

00384

1  
2e



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Estimación de altas y bajas energías para la  
ecuación de Dirac y un teorema de Levinson  
para el caso de masa cero.

## T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de  
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

p r e s e n t a

HERMINIO BLANCARTE SUAREZ



1996

Director de Tesis:

Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

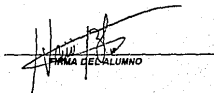
**RESUMEN DE LA TESIS:** (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina en 25 renglones a un espacio como máximo, sin salir del extensión de este cuadro.

La teoría de dispersión para la ecuación de Dirac con un potencial con simetría radial es estudiada. El término principal a altas energías es calculado y se demuestra un teorema de Parzen. En el caso de masa cero el desarrollo a bajas energías es analizado, el cual es esencialmente diferente al desarrollo a bajas energías para el caso de masa positiva se demuestra además un teorema de Levinson bajo la hipótesis de que el potencial es integrable sobre  $(0, \infty)$ .

The scattering theory for the Dirac equation with radial potential is studied. The leading term at high energy is computed and Parzen's theorem is proved. In the case of zero mass, the behavior at low energy is analyzed, which turns out to be different from the low energy behavior for positive mass, and an appropriate version of Levinson's theorem is proved under the assumption that the potential is integrable over  $(0, \infty)$ .

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA QUEDARA SUSPENDIDO EL TRAMITE DEL EXAMEN.

FECHA DE SOLICITUD 07-08-96

  
FIRMA DEL ALUMNO

Acompaño los siguientes documentos:

- Nominamiento del Jurado del examen de grado
- Aprobación del trabajo escrito por cada miembro del Jurado.
- Copia de la última revisión de estudios

**TESIS**

**COMPLETA**

**Estimación de altas y bajas energías para la  
ecuación de Dirac y un teorema de Levinson  
para el caso de masa cero**

**Herminio Blancarte Suárez**

**Director de tesis: Ricardo Alberto Weder Zaninovich**

## CONTENIDO

<i>Prólogo</i> .....	3
<b>I. Antecedentes</b> ..... 6	
1.1. El Operador Libre de Dirac $H_0$ .....	6
1.2. Soluciones para la Ecuación libre de Dirac.....	7
1.3. $H_0$ definido en el Espacio de Fourier o el Espacio de Momentos: $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$ .....	8
1.4. Los Subespacios Espectrales de $H_0$ .....	10
1.5. Espacios para los Dominios de Definición de $H_0$ .....	12
1.6. Realización Autoadjunta del Operador $H_0$ .....	14
1.7. Realización Autoadjunta del Operador de Dirac en Interacción, $H \equiv H_0 + V(x)$ .....	18
1.8. Reducción en el caso de Potenciales con Simetría Radial 20	
1.8.1. Coordenadas Polares y la Descomposición "Radial" y "Angular" .....	20
1.8.2. La Forma Polar del Operador Libre de Dirac y los Operadores que conmutan con él.....	23
1.8.3. La Descomposición del "Espacio Angular" $L^2(S^2)^4$ en Subespacios de Autofunciones del Momento Angular Total..	24
1.8.4. Descomposición del Operador de Dirac en Sumas Directas de Operadores de Dirac de Ondas Parciales.....	25
<b>II. Propiedades Básicas de las Soluciones Regular y de Jost</b> ... 31	
II.1. Introducción .....	31
II.2. Espacios de Funciones.....	32

II.3. El Espectro de $H_j$ y sus Propiedades .....	33
II.4. Una Superficie de Riemann, $\mathfrak{R}$ , apropiada para la energía .....	33
II.5. La Solución Regular $\varphi_j(k, r, \varepsilon)$ y la Solución de Jost $h_j(k, r, \varepsilon)$ .....	34
II.6. Existencia de las Soluciones Regular y de Jost .....	37
III. <i>Estimaciones de Altas Energías y el Teorema de Parzen</i> ..	49
III.1. Introducción .....	49
III.2. Estimaciones de Altas Energías y los Términos de Error .....	50
IV. <i>Estimaciones de Bajas Energías y el Teorema de Levinson para el Caso de Masa Cero</i> .....	59
IV.1. Introducción .....	59
IV.2. El Plano Complejo como Superficie de Riemann para la energía en el caso $m = 0$ .....	60
IV.3. El Desarrollo de Altas Energías para las Soluciones de Jost y Regular, en el caso $m = 0$ .....	61
IV.4. El Desarrollo de Bajas Energías para la Función de Jost .....	65
IV.5. Simplificación de las ecuaciones en el caso de $m = 0$ .	74
IV.6. Los Ceros de la Función de Jost y los autovalores de $H_j$ .....	75
IV.7. Una Definición apropiada de la Fase $\delta_j$ y el Teorema de Levinson .....	76
Apéndice .....	81
Bibliografía .....	87



## PRÓLOGO

En 1949, N. Levinson [19] demostró un teorema que relaciona el corrimiento de fase a energía cero y el número de estados acotados del sistema, para el operador de Schrödinger en interacción con un potencial con simetría esférica. Dicho resultado constituye realmente una joya para la Teoría de Dispersión y Espectral, pues es un bello ejemplo en donde los elementos fundamentales de dicha Teoría se relacionan; por un lado, el corrimiento de fase: el elemento básico para el problema directo de la Teoría de Dispersión, y por el otro, el número de autovalores de dicho Operador, i.e. el Espectro discreto del Operador. Existe una amplia literatura respecto al Teorema de Levinson para el operador de Schrödinger (véanse por ejemplo: [6], [16], [24], [25] y [26]).

Establecer un teorema "tipo Levinson" en esas mismas condiciones para la Teoría del Electrón de Dirac (La Mecánica Cuántica Relativista) era el siguiente paso natural, pensando finalmente que la Mecánica Cuántica no Relativista es el caso límite de la Mecánica Cuántica Relativista. Por otro lado, en 1950, G. Parzen [27] encuentra que el corrimiento de fase es generalmente asintótico a una constante no cero en el límite de altas energías para el operador de Dirac en esas condiciones, en acuerdo con lo que experimentalmente se había observado. Esto establece una trascendental diferencia con el caso no relativista, puesto que en el caso del operador de Schrödinger, el corrimiento de fase tiende a cero en el límite de altas energías, salvo si se consideran potenciales con fuertes singularidades de un cierto tipo. Para una discusión mayor véanse por ejemplo [6] y [37]. Hemos de observar que desde el resultado de Parzen, hasta el presente trabajo no existieron estimaciones de como se comporta el término de error del corrimiento de fase para la ecuación de Dirac en el límite de altas energías.

Volviendo al caso de bajas energías, en 1967, M. C. Barthélémy [1] propone un análogo al Teorema de Levinson para el Operador de Dirac en interacción con un potencial radialmente simétrico y masa positiva. No obstante, en 1985, Ma y Ni [21] encuentran que los resultados de M. C. Barthélémy son generalmente incorrectos, y suponiendo un potencial en interacción acotado y de soporte compacto obtienen un Teorema "tipo Levinson" para el caso de masa positiva, y dejan abierto

el problema de encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobre el potencial para que sea válido dicho Teorema.

En 1990, M. Klaus [17] considerando también la masa positiva y el potencial en el Espacio de Banach  $L_j^1(0, \infty)$ , encuentra finalmente el Teorema de Levinson buscado. En dicho artículo también se estudia el desarrollo en bajas energías de la función de Jost (véase el Capítulo II para la definiciones apropiadas),  $h_j(k, \varepsilon)$ . M. Klaus prueba que cuando  $h_j(0, \varepsilon) = 0$ ,  $h_j(k, \varepsilon) \sim ck^2$  (donde  $c$  es una constante no cero) cuando  $k \rightarrow 0$  con la excepción de  $j = 1$ ,  $\varepsilon = +1$ , y que en tal caso:  $h_j(k, \varepsilon) \sim ck$  cuando  $k \rightarrow 0$  (notemos que para comparar nuestra Ecuación de Dirac radial con la Ecuación en [17] debemos reemplazar  $(j, V(r), E)$  por  $(-j, -V(r), -E)$ ).

El trabajo desarrollado en esta Tesis es el siguiente.

En el Capítulo I presentamos propiedades generales del Operador de Dirac y en particular en el caso de un Potencial Eléctrico con simetría radial, mostramos como el Operador de Dirac se descompone en una suma directa de Operadores de Dirac de Onda Parcial (véanse el Teorema 1.3 y la ecuación (1.132)) los cuales son sistemas de  $2 \times 2$  de operadores diferenciales de primer orden. De esta manera, nuestro problema se reduce al estudio de las soluciones apropiadas de dichos sistemas de ecuaciones ordinarias, lo que constituye propiamente el tema de esta Tesis.

En el Capítulo II, introducimos las soluciones regular y de Jost, demostramos su existencia y estudiamos su propiedades. Además definimos la función de Jost, los corrimientos de fase y establecemos algunas de sus propiedades que utilizamos posteriormente.

En el Capítulo III, probamos un teorema "tipo Parzen" para el desarrollo en altas energías de la función de Jost,  $h_j(k, \varepsilon)$ , obteniendo las estimaciones correspondientes y los términos de error controlados. Dichos resultados son los primeros obtenidos desde que Parzen en 1950 [27], describió cualitativamente dicho comportamiento. Como un comentario final, diremos, que al obtener la integral del potencial a partir del límite de altas energías del corrimiento de fase estamos resolviendo un Problema Inverso para la Teoría de Dispersión de la ecuación de Dirac con potencial radial.

En el Capítulo IV, estudiamos el desarrollo a bajas energías de la función de Jost,  $h_j(k, \varepsilon)$ , en el caso en que la masa de la partícula es cero, y hallamos que es radicalmente diferente al desarrollo de dicha función cuando la masa es positiva. En realidad, bajo la hipótesis que  $h_j(0) = 0$ , probamos que  $h_j(k) \sim ck$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Notemos que este comportamiento es justamente el comportamiento excepcional en el

caso de masa positiva. Los resultados que se obtienen sobre el desarrollo de la función de Jost son bajo la hipótesis de que el potencial  $V(r)$  pertenece al Espacio de Banach  $L^1_\sigma(0, \infty)$  donde  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Probamos una versión apropiada del Teorema de Levinson únicamente pidiendo que  $V(r)$  pertenezca a  $L^1(0, \infty)$ . Como se observa, esta condición es mas general que la que se pide en [17] para el caso de masa positiva, i.e. que  $V(r) \in L^1_\sigma(0, \infty)$ . Asimismo, notemos que  $V(r) \in L^1(0, \infty)$  es satisfecha si pedimos por ejemplo que:  $|V(r)| \leq C(1+r)^{-1-\epsilon}$  con  $\epsilon > 0$ , mientras que en [22] Z. Q. Ma observó que el Teorema de Levinson debe ser modificado en el caso de masa positiva si  $V(r) \sim cr^{-2}$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Esto en cierta forma da respuesta a la pregunta formulada en [22] respecto a las condiciones que aseguren la validez del teorema de Levinson. Nuestro resultado muestra que las condiciones para la validez del teorema de Levinson dependen fuertemente de la masa de partícula, i.e. para el caso de masa cero dicho Teorema es válido bajo condiciones mas generales.

Los resultados de esta Tesis fueron publicados en el artículo "High and Low Energy Estimates for the Dirac Equation" de: Blancarte, Grebert y Weder [2].

## I. ANTECEDENTES

### I.1. EL OPERADOR LIBRE DE DIRAC $H_0$

La Ecuación Libre de Dirac describe el movimiento relativista de una partícula de spin  $\frac{1}{2}$  en  $\mathbb{R}^3$  y viene dada por [34]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = H_0 \Psi(x, t), \quad (1.1)$$

donde  $H_0$  es la expresión diferencial matricial

$$H_0 \equiv -i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \beta m c^2 = \begin{pmatrix} m c^2 I & -i\hbar c \sigma \cdot \nabla \\ -i\hbar c \sigma \cdot \nabla & -m c^2 I \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

que actúa en las funciones de onda vectoriales

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x, t) \\ \Psi_2(x, t) \\ \Psi_3(x, t) \\ \Psi_4(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4,$$

con

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (1.3)$$

ternas de matrices, donde las  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

y  $\beta$  y  $\alpha_i$  son las matrices de  $4 \times 4$  siguientes

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

$I$  y  $0$  son las matrices de  $2 \times 2$  identidad y cero respectivamente,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $c$  es la velocidad de la luz, y  $m \geq 0$  representa la masa de la partícula.  $H_0$  es el Hamiltoniano libre del sistema y como

por el principio de Correspondencia

$$p = -i\hbar\nabla, \quad (1.6)$$

$H_0$  también tiene la expresión

$$H_0 = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2 \equiv c\alpha \cdot p + \beta mc^2. \quad (1.7)$$

Ya que de acuerdo a la relación energía-momento

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \quad (1.8)$$

debemos tener que

$$\begin{aligned} E^2 &= c^2 p^2 + m^2 c^4 = H_0^2 = (c\alpha \cdot p + \beta mc^2)(c\alpha \cdot p + \beta mc^2) \\ &= c^2 p_i p_j \alpha_i \alpha_j + mc^2 \alpha_i p_i \beta + mc^2 \beta \alpha_i p_i + m^2 c^4 \beta^2 \\ &= \frac{c^2}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + mc^2 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + m^2 c^4 \beta^2. \end{aligned}$$

Pero para que esto ocurra se deben cumplir las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} I, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3. \\ \beta^2 &= I. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Las relaciones (1.9) son una consecuencia inmediata de las definiciones (1.3)-(1.5).

## 1.2. SOLUCIONES PARA LA ECUACIÓN LIBRE DE DIRAC

El problema de Cauchy para (1.1) viene dado por,

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = H_0 \Psi(x, t), \\ \Psi(0, t) = \Phi(x). \end{cases} \quad (1.10)$$

La única solución del problema (1.10) viene dada por el grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo

$$U(t) = e^{-i(H_0/\hbar)t}, \quad (1.11)$$

donde designamos también por  $H_0$  la única realización autoadjunta de (1.7) con dominio  $\mathcal{D}(H_0) \equiv H^1(\mathbb{R}^3)$ , con  $H^1(\mathbb{R}^3)$  el espacio de Sobolev de 1er orden (véanse las secciones 5 y 6).

### 1.3. $H_0$ DEFINIDO EN EL ESPACIO DE FOURIER O EL ESPACIO DE MOMENTOS: $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$

Dos hechos elementales de la transformada de Fourier serán utilizados. La transformada de Fourier se extiende unívocamente a un operador unitario de  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$  en  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$  y envía un operador diferencial matricial en un operador de multiplicación matricial. Denotemos por  $F$  la transformada de Fourier, i.e.

$$(F\psi_k)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ip \cdot x} \psi_k(x) d^3x, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, 4. \quad (1.12)$$

Entonces

$$FL^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4 \cong L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4, \quad (1.13)$$

donde  $\cong$  denota un isomorfismo unitario (isometría suprayectiva). A  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$  le llamaremos el espacio de momentos.  $H_0$  es transformado vía  $F$  en un operador de multiplicación en  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$ , i.e.

$$(FH_0F^{-1})(p) \equiv h(p) = \begin{pmatrix} mc^2I & c\sigma \cdot p \\ c\sigma \cdot p & -mc^2I \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Para cada  $p$ ,  $h(p)$  es una matriz Hermítica de  $4 \times 4$  cuyos autovalores son

$$\lambda_1(|p|) = \lambda_2(|p|) = -\lambda_3(|p|) = -\lambda_4(|p|) = \lambda(|p|), \quad (1.15)$$

donde

$$\lambda(|p|) \equiv \sqrt{c^2|p|^2 + m^2c^4}. \quad (1.16)$$

Si  $m = 0$  y  $p \neq 0$ ,

$$h(p) = \begin{pmatrix} 0 & c\sigma \cdot p \\ c\sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

y los autovalores en este caso son

$$\lambda_1(|p|) = \lambda_2(|p|) = -\lambda_3(|p|) = -\lambda_4(|p|) = \lambda(|p|) = c|p|. \quad (1.18)$$

La transformación unitaria,  $U(p)$ , que hace diagonal a  $h(p)$  viene dada explícitamente por [34]

$$U(p) = \frac{(mc^2 + \lambda(|p|))I + \beta c \alpha \cdot p}{\sqrt{2\lambda(|p|)(mc^2 + \lambda(|p|))}} = a_+(|p|)I + a_-(|p|)\beta \frac{\alpha \cdot p}{|p|}, \quad (1.19)$$

donde

$$a_{\pm}(|p|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{mc^2}{\lambda(|p|)}}, \quad (1.20)$$

y

$$U^{-1}(|p|) = a_+(|p|)I - a_-(|p|)\beta \frac{\alpha \cdot p}{|p|}. \quad (1.21)$$

A saber:

$$\begin{aligned} U^{-1}(p)\beta\lambda(|p|)U(p) &= \left( a_+ - a_- \beta \frac{\alpha \cdot p}{|p|} \right) \left( \lambda a_+ \beta + \frac{\lambda a_-}{|p|} \alpha \cdot p \right) \quad (1.22) \\ &= \lambda \beta a_+^2 + \frac{\lambda a_+ a_-}{|p|} \alpha \cdot p + \frac{a_+ a_- \lambda}{|p|} \alpha \cdot p - a_-^2 \beta \lambda \\ &= \beta \lambda (a_+^2 - a_-^2) + \frac{2\lambda a_+ a_-}{|p|} \alpha \cdot p, \end{aligned}$$

como

$$(a_+^2 - a_-^2) = \frac{mc^2}{\lambda} \quad (1.23)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda a_+ a_-}{|p|} &= \frac{2}{|p|} \frac{\lambda}{2} \left( 1 - \frac{m^2 c^4}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{|p|} \left( \frac{\lambda^2 - m^2 c^4}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{|p|} \frac{(c^2 p^2 + m^2 c^4 - m^2 c^4)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} = c, \quad (1.24) \end{aligned}$$

sustituyendo (1.23) y (1.24) en (1.22) se sigue que

$$U^{-1}(p)\beta\lambda(|p|)U(p) = \beta mc^2 + c \alpha \cdot p \equiv (F H_0 F^{-1})(p) \equiv h(p). \quad (1.25)$$

En el caso de masa cero,  $m = 0$ , y  $|p| \neq 0$

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} I + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \frac{\alpha \cdot p}{|p|} \quad (1.26)$$

y

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} I + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \alpha. \quad (1.27)$$

Ahora observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4 & \xrightarrow{F} & L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4 \\ & \searrow W & \downarrow U \\ & & L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4. \end{array} \quad (1.28)$$

Y definamos

$$W \equiv UF, \quad (1.29)$$

donde  $U$  viene dada por (1.19).  $W$  convierte formalmente el operador  $H_0$  en un Operador de Multiplicación por la Diagonal en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$ , i.e.

$$(WH_0W^{-1})(p) = \beta\lambda(|p|). \quad (1.30)$$

#### 1.4. LOS SUBESPACIOS ESPECTRALES DE $H_0$

En el Espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$  donde el operador libre de Dirac  $H_0$  es diagonal, las dos componentes superiores de las funciones de onda corresponden a las energías positivas, y las dos componentes inferiores a las energías negativas (véase 1.30). Esto motiva la definición del subespacio de energías positivas,  $H_{pos}$ , como el subespacio generado

$$H_{pos} \equiv \left\langle \left\{ \Psi_{pos}; \Psi_{pos} \equiv W^{-1} \frac{1}{2} (I + \beta) W \Psi; \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^4 \right\} \right\rangle \quad (1.31)$$

donde por simplicidad designamos a  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$  por  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ . Para la Definición A.1 de subespacio generado véase el Apéndice. Análogamente,

$$H_{neg} \equiv \left\langle \left\{ \Psi_{neg}; \Psi_{neg} \equiv W^{-1} \frac{1}{2} (I - \beta) W \Psi; \Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)^4 \right\} \right\rangle. \quad (1.32)$$



Como  $H_{pos}$  y  $H_{neg}$  son ortogonales, podemos escribir

$$L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cong H_{pos} \oplus H_{neg}, \quad (1.33)$$

donde  $\oplus$ , denota la suma directa entre dos espacios de Hilbert (véase la Definición A.2 en el Apéndice). Es decir, cada estado  $\Psi$  puede escribirse unívocamente como una suma de  $\Psi_{pos} \equiv \Psi_+$  y  $\Psi_{neg} \equiv \Psi_-$ ,

$$\Psi_{\substack{pos \\ neg}} \equiv \Psi_{\pm} \equiv W^{-1} \frac{1}{2} (I \pm \beta) W \Psi. \quad (1.34)$$

$H_0$  actúa como un operador positivo sobre  $H_{pos}$ , ya que si  $\Phi_+ \equiv \frac{1}{2}(I + \beta)W\Psi$ , entonces

$$\begin{aligned} (\Psi_+, H_0 \Psi_+) &= (W^{-1} \Phi_+, W^{-1} \lambda(\cdot) \beta W W^{-1} \Phi_+) \\ &= (\Phi_+, \lambda(\cdot) \beta \Phi_+). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pero como

$$\beta \Phi_+ = \frac{1}{2} \beta (I + \beta) W \Psi = \frac{1}{2} (\beta + I) W \Psi = \Phi_+, \quad (1.36)$$

sustituyendo (1.36) en (1.35) obtenemos

$$(\Psi_+, H_0 \Psi_+) \geq 0. \quad (1.37)$$

Análogamente  $H_0$  es negativo en  $H_{neg}$ , notando que

$$\beta \Phi_- = -\Phi_-. \quad (1.38)$$

Los operadores proyectores ortogonales sobre los subespacios de energías positivas y negativas vienen dados, respectivamente, por

$$P_{\substack{pos \\ neg}} \equiv P_{\pm} = W^{-1} \frac{1}{2} (I \pm \beta) W = W^{-1} \frac{1}{\lambda(\cdot)} \frac{1}{2} (I \pm \beta) \lambda(\cdot) W. \quad (1.39)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} H_0^2 &= (\beta mc^2 + c\alpha \cdot p)(\beta mc^2 + c\alpha \cdot p) \\ &= m^2 c^4 + mc^3 \beta \alpha \cdot p + mc^3 \alpha \cdot p \beta + c^2 |p|^2 \\ &= m^2 c^4 + c^2 |p|^2, \end{aligned} \quad (1.40)$$

y por lo tanto

$$H_0^2 = c^2 |p|^2 + m^2 c^4 = \lambda(|p|)^2, \quad (1.41)$$

así que,

$$|H_0| \equiv \sqrt{H_0^2} = \lambda(|p|) = F^{-1} \lambda(\cdot) F. \quad (1.42)$$

De (1.39) y (1.42) obtenemos que

$$P_{neg}^{pos} = \frac{1}{2} \left( I \pm \frac{H_0}{|H_0|} \right).$$

Entonces

$$H_0 \Psi_{neg}^{pos} = \pm |H_0| \Psi_{neg}^{pos}. \quad (1.43)$$

Sea  $\text{sgn } H_0 \equiv H_0/|H_0|$ . Entonces  $H_0 = |H_0| \text{sgn } H_0$  representa la descomposición polar de  $H_0$ .

