma primero una sucesión creciente de radios ρ_i y por un argumento diagonal de Cantor se extrae la subsucesión $\{u_{j_i}\}$ de $\{u_j\}$ convergente en $C^2(\Re^n)$. Por tanto, para cada ρ fijo, tal sucesión tiene la propiedad $u_{j_i}(x) \overset{C^2(\overline{B_\rho})}{\to} u \geq 0$ cuando $j_i \to \infty$.

Luego, en virtud de (4.6), u satisface sobre $\Re^n$ la ecuación $-\Delta u = \lambda u^{p^*-1}$ y dado que $u(o) = 1$, por el principio del máximo, necesariamente $u > 0$.

Veamos que sorpresas nos depara $u(x)$, en relación a la constante de Sobolev en $\Re^n$. Con este fín, notemos que por el cambio de variables $x' = \frac{(x-x_j)}{\delta_j}$ se verifican las siguientes identidades, donde los términos entre corchetes son positivos y convergen cero.

$$\int_{\|\frac{x'}{\delta_j}\|<\frac{1}{2}} u_{j_i}^{q_{j_i}}(x')\sqrt{\det\gamma'}d^nx' = m_{j_i}^{-[q_{j_i}-\frac{n(q_{j_i}-2)}{2}]}\int_{\overline{B_{\frac{1}{2}}}}\phi_{q_{j_i}}^{q_{j_i}}(x)dV_\gamma$$

$$\int_{\|\frac{x'}{\delta_j}\|<\frac{1}{2}} |\nabla_{x'}u_{j_i}(x')|^2\sqrt{\det\gamma'}d^nx' =$$

$$= m_{j_1}^{-[2-(n-2)\frac{(q_{j_1}-2)}{2}]} \int_{\overline{B_{\frac{1}{2}}}} |\nabla_x \phi_{q_{j_1}}(x)|^2 \, dV_\gamma$$

Ahora bien, en virtud del lema de Fatou

$(\int \liminf_{j\to\infty} \phi_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int \phi_j \leq \limsup_{j\to\infty} \int \phi_j \leq \int \limsup_{j\to\infty} \phi_j)$

en complicidad con $\|\phi_q\|_{L_q} = 1$ se infiere las relaciones.

$\|u\|_{L^{p^*}(\Re^n)} \leq 1$ y $\|\nabla u\|_{L_2(\Re^n)} < \infty$.

Ya tenemos las estimaciones necesarias para señalar que u es solución débil del problema:

$$\int_{\Re^n} \nabla u \cdot \nabla h d^n x = \lambda \int_{\Re^n} u^{p^*-1} h d^n x; \quad \forall h \in C_o^\infty \cap H_1(\Re^n)$$

El próximo paso es tomar un h especial. Aquí lo construímos explícitamente. Sea $\zeta \in C_o(\Re^n)$ tal que

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ y } \zeta(x) = \begin{cases} 1 & Si \quad \|x\| \leq 1 \\ 0 & Si \quad \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

Se define $\zeta_\varepsilon(x) \equiv \zeta(\varepsilon x)$. Hacemos notar que si $g \in L^p(\Re^n)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\zeta_\varepsilon g \overset{L^p(\Re^n)}{\rightarrow} g$.

Se elige $h_\varepsilon = \zeta_\varepsilon \cdot (F_\varepsilon u) \in C_o^\infty(\Re^n)$ (Ver apéndice). Demostraremos que al llevar acabo el proceso de límite, cuando ε tiende a cero, se tiene $\| h_\varepsilon - u \|_{H_1^{p^*}(\Re^n)} \to 0$ y por lo tanto

$$\| \nabla u \|^2_{L^2(\Re^n)} = \lambda \| u \|^{p^*}_{L^{p^*}(\Re^n)}$$

Esto nos llavará a un absurdo; porque por un lado, el teorema de encaje de Sobolev en $\Re^n$ nos indica

$\| u \|^2_{L^{p^*}(\Re^n)} \leq K^2(2,n) \| \nabla u \|^2_{L^{p^*}(\Re^n)} = \lambda K^2(2,n) \| u \|^{p^*}_{L^{p^*}(\Re^n)}$.

como $\| u \|_{L^{p^*}(\Re^n)} \leq 1$ y $u > 0$ ineludiblemente

$1 \leq \lambda K^2(2,n) \| u \|^{p^*-2}_{L^{p^*}(\Re^n)} \leq \lambda K^2(2,n)$.

mientras que por otra parte se ha asumido $\lambda K^2(2,n) < 1$.

Retomando, vemos que de la identidad $h_\varepsilon - u = \zeta_\varepsilon[(F_\varepsilon u) - u] + [\zeta_\varepsilon u - u]$, se infiere

$\| h_\varepsilon - u \|_{L^{p^*}} \leq \| (F_\varepsilon u) - u \|_{L^{p^*}} + \| \zeta_\varepsilon u - u \|_{L^{p^*}} \to 0$

Ahora bien, $h'_\varepsilon = \zeta'_\varepsilon \cdot (F_\varepsilon u) + \zeta_\varepsilon \cdot (F_\varepsilon u')$ y por tanto

$$\begin{aligned} \| h'_\varepsilon - u' \|_{L^{p^*}} &\leq \| \zeta'_\varepsilon \cdot (F_\varepsilon u) \|_{L^{p^*}} + \| \zeta_\varepsilon \cdot (F_\varepsilon u') - u' \|_{L^{p^*}} \leq \\ &\leq \varepsilon \| \zeta^\bullet_\varepsilon \|_{L^\infty} \| F_\varepsilon u \|_{L^{p^*}} + \| (F_\varepsilon u') - u' \|_{L^{p^*}} + \\ &\quad + \| \zeta_\varepsilon u' - u' \|_{L^{p^*}} \end{aligned}$$

Como cada uno de los últimos términos converge a cero, cuando ε tiende a cero, nuestra aseveración $\| h_\varepsilon - u \|_{H_1^{p^*}} \to 0$ es correcta .□

Para finalizar, simplemente notamos que en virtud de que $u \in H_1^{p^*}$ se tiene:

$$\|\nabla u \cdot \nabla(u - h_\varepsilon)\|_{L^1} \leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla(u - h_\varepsilon)\|_{L^2} \to 0$$
$$\|u^{p^*-1}(u - h_\varepsilon)\|_{L^1} \leq \|u\|_{L_{p^*}}^{p^*-1}\|u - h_\varepsilon\|_{L^{p^*}} \to 0$$

Usar Cauchy-Schwarz en la primera desigualdad y Hölder con $\frac{1}{l} = \frac{1}{p^*}$ y $\frac{1}{q} = \frac{p^*-1}{p^*}$ en la segunda .□

