00365

2

2y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CLASES CARACTERISTICAS Y OPERACIONES COHOMOLOGICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

L.M. GLORIA GUADALUPE ANDABLO REYES

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARCELO AGUILAR GONZALEZ

1996

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Indice

Introducción

En este trabajo se construyen clases características para teorías de cohomología que satisfacen ciertos axiomas como se enuncia en el siguiente teorema

Teorema 0.1 (existencia y unicidad) *Supongamos que h^* es una teoría de cohomología multiplicativa tal que para cada n existen elementos $x_n \in h^2(\mathbb{CP}^n)$ que satisfacen*

(i) $h^*(\mathbb{CP}^n) \cong h^*(pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$;

(ii) *la inclusión* $i : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ *da* $i^*(x_{n+1}) = x_n$, $n \geq 1$.

Entonces para cada haz vectorial complejo de dimensión n ξ sobre un complejo CW X, existen elementos definidos de manera única $\mathbf{c}_0(\xi)$, $\mathbf{c}_1(\xi), \ldots, \mathbf{c}_n(\xi)$ con $\mathbf{c}_i(\xi) \in h^{2i}(X)$ que dependen solo de la clase de isomorfismo de ξ y satisfacen

(C1) *Si $\xi \to X$ es un haz y $f : Y \to X$ es una aplicación, entonces* $\mathbf{c}_i(f^*\xi) = f^*(\mathbf{c}_i(\xi))$, $0 \leq i \leq n$;

(C2) $\mathbf{c}_0(\xi) = 1$ *para todo* ξ;

(C3) Si $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}) \to \mathbb{CP}^n$ *es el haz de Hopf sobre* $\mathbb{CP}^n$, *entonces* $\mathbf{c}_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) = x_n$;

(C4) *Si ξ es un haz de dimensión m y η es un haz de dimensión n, ambos sobre X, entonces* $\mathbf{c}_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} \mathbf{c}_j(\xi)\mathbf{c}_k(\eta)$, $0 \leq i \leq n+m$, *donde tomamos* $\mathbf{c}_i(\xi) = 0$ *si* $i \geq m$.

El resultado ha sido enunciado para haces complejos pero existen resultados similares para haces reales y simplécticos. La prueba de este teorema requiere de un resultado fundamental: el teorema de Leray-Hirsch. Este resultado usualmente se demuestra utilizando sucesiones espectrales, pero en este texto se dará una prueba diferente utilizando un resultado de A. Dold. Además de obtenerse con este método la prueba de este importante teorema, se tienen como corolario un par de no menos importantes resultados: el teorema de isomorfismo de Thom y la fórmula de Künneth.

Por otra parte, como una aplicación de la existencia de clases características, se calcula la cohomología del espacio clasificante $BU(n)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y de manera análoga también se obtienen $H^*(BO(n), \mathbb{Z}_2)$ y $H^*(BSp(n), \mathbb{Z})$.

Finalmente se da la construcción clásica de los cuadrados de Steenrod y, se prueba el teorema de Riemann-Roch topológico. Con este resultado y un teorema de Thom se obtiene una interpretación geométrica de los cuadrados de Steenrod en variedades.

Capítulo 1

Haces y teoría de Mayer-Vietoris para homología y cohomología

1.1 Haces fibrados

La mayoría de los resultados que se incluyen en este trabajo están enunciados solo para teorías de homología pero, aunque en ocasiones no se mencione, estos resultados tienen su análogo para teorías de cohomología.

A continuación vamos a recordar las condiciones bajo las cuales una aplicación de espacios topológicos resulta ser una fibración.

Definición 1.1 *Una aplicación $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a un espacio X si para toda aplicación $f : X \to E$ y homotopía $G : X \times I \to B$ de $p \circ f$ existe una homotopía $F : X \times I \to E$ con $f = F_0$ y $p \circ f = G$. (F se dice ser un levantamiento de G.) En el diagrama que aparece abajo la aplicación i_0 está dada por $i_0(x) = (x, 0)$, $x \in X$*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow & \nearrow_F & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X\times I & \xrightarrow[G]{} & B \end{array}.$$

Definición 1.2 *Una aplicación $p: E \to B$ es llamada una fibración si tiene la propiedad de levantamiento de homotopía para todo espacio X y una fibración débil si tiene la propiedad de levantamiento de homotopía para todo disco $\mathbb{D}^n$, $n \geq 0$. Si $b \in B$, entonces el espacio $F = p^{-1}(b)$ es llamada la fibra de p.*

La proyección $p_B : B \times F \to B$ es claramente una fibración y es llamada la fibración *trivial* sobre B con fibra F.

Supongamos que $p: E \to B$ es una fibración y $f : X \to B$ es una aplicación. Sea $E_f = \{(x,e) \in X \times E : f(x) = p(e)\} \subset X \times E$. Las proyecciones $\pi_1 : X \times E \to X$ y $\pi_2 : X \times E \to E$ cuando son restringidas a E_f dan origen a aplicaciones $p_f : E_f \to X$ y $\bar{f} : E_f \to E$ que hacen conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle p_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}.$$

Proposición 1.3 *Con la hipótesis de arriba, $p_f : E_f \to X$ es también una fibración con fibra homeomorfa a $F = p^{-1}(b_0) = p^{-1}(f(x_0))$.* ■

La demostración de este resultado puede encontrarse en [3] *p. 341.* La fibración $p_f : E_f \to X$ es llamada la fibración *inducida* de $p: E \to B$ por f.

A continuación vamos a considerar una clase de fibraciones que aparecen con mayor frecuencia y que como se enuncia más abajo resulta ser una fibración débil.

Definición 1.4 *Un haz fibrado es un cuarteto (E, p, B, F) donde p es una aplicación $p : E \to B$ tal que B tiene una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe un homeomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$ tal que $p \circ \phi_\alpha = p_{U_\alpha} : U_\alpha \times F \to U_\alpha$. En otras palabras, localmente $p : E \to B$ se ve como una fibración trivial.*

La demostración del resultado que a continuación se enuncia se puede consultar en [3].

Proposición 1.5 *Si (E, p, B, F) es un haz fibrado entonces $p : E \to B$ es una fibración débil.* ∎

Ahora vamos a considerar una clase importante de haces fibrados, que son aquellos en los que toda fibra tiene la estructura de un espacio vectorial.

1.2 Haces vectoriales

Definición 1.6 *Denotemos por F a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ los números reales, complejos o cuaterniones. Un haz vectorial sobre F de dimensión n es un haz fibrado $\xi = (E, p, B, F^n)$ en el que cada fibra $p^{-1}(b)$, $b \in B$, tiene la estructura de un espacio vectorial sobre F tal que existe una cubierta abierta $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de B y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ un homeomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \times F^n \to p^{-1}(U_\alpha)$ con $p \circ \phi_\alpha = p_{U_\alpha}$, tal que $\phi_\alpha \mid \{b\} \times F^n : \{b\} \times F^n \to p^{-1}(b)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $b \in U_\alpha$ (condición de trivialización local). Hablamos entonces de haces vectoriales reales, complejos o cuaterniones dependiendo si $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*

Ejemplos.

(i) Para cualquier espacio B el *haz vectorial trivial* F de dimensión n es el cuarteto $(B \times F^n, p_B, B, F^n)$, donde $p_B(b, x) = b$ y con estructura de espacio vectorial en las fibras definida por $t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2)$, lo denotaremos por ε_B^n.

(ii) El *haz tangente* $\tau(M)$ de una variedad suave M. El espacio total de $\tau(M)$ es la variedad DM que consiste de los pares (x,v) con $x \in M$ y v es tangente a M en x. La proyección se define por $p(x,v)=x$; y la estructura de espacio vectorial en $p^{-1}(x)$ está definida por $t_1(x,v_1)+t_2(x,v_2)=(x,t_1v_1+t_2v_2)$. La condición de trivialización local no es difícil de checar. Veamos ahora el caso particular $M=\mathbb{S}^n$. Para cualquier $n \geq 1$ el haz tangente $\tau(\mathbb{S}^n)$ de la $n-$esfera $\mathbb{S}^n$ es el haz fibrado $(E,p,\mathbb{S}^n,\mathbb{R}^n)$, donde $E=\{(x,y)\in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}:$ $\|x\|=1,\ x.y=0\}$

y $p: E \to \mathbb{S}^n$ está definido por $p(x,y)=x$. Tomemos $U_i \subset \mathbb{S}^n$ el conjunto abierto $U_i=\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\|=1,\ x_i \neq 0\}$, $1 \leq i \leq n+1$. Entonces $\{U_i : 1 \leq i \leq n+1\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{S}^n$. Definimos $\phi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U_i)$ por $\phi_i(x,y)=(x, f_i(y)-(x\cdot f_i(y))x)$, donde $f_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ está definida por $f_i(y_1,\dots,y_n)=(y_1,\dots,y_{i-1},0,y_i,\dots y_n)$. Los ϕ_i son homeomorfismos que satisfacen $p\circ\phi_i = p_{U_i}$ y son lineales en las fibras.

(iii) El *haz normal* ν de una variedad suave $M\subset\mathbb{R}^n$ se obtiene como sigue. El espacio total $E\subset M\times\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los pares (x,v) tal que v es ortogonal al espacio tangente DM_x. La proyección $p:E\to M$ y la estructura de espacio vectorial en $p^{-1}(x)$ están definidas por las fórmulas $p(x,v)=x$ y $t_1(x,v_1)+t_2(x,v_2)=(x,t_1v_1+t_2v_2)$. En particular para $M=\mathbb{S}^n$ se tiene lo siguiente. Para cualquier $n\geq 1$ el *haz normal* $\nu(\mathbb{S}^n)$ es el haz fibrado $(E',p',\mathbb{S}^n,\mathbb{R}^1)$, donde $E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}:\|x\|=1,$ $y=\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}^1\}$ y $p':E'\to\mathbb{S}^n$ está definida por $p'(x,y)=x$. Definimos $\phi:\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}^1\to E'$ y $\psi:E'\to\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}^1$ por $\phi(x,\lambda)=(x,\lambda x)$ para $(x,\lambda)\in\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}^1$ y $\psi(x,y)=(x,x\cdot y)$ para $(x,y)\in E'$. Entonces ϕ, ψ son mutuamente inversas, y $\nu(\mathbb{S}^n)$ es un haz trivial.

(iv) El *espacio proyectivo complejo de dimensión n* $\mathbb{CP}^n$ es el espacio de todas las líneas complejas que pasan por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$. Dotamos a $\mathbb{CP}^n$ de una topología viéndolo como el espacio cociente $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$ donde $x \sim x'$ en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ si existe un $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $x' = zx$. Sea $q : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proyección. Entonces denotamos el punto $q(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{CP}^n$ por $[x_1, x_2, ... x_{n+1}]$, las cuales son llamadas "coordenadas homogéneas" en $\mathbb{CP}^n$. Sea $q' : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ la restricción $q \mid \mathbb{S}^{2n+1}$. La imagen inversa de un punto en $\mathbb{CP}^n$ es un círculo: $x' = zx$ para cualquier $z \in \mathbb{S}^1 = \{w \in \mathbb{C} : \mid w \mid = 1\}$. Las inclusiones $\mathbb{C}^0 \subset \mathbb{C}^1 \subset ... \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \subset ...$, inducen inclusiones $\mathbb{CP}^0 \subset \mathbb{CP}^1 \subset ... \subset \mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n \subset ...$; ya que $\mathbb{CP}^{n-1} = \{[x_1, x_2, ..., x_{n+1}] : x_{n+1} = 0\}$. Podemos tomar $\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{CP}^n$ con la topología débil. Vamos a construir el haz $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ sobre $\mathbb{CP}^n$ como sigue. Sea $E(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) = \{(l, y) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : y \in l\}$. En otras palabras la fibra de $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ sobre l es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{C}^{n+1}$ que pertenecen a l y cada línea tiene su estructura de espacio vectorial usual. El haz vectorial resultante $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ será llamado el *haz lineal canónico* sobre $\mathbb{CP}^n$.

A continuación veamos como a partir de dado un haz podemos obtener uno nuevo.

(a) *Restricción de un haz a un subconjunto del espacio base.* Sea ξ un haz con proyección $p : E \to B$ y sea $\bar{B}$ un subconjunto de B. Pongamos $\bar{E} = p^{-1}(\bar{B})$ y $\bar{p} : \bar{E} \to \bar{B}$ la restricción de p a $\bar{E}$, entonces obtenemos un nuevo haz vectorial que denotaremos $\xi \mid \bar{B}$. Cada fibra $F_b(\xi \mid \bar{B})$ es igual a la correspondiente fibra $F_b(\xi)$, y tendrá la misma estructura de espacio vectorial.

(b) *Producto cartesiano.* Dados dos haces vectoriales ξ_1 y ξ_2 con proyecciones $p_i : E_i \to B_i$, $i = 1, 2$; el producto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ es el haz con proyección $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$, donde cada fibra $(p_1 \times p_2)^{-1}(b_1, b_2) = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ tiene la siguiente estructura de espacio vectorial: si $p_1 \times p_2(e_1, e_1') = p_1 \times p_2(e_2, e_2') = p_1 \times p_2(e_3, e_3')$ entonces $t_1(e_1, e_1') + t_2(e_2, e_2') = (e_3, e_3')$ donde $e_3 = t_1 e_1 + t_2 e_2$, $e_3' = t_1 e_1' + t_2 e_2'$. Luego si (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son las cubiertas abiertas que satisfacen la condición de trivialización local para ξ_1 y ξ_2 respectivamente entonces $(U_\alpha \times U_\beta, \phi_\alpha \times \phi_\beta)$ lo es para $\xi_1 \times \xi_2$.

(c) *Haz inducido.* Sea ξ un haz vectorial con proyección $p : E \to B$ y sea B_1 un espacio topológico arbitrario. Dada cualquier aplicación $f : B_1 \to B$ podemos construir el haz inducido $f^*\xi$ sobre B_1. El espacio total $E_1 \subset B_1 \times E$ de $f^*\xi$ consiste de los pares (b, e) con $f(b) = p(e)$. La aplicación proyección $p_1 : E_1 \to B_1$ está definida por $p_1(b_1, e) = b$. Así tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B_1 & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

donde $\bar{f}(b_1, e) = e$.

Proposición 1.7 *Sean $g : B_2 \to B_1$ y $f : B_1 \to B$ dos aplicaciones, y sea ξ un haz sobre B con proyección p. Entonces $1^*\xi$ y ξ son isomorfos y, $g^*(f^*(\xi))$ y $(f \circ g)^*\xi$ son isomorfos (ambos sobre B).*

Demostración. Definamos $\phi : \xi \to 1^*\xi$ por la relación $\phi(x) = (p(x), x)$, así ϕ es claramente un isomorfsimo. Por otra parte, sea $\varphi : (f \circ g)^*\xi \to g^*(f^*(\xi))$ la aplicación definida por $\varphi(b_2, x) = (b_2, (g(b_2), x))$. Entonces también φ es un isomorfismo. ■

(d) *Suma de Whitney.* Consideremos dos haces ξ_1, ξ_2 sobre el mismo espacio base B y denotemos por $\Delta : B \to B \times B$ al encaje diagonal, $\Delta(b) = (b, b)$. El haz inducido $\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre B es llamado la suma de Whitney de ξ_1 y ξ_2, según el inciso anterior su espacio total está dado por $E(\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)) = \{(b, (e_1, e_2)) \in B \times (E_1 \times E_2) : \Delta(b) = p_1 \times p_2(e_1, e_2)\}$ y lo denotaremos por $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Observemos que cada fibra $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ es canónicamente isomorfa a la suma directa $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$.

Definición 1.8 *Consideremos dos haces vectoriales ξ y η sobre el mismo espacio base B con $E(\xi) \subset E(\eta)$, entonces ξ es un subhaz de η (esto es $\xi \subset \eta$) si cada fibra $F_b(\xi)$ es un subespacio vectorial de la correspondiente $F_b(\eta)$.*

Lema 1.9 *Sean ξ_1 y ξ_2 subhaces de η tal que cada espacio vectorial $F_b(\eta)$ es igual a la suma directa de los subespacios $F_b(\xi_1)$ y $F_b(\xi_2)$. Entonces η es isomorfo a la suma de Whitney $\xi_1 \oplus \xi_2$. Consultar [4].* ■

(e) *Complemento Ortogonal.* Esto nos sugiere la siguiente pregunta: dado un subhaz $\xi \subset \eta$ existe un subhaz complementario tal que η se escinde como una suma de Whitney? Si η tiene una métrica euclideana (ver [4]) entonces un sumando complementario tal puede ser construido como sigue. Denotemos por $F_b(\xi^{\perp})$ el subespacio de $F_b(\eta)$ que consiste de todos los vectores v tal que $v \cdot w = 0$ para todo $w \in F_b(\xi)$. Denotemos entonces a la unión de los $F_b(\xi^{\perp})$ por $E(\xi^{\perp}) \subset E(\eta)$. Luego, afirmamos que $E(\xi^{\perp})$ es el espacio total del subhaz $\xi^{\perp} \subset \eta$ y además que η es isomorfo a la suma de Whitney $\xi \oplus \xi^{\perp}$ (ver [4]). Así $\xi^{\perp}$ será llamado el complemento ortogonal de ξ en η.

Definición 1.10 *Para cualquier aplicación $p : E \to B$ una sección de p es una aplicación $\lambda : B \to E$ con $p \circ \lambda = 1_B$.*

Definición 1.11 *Sean $\xi = (E, p, B, F^n)$ y $\xi' = (E', p', B', F^n)$. Un morfismo $\phi : \xi \to \xi'$ de haces vectoriales sobre F es un par de aplicaciones $\phi : E \to E'$, $\bar{\phi} : B \to B'$ con $p' \circ \phi = \bar{\phi} \circ p$ y $(\phi \mid p^{-1}(b)) : p^{-1}(b) \to p'^{-1}(\bar{\phi}(b))$ es un isomorfismo lineal para cada $b \in B$. Las aplicaciones identidad $1 : E \to E$, $1 : B \to B$ definen un morfismo $1 : \xi \to \xi$. Sea $\xi'' = (E'', p'', B'', F^n)$ otro haz vectorial y sea $\phi' : \xi' \to \xi''$ un morfismo de haces vectoriales sobre F. Entonces $\phi' \circ \phi$ es un par de aplicaciones $\phi' \circ \phi : E \to E''$, $\bar{\phi}' \circ \bar{\phi} : B \to B''$ con $p'' \circ (\phi' \circ \phi) = (\bar{\phi}' \circ \bar{\phi}) \circ p$*

y $(\phi' \circ \phi) \mid p^{-1}(b) : p^{-1}(b) \to p''^{-1}((\bar{\phi}' \circ \bar{\phi})(b))$ *es un isomorfismo lineal para cada* $b \in B$ *(como espacios vectoriales). Así* $\phi' \circ \phi$ *es también un morfismo. Decimos que dos haces* ξ, ξ' *sobre el mismo espacio* B *son equivalentes si existen morfismos* $\phi : \xi \to \xi'$, $\psi : \xi' \to \xi$ *con* $\bar{\phi} = 1 = \bar{\psi}$ *y* $\phi \circ \psi = 1$, $\psi \circ \phi = 1$. *Obsérvese que haces equivalentes tienen la misma dimensión.*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' & \xrightarrow{\phi'} & E'' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ B & \xrightarrow{\bar{\phi}} & B' & \xrightarrow{\bar{\phi}'} & B'' \end{array} .$$

La noción de haz vectorial está estrechamente relacionada a la noción de G–haz principal, donde G es un grupo topológico.

1.3 Haces principales

Definición 1.12 *Sea* G *un grupo topológico. Un* G – *haz principal (localmente trivial) es un haz fibrado* $\xi = (B, p, E, G)$ *con una* G–*acción por la derecha* $E \times G \to E$ *de* G *en* E *tal que existe una cubierta abierta* $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *de* B *y para cada* $\alpha \in \mathcal{A}$ *un homeomorfismo de* $\phi_\alpha : U_\alpha \times G \to p^{-1}(U_\alpha)$ *que satisface* $p \circ \phi_\alpha = p_{U_\alpha}$ *y* $\phi_\alpha(b, g) = \phi_\alpha(b, 1) \cdot g$, $b \in U$, $g \in G$.

Definición 1.13 *Un morfismo* $\phi : \xi \to \xi'$ *de* G–*haces principales es un par de aplicaciones* $\phi : E \to E'$, $\bar{\phi} : B \to B'$ *tal que* $p' \circ \phi = \bar{\phi} \circ p$ *y* $\phi(e \cdot g) = \phi(e) \cdot g$ *para toda* $g \in G$, $e \in E$. *Tenemos una noción de equivalencia de dos* G–*haces* ξ, ξ' *sobre un mismo espacio base* B *como arriba.*

Definición 1.14 .*Una carta* (U, ϕ) *de* G–*haz principal* $\xi = (E, p, B, G)$ *es un conjunto abierto* $U \subset B$ *y un homeomorfismo* $\phi : U \times G \to p^{-1}(U)$ *tal que* $p \circ \phi = p_U$ *y* $\phi(b, g) = \phi(b, 1) \cdot g$, $b \in U, g \in G$. *Un atlas es una colección de cartas* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *tal que* $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *es una cubierta abierta de* B. *Por definición todo* G–*haz principal tiene al menos un atlas.*

$$\begin{array}{ccc} U\times G & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(U) \\ {}^{p_U}\downarrow & \swarrow_{p} & \\ U & & \end{array}$$

Definición 1.15 *. Un conjunto de funciones de transición $\bar{\xi}$ para un espacio B y un grupo G, es una cubierta abierta $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ para B y una colección de aplicaciones $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ para $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tal que*

$$g_{\alpha\gamma}(b) = g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\gamma}(b) \ \forall\ b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Puesto que en particular $g_{\alpha\alpha}(b) = g_{\alpha\alpha}(b)g_{\alpha\alpha}(b)$ para toda $b \in U_\alpha$, se sigue que

$$g_{\alpha\alpha}(b) = 1 \ \forall\ b \in U_\alpha.$$

Por lo anterior se tiene que $g_{\alpha\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b) = g_{\alpha\alpha}(b) = 1$, lo que implica que

$$g_{\beta\alpha}(b) = g_{\alpha\beta}(b)^{-1} \ \forall\ b \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Un *morfismo* $r : \bar{\xi} \to \bar{\xi}'$ entre conjuntos de funciones de transición $\bar{\xi} = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$ sobre B y $\bar{\xi}' = \{U_\gamma, g_{\gamma\delta} : \gamma, \delta \in \Gamma\}$ sobre B' es una aplicación $\bar{r} : B \to B'$ y una colección de aplicaciones $r_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap \bar{r}^{-1}U_{\gamma'} \to G$ que satisface

$$r_{\gamma\alpha}(b)g_{\alpha\beta}(b) = g'_{\gamma\delta}(\bar{r}(b))r_{\delta\beta}(b), \text{ para todo } b \in \forall\ b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap \bar{r}^{-1}U'_\gamma \cap \bar{r}^{-1}U'_\delta.$$

Dos conjuntos de funciones de transición $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$, $\{U_\gamma, g_{\gamma\delta} : \gamma, \delta \in \Gamma\}$ sobre el mismo espacio base son llamados *equivalentes* si existen aplicaciones $r_{\gamma\alpha} : U_\alpha \cap U'_\gamma \to G$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\gamma \in \Gamma$ que satisfacen

$$g'_{\gamma\delta}(b) = r_{\gamma\alpha}(b) g_{\alpha\beta}(b) r_{\delta\beta}(b)^{-1}, \text{ para todo } b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \cap U'_\delta.$$

Deseamos ver que clases de equivalencia de G–haces sobre un espacio fijo B están en correspondencia uno-uno (en un sentido natural) con clases de equivalencia de conjuntos de funciones de transición. La demostración de los resultados que se enuncian a continuación la hemos omitido pero pueden encontrarse en [3]

Lema 1.16 *(i) Sea ξ un G–haz principal sobre B. A todo atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ para ξ podemos asociarle un único conjunto de funciones de transición $\bar{\xi} = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$ tal que $\phi_\beta(b, g) = \phi_\alpha(b, g_{\alpha\beta}(b)g)$, para todo $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U'_\gamma \cap U'_\delta$. (ii) Si $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ son conjuntos de funciones de transición asociadas a atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $\{(U'_\gamma, \phi'_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ sobre haces $\xi = (E, p, B, G)$, $\xi' = (E', p', B', G)$ como arriba en (i), y si $\phi : \xi \to \xi'$ es un morfismo de haces, entonces existe un único morfismo de conjuntos de funciones de transición $r : \bar{\xi} \to \bar{\xi}'$ tal que $\bar{r} = \bar{\phi}$ y $\phi \circ \phi_\alpha(b, g) = \phi'_\gamma(\bar{\phi}(b), r_{\gamma\alpha}(b)g)$, para todo $U_\alpha \cap \bar{\phi}^{-1}U'_\gamma$, $g \in G$.* ■

Proposición 1.17 *(i) Si $\bar{\xi} = \{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ es un conjunto de funciones de transición para el espacio B y grupo topológico G, entonces existe un G–haz principal $\xi = (E, p, B, G)$ y un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ para ξ tal que $\bar{\xi}$ es el conjunto de funciones de transición para este atlas. (ii) Sean $\xi = (E, p, B, G)$, $\xi' = (E', p', B', G)$ dos G–haces principales con atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, $\{U'_\gamma, \phi'_\gamma\}$ y conjuntos de funciones de transición asociados $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$. Si $r : \bar{\xi} \to \bar{\xi}'$ es un morfismo de conjuntos de funciones de transición, entonces existe un morfismo $\phi : \xi \to \xi'$ de G–haces principales inducido por r.* ■

Teorema 1.18 *Existe una correspondencia uno-uno entre las clases de equivalencia de G–haces principales sobre B y las clases de equivalencia de conjuntos de funciones de transición que puede ser descrita como sigue: si ξ es un G–haz, entonces a la clase de equivalencia de ξ le asignamos la clase de equivalencia $\{\bar{\xi}\}$ de conjuntos de funciones de transición asociado a un atlas de ξ por 1.16(i).*

Demostración. Si $\phi : \xi \to \xi'$ es una equivalencia de G–haces principales, entonces por 1.16(ii) obtenemos un morfismo $r(\phi) : \bar{\xi} \to \bar{\xi}'$ el cual claramente es una equivalencia de conjuntos de funciones de transición puesto que $\bar{\phi} = 1_B$. Así la correspondencia descrita está bien definida.