### 1.5. ESPACIOS PARA LOS DOMINIOS DE DEFINICIÓN DE $H_0$

Definamos los siguientes Espacios.

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) &= \{f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}: f \text{ es infinitamente diferenciable y} \\ &\text{de soporte compacto en } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde

$$\text{El soporte de } f \equiv \text{sop } f \equiv \overline{\{x \in D(f): f(x) \neq 0\}} \quad (1.45)$$

denota la cerradura (véase la Definición A.5 del Apéndice).

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) &\equiv \{f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}: f \text{ es infinitamente diferenciable} \\ &\text{y de rápido decrecimiento}\} \text{ es el espacio de Schwartz,} \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde  $f$  es de rápido decrecimiento si " $f$  y sus derivadas son  $o$  (polinomio), cuando la variable tiende a infinito", o bien

$$S(\mathbb{R}^3) \equiv \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) : \forall \alpha, \beta \text{ multi-indices, } \sup |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \right\}. \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^3) &\equiv \{ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : f, Df \in L^2(\mathbb{R}^3) \} \\ &\equiv \text{El 1er-espacio de Sobolev,} \end{aligned} \quad (1.48)$$

con el producto escalar dado por

$$\begin{aligned} (f, g)_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f, \frac{\partial}{\partial x_i} g \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ H^1(\mathbb{R}^3) &= F^{-1} \{ f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p) : (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} (Ff)(p) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p) \}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Para probar (1.49), es suficiente demostrar que para  $f \in S(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\| (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} (Ff)(p) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |(Ff)(p)|^2 \left( 1 + \sum_{i=1}^3 p_i^2 \right) d^3p \\ &= \| (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} (Ff)(p) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Por continuidad lo extendemos hasta  $H^1(\mathbb{R}^3)$ .

$$\begin{aligned} C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4 &\cong C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \\ &\quad \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Análogamente definimos

$$S(\mathbb{R}^3)^4 \quad (1.51)$$

y

$$H^1(\mathbb{R}^3)^4. \quad (1.52)$$

También tenemos que

$$H^1(\mathbb{R}^3)^4 = F^{-1}\{f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4; (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4\}. \quad (1.53)$$

Posteriormente utilizaremos la siguiente cadena de contenciones de subespacios densos en  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ .

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4 \subset S(\mathbb{R}^3)^4 \subset H^1(\mathbb{R}^3)^4 \subset L^2(\mathbb{R}^3)^4. \quad (1.54)$$

### 1.6. REALIZACIÓN AUTOADJUNTA DEL OPERADOR $H_0$

Para las definiciones concernientes nos remitiremos al Apéndice. Definamos ahora  $\widehat{H}_0$  en  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$  como el operador de multiplicación por la matriz  $\lambda(p)\beta$

$$(\widehat{H}_0\Psi)(p) = \lambda(p)\beta\Psi(p), \quad (1.55)$$

con

$$D(\widehat{H}_0) \equiv \{\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4; \lambda(p)\beta\Psi(p) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4\} \equiv D(\lambda(\cdot)), \quad (1.56)$$

y consideremos el siguiente diagrama

$$D(\widehat{H}_0) \subset L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4 \xrightarrow{\widehat{H}_0} L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4 \\ W^{-1} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad W \quad (1.57)$$

$$D(H_0) \subset L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4 \xrightarrow{H_0} L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)^4, \\ H_0 \equiv W^{-1}\widehat{H}_0W \quad \text{y} \quad D(H_0) = W^{-1}D(\widehat{H}_0). \quad (1.58)$$

De esta manera definimos una extensión autoadjunta de  $H_0$ , i.e. de (1.2)

$$-i\hbar c\alpha \cdot \nabla + \beta mc^2,$$

la cual designamos también por  $H_0$ . Estamos en condiciones de formular el primer teorema del capítulo.

**Teorema 1.1.** *El operador libre de Dirac  $H_0$  es esencialmente autoad-*

junto sobre el dominio

$$D(H_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4, \quad (1.59)$$

y autoadjunto en

$$D(H_0) = H^1(\mathbb{R}^3)^4. \quad (1.60)$$

Si su espectro está dado por

$$\sigma(H_0) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty). \quad (1.61)$$

Prueba: Demostraremos primero que en  $D(H_0) = H^1(\mathbb{R}^3)^4$ ,  $H_0$  es autoadjunto. A saber, de (1.58)  $H_0$  es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por la función matricial diagonal  $\beta\lambda(\cdot)$  en  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$ , de ahí que es autoadjunto sobre dicho dominio  $D(\overline{H_0})$  (1.56), y por (1.58)

$$D(H_0) = W^{-1}D(\beta\lambda(\cdot)) = F^{-1}U^{-1}D(\lambda) = F^{-1}D(\lambda(\cdot)), \quad (1.62)$$

en la última igualdad hemos utilizado el hecho de que  $U(|p|)^{-1}$  es la multiplicación por una matriz unitaria y por ello, no altera el dominio de cualquier operador de multiplicación. Si  $f \in D(\lambda(\cdot)) \iff f \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4$  y  $\sqrt{mc^4 + c^2p^2}f(p) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4 \iff \sqrt{1+p^2}(Ff)(p) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^4 \iff f \in H^1(\mathbb{R}^3)^4$ , de acuerdo a (1.53), y la definición de  $\lambda$  en (1.16).

Respecto al Espectro de  $H_0$  podemos decir entonces que

$$\begin{aligned} \sigma(H_0) &= \sigma(\lambda(\cdot)) \equiv \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \equiv \pm \sqrt{c^2|p|^2 + m^2c^4} \text{ para alguna } p \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ahora, probemos (1.59). Llamaremos  $\dot{H}_0$  a la restricción de  $H_0$  a  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$

$$\dot{H}_0 \equiv H_0 | C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4, \quad (1.64)$$

y  $\widetilde{H}_0$  la restricción de  $H_0$  a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)^4$

$$\widetilde{H}_0 \equiv H_0 | \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)^4. \quad (1.65)$$

Observemos que,

$$FS(\mathbb{R}^3)^4 = S(\mathbb{R}^3)^4, \quad (1.66)$$

y por lo tanto por (1.14),

$$F\overline{H}_0 F^{-1} = h(p) | S(\mathbb{R}^3)^4. \quad (1.67)$$

Como  $h(p) | S(\mathbb{R}^3)^4$  es esencialmente autoadjunto y por lo tanto su cerradura es el propio  $h(p)$ , tenemos que  $\overline{H}_0$  es esencialmente autoadjunto y su cerradura es  $H_0$ . Lo que se intenta demostrar es que

$$\overline{\overline{H}_0} = H_0, \quad (1.68)$$

pero

$$\overline{H}_0 \subset H_0 \Rightarrow \overline{\overline{H}_0} \subset \overline{H_0} = H_0. \quad (1.69)$$

Si se demuestra que

$$\overline{\overline{H}_0} \subset \overline{H_0}, \quad (1.70)$$

tendremos la otra contención buscada

$$H_0 = \overline{\overline{H}_0} \subset \overline{H_0}. \quad (1.71)$$

Para demostrar (1.70), basta tomar  $\Psi \in S(\mathbb{R}^3)^4$  y exhibir  $\{\Psi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ , tales que  $\Psi_n \rightarrow \Psi$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{H}_0 \Psi_n = \overline{H}_0 \Psi$ , ya que entonces  $\overline{\overline{H}_0} \Psi = \overline{H}_0 \Psi$  y así obtendríamos (1.70). Para ello escojamos  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  con

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

Supondremos que "pegamos" adecuadamente la gráfica de  $f$  de modo que en efecto, pertenezca a  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  y que  $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x$ . Definamos

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &\equiv f(n^{-1}x)(1 - f(nx))\Psi(x) \\ &= f(n^{-1}x)\Psi(x) - f(n^{-1}x)f(nx)\Psi(x). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Entonces

$$\text{sop } \Psi_n(x) = K(\text{compacto}) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq 2n\}, \quad (1.73)$$

y claramente,  $\Psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi_n - \Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.74)$$

Calculemos y estimemos,

$$\begin{aligned} \|\dot{H}_0 \Psi_n(x) - \dot{H}_0 \Psi(x)\| &\leq \left\| (f(n^{-1}x)(1-f(nx)) - 1) H_0 \Psi(x) \right\| \\ &\quad + \left\| i\hbar \frac{1}{n} \alpha \cdot (\nabla f)(n^{-1}x)(1-f(nx)) \Psi(x) \right\| \\ &\quad + \left\| i\hbar f(n^{-1}x) \alpha \cdot (\nabla f)(nx) n \Psi(x) \right\|. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (f(n^{-1}x)(1-f(nx)) - 1) H_0 \Psi(x) \right\| = 0, \quad (1.76)$$

y

$$\left\| i\hbar \frac{1}{n} \alpha \cdot (\nabla f)(n^{-1}x)(1-f(nx)) \Psi(x) \right\| \leq \frac{C}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (1.77)$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \left\| i\hbar f(n^{-1}x) n \alpha \cdot (\nabla f)(nx) \Psi(x) \right\|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x)|^2 n^2 |(\nabla f)(nx)|^2 d^3x \\ &\leq C n^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\nabla f)(z)|^2}{n^3} d^3z = \frac{C}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (1.78)$$

donde hemos efectuado el cambio de variable  $z = nx$ , y utilizado el hecho que  $\Psi(x)$  es acotada. (1.76)-(1.78) implican que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{H}_0 \Psi_n(x) - \dot{H}_0 \Psi(x)\| = 0. \quad (1.79)$$

I.7. REALIZACIÓN AUTOADJUNTA DEL OPERADOR DE DIRAC EN INTERACCIÓN,  $H \equiv H_0 + V(x)$

Sea  $V(x) \equiv (V_{ij}(x))$  una matriz  $4 \times 4$  autoadjunta. Definimos

$$\begin{aligned} |V(x)| &\equiv \text{la norma de } V(x) \\ &= \sup\{|\lambda_k|, \lambda_k \text{ son los autovalores de } V(x)\} \end{aligned} \quad (1.80)$$

**Teorema 1.2.** Sea  $V$  el operador de multiplicación representado por una matriz autoadjunta de  $4 \times 4$ , que satisface

$$|V(x)| \leq a \times \frac{c}{2|x|} + b, \quad (1.81)$$

para  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  y para constantes  $a, b$  con  $b > 0$  y  $a < 1$ . En tales condiciones  $H \equiv H_0 + V(x)$  es autoadjunto en  $D(H) = H^1(\mathbb{R}^3)^4$  y esencialmente autoadjunto en  $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ .

**Prueba:** Denotemos  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \equiv \|\cdot\|_2$ . De la desigualdad de Hardy con  $r = |x|$  tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2r} \Psi \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4r^2} |\Psi(x)|^2 d^3x \leq \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Psi(x)|^2 d^3x &\equiv \|\nabla \Psi\|_2^2, \quad \forall \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{aligned} \quad (1.82)$$

La misma desigualdad se verifica para el spinor  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$  donde

$$\nabla \Psi \equiv \begin{bmatrix} \nabla \Psi_1 \\ \nabla \Psi_2 \\ \nabla \Psi_3 \\ \nabla \Psi_4 \end{bmatrix}, \quad (1.83)$$

observando que

$$\left\| \frac{1}{2r} \Psi \right\|_2^2 \equiv \sum_{i=1}^4 \left\| \frac{1}{2r} \Psi_i \right\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^4 \|\nabla \Psi_i\|_2^2 = \|\nabla \Psi\|_2^2. \quad (1.84)$$



Ahora relacionemos  $\|\nabla\Psi\|_2$  con  $\|-i\alpha\cdot\nabla\Psi\|_2$  observando que,

$$\begin{aligned}\|-i\alpha\cdot\nabla\Psi\|_2^2 &= (-i\alpha\cdot\nabla\Psi, -i\alpha\cdot\nabla\Psi) \\ &= c^2(\alpha\cdot(\nabla)\Psi, \alpha\cdot(\nabla)\Psi) = c^2\sum_{j,k=1}^3(\alpha_j\partial_j\Psi, \alpha_k\partial_k\Psi) \\ &= -c^2(\Psi, \alpha_j\alpha_k\partial_j\partial_k\Psi) = -c^2\left(\Psi, \left(\frac{\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j}{2}\right)\partial_j\partial_k\Psi\right) \\ &= -c^2\sum_{k,j}(\Psi, \Delta\Psi) = c^2(\nabla\Psi, \nabla\Psi).\end{aligned}$$

Entonces

$$\|-i\alpha\cdot\nabla\Psi(x)\|_2 = c\|\nabla\Psi\|_2. \quad (1.85)$$

Asimismo, por (1.82) tenemos que

$$\|-i\alpha\cdot\nabla\Psi(x)\|_2 \geq \left\|\frac{c}{2r}\Psi\right\|_2, \quad (1.86)$$

i.e., el operador de multiplicación  $c/2r$  es acotado relativo a  $i\alpha\cdot\nabla$  con cota relativa 1. Utilizando las estimaciones anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|V(x)\Psi(x)\|_2 &\leq \left\|\left(\frac{c}{2r} + b\right)\Psi\right\|_2 \leq ac\left\|\frac{\Psi}{2r}\right\|_2 + b\|\Psi\|_2 \\ &\leq ac\|\nabla\Psi\|_2 + b\|\Psi\|_2 = c\|-i\alpha\cdot\nabla\Psi\|_2 + b\|\Psi\|_2 \\ &= a\|(H_0 - \beta mc^2)\Psi\|_2 + b\|\Psi\|_2 \\ &\leq a\|H_c\Psi\|_2 + amc^2\|\Psi\|_2 + b\|\Psi\|_2 \\ &= a\|H_c\Psi\| + (amc^2 + b)\|\Psi\|_2.\end{aligned} \quad (1.87)$$

El operador  $V$  es simétrico, ya que  $V$  es autoadjunta  $\forall x$ . El hecho de que  $H$  es autoadjunto (esencialmente autoadjunto) se sigue de que  $H_0$  es autoadjunto (esencialmente autoadjunto) por el Teorema de Kato-Rellich, ya que  $a < 1$  (véase [15] y [29]).

Existe una amplia literatura sobre el operador de Dirac en interacción, véase por ejemplo: [15] y [34].

## 1.8. REDUCCIÓN EN EL CASO DE POTENCIALES CON SIMETRÍA RADIAL

A continuación se mostrará la reducción del operador de Dirac en interacción con un potencial con simetría radial en una serie de pasos y la conclusión final mediante el teorema 1.3.

## 1.8.1. Coordenadas Polares y la Descomposición "Radial" y "Angular"

Supondremos que el potencial es radialmente simétrico, i.e.,  $V = V(r)$ ,  $r = |x|$ , y que  $V(r)$  es un potencial eléctrico, i.e., que  $V(r)$  es una matriz diagonal cuyas cuatro entradas sobre la diagonal son iguales a una función con valores en  $\mathbb{R}$ , que también designamos por  $V(r)$ .

En  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  introducimos las coordenadas polares (esféricas)

$$\begin{aligned}x_1(r, \theta, \phi) &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\x_2(r, \theta, \phi) &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\x_3(r, \theta, \phi) &= r \cos \theta;\end{aligned}\tag{1.88}$$

donde  $r = |x| \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\phi \in [-\pi, \pi]$ .

Notemos que dichas coordenadas son locales. Del mismo modo, definimos los vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}e_r &= (\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta) = \frac{x}{r}, \\e_\phi &= (-\operatorname{sen} \phi, \cos \phi, 0) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial e_r}{\partial \phi}, \\e_\theta &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \operatorname{sen} \phi, -\operatorname{sen} \theta) = \frac{\partial e_r}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{1.89}$$

Asimismo denotemos por

$$L^2(S^2) \equiv \left\{ \phi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}: \int_{S^2} |\phi'(s)|^2 ds < \infty \right\}.\tag{1.90}$$

A  $r$  le llamaremos la variable radial y a  $s$  la variable angular,  $S^2$  es la 2-esfera unitaria. Consideremos los siguientes mapeos

$$T(r, \theta, \phi) = (x_1(r, \theta, \phi), x_2(r, \theta, \phi), x_3(r, \theta, \phi)).\tag{1.91}$$

$T$  es el cambio de variable a coordenadas esféricas y  $JT$  es el jacobiano de  $T$  el cual viene dado por  $JT = r^2 \operatorname{sen} \phi$ .

Sea  $\Phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Definamos

$$\Psi(r, \theta, \phi) = r\Phi \circ T = r\Phi(x_1(r, \theta, \phi), x_2(r, \theta, \phi), x_3(r, \theta, \phi)). \quad (1.92)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|\Psi(r, \theta, \phi)\|_{L^2(S^2)}^2 dr &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^\pi |\Psi(r, \theta, \phi)|^2 \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^\pi |\Phi(x_1(r, \theta, \phi), x_2(r, \theta, \phi), x_3(r, \theta, \phi))|^2 r^2 \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Sea

$$\begin{aligned} L^2((0, \infty), dr; L^2(S^2)) &\equiv \left\{ \Psi: \text{para casi toda } r \in (0, \infty) \right. \\ &\quad \left. \Psi(r, \cdot) \in L^2(S^2) \text{ y } \int_0^\infty \|\Psi(r, \cdot)\|_{L^2(S^2)}^2 dr < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

con el producto escalar

$$(\Psi_1, \Psi_2)_{L^2((0, \infty), dr; L^2(S^2))} = \int_0^\infty dr (\Psi_1(r, \cdot), \Psi_2(r, \cdot))_{L^2(S^2)}. \quad (1.95)$$

Entonces por (1.93) el operador

$$U: \Phi \rightarrow \Psi(r, \theta, \phi), \quad (1.96)$$

es unitario de

$$L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{sobre} \quad L^2((0, \infty), dr; L^2(S^2)),$$

y tenemos que

$$L^2((0, \infty), dr; L^2(S^2)) \cong L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2). \quad (1.97)$$

Para la definición de productos tensoriales ( $\otimes$ ) de espacios de Hilbert véase el Apéndice (Definición A.3). En conclusión el operador  $U$  (1.96)

es unitario y por la transitividad de  $\cong$ , hemos establecido que

$$L^2(\mathbb{R}^3) \cong L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2). \quad (1.98)$$

Aplicando (1.98) a cada componente de la función de onda, obtenemos la descomposición

$$L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cong L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2)^4. \quad (1.99)$$

Análogamente

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4 \cong C_0^\infty(0, \infty) \otimes C^\infty(S^2)^4. \quad (1.100)$$

La descomposición del espacio de Hilbert en su partes "angular" y "radial" es útil porque los operadores momento angular orbital y momento angular total:  $L$  y  $J = L + S$ , respectivamente, actúan únicamente en la parte "angular"  $L^2(S^2)^4$  en forma no trivial. Donde

$$S \equiv -\frac{i}{4} \alpha \wedge \alpha, \quad \text{es el momento angular de spin,} \quad (1.101)$$

$$L \equiv x \wedge p, \quad \text{es el momento angular orbital,} \quad (1.102)$$

$$J \equiv L + S, \quad \text{es el momento angular total.} \quad (1.103)$$

Con  $\alpha \wedge \alpha$  denotamos tres matrices

$$\sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} \alpha_k \alpha_l, \quad j = 1, 2, 3,$$

donde  $\varepsilon_{jkl}$  es el tensor totalmente antisimétrico

$$\varepsilon_{jkl} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } (jkl) \text{ es una permutación par de } (123), \\ -1 & \text{si } (jkl) \text{ es una permutación impar de } (123), \\ 0 & \text{si al menos dos índices son iguales.} \end{cases} \quad (1.104)$$

$S$  es acotado y autoadjunto. También tiene la representación

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

con  $\alpha$  y  $\sigma$  definidas en (1.3)-(1.5).

En las coordenadas polares definidas por (1.88) los siguientes operadores tienen las representaciones que se indica

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{e_\phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (1.106)$$

$$L = ic_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - ic_\phi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (1.107)$$

$$L^2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \text{ donde } L^2 \equiv L \cdot L, \quad (1.108)$$

y los  $e_r$ ,  $e_\theta$ ,  $e_\phi$ , son los vectores canónicos en coordenadas polares definidos en (1.89). Además la  $J_3$ -componente de  $L$ ,  $L_3$ , se expresa en coordenadas polares como

$$L_3 \equiv I \otimes \left( -i \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (1.109)$$

indicando que  $J_3$  actúa como la identidad en  $L^2((0, \infty), dr)$ . Utilizaremos también  $L_3$  para indicar  $-i\partial/\partial\phi$  en  $L^2(S^2)$ .

### 1.8.2. La Forma Polar del Operador Libre de Dirac y los Operadores que conmutan con él

Sobre el dominio  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ , tenemos la representación en coordenadas polares para  $H_0$  (véase [34])

$$H_0 = -ic(\alpha \cdot e_r) \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \beta K \right) + \beta mc^2, \quad (1.110)$$

donde  $K$  es el operador spin-órbita definido como

$$K \equiv \beta(2S \cdot L + 1) = \beta \left( J^2 - L^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (1.111)$$

Los operadores  $J$ ,  $L$ ,  $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ ,  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$  y  $K$  son esencialmente autoadjuntos sobre  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ . Además las componentes  $J_k$  conmutan con  $H_0$  y se demuestra que  $H_0$  también conmuta con  $K$ .

1.8.3. La Descomposición del "Espacio Angular"  $L^2(S^2)^4$  en Subespacios de Autofunciones del Momento Angular Total

Los operadores  $J^2$ ,  $J_3$ , y  $K$  definidos en  $L^2(S^2)^4$  tienen únicamente espectro discreto. Por ello existe una base ortonormal completa de autofunciones que llamaremos  $\Phi_{m_j, k_j}$ , tales que

$$\begin{aligned} J^2 \Phi_{m_j, k_j} &= j(j+1) \Phi_{m_j, k_j}, & j &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \\ J_3 \Phi_{m_j, k_j} &= m_j \Phi_{m_j, k_j}, & m_j &= -j, -j+1, \dots, j, \\ K \Phi_{m_j, k_j} &= -k_j \Phi_{m_j, k_j}, & k_j &= -\left(j + \frac{1}{2}\right), \left(j + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Para cada conjunto de autovalores:  $\{j, m_j, k_j\}$  existen dos autofunciones ortogonales  $\Phi_{m_j, k_j}^\pm$  en  $C^\infty(S^2)^4$ . De ahí que

$$\Phi_{m_j, k_j} = c^+ \Phi_{m_j, k_j}^+ + c^- \Phi_{m_j, k_j}^-, \quad (1.113)$$

donde  $c^+, c^- \in \mathbb{C}$  y

$$\begin{aligned} \Phi_{m_j, \mp(j+\frac{1}{2})}^+ &= \begin{pmatrix} i \Psi_{j, \mp(j+\frac{1}{2})}^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_{m_j, \mp(j+\frac{1}{2})}^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{j, \mp(j+\frac{1}{2})}^m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.114)$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_{j-\frac{1}{2}}^{m_j} &= \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{j-m_j} Y_{j-\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\ \Psi_{j+\frac{1}{2}}^{m_j} &= \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1-m_j} Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{j+1+m_j} Y_{j+\frac{1}{2}}^{m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

los  $Y_l^{m_j}$  son los armónicos esféricos usuales definidos para  $l = 0, 1, 2, \dots$  y  $m = -l, -l+1, \dots, l$ . Las funciones  $\Psi_{j, \mp(j+\frac{1}{2})}^{m_j}$  definidas en (1.115) per-

tencen a  $L^2(S^2)^2$  y son autofunciones de los operadores:  $L^2, J_3, J^2 = L^2 + \sigma \cdot L + \frac{3}{4}, J_3 = L_3 + \frac{\sigma_3}{2}$  y  $\sigma \cdot L + 1$  y los correspondientes autovalores:  $l(l+1), m_l, j(j+1), m_j$ , y  $-k$  respectivamente. Sin embargo,  $\Phi_{m_j, k_j}$  no son autofunciones de  $L^2$  y  $J_3$  [34].