¡ϕ^{p^*} existe!. Ahora que nos hemos dado cuenta de que la sucesión $\{\phi_{q_j}\}_{j\in N}$, $q_j \in]2, p^*[$ está uniformemente acotada cuando la variedad Riemanniana cumple $\lambda K^2(2,n) < 1$, diferenciando (4.3), descubrimos que $\phi_{q_j} \in C^1$ *uniformemente*. Por tanto, se cumplen las condiciones de Arzelá-Ascoli[13] (Σ^n es un compacto), infiriendose inmediatamente la existencia de una subsucesión convergente con la norma del supremo en $C^o(\Sigma^n)$, digamos, $\phi_{q_{j_i}} \xrightarrow{C^o(\Sigma^n)} \phi_{p^*} \geq 0$ cuando $j_i \to \infty$. Tomando este límite en (4.3) encontramos que ϕ_{p^*} es solución débil del problema $L\phi = \lambda\phi^{p^*-1}$ y como ϕ_{p^*} es continua, está acotada (Σ^n es un compacto), derivando la ecuación analoga a (4.3) para ϕ_{p^*}, des- cubrimos que $\phi_{p^*} \in C^1 \subset C^{o,\alpha}$ y entonces por los teoremas de regularidad de ecuaciones elípticas $\phi_{p^*} \in C^{2,\alpha} \subset C^2$. Sin olvidar que, $1 = \|\phi_{q_{j_i}}\|_{L_{q_{j_i}}} \to \|\phi_{p^*}\|_{L^{p^*}}$ cuando $j_i \to \infty$, el principio del máximo asegura que $\phi_{p^*} > 0$ y entonces podremos mejorar la diferenciabilidad, aplicando inductivamente el teorema de regularidad y concluir $\phi_{p^*} \in C^\infty$.

T. Aubin, con la ayuda de estos últimos resultados, ha demostrado la veracidad de la conjetura de Yamabe en casi todos los casos para $n \geq 6$, pero esta es otra historia, nuestra principal preocupación yace en el caso tridimensional; no hemos fijado la dimensión hasta ahora porque los resultados obtenidos son generales.

4.5 Eclosión de una solución

La mera existencia de las funciones $\phi_q > 0$ indica que, siempre es posible deformar conformemente la métrica de una variedad Riemanniana con, $\lambda > 0$, en forma tal, que el nuevo escalar de curvatura sea positivo en todas partes, solo hay que tomar $\overline{\gamma} = \phi^{\frac{2p^*}{n}}\gamma$ para obtener $\overline{R} = \lambda_q\phi_q^{q-p^*}$. Así para tratar el caso $\lambda > 0$, aún no completamente resuelto, asumir $R > 0$ no es motivo de alarma.

[13] Una reseña clara, del teorema de Arzelá-Ascoli, se encuentra en Robert F. Brown (1993) *A Topological Introduction to Nonlinear Analisis*, Birkhäuser, Boston.8-17.

El matemático R. Schoen[14], alrededor de 1984, desenmarañó el misterio para admitir la veracidad de la conjetura de Yamabe en los casos en que la variedad tiene diemensión n=3, 4, 5 al probar que en la desigualdad $\lambda \leq K^{-2}(2,n)$, la igualdad se alcanza si y solo si la variedad Σ^n es conformalmente difeomorfa a la n-esfera S^n, de curvatura constante.

La ruta hacia la demostración, dijo, es exhibir una función de prueba φ, cercana a una solución de $L\phi = \phi^{p^*-1}$, pequeña fuera de la vecindad de un punto, digamos $o \in \Sigma^n$, de manera que la parte no trivial de la estimación para $\Im[\varphi]$ quede concentrada en la vecindad del punto o. Y esto es la clave, $-L\varphi \simeq 0$ sugiere tomar $\varphi \simeq G$, la función de Green del laplaciano conforme ($LG = (n-2)\omega_{n-1}\delta_o$, que se sabe es positivo en el complemento de todo conjunto abierto que contiene al punto o)[15], y dejar la parte no trivial al comportamiento de G en la vecindad de o. En dimensión tres, el único caso que trataremos aquí cabalmente[16], G tiene en coordenadas normales la expansión alrededor del punto o.

$$G = \|x\|^{2-n} + A + \alpha(\|x\|) \tag{4.7}$$

Luego, la deformación conforme $\gamma' = G^{\frac{2p^*}{n}}\gamma$ revela una métrica asintóticamente plana $\gamma' = (1 + \frac{2p^*A}{n}\|y\|^{2-n})\delta + 0(\|y\|^{1-n})$, con $y = \frac{x}{\|x\|^{-2}}$ y por tanto expansión situada para y grande. Como $R' = 0$, el teorema de la positividad de la energía asegura; ya sea una constante A positiva, que en su caso implicará como veremos $\lambda \leq \Im[\varphi] < K^{-2}(2,n)$, ó $A \equiv 0$ y entonces Σ^3 es conformalmente equivalente a S^3.

Para la construcción de φ, R. Schoen usó las soluciones $u_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$ sobre $\Re^n$ de la ecuación $\Delta u_\epsilon = n(n-2)u_\epsilon^{p^*-1}$y entonces funciones que satisfacen

$$\int_{B_{\rho_o}} |\nabla u_\epsilon|^2\, dx = n(n-2)\left(\int_{B_{\rho_o}} u_\epsilon^{p^*} dx\right)^{\frac{2}{n}+\frac{2}{p^*}} + \int_{\partial B_{\rho_o}} u_\epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial r} d\sigma \tag{4.8}$$

que se sigue de multiplicar la ecuación diferencial por u_ϵ, integrar por partes y notar que $\frac{2}{n} + \frac{2}{p^*} = 1$. De esta última igualdad se deduce al tomar $\rho_o \to \infty$:

$$K(n,2)^{-2} = \frac{\int_{\Re^n} |\nabla u_\epsilon|^2\, dx}{\left(\int_{\Re^n} u_\epsilon^{p^*} dx\right)^{\frac{2}{p^*}}} = n(n-2)\left(\int_{\Re^n} u_\epsilon^{p^*} dx\right)^{\frac{2}{n}} \tag{4.9}$$

---

[14] R. Schoen 1984, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J.Diff.Geom.20*, 479-495.

[15] Ahora que $R > 0$, $-L$ es un operador uniformemente elíptico e invertible.

[16] Para $n > 3$, la expansión de la función de Green del laplaciano conforme, mencionada arriba, es válida solo alrededor de un punto donde la métrica es conformalmente plana. De modo que se necesita, en principio, hacer más de lo que se hace aquí para probar la conjetura de Yamabe.