Supongamos que $\bar{\xi}$ es cualquier conjunto de funciones de transición. Entonces, por la proposición 1.17 obtenemos un G–haz principal ξ y un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de ξ tal que $\bar{\xi}$ es el conjunto de funciones de transición asociado. Así la correspondencia es suprayectiva.

Ahora supongamos que ξ, ξ' son dos G–haces principales tales que sus correspondientes conjuntos de funciones de transición $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ son equivalentes. Sea $r : \bar{\xi} \to \bar{\xi}'$ dicha equivalencia; entonces 1.17(ii) nos da un morfismo $\phi : \xi \to \xi'$ inducido por r. En particular $\bar{\phi} = 1_B$. También se tiene el morfismo $r^{-1} : \bar{\xi}' \to \bar{\xi}$ el cual está dado por $r^{-1} = \{r_{\gamma\alpha}^{-1}\}$. El morfismo asociado $\phi^{-1} : \xi' \to \xi$ de haces es el inverso de ϕ, y así tenemos

$$\phi^{-1} \circ \phi \circ \phi_\alpha(b, g) = \phi^{-1} \circ \phi'_\gamma(b, r_{\gamma\alpha}(b)g) = \phi_\alpha(b, r_{\gamma\alpha}^{-1}(b) r_{\gamma\alpha}(b) g) = \phi_\alpha(b, g)$$

para toda $b \in U_\alpha \cap U'_\gamma$, $g \in G$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\gamma \in \Gamma$, por lo que $\phi^{-1} \circ \phi = 1$. De manera similar $\phi \circ \phi^{-1} = 1$. Por lo tanto, $\xi \simeq \xi'$ y así la correspondencia es inyectiva. ∎

Corolario 1.19 *Si $\phi : \xi \to \xi'$ es un morfismo de G–haces principales sobre B tal que $\bar{\phi} = 1_B$, entonces ϕ es una equivalencia.* ∎

Denotemos por $GL(n, \mathbb{C})$ al grupo de todas las matrices no singulares de $n \times n$ entradas sobre $\mathbb{C}$, el cual es un grupo topológico cuya topología se obtiene de considerarlo como un subconjunto de $\mathbb{C}^{n^2}$.

Supongamos que $\xi = (E, p, B, GL(n, \mathbb{C}))$ es un $GL(n, \mathbb{C})$–haz principal y consideremos a $\mathbb{C}^n$ sobre el cual actua $GL(n, \mathbb{C})$ por la izquierda. Formamos entonces el *haz fibrado asociado* $\xi[\mathbb{C}^n]$ con fibra $\mathbb{C}^n$ como sigue: definimos una acción por la derecha de $GL(n, \mathbb{C})$ en $E \times \mathbb{C}^n$ por $(e, y)g = (eg, g^{-1}y)$ para $g \in GL(n, \mathbb{C})$,

$e \in E$, $y \in \mathbb{C}^n$. Sea $E_{\mathbb{C}^n} = E \times \mathbb{C}^n / GL(n, \mathbb{C})$. Si denotamos por $\{e, y\}$ la imagen de (e, y) en $E_{\mathbb{C}^n}$, entonces $\{eg, y\} = \{e, gy\}$ para $g \in GL(n, \mathbb{C})$. Definamos $\bar{p} : E_{\mathbb{C}^n} \to B$ por $\bar{p}\{e, y\} = p(e)$. Puesto que $p(eg) = p(e)$ para $g \in GL(n, \mathbb{C})$, $\bar{p}$ está bien definida y además es continua.

De la construcción anterior, se tiene la existencia de una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de $GL(n, \mathbb{C})$–haces principales sobre un complejo CW y las clases de equivalencia de haces fibrados asociados con fibra $\mathbb{C}^n$ sobre complejos CW.

Por otra parte, también se tiene que las clases de haces fibrados asociados con fibra $\mathbb{C}^n$ están en biyección con las clases de haces vectoriales sobre un complejo CW. En efecto, sea $\xi[\mathbb{C}^n] = (E_{\mathbb{C}^n}, \bar{p}, B, \mathbb{C}^n)$ el haz fibrado asociado al haz principal $\xi = (E, p, B, GL(n, \mathbb{C}))$. Si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un atlas para ξ definimos entonces un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ para $\xi[\mathbb{C}^n]$ por

$$\psi_\alpha(b, y) = \{\phi_\alpha(b, 1), y\}, b \in U_\alpha, \; y \in \mathbb{C}^n.$$

Entonces ψ_α es una aplicación continua y satisface que $\bar{p} \circ \psi_\alpha = p_{U_\alpha}$. Luego la composición

$$p^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1} \times 1} U_\alpha \times GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{1 \times \rho} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

(donde $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^n$) induce una aplicación $\bar{p}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ la cual es la inversa de ψ_α.

Entonces podemos dar a las fibras una estructura de espacio vectorial y así ψ_α es lineal en las fibras para cada α tomando $r\{e, v\} + s\{e', v'\} = \{e, rv + sg^{-1}v'\}$ si $e'g = e$, $g \in GL(n, \mathbb{C})$, $r, s \in \mathbb{C}$.

Ahora consideremos un haz vectorial $\eta = (E, q, B, \mathbb{C}^n)$, entonces le podemos asociar el haz principal $p : P \to B$ cuya fibra sobre b está dada por $\{(v_1, v_2, \cdots, v_n) \mid \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $q^{-1}(b)\} \equiv V_n(q^{-1}(b))$ (en la sección 1.4 se verá que es un ejemplo de variedades de Stiefel); esto es,

$$p^{-1}(b) = V_n(q^{-1}(b)) = V_n(\mathbb{C}^n) \cong GL(n, \mathbb{C}).$$

Entonces, por la exposición de arriba las clases de $GL(n, \mathbb{C})$–haces principales están en biyección con las clases de haces vectoriales. Finalmente si denotamos por $k_{GL(n,\mathbb{C})}$ las clases de $GL(n, \mathbb{C})$–haces principales, por $Vect_n$ las clases de haces vectoriales de dimensión n y por Υ las clases de conjuntos de funciones de transición asociadas a un atlas del $GL(n, \mathbb{C})$–haz principal, se tiene el siguiente diagrama

$$Vect_n \longleftrightarrow k_{GL(n,\mathbb{C})} \longleftrightarrow \Upsilon.$$

Entonces como consecuencia, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.20 *Existe una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de los haces vectoriales sobre B de dimensión n y las clases de equivalencia de los conjuntos de funciones de transición para B y $GL(n, F)$.* ■

Como en haces vectoriales, existe una construcción análoga para el haz inducido $f^*\xi$ si ξ es un haz principal.

Definición 1.21 *Si $\xi = (E, p, B, G)$ es un G-haz principal sobre B y $f : B' \to B$ es una aplicación, entonces construimos un G–haz principal $f^*\xi$ sobre B' como sigue: sea $E' = \{(b', e) \in B' \times E : f(b') = p(e)\}$. Definimos $p' : E' \to B'$ por $p'(b', e) = b'$. Si definimos $f' : E' \to E$ por $f'(b', e) = e$, entonces el diagrama de abajo conmuta. La G–acción en E' está definida por $(b', e)h = (b', eh)$, $h \in G$. Sea $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ un atlas para ξ. Entonces $\{(f^{-1}U_\alpha, \phi'_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un atlas para $f^*\xi = (E', p', B', G)$, donde $\phi'_\alpha : f^{-1}U_\alpha \times G \to p'^{-1}(f^{-1}U_\alpha)$ está definida por $\phi'_\alpha(b', g) = (b', \phi_\alpha(f(b'), g))$, $b' \in f^{-1}(U_\alpha)$, $g \in G$. Claramente si $\xi \simeq \xi'$ entonces $f^*\xi \simeq f^*\xi'$.*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}.$$

El siguiente resultado también es válido para haces vectoriales.

Proposición 1.22 *Si $\phi : \xi \to \eta$ es un morfismo de haces, entonces existe un morfismo $\psi : \xi \to \bar{\phi}^*\eta$ con $\bar{\psi} = 1_B$; por lo tanto por 1.19 $\xi \simeq \bar{\phi}^*\eta$.*

Demostración. Recordemos que $\bar{\phi}^*\eta = (E', p', B, G)$, donde $E' = \{(b,e) \in B \times E_\eta : \bar{\phi}(b) = p_\eta(e)\}$. Definimos $\psi : E_\xi \to E'$ por $\psi(e) = (p_\xi(e), \phi(e))$. Así $\psi(e)$ está en E', puesto que $p_\eta \circ \phi(e) = \bar{\phi} \circ p_\xi(e)$ para toda $e \in E_\xi$. Claramente $p' \circ \psi = p_\xi$ y $\psi(eh) = (p_\xi(eh), \phi(eh)) = (p_\xi(e), \phi(e)h) = (p_\xi(e), \phi(e))h = \psi(e)h$, $h \in G$. Así ψ es un morfismo de G–haces principales con $\bar{\psi} = 1_B$. ■

1.4 Haz universal

Definición 1.23 *Un $k-$marco en $\mathbb{C}^{k+n}$ es un arreglo de k vectores linealmente independiente de $\mathbb{C}^{k+n}$. La colección de todos los $k-$marcos en $\mathbb{C}^{k+n}$ forman un subconjunto abierto del producto cartesiano $\mathbb{C}^{k+n} \times \cdots \times \mathbb{C}^{k+n}$ (k copias) llamada variedad de Stiefel y se denota por $V_k(\mathbb{C}^{k+n})$ (o $V_{k,k+n}$).*

Definición 1.24 *La variedad Grassmanniana de subespacios de dimensión k de $\mathbb{C}^{k+n}$, denotada por $G_k(\mathbb{C}^{k+n})$, es el conjunto de subespacios de dimensión k de $\mathbb{C}^{k+n}$ con la topología cociente definida por la función canónica*

$$q : V_k(\mathbb{C}^{k+n}) \to G_k(\mathbb{C}^{k+n})$$

que manda a cada k–marco en el k–plano que genera.

Las Grassmannianas son esencialmente una generalización del espacio proyectivo y la demostración de que son variedades es análoga a lo que se hace para los espacios proyectivos. Observemos que $G_1(\mathbb{C}^{k+1}) = \mathbb{CP}^k$, además las inclusiones

$$\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{k+1} \subset \cdots \subset \mathbb{C}^{k+n} \cdots$$

dadas por $(x_1, ..., x_{k+1}) \longmapsto (0, x_1, ..., x_{k+1})$ induce inclusiones

$$G_{k,k} \overset{j}{\hookrightarrow} G_{k,k+1} \overset{j}{\hookrightarrow} \cdots G_{k,k+n} \hookrightarrow \cdots;$$

y así formamos

$$G_k(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{k \leq n} G_k(\mathbb{C}^n).$$

Sea $E_{k,k+n}$ el subespacio que consiste de pares $(V, x) \in G_k(\mathbb{C}^{k+n}) \times \mathbb{C}^{k+n}$, con $x \in V$. Veamos que $\gamma^k(\mathbb{C}^{k+n}) = (E_{k,k+n}, p, G_k(\mathbb{C}^{k+n}), \mathbb{C}^{k+n})$ es un subhaz del haz producto $(G_k(\mathbb{C}^{k+n}) \times \mathbb{C}^{k+n}, p, G_k(\mathbb{C}^{k+n}), \mathbb{C}^{k+n})$. Para ello consideremos la función $\pi : G_k(\mathbb{C}^{k+n}) \times \mathbb{C}^{k+n} \to \mathbb{C}^{k+n}$, donde $\pi(V, x)$ es la proyección ortogonal de x en V, es una aplicación diferenciable. Para $H \subset \{1, 2, \cdots, k+n\}$, un subconjunto de k elementos, tenemos una aplicación lineal $u_H : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{k+n}$ poniendo 0 en cada coordenada que no esté en H. Con estas aplicaciones vamos a probar que $\gamma^k(\mathbb{C}^{k+n}) = (E, p, G_k(\mathbb{C}^{k+n}), \mathbb{C}^{k+n})$ es localmente trivial. Como E es el subespacio de $G_k(\mathbb{C}^{k+n}) \times \mathbb{C}^{k+n}$ que consiste de pares (V, x) con $x \in V$, la fibra sobre V es $\{V\} \times V$, y la estructura de espacio vectorial está determinada por el subespacio V. Sea U_H el subespacio abierto de $G_k(\mathbb{C}^{k+n})$ que consiste de un elemento $V \in G_k(\mathbb{C}^{k+n})$ tal que $\pi(V, -) : u_H(\mathbb{C}^{k+n}) \to V$ es una biyección. Entonces $h_H(V, x) = (V, \pi(V, x))$, y h_H es un isomorfismo el cual es lineal en cada fibra.

Un caso especial de este ejemplo $k = 1$, el haz vectorial canónico $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ sobre $\mathbb{CP}^n = G_1(\mathbb{C}^{n+1})$ es llamado el *haz canónico lineal.*

El haz $\gamma^k(\mathbb{C}^{k+n}) = (E_{k,k+n}, p, G_{k,k+n}, \mathbb{C}^{k+n})$ es *universal* para haces vectoriales sobre complejos CW de dimensión a lo más $n-1$; es decir, si ξ es un haz vectorial complejo sobre el complejo CW B y $f : B \to G_{k,k+n}$ es una aplicación entonces se tiene $f^*\gamma^k(\mathbb{C}^{k+n}) \simeq \xi$. De aquí se sigue que el $GL(k,\mathbb{C})$–haz principal $(E_{k,k+n}, p, G_{k,k+n}, GL(k,\mathbb{C}))$ es *universal* para $GL(k,\mathbb{C})$–haces sobre complejos CW de dimensión a lo más $n-1$. Ahora si tomamos $G_k(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{n\geq 0} G_{k,k+n}$ y $E_{k,\infty} = \bigcup_{n\geq 0} E_{k,k+n}$, ambos con la topología débil y denotamos por $p : E_{k,\infty} \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ la aplicación obvia, entonces los haces $\gamma^k = (E_{k,\infty}, p, G_k(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{C}^k)$ y $(E_{k,\infty}, p, G_k(\mathbb{C}^\infty), GL(k,\mathbb{C}))$ son *universales* para haces vectoriales y $GL(k,\mathbb{C})$–principales para todo complejo CW respectivamente (consultar [3] *p*.203).

Los detalles de la exposición que se hace a continuación pueden consultarse en [2].

Denotemos por $\mathfrak{CW}$ a la categoría de complejos CW y clases de homotopía de aplicaciones. Denotemos por $\mathfrak{Ens}$ a la categoría de conjuntos y funciones.

Denotemos por $Vect_k(B)$ al conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales de dimensión k sobre B. Para un haz ξ de dimensión k, denotemos por $\{\xi\}$ la clase en $Vect_k(B)$ determinada por ξ. Si $[f] : B_1 \to B$ es una clase de homotopía de aplicaciones entre espacios paracompactos, definimos una función

$$Vect_k([f]) : Vect_k(B) \to Vect_k(B_1)$$

por la relación $Vect_k([f])(\{\xi\}) = \{f^*(\xi)\}$, la cual es una aplicación bien definida.

Proposición 1.25 *$Vect_k : \mathfrak{CW} \to \mathfrak{Ens}$ es un cofuntor.*

Demostración. Puesto que $1^*(\xi)$ y ξ son haces equivalentes sobre B, la función $Vect_k([1])$ es la identidad. Si $[f] : B_1 \to B$ y $[g] : B_2 \to B_1$ son dos clases de homotopía de aplicaciones, $g^*(f^*(\xi))$ y $(f \circ g)^*(\xi)$ son haces equivalentes sobre B_2 y en consecuencia $Vect_k([f][g]) = Vect_k([g]) \circ Vect_k([f])$. Por lo tanto, $Vect_k$ es un cofuntor. ■

Además, sabemos que $[-, G_k(\mathbb{C}^\infty)]$ es también un cofuntor.

Para cada B, definimos una función $\phi_B : [B, G_k(\mathbb{C}^\infty)] \rightarrow Vect_k(B)$ por la relación $\phi_B([f]) = \{f^*(\gamma^k)\}$, la cual está bien definida y da lugar a una transformación natural ϕ. El siguiente teorema, junto con la definición de $Vect_k$ y ϕ_B, nos lleva a la clasificación homotópica de haces vectoriales.

Teorema 1.26 *$\phi : [-, G_k(\mathbb{C}^\infty)] \rightarrow Vect_k$ es una equivalencia de cofuntores.* ■

Así, el problema de clasificación de haces vectoriales; es decir, el cálculo de $Vect_k(B)$, ha sido reducido al cálculo de conjuntos de clases de homotopía de aplicaciones; es decir, los conjuntos $[B, G_k(\mathbb{C}^\infty)]$.

Finalmente, recordemos que en la sección **1.3** vimos la existencia de una correspondencia biyectiva entre los haces vectoriales de dimensión k y los $GL(k, \mathbb{C})$–haces principales.

Observación 1.27 *Observemos que se tienen resultados análogos cuando en lugar de tomar haces complejos consideramos haces reales obteniéndose de esta forma la Grassmanniana real y la variedad de Stiefel real denotadas por $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ y $V_k(\mathbb{R}^{n+k})$.*

Por otro lado, denotemos por $O(n, F)$ a $O(n)$ o $U(n)$ y consideremos el siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en [3]

Proposición 1.28 *$O(n, F)$ es un retracto fuerte por deformación de $GL(n, F)$ para $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y para toda $n \geq 1$.* ■

Por lo tanto, al clasificar los haces vectoriales también hemos clasificado $O(n)$ y $U(n)$–haces principales.

Observación 1.29 *Generalmente $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ y $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ son denotados por $BO(k)$ y $BU(k)$ respectivamente.*

1.5 Teoría de Mayer-Vietoris para funtores de homología y cohomología

A continuación desarrollaremos la ya bien conocida teoría de Mayer Vietoris de una forma muy general.

Definición 1.30 *. Un funtor (co-)homológico en una categoría $\mathfrak{C}$ consiste de una sucesión de (co-)funtores $h=\{h_q\}_{q\in Z}$ y una sucesión de transformaciones naturales $\partial = \{\partial_q\}_{q\in Z}$ tal que*

(i) $h_q : \mathfrak{C}^{(2)} \to \mathfrak{U}$ donde $\mathfrak{C}^{(2)}$ es la categoría cuyos objetos son los morfismos $X \to Y$ en $\mathfrak{C}$ y un morfismo $\varphi : f \to f'$ de objetos de $\mathfrak{C}^{(2)}$ $f : X \to Y$ y $f' : X' \to Y'$ es un par de morfismos $h : X \to X'$, $h' : Y \to Y'$ tales que $f' \circ h = h' \circ f$ y, $\mathfrak{U}$ es una categoría abeliana;

(ii) los morfimos ∂_q están definidos en la categoría $\mathfrak{C}^{(3)}$ de todos los diagramas $X \to Y \to Z$ en $\mathfrak{C}$, y ellos son de la forma $\partial_q : h_q(Y \to Z) \to h_{q-1}(X \to Y)$;

(iii) para todo terna $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en $\mathfrak{C}$ la sucesión

$$\begin{aligned} \ldots \to h_{q+1}(Y \to Z) \xrightarrow{\partial_{q+1}} h_q(X \to Y) \xrightarrow{h(1_X,g)} h_q(X \to Z) \to \\ \xrightarrow{h(f,1_Z)} h_q(Y \to Z) \xrightarrow{\partial_q} h_{q-1}(X \to Y) \to \ldots \end{aligned}$$

es exacta. Cuando no se especifique el morfismo que da lugar a alguna flecha, entenderemos que se trata del morfismo obvio; por ejemplo, en el caso de la sucesión anterior, $h(X \to Y) \xrightarrow{h(1_X,g)} h(X \to Z)$ es inducido por el morfismo vertical en

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle 1_X}\| & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{g\circ f} & Z \end{array}$$

Observación 1.31 *Nótese que para todo objeto $X \in Ob(\mathfrak{C})$ obtenemos de la sucesión exacta para $X \to X \to X$ que $h(X \to X) = 0$.*

Por otra parte, recordemos que el cilindro de una aplicación $h : A \to B$, denotado por $cil(h)$, se define por: $cil(h) \equiv A \times I \cup_h B$, teniéndose además un diagrama conmutativo como el siguiente

$$\begin{tikzcd} & cil(h) \arrow[d, "r"] \\ A \arrow[ur, "l"] \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

donde r es una equivalencia homotópica y l es la inclusión. Si $h' : A' \to B'$ es otra aplicación y $\psi : A \to A'$, $\psi' : B \to B'$ es un par de aplicaciones tal que $\psi' \circ h = h' \circ \psi$, entonces de la definición de $cil(h)$ y $cil(h')$ y del par (ψ, ψ') se puede obtener una aplicación entre ellos a la que denotaremos por

$$\begin{array}{c} A \hookrightarrow A \times I \cup_h B \equiv cil(h) \\ \downarrow \overline{(\psi,\psi')} \\ A' \hookrightarrow A' \times I \cup_{h'} B' \equiv cil(h') \end{array} .$$

Observación 1.32 *Recordemos que un funtor de (co-)homología (en el sentido usual) está dado por $H_q : \mathfrak{Top}_2 \to \mathfrak{U}$, donde $\mathfrak{Top}_2$ denota la categoría cuyos objetos son las parejas de espacios topológicos (Z, Y) con X subespacio de Y y, un morfismo entre un par de objetos (Z, Y), (Z', Y') es una aplicación $h : Z \to Z'$ tal que $h(Y) \subset Y'$. Veamos ahora que H_q induce un funtor $h_q : \mathfrak{Top}^2 \to \mathfrak{U}$. Sean $X \xrightarrow{f} Y$ y $X' \xrightarrow{f'} Y'$ un par de objetos en $\mathfrak{Top}^2$ y (φ, φ') un morfismo entre ellos, entonces definimos $h_q(X \xrightarrow{f} Y) \equiv H_q(cil(f), X)$ y $h_q(\varphi, \varphi') : h_q(X \xrightarrow{f} Y) \to h_q(X' \xrightarrow{f'} Y')$ está dado por $H_q\ \overline{(\varphi, \varphi')}$: $H_q(cil(f), X) \to H_q(cil(f'), X')$.*

Ahora vamos a verificar que h_q satisface las propiedades 1.30 (i), (ii) y (iii). Consideremos primero una terna $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \overset{j}{\hookrightarrow} Z$ dada por inclusiones, la cual da origen a la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \to h_{q+1}(Y \hookrightarrow Z) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} h_q(X \hookrightarrow Y) \xrightarrow{h(j,1_X)} h_q(X \hookrightarrow Z) \to$$
$$\xrightarrow{h(1_Z,i)} h_q(Y \hookrightarrow Z) \xrightarrow{\Delta_q} h_{q-1}(X \hookrightarrow Y) \to \cdots$$

y considerando la observación anterior, ésta coincide con la sucesión exacta para terna (Z,Y,X) respecto al funtor H_q.

Consideremos ahora una terna arbitraria $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, a partir de esta terna debemos conseguir otra que sea la adecuada para aplicarle el funtor H_q. Si tomamos el cilindro de estas aplicaciones obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & cil(f) \arrow[d, "r_1", "\simeq"'] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & cil(g) \arrow[d, "r_2", "\simeq"'] \\ Y \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd},$$

y ahora si tomamos el cilindro de la aplicación $(\overline{f,g})$: $cil(f) \to cil(g)$ obtenemos otro diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & cil((\overline{f,g})) \arrow[d, "r_3", "\simeq"'] \\ cil(f) \arrow[ur, "(\widetilde{i,j})"] \arrow[r, "(\widetilde{f,g})"'] & cil(g) \end{tikzcd}$$

donde $(\overline{i,j})$ es la inclusión inducida por las inclusiones i y j. Hagamos de estos tres diagramas uno solo

$$
\begin{tikzcd}
 & & cil((\overline{f,g})) \arrow[d, "r_3"] \\
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & cil(f) \arrow[r, "\overline{(f,g)}"] \arrow[d, "r_1"'] \arrow[ur, "\overline{(i,j)}"] & cil(g) \arrow[d, "r_2"] \\
 & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "j"] & Z
\end{tikzcd}
.
$$

Finalmente hemos encontrado la terna apropiada, ésta es

$$(cil((\overline{f,g})), cil(f), X)$$

La sucesión exacta correspondiente a esta terna respecto al funtor H_q es la siguiente

$$
\begin{aligned}
H_{q+1}(cil((\overline{f,g})), cil(f)) \overset{\Delta'_{q+1}}{\rightarrow} H_q(cil(f), X) \overset{H(\overline{i,j})}{\rightarrow} \; & H_q(cil((\overline{f,g})), X) \overset{H(\overline{1_{cil(f)} \circ i, 1_{cil(g)}})}{\rightarrow} \\
& H_q(cil((\overline{f,g})), cil(f)) \overset{\Delta'_q}{\rightarrow} H_{q-1}(cil(f), X)
\end{aligned}
$$

Por equivalencia homotópica y considerando la observación anterior, los grupos de la sucesión anterior pasan a ser lo siguiente

$$
\begin{aligned}
& H_{q+1}(cil((\overline{f,g})), cil(f)) \cong H_{q+1}(cil(g), Y) \equiv h_{q+1}(Y \to Z) \\
& H_q(cil(f), X) \equiv h_q(X \to Y) \\
& H_q(cil((\overline{f,g})), X) \equiv h_q(X \to Z)
\end{aligned}
$$

y para los morfismos se tiene que

$$
\begin{aligned}
& H(\overline{i,j}) \simeq H\ (\overline{i, r_2 \circ j}) \simeq H\ (\overline{i,g}) \equiv h(1_X, g) \\
& H\ (\overline{1_{cil(f)} \circ i, 1_{cil(g)}}) \simeq H\ (r_1 \circ 1_{cil(f)} \circ i, \tilde{r}_2 \circ 1_{cil(g)} \circ r_2^{-1}) \simeq H\ (\overline{f, 1_Z}) \equiv h(f, 1_Z)
\end{aligned}
$$

y dado que $H_{q+1}(cil((\overline{f,g})), cil(f)) \equiv h_{q+1}(Y \to Z)$ y $H_q(cil(f), X) \equiv h_q(X \to Y)$, entonces Δ'_{q+1} se convierte en Δ_{q+1} por definición de esta última. Por lo tanto, hemos obtenido la sucesión exacta de la terna $X \to Y \to Z$ respecto al funtor h_q que era lo que se deseaba. Para conseguir la sucesión exacta de la pareja basta con tomar $Z = \emptyset$.