Denotemos por

$$\mathfrak{R}_{m_j, k_j} \equiv \left\langle \left\{ c^+ \Phi_{m_j, k_j}^+ + c^- \Phi_{m_j, k_j}^- : c^\pm \in \mathbb{C} \right\} \right\rangle, \quad (1.116)$$

en donde  $\Phi_{m_j, k_j}^\pm$  son simultáneamente autofunciones de  $J^2, J_3$  y  $K_j$  y

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{R}_{m_j, k_j} = 2. \quad (1.117)$$

Entonces  $L^2(S^2)^4$  es suma directa ortogonal de los  $\mathfrak{R}_{m_j, k_j}$ , i.e.,

$$L^2(S^2)^4 \cong \bigoplus_{j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} \bigoplus_{m_j=-j}^j \bigoplus_{k_j=\pm(j+\frac{1}{2})} \mathfrak{R}_{m_j, k_j}. \quad (1.118)$$

Las funciones  $\Phi_{m_j, k_j}^\pm$  satisfacen

$$i\alpha \cdot e_r \Phi_{m_j, k_j}^\pm = \mp \Phi_{m_j, k_j}^\mp, \quad (1.119)$$

$\beta$  y  $\alpha \cdot e_r$  vienen representadas en la base  $\{\Phi_{m_j, k_j}^+, \Phi_{m_j, k_j}^-\}$ , por matrices de  $2 \times 2$ , como

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i\alpha \cdot e_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.120)$$

#### 1.8.4. Descomposición del Operador de Dirac en Sumas Directas de Operadores de Dirac de Ondas Parciales

El Espacio de Hilbert "angular"  $L^2(S^2)^4$  en su descomposición en sumas directas de los  $\mathfrak{R}_{m_j, k_j}$  (1.118), induce una descomposición para  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$  de una manera análoga. A saber, definamos para  $j, m_j, k_j$  y el correspondiente  $\mathfrak{R}_{m_j, k_j}$ , el subespacio de "onda parcial" como

$$L^2((0, \infty), dr) \otimes \mathfrak{R}_{m_j, k_j}, \quad (1.121)$$

y escogamos ahora una base  $\{\Phi_{m_j, k_j}^+, \Phi_{m_j, k_j}^-\}$  para  $\mathfrak{R}_{m_j, k_j}$ . De esta manera obtenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Isom: } L^2((0, \infty), dr)^2 &\rightarrow L^2((0, \infty), dr) \otimes \mathfrak{R}_{m_j, k_j}, \\ (f^+, f^-) &\rightarrow \Psi(r, \theta, \phi), \end{aligned} \quad (1.122)$$

de la siguiente forma: a cada pareja  $(f^+, f^-) \in L^2((0, \infty), dr)^2$  le asociamos

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi) &\equiv f^+ \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) + f^- \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \\ &= \begin{pmatrix} f^+(r) \Psi_{j \mp \frac{1}{2}}^{m_j}(\theta, \phi) \\ f^-(r) \Psi_{j \pm \frac{1}{2}}^{m_j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.123)$$

por (1.112) y (1.114). Pero justamente a esta  $\Psi(r, \theta, \phi)$  por el isomorfismo (1.92), (1.96) le corresponde  $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^3)^4$  donde,

$$\Phi = \frac{1}{r(x)} \Psi(r(x), \theta(x), \phi(x)) \quad (1.124)$$

con  $r, \theta, \phi$  funciones de  $x$ , que se obtienen al invertir la transformación a coordenadas polares (1.88). Es decir

$$L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cong \bigoplus_{j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots} \bigoplus_{\substack{m_j = -j \\ k_j = \pm(j + \frac{1}{2})}}^{(j)} L^2((0, \infty), dr) \otimes \mathfrak{R}_{m_j, k_j}. \quad (1.125)$$

Si  $\Psi \in C_0^\infty(0, \infty)^4$  puede ser representada por una combinación lineal de la forma

$$\Psi(x) = \sum_{j, m_j, k_j} \frac{1}{r} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) + \frac{1}{r} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi), \quad (1.126)$$

con funciones coeficientes  $f^\pm \in C_0^\infty(0, \infty)$ . Además, si  $\Phi$  es representado por una sucesión  $\{g_{m_j, k_j}\}$ , el producto escalar entre  $\Psi$  y  $\Phi$  viene



dado por

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{j, m_j, k_j} \int_0^\infty \{f_{m_j, k_j}^+(r) \overline{g_{m_j, k_j}^+(r)} + f_{m_j, k_j}^-(r) \overline{g_{m_j, k_j}^-(r)}\} dr. \quad (1.127)$$

Esto muestra que (1.123) y (1.124) definen un isomorfismo unitario entre

$$L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cong \bigoplus_{j, m_j, k_j} L^2((0, \infty), dr)^2. \quad (1.128)$$

Estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de la sección.

**Teorema 1.3.** *El Operador Libre de Dirac  $H_0$  deja cada subespacio  $C_0^\infty(0, \infty) \otimes \mathcal{R}_{m_j, k_j}$  invariante. En la base  $\{\Phi_{m_j, k_j}^+, \Phi_{m_j, k_j}^-\}$  actúa en cada subespacio como un operador representado por*

$$h_{m_j, k_j}^0 = \begin{pmatrix} mc^2 & c\left\{-\frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r}\right\} \\ c\left\{\frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r}\right\} & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (1.129)$$

el cual está bien definido sobre  $C_0^\infty(0, \infty)^2 \subset L^2((0, \infty), dr)^2$ .

**Prueba:** Por (1.110)

$$H_0 \Psi(x) = \left[ -ic(\alpha \cdot e_r) \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \beta K \right) + \beta mc^2 \right] \Psi(x). \quad (1.130)$$

Para cada  $j, m_j, k_j$  tenemos,

$$\begin{aligned} & \left( -ic(\alpha \cdot e_r) \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \beta K \right) + \beta mc^2 \right) \\ & \times \left( \frac{1}{r} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) + \frac{1}{r} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \right) \\ & = -c(i\alpha \cdot e_r) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \right. \\ & \quad + \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \beta K \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \beta K \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \Big\} \\
& + \frac{1}{r} mc^2 f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) - \frac{1}{r} mc^2 f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \\
= & -c(\alpha \cdot e_r) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^+(r) \beta (-k_j \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi)) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \beta (-k_j \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \right\} \\
& + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \\
= & -c \left\{ \frac{1}{r} (\alpha \cdot e_r) \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) + \frac{k_j}{r^2} (\alpha \cdot e_r) f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} (\alpha \cdot e_r) \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) - \frac{k_j}{r^2} (\alpha \cdot e_r) f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \right\} \\
& + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \\
= & -c \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) - \frac{k_j}{r^2} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) \right. \\
& \left. + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) - \frac{k_j}{r^2} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \right\} \\
& + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \\
= & \frac{c}{r} \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} f_{m_j, k_j}^+(r) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi) + \frac{c}{r} \left\{ -\frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} f_{m_j, k_j}^-(r) \Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \\
& + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \\
= & \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & c \left\{ -\frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} \\ c \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)) \\
& = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} mc^2 & c \left\{ -\frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} \\ c \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{k_j}{r} \right\} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{m_j, k_j}^+(r) \\ f_{m_j, k_j}^-(r) \end{pmatrix} (\Phi_{m_j, k_j}^+(\theta, \phi) \Phi_{m_j, k_j}^-(\theta, \phi)),
\end{aligned} \tag{1.131}$$

o bien

$$h_{m_j, k_j}^0 = \begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d}{dr} \\ c \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & \frac{ck_j}{r} \\ \frac{ck_j}{r} & -mc^2 \end{pmatrix}. \tag{1.132}$$

En los cálculos anteriores se han utilizados las siguientes ecuaciones: (1.112), (1.120) y (1.123).

En el caso de nuestro interés para un potencial eléctrico  $V(r)$  que interactúa con  $H_0$ , el operador de Dirac en interacción es igual a

$$H \equiv H_0 + V(r), \tag{1.133}$$

y los operadores de Dirac de "ondas parciales" en interacción vienen dados por

$$h_{m_j, k_j} = h_{m_j, k_j}^0 + V(r). \tag{1.134}$$

$H$  definido sobre  $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})^4$  es unitariamente equivalente a la suma directa de los operadores de Dirac de "ondas parciales"  $h_{m_j, k_j}$ , i.e.,

$$H \cong \bigoplus_{j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots} \bigoplus_{m_j=-j}^j \bigoplus_{k_j=\pm(j+\frac{1}{2})} h_{m_j, k_j}. \tag{1.135}$$

De hecho se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema I.4.**  *$H$  es esencialmente autoadjunto sobre  $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})^4$  si y solo si todos los  $h_{m_j, k_j}$  lo son sobre  $C_0^\infty(0, \infty)^2$ . En este caso el espectro del correspondiente operador autoadjunto  $H$  es la unión de los espectros de los operadores autoadjuntos  $h_{m_j, k_j}$ .*

**Prueba:** Por el criterio básico [29], corolario al Teorema VIII.3, un operador  $T$  simétrico es esencialmente autoadjunto si y solo si  $\text{Ran}(T \pm$

$i$ ) es denso. Supongamos que existan  $m_j, k_j$  tales que el operador  $h_{m_j, k_j}$  no es esencialmente autoadjunto y por lo tanto existe un vector no cero  $f \in \text{Ran}(h_{m_j, k_j} - i)^{-1} \subset L^2((0, \infty), dr)^2$  tal que

$$(f, (h_{m_j, k_j} - i)g) = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty(0, \infty)^2. \quad (1.136)$$

Definamos ahora  $\Phi \in L^2(0, \infty)^4$  como en las ecuaciones (1.123) y (1.124) y que identificaremos con la  $f$  de acuerdo al isomorfismo (1.125). Claramente,  $\Phi$  pertenece al subespacio de momento angular etiquetado por  $(j, m_j, k_j)$ . Para cualquier  $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, 0)^4$ , la parte de  $G$  en este subespacio de momento angular puede ser representada por una función  $g \in C_0^\infty(0, \infty)^2$ . De acuerdo a las ecuaciones (1.127) encontramos que

$$(\Phi, (H - i)G) = (f, (h_{m_j, k_j} - i)g) = 0, \quad (1.137)$$

lo que muestra que  $\text{Ran}(H - i)$  no es denso puesto que  $\Phi \neq 0$ , y de ahí que  $H$  no es esencialmente autoadjunto.

La suficiencia: si existe un vector  $\Phi \neq 0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^4$  con

$$(\Phi, (H - i)G) = 0, \quad \forall G \in C_0^\infty(0, \infty)^4, \quad (1.138)$$

entonces por las relaciones (1.126) y (1.127) existe  $0 \neq f(\tau) \in L^2(0, \infty)^2$  y  $m_j, k_j$  tales que

$$(f, (h_{m_j, k_j} - i)g) = 0, \quad \forall g \in C_0^\infty(0, \infty)^2, \quad (1.139)$$

y por ello  $h_{m_j, k_j}$  no es esencialmente autoadjunto.

El resultado sobre el espectro es consecuencia de que

$$(H - z)^{-1} \cong \bigoplus_{j, m_j, k_j} (h_{m_j, k_j} - z)^{-1}, \quad (1.140)$$

y por lo tanto,  $z \in \rho(H) \iff z \in \bigcap_{j, m_j, k_j} \rho(h_{m_j, k_j})$ , lo que implica que

$$\sigma(H) = \mathbb{R} \setminus \rho(H) = \bigcup_{j, m_j, k_j} \sigma(h_{m_j, k_j}).$$

## II. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS SOLUCIONES REGULAR Y DE JOST

### II.1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la reducción por la simetría esférica del potencial obtenida en la Sección I.8 del Capítulo I (1.134) tenemos que la ecuación de Dirac estacionaria,  $H\Phi = E\Phi$ , es equivalente a la siguiente familia de sistemas de  $2 \times 2$  de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre  $(0, \infty)$

$$H_j \varphi_j(r) = E \varphi_j(r), \quad (2.1)$$

donde  $H_j$  es el operador diferencial formal

$$H_j \varphi_j(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi_j' + \begin{pmatrix} m + V(r) & -\frac{j}{r} \\ -\frac{j}{r} & -m + V(r) \end{pmatrix} \varphi_j(r), \quad (2.2)$$

donde hemos tomado  $c = 1$ , y para simplificar la notación reemplazamos  $k_j$  por  $j$ , con  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Notemos que este índice  $j$  no es el mismo que el de (1.112), el cual toma valores semienteros.

$$\varphi_j(r) = \begin{pmatrix} \varphi_{j,1} \\ \varphi_{j,2} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

es una función valuada sobre  $\mathbb{C}^2$  y definida sobre  $\mathbb{R}$ . Por ' denotamos la derivada sobre  $r$ . Notemos que si  $\varphi_j(r, E, V(r))$  es solución de (2.1), i.e.

$$\begin{cases} -\varphi_{j,2}'(r) + (m + V(r))\varphi_{j,1}(r) - \frac{j}{r}\varphi_{j,2}(r) = E\varphi_{j,1}(r), \\ \varphi_{j,1}'(r) + (-m + V(r))\varphi_{j,2}(r) - \frac{j}{r}\varphi_{j,1}(r) = E\varphi_{j,2}(r), \end{cases}$$

$$\varphi_{-j}(r) = (r, -E, -V(r)) = \sigma_1 \varphi_j(r, E, V(r)) = \begin{pmatrix} \varphi_{j,2}(r, E, V(r)) \\ \varphi_{j,1}(r, E, V(r)) \end{pmatrix}$$

es solución de (2.1) para  $-j, -E, -V(r)$ , i.e.

$$\begin{cases} -\varphi'_{j,1}(r) + (m - V(r))\varphi_{j,2}(r) + \frac{j}{r}\varphi_{j,1}(r) = -E\varphi_{j,2}(r), \\ \varphi'_{j,2}(r) + (-m - V(r))\varphi_{j,1}(r) + \frac{j}{r}\varphi_{j,2}(r) = -E\varphi_{j,1}(r). \end{cases}$$

Por consiguiente es suficiente considerar  $j \in \mathbb{Z}^+$ .

## II.2. ESPACIOS DE FUNCIONES

Para  $\sigma \geq 0$ , denotemos por  $L^1_\sigma(0, \infty)$  al espacio de Banach de las funciones medibles valuadas en  $\mathbb{C}$  y definidas sobre  $(0, \infty)$ ,  $f(r)$ , tales que

$$\|f\|_{L^1_\sigma(0, \infty)} = \int_0^\infty (1+r)^\sigma |f(r)| dr. \quad (2.4)$$

y

$$L^1_0(0, \infty) \equiv L^1(0, \infty).$$

Para  $\infty \geq a > 0$ ,  $L^q(0, a)$  denotará el espacio de Banach de las funciones medibles valuadas en  $\mathbb{C}$  sobre  $(0, a)$ ,  $f(r)$ , tales que  $|f(r)|^q$  es integrable según Lebesgue, con la norma

$$\|f\|_{L^q(0, a)} \equiv \left[ \int_0^a |f(r)|^q dr \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (2.5)$$

y  $L^\infty(0, a)$  el espacio de Banach de las funciones medibles sobre  $(0, a)$  esencialmente acotadas valuadas en  $\mathbb{C}$  con la norma del supremo esencial

$$\|f\|_{L^\infty(0, a)} \equiv \sup \text{esenc} \{ |f(r)| : r \in (0, a) \}. \quad (2.6)$$

$L^2(0, \infty)$  es el espacio de Hilbert de las funciones medibles valuadas en  $\mathbb{C}$ , de cuadrado integrable sobre  $(0, \infty)$  con el producto escalar

$$(f, g)_{L^2(0, \infty)} \equiv \int_0^\infty f(r)\overline{g(r)} dr, \quad (2.7)$$

y

$$\mathbb{H} \equiv L^2(0, \infty) \oplus L^2(0, \infty). \quad (2.8)$$

En lo sucesivo denotaremos los espacios simplemente como:  $L^1, L^2, L^q$ ,

$L^\infty$ ,  $L^1_v$  todos definidos sobre  $(0, \infty)$ , a menos que especifiquemos lo contrario.

### II.3. EL ESPECTRO DE $H_j$ Y SUS PROPIEDADES

Los siguientes resultados acerca de las propiedades espectrales de  $H_j$  son conocidos, bajo la hipótesis de que  $V(r) \in L^1$  (véase [36] y [10]). El operador  $H_j$  es el caso punto límite (véase la Definición A.19 del Apéndice) en cero e infinito, y en consecuencia es esencialmente autoadjunto sobre el dominio,

$$D(H_j) = \{\varphi \in H: \varphi \text{ tiene soporte compacto sobre } (0, \infty): H_j \varphi \in H\}. \quad (2.9)$$

Denotemos también por  $H_j$  la única extensión autoadjunta. Entonces, el espectro absolutamente continuo de  $H_j$  es  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$ ,  $H_j$  no tiene autovalores en  $(-\infty, -m) \cup (m, \infty)$ . Los autovalores de  $H_j$  tienen multiplicidad uno, y el espectro sobre  $(-m, m)$  consiste de autovalores aislados que pueden acumularse únicamente en  $\pm m$ . Para las definiciones concernientes al espectro véase el Apéndice y [15], [28].

### II.4. UNA SUPERFICIE DE RIEMANN, $\mathcal{R}$ , APROPIADA PARA LA ENERGÍA

Necesitamos definir una superficie de Riemann apropiada para la relación energía-momento. Para ello denotemos por  $\sqrt{z}$  la rama principal de la raíz cuadrada de tal forma que  $\sqrt{z} > 0$  para  $z > 0$  y con el corte a lo largo del eje real negativo. Observemos que por ejemplo para  $k$  tal que  $\operatorname{Re} k = 0$  e  $\operatorname{Im} k = \pm m \pm \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$

$$m^2 + k^2 = -(2m\varepsilon + \varepsilon^2) < 0,$$

por consiguiente  $\sqrt{z}$  no está definida para tales  $k$ . Esto sugiere que definamos las siguientes hojas,

$$\mathcal{R}_+ \equiv \mathcal{R}_- \equiv \mathbb{C} - (-\infty, -im] \cup [im, \infty). \quad (2.10)$$

La superficie de Riemann propuesta la definimos como

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-, \quad (2.11)$$

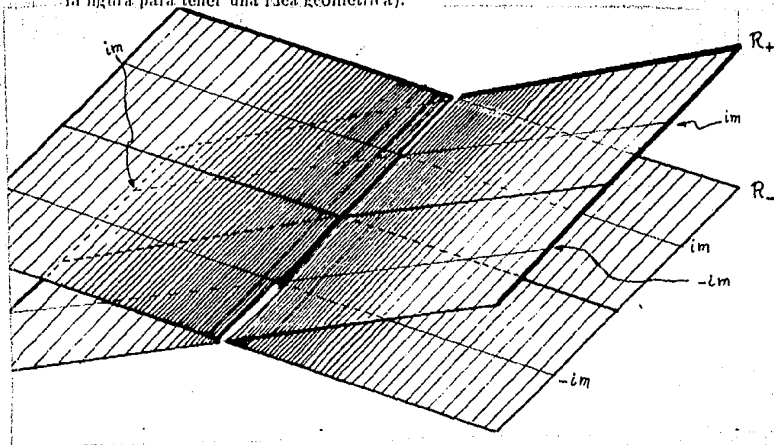
la cual "pegamos" de la siguiente manera: la parte derecha determinada por el corte superior de  $\mathcal{R}_+$  la pegamos con la parte izquierda determinada por el corte superior de  $\mathcal{R}_-$  y viceversa. Análogamente hacemos lo mismo con las partes determinadas por los cortes inferiores de ambas hojas. Las franjas intermedias no se alteran. Definimos nuestra función como,

$$E = \varepsilon \sqrt{m^2 + k^2} \text{ sobre } \mathcal{R}, \text{ donde } \varepsilon = \pm 1 \quad (2.12)$$

de tal forma que

$$E = \begin{cases} \sqrt{m^2 + k^2} & \text{si } k \in \mathcal{R}_+, \\ -\sqrt{m^2 + k^2} & \text{si } k \in \mathcal{R}_-. \end{cases} \quad (2.13)$$

La función  $E(k)$  definida sobre  $\mathcal{R}$  resulta analítica y univaluada (véase la figura para tener una idea geométrica).