Siguiendo adelante, (4.9) y (4.8) implican finalmente que

$$\int_{B_{\rho_o}} |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx \leq K(n,2)^{-2}\left(\int_{B_{\rho_o}} u_\varepsilon^{p^*}\, dx\right)^{\frac{2}{p^*}} + \int_{\partial B_{\rho_o}} u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}\, d\sigma \qquad (4.10)$$

Es instructivo comparar este resultado con la desigualdad de Sobolev y notar que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} < 0$. Sea ρ_o un radio pequeño, $\eta = \eta(\| x \|)$ una función suave, tal que $\eta = 1$ si $x \in B_{\rho_o}$, $| \nabla\eta | \leq \rho_o^{-1}$ si $x \in B_{2\rho_o}\backslash B_{\rho_o}$ y $\eta = 0$ si $x \in \Sigma^n\backslash B_{2\rho_o}$. Sin olvidar el discurso anterior, es razonable que la función de prueba $\varphi(x)$, por construir, funcione bien:

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & Si \quad x \in B_{\rho_o} \\ \varepsilon_o(G(x) - \eta\alpha(x)) & Si \quad x \in B_{2\rho_o}\backslash B_{\rho_o} \\ \varepsilon_o G(x) & Si \quad x \in \Sigma^n\backslash B_{2\rho_o} \end{cases}$$

sujeta a la única condición de continuidad que impondremos, ha de resolverse para ε.

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \varepsilon_o(\|x\|^{2-n} + A) \quad en \quad \partial B_{\rho_o} \qquad (4.11)$$

Justo aquí, es la primera vez donde se necesita $\rho_o \gg \varepsilon_o$ con el fin de que exista solución para ε; de las dos posibles tomaremos aquella para la cual $\varepsilon \approx \varepsilon_o^{\frac{2}{n-2}}$. Estudiemos lo que le ocurre a φ sobre $\Sigma^n\backslash B_{\rho_o}$, no sin antes remarcar que $\alpha(x)$ es una función armónica con $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(x) \leq c\|x\|$, aquí c es un objeto matemático que indica la presencia de constantes y por tanto absorbe constantes. Iniciaremos con

$$\int_{\Sigma^n\backslash B_{\rho_o}} | \nabla\varphi |^2 + a\varphi^2 dv = \varepsilon_o^2 \int_{\Sigma^n\backslash B_{\rho_o}} | \nabla G |^2 + aG^2 dv$$
$$+ \varepsilon_o^2 \int_{B_{2\rho_o}\backslash B_{\rho_o}} | \nabla(\eta\alpha) |^2 - 2\nabla G\cdot\nabla(\eta\alpha) + (\eta\alpha)^2\, dx.$$

Vemos que la segunda integral del miembro derecho es un $c\rho_o\varepsilon_o^2$. Además nótese que G satisface $L\ G = 0$ sobre $\Sigma^n\backslash B_{\rho_o}$ así que una integración por partes en la antepenúltima ecuación integral en complicidad con (4.10) conducen al resultado[17]

$$(L\varphi, \varphi)_\gamma \leq K(n,2)^{-2}\|\varphi\|^2_{L^{p^*}(B_{\rho_o})} +$$
$$+ \int_{\partial B_{\rho_o}} \left(u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - \varepsilon_o^2 G_\varepsilon \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial r}\right) d\sigma + c\rho_o\varepsilon_o^2.$$

Finalmente a R. Schoen solo le quedo mostrar que el término de frontera es lo suficientemente negativo cuando $A > 0$ y entonces Σ^n no conformalmente difeomorfa a S^n, para concluir $\lambda < K(n,2)^{-2}$. Un cálculo directo, considerando $\rho_o \gg \varepsilon_o$, (4.11) y guardando solo los términos dominantes,

[17] Notar que en dimensión 3,
$\int_{B_{\rho_o}} | \nabla u_\varepsilon |^2 + \frac{R}{8}u_\varepsilon^2 dv_\gamma \leq \int_{B_{\rho_o}} | \nabla u_\varepsilon |^2\, dx + c\rho_o\varepsilon_o^2$
$\int_{B_{\rho_o}} u_\varepsilon^6 dx \leq \int_{B_{\rho_o}} u_\varepsilon^6 dv_\gamma + c\varepsilon_o^4.$

muestra que

$$(L\varphi,\varphi)_\gamma \;\leq\; K(n,2)^{-2}\|\varphi\|^2_{L^{p^*}(B_{\rho_o})} + \\ -(n-2)\omega_{n-1}A\varepsilon_o^2 + c\rho_o^{-n}\varepsilon_o^{1+\frac{n+2}{n-2}} + c\rho_o\varepsilon_o^2$$

Y la prueba queda completa[18] al tomar ρ_o pequeño y ε_o aún mucho más pequeño. Notar que de aquí también se deduce la relación $\lambda \leq K(3,2)^{-2}$ $\forall$ variedad Riemanniana (Σ^3,γ) compacta, sin frontera .□

4.6 La Unicidad.

Supongamos que γ es tal que su escalar de curvatura R es constante y tratamos de encontrar una función $\varphi > 0$, $\varphi \in C^2$ para el cual $\overline{\gamma} = \varphi^{\frac{2p^*}{n}}\gamma$ le corresponde de nuevo un escalar de curvatura constante, esta vez $\overline{R} = R$. Nos estamos preguntando entonces sobre soluciones de la ecuación

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = \overline{R}\varphi^{p^*-1} \tag{4.12}$$

En el caso $\lambda < 0$ hay una única solución, ya que si existiera otra esta alcanzaría un máximo y un mínimo, digamos en x y x' respectivamente $(\Delta\varphi(x) \geq 0 \geq \Delta\varphi(x'))$ y por lo tanto $\varphi^{p^*-2}(x') \geq 1 \geq \varphi^{p^*-2}(x)$ que implica $\varphi(x) \equiv 1$.

En el caso $\lambda = 0$ las soluciones son proporcionales, ya que la ecuación a satisfacer es $\Delta\varphi = 0$, lo que significa $\varphi = cte.$

Cuando $\lambda > 0$ en general existen soluciones no proporcionales. Por ejemplo en S_n las funciones $\varphi(r) = (\beta - \cos\alpha r)^{\frac{2-n}{2}}$, con $\beta^2 = \frac{\overline{R}}{R} + 1$ y $\alpha^2 = \frac{R}{n(n-1)}$ satisfacen (4.12)
(Recordar que en coordenadas polares geodésicas para una función radial, el laplaciano tiene la expresión.
$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}\sqrt{|\gamma|}}\partial_r(r^{n-1}\sqrt{|\gamma|}\partial_r)$ y en la n-esfera $r^{n-1}\sqrt{|\gamma|} = (\sin\alpha r)^{n-1}$).
Con estas funciones se puede verificar tambien que $\lambda(S^n) = K^{-2}(n,2)$.

[18] Una revisión de la prueba de R. Shoen y discusiones tempranas sobre la relación entre λ y la masa *A.D.M.* se puede encóntrar en Niall Ó Murchadlia (1989), Thé Yamabe Theorem and General Relativity, *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, editado por R. Bartnik, Australian National University, Canberra, 137–167.*

5

Parametrización del espacio de soluciones.

"The concept mass. It's very improbable but not impossible that it will be shaken in future."

Ernst Mach.