Observación 1.33 *Basados en el argumento anterior, de ahora en adelante denotaremos a $h(X \to Y)$ por $h(Y, X)$.*

La siguiente proposición nos dice bajo qué condiciones un cierto cuadrado conmutativo resulta ser escisivo.

Proposición 1.34 *Para cualquier cuadrado conmutativo* $\begin{array}{ccc} X_{01} & \to & X_{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{00} & \to & X_{10} \end{array}$ *de morfismos en $\mathfrak{C}$ las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $h(X_{01}, X_{00}) \to h(X_{11}, X_{10})$ *es un isomorfismo,*

(b) $h(X_{10}, X_{00}) \to h(X_{00}, X_{01})$ *es un isomorfismo,*

(c) $h(X_{01}, X_{00}) \oplus h(X_{10}, X_{00}) \to h(X_{11}, X_{00})$ *es un isomorfismo,*

(d) $h(X_{11}, X_{00}) \to h(X_{11}, X_{01}) \oplus h(X_{11}, X_{10})$ *es un isomorfismo.*

Los cuadrados que poseen estas propiedades son llamados *escisivos.*

Demostración. La equivalencia *(a)*$\Leftrightarrow$ (c) se obtiene fácilmente considerando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & h(X_{11}, X_{00}) & \xrightarrow{j} & h(X_{11}, X_{10}) & \xrightarrow{\partial} & h(X_{10}, X_{00}) & \xrightarrow{i} & h(X_{11}, X_{00}) & \to \ldots \\ & {\scriptstyle k}\uparrow & \nearrow_{l} & & & & & & \\ & h(X_{01}, X_{00}) & & & & & & & \end{array}$$

cuyo renglón es la sucesión exacta de $X_{00} \to X_{10} \to X_{11}$. En efecto, supongamos que se cumple (a) y así l es un isomorfismo, tal que $j \circ k = l$ lo que nos permite definir un morfismo $j' = k \circ l^{-1} : h(X_{11}, X_{10}) \to h(X_{11}, X_{00})$ de donde $j \circ j' = j \circ k \circ l^{-1} = l \circ l^{-1} = 1_{h(X_{11}, X_{10})}$ por lo tanto la sucesión exacta corta

$$0 \to h(X_{10}, X_{00}) \xrightarrow{i^*} h(X_{11}, X_{00}) \xrightarrow{j^*} h(X_{11}, X_{10}) \to 0$$

se escinde, luego $h(X_{11}, X_{00}) \cong h(X_{11}, X_{10}) \oplus h(X_{10}, X_{00}) \cong h(X_{01}, X_{00}) \oplus h(X_{10}, X_{00})$. De donde $(a) \Rightarrow (c)$. Para ver el recíproco, fijémonos de nuevo en el diagrama de arriba. Puesto que estamos suponiendo que se cumple (c) entonces tanto i como k son monomorfismos y de la exactitud del renglón resulta que $im\partial = \ker i = 0$ y así tanto tanto j como k son isomorfismos de aquí que l también lo sea y por lo tanto se cumpla (a).

Luego cambiando X_{10} por X_{01} en el mismo diagrama obtenemos por un argumento similar $(b) \Leftrightarrow (c)$. Para demostrar el resto del teorema tomemos el dual de las categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{U}$, así nuestro cuadrado conmutativo tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} X_{01} & \to & X_{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{00} & \to & X_{10} \end{array}$$

luego para el diagrama $X_{00} \leftarrow X_{01} \leftarrow X_{11}$ se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & h(X_{01}, X_{00}) & \xrightarrow{\partial_q} & h(X_{11}, X_{00}) & \to & h(X_{11}, X_{01}) & \to & h(X_{01}, X_{00}) & \to \ldots \\ & & \searrow & \downarrow & & & & & \\ & & & h(X_{11}, X_{10}) & & & & & \end{array}$$

y de este diagrama se obtiene $(a) \Leftrightarrow (d)$ de manera análoga. ■

Observación 1.35 *Según la proposición anterior se tiene que* $\begin{array}{ccc} X_{01} & \to & X_{11} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{00} & \to & X_{10} \end{array}$ *es escisivo si y sólo si* $\begin{array}{ccc} X_{10} & \to & X_{11} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{00} & \to & X_{01} \end{array}$ *lo es.*

A continuación enunciamos un resultado bien conocido y cuya demostración puede encontrarse en [2].

Lema (Barrat-Whitehead) Dado un diagrama de grupos abelianos y morfismos en el cual todos los cuadrados son conmutativos y los renglones son exactos

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \xrightarrow{g_{q+1}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & A_q & \xrightarrow{f_q} & B_q & \xrightarrow{g_q} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} \ldots \\ & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_q} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_q} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_q} & \\ \ldots \xrightarrow{g'_{q+1}} & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & A'_q & \xrightarrow{f'_q} & B'_q & \xrightarrow{g'_q} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} \ldots \end{array}$$

si los γ_q son isomorfismos para toda q, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \to A_q \xrightarrow{\Phi_q} A'_q \oplus B_q \xrightarrow{\Psi_q} B'_q \xrightarrow{\Gamma_q} A_{q-1} \xrightarrow{\Phi_{q-1}} A'_{q-1} \oplus B_{q-1} \to \ldots$$

donde

$$\Phi_q = (\alpha_q \oplus f_q)\Delta$$
$$\Psi_q = \nabla(-f'_q \oplus \beta_q)$$
$$\Gamma_q = \partial_q \circ \gamma_q^{-1} \circ g'_q$$

con $\Delta(x) = (x, x)$ y $\nabla(x, y) = x + y$. ■

Para todo cuadrado escisivo como el de la proposición 1.34 y para toda aplicación $A \to X_{00}$ tenemos los diagramas $A \to X_{10} \to X_{11}$ y $A \to X_{00} \to X_{01}$ con sus respectivas sucesiones exactas

$$\ldots \to h_q(X_{10}, A) \to h_q(X_{11}, A) \to h_q(X_{11}, X_{10}) \xrightarrow{\partial'_q} h_{q-1}(X_{10}, A) \to \ldots$$

y

$$\ldots \to h_q(X_{00}, A) \to h_q(X_{01}, A) \to h_q(X_{01}, X_{00}) \xrightarrow{\partial'_q} h_{q-1}(X_{00}, A) \to \ldots$$

donde $h(X_{11}, X_{10}) \cong h(X_{01}, X_{00})$ por escisión.

Definición 1.36 *Para todo cuadrado escisivo como el de la proposición 1.34 y toda aplicación $A \to X_{00}$ el operador frontera de Mayer-Vietoris $\Delta' = \{\Delta'_q\}$ está dado por la composición*

$$h_q(X_{11}, A) \xrightarrow{l_1} h_q(X_{11}, X_{10}) \overset{k_1}{\cong} h_q(X_{01}, X_{00}) \xrightarrow{\partial'_q} h_{q-1}(X_{00}, A).$$

Proposición 1.37 *Para todo cuadrado escisivo como en la proposición 1.34 y toda aplicación $A \to X_{00}$ la siguiente sucesión es exacta*

$$\begin{aligned} \ldots \xrightarrow{\Delta'_{q+1}} h_q(X_{00}, A) \xrightarrow{\Phi_q} h_q(X_{10}, A) \; &\oplus h_q(X_{01}, A) \xrightarrow{\Psi_q} \\ &\to h_q(X_{11}, A) \xrightarrow{\Delta'_q} h_{q-1}(X_{00}, A) \to \ldots . \end{aligned}$$

Esta sucesión es llamada la *sucesión Mayer-Vietoris* del cuadrado escisivo.

Demostración. La exactitud de esta sucesión se obtiene aplicando el lema 1.5 al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \to & h_q(X_{01}, A) & \overset{g_q}{\to} & h_q(X_{01}, X_{00}) & \overset{\partial_q}{\to} & h_{q-1}(X_{00}, A) & \overset{f_{q-1}}{\to} & h_{q-1}(X_{01}, A) & \to \ldots \\
 & \downarrow^{\beta_q} & & \cong \downarrow^{\gamma_q} & & \downarrow^{\alpha_{q-1}} & & \downarrow^{\beta_{q-1}} & \\
\ldots \to & h_q(X_{11}, A) & \overset{g'_q}{\to} & h_q(X_{11}, X_{10}) & \overset{\partial'_q}{\to} & h_{q-1}(X_{10}, A) & \overset{f'_{q-1}}{\to} & h_{q-1}(X_{11}, A) & \to \ldots . \square
\end{array}$$

Observación 1.38 *Si los papeles de X_{10} y X_{01} son intercambiados, de igual manera podríamos definir a $\Delta'' = \{\Delta''_q\}$ por la composición*

$$h_q(X_{11}, A) \overset{l_2}{\to} h_q(X_{11}, X_{01}) \overset{k_2}{\cong} h_q(X_{10}, X_{00}) \overset{\partial_q^2}{\to} h_{q-1}(X_{00}, A);$$

y así también podríamos conseguir una sucesión exacta si tomamos Δ'' en lugar de Δ'. La pregunta es entonces la siguiente: *son iguales* Δ' y Δ''? La respuesta es "No"; de hecho $\Delta' = -\Delta''$, como se muestra en el siguiente lema cuya demostración es sencilla y puede consultarse en el [2].

Lema 1.39 *Para todo cuadrado escisivo* $\Delta' = -\Delta''$. ■

De aquí en adelante denotaremos al operador frontera de Mayer-Vietoris por Δ. Nótese que para $A = X_{00}$ la sucesión 1.37 se convierte en 1.34 (c). Para $A = \emptyset$ la sucesión en cuestión es llamada sucesión Mayer-Vietoris *absoluta*.

Capítulo 2

Teorías de homología y cohomología para espacios sobre B

2.1 Teorías de homología y cohomología sobre B

Si $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Top}$ es una categoría de espacios topológicos, y $B \in Ob(\mathfrak{Top})$ es un espacio topológico fijo consideremos la categoría $\mathfrak{M}_B$ de $\mathfrak{M}$–espacios sobre B; es decir, la categoría cuyos objetos son aplicaciones continuas $\xi : X \to B$ donde $X \in Ob(\mathfrak{M})$, y cuyos morfismos son aplicaciones continuas $f : X \to X'$ tal que $\xi' f = \xi$ ("aplicaciones sobre B"). Cuando no exista peligro de confusión simplemente escribiremos X en lugar de $\xi : X \to B$.

Definición 2.1 *Una teoría de (co-)homología en $\mathfrak{M}_B$ es un funtor (co-)homológico h en $\mathfrak{M}_B$ con las siguientes dos propiedades.*

CIL: Para cualquier $X \in Ob(\mathfrak{M})$ y cualquier aplicación $\vartheta : X \times [0,1] \to B$ tenemos $h(X \times [0,1], X) = 0$ donde $i_0 : X \to X \times [0,1]$, con $i_0(x) = (x, 0)$.

EXC: Si $\begin{array}{ccc} X_0 & \to & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_0 \cap X_1 & \to & X_1 \end{array}$ es un cuadrado sobre B que consiste de aplicaciones inclusión y si X admite una aplicación continua $\mu : X \to [0,1]$ tal que $\mu \mid X - X_1 = 0$ y $\mu \mid X - X_0 = 1$ entonces el cuadrado es escisivo.

Primero vamos a deducir algunas consecuencias del axioma "cilindro" **CIL** . Abreviamos $h(X,\emptyset) = h(X)$, respectivamente $= h(X;\xi)$ si $\xi : X \to B$ ya ha sido indicado.

Proposición 2.2 *Para cualquier aplicación $X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ sobre B tenemos $h(i_0)$: $h(Y,X) \cong h(Y \times [0,1], X \times [0,1])$. En otras palabras, todo cuadrado conmutativo* $\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times [0,1] \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{i_0} & X \times [0,1] \end{array}$ *sobre B es escisivo.*

Demostración. *Por CIL se tiene que $h(X \times [0,1], X) = 0 = h(Y \times [0,1], Y)$, pero esto es 1.34(b) y así 1.34(a) nos dice que $h(i_0) : h(Y,X) \cong h(Y \times [0,1], X \times [0,1])$.* ■

Proposición 2.3 *Para cualquier aplicación $X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ sobre B tenemos hi_1 : $h(Y,X) \to h(Y \times [0,1], X \times [0,1])$ donde $X \xrightarrow{i_1} X \times [0,1]$, $Y \xrightarrow{i_1} Y \times [0,1]$ con $i_1(x) = (x,1)$. Esto difiere de 2.2 solo por la aplicación de un homeomorfismo sobre B, a saber $t \mapsto 1-t$ con $t \in [0,1]$.* ■

Proposición 2.4 *Si ξ_0, $\xi_1 : X \to B$ son aplicaciones homotópicas entonces $h(X;\xi_0) \cong h(X;\xi_1)$. Similarmente para aplicaciones $X \to Y$ sobre B.*

Demostración. Por hipótesis tenemos la siguiente factorización

$$\xi_0, \xi_1 : X \xrightarrow{i_0, i_1} X \times [0,1] \xrightarrow{\vartheta} B,$$

y dado que $h(X \times [0,1], X) = 0 = h(B,B)$ el diagrama anterior da origen a dos cuadrados escisivos

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{i_0} & X \times [0,1] \\
\xi_0 \downarrow & & \downarrow^{\vartheta} \\
B & \xrightarrow{id} & B
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{i_1} & X \times [0,1] \\
\xi_1 \downarrow & & \downarrow^{\vartheta} \\
B & \xrightarrow{i_1} & B
\end{array}
$$

por lo tanto $h(X,\xi_0) \cong h(X \times [0,1]; \vartheta) \cong h(X;\xi_1)$. ■

Observación 2.5 .*Nótese que el isomorfismo 2.4 podría depender de la homotopía ϑ, digamos $\widetilde{\vartheta}'$: $h(X;\xi_1) \cong h(X;\xi_0)$. Sin embargo, se puede mostrar fácilmente que $\widetilde{\vartheta} = \widetilde{\vartheta}'$ si ϑ y ϑ' son homotópicas relativamente a i_0 y i_1 .*

Proposición 2.6 *Si f_0 y $f_1 : X \to X'$ son aplicaciones sobre B tales que son homotópicas (pero no necesariamente sobre B) entonces $hf_0 = (hf_1)\alpha : hX \to hX'$ para algún automorfismo de hX. Si f_0, f_1 son homotópicas sobre B entonces $\alpha = id$, por lo tanto $hf_0 = hf_1$. Similarmente para $h(Y,X)$ donde $X \to Y$ esta sobre B.*

Demostración. Por hipótesis, podemos hacer la siguiente factorización

$$f_0,\ f_1 : X \xrightarrow{i_0, i_1} X \times [0,1] \xrightarrow{\Theta} X',$$

y esto está sobre B vía los morfismos ξ, $\xi'\Theta$, ξ'; por lo tanto

$$hf_0 = (h\Theta)(hi_0) = h(\Theta)(hi_1)(hi_1)^{-1}(hi_0) = h(f_1)[(hi_1)^{-1}(hi_0)] = (hf_1)\alpha.$$

Si Θ es una homotopía sobre B entonces $\xi'\Theta = \xi'\pi$ donde $\pi : X \times [0,1] \to X$ es la proyección. Así la aplicación π está sobre B, y podemos aplicar h. Pero $\pi i_0 = id = \pi i_1$, implica que $hi_0 = (h\pi)^{-1} = hi_1$ y así $hf_0 = hf_1$. ■

Proposición 2.7 *Si una aplicación $f : X \to X'$ sobre B es también una equivalencia homotópica (pero no necesariamente una equivalencia homotópica sobre B) entonces, $hf : hX \cong hX'$. Similarmente para $h(Y,X)$.*

Demostración. Por hipótesis existe una aplicación $f' : X' \to X$ y $\Theta : X' \times [0,1] \to X'$ con $\Theta \circ i_0 = id$, $\Theta \circ i_1 = ff'$. Ahora vemos a $X' \xrightarrow{i_0} X' \times [0,1] \xrightarrow{\Theta} X'$ sobre B vía $(\xi', \xi'\Theta, \xi')$; luego tomando $X = \emptyset$ en 2.2 se tiene que hi_0 es un isomorfismo así como también lo es $(h\Theta)(hi_0) = h(id)$,por lo tanto $h(\Theta)$ es un isomorfismo. En seguida, vemos a $X' \xrightarrow{i_1} X' \times [0,1] \xrightarrow{\Theta} X'$ sobre B vía $(\xi f', \xi'\Theta, \xi')$, usando $\xi' f = \xi$; luego por un argumento similar al anterior hi_1 y $h\Theta$ son isomorfismos por tanto $h(\Theta)h(i_1) = h(\Theta i_1) = h(ff')$ es un isomorfismo. En particular, hf' es un monomorfismo y hf es un epimorfismo. Pero f' es también una equivalencia homotópica, por lo tanto hf es también monomorfismo y por lo tanto hf es un isomorfismo. ■

Observación 2.8 *Para la suma topológica $X = X_1 \amalg X_2$, como $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ tenemos el siguiente cuadrado escisivo*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \to & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_0 \cap X_1 = \emptyset & \to & X_1 \end{array}$$

de donde

$$h(X_1 \amalg X_2) \cong h(X_1) \oplus h(X_2),$$

y similarmente para $h(Y_1 \oplus Y_2, X_1 \oplus X_2)$. Es decir, las teorías de homología son *aditivas*. Por inducción,

$$h(\amalg_{j \in J} X_j) \cong \bigoplus_{j \in J} hX_j$$

para cualquier conjunto finito J. Si se tiene el isomorfismo anterior para un conjunto infinito J entonces la teoría de homología es llamada *fuertemente adi-*

tiva. Por otro lado, bajo las mismas hipótesis, se tiene un resultado análogo al anterior cuando h es una teoría de cohomología; esto es

$$h(\amalg_{j\in J} X_j) \cong \prod_{j\in J} hX_j$$

y de igual manera diremos que h es una teoría de cohomología fuertemente aditiva cuando el conjunto J sea infinito.

Observación 2.9 *En este trabajo asumiremos (sin mencionarlo) que las teorías de (co-)homología h son fuertemente aditiva.*

2.2 Ejemplos de teorías de homología y cohomología sobre B

E1 Si B es un punto entonces $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}$, y las teorías de homología sobre B son solo las teorías de homología general usuales. ■

E2 Si k es una teoría de homología sobre C , y $\beta : B \to C$ es una aplicación continua entonces $h(Y, X;\ \eta) = k(Y, X;\ \beta \circ \eta)$ es una teoría de homología sobre B. En particular, toda teoría de homología sobre $C = pt$ (es decir, toda teoría de homología general en $\mathfrak{M}$) define una teoría de homología sobre B, vía $B \to C = pt$. En efecto, para verlo simplemente se considera el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Y \\ & {\scriptstyle\eta}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\eta} & \\ & B & \\ & {\scriptstyle\beta}\downarrow & \\ & C & \end{array}$$

■

E3 Si $\pi : A \to B$ es una aplicación continua, y k es una teoría de homología sobre A entonces para toda $\eta : Y \to B$ podemos tomar el pullback $Y \times_B A$, y definir $hY = k(Y \times_B A)$; más generalmente, $h(Y, X) = k(Y \times_B A, X \times_B A)$. Se puede verificar que h así definido, es un funtor homológico con la propiedad de escisión ESC, para verlo basta considerar el siguiente cuadrado que consiste de aplicaciones inclusión

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times_B A & \to & X \times_B A \\ \uparrow & & \uparrow \\ (X_0 \cap X_1) \times_B A & \to & X_1 \times_B A \end{array}$$

,el cual está sobre A; pero en general no se satisface la propiedad CIL. Sin embargo si π es una *fibración* entonces $Y \times_B A \to Y$ es también una fibración, para cualquier $Y \to B$. Si $Y = X \times [0,1]$ entonces $i_0 : X \hookrightarrow X \times [0,1]$ es un retracto fuerte por deformación y, según la *propiedad de levantamiento de homotopía* la aplicación $i_0 \times_B id : X \times_B A \hookrightarrow (X \times_B [0,1]) \times_B A$ es también un retracto por deformación y por 2.7 se tiene que $h(X \times [0,1], X) = k((X \times [0,1]) \times_B A, X \times_B A) = 0$, lo que quiere decir que h satisface CIL. Así h es una *teoría de homología sobre B si π es una fibración.* Además se puede probar fácilmente que si k es una teoría fuertemente aditiva también h lo es. Por otro lado, podría ser que $X \times_B A$ no fuera del tipo de homotopía de un complejo CW a pesar de que X lo fuera; pero si π es una fibración CW; es decir, si la fibra de π tiene el tipo de homotopía de un complejo CW entonces $X \times_B A \to X$ es una fibración en la que cada fibra y espacio base son complejos CW (salvo homotopía), por lo tanto también lo es el espacio total $X \times_B A$. Siempre haremos esta suposición sobre π. ■

2.3 Teorema de comparación para teorías de homología sobre B

Antes de empezar la demostración del resultado que nos interesa, vamos a estudiar el concepto de *telescopio de un* complejo CW, el cual nos será de gran utilidad. Supongamos que Y es un complejo CW, entonces podemos escribir $Y = \bigcup_{q \in \Gamma} Y^q$ con $Y^q \subset Y^{q+1}$, $q > 0$, donde Y^q es el q-esqueleto de Y. Entonces el telescopio TY de la sucesión $... \hookrightarrow Y^{q-1} \hookrightarrow Y^q \hookrightarrow Y^{q-1} \hookrightarrow ...$ está dado por

$$TY = Y^0 \times [0,1] \cup Y^1 \times [1,2] \cup Y^2 \times [2,3] \cup Y^3 \times [3,4] \cup ...$$

el cual también es un complejo CW contenido en $Y \times [0, \infty)$ que satisface que $TY \simeq Y$. Veamos primero que TY es un retracto por deformación de $Y \times [0, \infty)$. En efecto, la inclusión $i : TY \hookrightarrow Y \times [0, \infty)$ está dada por $i(x,t) = (x,t)$ y definamos $r : Y \times [0, \infty) \to TY$ por $r(x,t) = (x, q + t - [t])$ para $x \in Y^q$; luego se verifica que $r \circ i = 1_{TY}$ y $i \circ r \simeq 1_{Y \times [0,\infty)}$, ésta última se obtiene vía la homotopía $H : (Y \times [0, \infty)) \times [0, 1] \to Y \times [0, \infty)$ dada por $H((x,t), s) = (x, t + (q - [t])s)$, lo que implica que $TY \simeq Y \times [0, \infty)$. Por otra parte, Y es un retracto por deformación de $Y \times [0, \infty)$ y así $Y \simeq Y \times [0, \infty)$, por tanto $TY \simeq Y \times [0, \infty) \simeq Y$.