11.5. LA SOLUCIÓN REGULAR  $\varphi_j(k, r, \varepsilon)$  Y LA SOLUCIÓN DE JOST  $h_j(k, r, \varepsilon)$

El problema directo de dispersión para  $H_j$  es definido en términos de la solución regular y la solución de Jost (véanse [1], [4] y [6]). La



solución regular está definida para  $k \in \mathcal{R}$  como la solución para (2.1) que satisface la condición a la frontera

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-j} \varphi_j(k, r, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2j-1)!!} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{R}_{\pm}, \quad (2.14)$$

donde  $(2j-1)!! = 1, 3, 5, \dots, (2j-1)$  si  $(2j-1) \geq 1$ , y  $(2j-1)!! = 1$  si  $(2j-1) \leq 0$ . Si  $V(r) \in L^1$  la solución regular existe (véase la sección II.6), y la función

$$\varphi_j(k, r) = \begin{cases} \varphi_j(k, r, +), & k \in \mathcal{R}_+ \\ \varphi_j(k, r, -), & k \in \mathcal{R}_- \end{cases} \quad (2.15)$$

es una función analítica de  $k$ , para cada  $r > 0$ . Denotemos por

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\pm} = \{k \in \mathcal{R}_{\pm} : \operatorname{Im} k \leq 0\}. \quad (2.16)$$

La solución de Jost está definida para  $k \in \widehat{\mathcal{R}}_{\pm} \setminus \{0\}$  como la solución de (2.1) que satisface la condición a la frontera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( h_j(k, r, \varepsilon) - (ik)^j \begin{bmatrix} i(E+m)/k \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ikr} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Notemos que

$$h_j(k, r, \varepsilon) = \overline{h_j(-\bar{k}, r, \varepsilon)}, \quad (2.18)$$

donde  $\bar{\phantom{x}}$  denota la conjugación compleja. Bajo la hipótesis de que  $V(r) \in L^1$  la solución de Jost existe (véase la sección II.6), y la función

$$h_j(k, r) = \begin{cases} h_j(k, r, +), & k \in \mathcal{R}_+, \\ h_j(k, r, -), & k \in \mathcal{R}_-, \end{cases} \quad (2.19)$$

es analítica en el interior de  $\widehat{\mathcal{R}} = \{k \in \mathcal{R} : \operatorname{Im} k \leq 0\}$  y continua hasta  $\partial \widehat{\mathcal{R}} \setminus \{0\}$  para cada  $r$  fija. Si  $(1+mr)V(r) \in L^1$  la podemos extender continuamente hasta  $k = 0$ . Además, para  $k \in \mathcal{R}$ , el Wronskiano de

$h_j(k, r, \varepsilon)$  y  $h_j(-k, r, \varepsilon)$  está dado por

$$[h_j(k, r, \varepsilon), h_j(-k, r, \varepsilon)] = \det \begin{bmatrix} h_{j,1}(k, r, \varepsilon) & h_{j,1}(-k, r, \varepsilon) \\ h_{j,2}(k, r, \varepsilon) & h_{j,2}(-k, r, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$= 2i(E + m)k^{2j-1},$$

y se sigue que  $h_j(k, r, \varepsilon)$  y  $h_j(-k, r, \varepsilon)$  forman un sistema fundamental de soluciones para  $k \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ . Entonces, para  $k \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ , existe la función  $h_j(k, \varepsilon)$  tal que

$$\varphi_j(k, r, \varepsilon) = \frac{-i}{2k^{2j-1}(E + m)} (h_j(-k, \varepsilon)h_j(k, r, \varepsilon) - h_j(k, \varepsilon)h_j(-k, r, \varepsilon)), \quad (2.21)$$

donde la función de Jost  $h_j(k, \varepsilon)$ , es definida como

$$h_j(k, \varepsilon) \equiv [\varphi_j(k, r, \varepsilon), h_j(k, r, \varepsilon)], \quad (2.22)$$

para  $k \in \widehat{\mathcal{R}}_{\pm}$ . Observemos que  $h_j(k, \varepsilon) = \overline{h_j(-k, \varepsilon)}$ . La función

$$h_j(k) = \begin{cases} h_j(k, +), & k \in \widehat{\mathcal{R}}_+ \\ h_j(k, -), & k \in \widehat{\mathcal{R}}_-, \end{cases} \quad (2.23)$$

es analítica en el interior de  $\widehat{\mathcal{R}}$  y continua hasta  $\partial\widehat{\mathcal{R}} \setminus \{0\}$ , y si  $(1 + mr)V(\tau) \in L^1$  se extiende continuamente hasta  $k = 0$ . El coeficiente de dispersión es definido como

$$S_j(k, \varepsilon) = \frac{h_j(k, \varepsilon)}{h_j(-k, \varepsilon)} = e^{2i\delta_j(k, \varepsilon)}, \quad (2.24)$$

donde

$$\delta_j(k, \varepsilon) = \text{argumento de } h_j(k, \varepsilon), \quad (2.25)$$

es el corrimiento de fase, ambos son los objetos básicos en el problema directo en teoría de dispersión. Véase la sección IV.3 para una justificación del nombre de corrimiento de fase dado a  $\delta_j(k, \varepsilon)$ .

## II.6. EXISTENCIA DE LAS SOLUCIONES REGULAR Y DE JOST

En [1] y [4], la siguiente ecuación integral fue obtenida para la solución regular

$$\varphi_j(k, r, \varepsilon) = \varphi_j^0(k, r, \varepsilon) + \int_0^r G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) V(\zeta) \varphi_j(k, \zeta, \varepsilon) d\zeta \quad (2.26)$$

donde

$$\varphi_j^0(k, r, \varepsilon) = k^{-j} \left[ \frac{krj_{j-1}(kr)}{E+m} - krj_j(kr) \right], \quad (2.27)$$

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = \left[ \begin{array}{l} -\frac{E+m}{k} (kr\eta_{j-1}(kr)k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - krj_{j-1}(kr)k\zeta\eta_{j-1}(k\zeta)) \\ (kr\eta_j(kr)k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - krj_j(kr)k\zeta\eta_{j-1}(k\zeta)) \\ (kr\eta_{j-1}(kr)k\zeta j_j(k\zeta) - krj_{j-1}(kr)k\zeta\eta_j(k\zeta)) \\ -\frac{k}{E+m} (kr\eta_j(kr)k\zeta j_j(k\zeta) - krj_j(kr)k\zeta\eta_j(k\zeta)) \end{array} \right], \quad (2.28)$$

y donde hemos utilizado las funciones esféricas de Bessel

$$zj_j(z) = \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(z), \quad (2.29)$$

$$z\eta_j(z) = (-1)^j \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{\frac{1}{2}} J_{-j-\frac{1}{2}}(z), \quad (2.30)$$

con  $J_\nu(z)$  la función de Bessel (véase [9], página 4, fórmula 2), y  $E$  es definida en (2.13). Para la solución de Jost tenemos la ecuación integral siguiente

$$h_j(k, r, \varepsilon) = h_j^0(k, r, \varepsilon) - \int_r^\infty G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) V(\zeta) h_j(k, \zeta, \varepsilon) d\zeta, \quad (2.31)$$

donde

$$h_j^0(k, r, \varepsilon) = k^j \left[ \frac{\left(\frac{k}{-E+m}\right) krh_{j-1}^-(kr)}{krh_j^-(kr)} \right], \quad (2.32)$$

con

$$krh_j^-(kr) \equiv kr(\eta_j(kr) - i j_j(kr)) = -i \left(\frac{1}{2}\pi kr\right)^{\frac{1}{2}} H_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr).$$

$H_\nu^{(2)}(z)$  es la función de Hankel definida en [9] página 4, fórmula 6.

La función de Green puede ser expresada en la siguiente forma equivalente, en términos de las funciones  $krh_j^-(kr)$  y  $krh_j^+(kr)$ , donde  $krh_j^+(kr) = kr(\eta_j(kr) + ij_j(kr))$  (véase [9] página 4, fórmula 2).

Tenemos que

$$(-z)j_j(-z) = (-1)^{j+1} z j_j(z) \quad \text{y} \quad (-z)\eta_j(-z) = (-1)^j z \eta_j(z).$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} h_{j,1}^{(0)}(k, r, \varepsilon) &= \frac{k^{j+1}}{-E + m} krh_{j-1}^-(kr) \\ &= \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) (kr)(\eta_{j-1}(kr) - ij_{j-1}(kr)), \end{aligned}$$

$$h_{j,2}^{(0)}(k, r, \varepsilon) = k^j krh_{j-1}^-(kr) = k^j (kr)(\eta_j(kr) - ij_j(kr)),$$

$$\begin{aligned} h_{j,1}^{(0)+}(-k, r, \varepsilon) &= \frac{k^{j+1}}{-E + m} krh_{j-1}^+(kr) \\ &= \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) kr(\eta_{j-1}(kr) + ij_{j-1}(kr)), \end{aligned}$$

$$h_{j,2}^{(0)+}(-k, r, \varepsilon) = k^j krh_{j-1}^+(kr) = k^j kr(\eta_j(kr) + ij_j(kr)).$$

Calculemos ahora los siguientes términos,

$$\begin{aligned} &h_{j,1}^{(0)}(k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(-k, \zeta, \varepsilon) - h_{j,1}^{(0)}(-k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon) \\ &= \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) (kr)(\eta_{j-1}(kr) - ij_{j-1}(kr)) \\ &\quad \times \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) (k\zeta)(\eta_{j-1}(k\zeta) + ij_{j-1}(k\zeta)) \\ &\quad - \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) (kr)(\eta_{j-1}(kr) + ij_{j-1}(kr)) \\ &\quad \times \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right) (k\zeta)(\eta_{j-1}(k\zeta) - ij_{j-1}(k\zeta)) \\ &= \left( \frac{k^{j+1}}{-E + m} \right)^2 (kr\eta_{j-1}(kr) - ikrj_{j-1}(kr)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times ((k\zeta)\eta_{j-1}(k\zeta) + i(k\zeta)j_{j-1}(k\zeta)) \\
& - \left( \frac{k^{j+1}}{-E+m} \right)^2 ((kr)\eta_{j-1}(kr) + i(kr)j_{j-1}(kr)) \\
& \times ((k\zeta)\eta_{j-1}(k\zeta) - i(k\zeta)j_{j-1}(k\zeta)) \\
& = \left( \frac{k^{j+1}}{-E+m} \right)^2 (2i)(kr)\eta_{j-1}(kr)k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - (kr)j_{j-1}(kr)k\zeta\eta_{j-1}(k\zeta).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{k}{-E+m} = -\frac{E+m}{k},$$

obteniendo finalmente

$$\begin{aligned}
& \frac{i(E-m)}{2k^{2j+1}} (h_{j,1}^{(0)}(k, \tau, \epsilon)h_{j,1}^{(0)}(-k, \zeta, \epsilon) - h_{j,1}^{(0)}(-k, \tau, \epsilon)h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta, \epsilon)) \\
& = -\frac{E+m}{k} (kr)\eta_{j-1}(kr)k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - (kr)j_{j-1}(kr)k\zeta\eta_{j-1}(k\zeta).
\end{aligned}$$

Similarmen te obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{i(E-m)}{2k^{2j+1}} (h_{j,2}^{(0)}(k, \tau, \epsilon)h_{j,2}^{(0)}(-k, \zeta, \epsilon) - h_{j,2}^{(0)}(-k, \tau, \epsilon)h_{j,2}^{(0)}(k, \zeta, \epsilon)) \\
& = -\frac{k}{E+m} (kr)\eta_j(kr)k\zeta j_j(k\zeta) - (kr)j_j(kr)k\zeta\eta_j(k\zeta), \\
& \frac{i(E-m)}{2k^{2j+1}} (h_{j,1}^{(1)}(k, \tau, \epsilon)h_{j,2}^{(0)}(-k, \zeta, \epsilon) - h_{j,1}^{(1)}(-k, \tau, \epsilon)h_{j,2}^{(0)}(k, \zeta, \epsilon)) \\
& = (kr)\eta_{j-1}(kr)k\zeta j_j(k\zeta) - (kr)j_{j-1}(kr)k\zeta\eta_j(k\zeta), \\
& \frac{i(E-m)}{2k^{2j+1}} (h_{j,2}^{(0)}(k, \tau, \epsilon)h_{j,1}^{(0)}(-k, \zeta, \epsilon) - h_{j,2}^{(0)}(-k, \tau, \epsilon)h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta, \epsilon)) \\
& = (kr)\eta_j(kr)k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - krj_j(kr)k\zeta\eta_{j-1}(k\zeta)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la forma equivalente de la función de Green es

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = \frac{(E-m)}{2k^{2j+1}} \left[ \begin{aligned} & (h_{j,1}^{(0)}(k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(-k, \zeta, \varepsilon) - h_{j,1}^{(0)}(-k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon)) \\ & (h_{j,2}^{(0)}(k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(-k, \zeta, \varepsilon) - h_{j,2}^{(0)}(-k, r, \varepsilon)h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon)) \\ & (h_{j,1}^{(0)}(k, r, \varepsilon)h_{j,2}^{(0)}(-k, \zeta, \varepsilon) - h_{j,1}^{(0)}(-k, r, \varepsilon)h_{j,2}^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon)) \\ & (h_{j,2}^{(0)}(k, r, \varepsilon)h_{j,2}^{(0)}(-k, \zeta, \varepsilon) - h_{j,2}^{(0)}(-k, r, \varepsilon)h_{j,2}^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon)) \end{aligned} \right] \quad (2.33)$$

Asimismo se establecen las siguientes relaciones para la función de Green. Denotémos por  $G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)_{mn}$  con  $m, n = 1, 2$  las entradas correspondientes de la función de Green. De acuerdo a lo anterior obtenemos

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)_{11} = -G_j(k, \zeta, r, \varepsilon)_{11}$$

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)_{22} = -G_j(k, \zeta, r, \varepsilon)_{22}$$

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)_{12} = -G_j(k, \zeta, r, \varepsilon)_{21}$$

i.e.,

$$G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = -G_j(k, \zeta, r, \varepsilon)^T,$$

donde  $T$  denota la matriz transpuesta.

Se sigue de la definición de la función de Bessel (véase [9] página 4, fórmula 2) que

$$J_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} + O(z^{\alpha+2}),$$

o bien, el caso que nos interesa

$$J_{j+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(z^{j+\frac{1}{2}})}{2^{j+\frac{1}{2}} \Gamma(j+\frac{1}{2}+1)} + O(z^{j+\frac{1}{2}+2}),$$

donde  $\Gamma(j+\frac{1}{2}+1) = \sqrt{\pi} (2j+1)!!/2^{j+1}$  y por lo tanto:

$$z^j J_j(z) = \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{j+1}}{(2j+1)!!} + O(z^{j+3}),$$

cuando  $z \rightarrow 0$ , i.e.,

$$z j_j(z) = \frac{z^{j+1}}{(2j+1)!!} + O(z^{j+3}), \quad \text{para } z \rightarrow 0, \quad (2.34)$$

para

$$\begin{aligned} z \eta_j(z) &= (-1)^j \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} J_{-j-\frac{1}{2}}(z) \\ &= (-1)^j \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{z^{-j-\frac{1}{2}}}{2^{-j-\frac{1}{2}} \Gamma(-j-\frac{1}{2}+1)} + O(z^{-j-\frac{1}{2}+2}) \right] \\ &= (-1)^j \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{z^{-j}}{2^{-j-\frac{1}{2}} \Gamma(-j-\frac{1}{2}+1)} \right) + O(z^{-j+2}) \\ &= z^{-j} (2j-1)!! + O(z^{-j+2}), \end{aligned}$$

nótese que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right) = (-1)^j \frac{2^j \sqrt{\pi}}{(2j-1)!!},$$

así establecemos que

$$z \eta_j(z) = z^{-j} (2j-1)!! + O(z^{-j+2}), \quad z \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Además por fórmula 4, en la página 78 de [9]

$$\begin{aligned} z h_j^-(z) &= -i \left(\frac{\pi}{2} z\right)^{\frac{1}{2}} H_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) \\ &= -i \left(\frac{\pi}{2} z\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} z\right)^{-\frac{1}{2}} i^{j+1} e^{-iz} \sum_{m=0}^j (-1)^m \left(j + \frac{1}{2}, m\right) (2z)^{-m}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$z h_j^-(z) = i^j e^{-iz} \sum_{m=0}^j (-1)^m \left(j + \frac{1}{2}, m\right) (2z)^{-m}, \quad (2.36)$$

donde

$$\left(j + \frac{1}{2}, m\right) = \frac{\Gamma(j+1+m)}{m! \Gamma(j+1-m)} \quad (2.37)$$

Las siguientes estimaciones ([19] y [24]) se siguen de (2.34)–(2.36) y las fórmulas de la página 78 de [9].

$$|krj_j(kr)| \leq C e^{|\operatorname{Im} kr|} \left(\frac{|k|r}{1+|k|r}\right)^{j+1} \quad (2.38)$$

$$|kr\eta_j(kr)| \leq C e^{|\operatorname{Im} kr|} \left(\frac{1+|k|r}{|k|r}\right)^j \quad (2.39)$$

Además, podemos estimar directamente

$$\begin{aligned} |krh_j^-(kr)| &= |i^j| |e^{-ikr}| \left| \sum_{m=0}^j (-1)^m \left(j + \frac{1}{2}, m\right) (2z)^{-m} \right| \\ &\leq C e^{|\operatorname{Im} kr|} \sum_{m=0}^j |2kr|^{-m} = C e^{|\operatorname{Im} kr|} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2|k|r}\right)^{j+1}}{1 - \frac{1}{2|k|r}} \right) \\ &= C e^{|\operatorname{Im} kr|} \left( \frac{(2|k|r)^{j+1} - 1}{2|k|r - 1} \right) \frac{1}{(2|k|r)^j} \\ &\leq C e^{|\operatorname{Im} kr|} \frac{1}{(2|k|r)^j} (1 + 2|k|r + \dots + (2|k|r)^j) \\ &\leq C \left( \frac{2 + 2|k|r}{2|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} kr|} = C \left( \frac{1 + |k|r}{|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} kr|}, \end{aligned}$$

así tenemos que

$$|krh_j^-(kr)| \leq C \left( \frac{1 + |k|r}{|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} kr|} \quad (2.40)$$

O bien, en forma equivalente también por [9] página 78, para  $|k|r \leq 1$

$$krh_j^-(kr) = e^{|\operatorname{Im} kr|} O\left(\frac{1}{(|k|r)^j}\right),$$



y

$$krh_j^+(kr) = e^{-\operatorname{Im} kr} O\left(\frac{1}{(|k|r)^j}\right).$$

Para  $|k|r \geq 1$ 

$$krh_j^-(kr) = i^j e^{-ikr} \left( \left( j + \frac{1}{2}, 0 \right) + O\left(\frac{1}{|k|r}\right) \right),$$

y

$$krh_j^+(kr) = i^{-j} e^{ikr} \left( \left( j + \frac{1}{2}, 0 \right) + O\left(\frac{1}{|k|r}\right) \right),$$

donde  $(j + \frac{1}{2}, 0) = 1$ .Usando estas estimaciones obtenemos la cota siguiente para la función de Green  $G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)$  para  $\zeta \leq r$ 

$$|G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)| \leq C e^{|\operatorname{Im} k|(r-\zeta)} \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j \left( \frac{1+|k|\zeta}{\zeta} \right)^j \left[ \begin{array}{c} \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} \\ 1 \\ \frac{1}{1+|k|r} \end{array} \right], \quad (2.41)$$

y como  $G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = -G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)^T$ , para  $r \leq \zeta$ 

$$|G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)| \leq C e^{|\operatorname{Im} k|(\zeta-r)} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^j \left( \frac{\zeta}{1+|k|\zeta} \right)^j \left[ \begin{array}{c} \frac{|E+m|r}{1+|k|r} \\ 1 \\ \frac{1}{1+|k|\zeta} \end{array} \right]. \quad (2.42)$$

Construimos la solución regular por aproximaciones sucesivas

$$\varphi_j(k, r, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j^{(n)}(k, r, \varepsilon), \quad (2.43)$$

con

$$\varphi_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = \int_0^r G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) V(\zeta) \varphi_j^{(n-1)}(k, r, \varepsilon) d\zeta. \quad (2.44)$$

Por (2.38),

$$|\varphi_j^{(0)}(k, r, \varepsilon)| \leq |k|^{-j} \left[ \frac{|krj_{j-1}(kr)|}{|E+m| |krj_j(kr)|} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq |k|^{-j} \left[ C e^{|\operatorname{Im} k| r} \left( \frac{|k| r}{1+|k| r} \right)^j \right. \\
&\quad \left. C e^{|\operatorname{Im} k| r} \frac{|k|}{|E+m|} \left( \frac{|k| r}{1+|k| r} \right)^{j+1} \right] \\
&\leq C e^{|\operatorname{Im} k| r} \left( \frac{r}{1+|k| r} \right)^j \left[ \frac{|k|}{|E+m|} \frac{1}{1+|k| r} \right] \\
&\leq C e^{|\operatorname{Im} k| r} \left( \frac{r}{1+|k| r} \right)^j \left[ \frac{|k| |E-m|}{|k|^2} \right] \\
&\leq C e^{|\operatorname{Im} k| r} \left( \frac{r}{1+|k| r} \right)^j. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Estimemos  $\varphi_j^{(1)}(k, r, +)$ ,

$$\begin{aligned}
|\varphi_j^{(1)}(k, r, +)| &\leq \int_0^r |G_j(k, r, \zeta, +)| |V(\zeta)| |\varphi_j^{(0)}(k, r, +)| d\zeta \\
&\leq \int_0^r C e^{|\operatorname{Im} k|(r-\zeta)} \left( \frac{r}{1+|k| r} \right)^j \left( \frac{1+|k|\zeta}{\zeta} \right)^j \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} & 1 \\ 1 & \frac{|-E+m|r}{1+|k|r} \end{bmatrix} |V(\zeta)| C e^{|\operatorname{Im} k|\zeta} \\
&\quad \times \left( \frac{\zeta}{1+|k|\zeta} \right)^j d\zeta \\
&\leq C \left( \frac{r}{1+|k| r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k| r} \int_0^r \begin{bmatrix} \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} & 1 \\ 1 & \frac{|-E+m|r}{1+|k|r} \end{bmatrix} |V(\zeta)| d\zeta.
\end{aligned}$$

Pero como

$$\begin{aligned}
\frac{|E-m|r}{1+|k|r} &= \frac{|E-m|}{|k|} \frac{|k|r}{1+|k|r} \\
&\leq \frac{|E-m|}{|k|} \leq C,
\end{aligned}$$

terminos que

$$|\varphi_j^{(1)}(k, r, \varepsilon)| \leq C^2 \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k|r} \left( \int_0^r \left( 1 + \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right).$$

Y entonces por inducción sobre  $n$  obtenemos

$$|\varphi_j^{(n)}(k, r, +)| \leq C^{n+1} \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k|r} \frac{1}{n!} \left( \int_0^r \left( 1 + \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right)^n,$$

donde hemos utilizado el hecho de que

$$\int_0^r V(\zeta_n) \int_0^{\zeta_n} V(\zeta_{n-1}) \cdots \int_0^{\zeta_2} V(\zeta_1) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^r V(\zeta) d\zeta \right)^n.$$

Entonces, la serie (2.43) converge absolutamente y

$$|\varphi_j(k, r, +)| \leq C \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k|r} \exp \left[ C \int_0^r \left( 1 + \frac{|E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right] \quad (2.46)$$

Además, la convergencia es uniforme en cada conjunto compacto de  $\mathbf{C}$ . Se sigue que  $\varphi_j(k, r, +)$  es analítica sobre  $k$  para cada  $r$  fijo. Análogamente tenemos que

$$|\varphi_j^{(0)}(k, r, -)| \leq C e^{|\operatorname{Im} k|r} \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j \left[ \frac{1}{1+|k|r} r \right], \quad (2.47)$$

y por (2.41) e inducción sobre  $n$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi_j^{(n)}(k, r, -)| &\leq C^{n+1} \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k|r} \frac{1}{n!} \\ &\times \left( \int_0^r \left( 1 + \frac{|-E+m|\zeta}{1+|k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right)^n \left[ 1 + \frac{1}{1+|k|r} r \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Entonces como antes,

$$|\varphi_j(k, r, +)| \leq C \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j e^{|\operatorname{Im} k| r} \times \exp \left[ C \int_0^r \left( 1 + \frac{1-E+m|\zeta|}{1+|\zeta|} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right] \left[ 1 + \frac{1-E+m|r}{1+|k|r} \right]. \quad (2.49)$$

Para resultados previos en la existencia y la analiticidad de la solución regular véase [1].