5.1 Invarianza conforme.

Sabemos que siempre es posible descomponer, sin restricciones, todo conjunto de datos iniciales $(\Sigma^3, \overline{\gamma}_{ab}, \overline{K}_{ab}, \overline{\rho}, \overline{J}^b)$ dados sobre una variedad Riemanniana compacta, orientable y sin frontera, en la forma

$$(\Sigma^3, \phi^4\gamma_{ab}, \phi^{-2}(\sigma^*_{ab} + (L[\mathrm{w}])_{ab}) + \tfrac{1}{3}\overline{\tau}\phi^4\gamma_{ab}, \phi^{-8}\rho, \phi^{-10}J)$$

Más aún, en la parte final del tercer capítulo, encontramos que la existencia de un gravitopotencial vectorial $\mathrm{w}(\gamma)$ y un factor escalar ϕ que satisfacen

$$(\Delta_L \mathrm{w})^a = J^a + \frac{2}{3}\phi^6 D^a \overline{\tau} \tag{5.1}$$

$$-8\Delta\phi = -\frac{2}{3}\overline{\tau}^2\phi^5 - R\phi + 2\rho\phi^{-3} + A\cdot A\phi^{-7} \tag{5.2}$$

es una condición **necesaria y suficiente** para que el conjunto de datos $(\Sigma^3, \overline{\gamma}_{ab}, \overline{K}_{ab}, \overline{\rho}, \overline{J}^b)$ sea solución de las constricciones.

Notamos además que existe una condición integral global, también necesaria y suficiente, para que la ecuación del gravitopotencial tenga solución, a saber

$$0 = (\chi_a, J^a + \tfrac{2}{3}\phi^6 D^a\overline{\tau})_\gamma = (\overline{\chi}_a, \overline{J}^a + \tfrac{2}{3}\overline{D}^a\overline{\tau})_{\overline{\gamma}}$$

la que solo depende de la clase conforme de equivalencia.

Y en verdad podemos ir, aún más lejos. Primero, como la descomposición de $\overline{K}_{ab}$ es única y usando como intermediario las constricciones, ecuaciones que esperamos $(\Sigma^3, \overline{\gamma}_{ab}, \overline{K}_{ab}, \overline{\rho}, \overline{J}^b)$ resuelvan, vemos inmediatamente, sin necesidad de realizar más cálculos, que el sistema de ecuaciones (5.1), (5.2) admite solución $\phi, \mathrm{w}(\gamma)$ para $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \overline{\tau}, \rho, \mathbf{J})$ si y solo si admite solución para todos los conjuntos conformalmente relacionados

$$\mathcal{L}_\theta(\Sigma^3, \gamma_{ab}, \sigma_{ab}, \overline{\tau}, \rho, J^b) = (\Sigma^3, \theta^4\gamma_{ab}, \theta^{-2}\sigma_{ab}, \overline{\tau}, \theta^{-8}\rho, \theta^{-10}J^b) \tag{5.3}$$

en donde el factor escalar que conduce a una solución de las constricciones es ahora $\phi' = \phi\theta$ y cada término en la descomposición de $\overline{K}_{ab}$ se transforma así mismo en un término con iguales propiedades correspondientes de traza y transversalidad.

Está invarianza, que acabamos de señalar, indica que solo necesitamos estudiar el sistema (5.1), (5.2) sobre un solo representante de la clase conforme de equivalencia, que podemos tomar a nuestra conveniencia, para saber si cualquier elemento de la misma clase generá o no una solución de las constricciones del campo gravitatorio.

Del conjunto de datos $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \overline{\tau}, \rho, \mathbf{J})$ se pueden extraer algunos invariantes conformes que caracterizan la clase conforme a la cual pertenecen, por ejemplo $\tilde{\gamma}$. Sin embargo, estamos interesados en descubrir tanto invariantes conformes como condiciones necesarias y suficientes aplicables a ellos, que revelen aquellos conjuntos de datos iniciales $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \overline{\tau}, \rho, \mathbf{J})$ que conducen a una solución de las constricciones.

5.2 La inercia en un Universo cerrado.

Hemos enfatizado que de la teoría de la Relatividad General, se infiere que la inercia depende, por lo menos en parte, de la distribución y flujo relativo de todas las formas de materia-energía existentes en el universo, en particular existe una dependencia en las propiedades del espacio, que se manifiesta por las condiciones límites que se pueden admitir en el caso de un universo infinito cuasi-euclideano. Resulta muy especial el caso de un universo espacialmente limitado, donde ya no existen condiciones límite. Debemos preguntarnos entonces como afecta esta condición del espacio a la inercia de los cuerpos. A primera vista, podemos inclinarnos a lo que Einstein llamó, la hipótesis de la relatividad de la inercia, que asume que la inercia total de una masa puntual está en efecto *determinada* por la presencia de todas las masas, debido a una clase de interacción con la última. Dicha suposición solo puede llevarse acabo satisfactoriamente cuando el universo es espacialmente cerrado. Es precisamente, para el análisis de este caso muy especial, que hemos concentrado todos nuestros esfuerzos.

Encontraremos indicios del significado que encierra la finitud del espacio para la física de la inercia, al apuntar que en una variedad Riemanniana (Σ^3, γ), orientable, compacta y sin frontera, se cumple la identidad matemática $(-\Delta\phi, 1) = 0 \; \forall\phi \in C^2$. Esto significa que, la existencia de una solución para la ecuación de Lichnerowicz depende sensiblemente de los signos de los coeficientes de ϕ. Regresa de golpe a nuestra mente, en lo concerniente a esta notación, que el signo de $\lambda(\Sigma^3, \gamma)$ es un invariante conforme y aún más, que coincide con el signo del escalar de curvatura constante al que se puede acceder por deformación conforme de la métrica γ, en virtud de la prueba de la conjetura de Yamabe. De ahí el derecho que tenemos para clasificar las métricas Riemannianas, admisibles a Σ^3, como pertenecientes a tres "clases de Yamabe" $y^+(\Sigma^3)$, $y^o(\Sigma^3)$ ó $y^-(\Sigma^3)$ según $\lambda(\Sigma^3, \gamma)$ sea positivo, nulo o negativo respectivamente[1].

---

[1] T. Aubin probó que toda variedad Riemanniana compacta de dimensión mayor o igual que tres, siempre lleva consigo una métrica que tiene por escalar de curvatura a una constante negativa. Por lo tanto $Y^-(\Sigma^3)$ es no vacío.