Teorema 2.10 (de Comparación) *Sea $\Phi : h \to j$ una transformación de teorías de (co-)homología fuertemente aditivas en $\mathfrak{M}_B$ donde $\mathfrak{M}$ es la categoría de complejos CW (salvo homotopía). Si $\Phi(pt) : h(pt) \cong j(pt)$ para todo punto $pt \to B$ entonces Φ es una equivalencia, $\Phi : h \cong j$. Si B es conectable por trayectorías entonces es suficiente que $\Phi(pt)$ sea un isomorfo para un punto de B (ver 2.4).*

Demostración. Supongamos que el resultado es válido para el caso absoluto, entonces aplicando el lema del cinco al diagrama formado por las sucesiones exactas de la terna $\emptyset \to A \to Y$ para las teorías h y k resulta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots \to & h(A,\emptyset) & \to & h(Y,\emptyset) & \to & h(Y,A) & \to & h(A,\emptyset) & \to & h(Y,\emptyset) & \to \dots \\
& \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & \\
\dots \to & j(A,\emptyset) & \to & j(Y,\emptyset) & \to & j(Y,A) & \to & j(A,\emptyset) & \to & j(Y,\emptyset) & \to \dots
\end{array}$$

de donde se sigue que $h(Y,A) \cong k(Y,A)$. Así pues, es suficiente probar el resultado para el caso absoluto. Por la proposición 2.7, podemos asumir que Y es un complejo CW (no sólo homotópico a uno). Por inducción sobre q, para $q > 0$, vamos a probar que $\Phi : hY^q \cong jY^q$ donde Y^q es el q–esqueleto. Primero vamos a probar que $h(Y^q, Y^{q-1}) \cong j(Y^q, Y^{q-1})$. En la siguiente discusión usamos el hecho de que una q–celda de Y es homeomorfa a una bola cerrada de dimensión q. Ahora bien, sea B^q una q-bola de Y centrada en c_q y sea D^q la q–bola abierta concéntrica con radio menor que el de B^q, luego denotemos por $S^q = B^q - D^q$ la esfera de dimensión q. Entonces Y^{q-1} es un retracto por deformación de $Y^{q-1} \cup (B^q - D^q)$, y así para todas las q-bolas, entonces Y^{q-1} es un retracto por deformación de $Y^{q-1} \bigcup \bigcup_{q-bolas} (B^q - D^q) = Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q)$ por tanto

$$h_i(Y^q, Y^{q-1}) \cong h(Y^q, Y^q - \bigcup_{q-bolas} D^q) \cong h(Y^q - Y^{q-1}, Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q) - Y^{q-1})$$

donde el primer isomorfismo se tiene porque retracto por deformación implica equivalencia homotópica y el segundo lo tenemos ya que podemos mostrar que para el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
Y^q - \bigcup_{q-bolas} D^q & \to & Y^q \\
\uparrow & & \uparrow \\
Y^q - \bigcup_{q-bolas} D^q - Y^{q-1} & \to & Y^q - Y^{q-1}
\end{array},$$

en donde $Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q) - Y^{q-1} = Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q) \cap (Y^q - Y^{q-1})$, podemos definir una aplicación $\mu : Y^q \to [0,1]$ dada por

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in Y^q - (Y^q - \bigcup_{q-bolas} D^q) \\ f(x) & si\ x \in Y^q - \bigcup_{q-bolas} D^q - Y^{q-1} \\ 1 & si\ x \in Y^q - (Y^q - Y^{q-1}) \end{cases}$$

donde la aplicación $f : Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q) - Y^{q-1} \to [0,1]$ es continua y, dado que los respectivos dominios no se intersectan también lo es μ. Por otro lado, $Y^q - Y^{q-1}$ es la unión de todas las q–bolas, así por aditividad y por 2.4 se tiene la siguiente serie de ismorfismos

$$\begin{aligned} h_i(Y^q - Y^{q-1}, Y^q - (\bigcup_{q-bolas} D^q) - Y^{q-1}) &\cong h_i(\bigcup_{q-bolas} B^q, \bigcup_{q-bolas} (B^q - D^q)) \cong \\ &\cong \bigoplus_{q-bolas} h_i(B^q, B^q - D^q) \cong \bigoplus_{q-bolas} h_i(B^q, S^{q-1}) \end{aligned}.$$

Ahora denotemos por B_+^{q-1} y B_-^{q-1} los hemisferios superior e inferior de la esfera S^{q-1} respectivamente. Por 2.4 tenemos que $h_i(B^q, B_+^{q-1}) = 0$ ya que B^q y B_+^{q-1} son homotópicamente equivalentes a un punto. Consideremos la sucesión exacta para $B_+^{q-1} \to S^{q-1} \to B^q$

$$... \to h_i(B^q, B_+^{q-1}) \to h_i(B^q, S^{q-1}) \to h_{i-1}(S^{q-1}, B_+^{q-1}) \to h_{i-1}(B^q, B_+^{q-1}) \to ...$$

y dado que las homologías de los extremos son *cero* entonces $h_i(B^q, S^{q-1}) \cong h_{i-1}(S^{q-1}, B_+^{q-1})$. A continuación deseamos mostrar que el siguiente cuadrado consistente de aplicaciones inclusión y en el que además claramente $S^{q-2} = B_+^{q-1} \cap B_-^{q-1}$

$$\begin{array}{ccc} B_+^{q-1} & \to & S^{q-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{q-2} & \to & B_-^{q-1} \end{array}$$

es escisivo. En efecto, basta considerar las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} B_+^{q-1} &= S^{q-1} - \overset{\circ}{B}{}_-^{q-1} \\ B_-^{q-1} &= S^{q-1} - \overset{\circ}{B}{}_+^{q-1} \\ S^{q-2} &= S^{q-1} - \overset{\circ}{B}{}_+^{q-1} - \overset{\circ}{B}{}_-^{q-1} \end{aligned},$$

de esta forma se aprecia claramente que $S^{q-1} - B_+^{q-1}$, $S^{q-1} - B_-^{q-1}$, S^{q-2} son disjuntos dos a dos y así podemos definir una aplicación $\mu : S^{q-1} \to [0,1]$ dada por

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \overset{\circ}{B}{}_-^{q-1} \\ f(x) & si\ x \in S^{q-2} \\ 1 & si\ x \in \overset{\circ}{B}{}_+^{q-1} \end{cases},$$

donde la aplicación $f : S^{q-2} \to [0,1]$ es continua y por lo tanto lo es también μ. De esta manera hemos probado que nuestro cuadrado de arriba es escisivo. De aquí que

$$h_i(S^{q-1}, B_+^{q-1}) \cong h_{i-1}(B_-^{q-1}, S^{q-2}) \overset{2.4}{\cong} h_{i-1}(B^{q-1}, S^{q-2})$$

y por tanto

$$h_i(B^q, S^{q-1}) \cong h_i(S^{q-1}, B_+^{q-1}) \cong h_{i-1}(B^{q-1}, S^{q-2})$$

y por iteración

$$h_i(B^q, S^{q-1}) \cong h_{i-q}(pt).$$

Este isomorfismo es natural en h; esto es, conmuta con transformaciones naturales de teorías de homología, así pues dado que $h_i(pt) \cong j_i(pt)$ se tiene que

$$\varphi : h_i(Y^q, Y^{q-1}) \cong j_i(Y^q, Y^{q-1}).$$

Ahora, aplicando φ y usando el paso inductivo $q-1$ (esto es $h(Y^{q-1}) \cong j(Y^{q-1})$)en el diagrama formado por las sucesiones exactas de homología para la terna $\emptyset \to Y^{q-1} \to Y^q$ obtenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \to & h_{i-1}(Y^{q-1}) & \to & h_i(Y^q, Y^{q-1}) & \to & h_i(Y^q) & \to & h_i(Y^{q-1}) & \to & h_{i+1}(Y^q, Y^{q-1}) & \to \ldots \\
 & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\ldots \to & j_{i-1}(Y^{q-1}) & \to & j_i(Y^q, Y^{q-1}) & \to & j_i(Y^q) & \to & j_i(Y^{q-1}) & \to & j_{i+1}(Y^q, Y^{q-1}) & \to \ldots
\end{array}$$

luego por el lema del cinco obtenemos $h(Y^q) \cong j(Y^q)$. Así pues

$$\psi : h(Y) \cong j(Y)$$

es un isomorfismo para todo complejo CW de dimensión finita (es decir $Y^q = Y$). Además por aditividad también es un isomorfismo sobre todas las uniones disjuntas de complejos CW de dimensión finita.

Esto prueba la afirmación si la dimensión de Y es finita, o por aditividad si Y es la unión disjunta de complejos CW de dimensión finita.

Ahora falta demostrar el resultado para un complejo CW en general. Para ello necesitamos del telescopio TY; basándonos en la definición que dimos arriba denotemos por T_IY la unión de todos los $Y^q \times [q, q+1]$ con q impar. Similarmente sea T_PY la unión de todos los $Y^q \times [q, q+1]$ con q par. Tenemos que Y^q es un retracto por deformación de $Y^q \times [q, q+1]$ vía las aplicaciones $Y^q \times [q, q+1] \xrightarrow{r} Y^q \xrightarrow{i} Y^q \times [q, q+1]$ dadas por $(y, t) \mapsto y \mapsto (y, q)$. La homotopía $H : Y^q \times [q, q+1] \times [0, 1] \to Y^q \times [q, q+1]$ dada por $((y, t), s) \mapsto (y, (1-s)t + qs)$ nos muestra que r es una retracción. Así

$$
\begin{aligned}
&T_IY = \bigcup_{q-impar} Y^q \times [q, q+1] \simeq \bigcup_{q-impar} Y^q\\
&T_PY = \bigcup_{q-par} Y^q \times [q, q+1] \simeq \bigcup_{q-par} Y^q\\
&T_IY \cap T_PY = \bigcup_{q-impar} Y^q \times [q, q+1] \cap \bigcup_{q-par} Y^q \times [q, q+1]\\
&= \bigcup_q Y^q \times [q, q+1] \cap Y^{q+1} \times [q+1, q+2],\ (Y^q \subset Y^{q+1})\\
&= \bigcup_q Y^{q+1} \times (q+1) \simeq \bigcup_q Y^{q+1}.
\end{aligned}
$$

Luego por 2.4 y el axioma de aditividad los siguientes isomorfismos de homologías

$$
\begin{aligned}
&h(T_IY) \cong h(\bigcup_{q-impar} Y^q) \cong \bigoplus_{q-impar} h(Y^q)\\
&h(T_PY) \cong h(\bigcup_{q-par} Y^q) \cong \bigoplus_{q-par} h(Y^q)\\
&h(T_IY \cap T_PY) \cong h(\bigcup_q Y^q) \cong \bigoplus_q h(Y^q)\ .
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el siguiente cuadrado conmutativo formado por inclusiones es escisivo

$$
\begin{array}{ccc}
T_PY & \rightarrow & TY\\
\uparrow & & \uparrow\\
T_PY \cap T_IY & \rightarrow & T_IY
\end{array},
$$

ya que podemos definir una función continua $\mu : TY \rightarrow [0,1]$ como sigue

$$
\mu(y,t) = \begin{cases} 0 & si\ (y,t) \in TY - T_PY\\ g(y,t) & si\ (y,t) \in T_PY \cap T_iY\\ 1 & si\ (y,t) \in TY - T_IY \end{cases},
$$

donde $g : T_PY \cap T_iY \rightarrow [0,1]$ es una aplicación continua. Ahora consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris absoluta (es decir, $A = \emptyset$) para el cuadrado escisivo de arriba

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & \bigoplus_q h_i(Y^{q+1}) & \to & \bigoplus_q (Z_q) & \to & h_i(TY) & \to & \bigoplus_q h_{i-1}(Y^{q+1}) & \to & \bigoplus_q (Z_q) & \to \cdots \\
& \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\cdots \to & \bigoplus_q j_i(Y^{q+1}) & \to & \bigoplus_q (W_q) & \to & j_i(TY) & \to & \bigoplus_q j_{i-1}(Y^{q+1}) & \to & \bigoplus_q (W_q) & \to \cdots
\end{array}$$

donde $Z_q = h_i(Y^{2q+1}) \oplus h_i(Y^{2q})$ y $W_q = j_i(Y^{2q+1}) \oplus j_i(Y^{2q})$. Los cuatro isomorfismos del diagrama de arriba se obtienen porque el resultado es válido para complejos CW de dimensión finita o unión de ellos. Por tanto por el lema del cinco se obtiene que $h_i(TY) \cong j_i(TY)$ esto es $h_i(Y) \cong j_i(Y)$. Lo que concluye la demostración de este teorema. ■

2.3.1 La teoría de cobordismo como ejemplo de una teoría de homología generalizada

A continuación vamos a estudiar la teoría de bordismo, la cual resultará ser un ejemplo de una teoría de homología generalizada. En los resultados que se presentan a continuación vamos a suponer que las variedades son diferenciables y compactas y las funciones entre ellas son diferenciables.

Primeramente vamos a definir y a dar propiedades elementales del grupo de Thom que denotaremos por $\mathfrak{N}_n$. Dado un par de variedades cerradas de dimensión n, M_1 y M_2,denotaremos por $M_1 \sqcup M_2$ a la unión disjunta de M_1 y M_2.

Decimos que una variedad cerrada es borde si y sólo si existe una variedad V de dimensión $n+1$ para la cual ∂V es difeomorfo a M. Dos variedades cerradas M_1 y M_2 son *bordantes* si y sólo si la unión disjunta $M_1 \sqcup M_2$ es borde. La relación de bordismo es una relación de equivalencia sobre las clases difeomorfas de n-variedades cerradas y denotamos por $\mathfrak{N}_n$ al conjunto de clases de equivalencia; el cual resulta ser un grupo abeliano con la suma inducida por la unión disjunta, además todo elemento en $\mathfrak{N}_n$ tiene orden 2. La suma directa $\mathfrak{N}_* = \oplus\mathfrak{N}_n$, es un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{Z}_2$ (esto vía productos cartesianos).

Sea (X, A) una pareja de complejos CW, entonces una *variedad singular* en (X, A) es una pareja (V, f) que consiste de una variedad V de dimensión n con frontera ∂V y una aplicación $f : (V, \partial V) \to (X, A)$. Si $A = \emptyset$ entonces $\partial V = \emptyset$. Decimos que una variedad singular (V, f) en (X, A) es borde si y sólo si existe una variedad W de dimensión $n+1$ y una aplicación $F : W \to X$ tales que:

(i) V está contenida en W como una subvariedad;

(ii) $F/V = f$ y $F(\partial W \backslash V) \subset A$.

Dadas dos variedades singulares (V_1, f_1) y (V_2, f_2) definimos la unión disjunta como $(V_1 \sqcup V_2, f_1 \sqcup f_2)$ donde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $f_1 \sqcup f_2/V_1 = f_1$ y $f_1 \sqcup f_2/V_1 = f_2$. Decimos entonces que (V_1, f_1) y (V_2, f_2) son bordantes si y sólo la unión disjunta $(V_1 \sqcup V_2, f_1 \sqcup f_2)$ es borde en (X, A). Se puede probar que la relación de bordismo es de equivalencia.

Denotamos la clase de bordismo de (V, f) por $[V, f]$, y la colección de estas clases de bordismo por $\mathfrak{N}_n(X, A)$. Podemos dar una estructura de grupo abeliano a $\mathfrak{N}_n(X, A)$ definiendo

$$[V_1, f_1] + [V_2, f_2] = [V_1 \sqcup V_2, f_1 \sqcup f_2].$$

Con esta operación cada elemento tiene orden 2 de modo que $\mathfrak{N}_n(X, A)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$.

Existe una estructura de $\mathfrak{N}_*$–módulo definida sobre la suma directa $\mathfrak{N}_*(X, A) = \oplus\mathfrak{N}_n(X, A)$. En efecto, sean (V, f) una variedad singular en (X, A) y M una variedad cerrada de dimensión m, entonces formamos una nueva variedad singular $(V\times M, g)$ donde g está dada por $g(x,y)=f(x)$. Tenemos entonces que

$$[V,f][M]=[V\times M,g].$$

define sobre $\mathfrak{N}_*(X,A)$ la estructura de un $\mathfrak{N}_*$–módulo graduado derecho.

Dada una aplicación $\varphi:(X,A)\to(X_1,A_1)$ existe un homomorfismo natural inducido $\varphi_*:\mathfrak{N}_n(X,A)\to\mathfrak{N}_n(X_1,A_1)$ el cual se define por

$$\varphi_*[V,f]=[V,\varphi f].$$

Existe también el homomorfismo $\partial:\mathfrak{N}_n(X,A)\to\mathfrak{N}_{n-1}(A)$ el cual está dado por

$$\partial[V,f]=[\partial V,f\mid\partial V].$$

Se puede ver fácilmente que ∂ está bien definido y es aditivo. En efecto, $\varphi_*:\mathfrak{N}_*(X,A)\to\mathfrak{N}_*(X_1,A_1)$ y $\partial:\mathfrak{N}_*(X,A)\to\mathfrak{N}_*(A)$ son homomorfismos de $\mathfrak{N}_*$–módulos de grado 0 y -1 respectivamente.

Por lo anterior tenemos un funtor covariante $\{\mathfrak{N}_*(X,A),\varphi_*,\partial\}$ definido sobre la categoría de parejas de complejos CW y aplicaciones. Deseamos mostrar que este funtor es una teoría de homología generalizada.

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [14].

Lema 2.11 *Supongamos que P y Q son subconjuntos cerrados disjuntos de la variedad de dimensión n V. Existe una subvariedad topológica compacta $V_1\subset V$ con $P\subset V_1$, $Q\cap V_1=\emptyset$ y V_1 cerrada en V. Además a V_1 se le puede dar una estructura diferenciable.* ■

Teorema 2.12 *El funtor de bordismo $\{\mathfrak{N}_*(X,A),\varphi_*,\partial\}$ definido sobre la categoría de las parejas de complejos CW y aplicaciones satisface los primeros seis axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de homología.*

(i) Si $i : (X, A) \to (X, A)$ es la aplicación identidad entonces $i_* : \mathfrak{N}_n(X, A) \to \mathfrak{N}_n(X, A)$ es el automorfismo identidad.

(ii) Si $\varphi : (X, A) \to (X_1, A_1)$ y $\psi : (X_1, A_1) \to (X_2, A_2)$ son aplicaciones entonces $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.

(iii) Para cualquier aplicación $\varphi : (X, A) \to (X_1, A_1)$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \mathfrak{N}_{n-1}(A) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow (\varphi|A)_* \\ \mathfrak{N}_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \mathfrak{N}_{n-1}(A) \end{array}$$

(iv) Si $\varphi_0, \varphi_1 : (X, A) \to (X_1, A_1)$ son homotópicas entonces $\varphi_{0_*} = \varphi_{1_*}$.

(v) Para cualquier pareja (X, A) la sucesión de abajo es exacta

$$\cdots \to \mathfrak{N}_n(A) \xrightarrow{i_*} \mathfrak{N}_n(X) \xrightarrow{j_*} \mathfrak{N}_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_{n-1}(A) \to \cdots$$

(vi) Si $\bar{U} \subset int(A)$, entonces la inclusión $i : (X \backslash U, A \backslash U) \subset (X, A)$ induce un isomorfismo

$$i_* : \mathfrak{N}_n(X \backslash U, A \backslash U) \to \mathfrak{N}_n(X, A).$$

Sin embargo, para un punto tenemos $\mathfrak{N}_n(pt) \cong \mathfrak{N}_n$, el grupo de Thom.

Demostración. Los primeros tres axiomas se pueden verificar fácilmente. Demostremos entonces el resto de los axiomas

(iv) Sea $h(I \times X, I \times A) \to (X_1, A_1)$ una homotopía entre φ_0 y φ_1. Para (V, f) una variedad singular en (X, A) definamos $\psi(t, x) = h(t, f(x))$; entonces $\psi(0, x) = \varphi_0 f(x)$ y $\psi(1, x) = \varphi_1 f(x)$. Ahora, $I \times V$ es una variedad $\partial(I \times V) = (\partial I \times V) \cup (I \times \partial V)$.

Por lo que la unión disjunta $\{1\} \times V \sqcup \{0\}$ es una subvariedad de la frontera y $\psi(I \times \partial V) \subset A_1$. Por lo tanto $[V, \varphi_0 f] = [V, \varphi_1 f]$ como lo deseábamos.

Antes de probar la exactitud observemos que si $U \subset M$ es una subvariedad de dimensión n con frontera de una variedad cerrada M y $f : M \to X$ es una aplicación tal que $f(M \backslash int(U)) \subset A$, entonces $[M, f] = [U, f \mid U]$ en $\mathfrak{N}_n(X, A)$. Esto lo podemos ver de la siguiente manera: Sea $F : I \times M \to X$ dada por $F(t, x) = f(x)$. Ahora $\partial(I \times M) = \partial I \times M$ y $\{1\} \times U \sqcup \{0\} \times M$ es una subvariedad de la frontera. Puesto que $F(\{1\} \times (M \backslash int(U))) \subset A$ tenemos $[M, f] = [U, f \mid U]$ en $\mathfrak{N}_n(X, A)$.

(v) Se puede verificar fácilmente que $\partial j_* = 0$. Consideremos $[M, f] \in \mathfrak{N}_n(A)$. Apliquemos la observación anterior a (v) cuando $U = \emptyset$ para ver que $j_* i_* [M, f] = 0$ en $\mathfrak{N}_n(X, A)$. Enseguida consideremos $[U, f] \in \mathfrak{N}_n(X, A)$ la cualtambién es un elemento del kernel de ∂. Entonces por definición existe una variedad V y una aplicación $g : V \to A$ con $\partial V = \partial U$ y $g \mid \partial V = f \mid \partial U$. Identificamos U y V a lo largo de su frontera común para obtener una variedad cerrada M y una aplicación $F : M \to X$ con $F \mid U = f$ y $F \mid V = g$. Así $[M, f] \in \mathfrak{N}_n(X)$ y, la igualdad $j_*[M, f] = [U, f]$ en $\mathfrak{N}_n(X, A)$ se sigue de la observación anterior a (v). La prueba del resto de la exactitud es sencilla.

(vi) Sólo vamos a mostrar que i_* es un epimorfismo. Sea (V, f) una variedad singular en (X, A). Sea $P = f^{-1}(X \backslash int(A))$ y $Q = f^{-1}(\bar{U})$. Por el lema 2.11 existe una subvariedad topológica $V_1 \subset V$ con $P \subset V_1$ y $V_1 \cap Q = \emptyset$. Además a V_1 se le puede dar una estructura diferenciable. Ahora $[V_1, f \mid V_1]$ se encuentra en $\mathfrak{N}_n(X \backslash U, A \backslash U)$ y al igual que en la observación anterior a (v) se sigue que $i_*[V_1, f \backslash V_1] = [V, f]$ en $\mathfrak{N}_n(X, A)$. ■

Existe una relación entre teoría de bordismo y teoría de homología singular. Más precisamente existe una relación canónica dada por el homomorfismo de Thom

$$\mu : \mathfrak{N}_n(X, A) \to H_n(X, A; \mathbb{Z}_2).$$

Dado $[V, f] \in \mathfrak{N}_n(X, A)$ existe por definición una aplicación $f : (V, \partial V) \to (X, A)$ y denotemos por $\sigma(V) \in H_n(V, \partial V; \mathbb{Z}_2)$ a la clase fundamental de V. Definimos entonces al homomorfismo μ como sigue

$$\mu([V, f]) = f_*(\sigma(V)) \in H_n(X, A; \mathbb{Z}_2)$$

Se puede ver que este homomorfismo está bien definido y además se tiene el siguiente teorema de Thom.

Teorema 2.13 (Thom) *Para cualquier pareja de complejos CW* (X, A), $\mu : \mathfrak{N}_n(X, A) \to H_n(X, A; \mathbb{Z}_2)$ *es un epimorfismo para toda* $n \geq 0$. ■

Capítulo 3

Teorema de Leray-Hirsch y h-orientaciones

3.1 Teoría de cohomología multiplicativa, teorema de Leray-Hirsch y teorema de Künneth para fibraciones.

De ahora en adelante restringimos nuestra atención a las teorías de cohomología en la categoría $\mathfrak{M}$ (homótopicos a complejos CW) con valores en la categoría $\mathfrak{U}$ de grupos abelianos. Supongamos que existen un par de productos que llamaremos *producto cruz (par exterior) y producto cup (par interior)*, y que denotaremos como sigue

$$\begin{aligned} \times : h^m(X,A)\otimes h^n(Y,B) &\to h^{m+n}(X\times Y, X\times B\cup A\times Y) \quad &(\textit{par exterior})\\ \smile: h^m(X,A_1)\otimes h^n(X,A_2) &\to h^{m+n}(X,A_1\cup A_2) \quad &(\textit{par interior}). \end{aligned}$$

(para toda m, n) los cuales son compatibles en el siguiente sentido con el operador frontera δ. Si $u\in h^m(X,A)$ y $v\in h^n(Y,B)$ entonces se puede verificar que $\delta(u \times v) = (\delta u) \times v + (-1)^m u \times \delta v$; de igual manera para $u' \in h^m(X, A_1)$ y $v' \in h^n(X_2, A_2)$ se tiene que $\delta(u' \smile v') = (\delta u') \smile v' + (-1)^m u' \smile \delta v'$. Esta compatibilidad así como la definición de los productos se tiene solamente para pares (X, A), (Y, B) tales que $h(X \times B \cup A \times Y, X \times B) \cong h(A \times Y, A \times B)$;

es decir, si el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \times Y \arrow[r] & X \times B \cup A \times Y, X \times B \\ A \times B \arrow[u] \arrow[r] & X \times B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

es escisivo (ver [5]).

Los productos interior y exterior están relacionados por $u' \smile v' = \Delta^*(u' \times v')$ respectivamente $u \times v = (p^* u) \smile (q^* v)$, donde p y q son las proyecciones, y Δ es la aplicación diagonal. Podemos por lo tanto restringir nuestra atención a uno de ellos. Los pares interior y exterior son *asociativos, conmutativos* y tienen un *unidad* $1 \in h^0(pt)$ en el sentido obvio.

Asociatividad para el producto cruz (exterior). Sean $u \in h^m(X, A)$, $v \in h^n(Y, B)$ y $w \in h^r(Z, C)$. Entonces

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$$

siempre y cuando se tengan los cuadrados escisivos apropiados para que los productos cruz estén definidos.

Asociatividad para el producto cup (interior). Sean $u \in h^m(X, A_1)$, $v \in h^n(X, A_2)$ y $w \in h^r(X, A_3)$. Entonces

$$u \smile (v \smile w) = (u \smile v) \smile w$$

siempre y cuando asumamos que se tienen los cuadrados escisivos para que todo esté bien definido.

Conmutatividad para el producto cruz. Sean $u \in h^m(X, A)$ y $v \in h^n(Y, B)$. Entonces

$$t^*(u \times v) = (-1)^{mn} v \times u,$$

donde $t : (Y, B) \times (X, A) \to (X, A) \times (Y, B)$ está definida por $t(y, x) = (x, y)$. Por supuesto asumimos que tiene el isomorfismo $h(X \times B \cup A \times Y, X \times B) \cong h(A \times Y, A \times B)$.

Conmutatividad para el producto cup. Sea $u \in h^m(X, A_1)$ y $v \in h^n(X, A_2)$. Entonces

$$u \smile v = (-1)^{mn} v \smile u$$

siempre que el cuadrado
$$\begin{array}{ccc} A_1 & \to & A_1 \cup A_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \emptyset & \to & A_2 \end{array}$$
sea escisivo.

Así todo $h(X)$ es un anillo graduado con unidad, y todo $h(X, A)$ es un $h(X)$–módulo (de hecho álgebra pero por lo general sin unidad). Más generalmente, si $f : X \to Y$ es una aplicación entonces todo $h(Y, B)$, $h(X, A)$ es un $h(Y)$–módulo, y toda aplicación entre ellos es un homomorfismo de módulos. En particular, si tomamos $Y = pt = a$ un punto entonces todo $h(X, A)$ se convierte en un Λ–módulo donde $\Lambda = h(pt)$, y toda aplicación entre ellos es un Λ–homomorfismo. Más precisamente, esto significa que el funtor h se factoriza a través de la categoría de Λ–módulos. Los productos $\times$ y $\smile$ se factorizan mediante $\otimes_\Lambda$, así $h^m(X, A_1) \otimes_\Lambda h^n(X, A_2) \to h^{m+n}(X, A_1 \cup A_2)$. En este caso, h es llamada una teoría multiplicativa en $\mathfrak{M}$.