La Solución de Jost es también construida por aproximaciones sucesivas

$$h_j(k, r, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} h_j^{(n)}(k, r, \varepsilon), \quad (2.50)$$

con

$$h_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = - \int_r^{\infty} G_j(k, r, \zeta, \varepsilon) V(\zeta) h_j^{(n-1)}(k, r, \varepsilon) d\zeta, \quad (2.51)$$

por (2.32) y (2.40), para  $k \in \tilde{\mathcal{R}}_+$  tenemos que

$$\begin{aligned} |h_j^{(0)}(k, r, +)| &= |k|^j \left[ \frac{|k|}{|1-E+m|} |kr h_{j-1}^-(kr)| \right. \\ &\quad \left. |kr h_j^-(kr)| \right] \\ &\leq |k|^j \left[ \frac{|k|}{|1-E+m|} C e^{|\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1+|k|r}{|k|r} \right)^{j-1} \right. \\ &\quad \left. C e^{|\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1+|k|r}{|k|r} \right)^j \right] \\ &\leq C e^{|\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^j \left[ \frac{|k|r}{1+|k|r} \frac{|k|}{|1-E+m|} \right] \\ &\leq C e^{|\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^j \left[ \frac{r}{1+|k|r} \frac{|k|^2}{|1-E+m|} \right] \\ &\leq C e^{|\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^j \left[ \frac{|E+m|r}{1+|k|r} \right]. \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$|h_j^{(0)}(k, r, +)| \leq C e^{\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \left[ \frac{|E+m|r}{1+|k|r} \right], \quad (2.52)$$

y por (2.42) e inducción sobre  $n$  obtenemos para  $k \in \widehat{\mathcal{R}}_+$ ,

$$\begin{aligned} |h_j^{(n)}(k, r, +)| &\leq C^{n+1} e^{\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \\ &\times \frac{1}{n!} \left( \int_r^\infty \left( 1 + \frac{|E+m|\zeta}{1+|\zeta|} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right)^n \left[ 1 + \frac{|E+m|r}{1+|k|r} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

En consecuencia la serie (2.50) converge absolutamente, y

$$\begin{aligned} |h_j(k, r, +)| &\leq C e^{\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \\ &\times \exp \left( \int_r^\infty C \left( 1 + \frac{|E+m|\zeta}{1+|\zeta|} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right) \left[ 1 + \frac{|E+m|r}{1+|k|r} \right], \end{aligned} \quad (2.54)$$

suponiendo que  $V(r) \in L^1$  si  $k \neq 0$ , y que  $(1+mr)V(r) \in L^1$  si  $k=0$ . Además dado que la convergencia es uniforme en cada compacto de  $\widehat{\mathcal{R}}_+ \setminus \{0\}$ , se sigue del Teorema de Vitali que para probar que  $h_j(k, r, +)$  es analítica en  $\widehat{\mathcal{R}}_+ \cap \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} k < 0\}$  para  $r$  fijo es suficiente probar que cada  $h_j^{(n)}(k, r, +)$  es analítica si  $V(r) \in L^1$ . Pero esto se sigue por inducción del Teorema de Morera y (2.51) y (2.53), ya que  $G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)$  y  $h_j^{(0)}(k, r, +)$  son analíticas en  $k$ .

Además

$$h_j^{(0)}(k, r, -) \leq C e^{\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j. \quad (2.55)$$

Y como antes demostramos que

$$|h_j^{(n)}(k, r, -)| \leq C^{n+1} e^{\operatorname{Im} kr} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \frac{1}{n!} \left( \int_r^\infty \left( 1 + \frac{|-E+m|\zeta}{1+|\zeta|} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right)^n. \quad (2.56)$$

y que

$$|h_j(k, r, -)| \leq C e^{\operatorname{Im} k r} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \exp \left( C \int_r^\infty \left( 1 + \frac{|-E + m|\zeta|}{1 + |\zeta|} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right), \quad (2.57)$$

suponiendo que  $V(r) \in L^1$  si  $k \neq 0$ , y que  $(1 + mr)V(r) \in L^1$  si  $k = 0$ . Además, se prueba como en el caso  $h_j(k, r, +)$ , que  $h_j(k, r, -)$  es analítica en  $\cap \widehat{\mathcal{R}} \cap \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} k < 0\}$  si  $V(r) \in L^1$ . En [1], la existencia y analiticidad de  $h_j(k, r, \varepsilon)$  fue probada bajo condiciones más restrictivas para  $V(r)$  (de hecho pide que  $V'(r) \in L^1$ ). Notemos que se sigue de (2.14), (2.22), (2.54) y (2.57), que

$$h_j(k, \varepsilon) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^j}{(2j - 1)!!} h_{j,2}(k, \varepsilon). \quad (2.58)$$

Además, reemplazando las ecuaciones integrales (2.26) y (2.31) en (2.22), obtenemos (véase [1]) que

$$h_j(k, \varepsilon) = 1 - \int_0^\infty \varphi_j(k, r, \varepsilon) V(r) h_j^{(0)}(k, r, \varepsilon) dr, \quad (2.59)$$

$$h_j(k, \varepsilon) = 1 - \int_0^\infty \varphi_j^{(0)}(k, r, \varepsilon) V(r) h(k, r, \varepsilon) dr, \quad (2.60)$$

donde, si  $k \in \widehat{\mathcal{R}} \setminus \{0\}$ , requerimos que  $V(r) \in L^1$ , y si  $k = 0$ , que  $(1 + mr)V(r) \in L^1$ . En (2.59),  $\varphi_j(k, r, \varepsilon) V(r) h_j^{(0)}(k, r, \varepsilon)$  denota el producto escalar de la tranpuesta de  $\varphi_j(k, r, \varepsilon)$  con  $V(r) h_j^{(0)}(k, r, \varepsilon)$ , y similarmente en (2.60). Usaremos esta notación sin más comentario.

### III. ESTIMACIONES DE ALTAS ENERGÍAS Y EL TEOREMA DE PARZEN

#### III.1 INTRODUCCIÓN

En [27] Parzen probó que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \left( \delta_j(k, \varepsilon) + \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta \right) = 0, \quad \text{módulo } 2\pi.$$

En [1], y [5] se demostró que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \left( h_j(k, \varepsilon) - \exp\left(-i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta\right) \right) = 0,$$

para potenciales que satisfacen  $V(r) \in L^1$ . Sin embargo, no se estimó el término de error para cuando  $|k| \rightarrow \infty$ . En este Capítulo probamos un teorema del tipo Parzen para el desarrollo en altas energías para la función de Jost. A saber, si  $V(r) \in L^1 \cap L^q(0, a)$  para alguna  $a > 0$  y  $1 \leq q < \infty$ , entonces

$$h_j(k, \varepsilon) = \exp\left(-i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta\right) + o(1/|k|^{\frac{q-1}{q}}) \quad \text{si } |k| \rightarrow \infty,$$

y si  $V(r) \in L^1 \cap L^\infty(0, a)$

$$h_j(k, \varepsilon) = \exp\left(-i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta\right) + O\left(\frac{\ln|k|}{|k|}\right), \quad \text{si } |k| \rightarrow \infty.$$

El corrimiento de fase  $\delta_j(k, \varepsilon)$  es de hecho únicamente definido módulo  $2\pi$ , pero puede ser definido por continuidad en tal forma que si  $V(r) \in L^1 \cap L^q(0, a)$

$$\delta_j(k, \varepsilon) = -\frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta + o\left(1/|k|^{\frac{q-1}{q}}\right), \quad \text{si } |k| \rightarrow \infty,$$

y si  $V(r) \in L^1 \cap L^\infty(0, a)$

$$\delta_j(k, \varepsilon) = -\frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta + O\left(\frac{\ln|k|}{|k|}\right), \quad \text{si } |k| \rightarrow \infty.$$

Véase el Apéndice para las definiciones de  $o$  y  $O$ . El hecho de que el corrimiento de fase sea en general asintótico a una constante no cero en el límite a altas energías es una razón importante para el estudio de la dispersión para la ecuación de Dirac, ya que es exactamente lo que se observa experimentalmente. En el caso de la ecuación de Schrödinger, tiende a cero en el límite de altas energías, salvo si se consideran potenciales con fuertes singularidades de un cierto tipo. Para una discusión de este punto véase por ejemplo [6] y [37].

### III.2. ESTIMACIONES DE ALTAS ENERGÍAS Y LOS TÉRMINOS DE ERROR

**Teorema III.1.** *Supongamos que  $V(r) \in L^1$ . Entonces cuando  $|k| \rightarrow \infty$  y  $|k|r \rightarrow \infty$ ,*

$$h_j(k, r, \varepsilon) = h_j^0(k, r, \varepsilon) \left( \exp\left[-i\frac{E}{k} \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta\right] \right) \times \left[ 1 + (1+r)O\left(\frac{1}{|k|r}\right) \right], \quad (3.1)$$

y además

$$h_j(k, r, \varepsilon) = h_j^0(k, r, \varepsilon) \left( \exp\left[-i\frac{E}{k} \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta\right] \right) \times \left[ 1 + \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{g(k)}{|k|r} + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) \right], \quad (3.2)$$

con  $g(k) = o(1)$ , y si también  $V'(r) \in L^1$ ,  $g(k) = O(1/|k|)$ .

**Prueba:** Denotemos [1]

$$V_j(k, r, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^j r(k) k r h_{j-1}(kr)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^j k r h_j^-(kr)} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$



donde  $\tau(k) = k/(-E + m)$ , y

$$m_j(k, r, \varepsilon) = V_j(k, r, \varepsilon)h_j(k, r, \varepsilon); \quad (3.4)$$

entonces, se sigue de (2.32), (2.50) y (2.51) que

$$m_j(k, r, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} m_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) \quad (3.5)$$

con

$$m_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = (-1)^n \int_{r=\zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_n < \infty} \prod_{l=1}^n F_j(k, \zeta_{l-1}, \zeta_l, \varepsilon) V(\zeta_l) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\zeta_1 \dots d\zeta_n, \quad (3.6)$$

y donde

$$F_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = V_j(k, r, \varepsilon)G_j(k, r, \zeta, \varepsilon)V_j^{-1}(k, \zeta, \varepsilon). \quad (3.7)$$

Ahora observemos que  $F_j(k, r, \zeta, \varepsilon)$  también puede ser representada de la manera siguiente, por (2.33), (2.36) y (3.3), y considerando  $krh_j^-(kr)$  y  $krh_j^+(kr)$  cuando  $|k|r \geq 1$ , para  $k \in \mathbb{C}$  y  $\zeta \geq r$ ,

$$F_j(k, r, \zeta, \varepsilon) = F_j^{(0)}(k, r, \zeta, \varepsilon) + F_j^{(1)}(k, r, \zeta, \varepsilon), \quad (3.8)$$

con

$$F_j^{(0)}(k, r, \zeta, \varepsilon) = \frac{-1}{2r} \begin{pmatrix} \tau^2 & 1 \\ \tau^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$F_j^{(1)}(k, r, \zeta, \varepsilon) = \frac{ie^{2ik(r-\zeta)}}{2r} \left\{ \begin{pmatrix} \tau^2 & -1 \\ -\tau^2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ij}{kr} \begin{pmatrix} r^2(j-1) & -(j-1) \\ -r^2(j+1) & (j+1) \end{pmatrix} + \frac{ij}{k\zeta} \begin{pmatrix} -r^2(j-1) & (j+1) \\ r^2(j-1) & -(j+1) \end{pmatrix} + (1 + e^{-2ik(r-\zeta)})O\left(\frac{1}{|k|^2 r^2}\right) \right\}, \quad (3.10)$$

donde  $O\left(\frac{1}{|k|^{1+\tau}}\right)$  es uniforme sobre  $|k| \geq \delta$ , para todo  $\delta > 0$ .

Probamos por inducción sobre  $n$  que  $m_j^{(n)}(k, r, \varepsilon)$  se descompone como

$$m_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = p_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) + q_j^{(n)}(k, r, \varepsilon), \quad \text{para } n \geq 1, \quad (3.11)$$

con

$$p_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = (-1)^n \int_{r=\zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_n < \infty} \prod_{l=1}^n F_j^{(0)}(k, \zeta_{l-1}, \zeta_l, \varepsilon) \times V(\zeta_l) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \quad (3.12)$$

$$q_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = (-1)^n \sum_{s=1}^n q_j^{(n,s)}(k, r, \varepsilon), \quad (3.12)$$

con

$$q_j^{(n,s)}(k, r, \varepsilon) = \int_{r=\zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_n < \infty} \prod_{l=1}^{s-1} F_j(k, \zeta_{l-1}, \zeta_l, \varepsilon) V(\zeta_l) \times F_j^{(1)}(k, \zeta_{s-1}, \zeta_s, \varepsilon) V(\zeta_s) \times \prod_{l=s+1}^n F_j^{(0)}(k, \zeta_{l-1}, \zeta_l, \varepsilon) V(\zeta_l) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \quad (3.14)$$

Notemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} p_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{i^n}{(2r)^n} \begin{bmatrix} r^2 & 1 \\ r^2 & 1 \end{bmatrix}^n \int_r^{\infty} V(\zeta) d\zeta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

así tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} p_j^{(n)}(k, r, \varepsilon) = \left( \exp \left[ \frac{i(1+\tau^2)}{2r} \right] P(r) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde

$$P(r) = \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta. \quad (3.16)$$

Además

$$\begin{aligned} \eta_j^{(n,s)}(k, r, \varepsilon) &= \left( \frac{-i(\tau^2 + 1)}{2r} \right)^{(n-s)} \frac{1}{(n-s)!} \int_{r=\zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_n < \infty} \prod_{l=1}^{s-1} F_j(k, \zeta_{l-1}, \zeta_l, \varepsilon) \\ &\times V(\zeta_l) F_j^{(1)}(k, \zeta_{s-1}, \zeta_s, \varepsilon) V(\zeta_s) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (P(\zeta_s))^{n-s} d\zeta_1 \dots d\zeta_s. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Denotemos

$$I_j(k, r, \varepsilon) = \frac{1}{i!} \int_r^\infty F_j^{(1)}(k, r, \zeta, \varepsilon) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} V(\zeta) (P(\zeta))^i d\zeta. \quad (3.18)$$

Como

$$\tau^{-1}(\tau^2 - 1) = O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} F_j^{(1)}(k, r, \zeta, \varepsilon) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= ie^{2ik(r-\zeta)} \left( \frac{\tau^2 - 1}{2r} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{j(\tau^2 + 1)}{2k\zeta\tau} e^{2ik(r-\zeta)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &+ \left( \frac{e^{ik(r-\zeta)}}{kr} + \frac{e^{2ik(r-\zeta)}}{k\zeta} \right) O\left(\frac{1}{|k|}\right) \\ &+ (1 + e^{2ik(r-\zeta)}) O\left(\frac{1}{|k|^{2,2}}\right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

uniformemente para  $|k| \geq \delta > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left| I_j(k, r, \varepsilon) - \frac{1}{i!} \frac{i(\tau^2 - 1)}{2r} \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} V(\zeta) (P(\zeta))^i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\zeta \right. \\ \left. + \frac{j(\tau^2 + 1)}{i!} \frac{1}{2rk} \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} \frac{V(\zeta)}{\zeta} (P(\zeta))^i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\zeta \right| \\ \leq \left( \frac{1}{r} \left( O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{|k|^{2,2}}\right) \right) \frac{(Q(r))^{i+1}}{(i+1)!}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$Q(r) = \int_r^\infty |V(\zeta)| d\zeta, \quad (3.22)$$

y hemos usado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!} \int_r^\infty |V(\zeta)| (P(\zeta))^l d\zeta &= \int_r^\infty |V(\zeta)| d\zeta \\ &\times \int_{\zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_l < \infty} |V(\zeta_1)| \dots |V(\zeta_l)| d\zeta_1 \dots d\zeta_l = \frac{(Q(r))^{l+1}}{(l+1)!}. \end{aligned}$$

Se sigue por integración por partes que si  $V(r), V'(r) \in L^1$ ,

$$\left| \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} V(\zeta) (P(\zeta))^l d\zeta \right| \leq \frac{C(l+1)}{|k|} (Q(r))^l. \quad (3.23)$$

Si únicamente  $V(r) \in L^1$ , obtenemos, por la aproximación en norma de  $L^1$  de  $V(r)$  por funciones en  $C_0^\infty(0, \infty)$ , que

$$\left| \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} V(\zeta) (P(\zeta))^l d\zeta \right| \leq (Q(r))^l o(1). \quad (3.24)$$

De manera análoga demostramos que

$$\begin{aligned} \left| \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} \frac{V(\zeta)}{\zeta} (P(\zeta))^l d\zeta \right| &\leq \frac{C(Q(r))^l}{r} \\ &\times \left( \frac{1}{r} + l + 1 \right) \begin{cases} \frac{1}{|k|}, & \text{si } V(r), V'(r) \in L^1, \\ o(1), & \text{si } V(r) \in L^1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Además por (3.8)-(3.10), (3.17)-(3.19), (3.21) y (3.23)-(3.24), obtenemos que

$$\begin{aligned} |q_j^{(n,s)}(k, r, \varepsilon)| &\leq \frac{C^{s-1}}{(n-1)!} (Q(r))^{(n-1)} \\ &\times \left( n + 1 - s + j \left( \frac{n+1-s}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right) f(k) \\ &+ \frac{C^{s-1}}{n!} (Q(r))^n \left( \frac{1}{r} o\left( \frac{1}{|k|^2} \right) + o\left( \frac{1}{|k|^2 r^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde, si  $V(r) \in L^1$ ,  $f(k) = o(1/|k|)$ , y si también  $V'(r) \in L^1$ ,  $f(k) =$

$O(1/|k|^2)$ . Más aún, ya que

$$\frac{\tau^2 + 1}{2\tau} = -\frac{E}{k} + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \quad (3.27)$$

se sigue de (3.5), (3.11), (3.13), (3.15) y (3.26) que

$$\begin{aligned} & \left| m_j(k, \tau, \varepsilon) - e^{-i\left(\frac{E}{k}\right)P(\tau)} \right| \\ & \leq C \left[ 1 + \frac{j}{\tau} \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) f(k) + \frac{1}{\tau} O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) + O\left(\frac{1}{|k|^2 \tau^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

(3.2) se sigue de (3.5) y (3.28). (3.1) se demuestra, observando que podemos reemplazar (3.24) y (3.25) respectivamente, por

$$\begin{aligned} & \left| \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} V(\zeta) (P(\zeta))^j d\zeta \right| \leq C(Q(r))^{j+1}, \\ & \left| \int_r^\infty e^{2ik(r-\zeta)} \frac{V(\zeta)}{\zeta} (P(\zeta))^j d\zeta \right| \leq \frac{C}{r} (Q(r))^{j+1}. \end{aligned}$$

**Teorema III.2.** Supongamos que  $V(r) \in L^1$ , y que para alguna  $a > 0$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $V(r) \in L^q(0, a)$ . Entonces, cuando  $|k| \rightarrow \infty$ ,

$$h_j(k, \varepsilon) = \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta \right] + o\left(\frac{1}{|k|^{(j-1)/q}}\right), \quad (3.29)$$

y si  $V(r) \in L^1 \cap L^\infty(0, a)$ ,

$$h_j(k, \varepsilon) = \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta \right] + o\left(\frac{\ln |k|}{|k|}\right). \quad (3.30)$$

**Prueba:** Se sigue de (2.36) que

$$h_j^0(k, \zeta, \varepsilon) = \mathcal{L} e^{-i(kr - j(\tau/2))} \left\{ \begin{bmatrix} -i\tau \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau j(j-1) \\ \frac{2kr}{ij(j+1)} \end{bmatrix} + O\left(\frac{1}{|k|^2 \tau^2}\right) \right\} \quad (3.31)$$

Además, como (véase [9] página 78, fórmula 1)

$$z j_j(z) = \operatorname{sen} \left( z - j \frac{\pi}{2} \right) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2} j \rfloor} (-1)^m \left( j + \frac{1}{2}, 2m \right) (2z)^{-2m} \\ + \operatorname{cos} \left( z - j \frac{\pi}{2} \right) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2} j \rfloor - \frac{1}{2}} (-1)^m \left( j + \frac{1}{2}, 2m + 1 \right) (2z)^{-2m-1}, \quad (3.32)$$

se sigue que

$$\varphi_j^0(k, r, \varepsilon) = k^{-j} \left\{ \left[ \frac{\operatorname{cos} \left( kr - j \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{1}{r} \operatorname{sen} \left( kr - j \frac{\pi}{2} \right)} \right] + \left[ \frac{-j(j-1)}{2kr} \operatorname{sen} \left( kr - j \frac{\pi}{2} \right) \right] + O \left( \frac{e^{|Im k| r}}{|k|^2 r^2} \right) \right\}, \quad (3.33)$$

por (3.31) y (3.33),

$$\varphi_j^0(k, r, \varepsilon) h_j^0(k, \zeta, \varepsilon) = i \frac{E}{k} + \frac{1}{k} e^{-2i(kr - j(\frac{\pi}{2}))} \left( im - \frac{Ej}{kr} \right) \\ + m \left( m + \frac{j}{r} \right) O \left( \frac{1}{|k|^2} \right) + O \left( \frac{1}{|k|^2 r^2} \right), \quad (3.34)$$

y donde hemos usado  $\tau(k) = -(E+m)/|k|$ . Pero como también (véase (2.45), (2.47), (2.52) y (2.55))

$$|\varphi_j^0(k, r, \varepsilon) h_j^0(k, \zeta, \varepsilon)| \leq C,$$

para  $|k| \geq \delta > 0$ , obtenemos que

$$\left| \varphi_j^0(k, r, \varepsilon) h_j^0(k, \zeta, \varepsilon) - i \frac{E}{k} \right| \leq C \left( \frac{1}{1 + |k|r} + \frac{m(m+1)}{|k|} \right). \quad (3.35)$$

se sigue de (2.60) que

$$h_j(k, \varepsilon) = h_j^{(1)}(k, \varepsilon) + h_j^{(2)}(k, \varepsilon), \quad (3.36)$$

con

$$h_j^{(1)}(k, \varepsilon) = 1 - \int_0^\infty \varphi_j^0(k, r, \varepsilon) V(\zeta) h_j^0(k, \zeta, \varepsilon)$$

$$\times \left( \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_{\zeta}^{\infty} V(\rho) d\rho \right] \right) d\zeta, \quad (3.37)$$

$$h_j^{(2)}(k, \varepsilon) = \int_0^{\infty} \varphi_j^{(0)}(k, r, \varepsilon) V(\zeta) \left[ h_j(k, \zeta, \varepsilon) - h_j^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon) \right. \\ \left. \times \exp \left( -i \frac{E}{k} \int_{\zeta}^{\infty} V(\rho) d\rho \right) \right] d\zeta, \quad (3.38)$$

por (2.54), (2.57), (3.1) y (3.2), para  $|k| \geq \delta > 0$ ,

$$\left| h_j(k, \zeta, \varepsilon) - h_j^{(0)}(k, \zeta, \varepsilon) \left( \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_{\zeta}^{\infty} V(\rho) d\rho \right] \right) \right| \\ \leq C \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^2 e^{\operatorname{Im} ir} \left[ \frac{1}{1 + |k|r} + \frac{1}{|k|^2} \right], \quad (3.39)$$

y por (2.45) y (2.47),

$$|h_j^{(2)}(k, \varepsilon)| \leq C \left[ \int_0^{\infty} \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |k|\zeta)} d\zeta + \frac{1}{|k|^2} \right], \quad (3.40)$$

Además, por (3.35),

$$\left| h_j^{(1)}(k, \varepsilon) - 1 + i \frac{E}{k} \int_0^{\infty} V(\zeta) \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_{\zeta}^{\infty} V(\rho) d\rho \right] d\zeta \right| \\ \leq C \left[ \frac{1}{|k|} + \int_0^{\infty} \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |k|\zeta)} d\zeta \right], \quad (3.41)$$

por (3.36), (3.40) y (3.41),

$$\left| h_j(k, \varepsilon) - \exp \left[ -i \frac{E}{k} \int_0^{\infty} V(\zeta) d\zeta \right] \right| \leq C \left[ \frac{1}{|k|} + \int_0^{\infty} \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |k|\zeta)} d\zeta \right]. \quad (3.42)$$

Si  $V(r) \in L^1 \cap L^{\infty}(0, a)$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |k|\zeta)} d\zeta \leq \|V\|_{\infty} \int_0^a \frac{d\zeta}{(1 + |k|\zeta)} + \int_a^{\infty} \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |k|\zeta)} d\zeta \\ \leq C \left[ \frac{\ln |k|}{|k|} + \frac{1}{|k|} \right], \quad \text{cuando } |k| \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

y (3.30) queda demostrada.