Ver Aubin T.(1970), "Metriques riemanniennes et courbure", *J. Diff. Geo. 4 (4) p.388.*

5.2.1 Cuando la curvatura media de (Σ^3, γ) es constante.

Cuando $\overline{\tau} = ctc$[2] las constricciones del campo gravitatorio se desacoplan y la ecuación del *gravitopotencial vectorial* se puede resolver para un w(γ) al satisfacerse la condición de integrabilidad global, que ahora es posible verificar sin conocer ϕ. Luego, el problema de valores iniciales de la Relatividad General se reduce a estudiar la existencia de un factor escalar que cumpla la ecuación de Lichnerowicz.
Los invariantes conformes que se apuntan relevantes en la investigación son:

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv sgn \quad (\overline{\tau}^2) \geq 0 \\ \eta &\equiv sgn \quad \lambda(\Sigma^3, \gamma) \\ \zeta &\equiv -sgn_{\max\Sigma^3}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{A} + \rho) \leq 0 \end{aligned}$$

κ nos dice si trabajamos sobre una hipersuperficie maximal o sobre una hipersuperficie con curvatura media constante diferente de cero, η determina el signo del escalar de curvatura constante accesible a γ por deformación conforme y ζ indica la presencia de "energía cinética gravitacional $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$" o la existencia de fuentes de densidad de energía local; en total hay doce casos a explorar.

Existencia.

Gracias a la libertad conforme (5.3) y la verificación de la conjetura de Yamabe podemos tomar γ de manera que su escalar de curvatura sea constante, luego es inmediato ver que cuando (κ, η, ζ) es igual a uno de los elementos del conjunto $\{(0,-1,0); (0,1,0); (1,0,0); (1,1,0); (0,-1,-1); (0,0,-1)\}$ la condición necesaria $(-\Delta\phi, 1) = 0$ no se verifica y por tanto es imposible construir una solución $0 < \phi \in C^2$ de la ecuación de Lichnerowicz (5.2). Solo las seis soluciones de la ecuación

$$(\kappa\zeta + 1)(\kappa + \eta + \zeta) = 0$$

Esto es $\{(0,0,0); (1,-1,-1); (1,0,-1); (1,1,-1); (1,-1,0); (0,1,-1)\}$ tienen la posibilidad de de dar origen a tal solución $\phi > 0$; vere- mos que satisfacer la fórmula (5.4) es la condición necesaria y suficiente que buscamos. Es en esta ecuación, donde se manifiesta la propiedad de ser el espacio cerrado, sobre la inercia de los cuerpos. Cabe mencionar que solo recientemente, motivado por el advenimiento de la prueba de la conjetura de Yamabe, es como se ha llegado a tal condición matemática. Se recuerda que hasta hace poco, permanecían algunos conjuntos de datos iniciales iniciales como indeterminados, no se conocía si conducirían o no a una solución de la ecuación

[2]Se sabe que si un espacio-tiempo admite una hipersuperficie de Cauchy compacta entonces toda hipersuperficie espacial compacta es también una superficie de Cauchy.

de Lichnerowicz[3], cuando la hipersuperficie sobre las que se les define, se le asigna una curvatura media constante.

En adelante, será instructivo tener en mente el significado de cada componente de la tríada ordenada (κ, η, ζ), continuemos entonces.

El caso más sencillo de verificar es $(\kappa, \eta, \zeta) = (0,0,0)$ ya que cualquier $\phi = cte > 0$ satisface (5.2), estos datos generan un espacio-tiempo plano y estático; la no unicidad de ϕ es un reflejo de la libertad en elegir cualquier escala de longitud espacial.

El aspecto que tiene la ecuación de Lichnerowicz $-\Delta\phi = P(\phi, x)$, nos regresa a la sección titulada -Avances sobre el problema de existencia- del tercer capítulo que preparó el camino para resolver parte del enigma. Si logramos exhibir un par de funciones ϕ_- y ϕ_+, llamadas respectivamente subsolución y supersolución, que satisfacen las relaciones

$$-\Delta\phi_- \leq P(\phi_-, x);$$
$$-\Delta\phi_+ \geq P(\phi_+, x)$$
$$0 < \phi_- \leq \phi_+$$

quedaría asegurada la existencia de una solución $\phi \in C^2$, $\phi > 0$ de la ecuación de Lichnerowicz; se necesita asumir para esto que los coeficientes de ϕ, a saber ρ y $A \cdot A$ estén en $H_2(\Sigma^3) \subset C^o(\Sigma^3)$.Recordar que siempre hemos asumido que por lo menos $\gamma \in H_4(\Sigma^3)$

Argumento del polinomio.

Como primer paso, notemos que $P(t, x)$ es un polinomio en t y en virtud de que Σ^3 es un compacto sería *suficiente*, para que existiesen dos constantes positivas $0 < \ell < m$ que funcionen como subsolución y supersolución[4], esto es

$$0 \leq P(\ell, x) \text{ y } 0 \geq P(m, x)$$

el que $P(t, x)$ tuviera una y solo una raíz positiva con $P(t, x)$ negativo cuando t es grande para cada $x \in \Sigma^3$. Este es precisamente el caso cuando $(\kappa, \eta, \zeta) \in \{(1,-1,-1); (1,0,-1); (1,1,-1); (1,-1,0)\}$. Para corroborarlo usaremos el siguiente lema.

---

[3] Ver Isenberg J. (1987); "Parametrization of the Space of Solutions of Einstein's Equations" *Phys. Rev. Lett. 59 2389-92.*

En donde se anuncia la resolución de todos los casos indeterminados cuando la curvatura media τ es constante sobre Σ^3.

[4] Este argumento proviene del trabajo pionero de Ó Murchadha N. and York J. (1973) "Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity on compact manifolds". *J. Math. Phys. Vol. 14, No 11, 1551-7.*

Lema. *Sea Λ un conjunto abierto, con $\Sigma^3 \backslash \overline{\Lambda}$ no vacío y frontera regular $\partial\Lambda$, entonces siempre es posible deformar conformemente la métrica de manera que el nuevo escalar de curvatura asociado es menor que una constante negativa en $\overline{\Lambda}$.*

En efecto, el resultado se arriva mediante la aplicación seguida de dos deformaciones conformes. Si $\gamma'' \in H_4 \subset C^2$, $R(\gamma'')$ es continuo sobre el compacto Σ^3 y por tanto está acotado por una costante M> $\mid R(\gamma'') \mid$. Con la primera transformación $\gamma' = 2M\gamma''$ se logra obtener un escalar de curvatura $R(\gamma') < \frac{1}{2}$, para la siguiente deformación consideremos el problema

$$\begin{aligned} 8\Delta' u - u = 0 \qquad & en \quad \Lambda \\ u = 1 \qquad & en \quad \partial\Lambda \end{aligned}$$

que tiene una única solución $u \in H_4(\overline{\Lambda})$, que por el principio del máximo necesariamente es positiva, sin problemas podemos extender u a una función positiva $\theta \in C^2(\Sigma^3)$ y por tanto acotada por una constante, digamos m. La deformación conforme $\gamma = \theta^4\gamma'$ termina el trabajo, se usa la ley de transformación de los escalares de curvatura
$R(\gamma) = \frac{R(\gamma')}{u^4} - \frac{8\Delta' u}{u^5} = \frac{R(\gamma')-1}{u^4} < -\frac{1}{2m^4}$ en $\overline{\Lambda}$. □