Teorema 3.1 (Leray-Hirsch) *Sea h una teoría multiplicativa (fuertemente aditiva) en $\mathfrak{M}$, y sea $p : E \to B$ una fibración cuyo espacio base B y fibra $F = p^{-1}(b_0)$ son complejos CW (salvo homotopía); sea B conexo. Asumamos que la aplicación restricción $i^* : hE \to hF$ tiene un Λ–inverso por la derecha $\rho : hF \to hE$. Sea φ la siguiente composición*

$$h^j B \otimes_\Lambda h^n F \xrightarrow{p^* \otimes \rho} h^j(E) \otimes_\Lambda h^n(E) \xrightarrow{\smile} h^{j+n}(E).$$

Entonces φ es un isomorfismo siempre que:

(i) *hF es un Λ–módulo plano; es decir, para toda sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$* de Λ–módulos se tiene que las sucesiones

$$0 \to A \otimes_\Lambda hF \to B \otimes_\Lambda hF \to C \otimes_\Lambda hF \to 0$$
$$0 \to hF \otimes_\Lambda A \to hF \otimes_\Lambda B \to hF \otimes_\Lambda C \to 0$$

son también exactas.

(ii) *B es un complejo CW finito (salvo homotopía) o hF es un Λ–módulo finitamente presentable.*

De manera similar, se tiene $hB \otimes_\Lambda h(F, F') \cong h(E, E')$ para pares fibrados que satisfacen condiciones análogas.

Demostración. Para toda aplicación $X \to Y$ sobre B se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \times_B E & \to & Y \times_B E & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y & & B \end{array}$$

y por lo tanto un homomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi: \ & h(Y, X) \otimes_\Lambda hF \xrightarrow{id \otimes \rho} h(Y, X) \otimes_\Lambda hE \to \\ & \to h(Y \times_B E, X \times_B E) \otimes_\Lambda h(Y \times_B E) \xrightarrow{\cup} h(Y \times_B E, X \times_B E) \end{aligned}$$

y si $(Y, X) = (pt, \emptyset)$ ésta composición es un isomorfismo, por ser ρ un Λ–inverso por la derecha de i^*. El término de la derecha es una teoría de cohomología sobre B. En efecto, dado que h es una teoría multiplicativa sobre $\mathfrak{M}$ se tiene por 2.2 que define una teoría de cohomología sobre E y, por 2.2 y el cuadrado de arriba concluimos que el término de la derecha del diagrama anterior es una teoría de cohomología sobre B. Si mostramos que el término de la izquierda es también una teoría de cohomología sobre B entonces 2.10

implicaría que Φ es una equivalencia, y esta afirmación se tiene poniendo $Y = B$, $X = \emptyset$. Las únicas propiedades de una teoría de cohomología que son cuestionables son la exactitud y la aditividad fuerte. La primera se tiene por *(ii)*, y la aditividad fuerte se tiene porque hF es un Λ–módulo plano y finitamente presentable. ∎

Corolario 3.2 (Fórmula de Künneth) *Si B y F satisfacen las propiedades (i) y (ii) de 3.1 entonces $\times : hB \otimes_\Lambda hF \cong h(B \times F)$, como Λ–álgebras.*

Demostración. En efecto, tenemos la fibración trivial $p : B \times F \to B$ y la proyección $q : B \times F \to F$ induce una aplicación $\rho = q^*$ y así, según 3.1 se tiene el isomorfismo $\varphi : h^j B \otimes_\Lambda h^n F \cong h^{j+n}(B \times F)$ el cual coincide con $\times$. ∎

3.2 h-orientaciones.

Si h es cualquier teoría de cohomología en $\mathfrak{M}$, y (F, F^0) es un par de espacios tal que $(F, F^0) \approx (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ la cual tiene la cohomología de (S^n, pt). Así $h^{j+n}(F, F^0) \cong h^{j+n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \cong h^{j+n}(S^n, pt) \cong h^j(pt)$. Este isomorfismo está bien definido salvo signo (automorfismos de $\mathbb{R}^n$ de grado -1 cambian signo). Si h es una teoría multiplicativa, como lo asumiremos siempre de ahora en adelante , entonces $h(F, F^0) \cong h(pt) \cong \Lambda$ es un isomorfismo de Λ-módulos; es decir el Λ-módulo $h(F, F^0)$ es generado libremente por un elemento bien definido (salvo signo) $s = s(F, F^0)$ de grado n correspondiente al $1 \in h^0(pt)$.

En particular, si $p : E \to B$ es una haz vectorial de rango n, y $E \subset E^0$ consiste de todos los vectores no cero, entonces el par fibrado $(F, F^0) \approx (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ de (p, p^0) tiene un generador libre bien definido (salvo signo) $s \in h^n(F, F^0)$. Los resultados de esta sección están formulados solamente para haces vectoriales. Sin embargo, es claro que también son válidos para pares fibrados mucho más generales. Esencialmente lo que necesitamos es que $h(F, F^0) \cong \Lambda$.

Definición 3.3 *Una h-orientación (o clase de Thom) de un n-haz (sobre un complejo CW B) es un elemento $U \in h^n(E, E^0)$ tal que $U \mid (F, F^0) = \pm s$, para todas las fibras (si B es conexo solamente se necesita una fibra).*

Teorema 3.4 (Isomorfismo de Thom) *Si U es una orientación, entonces se satisfacen las hipótesis de 3.1 y así $h^{j+n}(E, E^0) \cong h^j(B) \otimes_\Lambda h^n(F, F^0) \cong h^j(B)$; más precisamente, denotemos por $\psi^* : h^j(B) \overset{\cong}{\to} h^{j+n}(E, E^0)$ así la imagen de un elemento $x \in h^j(B)$ está dada por $\psi^*(x) = p^*(x) \smile U$ de esta manera el elemento U es un generador libre de $h(E, E^0)$ como un $h(B)$-módulo.* ■

Definición 3.5 *Consideremos la composición $h^n(E, E^0) \xrightarrow{j^*} h^n(E) \xrightarrow{i^*} h^n(B)$, donde la aplicación $i : B \to E$ es la sección cero y $j : (E, \emptyset) \to (E, E^0)$ es la inclusión. Entonces la imagen de U bajo esta composición es llamada la clase de Euler del haz vectorial orientado y la denotaremos por $\chi = \chi(p, U) \in h^n(B)$.*

Corolario 3.6 *Si en la sucesión exacta de (E, E^0)*

$$\ldots \to h^{j-1}(E^0) \to h^j(E, E^0) \to h^j(E) \to h^j(E^0) \to h^{j+1}(E, E^0) \to \ldots$$

sustituimos $p^* : h^j(B) \overset{\cong}{\to} h^j(E)$ y por el isomorfismo de Thom $\psi : h^j(B) \overset{\cong}{\to} h^{j+n}(E, E^0)$, obtenemos la *sucesión de Gysin* que tiene la siguiente forma

$$\ldots \to h^{j-1}(E^0) \to h^{j-n}(B) \xrightarrow{\chi \circ \smile} h^j(B) \xrightarrow{hp^0} h^j(E^0) \to h^{j-n+1}(B) \to \ldots .$$

■

Proposición 3.7 (naturalidad) *.Sean $p_1 : E_1 \to B_1$, y $p_2 : E_2 \to B_2$ haces vectoriales de dimensión n, $f{:}(E_1, E_1^0) \to (E_2, E_2^0)$ un morfismo de haces y sea $\bar{f}{:}B_1 \to B_2$ la aplicación inducida por f. Si U_2 es una orientación para p_2 entonces $U_1 = f^*(U_2)$ es una orientación para p_1, y $\bar{f}^*\chi_2 = \chi_1$ es la clase se Euler correspondiente.*

Demostración. Por hipótesis $U_2 \mid (F_2, F_2^0) = \pm s$ para toda fibra, luego aplicando f^* a $U_2 \mid (F_2, F_2^0)$ obtenemos que

$$f^*(U_2) \mid (F_1, F_1^0) = f^*(U_2 \mid (F_2, F_2^0)) = f^*(\pm s) = \pm f^*(s),$$

y dado que f es un isomorfismo entre fibras entonces $\pm f^*(s)$ es el generador de $h^n(F_1, F_1^0)$. De este modo hemos probado que $U_1 = f^*(U_2)$. Para demostrar el resto de la proposición basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & h(E_2, E_2^0) \arrow[r, "f^*"] \arrow[dl, "hj_2"'] & h(E_1, E_1^0) \arrow[dr, "hj_1"] & \\
h(E_2) \arrow[r, "hi_2"'] & h(B_2) \arrow[u, "p_2^*"] \arrow[r, "\bar{f}^*"'] & h(B_1) \arrow[u, "p_1^*"'] \arrow[r, "hi_1"'] & h(E_1)
\end{tikzcd},$$

de donde se tiene la siguiente serie de igualdades

$$\bar{f}^*(\chi_2) = \bar{f}^*(hi_2 \circ hj_2(U_2)) = hi_1 \circ hj_1 \circ f^*(U_2) = hi_1 \circ hj_1(U_1) = \chi_1.$$

Lo que concluye la demostración del teorema. ■

Proposición 3.8 *Si $p_1 : E_1 \to B$, $p_2 : E_2 \to B$ son haces vectoriales con suma de Whitney $p : E_1 \oplus E_2 \to B$, y si U_1, U_2 son sus respectivas orientaciones entonces $U = U_1 \smile U_2$ es una orientación de p; y su clase de Euler es $\chi_1 \smile \chi_2$.*

Demostración. Denotemos la suma de Whitney por $E = E_1 \oplus E_2$, por E^0 el espacio de vectores no cero y por F^b la fibra sobre b. Además sean

$$F^{0,b} = E^0 \cap F^b \qquad F_1^{0,b} = E_1^0 \cap F_1^b \qquad F_2^{0,b} = E_2^0 \cap F_2^b \ ,$$

también introducimos la siguiente notación

$$E^1 = \bigcup_{e \in B} F_1^{0,b} \times F_1^b \qquad\qquad E^2 = \bigcup_{b \in B} F_1^b \times F_2^{0,b} \ .$$

Luego tenemos los siguientes diagramas conmutativos donde los renglones son inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} E^1 & \to & E & \to & (E,E^1) \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ E_0^1 & \to & E_1 & \to & (E_1,E_1^0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} E^2 & \to & E & \to & (E,E^2) \\ {\scriptstyle r_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ E_2^0 & \to & E_2 & \to & (E_2,E_2^0) \end{array}$$

donde las aplicaciones verticales son proyecciones y r_1, r_2, p_1 y p_2 son equivalencias homotópicas, y así las siguientes aplicaciones son isomorfismos

$$q_1^*: h^*(E_1,E_1^0) \to h^*(E,E^1) \qquad q_2^*: h^*(E_2,E_2^0) \to h^*(E,E^2) \; .$$

Finalmente observemos que $E^0 = E^1 \cup E^2$ ya que

$$\begin{aligned} E^0 &= \bigcup_{b\in B} \{(x,y) \in E_1 \times E_2 : \; p(x) = p(y), \; x \neq 0 \text{ o } y \neq 0\} \\ E^1 &= \bigcup_{b\in B} \{(x,y) \in E_1 \times E_2 : \; p(x) = p(y), \; x \neq 0\} \\ E^2 &= \bigcup_{b\in B} \{(x,y) \in E_1 \times E_2 : \; p(x) = p(y), \; y \neq 0\} \end{aligned} \quad .$$

Ahora para demostrar el resultado consideremos es siguiente diagrama

$$\begin{array}{rcccccc} U_1 \otimes U_2 \in & h^n(E_1,E_1^0) \otimes h^m(E_2,E_2^0) & \xrightarrow{q_1^*\otimes q_2^*} & h^n(E,E^1)\otimes h^m(E,E^2) & \xrightarrow{\smile} & h^{n+m}(E,E^0) \\ & {\scriptstyle j_1^*\otimes j_2^*}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^*} \\ & h^n(F_1,F_1^0)\otimes h^m(F_2,F_2^0) & \to & h^n(F,F^1)\otimes h^m(F,F^2) & \to & h^{n+m}(F,F^0) \end{array}$$

en el que donde las aplicaciones que no tienen nombre son las inclusiones obvias y todas las fibras estan sobre $b \in B$. Sea $j_b : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \to (E, E^0)$ la que denote la inclusión sobre la fibra de $p : E \to B$ sobre $b \in B$. Entonces $j_b^*(q_1^*(U_1) \smile q_2^*(U_2))$ es la composición del renglón de arriba y la aplicación vertical de la derecha. Si $j_1^* \otimes j_2^*(U_1 \otimes U_2) = \pm s_1 \otimes \pm s_2$ entonces en el renglón de abajo se tiene

$$\pm s_1 \otimes \pm s_2 \longmapsto \pm s_1 \otimes \pm s_2 \longmapsto \pm s_1 \smile \pm s_2.$$

Esto es, el generador estándar en $h^n(F_1, F_1^0) \otimes h^m(F_2, F_2^0)$ es llevado en el generador estandar de $h^{n+m}(F, F^0)$. Por tanto se tiene que la orientación de p está dada por $U = U_1 \smile U_2$. Para probar el resto observemos que por definición de clase de Euler tenemos que $\chi(p_1 \otimes p_2, U) = i^* \circ j^*(U)$, así usando la notación de arriba y considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
h^n(B)\otimes h^m(B) \arrow[rr, "\smile"] & & h^{n+m}(B) \\
h^n(E_1)\otimes h^m(E_2) \arrow[u, "i_1^*\otimes i_2^*"] & & h^{n+m}(E) \arrow[u, "i^*"'] \\
U_1\otimes U_2 \in h^n(E_1,E_1^0)\otimes h^m(E_2,E_2^0) \arrow[u, "j_1^*\otimes j_2^*"] \arrow[r, "q_1^*\otimes q_2^*"] & h^n(E,E^1)\otimes h^m(E,E^2) \arrow[r, "\smile"] & h^{n+m}(E,E^0) \arrow[u, "j^*"']
\end{tikzcd},$$

calculamos entonces

$$\begin{aligned}
i^* \circ j^*(U) &= i^* j^*(q_1^*(U_1) \smile q_2^*(U_2)) = \smile \circ i_1^* \otimes i_2^* \circ j_1^* \otimes j_2^*(U_1 \otimes U_2) \\
&= \smile \circ i_1^* \otimes i_2^*(j_1^*(U_1) \otimes j_2^*(U_2)) = \smile \circ (i_1^* \circ j_1^*(U_1) \otimes i_2^* \circ j_2^*(U_2)) \\
&= i_1^* \circ j_1^*(U_1) \smile i_2^* \circ j_2^*(U_2) = \chi_1(p_1, U_1) \smile \chi_2(p_2, U_2)
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración de la proposición. ■

Corolario 3.9 *Si $p_1 : E_1 \to B_1$, $p_2 : E_2 \to B_2$ son haces vectoriales con orientaciones U_1, U_2 entonces $U_1 \times U_2$ es una orientación (la orientación-producto) del haz producto $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 :\to B_1 \times B_2$, y la clase de Euler de $p_1 \times p_2$ es $\chi_1 \times \chi_2$.* ■

Capítulo 4

Clases características y cohomología de espacios clasificantes.

4.1 Clases características (teorema de existencia y unicidad)

En esta sección daremos condiciones para la existencia de clases características de haces vectoriales con valores en una teoría de cohomología multiplicativa. Antes de empezar la demostración del teorema que nos da dichas condiciones vamos a hacer algunas construcciones que nos serán de gran ayuda.

Consideremos el haz lineal $\gamma^1(\mathbb{CP}^{n+1}) : E(\gamma^1(\mathbb{CP}^{n+1})) \to \mathbb{CP}^n$ que fue construido en la sección 1.4. Ahora sea $\xi \to X$ un $U(n)$–haz sobre un complejo CW, y definimos a $P(\xi)$ como el espacio de líneas que pasan por el 0 en todas las fibras de ξ; entonces existe una aplicación $p' : P(\xi) \to X$ la cual, por construcción, es un haz fibrado con fibra $\mathbb{CP}^{n-1}$. Ahora consideremos el haz inducido $p'^*\xi$ sobre $P(\xi)$ y sea λ_ξ el siguiente haz lineal sobre $P(\xi)$: $E(\lambda_\xi) = \{(l, y) \in P(\xi) \times E(\xi) : y \in l\}$. Observemos que si $j : \mathbb{CP}^{n-1} \to P(\xi)$ es la inclusión de una fibra, entonces $j^*\lambda_\xi = \gamma^1(\mathbb{C}^n)$; dicho de otra manera, la parte de λ_ξ sobre $p'^{-1}(b)$ coincide con el $U(1)$–haz de Hopf $\gamma^1(\mathbb{C}^n)$. Por la manera en que se construyó λ_ξ se tiene que existe un monomorfismo $\lambda_\xi \to p'^*\xi$ de haces y entonces se tiene una sucesión exacta $0 \to \lambda_\xi \to p'^*\xi \to \mu_\xi \to 0$, donde μ_ξ es el complemento ortogonal de λ_ξ en $p'^*\xi$, puesto en fórmula $p'^*\xi \simeq \lambda_\xi \oplus \mu_\xi$ con μ_ξ un $U(n-1)$–haz.

Fijémonos ahora en el *telescopio* $T\mathbb{CP}^\infty$ de la filtración inducida por los esqueletos de $\mathbb{CP}^\infty$

$$\cdots \to \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{n+1} \to \cdots.$$

Lo que nos lleva a un cuadrado escisivo (ver 2.10)

$$\begin{array}{ccc} \amalg_n \mathbb{CP}^{2n} & \to & \mathbb{CP}^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \amalg_n \mathbb{CP}^n & \to & \amalg_n \mathbb{CP}^{2n+1} \end{array}$$

cuya sucesión Mayer-Vietoris tiene la forma

$$\cdots \to \Pi_n h^{q-1}\mathbb{CP}^n \xrightarrow{\alpha} \Pi_n h^{q-1}\mathbb{CP}^n \xrightarrow{\Delta} h^q\mathbb{CP}^\infty \to \Pi_n h^q\mathbb{CP}^n \xrightarrow{\alpha} \Pi_n h^q\mathbb{CP}^n \to \cdots.$$

Donde α está dada como sigue

$$\alpha\{x_0, x_1, x_2, \cdots\} = \{x_0 - i^*x_1, i^*x_2 - x_1, x_2 - i^*x_3, i^*x_4 - x_3, \cdots\}.$$

Luego, por la siguiente proposición (ver demostración en [3] p.127)

Proposición 4.1 *Sea (X, x_0) un complejo CW y sean $X^0 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X$ subcomplejos con $\bigcup_{n\geq 0} X^n = X$, $j_n^m : X^n \to X^m$, $i^n : X^n \to X$ las inclusiones, $m \geq n$. Entonces $\{h^q(X^n), j_n^{m*}, \mathbb{N}\}$ es un sistema inverso para todo $q \in \mathbb{Z}$, y si h^* es fuertemente aditiva,* *entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \to \lim{}^1 h^{q-1}(X^n) \to h^q(X) \to \lim{}^0 h^q(X^n) \to 0.$$

■

Así pues, $\{h^q\mathbb{CP}^n\}_n$ constituye un sistema inverso y además se tiene una sucesión

$$0 \to \lim{}^1 h^{q-1}(\mathbb{CP}^n) \to h^q(\mathbb{CP}^\infty) \to \lim{}^0 h^q(\mathbb{CP}^n) \to 0.$$

pero por definición (ver [3]), $\ker(\alpha) \cong \lim^0\{h\mathbb{CP}^n\}$ y $co\ker(\alpha) = \lim^1\{h\mathbb{CP}^n\}$; así por la hipótesis (ii) la aplicación α es epimorfismo y por tanto $\lim^1\{h\mathbb{CP}^n\} = 0$, así pues por la hipótesis (i) tenemos que $h^q(\mathbb{CP}^\infty) \cong \lim^0\{h^q(\mathbb{CP}^n)\} = h^*(pt)[x_\infty]$, donde $x_\infty \in h^2(\mathbb{CP}^\infty)$ es el único elemento tal que $i_n^* x_\infty = x_n$, $i_n : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^\infty$ la inclusión. Sea $f : P(\xi) \to \mathbb{CP}^\infty$ la aplicación que clasifica al haz lineal λ_ξ (tomando a $\mathbb{CP}^\infty$ como $BU(1)$). Si $j : \mathbb{CP}^{n-1} \to P(\xi)$ es la inclusión de una fibra, entonces $f \circ j = i_{n-1}$, así $j^* f^*(x_\infty) = x_{n-1}$. Sea $y = f^* x_\infty \in h^2(P(\xi))$. Entonces $1, y, y^2, \cdots y^{n-1}$ son elementos en $h^*(P(\xi))$ tales que $\{j^*(1), j^*(y), \cdots, j^*(y^{n-1})\} = \{1, x_{n-1}, \cdots, x_{n-1}^{n-1}\}$ forman una base para $h^*(\mathbb{CP}^{n-1})$ sobre $h^*(pt)$. Entonces aplicando el teorema de Leray-Hirsch 3.1 a la fibración $\mathbb{CP}^{n-1} \to P(\xi) \to X$ obtenemos que $h^*(P(\xi))$ es un $h^*(X)$–módulo libre con una base $\{1, y, y^2, \cdots, y^{n-1}\}$.

Ahora estamos en condiciones de empezar la demostración del siguiente

Teorema 4.2 (existencia y unicidad) *Supongamos que h^* es una teoría de cohomología multiplicativa tal que para cada n existen elementos $x_n \in h^2(\mathbb{CP}^n)$ que satisfacen*

(i) $h^*(\mathbb{CP}^n) \cong h^*(pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$;

(ii) *la inclusión* $i : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ *da* $i^*(x_{n+1}) = x_n$, $n \geq 1$.

Entonces para cada $U(n)$−haz ξ sobre un complejo CW X existen elementos definidos de manera única $c_0(\xi), c_1(\xi), \ldots, c_n(\xi)$ con $c_i(\xi) \in h^{2i}(X)$ que dependen solo de la clase de isomorfismo de ξ y satisfacen

(C1) *Si $\xi \to X$ es un haz y $f : Y \to X$ es una aplicación, entonces $c_i(f^*\xi) = f^*(c_i(\xi))$, $0 \leq i \leq n$;*

(C2) *$c_0(\xi) = 1$ para todo ξ;*

(C3) Si $\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}) \to \mathbb{CP}^n$ *es el haz de Hopf sobre $\mathbb{CP}^n$, entonces $c_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) = x_n$;*

(C4) *Si ξ es un haz de dimensión m y η es un hazde dimensión n, ambos sobre X, entonces $c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta)$, $0 \leq i \leq n+m$, donde tomamos $c_i(\xi) = 0$ si $i \geq m$.*

Demostración. Primero vamos a mostrar la unicidad y lo haremos usando inducción sobre n. Para ello observemos que $i_n^*\gamma_\infty = \gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$ sobre $\mathbb{CP}^n$ (donde γ_∞ denota el $U(1)$−haz de Hopf sobre $\mathbb{CP}^\infty$). Así pues por $a)$ y $c)$ tenemos

$$i_n^*(c_1(\gamma_\infty)) = c_1(i_n^*\gamma_\infty) = c_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) = x_n, \ n \geq 1.$$

Pero x_∞ es el único elemento tal que $i_n^*(x_\infty) = x_n$, $n \geq 1$, por lo que tenemos $c_1(\gamma_\infty) = x_\infty \in h^2(\mathbb{CP}^\infty)$.

Ahora cualquier $U(1)$−haz $\xi \to X$ es clasificado por una aplicación $f_\xi : X \to \mathbb{CP}^\infty$, así por $a)$ $c_1(\xi) = c_1(f_\xi^*\gamma_\infty) = f_\xi^*(c_1(\gamma_\infty)) = f_\xi^*(x_\infty)$, lo que muestra que $c_1(\xi)$ está determinado de manera única para todos los $U(1)$−haces ξ.

Supongamos que la unicidad ha sido probada para todos los $U(n-1)$−haces y sea $\xi \to X$ un $U(n)$−haz. Entonces $p'^*\xi = \lambda_\xi \oplus \mu_\xi$ sobre $P(\xi)$ y $c_1(\lambda_\xi) = f^*(x_\infty) = y$. Así se tiene

$$\begin{aligned} p'^*(c_i(\xi)) &= c_i(p'^*(\xi)) = c_i(\lambda_\xi \oplus \mu_\xi) = c_i(\mu_\xi) + c_1(\lambda_\xi)c_{i-1}(\mu_\xi) \\ &= c_i(\mu_\xi) + y c_{i-1}(\mu_\xi). \end{aligned}$$

Dado que μ_ξ es un $U(n-1)$–haz y, de acuerdo con la hipótesis de inducción $c_i(\mu_\xi)$ y $c_{i-1}(\mu_\xi)$ están determinadas de manera única. Así $p'^*(c_i(\xi))$ está determinada de manera única. Ahora por el teorema de Leray-Hirsch $p'^* : h^*(X) \to h^*(P(\xi))$ es un monomorfismo (esto es, $p'^*(x) = p'^*(x)\cdot 1 = x \cdot 1$), por lo que se sigue que $c_i(\xi)$ está también determinado de manera única.