Si  $V(r) \in L^1 \cap L^q(0, a)$ , para cualquier  $\delta > 0$  tomemos  $\varphi(r) \in L^1 \cap L^\infty$  con  $\|V - \varphi\|_{L^q(0, a)} < \delta$ . Entonces

$$\int_a^\infty \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |\zeta|)} d\zeta \leq J_1 + J_2, \quad (3.44)$$

donde

$$J_1 = \int_0^a \frac{|V(\zeta) - \varphi(\zeta)|}{(1 + |\zeta|)} d\zeta, \quad (3.45)$$

$$J_2 = \int_0^a \frac{|\varphi(\zeta)|}{(1 + |\zeta|)} d\zeta + \int_a^\infty \frac{|V(\zeta)|}{(1 + |\zeta|)} d\zeta.$$

Por el argumento anterior:

$$J_2 \leq C \left[ \frac{\ln |k|}{|k|} + \frac{1}{|k|} \right], \quad \text{cuando } |k| \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

y por la desigualdad de Hölder

$$J_1 \leq \|V - \varphi\|_{L^q(0, a)} \frac{1}{|k|^{\frac{q-1}{q}}} \|(1 + \rho)^{-1}\|_{L^{q/(q-1)}(0, \infty)} \leq \frac{\delta}{|k|^{(q-1)/q}}. \quad (3.47)$$

(3.29) queda demostrada a partir de (3.42), (3.44), (3.46) y (3.47).



# IV: ESTIMACIONES DE BAJAS ENERGÍAS Y EL TEOREMA DE LEVINSON PARA EL CASO DE MASA CERO

## IV.1. INTRODUCCIÓN

En el caso de  $m = 0$ , no es necesario considerar la superficie de Riemann (véase Capítulo II, fórmula 2.12) podemos simplemente tomar  $E = k$ . Esto corresponde a tomar en (2.12)  $\epsilon = 1$ , para  $\operatorname{Re} k \geq 0$ , y  $\epsilon = -1$ , para  $\operatorname{Re} k < 0$  (los detalles los mostraremos posteriormente). Denotamos por  $h_j(k, r)$  y  $h_j(k)$  las correspondientes solución de Jost y función de Jost, ambas son analíticas para  $\operatorname{Im} k < 0$ , y continuas para  $\operatorname{Im} k \leq 0$ . Pero el análogo para (2.13) ya no se cumple para nuestra elección de  $E = k$ . Probamos en el Lema IV.2 que si  $h_j(0) = 0$ , entonces si  $V(r) \in \mathcal{L}_\sigma^1$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ , cuando  $k \rightarrow 0$  e  $\operatorname{Im} k \leq 0$

$$h_j(k) = d_j k + \begin{cases} o(|k|^{-1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1, \end{cases}$$

con una constante explícita  $d_j \neq 0$ . Como  $d_j$  es real se sigue (véase 1.3) que si  $h_j(0) = 0$ , entonces  $S_j(0) = 1$ . En el caso  $m = 0$ , el único posible autovalor de  $H_j$  es  $E = 0$ . Además,  $E = 0$  es un autovalor de  $H_j$  si y sólo si  $h_j(0) = 0$ . Nótese que en el caso  $m > 0$ , cuando  $h_j(0, +) = 0$ ,  $E = m$  no es un autovalor de  $H_j$  pero es un "estado medio acotado". Denotamos por  $N_j$  el número de autovalores de  $H_j$  con  $m = 0$ .  $N_j = 1$  si  $E = 0$  es un autovalor, y  $N_j = 0$  de lo contrario. Entonces si  $V(r) \in \mathcal{L}^1$  probamos en el Teorema IV.1 nuestro Teorema de Levinson, esto es

$$N_j = \frac{1}{\pi} [\delta_j(0+) - \delta_j(0-)],$$

donde  $\delta_j(0+) = \lim_{k \downarrow 0} \delta_j(k)$ , y  $\delta_j(0-) = \lim_{k \uparrow 0} \delta_j(k)$ . Nuestra prueba es similar a la prueba de la estimación análoga en el caso de  $m > 0$  dadas en [17], y en [16] para el operador de Schrödinger. En realidad, la prueba en [16] es un refinamiento con el término de error controlado de

la prueba original del Teorema de Levinson para el caso del operador de Schrödinger [19]. Para una revisión extensa de la literatura en el caso del operador de Schrödinger, véanse [6] y [25], y para resultados recientes [16] y [26]. En [17], se revisa la literatura sobre el Teorema de Levinson para la ecuación de Dirac con masa positiva. Existen artículos que consideran sistemas de la forma (2.1) y (2.2) en el caso regular, donde los términos singulares de la forma  $-j/r$ ,  $j \neq 0$ , no están presentes. Véanse por ejemplo [12], [13], [14] y [20], y las referencias allí citadas.

#### IV.2. EL PLANO COMPLEJO COMO SUPERFICIE DE RIEMANN PARA LA ENERGÍA EN EL CASO $m = 0$

Para  $m = 0$ , la fórmula (2.12) se reduce a  $E(k) = \varepsilon\sqrt{k^2}$  y  $\mathcal{R}_\pm$  se reduce a  $\mathbb{C} \setminus \{z: \operatorname{Re} z = 0\}$ , pero en este caso es innecesario seguir considerando la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ , en su lugar consideremos simplemente

$$E(k) = k \text{ definida en } \mathbb{C}.$$

Lo que nos resta ahora es mostrar la relación de las fórmulas para ambos casos:  $m \neq 0$ ,  $m = 0$ , respectivamente. Para ello analicemos el comportamiento de  $\sqrt{k^2}$  en cada cuadrante del plano complejo.

En el primer cuadrante:  $0 < \theta < \pi/2$  o bien  $0 < 2\theta < \pi$ , la fase de  $k^2$  está en el rango permitido  $(-\pi, \pi)$  de la fase, por lo que si  $k = Re^{i\theta}$  entonces

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{R^2 e^{2i\theta}} = Re^{i\theta} = k.$$

En el segundo cuadrante:  $\pi/2 < \theta < \pi$  o bien  $\pi < 2\theta < 2\pi$ , la fase de  $k^2$  se sale del rango  $(-\pi, \pi)$ . Agregando múltiplos enteros de  $2\pi$ , estaremos dentro de dicho rango, a saber:  $\pi - 2\pi < 2\theta - 2\pi < 2\pi - 2\pi \iff -\pi < 2\theta - 2\pi < 0$ , por consiguiente

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{R^2 e^{i(2\theta - 2\pi)}} = Re^{i\theta} e^{-i\pi} = -Re^{i\theta} = -k.$$

En el tercer cuadrante:  $-\pi < \theta < -\pi/2 \iff -2\pi < 2\theta < -\pi$ , la fase de  $k^2$  no pertenece a  $(-\pi, \pi)$ , pero  $-2\pi + 2\pi < 2\theta + 2\pi < -\pi + 2\pi \iff 0 < 2\theta + 2\pi < \pi$ , permite que la fase pertenezca a  $(-\pi, \pi)$ , por lo tanto

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{R^2 e^{i(2\theta + 2\pi)}} = Re^{i\theta} e^{i\pi} = -Re^{i\theta} = -k.$$

Finalmente en el cuarto cuadrante:  $-\pi/2 < \theta < 0 \Rightarrow -\pi < 2\theta < 0$ ,

dicha fase pertenece a  $(-\pi, \pi)$ , por lo tanto

$$\sqrt{k^2} = \sqrt{R^2 e^{2i\theta}} = R e^{i\theta} = k.$$

Resumiendo lo anterior

$$\sqrt{k^2} = k \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} k > 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{k^2} = -k \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} k < 0.$$

Entonces tomar

$$E(k) = k \quad \text{corresponde a tomar} \quad \mathcal{R}_+(\varepsilon = +1) \quad \text{cuando} \quad \operatorname{Re} k > 0,$$

ya que

$$E(k) = \sqrt{k^2} = k \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} k > 0,$$

y

$$E(k) = -k \quad \text{corresponde a tomar} \quad \mathcal{R}_-(\varepsilon = -1) \quad \text{cuando} \quad \operatorname{Re} k < 0$$

puesto que

$$E(k) = -\sqrt{k^2} = -(-k) = k.$$

Lo que muestra la relación entre las fórmulas correspondientes a  $m > 0$  y a  $m = 0$ .

#### IV.3. EL DESARROLLO DE ALTAS ENERGÍAS PARA LAS SOLUCIONES DE JOST Y REGULAR, EN EL CASO $m = 0$

Como consecuencia de lo anterior, algunas fórmulas del Capítulo II se verán ligeramente simplificadas, como se mostrará a continuación. Denotaremos ahora por  $\varphi_j(k, r)$  y  $h_j(k, r)$ , la solución regular y la solución de Jost respectivamente con  $m = 0$  y  $E = k$ . Bajo la condición de que  $V(r) \in L^1$ ,  $\varphi_j(k, r)$  es analítica sobre  $\mathbb{C}$  y  $h_j(k, r)$  es analítica sobre  $\operatorname{Im} k < 0$  y continua sobre  $\operatorname{Im} k \leq 0$ . Notemos que para  $\operatorname{Im} k \leq 0$ ,

$$[h_j(k, r), \overline{h_j(k, r)}] = 2ik^{2j},$$

y entonces  $h_j(k, r)$  y  $\overline{h_j(k, r)}$  forman un sistema fundamental de soluciones para la energía  $E = k \neq 0$ . La ecuación (2.21) es reemplazada

por

$$\rho_j(k, r) = \frac{-i}{2k^2 j} (\overline{h_j(k)h_j(k, r)} - h_j(k)\overline{h_j(k, r)}) \quad (4.1)$$

para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , donde la función de Jost es definida, como en (2.22),

$$h_j(k) = [\varphi_j(k, r), h_j(k, r)]. \quad (4.2)$$

El coeficiente de dispersión es ahora definido como

$$S_j(k) = \frac{h_j(k)}{\overline{h_j(k)}} = e^{2i\delta_j(k)}, \quad (4.3)$$

Notemos que como  $h_j(-k, \varepsilon) = \overline{h_j(k, \varepsilon)}$  y  $h_j(-k, r, \varepsilon) = \overline{h_j(k, r, \varepsilon)}$ , (4.1) y (4.3) son, respectivamente, los casos particulares de (2.21) y (2.24) cuando  $m = 0$ , puesto que hemos tomado  $\varepsilon = +1$  para  $\text{Re } k > 0$ , y  $\varepsilon = -1$  para  $\text{Re } k < 0$ . El término de error en la asintótica de la solución para altas energías en el Teorema III.1 es ahora simple. Para este propósito, notemos que ahora  $\tau = k/-E = -1$ , y que (3.8)-(3.10) se satisfacen cuando  $\tau$  es reemplazada por  $-1$  y con el  $O(1/|k|^2 \tau^2)$  uniforme sobre  $k$ . (3.15) es reemplazada por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(n)}(k, r) = c^{-iP(r)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

y como  $\tau^2 = 1$ , (3.20) es reemplazada por (véase (3.19))

$$P_j^{(1)}(k, r, \zeta) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{j}{k\zeta} e^{2ik(r-\zeta)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (1 + e^{2ik(r-\zeta)}) O\left(\frac{1}{|k|^2 \tau^2}\right), \quad (4.5)$$

y se sigue que (3.21) es reemplazada por

$$\left| I_1 - \frac{j}{llk} \int_{\tau}^{\infty} e^{2ik(r-\zeta)} \frac{V(\zeta)}{\zeta} (P'(\zeta))^l \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\zeta \right| \leq \frac{(Q(r))^{l+1}}{(l+1)!} O\left(\frac{1}{|k|^2 \tau^2}\right), \quad (4.6)$$

y en lugar de (3.26), obtenemos

$$|q_j^{(n,s)}(k, r)| \leq \frac{C^{s-1}}{(n-1)!} (Q(r))^{n-1} j \left( \frac{n+1-s}{r} + \frac{1}{r^2} \right) f(k) + \frac{C^{s-1}}{n!} (Q(r))^n O\left(\frac{1}{|k|^2 r^2}\right), \quad (4.7)$$

y finalmente

$$|m_j(k, r) - e^{-iP(r)}| \leq C \left[ \frac{j}{r} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) f(k) + O\left(\frac{1}{|k|^2 r^2}\right) \right] \quad (4.8)$$

Entonces obtenemos, en lugar de (3.2), que

$$h_j(k, r) = h_j^{(0)}(k, r) \left( \exp \left[ -i \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta \right] \right) \left( 1 + \left[ 1 + \frac{1}{r} \right] \frac{g(k)}{|k|r} \right). \quad (4.9)$$

Además, (3.1) es reemplazada por

$$h_j(k, r) = h_j^{(0)}(k, r) \left( \exp \left[ -i \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta \right] \right) \left( 1 + [1+r] O\left(\frac{1}{|k|r}\right) \right). \quad (4.10)$$

El Teorema III.2 permanece sin cambios. Observemos que justamente en este caso  $E/k = 1$ . Se sigue de (2.32), (2.34) y (2.35) (véase también [9], pág. 4) que

$$h_j^{(0)}(k, r) = \left[ \frac{0}{(2j-1)!!} \right]. \quad (4.11)$$

Entonces por (2.31), (2.42), (2.54) y (2.57),

$$h_{j,1}^{(0)}(0, r) = o\left(\frac{1}{r^j}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.12)$$

$$h_{j,2}^{(0)}(0, r) = \frac{(2j-1)!!}{r^j} + o\left(\frac{1}{r^j}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Si  $h_j(0) = 0$ , las soluciones regular y de Jost son linealmente dependientes. Entonces

$$\varphi_j(0, r) = c_j h_j(0, r). \quad (4.14)$$

Se sigue de (2.27), (2.34) y (2.60) que

$$c_j = ((2j-1)!)^{-1} \int_r^\infty \zeta^j \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta;$$

$c_j \neq 0$ , porque de lo contrario  $\varphi_j(0, r) \equiv 0$ , en contradicción con (2.14). Entonces se sigue de (2.46), (2.49), (4.12) y (4.13) que

$$\varphi_j(0, r) \leq C \frac{r^j}{(1+r)^{2j}}. \quad (4.15)$$

Para terminar esta sección, calculemos la asintótica en este caso para la solución regular  $\varphi_j(k, r)$ , cuando  $r \rightarrow \infty$  para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $m = 0$ . Por (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_j(k, r) &= \frac{-i}{2k^{2j}} |h_j(k)| \left( \exp(-i\delta_j(k)) h_j(k, r) - \exp(i\delta_j(k)) \overline{h_j(k, r)} \right) \\ &= \frac{-i}{2k^{2j}} |h_j(k)| 2i \operatorname{Im} \left[ h_j(k, r) \exp(-i\delta_j(k)) \right]. \end{aligned}$$

Y por (2.17)

$$\begin{aligned} \varphi_j(k, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \begin{bmatrix} \operatorname{Im}(ik)^j i \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \\ \operatorname{Im}(ik)^j \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \end{bmatrix} \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \begin{bmatrix} \operatorname{Im} i^{j+1} k^j \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \\ \operatorname{Im} i^j \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \end{bmatrix} \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \begin{bmatrix} k^j \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j+1)\right) \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \\ k^j \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}j\right) \exp(-i(kr - \delta_j(k))) \end{bmatrix} \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \begin{bmatrix} \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j-1+1)\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j-1)\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \begin{bmatrix} \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(j-1)\right)\right) \\ \operatorname{Im} \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(j-1)\right)\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se sigue de (2.27), (2.34) y (2.60) que

$$c_j = ((2j-1)!)^{-1} \int_r^\infty \zeta^j \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta;$$

$c_j \neq 0$ , porque de lo contrario  $\varphi_j(0, r) \equiv 0$ , en contradicción con (2.14). Entonces se sigue de (2.46), (2.49), (4.12) y (4.13) que

$$\varphi_j(0, r) \leq C \frac{r^j}{(1+r)^{2j}}. \quad (4.15)$$

Para terminar esta sección, calculemos la asintótica en este caso para la solución regular  $\varphi_j(k, r)$ , cuando  $r \rightarrow \infty$  para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $m = 0$ . Por (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_j(k, r) &= \frac{-i}{2k^{2j}} |h_j(k)| \left( \exp(-i\delta_j(k)) h_j(k, r) - \exp(i\delta_j(k)) \overline{h_j(k, r)} \right) \\ &= \frac{-i}{2k^{2j}} |h_j(k)| 2i \operatorname{Im} \left[ h_j(k, r) \exp(-i\delta_j(k)) \right]. \end{aligned}$$

Y por (2.17)

$$\begin{aligned} \varphi_j(k, r) &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \left[ \frac{\operatorname{Im}(ik)^j \exp(-i(lr - \delta_j(k)))}{\operatorname{Im}(ik)^j \exp(-i(lr - \delta_j(k)))} \right] \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \left[ \frac{\operatorname{Im} i^{j+1} k^j \exp(-i(kr - \delta_j(k)))}{\operatorname{Im} i^j k^j \exp(-i(kr - \delta_j(k)))} \right] \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^{2j}} \left[ \frac{k^j \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j+1)\right) \exp(-i(kr - \delta_j(k)))}{k^j \operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp(-i(kr - \delta_j(k)))} \right] \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \left[ \frac{\operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j-1+1)\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(j-1)\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}\right)\right)} \right] \\ &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \left[ \frac{\operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(j-1)\right)\right)}{\operatorname{Im} \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(j-1)\right)\right)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \left[ \frac{\operatorname{Im} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right)\right)}{\operatorname{Im} \exp\left(-i\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right)\right)} \right] \\
 &= \frac{|h_j(k)|}{k^j} \left[ \begin{array}{c} \cos\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\operatorname{sen}\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\varphi_j(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{|h_j(k)|}{k^j} \left[ \begin{array}{c} \cos\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right) \\ -\operatorname{sen}\left(kr - \delta_j(k) - \frac{\pi}{2}j\right) \end{array} \right] \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ y } m=0.$$

Esta fórmula justifica el nombre de corrimiento de fase dado a las  $\delta_j$ .

IV.4. EL DESARROLLO DE BAJAS ENERGÍAS PARA LA FUNCIÓN DE JOST  
 Probaremos primero un resultado preliminar.

Lema IV.1. *Supongamos que  $V(r) \in L^1$ . Entonces, si  $h_j(0) = 0$ ,*

$$|\varphi_j(k, r) - \varphi_j(0, r)| \leq C |k| \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j \exp \left( \left[ 2|\operatorname{Im} k| r + \int_0^r |V(\zeta)| d\zeta \right] \right), \quad (4.16)$$

para  $|k| \leq 1$ .