Ya que estamos interesados solo en raíces positivas de $P(t,x)$ consideremos en su lugar

$$\varphi^7 P(\phi, x) \equiv Q(z,x) = -\tfrac{2}{3}\overline{\tau}^2 z^3 - Rz^2 + 2\rho z + A \cdot A; \qquad z = \phi^4 \qquad (5.5)$$

si se tuviera $\zeta \neq 0$, con algunos lugares donde $A \cdot A+ \ \rho = 0$, digamos en el interior del conjunto no vacío llamado $\Lambda \subset \Sigma^3$; por el lema anterior, sin perdida de generalidad, podemos asumir que en $\overline{\Lambda}$, $R < 0$. Si este no es el caso tomaremos siempre la opción dentro de la clase conforme de equivalencia de γ que corresponde a un escalar de curvatura constante, que como sabemos su signo coincide con η. Concluido los preparativos ya se visualiza porque el polinomio en z de la fórmula (5.5) considerado con el representante de la clase conforme de equivalencia que hemos asignado tiene una y solo una raíz positiva cuando $(\kappa, \eta, \zeta) \in \{(1,-1,-1);(1,0,-1);(1,1,-1);(1,-1,0)\}$. En cada caso en la vecindad del cero $Q(z,x)$ adquiere un valor positivo, para z grande toma un valor negativo, se sigue por ser un polinomio de grado tres que tiene una ó tres raíces positivas, pero no puede tener tres raíces positivas, ya que entonces se podría escribir como $Q(z,x) = -\frac{2}{3}\overline{\tau}^2(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ que posee un término lineal en z con coeficiente $-\frac{2}{3}\overline{\tau}^2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3) < 0$ que es ridículo ya que sabemos que este coeficiente es $2\rho \geq 0$.

La doma del caso $(\kappa, \eta, \zeta) = (0, 1, -1)$. Solo falta explorar $(\kappa, \eta, \zeta) = (0, 1, -1)$ o más precisamente

$$L[\phi] \equiv -8\Delta\phi + \phi = 2\rho\phi^{-3} + A \cdot A\phi^{-7} = F(\phi, x)$$

que nos resulta algo familiar[5], como si ya lo hubieramos visto antes, claro en el argumento constructivo del tercer capítulo, excepto que ahora F es no creciente. Sea $1 \leq \hat{\phi} = \max\{1, \max_{S^3} F(1, x)\}$, entonces

$$L[0] < L[\phi_-] \equiv F(\hat{\phi}, x) \leq F(1, x) \leq \hat{\phi} \equiv \phi_+ = L[\phi_+]$$

en donde ϕ_- es la única solución H_4 de la ecuación diferencial $L[\phi_-] \equiv F(\hat{\phi}, x)$, luego por el principio del máximo $0 < \phi_- \leq \phi_+$ y entonces

$$L[\phi_-] \equiv F(\phi_+, x) \leq F(\phi_-, x)$$

consecuentemente, ϕ_- y ϕ_+ forman respectivamente las anheladas subsolución y supersolución que garantizan la resolutividad de la ecuación de Lichnerowicz.

[5] Ver Isenberg J. (1995); Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds. *Class. Quantum Grav. 12, 2249-74.*

Curiosamente en la página 2264 de este árticulo Isenberg escribe: "Note that this is the class for which no **Leray-Schauder existence proof has been found**".

Isenberg ataca este caso como los anteriores, exhibiendo explicitamente una subsolución y una supersolución, conociendo la prueba constructiva de este método, en contraste nosotros partimos de la teoría de grado a la Leray-Schauder consiguiendo la prueba de existencia rederivando las condiciones del método de subsoluciones y supersoluciones.

Unicidad.

Ya mencionamos que $(\kappa,\eta,\zeta) = (0,0,0)$ resuelve las constricciones para cualquier $\rho = cte > 0$, no unicidad se espera físicamente en este caso. En esta sección retomaremos los resultados del tercer capítulo encasillados bajo el nombre -el problema de unicidad-.

La ecuación de Lichnerowicz claramente es una ecuación no lineal uniformemente elíptica, ahora bien, aquí F es:

$$F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = 8\Delta u - \frac{2}{3}\tau^2 u^5 - Ru + A\cdot Au^{-7} + 2\rho u^{-3}$$

¿ Acaso $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$, con derivada no identicamente nula?. Esa es la pregunta que debemos contestar para proclamar unicidad.
Para esta cuestión, se elige en cada una de las diferentes alternativas, donde sabemos existe solución, la representación de la clase conforme de equivalencia donde el escalar de curvatura es constante y normalizado.
Resulta inmediato notar que cuando $(\kappa,\eta,\zeta) \in \{(0,1,-1);(1,1,-1);(1,0,-1)\}$, efectivamente $\frac{\partial F}{\partial u}$ es no positiva para u estrictamente positiva.
En los casos restantes, $(\kappa,\eta,\zeta) \in \{(1,-1,0);(1,-1,-1)\}$, uno puede ver con gozo que $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$ en un subconjunto de los reales positivos donde toda solución $u \in C^2$ de la ecuación de Lichnerowiz debe existir, más precisamente, si u es solución su valor mínimo satisface
$\frac{2}{3}\tau^2 u_{\min}^5 - u_{\min} - A\cdot Au_{\min}^{-7} - 2\rho u_{\min}^{-3} = 8\Delta u(x_{\min}) \geq 0$
y entonces
$u_{\min} \geq [\frac{3}{2\tau^2}(1 + A\cdot Au_{\min}^{-8} - 2\rho u_{\min}^{-4})]^{\frac{1}{4}} \geq [\frac{3}{2\tau^2}]^{\frac{1}{4}}$,
infiriendose de este modo el resultado
$4(1 + \frac{7}{3}A\cdot A\overline{\tau}^{1} + \rho\overline{\tau}^{2}) \geq \frac{\partial F}{\partial u}$ en el intervalo $u \in ([\frac{3}{2\tau^2}]^{\frac{1}{4}}, +\infty)$. □

Parametrizando el espacio de soluciones. conclusión

Diremos que dos conjuntos de datos estan difeoconformemente relacionados si se pueden obtener uno del otro mediante la composición de un difeomorfismo espacial y una deformación conforme. Con tal terminología se puede enunciar el resultado prometido al inicio de está ivestigación

Sea S, el conjunto de soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio. formado por elementos que son espacio-tiempos. globalmente hiperbólicos, que admiten al menos una hipersuperficie espacial compacta, sin frontera de curvatura media constante, que satisfacen además la condición de energía dominante. Este conjunto resulta estar en correspondencia biunívoca, con clases de equivalencia difeoconformes de datos iniciales $(\Sigma^3, \gamma, \sigma^*, \tau, \rho, \mathbf{J})$, libremente especificables. salvo que deben cumplir la condición de energía dominante. la condición de integrabilidad global $(\chi_a, J^a)_\gamma = 0$ y la ecuación difeoconforme. que expresa la influencia de la finitud del espacio sobre la inercia de los cuerpos. $(\kappa\zeta + 1)(\kappa + \eta + \zeta) = 0$.