Ahora vamos a probar la existencia. Ya vimos que $1, y, \cdots y^{n-1}$ forman una base para $h^*(P(\xi))$ sobre $h^*(X)$. Por lo tanto podemos expresar y^n como una combinación de ellos

$$y^n = (-1)^{n+1}c_n(\xi)\cdot 1 + (-1)^n c_{n-1}(\xi)\cdot y + \cdots + c_1(\xi)\cdot y^{n-1}$$

para coeficientes apropiados $c_1(\xi), \cdots, c_n(\xi) \in h^*(X)$. Esto es, tenemos

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i(\xi) y^{n-i} = 0,$$

donde tomamos $c_0(\xi) = 1$. Entonces $b)$ se sigue por definición.

Para probar $a)$ necesitamos probar primero que $P(f^*\xi) \simeq f^*P(\xi)$. En efecto, consideremos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} E_{f^*\xi} \arrow[r] \arrow[d, "f^*\xi"'] & E_\xi \arrow[d, "\xi"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_{P(f^*\xi)} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "P(f^*\xi)"'] & E_{P(\xi)} \arrow[d, "P(\xi)"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

en donde $\bar{f}$ es un morfismo de haces que cubre a f. Luego podemos formar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} E_{P(f^*\xi)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "P(f^*\xi)"'] & E_{f^*P(\xi)} \arrow[d, "f^*P(\xi)"] & E_{P(\xi)} \arrow[d, "P(\xi)"] \\ & Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

en el que la existencia de ψ la garantiza la proposición 1.22 que además afirma que $\psi : P(f^*\xi) \stackrel{\cong}{\to} f^*P(\xi)$ es una equivalencia de haces. Por un argumento similar al anterior y considerando el diagrama de abajo, se muestra que $\phi : \lambda_{f^*\xi} \stackrel{\cong}{\to} \bar{f}^*\lambda_\xi$

$$\begin{array}{ccccc} E_{\lambda_{f^*\xi}} & \stackrel{\phi}{\to} & E_{\bar{f}^*\lambda_\xi} & & E_{\lambda_\xi} \\ {\scriptstyle \lambda_{f^*\xi}} \downarrow & & {\scriptstyle \bar{f}^*P(\xi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \lambda_\xi} \\ E_{P(f^*\xi)} & \stackrel{\psi}{\to} & E_{f^*P(\xi)} & & E_{P(\xi)} \; . \\ & {\scriptstyle P(f^*\xi)} \searrow & {\scriptstyle f^*P(\xi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle P(\xi)} \\ & & Y & \underset{f}{\to} & X \end{array}$$

Sea $\bar{f}^*$ la aplicación inducida en cohomología, veamos que $\bar{f}^*(y_\xi) = y_{f^*\xi}$. En efecto, ya vimos que aplicando el teorema de Leray-Hirsch a una fibración $\mathbb{CP}^{n-1} \to P(\xi) \to X$ obtenemos que $h^*(P(\xi))$ es un $h^*(X)$–módulo libre con una base $\{1, y_\xi, \cdots, y_\xi^{n-1}\}$ de igual manera aplicando este teorema a la fibración $\mathbb{CP}^{n-1} \to E_{P(f^*\xi)} \to Y$ obtenemos que $h^*(E_{P(f^*\xi)})$ es un $h^*(Y)$–módulo con base $\{1, y_{f^*\xi}, \cdots, y_{f^*\xi}^{n-1}\}$. Así, $\bar{f}^*(y_\xi) = y_{f^*P(\xi)} = y_{f^*\xi}$.

Entonces calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{f}^*(\textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(\xi) y_\xi^{n-i}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f^*(c_i(\xi)) \bar{f}^*(y_\xi)^{n-i} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i f^*(c_i(\xi)) y_{f^*\xi}^{n-i}. \end{aligned}$$

Pero los elementos $c_i(f^*\xi)$ son los únicos elementos tales que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(f^*\xi) y_{f^*\xi}^{n-i} = 0,$$

así se sigue que $f^*(c_i(\xi)) = c_i(f^*\xi)$, $0 \leq i \leq n$.

Para probar c) simplemente observamos que $E_{P(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}))} = \mathbb{CP}^n$ y $\lambda_{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})} = \gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})$; veamos como queda nuestro diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E_{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})} \arrow[d, "\lambda_{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})}"'] & & E_{\gamma_\infty} \arrow[d, "\lambda_{\gamma_\infty}=\gamma_\infty"] \\
E_{P(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1}))} \arrow[rr, "i_n"] & & E_{P(\gamma_\infty)} = \mathbb{CP}^\infty \ , \\
\mathbb{CP}^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[urr, "i_{n-1}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

puesto que en este caso $f = i_n$, entonces $y_{\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})} = x_n$ y así

$$c_1(\gamma^1(\mathbb{C}^{n+1})) = i_n^*(c_1(\gamma_\infty)) = i_n^*(x_\infty) = x_n.$$

Falta probar d); para hacerlo supongamos que ξ, η son $U(m)$– y $U(n)$–haces respectivamente. Entonces, por definición de suma de Whitney y haz asociado $P(\xi)$ y $P(\eta)$ son subhaces de $P(\xi \oplus \eta)$. Sean $U = P(\xi \oplus \eta) - P(\eta)$, $V = P(\xi \oplus \eta) - P(\xi)$; entonces $P(\xi)$ es un retracto fuerte por deformación de U, $P(\eta)$ es un retracto fuerte por deformación de V y $U \cup V = P(\xi \oplus \eta)$. Por otra parte

$$x_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{m}(-1)^i c_i(\xi) y^{m-i}, \qquad x_2 = \textstyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_j(\eta) y^{n-j}$$

son elementos de $h^*(P(\xi \oplus \eta))$ (donde estamos tomando $y = c_1(\lambda_{\xi\oplus\eta})$) tales que $x_1 \mid P(\xi) = 0$ y por lo tanto $x_1 \mid U = 0$, $x_2 \mid P(\eta) = 0$ y por tanto $x_2 \mid V = 0$. De lo anterior y de las sucesiones exactas para los diagramas $\emptyset \hookrightarrow U \hookrightarrow P(\xi \oplus \eta)$, $\emptyset \hookrightarrow V \hookrightarrow P(\xi \oplus \eta)$ y $\emptyset \hookrightarrow U \cup V \hookrightarrow P(\xi \oplus \eta)$ se tienen las siguientes consecuencias. Existen elementos $x_1' \in h^*(P(\xi \oplus \eta), U)$, $x_2' \in h^*(P(\xi \oplus \eta), V)$ con $j_U^* x_1' = x_1$, $j_V^* x_2' = x_2$ donde $j_U : (P(\xi \oplus \eta), \emptyset) \to (P(\xi \oplus \eta), U)$, $j_V : (P(\xi \oplus \eta), \emptyset) \to (P(\xi \oplus \eta), V)$ son las inclusiones. Entonces

$$x_1' \cdot x_2' \in h^*(P(\xi \oplus \eta), U \cup V) = 0$$

así se sigue que $x_1 \cdot x_2 = j_U^* x_1' \cdot j_V^* x_2' = j^*(x_1' \cdot x_2') = 0$, donde $j : (P(\xi \oplus \eta), \emptyset) \to (P(\xi \oplus \eta), U \cup V)$. Haciendo una simple sustitución se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\textstyle\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \mathbf{c}_i(\xi) y^{m-i}) \cdot \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \mathbf{c}_j(\eta) y^{n-j} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k (\sum_{i+j=k} \mathbf{c}_i(\xi)\mathbf{c}_j(\eta)) y^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Pero por definición los elementos $\mathbf{c}_k(\xi \oplus \eta)$ son los únicos elementos tales que

$$0 = \sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k \mathbf{c}_k(\xi \oplus \eta) y^{m+n-k}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{c}_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} \mathbf{c}_i(\xi)\mathbf{c}_j(\eta), \ 0 \leq k \leq m+n. \ \blacksquare$$

Existe un resultado similar para haces reales:

Teorema 4.3 *Supongamos que h^* es una teoría de cohomología multiplicativa tal que para cada n existen elementos $x_n \in h^1(\mathbb{RP}^n)$ que satisfacen*

(i) $h^*(\mathbb{RP}^n) \cong h^*(pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$;

(ii) *la inclusión $i : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ da $i^*(x_{n+1}) = x_n$, $n \geq 1$.*

Entonces para cada $O(n)$–haz ξ sobre un complejo CW X existen elementos definidos de manera única $w_0(\xi)$, $w_1(\xi), \ldots, w_n(\xi)$ con $w_i(\xi) \in h^i(X)$ que dependen solo de la clase de isomorfismo de ξ y satisfacen

(SW1) *Si $\xi \to X$ es un haz y $f : Y \to X$ es una aplicación, entonces $w_i(f^*\xi) = f^*(w_i(\xi))$, $0 \leq i \leq n$;*

(SW2) *$w_0(\xi) = 1$ para todo ξ;*

(SW3) Si *$\omega^1 \to \mathbb{RP}^n$ es el haz de Hopf sobre $\mathbb{RP}^n$, entonces $w_1(\omega^1) = x_n$;*

(SW4) *Si ξ es un haz de dimensión m y η es un hazde dimensión n, ambos sobre X, entonces $w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} w_j(\xi)w_k(\eta)$, $0 \leq i \leq n+m$, donde tomamos $w_i(\xi) = 0$ si $i \geq m$.*

Similarmente si $h^*(\mathbb{HP}^n) \cong h^*(pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$ para clases $x_n \in h^4(\mathbb{HP}^n)$, entonces para cada haz vectorial de dimensión n ξ, existen clases $p_i(\xi) \in h^{4i}(X)$ con $p_1(\rho) = x_n$, $\rho \to \mathbb{HP}^n$ el haz de Hopf.

El siguiente resultado nos muestra que en cohomología singular existen clases características.

Proposición 4.4 *Denotemos por γ^n al haz de Hopf sobre el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$. Si γ^n es $H-$orientable y U es su orientación, denotamos por e su clase de Euler $\chi(\pi, U) \in H^2(\mathbb{CP}^n)$, entonces $H(\mathbb{CP}^n)$, como un $H(*)-$módulo, es generado libremente por $1, e, e^2, \cdots, e^n$, y $e^{n+1} = 0$. En fórmula:*

$$H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[e]/e^{n+1}$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n. Para el caso $n = 1$ la afirmación es clara. Supongamos que la afirmación se tiene para $n-1$; es decir, que existe un elemento $e \in H^2(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z})$ tal que $1, e, e^2, \cdots, e^{n-1}$ generan los grupos de cohomología $H^{2i}(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z})$ para $0 \leq i \leq n-1$, respectivamente. Ahora como $\mathbb{CP}^n$ se obtiene de $\mathbb{CP}^{n-1}$ por adjunción de una $2n$–celda, se sigue de la sucesión exacta de la pareja $(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1})$ que $H^i(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \to H^i(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo para $i \leq 2n-2$. Por tanto, según este isomorfismo $e \in H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y $1, e, e^2, \cdots, e^{n-1}$ generan los grupos de cohomología $H^{2i}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ para $0 \leq i \leq n-1$, respectivamente.

Sea $\zeta \in H_{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ la clase fundamental y por dualidad de Poincaré se tiene

$$\begin{array}{ccc} H_{2n}(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \\ \varsigma & \longmapsto & \varsigma \frown e^{n-1} \end{array}$$

así $\varsigma \frown e^{n-1} \in H_{2n}(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z})$ es un generador. Por el producto de Kronecker $H_{2n}(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z}) \times H^{2n}(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ se tiene

$$\langle \varsigma, e^n \rangle = \langle \varsigma \frown e^{n-1}, e \rangle$$

y dado que este producto es no degenerado y el producto es un epimorfismo se tiene que $\langle \varsigma, e^n \rangle$ genera a $\mathbb{Z}$ y por tanto, e^n manda un generador en otro y esto solo es posible si $e^n \in H^{2n}(\mathbb{CP}^n,\mathbb{Z})$ es un generador. ■

Existen resultados similares para $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{HP}^n$; esto es

$$H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) \cong R[\alpha]/\alpha^{n+1}, \ \alpha \in H^1(\mathbb{RP}^n,\mathbb{Z}_2)$$
$$H^*(\mathbb{HP}^n;\mathbb{Z}) \cong R[\beta]/\beta^{n+1}, \ \beta \in H^4(\mathbb{HP}^n,\mathbb{Z}) .$$

Además las clases de Euler son compatibles para los proyectivos de distinta dimensión en el siguiente sentido; por ejemplo para $\mathbb{CP}^n$, si $i : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ es la inclusión entonces $i^*(e_{n+1}) = e_n$. Por lo tanto conseguimos clases de Chern $c_i(\xi) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$, clases de Stiefel-Whitney $w_i(\xi) \in H^i(X,\mathbb{Z}_2)$ y clases de Pontrjagin $p_i(\xi) \in H^{4i}(X,\mathbb{Z})$. Denotamos por $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_n(\xi)$ y $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \cdots + w_n(\xi)$ a la clase total de Chern y la clase total de Stiefel-Whitney respectivamente.

4.2 Cohomología de espacios clasificantes

En esta sección restringiremos nuestra teoría de cohomología a la cohomología singular.

Definición 4.5 *Una aplicación de Gauss de un haz vectorial de dimensión* k, ξ^k *en* $\mathbb{C}^m$ *con* $k \leq m \leq +\infty$ *es una aplicación* $g : E(\xi) \to \mathbb{C}^m$ *tal que* g *es un monomorfismo lineal cuando se restringe a cualquier fibra de* ξ.

Recordemos que $E(\gamma^k(\mathbb{C}^m))$ es el subespacio $(V, x) \in G_k(\mathbb{C}^m) \times \mathbb{CP}^m$ con $x \in V$. Entonces la proyección $q : E(\gamma^k(\mathbb{C}^m)) \to \mathbb{C}^m$, dada por la relación $q(V, x) = x$, es una aplicación de Gauss. En la siguiente proposición vemos que toda aplicación de Gauss puede ser construida de esta aplicación y morfismos de haces vectoriales.

Proposición 4.6 *Si* $\phi : \xi^k \to \gamma^k(\mathbb{C}^m)$ *es un morfismo de haces vectoriales, entonces* $q \circ \phi : E(\xi^k) \to \mathbb{C}^m$ *es una aplicación de Gauss. Recíprocamente, si* $g : E(\xi^k) \to \mathbb{C}^m$ *es una aplicación de Gauss, entonces existe un morfismo de haces vectoriales* $\phi : \xi^k \to \gamma^k(\mathbb{C}^m)$ *tal que* $q \circ \phi = g$.

Demostración. La primera afirmación es clara. Para la segunda, sea $f(b) = g(p^{-1}(b)) \in G_k\mathbb{C}^m)$, y sea $\phi(x) = (f(p(x)), g(x)) \in (E(\gamma^k(\mathbb{C}^m))$ para $x \in E(\xi^k)$. Se tiene que f es continua checándolo en una carta de ξ, y de esto se sigue que ϕ también lo es.

Denotemos por $\mathbb{CP}^e$ el subespacio $x \in \mathbb{CP}^\infty$ con $x_{2i+1} = 0$, y $\mathbb{CP}^o$ con $x_{2i} = 0$ para $i \geq 0$. Para estos subespacios, $\mathbb{CP}^\infty = \mathbb{CP}^e \oplus \mathbb{CP}^o$. Tenemos además dos homotopías $g^e : \mathbb{CP}^n \times I \to \mathbb{CP}^{2n}$ y $g^o : \mathbb{CP}^n \times I \to \mathbb{CP}^{2n}$ definidas por las siguientes fórmulas:

$$g_t^e(x_0, x_1, x_2, ...) = (1-t)(x_0, x_1, x_2, ...) + t(x_0, 0, x_1 0, x_2, ...)$$
$$g_t^o(x_0, x_1, x_2, ...) = (1-t)(x_0, x_1, x_2, ...) + t(0, x_0, 0, x_1 0, x_2, ...).$$

Las propiedades de estas homotopías se enumeran en la siguiente proposición. Tanto en las fórmulas de arriba como en la siguiente proposición tenemos $1 \leq n \leq +\infty$.

Proposición 4.7 *Con la notación de arriba, las homotopías anteriores tienen las siguientes propiedades:*

(i) Para $t=0$, las aplicaciones g_0^e y g_0^o son cada una de ellas iguales a la inclusión $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{2n}$.

(ii) Para $t=1$, $g_1^e(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{CP}^{2n} \cap \mathbb{CP}^e$ y $g_1^o(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{CP}^{2n} \cap \mathbb{CP}^o$.

(iii) Existen morfismos de haces vectoriales $\phi^e : \gamma^k(\mathbb{C}^n) \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ y $\phi^o : \gamma^k(\mathbb{C}^n) \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ tales que $q \circ \phi^e = g_1^e$, $q \circ \phi^o = g_1^o$.

(iv) Las aplicaciones f^e y f^o son homotópicas a la inclusión $G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^{2n})$.

Demostración. Las afirmaciones *(i)* y *(ii)* se siguen directamente de las fórmulas de g_t^e y g_t^o. Para probar *(iii)* observemos que tanto g_1^e como g_1^o son aplicaciones de Gauss para $\gamma^k(\mathbb{C}^n)$. Por tanto usando la proposición 4.6 se tiene que existen morfismos de haces $\phi^e : \gamma^k(\mathbb{C}^n) \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ y $\phi^o : \gamma^k(\mathbb{C}^n) \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ tales que $g_1^e = q \circ \phi^e$ y $g_1^o = q \circ \phi^o$, donde $q : E(\gamma^k(\mathbb{C}^{2n})) \to \mathbb{CP}^{2n}$

$$g_1^e : E(\gamma^k(\mathbb{C}^n)) \xrightarrow{\phi^e} E(\gamma^k(\mathbb{C}^{2n})) \xrightarrow{q} \mathbb{C}^{2n} \quad \text{y} \quad g_1^o : E(\gamma^k(\mathbb{C}^n)) \xrightarrow{\phi^o} E(\gamma^k(\mathbb{C}^{2n})) \xrightarrow{q} \mathbb{C}^{2n} .$$

Para mostrar *(iv)* observemos que las homotopías g_t^e y g_t^o satisfacen que g_0^e y g_0^o son iguales a la inclusión, por otra parte podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(\gamma^k(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow{\phi^e} & E(\gamma^k(\mathbb{C}^{2n})) \\ {}^{q}\downarrow & & \downarrow^{q} \\ G_k(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow[\bar{\phi}^e]{} & G_k(\mathbb{C}^{2n}) \end{array}$$

y así vemos que $g_1^e = \bar{\phi}^e$ y $g_1^o = \bar{\phi}^o$. Por lo que se concluye *(iv)*.

Teorema 4.8 *Sean f, $f_1 : B \to G_k(\mathbb{C}^n)$ dos aplicaciones tales que $f^*(\gamma^k(\mathbb{C}^n))$ y $f_1^*(\gamma^k(\mathbb{C}^n))$ son isomorfos sobre B y sea $j : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^{2n})$ la inclusión natural. Entonces las aplicaciones $j \circ f$ y $j \circ f_1$ son homotópicas para $1 \leq n \leq +\infty$.*

Demostración. Por hipótesis, existe un haz vectorial ξ sobre B y dos morfismos de haces $(\phi, f) : \xi \to \gamma^k(\mathbb{C}^n)$ y $(\phi_1, f_1) : \xi \to \gamma^k(\mathbb{C}^n)$. Sean $g = q \circ \phi : E(\xi) \to \mathbb{C}^n$ y $g_1 = q \circ \phi_1 : E(\xi) \to \mathbb{C}^n$ las aplicaciones de Gauss asociadas. Componiendo con las aplicaciones de arriba, tenemos morfismos $(u^e \circ u, f^e \circ f) : \xi \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ con aplicaciones de Gauss $g_1^e \circ g : E(\xi) \to \mathbb{C}^e \cap \mathbb{C}^{2n}$ y $(u^o \circ u_1, f^o \circ f_1) : \xi \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$ con aplicación de Gauss $g_1^o \circ g_1 : E(\xi) \to \mathbb{C}^o \cap \mathbb{C}^{2n}$. Definamos la aplicación $h : E(\xi) \times I \to \mathbb{C}^{2n}$ por la relación $h_t(x) = (1-t)g_1^e g(x) + t g_1^o g_1(x)$. Puesto que las $g's$ son aplicaciones de Gauss, para cualquier fibra $p^{-1}(b) \subset E(\xi)$ las aplicaciones lineales $g_1^e \circ g : p^{-1}(b) \to \mathbb{C}^e$ y $g_1^o \circ g_1 : p^{-1}(b) \to \mathbb{C}^o$ son morfismos lineales. Por lo tanto, $h : E(\xi) \times I \to \mathbb{C}^{2n}$ es una aplicación de Gauss la cual determina un morfismo de haces $(w, k) : \xi \to \gamma^k(\mathbb{C}^{2n})$. Puesto que h así definida es una homotopía de $g_1^e \circ g$ con $g_1^o \circ g_1$, la aplicación $k : B \times I \to G_k(\mathbb{C}^{2n})$ es una homotopía de $f^e \circ f$ a $f^o \circ f_1$. Por otro lado, por el inciso (iv) de la proposición anterior f y $f^e \circ f$ son homotópicas y $f^o \circ f_1$ y f_1 son homotópicas, f y f_1 son homotópicas. Lo que concluye la demostración del teorema.

Definición 4.9 *Sea ξ un haz vectorial sobre B. Una aplicación que se escinde de ξ es una aplicación $f : B_1 \to B$ tal que $f^*\xi$ es la suma de haces lineales y $f^* : H^*(B, \mathbb{Z}) \to H^*(B_1, \mathbb{Z})$ es un monomorfismo.*

La siguiente proposición nos garantiza la existencia de aplicaciones que se escinden.

Proposición 4.10 *Si ξ es un haz vectorial sobre B, existe una aplicación que se escinde para ξ.*

Demostración. Vamos a probar esta afirmación por inducción sobre la dimensión sobre ξ. Para un haz lineal la identidad sobre el espacio base es una aplicación que se escinde pues $id^*\xi = \xi \oplus \varepsilon$, donde ε es el haz trivial sobre B y por supuesto id^* es un isomorfismo. En general, sea ξ un haz vectorial de dimensión n y para él consideremos $q : E(P\xi) \to B$ el haz proyectivo asociado. Entonces, como ya vimos en la demostración del teorema 4.2, $q^* : H^*(B, \mathbb{Z}) \to H^*(E(P\xi), \mathbb{Z})$ es un monomorfismo, y $q^*\xi = \lambda_\xi \oplus \mu_\xi$, donde λ_ξ es un haz lineal y μ_ξ es un haz de dimensión $n-1$. Por hipótesis de inducción existe una aplicación que se escinde $g : B_1 \to E(P\xi)$ para μ_ξ. Veamos entonces que $f = q \circ g : B_1 \to B$ es una aplicación que se escinde para ξ. En efecto, primeramente es claro que $f = q \circ g$ es un monomorfismo. Además según 1.7 $f^*\xi = g^*(q^*\xi)$, pero

$$g^*(q^*\xi) = g^*(\lambda_\xi \oplus \mu_\xi) = \lambda_\xi \oplus g^*\mu_\xi$$

por lo tanto $f^*\xi$ es suma de haces lineales, lo que concluye la demostración. ■

Proposición 4.11 *Sea $k_n : \mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty \to G_n(\mathbb{C}^\infty)$ la aplicación clasificante para el haz $\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma$, donde γ es el haz canónico lineal sobre $\mathbb{CP}^\infty$. Entonces k_n es una aplicacin que se escinde para el haz canónico γ^n sobre $G_n(\mathbb{C}^\infty)$.*

Demostración. Puesto que por hipótesis $k_n^*(\gamma^n)$ es isomorfo a $\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma$, es suficiente mostrar que $k_n^* : H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty)) \to H^*(\mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty)$ es un monomorfismo. Para esto, sea $f : X \to G_n(\mathbb{C}^\infty)$ cualquier aplicación que se escinde de γ^n, donde $f^*\gamma^n = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$. Sea $g_i : X \to \mathbb{CP}^\infty$ la aplicación clasificante para λ_i, donde λ_i es isomorfo a $g_i^*\gamma$. Entonces para $g = (g_1, ..., g_n)$ es una aplicación clasificante para el haz $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$ por lo que $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$ es isomorfo a $g^*(\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma)$, como se aprecia en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \simeq g^*(\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma) & & \gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \underset{g}{\rightarrow} & \mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty \end{array},$$

además se tiene que para $k_n \circ g$ se satisfacen las siguientes igualdades

$$(k_n \circ g)^*(\gamma^n) = g^*(k_n^*(\gamma^n)) = g^*(\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma) = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n.$$

Por tanto $(k_n \circ g)^*(\gamma^n)$ es isomorfo a $f^*\gamma^n$ y por 4.8 f y $k_n \circ g$ son homotópicas. Entonces pasando a los morfismos de cohomología tenemos $f^* = (k_n \circ g)^* = g^* \circ k_n^*$. Puesto que f^* es monomorfismo, k_n^* es también un monomorfismo. ∎

Teorema 4.12 *Denotemos por c_i a $c_i(\gamma^n)$, donde γ^n es el haz vectorial universal de dimensión n. Entonces el anillo de cohomología $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, ..., c_n]$.*

Demostración. Por la proposición 4.11, $k_n : \mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty \rightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ es una aplicación que se escinde. Puesto que $\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma$ es invariante bajo la acción del grupo simétrico en n letras, la imagen de k_n^* en $H^*(\mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[y_1, ..., y_n]$ es un subanillo del anillo de polinomios simétricos en las variables $y_1, ..., y_n$. Si $pr_i : \mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$ es la proyección en el i–ésimo factor entonces se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc}\gamma \times \overset{(n)}{\cdots} \times \gamma & & \gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{CP}^\infty \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{CP}^\infty & \rightarrow & \mathbb{CP}^\infty \end{array},$$

de donde calculamos

$$\begin{aligned} c_1(pr_i^*(\gamma)) &= pr_i^*(c_1(\gamma)) = pr_i^*(y_i) \\ &= y_i \end{aligned}.$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} pr_1^*(\gamma)\oplus\cdots\oplus pr_1^*(\gamma) & & \gamma^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{CP}^\infty\times\overset{(n)}{\cdots}\times\mathbb{CP}^\infty & \underset{k_n}{\rightarrow} & G_n(\mathbb{C}^\infty) \end{array}$$

Puesto que k_n es una aplicación clasificante, $k_n^*(\gamma^n)=pr_1^*(\gamma)\oplus\cdots\oplus pr_1^*(\gamma)$ y así existe la siguiente relación para la clase total de Chern $c(\gamma^n)$,

$$\begin{aligned} k_n^*(c(\gamma^n)) &= c(k_n^*(\gamma^n)) = c(pr_1^*(\gamma)\oplus\cdots\oplus pr_1^*(\gamma)) \\ &= (1+y_1)\cdots(1+y_n) \end{aligned},$$

donde la última igualdad se obtiene de la definición de clase total de Chern y del inciso $C4$ de 4.2. Puesto que $(1+y_1)\cdots(1+y_n)$ es la suma de las funciones simétricas elementales $\sigma_1+\cdots+\sigma_n$, entonces $k_n^*(c_i(\gamma^n))$ es la i–ésima función simétrica elemental σ_i en las variables $y_1,...,y_n$. Como $k_n^*: H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty),\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}[y_1,...,y_n]$ es un monomorfismo, entonces restringiendo el contradominio a su imagen resulta ser un isomorfismo, esto es, $k_n^*: H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty),\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[\sigma_1,...,\sigma_n]$ con $k_n^*(c_i)=\sigma_i$ y así hemos probado el teorema. ∎

Puesto que $G_n(\mathbb{C}^\infty)=BU(n)$, por el resultado anterior se tiene que

$$H^*(BU(n),\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,...,c_n].$$

Sustituyendo $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ obtenemos por un argumento similar la cohomología del espacio clasificante $BO(n)$.