Prueba: Denotamos por

$$\tilde{\varphi}_j(k, r) = \varphi_j(k, r) - \varphi_j(0, r) \equiv \Psi_j^{(1)}(k, r) + \Psi_j^{(2)}(k, r), \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_j^{(1)}(k, r) &= \varphi_j(k, r) - \varphi_j(0, r) \\
 &+ \int_0^r (G_j(k, r, \zeta) - G_j(0, r, \zeta)) V(\zeta) \varphi_j(0, \zeta) d\zeta
 \end{aligned} \quad (4.18)$$



y  $G_j(k, r, \zeta)$  es definida como en (2.28) y (2.33), pero con  $E = k$  (recordar que correspondió a tomar  $\varepsilon = 1$  para  $\text{Re } k \geq 0$ , y  $\varepsilon = -1$  para  $\text{Re } k < 0$ ), y

$$\Psi_j^{(2)}(k, r) = \int_0^r G_j(k, r, \zeta) V(\zeta) \Psi_j(k, r) d\zeta. \quad (4.19)$$

Se sigue de (2.41) que

$$\begin{aligned} |\Psi_j^{(2)}(k, r)| &\leq C e^{|\text{Im } k| r} \left( \frac{r}{1 + |k| r} \right)^j \\ &\times \int_0^r e^{-|\text{Im } k| r} \left( \frac{1 + |k| \zeta}{\zeta} \right)^j |V(\zeta)| |\Psi_j(k, r)| d\zeta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Además, como  $krh_j^- = kr(\eta_j(kr) - ij_j(kr))$ , y por (2.33)–(2.35),

$$\Psi_j^{(1)}(k, r) = \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (4.21)$$

donde

$$I_1 = (\varphi_{j,1}^{(0)}(k, r) - \varphi_{j,1}^{(0)}(0, r)) \left( 1 - (2j-1)!! \int_0^r \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta \right), \quad (4.22)$$

$$I_2 = - \int_0^r kr j_{j-1}(kr) \left( k\zeta \eta_j(k\zeta) - \frac{(2j-1)!!}{(k\zeta)^j} \right) \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta, \quad (4.23)$$

$$I_3 = - \int_0^r kr \eta_{j-1}(kr) k\zeta j_{j-1}(k\zeta) \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta, \quad (4.24)$$

$$I_4 = \int_0^r kr j_{j-1}(kr) k\zeta \eta_{j-1}(k\zeta) \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta, \quad (4.25)$$

$$I_5 = \int_0^r kr \eta_{j-1}(kr) k\zeta j_j(k\zeta) \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta. \quad (4.26)$$

Además, por (2.32), (2.34), (2.35) y (2.59),

$$I_1 = (\varphi_{j,1}^{(0)}(k, r) - \varphi_{j,1}^{(0)}(0, r)) \times \left( h_j(0) + (2j-1)!! \int_r^\infty |\varphi_{j,2}(0, \zeta)| \left( \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} \right) d\zeta \right). \quad (4.27)$$

Se sigue de la definición de la Función de Bessel en pág. 4 de [9] que

$$\left| kr j_j(lr) - \left( \frac{(kr)^{j+1}}{(2j-1)!!} \right) \right| \leq C e^{-| \operatorname{Im} kr |} \left( \frac{(|k|r)^{j+3}}{(1+|k|r)^2} \right), \quad (4.28)$$

$$|kr n_j(kr) - (kr)^{-j} (2j-1)!!| \leq C e^{-| \operatorname{Im} kr |} \left( \frac{(1+|k|r)^{j-2}}{(|k|r)^{j-2}} \right). \quad (4.29)$$

Si  $h_j(0) = 0$ , se sigue de (2.27), (4.15), (4.27) y (4.28), que  $I_1$  satisface

$$|I_1| \leq C e^{-| \operatorname{Im} kr |} |k|^2 \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j, \quad |k| \leq 1. \quad (4.30)$$

Similarmen te probamos, usando (2.38), (4.15) y (4.29), que  $I_2$  satisface

$$|I_2| \leq C e^{2| \operatorname{Im} kr |} |k|^2 \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j, \quad (4.31)$$

Y usando (2.39), probamos que

$$|I_i| \leq C e^{2| \operatorname{Im} kr |} |k| \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j, \quad (4.32)$$

para  $i = 3, 4, 5$ . Entonces, para  $|k| \leq 1$ ,

$$|\Psi_{j,1}^{(1)}(k, r)| \leq C e^{2| \operatorname{Im} kr |} |k| \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j. \quad (4.33)$$

Análogamente tenemos que

$$\Psi_{j,2}^{(1)}(k, r) = \sum_{i=1}^6 I_i, \quad (4.34)$$

donde

$$I_1 = \varphi_{j,2}^{(0)}(k, r) \left( h_j(0) + (2j-1)!! \int_0^\infty \varphi_{j,2}(0, \zeta) \left( \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} \right) d\zeta \right), \quad (4.35)$$

$$I_2 = \varphi_{j,2}^{(0)}(k, r) \int_0^r k k^j \eta_{j-1}(k\zeta) \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta, \quad (4.36)$$

$$I_3 = -\varphi_{j,2}^{(0)}(k, r) \int_0^r \left( k^j k\zeta \eta_j(k\zeta) - \frac{(2j-1)!!}{\zeta^j} \right) \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta, \quad (4.37)$$

$$I_4 = \left( kr \eta_j(kr) - \frac{(2j-1)!!}{(kr)^j} \right) \int_0^r k\zeta j_{j-1}(k\zeta) V(\zeta) \varphi_{j,1}(0, \zeta) d\zeta, \quad (4.38)$$

$$I_5 = \frac{(2j-1)!!}{(kr)^j} \int_0^r \left( k\zeta j_{j-1}(k\zeta) - \frac{(k\zeta)^j}{(2j-1)!!} \right) V(\zeta) \varphi_{j,1}(0, \zeta) d\zeta, \quad (4.39)$$

$$I_6 = -kr \eta_j(kr) \int_0^r k\zeta j_j(k\zeta) \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta. \quad (4.40)$$

Probamos como antes  $\Psi_j^{(2)}(k, r)$  satisface (4.33). Entonces usando (4.20), obtenemos que

$$\begin{aligned} |\Psi_j(k, r)| &\leq C e^{2|\operatorname{Im} k|r} |k| \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j + C e^{|\operatorname{Im} k|r} \left( \frac{r}{1+|k|r} \right)^j \\ &\quad \times \int_0^r e^{-|\operatorname{Im} k|\zeta} \left( \frac{1+|k|\zeta}{\zeta} \right)^j |\Psi_j(k, \zeta)| |V(\zeta)| d\zeta, \end{aligned} \quad (4.41)$$

y (4.16) se sigue de la desigualdad de Gronwall (véase el Apéndice y [23], pág. 204).

LEMMA IV.2. Supóngase que  $V(r) \in L_\sigma^1$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Entonces, si  $h_j(0) = 0$ , tenemos que, cuando  $|k| \rightarrow 0$ ,

$$h_j(k) = d_j k + \begin{cases} o(|k|^{1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1, \end{cases} \quad (4.42)$$

donde

$$d_j = \left( \frac{1}{c_j} \right) \int_0^\infty (\varphi_j(0, \zeta))^2 d\zeta \neq 0,$$

con

$$c_j = ((2j - 1)!!)^{-1} \int_0^\infty \zeta^j \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta,$$

es la constante de (4.14).

**Prueba:** Para probar el Lema, necesitamos considerar una segunda solución linealmente independiente a (2.1) con  $E = m = 0$ ,  $f_j(r)$ , que satisface:  $[f_j(r), \varphi_j(0; r)] = 1$ . Como por (2.14)  $\varphi_{j,1}(0, r) > 0$  para  $r \leq r_0$ , con  $r_0$  suficientemente pequeño, podemos representar  $f_j(r)$  para  $r \leq r_0$  como sigue

$$f_{j,1}(r) = \varphi_{j,1}(0, r) \left( \alpha + \int_{r_0}^r (\varphi_{j,1}(0, \zeta))^{-2} V(\zeta) d\zeta \right), \quad (4.43)$$

$$f_{j,2}(r) = \varphi_{j,2}(0, r) \left( \alpha + \int_{r_0}^r (\varphi_{j,1}(0, \zeta))^{-2} V(\zeta) d\zeta \right) - (\varphi_{j,1}(0, r))^{-1}, \quad (4.44)$$

con  $\alpha = f_{j,1}(r_0)/\varphi_{j,1}(0, r_0)$ . Entonces, por (2.14),

$$f_{j,1}(r) = O\left(\frac{1}{r^j}\right), \quad r \rightarrow 0, \quad (4.45)$$

$$f_{j,2}(r) = \frac{-(2j-1)!!}{r^j} + o\left(\frac{1}{r^j}\right), \quad r \rightarrow 0. \quad (4.46)$$

Además, por (4.13) y (4.14),  $\varphi_{j,2}(0, r) \neq 0$  para  $r \geq r_1$ , con  $r_1$  suficientemente grande. Entonces podemos representar a  $f_j(r)$  como sigue para  $r \geq r_1$ :

$$f_{j,1}(r) = \varphi_{j,1}(0, r) \left( \beta + \int_{r_1}^r (\varphi_{j,2}(0, \zeta))^{-2} V(\zeta) d\zeta \right) + (\varphi_{j,2}(0, r))^{-1}, \quad (4.47)$$

$$f_{j,2}(r) = \varphi_{j,2}(0, r) \left( \beta + \int_{r_1}^r (\varphi_{j,2}(0, \zeta))^{-2} V(\zeta) d\zeta \right), \quad (4.48)$$

donde  $\beta = f_{j,2}(r_1)/\varphi_{j,2}(0, r_1)$ . Entonces, por (4.12)-(4.14) se sigue que

$$f_{j,1}(r) = \frac{r^j}{c_j(2j-1)!!} + o(r^j), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.49)$$

$$f_{j,2}(r) = O(r^j), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.50)$$

En consecuencia, de (4.45), (4.46), (4.49) y (4.50), tenemos que

$$|f_j(r)| \leq C \frac{(1+r)^{2j}}{r^j}. \quad (4.51)$$

Definamos la función de Green,

$$Q_j(r, \zeta) = \begin{pmatrix} f_{j,1}(r)\varphi_{j,2}(\zeta) - \varphi_{j,1}(r)f_{j,2}(\zeta) & -f_{j,1}(r)\varphi_{j,1}(\zeta) + \varphi_{j,1}(r)f_{j,1}(\zeta) \\ f_{j,2}(r)\varphi_{j,2}(\zeta) - \varphi_{j,2}(r)f_{j,2}(\zeta) & -f_{j,2}(r)\varphi_{j,1}(\zeta) + \varphi_{j,2}(r)f_{j,1}(\zeta) \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

donde, por simplicidad, hemos usado  $\varphi_j(r)$  para  $\varphi_j(0, r)$ . Por (4.15) y (4.51)

$$|Q_j(r, \zeta)| \leq C \left(\frac{r}{\zeta}\right)^j. \quad (4.53)$$

Por variación de parámetros, tenemos que

$$\varphi_j(k, r) = \varphi_j(0, r) + X_j^{(1)}(k, r) + X_j^{(2)}(k, r), \quad (4.54)$$

donde

$$X_j^{(1)}(k, r) = -k \int_0^r Q_j(r, \zeta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi_j(0, \zeta) d\zeta, \quad (4.55)$$

$$X_j^{(2)}(k, r) = -k \int_0^r Q_j(r, \zeta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\varphi_j(k, \zeta) - \varphi_j(0, \zeta)) d\zeta. \quad (4.56)$$

Por (4.15), (4.49), (4.50) y (4.52),

$$X_{j,1}^{(1)}(k, r) = \frac{k}{c_j(2j-1)!!} r^j \int_0^\infty (\varphi_j(0, \zeta)^2) d\zeta + kO(r^j), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.57)$$

$$X_{j,2}^{(1)}(k, r) = kO(r^j), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.58)$$

y por (4.16) y (4.53),

$$|X_j^{(2)}(k, r)| \leq C k^2 e^{2|\operatorname{Im} k|r} r^{j+1}. \quad (4.59)$$

Usando (2.59) y  $h_j(0) = 0$  descomponemos  $h_j(k)$  como sigue:

$$h_j(k) = \sum_{i=1}^3 I_i, \quad (4.60)$$

con

$$I_1 = -(2j-1)!! \int_0^\infty (\varphi_{j,2}(k, \zeta) - \varphi_{j,2}(0, \zeta)) \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} d\zeta, \quad (4.61)$$

$$I_2 = - \int_0^\infty \varphi_j(0, \zeta) V(\zeta) (h_j^{(0)}(k, \zeta) - h_j^{(0)}(0, \zeta)) d\zeta, \quad (4.62)$$

$$I_3 = - \int_0^\infty (\varphi_j(k, \zeta) - \varphi_j(0, \zeta)) V(\zeta) (h_j^{(0)}(k, \zeta) - h_j^{(0)}(0, \zeta)) d\zeta. \quad (4.63)$$

En lo sucesivo, consideraremos siempre  $k \in \mathbb{R}$ . Usando (4.54), descomponemos  $I_1$  en dos términos:

$$I_1 = -(2j-1)!! \int_0^\infty X_{j,2}^{(1)} \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} d\zeta + \hat{I}_1, \quad (4.64)$$

donde

$$\hat{I}_1 = -(2j-1)!! \int_0^\infty X_{j,2}^{(2)} \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} d\zeta.$$

Además usando (4.16), (4.58) y (4.59), probamos que si  $V(r) \in L_\sigma^1$  cuando  $|k| \rightarrow 0$ ,

$$\hat{I}_1 = \begin{cases} o(|k|^{1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1. \end{cases} \quad (4.65)$$

Usando (4.11), descomponemos  $I_2$  como sigue:

$$I_2 = I_{2,1} + I_{2,2}, \quad (4.66)$$

donde

$$I_{2,1} = - \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) h_{j,1}^{(0)}(k, \zeta) d\zeta, \quad (4.67)$$

$$I_{2,2} = - \int_0^\infty \varphi_{j,2}(0, \zeta) V(\zeta) \left( h_{j,2}^{(0)}(k, \zeta) - \frac{(2j-1)!!}{\zeta^j} \right) d\zeta. \quad (4.68)$$

Pero usando (2.38), y (4.29),

$$I_{2,2} = \begin{cases} o(|k|^{1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1. \end{cases} \quad (4.69)$$

Por (2.32) y (2.36), para  $j = 1$ ,  $h_{1,1}^{(0)}(k, r) = -ke^{-ikr}$ . Entonces, para  $j = 1$ ,

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= k \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta + k \int_0^\infty \varphi_{j,1}(k, \zeta) (e^{-ik\zeta} - 1) V(\zeta) d\zeta \\ &= k \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta + O(|k|^2). \end{aligned} \quad (4.70)$$

En el caso  $j \geq 2$ , descomponemos  $I_{2,1}$  como

$$I_{2,1} = \sum_{i=2}^2 M_i. \quad (4.71)$$

$$M_1 = k(2j-3)!! \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) \frac{V(\zeta)}{\zeta^{j-1}} d\zeta. \quad (4.72)$$

$$M_2 = \int_0^\infty k^j \left[ \left( k\zeta \eta_{j-1}(k\zeta) - \frac{(2j-3)!!}{(k\zeta)^{j-1}} \right) - ik\zeta j_{j-1}(k\zeta) \right] \varphi_{j,1}(0, \zeta) V(\zeta) d\zeta. \quad (4.73)$$

Se sigue de (2.38) y (4.29) que

$$M_2 = O(|k|^2). \quad (4.74)$$

Entonces, por (4.70)-(4.74),

$$I_{2,1} = k(2j-3)!! \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) \frac{V(\zeta)}{\zeta^{j-1}} d\zeta + O(|k|^2). \quad (4.75)$$

Además, por (2.32), (2.38), (2.40), (4.11) y (4.29),

$$I_3 = \begin{cases} o(|k|^{1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1. \end{cases} \quad (4.76)$$

Entonces, por (4.60), (4.64)–(4.66), (4.69), (4.75) y (4.76),

$$h_j(k) = \hat{d}_j + \begin{cases} o(|k|^{1+\sigma}), & 0 \leq \sigma < 1, \\ O(|k|^2), & \sigma = 1, \end{cases} \quad (4.77)$$

donde

$$\hat{d}_j = (2j-1)!! \int_0^\infty \hat{X}_{j,2} \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} d\zeta + (2j-3)!! \int_0^\infty \varphi_{j,1}(0, \zeta) \frac{V(\zeta)}{\zeta^{j-1}} d\zeta, \quad (4.78)$$

donde (véase (4.55))

$$\hat{X}_j(r) = \int_0^r Q_j(r, \zeta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi_{j,1}(0, \zeta) d\zeta. \quad (4.79)$$

Pero

$$\hat{X}'_{j,1}(r) = \frac{j}{r} \hat{X}_{j,1}(r) - V(r) \hat{X}_{j,2}(r) - \varphi_{j,2}(0, r). \quad (4.80)$$

Entonces, multiplicando ambos lados de (4.80) por  $r^{-j}$ , e integrando de cero a infinito, y usando (4.57), obtenemos que

$$\begin{aligned} (2j-1)!! \int_0^\infty \hat{X}_{j,2} \frac{V(\zeta)}{\zeta^j} d\zeta &= \frac{1}{c_j} \int_0^\infty (\varphi_j(0, \zeta))^2 d\zeta \\ &\quad - (2j-1)!! \int_0^\infty \frac{1}{\zeta^j} \varphi_{j,2}(0, \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Además,

$$\varphi'_{j,2}(0, r) = \frac{-j}{r} \varphi_{j,2}(0, r) + V(r) \varphi_{j,1}(0, r). \quad (4.82)$$

Multiplicando ambos lados de (4.82) por  $r^{1-j}$  e integrando de cero a infinito obtenemos que

$$(2j-3)!! \int_0^\infty \frac{V(\zeta)}{\zeta^{j-1}} d\zeta = (2j-1)!! \int_0^\infty \frac{1}{\zeta^j} \varphi_{j,2}(0, \zeta) d\zeta. \quad (4.83)$$

Por (4.78), (4.81) y (4.83),

$$\hat{d}_j = \frac{1}{c_j} \int_0^\infty (\varphi_j(0, \zeta))^2 d\zeta \equiv d_j. \quad (4.84)$$



Esto demuestra (4.42) para  $k \in \mathbb{R}$ . Por el Teorema de Phragmén-Lindelöf (véase el Apéndice o pág. 245 de [3]) que se puede extender para  $\text{Im } k \leq 0$ .

#### IV.5. SIMPLIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES EN EL CASO DE $m = 0$

A continuación resumiremos las estimaciones y fórmulas pertinentes para este caso.

El operador de Dirac en este caso viene dado por

$$H_j \varphi_j(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi_j(r) + \begin{pmatrix} V(r) & -\frac{i}{r} \\ -\frac{i}{r} & V(r) \end{pmatrix} \varphi_j(r).$$

Tenemos que para  $\text{Im } k \leq 0$

$$[h_j(k, r), \overline{h_j(k, r)}] = 2ik^{2j},$$

por lo tanto,  $h_j(k, r)$  y  $\overline{h_j(k, r)}$  forman un sistema fundamental de soluciones para Energía  $E = k^2 \neq 0$ , y

$$\varphi_j(k, r) = \frac{-i}{2k^{2j}} (\overline{h_j(k, r)} h_j(k, r) - h_j(k, r) \overline{h_j(k, r)}) \quad \text{para } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

donde

$$h_j(k) = [\varphi_j(k, r), h_j(k, r)].$$

Además

$$S_j(k) = \frac{h_j(k)}{h_j(k)} = e^{2i\delta_j(k)}.$$

Tenemos también que para  $m = 0$ ,

$$h_j(k, r) \in L^2(c, \infty), \quad \text{para } \text{Im } k < 0, \quad \text{o } k = 0.$$

Esto es consecuencia de las estimaciones siguientes. Para  $m = 0$  y

$\text{Im } k < 0$  (2.54) y (2.57) son, respectivamente,

$$|h_j(k, r, +)| \leq C e^{\text{Im } k r} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \\ \times \exp \left( \int_r^\infty \left( 1 + \frac{|k|}{1 + |k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right) \left[ 1 + \frac{|k|r}{1 + |k|r} \right], \\ |h_j(k, r, -)| \leq C e^{\text{Im } k r} \left( \frac{1 + |k|r}{r} \right)^j \\ \times \exp \left( \int_r^\infty \left( 1 + \frac{|k|\zeta}{1 + |k|\zeta} \right) |V(\zeta)| d\zeta \right).$$

También para  $m = 0$  y  $k = E = 0$

$$|h_j(k, r, \pm)| \leq C \left( \frac{1}{r} \right)^j \exp \left[ C \int_r^\infty |V(\zeta)| d\zeta \right].$$

#### IV.6. LOS CEROS DE LA FUNCIÓN DE JOST Y LOS AUTOVALORES DE $H_j$

Sabemos por [36] que en el caso  $m = 0$ , el único autovalor posible para  $H_j$  es  $E = 0$ , ahora notemos que por (2.54) y (2.57) para  $m = 0$  e  $\text{Im } k < 0$  y  $k = 0$ ,  $h_j(k, r)$  es una función de cuadrado integrable en una vecindad de  $r = \infty$ . Así mismo, por (2.14) la solución Regular  $\varphi_j(k, r)$  también es de cuadrado integrable en una vecindad de  $r = 0$ .

A continuación mostraremos que si  $k$  es un cero de la función de Jost  $h_j(k)$  entonces ese  $k$  es un autovalor de  $H_j$ . En realidad por el párrafo anterior se mostrará que  $k = 0 = E$ . Supongamos que  $h_j(k) = 0$ , para alguna  $k$  con  $\text{Im } k < 0$ , o  $k = 0$ . Esto significa que  $h_j(k, r)$  y  $\varphi_j(k, r)$  son linealmente dependientes, i.e. tanto  $h_j(k, r)$  como  $\varphi_j(k, r)$  son de cuadrado integrables en  $(0, \infty)$ . Así son autofunciones del Operador  $H_j$  correspondientes al autovalor  $E = k$ , pero debido a la autoajustes de  $H_j$  dichos autovalores deben ser reales, pero por [36]  $E = 0 = k$ . Por lo tanto el único cero posible de  $h_j(k)$  es  $k = 0$ . Notemos que para  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $h_j(k) \neq 0$  ya que de lo contrario: si  $h_j(k) = 0$  por (4.1),  $\varphi_j(k, r) = 0$  lo cual es imposible por (2.14).

Inversamente, supongamos que  $E = k = 0$  es autovalor de  $H_j$ . Como

$H_j$  está en el caso "punto límite" en  $r = 0$ , sabemos que existe al menos una  $\psi \notin L^2(0, c)$  tal que  $H_j \psi = 0$ . Como la solución regular  $\varphi_j \in L^2(0, c)$  y  $H_j \varphi_j = 0$ ,  $\varphi_j$  es la única solución (módulo multiplicación por una constante) que pertenece a  $L^2(0, c)$ ; ya que de lo contrario, si existiese otra  $\rho \in L^2(0, c)$  linealmente independiente,  $\{\varphi_j, \rho\}$  formarían un sistema fundamental, y por lo tanto existirían  $a, b \in \mathbb{C}$  tales que  $\psi = a\varphi_j + b\rho \in L^2(0, c)$ , lo cual es imposible. Ahora, también sabemos que  $H_j$  está en el caso "punto límite" en  $r = \infty$ . Luego entonces existe  $\psi \notin L^2(c, \infty)$  con  $H_j \psi = 0$ . Similarmente concluimos que la solución de Jost es la única (módulo multiplicación por constantes) tal que  $h_j(0, r) \in L^2(c, \infty)$ . Ahora consideremos  $\psi \in L^2(0, \infty)$  tal que  $H_j \psi = 0$ . Como en particular  $\psi \in L^2(c, \infty)$ ,  $\psi = bh_j(0, r)$ , pero también  $\psi \in L^2(0, c)$ , por lo tanto  $\psi = a\varphi_j$ . Así  $h_j(0, r)$  y  $\varphi_j$  son múltiplos escalares de la autofunción  $\psi$ , y por ello

$$h_j(0) = \{\varphi_j(0, r), h_j(0, r)\} = 0.$$

Resumiendo hemos demostrado que el único cero posible de  $h_j(k)$  es  $k = 0$ , y que  $h_j(0) = 0$  si y sólo si  $E = 0$  es un autovalor de  $H_j$ . Para finalizar esta Sección observemos que el hecho de que  $H_j$  no puede tener autovalores distintos de cero ([36]) es una consecuencia de los resultados ya demostrados. A saber, si  $E = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un autovalor de  $H_j$ ,  $\varphi_j(k, r)$  es una autofunción del correspondiente  $E = k$ , y así  $\varphi_j(k, r) \in L^2(0, \infty)$ , lo cual es imposible, por el comportamiento oscilatorio de  $\varphi_j(k, r)$  cuando  $r \rightarrow \infty$  mostrado en la Primera Sección. Hemos probado que para el caso  $m = 0$  el único autovalor posible es  $E = 0$ .