Más precisamente. por cada clase difeoconforme de datos iniciales no triviales. que satisfacen las condiciones anteriores. existe un único representante. excepto por cambios de coordenadas, donde la ley de conservación de la energía es válida y los datos genera una región de espacio-tiempo, globalmente hiperbólico. que satisface las ecuaciones de campo de Einstein.

5.3 Comentario.

Sin duda alguna, existe todavía un aire de insatisfacción, y no podemos sentirnos agusto; debido a la confrontación de dos teorías, la teoría de la Relatividad vs. la Mecánica cuántica. Debemos comenzar de nuevo y preguntarnos ahora, cual es el *análogo* en "nuestro Universo" del principio de Mach; cada concepto que aparece en tal enunciado como masa-energía, espacio-tiempo debe ser revisado y encontrarse un *análogo*. Debemos tener cuidado incluso con la propia estructura causal.

Me he cuestionado si otras personas han hecho la misma pregunta, el análogo del principio de Mach, a lo más que he podido enterarme, he encontrado una, R. P. Feynman, quien en algún momento de reflexión comentó[6]:

> "*With the advent of quantum mechanics a new* absolute *was definable; absolute scale of length or time... Mach's Principle is equivalent to the statement that the fundamental units of length and time at a point are the result of the influence of nebulae... ?' How do the photons* Know *what their wave length is in absolute units to decide whether to make pairs ?.*"

Falta mucho camino por recorrer sin duda, y no podemos dejar de escuchar aquellas palabras que el propio Newton fijó para sí al final de su vida[7], y que rezumban todavía dentro de nuestros oídos:

> "*No sé lo que le parezco al mundo; pero para mí mismo tengo la impresión de ser solamente como un muchacho jugando a la orilla del mar, y divirtiéndome en encontrar de tanto en tanto un guijarro más liso que los demás, o una concha más hermosa de lo habitual, mientras el gran océano de la verdad se extiende aún por descubrir ante mí.*"

---

[6] R. P. Feynman (1963). *Lectures on Gravitation.* California Institute of Technology. Pasadena California. pgn 66-73.

[7] Gale E. Christianson (1987). "Newton (2)", Salvat Editores, pp. 613-614.

6

Apéndice

Regularizador de Friedrichs.

Sea $\eta \in C_c^{\infty}(\Re^n)$, $\eta : \Re^n \to \Re$ con $Supp\ u \subset B_1$; tal que $\eta \geq 0$ en $\Re$ y $\eta = 0$ si $\| x \| \geq 1$, además de satisfacer $\int_{\overline{B_1}} \eta d^n x = 1$.
Tomar por ejemplo la función

$$\eta(x) = \begin{cases} c e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & Si \quad \| x \| < 1 \\ 0 & Si \quad \| x \| \geq 1 \end{cases} \quad \text{con } c^{-1} = \int e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} d^n x.$$

Se introduce el regularizador de Friedrichs asociado a u, denotado $(F_\varepsilon u)$, a saber

$$\begin{aligned} (F_\varepsilon u)(x) &\equiv \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Re^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) d^n y \\ &= \int_{\overline{B_1}} \eta(z) u(x + \varepsilon z) d^n z \end{aligned}$$

$(F_\varepsilon u)$ tiene las siguientes **propiedades:**

(i) $(F_\varepsilon u) \in C^{\infty}(\Re^n)$. Esto es claro de su propia definición.

(ii) Sea $u \in C^1(\Re^n)$ entonces $(F_\varepsilon u) \overset{C^1(K)}{\longrightarrow} u$ *uniformemente* cuando ε tiende a cero, para todo compacto $K \subset \Re^n$.

En efecto, sea K un compacto fijo y $\varepsilon' > 0$ arbitrario. Como u es $C^1(K)$, $\exists \delta(K, \varepsilon')$ tal que

$$| u(x + \varepsilon z) - u(x) |^2 + | \partial_a u(x + \varepsilon z) - \partial_a u(x) |^2 \leq (\varepsilon')^2; \ \forall\ x \in \mathring{K} \text{ y } z \in \overline{B_1}.$$

de esto se infiere las siguientes desigualdades

$$| (F_\varepsilon u)(x) - u(x) | \leq \int_{\Re^n} \eta(z) \, | u(x + \varepsilon z) - u(x) | \, d^n z \leq \varepsilon'$$
$$| \partial_a (F_\varepsilon u)(x) - \partial_a u(x) | \leq \int_{\Re^n} \eta(z) \, | \partial_a u(x + \varepsilon z) - \partial_a u(x) | \, d^n z \leq \varepsilon'$$

para ε suficientemente pequeño, digamos $0 < \varepsilon < \delta(K, \varepsilon')$.

(iii) Si $g \in L^p(\Re^n)$ con $p \in]1, \infty[$, entonces $\| F_\varepsilon g \|_{L^p} \leq \| g \|_{L^p}$.
Para verificar la certitud del aserto se usa primero la desigualdad Hölder:

$$| \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon}) || g(y) | = | \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon}) |^{\frac{1}{p}} | g(y) || \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon}) |^{\frac{1}{p'}} \in L^1_y,$$
$$\int | \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon}) || g(y) | d^n y \leq \left(\int | \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon}) || g(y) |^p d^n y \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \| \eta \|_{L_1}^{\frac{1}{p'}}$$

Y luego, después de aplicar el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración, se escribe

$$\| F_\varepsilon g \|^p_{L^p} \leq \| \eta \|_{L^1} \cdot \| g \|^p_{L^p} \cdot \| \eta \|_{L_1}^{\frac{p}{p'}}$$

(iv) Si $g \in L^p(\Re^n)$, con $p \in]1, \infty[$, entonces $(F_\varepsilon g) \overset{L^p(\Re^n)}{\rightarrow} g$.

Como $C_o(\Re^n)$ es denso en $L^p(\Re^n)$, se puede fijar $g_1 \in C_o(\Re^n)$ tal que $\| g - g_1 \|_{L^p} \leq \varepsilon'$. Es util observar que, $Supp(F_\varepsilon g_1) \subset Supp g_1 + B_\varepsilon \subset K$, para K compacto suficientemente grande, y de esto se tiene, por la convergencia uniforme sobre el compacto K, la estimación adicional

$$\| (F_\varepsilon g_1) - g_1 \|_{L^p} \rightarrow 0$$

Ahora bien, si se escribe

$$(F_\varepsilon g) - g = [F_\varepsilon(g - g_1)] + [(F_\varepsilon g_1) - g_1] + [g_1 - g],$$
$$\| (F_\varepsilon g) - g \|_{L^p} \leq 2 \| g - g_1 \|_{L^p} + \| (F_\varepsilon g_1) - g_1 \|_{L^p}$$

Notamos que los dos últimos términos de la desigualdad, son arbitrariamente pequeños y se verifica nuestra afirmación.□

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Pais, (1982). "Subtle is the Lord, the Science and the life of Albert Einstein", Oxford University Press.