Capítulo 5

Clases características y operaciones cohomológicas

5.1 El espectro de Thom

Primeramente recordemos la definición de un espectro.

Definición 5.1 *Un espectro E es una colección $\{(E_n, *) : n \in \mathbb{Z}\}$ de complejos CW junto con aplicaciones $SE_n \to E_{n+1}$, donde S denota la suspensión.*

Podemos definir las teorías de homología y cohomología asociadas a cualquier espectro E. Para cada complejo CW punteado (X, x_0) y $n \in \mathbb{Z}$ tomamos

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_n(X) &= \pi_n(E \wedge X) = \lim_{r \to \infty} \pi_{n+r}(E_r \wedge X) \\
\tilde{E}^n(X) &= \left[X, \lim_{r \to \infty} \Omega^r E_{n+r}\right]
\end{aligned}
$$

Si (X, A) es una pareja de complejos CW entonces

$$
E_n((X, A)) \quad \tilde{E}(X/A) = \pi_n(E \wedge (X/A)) = \lim_{r \to \infty} \pi_{n+r}(E_r \wedge (X/A))
$$

Ahora vamos a definir el espacio de Thom. Sea $\xi = (E, p, B, F)$ un haz vectorial real de dimensión n. Si el grupo estructural del haz ξ es un subgrupo del grupo ortogonal o más generalmente del grupo de auto-homeomorfismos a $\mathbb{R}^n$ que preservan la distancia con respecto al origen, entonces asociados a ξ están el haz de discos unitarios $D(\xi)$ y el haz de esferas unitarias $S(\xi)$ de ξ. Formamos entonces el espacio cociente $D(\xi)/S(\xi)$ el cual tiene un punto base bien determinado y es llamado el *espacio de Thom* del haz ξ, lo denotaremos por $T(\xi)$.

La inclusión $(D(\xi), S(\xi)) \hookrightarrow (E, E^0)$ induce un isomorfismo de cohomología; así,

$$h^*(E, E^0) \xrightarrow{\cong} h^*(T(\xi), *).$$

A la inclusión de una fibra $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \hookrightarrow (E, E^0)$, le corresponde la inclusión del par formado por el disco y la esfera como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \hookrightarrow & (D(\xi), S(\xi)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) & \hookrightarrow & (E, E^0)
\end{array}$$

y $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Así, podemos de igual manera definir la noción de h-orientación en términos de un elemento $U \in h^n(T(\xi), *)$ tal que $U \mid (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ genera libremente a $h^n(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ y el isomorfismo de Thom dado en 3.4 se convierte en

$$\psi^* : h^i(B) \xrightarrow{\cong} h^{i+n}(T(\xi), *)$$

definido por la composición

$$\begin{tikzcd} h^i(B) \arrow[r, "p^*"] & h^i(D(\xi)) \arrow[r] \arrow[dr, "\smile U"] & h^{i+n}(T(\xi),*) \arrow[d, "\cong"] \\ & & h^{i+n}(D(\xi),S(\xi)) \end{tikzcd} .$$

Proposición 5.2 *Si ζ y η son haces vectoriales sobre X y Y respectivamente, entonces $T(\zeta)\wedge T(\eta)$ es homeomorfo a $T(\zeta\times\eta)$.*

Demostración. La aplicación natural

$$T(\zeta)\times T(\eta)\to T(\zeta\times\eta)$$

es un homeomorfismo excepto sobre el wedge $T(\zeta)\vee T(\eta)$ el cual es aplicado en el punto base de $T(\zeta\times\eta)$. ■

En particular

$$T(\xi\oplus\varepsilon)\cong T(\xi)\wedge\mathbb{S}^1=ST(\xi).$$

Así pues, considerando ahora a la orientación de un haz ξ como elemento de la cohomología del espacio de Thom $T(\xi)$ se obtienen algunos resultados análogos a los dados en la sección 3.2.

Proposición 5.3 *Sean ζ y η haces vectoriales sobre el mismo espacio X. Si $U_1\in h^m(T(\zeta),*)$ y $U_2\in h^n(T(\eta),*)$ son sus orientaciones correspondientes, entonces $U=U_1\smile U_2$ es una orientación de la suma de Whitney $\zeta\oplus\eta$. La demostración es similar a la dada en 3.8.* ■

Ahora vamos a definir el espectro de Thom. Supongamos que tenemos el haz universal $\gamma^k\to G_k(\mathbb{R}^\infty)=BO(k)$. Entonces denotamos al espacio de Thom $T(\gamma^k)$ por $MO(k)$. La aplicación clasificante para $\gamma^k\oplus\varepsilon\to BO(k+1)$ nos induce una aplicación $MO(k)\wedge\mathbb{S}^1\to MO(k+1)$. Lo que nos determina el espectro de Thom $MO=\{MO(k)\}$ con aplicaciones $MO(k)\wedge\mathbb{S}^1\to MO(k+1)$.

Para toda pareja (X, A) de complejos CW denotemos por $MO_n(X, A)$ a la teoría de homología asociada al espectro MO la cual está dada por

$$MO_n(X, A) = \lim_{r \to \infty} \pi_{n+r}(MO_r \wedge (X/A)).$$

El siguiente es un resultado muy importante que relaciona al grupo de bordismo visto en 2.3.1 y el grupo de homología asociado al espectro de Thom.

Teorema 5.4 (Thom) *Existe un isomorfismo entre MO_n y $\mathfrak{N}_n$.* ■

Existe una interpretación homotópica del grupo de bordismo la cual se obtiene extendiendo el resultado de Thom 5.4 a un isomorfismo

$$\mathfrak{N}_n(X, A) \cong MO_n(X, A) = \lim_{r \to \infty} \pi_{n+r}(MO_r \wedge (X/A)).$$

Por otra parte, recordemos que si $f : N^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ es un encaje diferenciable de una variedad diferenciable de dimensión n en el espacio Euclideano, entonces denotamos por $\nu(N)$ al haz normal de dimensión r de N respecto al encaje f.

Definición 5.5 *Decimos que dos haces vectoriales ζ y η son establemente equivalentes siempre que $\zeta \oplus \varepsilon^p$ y $\eta \oplus \varepsilon^q$ sean equivalentes para alguna p y q. La condición de establemente equivalente es una relación de equivalencia.*

Definición 5.6 *Sean M^m y N^n variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente. Si $f : M \to N$ es una aplicación continua entonces definimos el haz normal de f como $\nu_f = f^*TM \oplus \nu(N)$.*

El haz ν_f es establemente equivalente al haz normal del encaje $\tilde{f} = (f, i) : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}^l$, donde $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^l$ es un encaje. Si el haz normal $\nu(M)$ con respecto al encaje $\tilde{f}$ es orientable, entonces i junto con una orientación $U \in h^{n+l-m}(T(\nu_f), *)$ se dice que determinan una *orientación de la aplicación f.*

Definición 5.7 *Sean M^m y N^n variedades diferenciables y supongamos que $f : M \to N$ está orientada por $\tilde{f} : M \to N \times \mathbb{R}^l$ y $U \in h^{n+l-m}(T\nu_f, *)$. La aplicación colapsada ("construcción de Thom")*

$$N^l = N \times \mathbb{D}^l / N \times \mathbb{S}^{l-1} \xrightarrow{\bar{f}} D(\nu_f)/S(\nu_f) = T\nu_f.$$

La aplicación anterior es usada para definir un morfismo por la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccc} h^i(M) & \overset{\psi^*}{\underset{\cong}{\to}} & h^{i+n+l-m}(T(\nu_f), *) & & \\ & & \downarrow \bar{f}^* & & \\ & & h^{i+n+l-m}(N^l, *) & \underset{(\sum^l)^{*-1}}{\longrightarrow} & h^{i+n-m}(N) \end{array}$$

a este morfismo lo llamaremos *morfismo umkehr* y lo denotaremos por

$$f! : h^i(M) \to h^{i+n-m}(N)$$

el cual queda determinado por f y la orientación de f.

En los siguientes teoremas se enuncian algunas propiedades del morfismo $f!$, cuyas demostraciones se encuentran en [6].

Teorema 5.8 *Si $f : M \to N$ es una aplicación orientada, entonces para $x \in h^*(M)$ y $y \in h^*(N)$ se satisface la igualdad*

$$f!(f^*(y) \smile x) = y \smile f!(x). \ \blacksquare$$

Teorema 5.9 *Si $f : M \to N$ y $g : N \to L$ son aplicaciones orientadas, la composición $g \circ f : M \to L$ tiene una orientación inducida por las orientaciones de f y g y, con esta orientación $g! \circ f! = (g \circ f)!$.* ■

Observación 5.10 *El morfismo umkehr $f!$ se define también usando dualidad de Poncairé como se muestra a continuación: Sean V y M variedades diferenciables y compactas de dimensión r y $n+r$. Sea $f : V \to M$ una aplicación diferenciable. Consideremos la siguiente composición: $\mathfrak{N}^i \overset{D'}{\cong} \mathfrak{N}_{n+r-i}(M) \xrightarrow{\mu} H_{n+r-i}(M;\mathbb{Z}_2) \overset{D}{\cong} H^i(M;\mathbb{Z}_2)$, donde D y D' son el isomorfismo de Poincaré; en particular D' es una igualdad. Definimos entonces un homomorfismo $\bar{\mu} : \mathfrak{N}^i(M) \to H^i(M;\mathbb{Z}_2)$ como $\bar{\mu}[V,f] = D^{-1}\mu[V,f] = D^{-1}f_*(\sigma(V))$ donde $\sigma(V) \in H(V;\mathbb{Z}_2)$. Como μ es suprayectiva $\bar{\mu}$ también lo es, por lo que cualquier clase de cohomología $a \in H^i(M)$ es de la forma $\bar{\mu}[V,f]$. Finalmente definimos el morfismo $f! : H^i(V;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n}(M;\mathbb{Z}_2)$, a través de la conmutatividad del siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
H^i(V;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f!"] \arrow[d, "D"', "\cong"] & H^{i+n}(M;\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\cong"', "D"] \\
H_{r-i}(V;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f_*"'] & H_{r-i}(M;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}.$$

5.2 Operaciones cohomológicas: los cuadrados de Steenrod

Recordemos que un *complejo simplicial* K consiste de un conjunto $\{v\}$ de *vértices* y un conjunto $\{s\}$ de subconjuntos finitos no vacíos de $\{v\}$ llamado *simplejos* tales que

(a) Cualquier conjunto que consiste de exactamente un vértice es un simplejo.

(b) Cualquier subconjunto no vacío de un simplejo es un simplejo.

Un simplejo s que consiste exactamente de $q+1$ vértices es llamado un $q-$ *simplejo.*

Sea p_0, p_1, $p_2, \cdots$ una sucesión infinita de elementos diferentes y fijos. Para $q \geq 0$ sea Δ^q el espacio del complejo simplicial que consiste de todos los subconjuntos no vacíos de $\{p_o, p_1, \cdots p_q\}$. Para $q \geq 0$ y $0 \leq i \leq q+1$ sea $e^i_{q+1} : \Delta^q \to \Delta^{q+1}$ la aplicación lineal definida por la aplicación vértice

$$e^i_{q+1} = \begin{cases} p_j & j < i \\ p_{j+1} & j \geq i \end{cases} .$$

Sea X un espacio topológico. Para $q \geq 0$ un *q–simplejo singular σ de X* se define como una aplicación continua $\sigma : \Delta^q \to X$. Para $q > 0$ y $0 \leq i \leq q$ la *$i-$ésima cara de σ*, denotada por $\sigma^{(i)}$ se define como el $(q-1)$–simplejo de X el cual es la composición $\sigma^{(i)} = \sigma \circ e^i_q : \Delta^{q-1} \to \Delta^q \to X$.

El *complejo de cadenas singular de X*, denotado por $\Delta(X)$, se define como el complejo de cadenas libre no negativo $\Delta(X) = \{\Delta_q(X), \partial_q\}$, donde $\Delta_q(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los q–simplejos singulares de X para $q \geq 0$ (y $\Delta_q(X) = 0$ para $q < 0$), y para $q \geq 1$, ∂_q se define por la ecuación $\partial_q(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq q}(-1)^i \sigma^{(i)}$. Este es un complejo de cadenas porque $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Si X es vacío, $\Delta_q(X) = 0$ para toda q. Si $f : X \to Y$ es continua, existe una aplicación de cadenas $\Delta(f) : \Delta(X) \to \Delta(Y)$ definida por $\Delta(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ para un q–simplejo simgular $\sigma : \Delta_q \to X$. Entonces $\Delta(f)$ es una aplicación de cadenas y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.11 *Existe un funtor covariante Δ de la categoría de espacios topológicos a la categoría de complejos de cadenas que asigna a X su complejo de cadenas singular $\Delta(X)$.*

■

Definición 5.12 *Una categoría con modelos consiste de una categoría $\mathfrak{C}$ y un conjunto $\mathfrak{M}$ de objetos de $\mathfrak{C}$ llamados modelos.*

Definición 5.13 *Sea G un funtor covariante de una categoría $\mathfrak{C}$ con modelos $\mathfrak{M}$ a la categoría de grupos abelianos. Una base para G es una colección indexada $\{g_j \in G(M_j)\}_{j\in J}$, donde $M_j \in \mathfrak{M}$ tal que para cualquier objeto $X \in \mathfrak{C}$ la colección indexada $\{G(f)(g_j)\}_{j\in J,\ f\in \hom(M_j,X)}$ es una base para $G(X)$. Si G tiene una base, es llamado un funtor libre sobre $\mathfrak{C}$ con modelos $\mathfrak{M}$.*

Si G es un funtor sobre $\mathfrak{C}$ con modelos $\mathfrak{M}$ y si $h \in \hom(X,Y)$, entonces $G(h)$ aplica cada elemento básico de $G(X)$ en algún elemento básico de $G(Y)$.

Definición 5.14 *Sea G un funtor covariante de una categoría $\mathfrak{C}$ con modelos $\mathfrak{M}$ a la categoría de los complejos de cadenas y morfismos de cadenas. Decimos que G es libre si G_q es un funtor libre para la categoría de grupos abelianos.*

Luego, si $\mathfrak{Top}$ la categoría de los espacios topológicos con modelos $\mathfrak{M}=\{\Delta_q : q \geq 0\}$ y si Δ es el funtor de cadenas singulares. Entonces Δ es libre y no negativo sobre $\mathfrak{C}$ con modelos $\mathfrak{M}$. En efecto si $\zeta_q : \Delta_q \subset \Delta_q$, entonces $\{\zeta_q \in \Delta_q(\Delta^q)\}$ es una base de Δ_q.

Sea G un funtor covariante sobre una categoría $\mathfrak{C}$ a la categoría $\mathfrak{H}$. Entonces existen funtores covariantes $H_q(G)$, para toda q, de $\mathfrak{C}$ a la categoría de grupos abelianos que asignan a un objeto X el grupo $H_q(G(X))$.

Definición 5.15 *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con modelos $\mathfrak{M}$, un funtor G de $\mathfrak{C}$ a la categoría de complejos de cadenas es llamado acíclico en dimensiones positivas si $H_q(G(M)) = 0$ para $q > 0$ y $M \in \mathfrak{M}$. En otras palabras, la siguiente sucesión es exacta*

$$\cdots \to G_q(M) \xrightarrow{\partial_q} G_{q-1}(M) \xrightarrow{\partial_{q-1}} G_{q-2}(M) \to \cdots \to$$
$$\to G_0(M) \xrightarrow{\varepsilon} H_0(G(M)) \to 0.$$

La demostración del resultado que se enuncia a continuación puede consultarse en [12].

Teorema 5.16 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con modelos $\mathfrak{M}$ y sean G, G' funtores covariantes de $\mathfrak{C}$ a la categoría de complejos de cadenas tales que G es libre y no negativo y G' es acíclico en dimensiones positivas. Entonces*

(a) Cualquier transformación natural $H_0(G) \to H_0(G')$ es inducida por un morfismo de cadenas natural $\phi : G \to G'$.

(b) Si dos morfimos de cadenas naturales ϕ, $\phi' : G \to G'$ inducen la misma transformación natural $H_0(G) \to H_0(G')$ entonces existe una homotopía de cadenas natural $\Phi = \{\Phi_q : G_q \to G'_{q+1}\}_{q\geq 0}$, tal que $\partial_{q+1}\Phi_q + \Phi_{q-1}\partial_q = \phi_q - \phi'_q$, $q \geq 0$ $(\Phi_{-1} = 0)$. ■

Una *aumentación* (sobre $\mathbb{Z}$) de un complejo de cadenas C es un epimorfismo $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon \circ \partial_1 : C_1 \to C_0 \to \mathbb{Z}$ es trivial. Un *complejo de cadenas aumentado* es un complejo de cadenas no negativo C con aumentación. Una aumentación ε de un comlejo de cadenaspuede ser visto como un epimorfismo de cadenas de C al complejo de cadenas (también denotado por $\mathbb{Z}$) cuyo único grupo de cadenas no trivial es $\mathbb{Z}$ en grado 0. Para este complejo de cadenas $\mathbb{Z}$, es claro que $H_q(\mathbb{Z})$=0 para $q \neq 0$ y $H_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Por lo tanto ε induce un epimorfismo $\varepsilon_* : H_0(C) \to \mathbb{Z}$. Por lo tanto un complejo de cadenas aumentado tiene un grupo de homología no trivial en grado 0.

Una aplicación de cadenas $\phi : C \to C'$ entre complejos de cadenas aumentados, *preservan aumentación* si $\varepsilon' \circ \phi = \varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$. Obsérvese que ϕ preserva aumentación si y sólo si ϕ_* lo hace; esto es, si y sólo si $\varepsilon'_* \circ \phi_* = \varepsilon_* : H_0(C) \to \mathbb{Z}$. Existe un a categoría de complejos de cadenas aumentados y aplicaciones de cadenas que preservan aumentación. Una homotopía de cadenas en esta categoría es cualquier homotopía de cadenas entre aplicaciones de cadenas en la categoría.

Queremos separar la parte no trivial de $H_0(C)$ de un complejo de cadenas aumentado C. El *complejo de cadenas reducido* $\tilde{C}$ de un complejo de cadenas aumentado C se define por $\tilde{C}_q = C_q$ si $q \neq 0$, $\tilde{C}_0 = \ker \varepsilon$, y $\tilde{\partial}_q = \partial_q$ (observemos que $\partial_1(\tilde{C}_1) \subset \tilde{C}_0$ porque $\varepsilon\partial_1 = 0$). Así $\tilde{C}$ es el kernel de la aplicación de cadenas $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$. Si $\phi : C \to C'$ es una aplicación de cadenas que preserva aumentación, ϕ induce una aplicación de cadenas $\tilde{C} \to \tilde{C}'$ entre sus complejos de cadenas reducidos. El grupo de homología $H(\tilde{C})$ es llamado el *grupo de homología reducido* de C y se denota por $\tilde{H}(C)$.

Claramente, existe una inclusión de cadenas $\tilde{C} \subset C$.

Lema 5.17 *Si C es un complejo de cadenas aumentado, entonces*

$$H_q(C) \cong \begin{cases} \tilde{H}_q(C) & q \neq 0 \\ \tilde{H}_0(C) & q = 0 \end{cases}$$

Demostración. Dado que $\mathbb{Z}$ es un grupo libre, $C_0 \cong \tilde{C}_0 \oplus \mathbb{Z}$. Entonces $Z_q(C) = Z_q(\tilde{C})$ si $q \neq 0$, $Z_0(C) \cong Z_0(\tilde{C}) \oplus \mathbb{Z}$, y $B_q(C) = B_q(\tilde{C})$ para toda q. ■

Es claro que si $\phi : C \to C'$ es una aplicación de cadenas que preserva aumentación, el isomorfismo del lema 5.17 conmuta con ϕ_*. También es claro que si C es un complejo de cadenas libre aumentado, $\tilde{C}$ es un complejo de cadenas libre.

Se sigue del lema 5.17 que si C es un complejo de cadenas aumentado, $H_0(C) \neq 0$. Por lo tanto un complejo de cadenas aumentado nunca es acíclico. Lo más que podemos esperar es que $\tilde{C}$ sea acíclico.

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con modelos $\mathfrak{M}$. Un funtor G' de $\mathfrak{C}$ a la categoría de complejos de cadenas aumentados (y aplicaciones de cadenas que preservan aumentación) decimos que es *acíclico* si $\tilde{G}'(M)$ es acíclico para $M \in \mathfrak{M}$. Para complejos de cadenas aumentados se tiene la siguiente forma del teorema de modelos acíclicos.

Teorema 5.18 *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con modelos $\mathfrak{M}$ y sean G y G' funtores covariantes de $\mathfrak{C}$ a la categoría de complejos de cadenas aumentados tales que G es libre y G' es acíclico. Ex-*

isten aplicaciones de cadenas naturales que preservan aumentación de G a G', y cualesquiera dos de estas aplicaciones son homotópicas de cadenas naturalmente. ■

Enseguida vamos a introducir el concepto ciertas transformaciones naturales que son llamadas operaciones cohomológicas y vamos a definir el conjunto particular de operaciones cohomológicas llamado los cuadrados de Steenrod.

Definición 5.19 *Sean p y q enteros fijos y G y G' R−módulos fijos. Una operación cohomológica θ de tipo $(p,q;G,G')$ es una transformación natural del funtor $H^p(\ ;G)$ al funtor $H^q(\ ;G')$ (ambos son funtores contravariantes de cohomología singular definidos sobre la categoría de espacios topológicos). Así θ asigna a un espacio X una función (la cual no se asume como un morfismo) $\theta_X : H^p(X;G) \to H^q(X;G')$ tal que si $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces existe un cuadrado conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y;G) & \xrightarrow{\theta_Y} & H^q(Y;G') \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^p(X;G) & \xrightarrow[\theta_X]{} & H^q(X;G') \end{array} .$$

Definición 5.20 *Diremos que una operación θ es aditiva si θ_X es un morfismo para cualquier X.*

Vamos a definir una sucesión de operaciones Sq^i llamadas los cuadrados de Steenrod, cada Sq^i es una operación cohomológica de tipo $(q, q+i; \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ para toda q. De aquí en adelante vamos a suponer que todos los módulos de cohomología están sobre $\mathbb{Z}_2$.

CS Los *cuadrados de Steenrod* $\{Sq^i\}_{i\geq 0}$ son operaciones cohomológicas aditivas

$$Sq^i : H^q(X) \to H^{q+i}(X)$$

definidas para toda q tales que

(a) $Sq^0 = 1$.

(b) Si $\deg u = q$, entonces $Sq^q u = u \smile u$.

(c) Si $q > \deg u$, entonces $Sq^q u = 0$.

(d) Si $u \in H^*(X)$ y $v \in H^*(Y)$ la siguiente fórmula de Cartan es válida

$$Sq^k(u \times v) = \sum_{i+j=k} Sq^i u \times Sq^j v.$$

Las propiedades de arriba caracterizan a las operaciones cohomológicas Sq^i. No probaremos la unicidad (esta prueba puede consultarse en [13]), pero los vamos a construir. Primero vamos a establecer una fórmula equivalente a la fórmula de Cartan.

Lema 5.21 *Si u, $v \in H^*(X)$, la siguiente fórmula de Cartan es válida*

$$Sq^k(u \smile v) = \sum_{i+j=k} Sq^i u \smile Sq^j v.$$

Demostración. Puesto que $u \smile v = \Delta^*(u \times v)$, donde $\Delta : X \to X \times X$ es la aplicación diagonal, el resultado se sigue de la fórmula de Cartan y las propiedades funtoriales de Sq^i. ∎

Para cualquier complejo de cadenas C sea $T : C \otimes C \to C \otimes C$ la aplicación de cadenas que intercambia los factores; esto es,

$$T(c_1 \otimes c_2) = c_2 \otimes c_1$$

la cual es una aplicación de cadenas sobre $\mathbb{Z}_2$.

Lema 5.22 *Existe una sucesión $\{D_j\}_{j \geq 0}$ de morfismos funtoriales $D_j : \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ de grado j tal que*

(a) D_0 es una aplicación de cadenas que conmuta con aumentación.

(b) Para $j > 0$, $\partial D_j + D_j\partial + D_{j-1} + TD_{j-1} = 0$.