#### IV.7. UNA DEFINICIÓN APROPIADA DE LA FASE $\delta_j$ Y EL TEOREMA DE LEVINSON

Para motivar la definición de la fase, observemos que podemos definir una rama de logaritmo de  $h_j(k)$  de la siguiente manera (véase [3])

$$\text{para } \text{Im } k < 0 \quad \log h_j(k) = \int_{k_0}^k \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta + \log h_j(k_0),$$

donde hemos usado el hecho de que  $h_j(k)$  es analítica en  $\text{Im } k < 0$  y

$h_j(k) \neq 0$ . Consideremos  $k_0$  con  $\text{Im } k_0 < 0$ , y  $\log h_j(k_0)$  es cualquiera de los posibles logaritmos en  $k = k_0$ . Esto sugiere que definamos

$$\begin{aligned}\delta_j(k) &\equiv \text{Im} \int_{k_0}^k \frac{h'_j(\zeta)}{h_j(\zeta)} d\zeta + \text{Im} \log h_j(k_0) \\ &\equiv \text{Im} \int_{k_0}^k \frac{h'_j(\zeta)}{h_j(\zeta)} d\zeta + \delta_j(k_0),\end{aligned}$$

donde  $\delta_j(k_0)$  es una fase cualesquiera de  $h_j(k_0)$ . Por el Teorema III.2

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} h_j(k) = e^{-i \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta}$$

Entonces para algún  $q \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \text{Im} \log h_j(k) = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \delta_j(k) = - \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta + 2\pi q.$$

Si  $q \neq 0$  restamos  $2\pi q$  a  $\delta_j(k_0)$  de tal manera que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \delta_j(k) = - \int_0^\infty V(\zeta) d\zeta.$$

Sin embargo, observemos que sólo hemos supuesto que  $V(r) \in L^1$ , y no tenemos ningún control sobre  $h'(k)$  en  $\text{Im } k = 0$ .

A continuación mostraremos que es posible extender continuamente la  $\delta_j(k)$  hasta la frontera:

$\text{Im } k = 0$  si  $h_j(0) \neq 0$  y a  $\text{Im } k = 0, k \neq 0$ , si  $h_j(0) = 0$ .

Sea  $k$  satisfaciendo las condiciones anteriores. Consideremos una pequeña semivecindad de  $k$  de radio pequeño  $\epsilon > 0$ . Como  $h_j(k)$  es continua en cada punto  $k'$  interior y de la frontera ( $\text{Im } k' = 0$ ) de tal semivecindad se le puede construir una fase  $\hat{\delta}(k')$  continua, que se obtiene simplemente midiendo el ángulo correspondiente, si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña. Ahora si tomamos un  $k''$  cualesquiera en la semivecindad tal que  $\text{Im } k'' \neq 0$ ,

$$\hat{\delta}(k'') - \delta_j(k'') = 2\pi q \quad \text{con } q \in \mathbb{Z}.$$

Tanto  $\widehat{\delta}(k'')$ , como  $\delta_j(k'')$ , son continuas, la diferencia resulta ser una función continua en tales  $k''$ , la cual toma valores en el conjunto discreto  $\{2\pi q; q \in \mathbb{Z}\}$ , por consiguiente, existe  $q_0 \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\widehat{\delta}(k) - \delta_j(k) = 2\pi q_0,$$

para toda  $k$  en la semivecindad con  $\text{Im } k \neq 0$ . Así definamos la extensión:

$$\delta_j(k) \equiv \widehat{\delta}(k) + 2\pi q_0,$$

para toda  $k$  en la semivecindad incluyendo  $\text{Im } k = 0$ .

Ahora consideremos otra  $\widehat{k}$  cumpliendo las condiciones iniciales, suficientemente cercana a  $k$ , y consideremos una pequeña semivecindad de tal  $\widehat{k}$ , de tal manera que la intersección de ambas sea no vacía. Construyamos de manera análoga la fase local  $\widetilde{\delta}_j$  para la semivecindad de  $\widehat{k}$ . Sea

$$\widetilde{\delta}_j(k) \equiv \widehat{\delta}_j(k) + 2\pi q'_0 \quad \text{con } q'_0 \in \mathbb{Z},$$

la extensión continua propuesta. Ahora

$$\delta_j(k) = \widetilde{\delta}_j(k) \quad \text{para toda } k \text{ en la intersección e } \text{Im } k \neq 0,$$

y entonces por continuidad

$$\delta_j(k) = \widetilde{\delta}_j(k) \quad \text{para toda } k \text{ en la intersección, incluyendo } \text{Im } k = 0.$$

De esta manera hemos construido una única extensión continua  $\delta_j(k)$  hasta la frontera:

$$\text{Im } k = 0 \quad \text{si } h_j(0) \neq 0 \quad \text{y a } \text{Im } k = 0, k \neq 0, \quad \text{si } h_j(0) = 0.$$

En el caso  $h_j(0) = 0$ , por (4.42),

$$h_j(k) = kd_j(1 + o(1)) \quad \text{con } d_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.85)$$

Distingamos dos casos:

$$d_j > 0 \quad \text{y} \quad d_j < 0.$$

Supongamos que  $d_j > 0$ . Notemos que para  $k = \rho$ ,  $0 < \rho < \epsilon$

$$\delta_j(k) = 2\pi q + o(1). \quad (4.86)$$

Tomemos ahora  $k = \rho e^{i\phi}$  con  $-\pi \leq \phi \leq 0$ . Por (4.85) y (4.86), como la fase es continua para  $k \neq 0$

$$\delta_j(k) = 2\pi q + \phi + o(1).$$

En particular, esto implica que existen los límites unilaterales cuando  $k \rightarrow 0$ , para valores reales positivos y negativos, i.e.

$$\lim_{k \downarrow 0} \delta_j(k) = \delta_j(0+) = 2\pi q, \quad \text{y} \quad \lim_{k \uparrow 0} \delta_j(k) = \delta_j(0-) = 2\pi q - \pi.$$

Particularmente

$$\delta_j(0+) - \delta_j(0-) = \pi.$$

En el caso  $d_j < 0$ , tenemos que para  $k = \rho$ ,  $0 < \rho < \epsilon$

$$\delta_j(k) = (2q+1)\pi + o(1) \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Si  $k = \rho e^{i\phi}$  con  $-\pi \leq \phi \leq 0$

$$\delta_j(k) = (2q+1)\pi + \phi + o(1).$$

Por lo tanto

$$\exists \lim_{k \downarrow 0} \delta_j(k) = \delta_j(0+) = (2q+1)\pi$$

y

$$\exists \lim_{k \uparrow 0} \delta_j(k) = \delta_j(0-) = (2q+1)\pi - \pi.$$

Por consiguiente

$$\delta_j(0+) - \delta_j(0-) = \pi.$$

De esta manera hemos encontrado que si

$$h_j(0) = 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\pi} [\delta_j(0+) - \delta_j(0-)] = 1 \equiv N_j,$$

y si

$$h_j(0) \neq 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\pi} [\delta_j(0+) - \delta_j(0-)] = 0 \equiv N_j,$$

donde  $N_j$  es el número de autovalores de  $H_j$ .

Así hemos establecido el Teorema de Levinson correspondiente

**Teorema IV.1.** *Supóngase que  $V(r) \in L^1$ . Entonces*

$$N_j = \frac{1}{\pi} [\delta_j(0+) - \delta_j(0-)]. \quad (4.87)$$

## APÉNDICE

**Definición A.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$  y sea  $S$  un subconjunto de  $V$ . El subespacio vectorial generado por  $S$ , que denotaremos por  $\langle S \rangle$  es el mínimo subespacio vectorial que contiene a  $S$ . También lo podemos caracterizar como la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a  $S$ .

**Definición A.2.** Supóngase que  $H_1$  y  $H_2$  son espacios de Hilbert. Definamos,

$$H_1 \times H_2 \equiv \{(x, y) : x \in H_1, y \in H_2\}, \quad (A.1)$$

y definamos el siguiente producto escalar,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \equiv \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}. \quad (A.2)$$

Dicho producto escalar define un espacio de Hilbert llamado la suma directa de  $H_1$  y  $H_2$  y es denotado por  $H_1 \oplus H_2$ .

**Definición A.3.** El producto tensorial de dos espacios de Hilbert. Consideremos  $H_1 \times H_2$ , para cada  $\Phi_1 \in H_1$ ,  $\Phi_2 \in H_2$ , denotemos  $\Phi_1 \otimes \Phi_2$  la forma bilineal conjugada que actúa en  $H_1 \times H_2$  de la siguiente manera,

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2)(\Psi_1, \Psi_2) = \langle \Psi_1, \Phi_1 \rangle \langle \Psi_2, \Phi_2 \rangle. \quad (A.3)$$

Sea  $\mu$  el conjunto de las combinaciones lineales finitas de tales formas bilineales conjugadas; definamos en  $\mu$  el siguiente producto escalar [28]

$$(\Phi \otimes \Psi, \Theta \otimes \Omega) = \langle \Phi, \Theta \rangle \langle \Psi, \Omega \rangle, \quad (A.4)$$

y extendámoslo por linealidad a  $\mu$ .  $(\cdot, \cdot)$  está bien definido y positivo definido, véase [28]. Definamos el producto tensorial de  $H_1$  y  $H_2$ , como la completéz de  $\mu$  bajo el producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  definido en (A.2).

En las siguientes definiciones  $H$  denotará un espacio de Hilbert complejo separable y  $T$  un operador lineal no acotado definido en  $D(T) \subset H$ , algún subespacio lineal de  $H$ . véase capítulo VIII de [28].



**Definición A.4.** La Gráfica de  $T$  se define como

$$\Gamma(T) \equiv \{(\Phi, \Psi) \in D(T) \times H : \Psi = T\Phi\}. \quad (A.5)$$

**Definición A.5.** Un operador  $T$  es definido densamente sobre  $H$ , si  $D(T)$  es un conjunto denso en  $H$ , i.e., si

$$\overline{D(T)} = H, \quad (A.6)$$

donde  $\overline{\phantom{x}}$  denota la cerradura de  $D(T)$  sobre  $H$ , donde la cerradura se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $D(T)$ , i.e. es el mínimo subconjunto cerrado que contiene a  $D(T)$ .

**Definición A.6.** Sean  $T_1$  y  $T$  dos operadores sobre  $H$ . Se dice que  $T_1$  es una extensión de  $T$  y escribiremos

$$T_1 \supset T, \quad (A.7)$$

si  $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$ . Equivalentemente,  $T_1 \supset T$  si y sólo si  $D(T) \subset D(T_1)$  y  $T\varphi = T_1\varphi \forall \varphi \in D(T)$

**Definición A.7.** Un operador  $T$  es cerrado si su gráfica es un subconjunto cerrado de  $H \times H$

**Definición A.8.** Un operador  $T$  es cerrable si tiene una extensión cerrada. Cada operador cerrable tiene una mínima extensión cerrada, llamada la cerradura, la cual denotaremos por  $\overline{T}$ .

**Definición A.9.** El Adjunto  $T^*$  de  $T$  se define como sigue:

Sea  $T$  un operador definido densamente sobre  $H$ . Llamamos operador adjunto de  $T$ ,  $T^*$ , al operador que tiene como dominio de definición

$$D(T^*) = \{\Psi : \exists \Lambda \in H \text{ con } (T\Phi, \Psi) = (\Phi, \Lambda) \quad \forall \Phi \in D(T)\}, \quad (A.8)$$

y está definido como:

$$T^*\Psi \equiv \Lambda. \quad (A.9)$$

**Definición A.10.** Un operador densamente definido,  $T$ , en  $H$ , es llamado *simétrico* o *hermítico* si

$$T \subset T^*, \quad (\text{A.10})$$

i.e. si  $D(T^*) \supset D(T)$  y  $T\Phi = T^*\Phi \quad \forall \Phi \in D(T)$ . Equivalentemente,  $T$  es *simétrico* si y solo si  $(T\Phi, \Psi) = (\Phi, T\Psi) \quad \forall \Phi, \Psi \in D(T)$

**Observación 1.**  $T$  es llamado *autoadjunto* si  $T = T^*$ , i.e. si y solo si  $T$  es un operador simétrico y  $D(T) = D(T^*)$ . Un operador simétrico es siempre cerrable, ya que  $T^*$  es una extensión cerrada de  $T$ . Si  $T^{**}$  es la mínima extensión cerrada de  $T$ . Tenemos las siguientes propiedades.

Para los operadores simétricos

$$T \subset T^{**} \subset T^*. \quad (\text{A.11})$$

Para los simétricos cerrados

$$T = T^{**} \subset T^*. \quad (\text{A.12})$$

Y para los autoadjuntos

$$T = T^{**} = T^*. \quad (\text{A.13})$$

**Definición A.11.** Un operador  $T$  es esencialmente autoadjunto si su cerradura  $\bar{T}$  es un operador autoadjunto. Utilizaremos una equivalencia de la definición anterior, y diremos que  $T$  es esencialmente autoadjunto, si existe una única extensión autoadjunta de  $T$ .

**Definición A.12.**

$$B(H) \equiv \{T: H \rightarrow H: T \text{ es acotado}\}. \quad (\text{A.14})$$

**Definición A.13.** Sea  $T$  un operador cerrado sobre  $H$ ,

$$\rho(T) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I): D(T) \rightarrow H \text{ es inyectiva y } (T - \lambda I)^{-1} \in B(H)\}. \quad (\text{A.15})$$

A  $\rho(T)$  se le denomina el conjunto resolvente.

**Definición A.14.** Si  $\lambda \in \rho(T)$ ,

$$R_\lambda(T) \equiv (T - \lambda I)^{-1} \quad (A.16)$$

$R_\lambda(T)$  es llamada la resolvente de  $T$  en  $\lambda$ .

**Definición A.15.** El Espectro de  $T$ , se define como,

$$\sigma(T) \equiv \mathbb{C} - \rho(T). \quad (A.17)$$

**Definición A.16.** Sean  $f$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que  $f = o(g)$  cuando  $x \rightarrow 0$  o  $x \rightarrow \infty$  si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{respectivamente.} \quad (A.18)$$

**Definición A.17.** Sean  $f$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que  $f = O(g)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow 0$  si

$$|f(x)| \leq M g(x) \quad \text{para} \quad x \geq x_0 \quad \text{o} \quad x \leq x_0, \quad (A.19)$$

respectivamente con  $M$  constante.

**Observación 2.** Sea  $\tau$  la siguiente expresión diferencial formal,

$$\begin{aligned} \tau u(x) = & \tau(x)^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j (p_j(x) u^{(j)}(x))^{(j)} \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \left[ (q_j(x) u^{(j)}(x))^{(j+1)} - (q_j(x) u^{(j+1)}(x))^{(j)} \right] \right\} \quad (A.20) \end{aligned}$$

donde  $(j)$  es la  $j$ -ésima derivada.  $u$  es una función valuada en  $\mathbb{C}^m$  definida sobre  $(a, b)$ , con  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ .  $[a]$  es la parte entera de  $a$ , por ello el natural  $n$  es el orden de la expresión diferencial  $\tau$ . Los coeficientes  $\tau, p_j, q_j$  son funciones matriciales de orden  $m \times m$  valuadas

en  $\mathbb{C}$ ,  $r(x)$  es definida positiva y  $p_j(x)$  es hermitica. Consideremos algunos ejemplos.

a) Para  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $q_0 = 0$ . Obtenemos la conocida expresión diferencial de Sturm-Liouville,

$$\tau u(x) = \frac{1}{r(x)} \left\{ -(p_1(x)u'(x))' + p_0(x)u(x) \right\}. \quad (A.21)$$

b) Nuestra expresión: La ecuación de Dirac independiente del tiempo con un Potencial simétricamente esférico,

$$\tau \varphi_j(r) = 2q_0 \varphi_j' + p_0 \varphi_j = p_0 \varphi_j + (q_0 \varphi_j)' - q_0^* \varphi_j' = E \varphi_j, \quad (A.22)$$

con las matrices,

$$q_0(r) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad p_0(r) = \begin{pmatrix} m + V(r) & -\frac{i}{r} \\ -\frac{i}{r} & -m + V(r) \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (A.23)$$

**Definición A.18.** Sea  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^m$  decimos que  $f$  pertenece por la derecha a  $L^2(a, b)$  si dado  $c \in (a, b)$  entonces  $f \in L^2(c, b)$ .

**Definición A.19.** Decimos que  $\tau$  está en el caso punto límite en  $b$  (l.p.c.), si para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  existe al menos una solución de  $(\tau - \lambda)u = 0$ , que no pertenece por la derecha a  $L^2(a, b)$ .

**Observación 3.** Para una mayor discusión de la definición A.19 véase [36]. Sección 1, páginas 7, 12, 13, 14, 15. Sección 4, página 54. Sección 5, página 83 y Sección 17-H, páginas 293 y 294. Así como los Teoremas 10.4, 10.8, 16.3, 16.5 y 16.7, los cuales permitirán concluir los resultados acerca del espectro de nuestro operador.

La desigualdad de Gronwall [23], página 204.

**Teorema A.1.** Sea  $X$  un espacio de Banach, y supóngase que  $p: [a, b] \rightarrow X$  es continua y que existen funciones continuas  $\mu: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  y  $\nu: [a, b] \rightarrow X$  tales que

$$p(t) \leq \nu(t) + \int_a^t \mu(s)p(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Entonces

$$p(t) \leq \nu(t) + \int_a^t \exp\left(\int_s^t \mu(r) dr\right) \mu(s)\nu(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

En particular, si  $\nu(t) = \nu_0 \forall t \in [a, b]$  entonces

$$p(t) \leq \nu_0 \exp\left(\int_a^t \mu(r) dr\right) \quad \forall t \in [a, b].$$

**Definición A.20.** Una superficie de Riemann es una variedad analítica compleja conexa de  $\dim_{\mathbb{C}} = 1$ , esto es una variedad conexa  $M$  de  $\dim_{\mathbb{R}} = 2$  con un conjunto maximal de cartas  $\{U_{\alpha}, z_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  sobre  $M$  (i.e.,  $\{U_{\alpha}, z_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  constituyen una cubierta abierta de  $M$  y  $z_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ ) tales que las funciones transición

$$f_{\alpha\beta} = z_{\alpha} \circ z_{\beta}^{-1}: z_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow z_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

son holomorfas si  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ .

En Teorema de Phragmén -Lindelöf [3], páginas 242-248.

**Teorema A.2.** Si  $f$  es analítica para  $|\arg z| < \alpha$ , donde  $\alpha < \pi$ , y continua en el ángulo cerrado; si  $|f(z)| \leq M$  sobre los lados del ángulo; y si  $|f(z)| \leq A \exp(B|z|^{\mu})$ , donde  $0 < \mu < \pi/2\alpha$  y  $A, B$  constantes positivas; entonces  $|f(z)| \leq M$  en el interior del ángulo.

De hecho, la consecuencia del Teorema que nos interesa es la siguiente.

**Teorema A.3.** Sea  $f$  analítica y acotada en el ángulo cerrado entre los rayos  $\arg z = \alpha$  y  $\arg z = \beta$ ,  $|\alpha - \beta| < 2\pi$ , y supóngase que  $f(z) \rightarrow L$  cuando  $r \rightarrow \infty$  a lo largo de ambos rayos. Entonces  $f(z) \rightarrow L$  uniformemente en el ángulo cuando  $|z| \rightarrow \infty$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. C. Barthélémy, *Ann. Inst. H. Poincaré A* VII 2, 115 (1967).
- [2] H. Blancarte, B. Grebert and R. Weder, *J. Math. Phys.* 36, 3, 991-1015 (1995).
- [3] R. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis* (The Random House, Birkhäuser Mathematics Series, New York, 1987).
- [4] D. S. Carter, Ph. D. thesis, Princeton University, 1952.
- [5] O. D. Corbella, *J. Math. Phys.* 11, 5, 1695 (1960).
- [6] Chadan and P. C. Sabatier, *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [7] P. A. M. Dirac, *Proc. Royal Society of London*. A117, 610 (1928).
- [8] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed. (Oxford University, New York, 1958).
- [9] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. II.
- [10] A. Erdélyi, *Q. J. Math. Oxford* 14, 147 (1963).
- [11] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics 71. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin. 1980.
- [12] B. Grebert, *Inverse Prob.* 8, 787 (1992).
- [13] D. B. Hinton, M. Klaus, and J. K. Shaw, *Proc. R. Soc. Edinburg Ser. A* 100, 173 (1988).

- [14] D. B. Hinton, A. K. Jordan, M. Klaus, and J. K. Shaw, *J. Math. Phys.* **32**, 3015 (1991).
- [15] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1976).
- [16] M. Klaus, *J. Math. Phys.* **29**, 148 (1988).
- [17] M. Klaus, *J. Math. Phys.* **31**, 182 (1990).
- [18] S. T. Kuroda, *An Introduction to Scattering Theory. Lectures Notes Series No 51*, December 1980. Spring Semester 1976.
- [19] N. Levinson, *Det. Kgl. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **25**, 9 (1949).
- [20] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac Operators* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1991).
- [21] Z. Q. Ma and G. J. Ni, *Phys. Rev. D* **31**, 1482 (1985).
- [22] Z. Q. Ma, *Phys. Rev. D* **32**, 2213 (1985).
- [23] R. H. Martin, Jr., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces* (Wiley, New York, 1976).
- [24] R. Newton, *J. Math. Phys.* **1**, 319 (1960).
- [25] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
- [26] R. G. Newton, *J. Math. Phys.* **27**, 2720 (1986).
- [27] G. Parzen, *Phys. Rev.* **80**, 261 (1950).
- [28] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*, Academic Press, New York, San Francisco, London 1972, 2nd ed. 1980.
- [29] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, San Francisco, London 1978.

- [30] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III, Scattering Theory*, Academy Press, New York, San Francisco, London 1979.
- [31] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV, Analysis of Operators*, Academy Press, New York, San Francisco. London 1978.
- [32] F. Rellich, *Eigenvertheorie Partieller Differentialgleichungen*, Vorlesung gehalten im Winter Semester 1952/53 an der Universität Göttinger, Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1953.
- [33] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd ed. ( McGraw-Hill, New York, 1968).
- [34] B. Thaller, *The Dirac Equation* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [35] E. C. Titchmarsh, *Q. J. Math. Oxford* 12, 227 (1961).
- [36] J. Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, *Lectures Notes in Mathematics* (Springer-Verlag, Berlin, 1987), Vol. 1258.
- [37] H. Weiss, W. Stahel, and G. Scharf, *Nucl. Phys. A* 183, 337 (1972).