[2] A. Einstein, (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie," *Annalen der Physik*, **49**.

[3] A. Einstein, (1916). " Hamilton's principle and the General theory of Relativity", contenido en la colección: *The Principle of Relativity, Dover publication.*

[4] A. Einstein (1917). "Cosmological considerations on the general theory of Relativity" (contenido en la colección *The principle of Relativity, Dover publications, pp. 183*

[5] A. Lichnerowicz (1944). *J. Math. Pures Appl.* **23**, 37-63.

[6] Arnowitt , Deser and Misner (1962). "The dynamics of General Relativity", in *Gravitation : An Introduction to Current Research*, L.Witten (ed.), New York,Wiley, pp. 227-265.

[7] Brill, D., and S. Deser (1968). "Variational Methods and Positive Energy in General Relativity", *Ann. Phys.* **50**, *548-570.*

[8] Bryce S. DeWitt (1967). "Quantum Theory of Gravity. I The Canonical Theory". *Physical Review, vol 160, No* **5**.

[9] C.J.S. Clarke (1993). *The Analysis of Space-Time Singularities*, Cambridge lecture notes in physics, University Press Cambridge, 124-125.

[10] C.W. Misner, K. S. Thorne y J.A. Wheeler (1973). *Gravitation*, (W. H. Freeman and Co., San Francisco), Cap. 21.

[11] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen (1952). *Geometry and the Imagination*, Chelsea publishing company, New York, 226-227.

[12] D. W. Sciama (1957). "Inertia", *Sci. American* **196**, *99-109.*

[13] E. Zeidler (1990). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag New York. 35-40.

[14] E. Mach (1960). *the Science of Mechanics: A critical and Historical Account of Its Development*, the Open court Publishing Company.

[15] Gale E. Christianson (1987). *Newton (2)*. Salvat Editores, pp. 613-614.

[16] Haïm Brézis (1984). *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid.

[17] Haïm Brézis (1987). *Nonlinear Elliptic Equations Involving the Critical Sobolev Exponent-Survey and Perspectives*, Directions in Partial Differential Equations, Academic Press. 17-35.

[18] H.L. Royden (1968) .*Real analysis*. Macmillan Publishing Co., New York.

[19] H. Yamabe (1960). "On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds", *Osaka Math. J. No* **12**, *21-37*.

[20] J. Dieudonné (1981). *History of Functional Analysis*. Mathematics Studies; 49. North-Holland.

[21] J. Isenberg (1987). "Parametrization of the Space of Solutions of Einstein's Equations", *Phys. Rev. Lett.***59**, *2389-92*.

[22] J. Isenberg (1995). "Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds". *Class. Quantum Grav.* **12**, *2249-74*.

[23] J. Ize (1987). *Cálculo de variaciones*, Cinvestav, pp. 147-149.

[24] J. York (1973). "Conformally invariant orthogonal decomposition of symetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity" *Math. Phys. Vol14, No* 4..

[25] J. York (1982). "The Initial value problem and dynamics". *Gravitational Radiation, North Holland*.

[26] J. A. Wheeler (1988). "Geometrodynamic Steering Principle reveals the determiners of Inercia". *International Journal of Modern Physics A, Vol.* **3**, *No 10*.

[27] Kentaro Yano (1957). *The theory of Lie derivatives and its applications;* North-Holland: Amsterdam.

[28] Kôsaku Yosida (1980). *Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, pp 56-57.

[29] Lloyd N (1978). *Degree theory*. (Cambridge . Cambridge University Press).

[30] M. S. Berger (1977). *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press. Inc.

[31] M. Cantor (1979). "Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds". *Compositio Mathematica Vol. 38, Fasc.* 1, *3-35*

[32] M. Cantor and D. Brill (1981). "The laplacian on asymptotically flat manifolds and the specification of scalar curvature". *Composilio Mathematica, Vol. 43, Fasc.* 3, *317-330.*

[33] N.Ó Murchadha and J. York (1973). "Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity on compact manifolds". *J. Math. Phys. Vol. 14, No* 11, *1551-7.*

[34] Niall Ó Murchadha (1989). "The Yamabe Theorem and General Relativity". *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, editado por R. Bartnik, Australian National University, Canberra, 137-167.*

[35] N. Trudinger, "Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 3, 265-274.

[36] P.A.M. Dirac (1925). The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proc. Soc. A.***109** *p. 642.*

[37] Protter M. y Weinberg H. (1976). *Maximum Principle in Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall).

[38] Regge, T. y Teitelboim, C. (1974) "Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity". *Ann. of Phys.* **88**, *pp. 286-318* .

[39] R. Courant and D. Hilbert (1953). *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, Vol. II, p. 322-323.

[40] Robert F. Brown (1993). *A Topological Introduction to Nonlinear Analisis*. Birkhäuser, Boston, pp. 8-17.

[41] R. Schoen, and S-T Yau, (1979). "On the proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity". *Commun. Math. Phys.* **65**, *45-76.*

[42] R. Schoen and S-T Yau, (1981). "Proof of the Positive Mass theorem II", *Commun. Math. Phys.* **79**, 231-260.

[43] R. Schoen (1984). "Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature". *J.Diff.Geom.* **20**, 479-495.

[44] R. Schoen y S-T. Yau (1994). *Lectures on Differential Geometry. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*, editado por P. International Press.

[45] R.P Feynman (1963). *Lectures on Gravitation.* California Institute of Technology. Pasadena California. pgn 66-73.

[46] S.L. Sobolev (1938). "Sur un théorème d' analyse fonctionnelle". *Math. Sbornik. No* **45** , *471-496* .

[47] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge.

[48] T. Aubin (1970). "Metriques riemanniennes et courbure", *J. Diff. Geo. 4 (4) p.388.*

[49] T. Aubin (1976). *The scalar curvature* , Differential Geometry and Relativity, editado por Cahen y Flato, Reider.

[50] T. Aubin (1982). *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampere Equations*, Springer-Verlag , N. Y.

[51] T. Aubin. *Non-linear functional analisis on riemannian manifolds*, Spinger-Verlag. 106-111.

[52] Y. Choquet-Bruhat, and Marsden (1976), *Commun. Math. Phys. 51 , No 3, 283.*

[53] Y. Choquet-Bruhat (1976). *The problem of Constrains in General Relativity: Solution of the Lichnerowicz equation.* , editado por Cahen y Flato, Reider.

[54] Y. Choquet-Bruhat, and J. W. York. (1980). *The Cauchy Problem*, in: General Relativity and Gravitation, ed. A. Held (Plenum, New York).

[55] Y. Choquet-Bruhat, (1984). *Positive-Energy Theorems*, Les Houches, Session XL 1983; Relativité, groupes et Topologie II, Elsevier Science Publishers B. V., 740-785.

[56] W.Pauli (1958). *Theory of Relativity*, Dover publications.