Si $\{D_j\}$ y $\{D'_j\}$ son dos sucesiones como la de arriba, entonces existe una sucesión $\{E_j\}_{j\geq 0}$ de morfismos funtoriales $E_j : \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ de grado j tal que

(c) $E_0 = 0$.

(d) Para $j \geq 0$, $\partial E_{j+1} + E_{j+1}\partial + E_j + TE_j + D_j + D'_j = 0$.

Demostración. Sea R el anillo del grupo de $\mathbb{Z}_2$ sobre el campo $\mathbb{Z}_2$. Veamos a R como el cociente del anillo de polinomios $\mathbb{Z}_2(t)$ módulo el ideal generado por el polinomio $t^2 + 1 = 0$. Así los elementos de R tienen la forma $a + bt$, donde a, $b \in \mathbb{Z}_2$.

Veamos a $\mathbb{Z}_2$ como un R–módulo trivial (esto es, todo elemento de R induce la aplicación identidad de $\mathbb{Z}_2$) y sea C la resolución libre de $\mathbb{Z}_2$ sobre R; esto es, se tiene la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

en donde cada C_q es un R–módulo libre con un generador d_q para toda $q \geq 0$ que tiene frontera $\partial(d_q) = (1+t)d_{q-1}$ para $q \geq 1$ y aumentación $\varepsilon(d_0) = 1$. El funtor que asigna a un espacio X el complejo de cadenas $\Delta(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} C$ es aumentada y libre sobre R con modelos $\{\Delta_q\}_{q\geq 0}$ y base $\{\zeta_q \otimes d_j\}$. Veamos a $\Delta(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Delta(X)$ como un complejo de cadenas sobre R, con t actuando sobre $\Delta(X) \otimes \Delta(X)$ en la misma forma que lo hace T. Entonces $\Delta(X) \otimes \Delta(X)$ es aumentado y acíclico, con modelos $\{\Delta_q\}_{q\geq 0}$. Se sigue del teorema 5.18 (el cual es válido para complejos de cadenas sobre R) que existen aplicaciones naturales $\phi : \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ que preservan aumentación, y cualesquiera dos de ellas son homotópicas de cadenas de manera natural.

Existe una correspondencia biyectiva entre una aplicación $\phi : \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ de grado cero y una sucesión de aplicaciones

$$D_j : \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X) \qquad j \geq 0$$

de grado j tales que $D_j(c) = \phi(c \otimes d_j)$. Entonces ϕ es una aplicación de cadenas que preserva aumentación si y sólo si $\{D_j\}$ satisface (a) y (b). Así existen familias $\{D_j\}$ que satisfacen (a) y (b) y cualquier de estas familias corresponde a alguna ϕ.

Similarmente, existe una correspondencia biyectiva entre una aplicación $H : \Delta(X) \otimes C \to \Delta(X) \otimes \Delta(X)$ de grado 1 y una sucesión de aplicaciones

$$E_j : \Delta(X) \to \Delta(X) \otimes \Delta(X) \qquad j \geq 0$$

de grado j tal que $E_0 = 0$ y $E_j(c) = H(c \otimes d_{j-1})$ para $j \geq 1$. Entonces H es una homotopía de cadenas de ϕ a ϕ' si y sólo si $\{E_j\}$ satisface (c) y (d) para las sucesiones $\{D_j\}$ y $\{D'_j\}$ correspondientes a ϕ y ϕ', respectivamente. Así si $\{D_j\}$ y $\{D'_j\}$ son dos sucesiones que satisfacen (a) y (b), existe una sucesión $\{E_j\}$ que satisface (c) y (d). ■

Dada una sucesión $\{D_j\}_{j \geq 0}$ como en el lema 5.22, definimos homomorfismos

$$D_j^* : Hom(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbb{Z}_2) \to Hom(\Delta(X), \mathbb{Z}_2)$$

de grado $-j$ por

$$D_j^*(f)(\sigma) = f(D_j \sigma)$$

para $\sigma \in \Delta_q(X)$ y $f \in Hom(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbb{Z}_2)$. Si $c^* \in Hom(\Delta_q(X), \mathbb{Z}_2)$ es una q–cocadena de $\Delta(X)$, entonces

$$c^* \otimes c^* \in Hom(\Delta(X) \otimes \Delta(X), \mathbb{Z}_2),$$

y definamos una $(q+i)$–cocadena $Sq^i c^* \in Hom(\Delta(X), \mathbb{Z}_2)$ por

$$Sq^i(c^*) = \begin{cases} 0 & i > q \\ D^*_{q-i}(c^* \otimes c^*) & i \leq q \end{cases}.$$

Ahora vamos a establecer algunas propiedades de aplicaciones de cocadenas. Será conveniente asumir que $D_j = 0$ para $j < 0$. Entonces el 5.22(b) se tiene para toda j.

Lema 5.23 *Si $\delta c^* = 0$, entonces $\delta(Sq^i c^*) = 0$.*

Demostración. El resultado es inmediato si $i > q$. Si $i \leq q$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta(Sq^i c^*)(\sigma) &= D^*_{q-i}(c^* \otimes c^*)(\partial\sigma) = (c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\partial\sigma) \\ &= (c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma) + (c^* \otimes c^*)(D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) \\ &= (c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma) \end{aligned}$$

en donde la última igualdad se tiene porque $(c^* \otimes c^*)(Tc) = (c^* \otimes c^*)c$ para cualquier $c \in \Delta(X) \otimes \Delta(X)$. Entonces tenemos

$$(c^* \otimes c^*)(\partial D_{q-i}\sigma) = \delta(c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\sigma) = 0$$

porque $\delta c^* = 0$. ∎

Lema 5.24 *Si $c^* = \delta\bar{c}^*$, entonces $Sq^i c^* = \delta[D^*_{q-i}(\bar{c}^* \otimes c_*) + D^*_{q-i-1}(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)]$.*

Demostración. Si $i > q$, ambos lados son cero. Si $i \leq q$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}(Sq^i c^*)(\sigma) &= D^*_{q-i}(\delta\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(\sigma) = \delta(\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(D_{q-i}(\sigma)) \\ &= (\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(D_{q-i}\partial\sigma + D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) \\ &= D^*_{q-i}(\bar{c}^* \otimes c^*)(\partial\sigma) + \delta(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene porque

$$(\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma + TD_{q-i-1}\sigma) = (\bar{c}^* \otimes \delta\bar{c}^* + \delta\bar{c}^* \otimes \bar{c})(D_{q-i-1}\sigma).$$

También se tiene

$$\begin{aligned}\delta(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\sigma) &= (\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(D_{q-i-1}\partial\sigma + D_{q-i-2}\sigma + TD_{q-i-2}\sigma = \\ &= D^*_{q-i-1}(\bar{c}^* \otimes \bar{c}^*)(\partial\sigma)\end{aligned}$$

Entonces el resultado se sigue sustituyendo esta igualdad en el sumando derecho del mismo lado de la primera ecuación. ■

Lema 5.25 *Si c_1^* y c_2^* son cociclos, entonces*

$$Sq^i(c_1^* + c_2^*) = Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^* + \delta D_{q-i+1}(c_1^* + c_2^*).$$

Demostración. Si $i > q$ ambos lados son cero. Si $i \leq q$, se tiene que

$$\begin{aligned}Sq^i(c_1^* + c_2^*)(\sigma) &= [(c_1^* + c_2^*) \otimes (c_1^* + c_2^*)](D_{q-i}\sigma) \\ &= (c_1^* \otimes c_1^* + c_2^* \otimes c_2^*)(D_{q-i}\sigma) + (c_1^* \otimes c_2^*)(D_{q-i}\sigma + TD_{q-i}\sigma) \\ &= (Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^*)(\sigma) + (c_1^* \otimes c_2^*)(D_{q-i+1}\partial\sigma + \partial D_{q-i+1}\sigma) \\ &= [Sq^i c_1^* + Sq^i c_2^* + \delta D^*_{q-i+1}(c_1^* \otimes c_2^*)](\sigma)\end{aligned}$$

en donde la última igualdad se tiene porque $\delta(c_1^* \otimes c_2^*) = 0$. ■

Se sigue entonces que existe un morfismo funtorial bien definido

$$Sq^i : H^q(X) \to H^{q+i}(X)$$

definido por

$$Sq^i\{c^*\} = \{Sq^i c^*\}.$$

Si $\{D_j'\}$ es otra sucesión que satisface el lema 5.22*a* y 5.22*b*, y Sq'^i se define usando esta sucesión, sea $\{E_j\}$ una sucesión que satisface 5.22*c* y 5.22*d*. Si c^* es un q–cociclo de $\Delta(X)$, entonces

$$(c^* \otimes c^*)(D_{q-i}\sigma + D'_{q-i}\sigma + E_{q-i+1}\partial\sigma) = 0.$$

Por lo tanto

$$Sq^i c^* + Sq'^i c^* + \delta E^*_{q-i+1}(c^* \otimes c^*) = 0$$

mostrando es de esta manera que $Sq^i\{c^*\} + Sq'^i\{c^*\}$. Por tanto, Sq^i está definido de manera única independientemente de la elección en particular de $\{D_j\}$. Ahora vamos a verificar que estas operaciones cohomológicas $\{Sq^i\}$ satisfacen los axiomas que caracterizan a los cuadrados de Steenrod.

Teorema 5.26 *Las operaciones cohomológicas aditivas $\{Sq^i\}$ definidas arriba satisfacen las condiciones de la (a) a la (d) que se enumeraron en 5.2.*

Demostración. Denotemos por $C(\Delta^q)$ al complejo de cadenas orientado del simplejo $\Delta(\Delta^q)$. Sobre $\mathbb{Z}_2$ existe una única orientación para cada simplejo, y $C(\Delta^q)$ es isomorfo al subcomplejo de $\Delta(\Delta^q)$ generado por los simplejos singulares que son las caras de Δ^q. Veamos entonces a $C(\Delta^q)$ como encajado en $\Delta(\Delta^q)$ de esta manera. $\tilde{C}(\Delta^q)$ es acíclico, y si $\lambda : \Delta^p \to \Delta^q$ es una p-cara de Δ^q, $\Delta(\lambda)(C(\Delta^p)) \subset C(\Delta^q)$. Se sigue que podemos encontrar una sucesión $\{D_j\}$ que satisface el lema 5.22*a* y 5.22*b* tal que $D_j(\zeta_q) \in C(\Delta^q) \otimes C(\Delta^q)$ para toda q y j. Para una sucesión tal, $D_j(\zeta_q) = 0$ si $j > q$, ya que $(C(\Delta^q) \otimes C(\Delta^q))_s = 0$ si $s > 2q$. Por lo que $D_j(\sigma) = 0$ para cualquier $\sigma \in \Delta_q(X)$ con $j > q$.

Enseguida, vamos a mostrar por inducción sobre q que $D_q(\zeta_q) = \zeta_q \otimes \zeta_q$ para toda q. Si $q = 0$, entonces $D_0(\zeta_0)$ debe tener aumentación no cero por el lema 5.22*a*. El único elemento de $C(\Delta^0) \otimes C(\Delta^0)$ con aumentación no cero es $\zeta_0 \otimes \zeta_0$. Por lo tanto $D_0(\zeta_0) = \zeta_0 \otimes \zeta_0$. Supongamos que para $q > 0$ se tiene que $D_{q-1}(\zeta_{q-1}) = \zeta_{q-1} \otimes \zeta_{q-1}$. O $D_q(\zeta_q) = \zeta_q \otimes \zeta_q$ o $D_q(\zeta_q) = 0$. En el último caso, por el lema 5.22*b*, tenemos que

$$D_{q-1}(\zeta_q) + TD_{q-1}(\zeta_q) = 0$$

ya que $D_q(\partial \zeta_q) = 0$. De esto se sigue que $D_{q-1}(\zeta_q) = \sum a_i(\zeta_q \otimes \zeta_q^{(i)} + \zeta_q^{(i)} \otimes \zeta_q)$, donde $a_i = 0$ o $a_i = 1$. Esto es una contradicción, porque

$$D_{q-2}(\zeta_q) + TD_{q-2}(\zeta_q) = \partial D_{q-1}(\zeta_q) + D_{q-1}(\partial \zeta_q)$$

y $\zeta_q^{(i)} + \zeta_q^{(i)}$ tiene un coeficiente de $2a_i + 1 = 1$ en la derecha y un coeficiente de 0 en la izquierda.

Por lo tanto, con esta elección de $\{D_j\}$ tenemos $D_j(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$ si σ tiene grado q. Entonces

$$(Sq^0 c^*)(\sigma) = (c^* \otimes c^*) D_q(\sigma)) = (c^*(\sigma))^2$$

Porque $a^2 = a$ para $a \in \mathbb{Z}_2$, vemos que $Sq^0 c^* = c^*$, y así $Sq^0 = 1$, lo que muestra que la condición 5.2*a* se satisface.

Por definición, D_0 es una aproximación de cadenas a la diagonal. Por lo tanto $\{D_0^*(c^* \otimes c^*)\} = \{c^*\} \smile \{c^*\}$ para cualquier cociclo c^*, y así $Sq^q u = u \smile u$ si el grado de u es q. Por lo tanto la condición 5.2b se satisface. De la definición de Sq^i la condición 5.2c se satisface trivialmente.

Unicamente falta por verificar la fórmula de Cartan. Sea $\{D_j\}$ una sucesión que satisface el lema 5.22a y 5.22b y sea $\{D_j^X\}$ la colección de morfismos para $\Delta(X)$. En la categoría de pares de espacios topológicos X y Y la sucesión $\{D_k^{X\times Y}\}$ y la sucesión $\{\bar{T}\sum_{i+j=k} T^k D_i^X \otimes D_j^Y\}$, donde

$$\bar{T} : [\Delta(X) \otimes \Delta(X)] \otimes [\Delta(Y) \otimes \Delta(Y)] \to [\Delta(X) \otimes \Delta(Y)] \otimes [\Delta(X) \otimes \Delta(Y)]$$

intercambia el segundo y el tercer factor; ambos satisfacen el lema 5.22a y 5.22b. Entonces una sucesión $\{E_k^{X\times Y}\}$ que satisface 5.22c y 5.22d con respecto a ellos puede ser definido por el método de modelos acíclicos. Por lo tanto la sucesión

$$\{\bar{T} \sum_{i+j=k} T^k D_i^X \otimes D_j^Y\}$$

puede ser usada para definir $Sq^k(u \times v)$ para $u \in H^*(X)$ y $v \in H^*(Y)$. Sea c_1^* una p–cocadena de X, c_2^* una q–cocadena de Y, σ_1 un p'–simplejo singular de X con $p \leq p' \leq 2p$, y σ_2 un q'–simplejo de Y con $q \leq q' \leq 2q$, donde $p' + q' = p + q + k$. Entonces

$$\begin{aligned}
Sq^k(c_1^* \otimes c_2^*)(\sigma_1 \otimes \sigma_2) &= [(c_1^* \otimes c_2^*) \otimes (c_1^* \otimes c_2^*)](D_{p+q-k}^{X\times Y}(\sigma_1 \otimes \sigma_2))) \\
&= [(c_1^* \otimes c_1^*) \otimes (c_2^* \otimes c_2^*)](\textstyle\sum_{i+j=p+q-k} T^{p+q-k} D_i^X \sigma_1 \otimes D_j^Y \sigma_2) \\
&= [(c_1^* \otimes c_1^*)(D_{2p-p'}\sigma_1)][(c_2^* \otimes c_2^*)(D_{2q-q'}\sigma_2)] \\
&= Sq^{p'-p} c_1^* \otimes Sq^{q'-q} c_2^*)(\sigma_1 \otimes \sigma_2)
\end{aligned}$$

Variando σ_1 y σ_2, vemos que $Sq^k(c_1^* \otimes c_2^*) = \sum_{i+j=k} Sq^i c_1^* \otimes Sq^j c_2^*$. Pasando a cohomología y usando el morfismo natural

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(\Delta(X) \otimes \Delta(Y)) \cong H^*(X \times Y)$$

que manda al producto tensorial al producto cruz, obtenemos

$$Sq^i(u \times v) = \sum_{i+j=k} Sq^i u \times Sq^j v$$

lo que muestra que la condición 5.2d se satisface. ■

5.3 Transformaciones multiplicativas y teorema de Rieman Roch

Como siempre, sea h^* una teoría de cohomología multiplicativa. Para $(X, A) \in \mathfrak{Top}^2$, definimos a $h^{**}(X, A)$ como el conjunto de series formales de Laurent

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i, \text{ con } \alpha_i \in h^i(X, A), \ \alpha_i = 0 \text{ para toda } i < q$$

para alguna $q \in \mathbb{Z}$. Definimos una suma y una multiplicación en $h^{**}(X, A)$ como sigue: si $\alpha = \sum \alpha_i$ y $\beta = \sum \beta_i$, entonces $\alpha + \beta = \sum(\alpha_i + \beta_i)$ y el producto $\alpha \smile \beta$ está dado por $(\alpha \smile \beta)_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i + \beta_j$.

Así, $h^{**}(X, A)$ es un anillo (no conmutativo) bajo estas operaciones, y una aplicación $f : (X, A) \to (Y, B)$ induce un morfismo de anillos $f^{**} : h^{**}(Y, B) \to h^{**}(X, A)$ tomando f^* en cada coordenada. Similarmente definimos

$$\delta^{**} : h^{**}(A) \to h^{**}(X, A).$$

Definición 5.27 *Supongamos que h^* y k^* son teorías multiplicativas. Entonces decimos que $\tau : h^{**} \to k^{**}$ es una transformación multiplicativa si*

i) *τ es una transformación natural y aditiva entre los funtores h^{**} y k^{**} con respecto a aplicaciones f^{**},*

ii) $\tau(\alpha \smile \beta) = \tau(\alpha) \smile \tau(\beta)$, *y*

iii) *Si $1_h \in h^{**}(\mathbb{S}^0, *)$ y $1_k \in k^{**}(\mathbb{S}^0, *)$ son las unidades en h^{**} y k^{**} respectivamente, y $s = \sum^{**} 1_h \in h^{**}(\mathbb{S}^1, *)$ y $s' = \sum^{**} 1_k \in k^{**}(\mathbb{S}^1, *)$, entonces $\tau(s) = s'$.*

Proposición 5.28 *Si $u_1 \in h^{**}(X_1, A_1)$ y $u_2 \in h^{**}(X_2, A_2)$, el producto $u_1 \times u_2 \in h^{**}(X_1 \times X_2, X_1 \times A_2 \cup A_1 \times X_2)$ y $\tau(u_1 \times u_2) = \tau u_1 \times \tau u_2$.*

Demostración. Sean $p : X_1 \times X_2 \to X_1$ y $q : X_1 \times X_2 \to X_2$ las proyecciones,

$$u_1 \times u_2 = p^{**}(u_1) \smile q^{**}(u_2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \tau(u_1 \times u_2) &= \tau(p^{**}(u_1) \smile q^{**}(u_2) \\ &= \tau(p^{**}(u_1)) \smile \tau(q^{**}(u_2)) \\ &= p^{**}(\tau u_1) \smile q^{**}(\tau u_2) \\ &= \tau u_1 \smile \tau u_2 \end{aligned} . \blacksquare$$

Proposición 5.29 *Si $u_1 \in h^{**}(X, A_1)$ y $u_2 \in h^{**}(X, A_2)$, entonces el producto $u_1 \smile u_2 \in h^{**}(X, A_1 \cup A_2)$ y $\tau(u_1 \smile u_2) = \tau u_1 \smile \tau u_2$.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y de la naturalidad de τ con respecto al morrfismo inducido por la diagonal $\Delta : X \to X \times X$. $\blacksquare$

Ahora supongamos que ξ es un haz vectorial sobre X con orientaciones $U \in h^n(T(\xi), *)$ y $V \in k^n(T(\xi), *)$; podemos considerar a U y V como elementos de $h^{**}(T(\xi), *)$ y $k^{**}(T(\xi), *)$. Entonces U y V inducen los siguiente isomorfismos

$$\varphi_h : h^{**}(X) \to h^{**}(T(\xi),*) \quad \text{y}$$
$$\varphi_k : k^{**}(X) \to k^{**}(T(\xi),*) \quad .$$

Definición 5.30 *Para $x \in h^{**}(X)$, definimos*

$$\tau(\xi,x) \equiv \varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(x) \in k^{**}(X).$$

Lema 5.31 *Sea ξ un haz vectorial $h-$ y $k-$orientado sobre X, con orientaciones U y V respectivamente. Entonces para $x \in h^{**}(X)$, $\tau(x) \smile \tau(\xi,1) = \tau(\xi,x)$.*

Demostración. Hagamos algunos cálculos:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(\tau(x) \smile \tau(\xi,1)) &= \varphi_k(\tau(x) \smile \varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(1)) \\
&= \pi_k^{**}(\tau(x) \smile \varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(1)) \smile V \\
&= \pi_k^{**}(\tau(x)) \smile \pi_k^{**}(\varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(1)) \smile V \\
&= \tau\pi_h^{**}(x) \smile \varphi_k(\varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(1)) \\
&= \tau\pi_h^{**}(x) \smile \tau\varphi_h(1) \\
&= \tau\pi_h^{**}(x) \smile \tau U \\
&= \tau(\pi_h^{**}(x) \smile U) \\
&= \tau\varphi_h(x).
\end{aligned}$$

Así, $\tau(x) \smile \tau(\xi,1) = \varphi_k^{-1}\tau\varphi_h(x) = \tau(\xi,x)$.

A continuación vamos a mostrar el teorema de Riemann-Roch topológico.

Teorema 5.32 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación $h-$orientada entre variedades compactas, cerradas y $\tau : h^{**} \to k^{**}$ es una transformación multiplicativa de teorías de cohomología, entonces para $x \in h^{**}(X)$,*

$$\tau f!^h(x) = f!^k(\tau(x) \smile \tau(\nu_f,1)).$$

Demostración. Observemos primeramente que una h–orientación $U \in h^n(T\xi,*)$ de un haz vectorial determina una k^*–orientación $\tau U \in k^n(T\xi,*)$. En efecto, denotemos por $i: S^n \to T\xi$ la inclusión de la fibra y por $s = \sum^{**} 1_h$, $s' = \sum^{**} 1_k$. Puesto que

$$i^*U = s \in h^n(S^n,*) \qquad y \qquad \tau s = s' \in k^n(S^n,*);$$

se tiene que $s' = \tau(i^*U) = \tau(i^*U)$ y así ξ está k–orientado. Por lo tanto, no necesitamos asumir adicionalmente que $f: X \to Y$ está k–orientada; por lo que, en el enunciado y demostración de este teorema el especificar que f está k–orientada es irrelevante.

Ahora vamos a desarrollar el lado derecho de la igualdad que deseamos mostrar

$$\begin{aligned}
f!^k(\tau(x) \smile \tau(\nu_f,1)) &= (\textstyle\sum_k^l)^{-1} \circ \bar{f}_k^{**} \circ \varphi_k(\tau(x) \smile \tau(\nu_f,1)) \\
&= (\textstyle\sum_k^l)^{-1} \circ \bar{f}_k^{**} \circ \varphi_k(\tau(\nu_f,x)) \\
&= (\textstyle\sum_k^l)^{-1} \circ \bar{f}_k^{**} \circ \tau\varphi_h(x) \\
&= \tau(\textstyle\sum_h^l)^{-1} \circ \bar{f}_h^{**} \circ \varphi_h(x) \\
&= \tau f!^h(x)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del lema 5.31, la tercera por la definición 5.30 y la cuarta por naturalidad de τ. ∎

Utilizando los cuadrados de Steenrod junto con el isomorfismo de Thom φ, la clase de Stiefel-Whitney total $w(\xi)$ se define por $w(\xi) = \varphi^{-1}Sq\varphi(1)$. Así pues, aplicando el teorema 5.32 a la transformación multiplicativa Sq (cuadrado de Steenrod total) y utilizando la definición del morfismo $f!$ como se dió en la observación 5.10 se tiene que

$$\begin{aligned} Sqf!(x) &= f!(Sq(x) \smile \varphi^{-1}Sq\varphi(1)) \\ &= f!(Sq(x) \smile w(\nu_f) \end{aligned},$$

donde $w(\nu_f)$ es la clase de Stiefel-Whitney total. Tomando $x = 1$, obtenemos que $Sq^i f!(1) = f!w_i(\nu_f)$.

Como $D(1) = \sigma(V)$, entonces $f!(1) = D^{-1}f_*\sigma(V) = \bar{\mu}[V, f]$, y así $Sq^i\bar{\mu}\ [V, f] = f!w_i(\nu_f)$.

Dado que $\bar{\mu}$ es suprayectiva, obtenemos que para toda $a \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$

$$Sq^i(a) = f!w_i(\nu_f)$$

donde $a = D^{-1}f_*(\sigma(V))$.

Bibliografía

[1]

[2] D. Husemoller. Fibres Bundles. Springer-Verlag 1966. Graduate text in Mathematics.

[2] M. Greenberg. Lecture on Algebraic Topology. W. A. Benjamin, New York. 1967.

[3] R. Switzer. Algebraic Topology -Homotopy and Homology. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1975.

[4] J. Milnor and J.Stasheff. Characteristic Classes. Princeton N. J. University 1971.

[5] W. S. Massey. Singular Homology Theory. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1980.

[6] E. Dyer. Cohomology Theories. W. A. Benjamin, Inc. New York. 1969.

[7] A. Dold. Lectures on General Cohomology. Mimeographed notes, Aarhus University, 1968.

[8] P. J. Hilton. A Course in Homological Algebra. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1970.

[9] A. Dold. Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1972.

[10] S. Eilenberg and N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University, 1952.

[11] J. Milnor. On Axiomatic Homology Theory, Pac. J. of Math., 12 (1962), 337-341.

[12] E. H. Spanier. Algebraic Topology

[13] N. Steenrod y D. Epstein. Cohomology operations. Annals of Mathematics Studies No. 50, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[14] P. E. Conner. Differentiable periodic maps. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1979.